



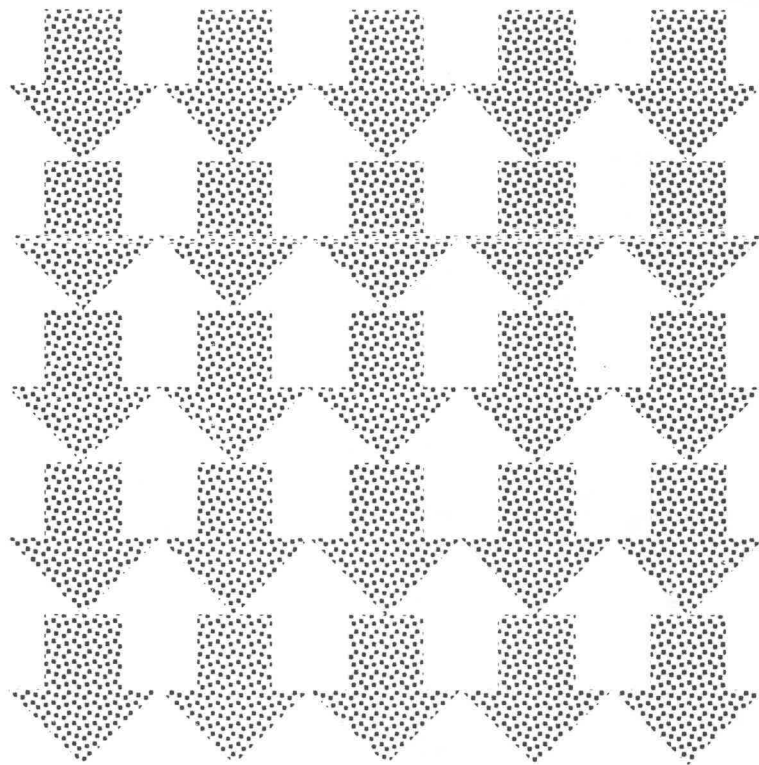
I.R.E.M. des Pays de la Loire

**A CONSULTER
SUR PLACE**

GEOMETRIE ELEMENTAIRE

Première partie

Géométrie vectorielle



B. Jaupoult & A. Vogel

Géométrie vectorielle

Sommaire

Chapitre I : Introduction au calcul vectoriel.

§ 0 Les notions de base	p. 5
§ 1 La translation	p. 10
§ 2 L'homothétie	p. 13
§ 3 Les vecteurs	p. 16
§ 4 L'affinité plane	p. 21
§ 5 Les repères du plan	p. 23
§ 6 Le produit scalaire	p. 27
§ 7 Premières applications du produit scalaire	p. 29

Chapitre II : Le barycentre.

§ 8 La définition du barycentre	p. 33
§ 9 Propriétés du barycentre	p. 34
§ 10 Les barycentres de deux points	p. 37
§ 11 Les barycentres de trois points	p. 40
§ 12 Les théorèmes de Céva et de Ménélaüs	p. 42
§ 13 Détermination de coefficients barycentriques dans le plan	p. 46
§ 14 La formule de Leibniz	p. 49

Chapitre III : Equations de droites et équations de plans.

§ 15 La présentation paramétrique des droites et des plans	p. 51
§ 16 La droite dans le plan	p. 55
§ 17 Systèmes linéaires - méthode d'élimination de Gauss	p. 58
§ 18 Le plan dans l'espace	p. 62

Chapitre III : Géométrie orientée.

§ 19 Aire et volume algébriques-déterminants d'ordre 2 et 3	p. 65
§ 20 Produit mixte et produit vectoriel	p. 71

Chapitre IV : Introduction à la Géométrie de \mathbb{R}^n .

§ 21 L'espace \mathbb{R}^n	p. 75
§ 22 L'espace euclidien \mathbb{R}^n	p. 78

Exercices :

Chapitre I	p. 81
Chapitre II	p. 84
Chapitre III	p. 86
Chapitre IV	p. 88
Chapitre V	p. 90

Avant-propos

Avec ce fascicule consacré au calcul vectoriel, expression prise ici dans un sens relativement large, nous ne visons pas l'efficacité immédiate. En effet, l'essentiel des résultats exposés sont déjà familiers au lecteur. Cependant, sur ces questions, il apparaît trop souvent, qu'il n'est pas toujours facile de faire la part de ce qui est donné et de ce qui est acquis, ou encore de ce qui est géométrie et de ce qui est algèbre. C'est pourquoi, il nous a semblé utile d'inviter le lecteur à un travail de synthèse sur un sujet qu'il a abordé à des niveaux divers et avec des points de vue différents.

Qu'il soit bien clair que ce qui suit n'est pas destiné à faire autorité. Nous entendons simplement proposer une démarche possible. Elle se veut cohérente et pour être **complète**, elle fait volontairement abstraction des contraintes pédagogiques. Elle n'a pas vocation à remplacer ce qui existe. Elle est plutôt conçue comme devant donner l'occasion d'un exercice d'hygiène intellectuelle. Le sujet est rebattu, certes, il tend cependant des pièges redoutables à ceux qui en sous-estiment les difficultés - il suffit, pour s'en rendre compte, d'assister à quelques leçons de l'oral du CAPES.

Ajoutons au sujet de la terminologie et des notations que chacun pourra préférer s'exprimer en termes de :

"bipoint" plutôt que de "couple de points",

encore que ce terme, après vingt ans de carrière, commence à s'user.

"système de points pondérés $(A, a), (B, b), \dots$ " plutôt que "des points A, B, \dots affectés des coefficients a, b, \dots ",

"isobarycentre" plutôt que "centre de gravité",

...

désigner

un segment de droite, par $[A, B]$ plutôt que par AB ,

une distance par $d(A, B)$ ou même $\|\overrightarrow{AB}\|$ plutôt que par AB ,

...

Il y a là essentiellement une affaire de goût et surtout de mode. L'important est de s'exprimer clairement et sans ambiguïté.

Chapitre I : introduction au calcul vectoriel.

Dans ce qui suit, on s'appuie sur des connaissances élémentaires essentiellement :

- les propriétés caractéristiques du parallélogramme,
- le théorème de Thalès.

Ceci sans se préoccuper du statut qui leur a été donné au départ. La structure vectorielle attachée à l'espace géométrique usuel apparaîtra comme une traduction algébrique de propriétés élémentaires des translations et des homothéties. Nous élaborons un outil. Il permettra de traiter des problèmes de géométrie par du calcul algébrique et non plus seulement au moyen de phrases.

§0 Les notions de base.

On désigne par E l'espace usuel.

On suppose connues les propriétés élémentaires des symétries orthogonales par rapport à une droite et des symétries par rapport à un point. Il convient cependant de rappeler brièvement l'énoncé des définitions fondamentales et des propriétés qui joueront un rôle clef dans ce qui suit.

* Le parallélogramme.

Définition : Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés sont deux à deux parallèles.

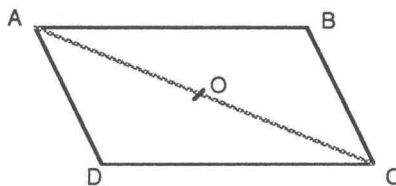
(0-1) Proposition : pour un quadrilatère, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) c'est un parallélogramme,
- (2) ses diagonales se coupent en leur milieu.

Si, de plus, le quadrilatère est convexe, (1) et (2) sont équivalentes à :

- (3) il a deux côtés parallèles et de même longueur,
- (4) les côtés opposés sont égaux deux à deux.

Démonstration : on considère un parallélogramme $ABCD$ et l'on désigne par O le milieu de la diagonale AC .



La symétrie de centre O transforme A en C et la droite (AB) en la droite parallèle qui passe par C , c'est-à-dire la droite (CD) . De même, elle transforme la droite (BC) en la droite (AD) . Le point B , intersection des droites (AB) et (BC) a donc pour image le point D , intersection de (CD) et (AD) . Le point O est donc aussi le milieu de BD .

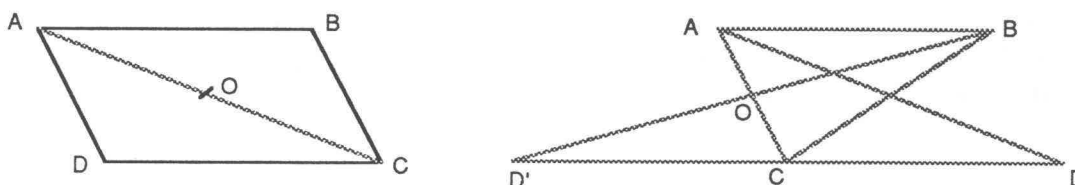
Réciproquement, soit $ABCD$ un quadrilatère. On suppose que les diagonales AC et BD se coupent en leur milieu O . La symétrie de centre O transforme A en C et B en D . La droite (AB) a donc pour image la droite (CD) . Ces deux droites sont donc parallèles. De même, les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Les deux premières assertions sont donc équivalentes.

Du fait de l'invariance du parallélogramme par la symétrie centrale, il est clair que :

$$(1) \Rightarrow (3) \text{ et } (1) \Rightarrow (4).$$

Réciproquement, soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les côtés AB et CD sont parallèles et de même longueur. Soit O le milieu de AC . La symétrie de centre O transforme A en C . La droite (AB) a donc pour image sa parallèle qui passe par C , c'est-à-dire la droite (CD) .

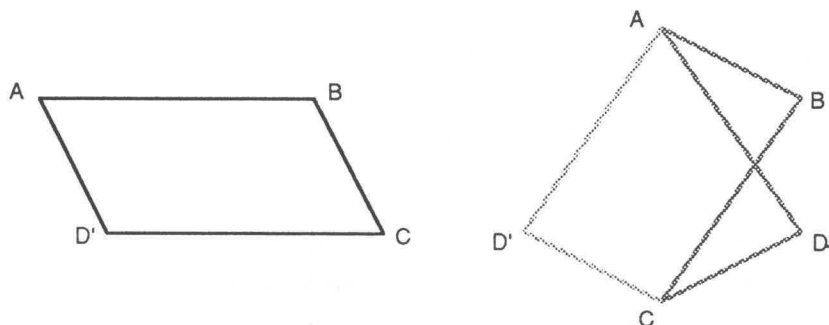


Ainsi, le point B est, suivant le cas, transformé en D ou en son symétrique D' par rapport à C . Les points A et O appartiennent à un même demi-plan limité par (BC) . Le symétrique de B par rapport à O appartient à ce même demi-plan. Seul l'un des deux points D ou D' appartient à celui-ci. Du fait de la convexité, c'est D . Le point O est donc le milieu de BD et $ABCD$ est un parallélogramme.

Soit, maintenant, $ABCD$ un quadrilatère tel que

$$AB = CD \text{ et } AD = BC.$$

Supposons les trois points A, B, C non alignés. La parallèle à (BC) qui passe par A et la parallèle à (AB) qui passe par C se coupent en un point D' .



Le quadrilatère $ABCD'$ est un parallélogramme. On a donc :

$$AD' = BC = AD \text{ et } CD' = AB = CD.$$

Le point D coïncide donc, soit avec D' , soit avec son symétrique D'_1 par rapport à (AC) . Les quatre points A, B, C, D'_1 sont dans un même demi-plan limité par (AC) , ainsi le quadrilatère $ABCD'_1$ n'est pas convexe et par suite D coïncide avec D' .

Remarque : la caractérisation (2) permet de considérer comme un parallélogramme la configuration suivante :



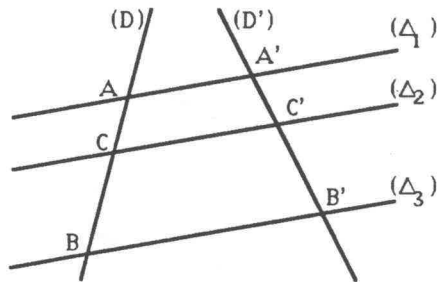
Où les quatre points A, B, C, D sont alignés et les segments AC et BD ont même milieu O .

* Théorème de Thalès et projections.

1) Cas du plan : on rappelle les théorèmes suivants.

(0-2) Théorème de Thalès : si deux droites D et D' coupent trois droites parallèles $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ respectivement en A, B, C et A', B', C', alors on a :

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$



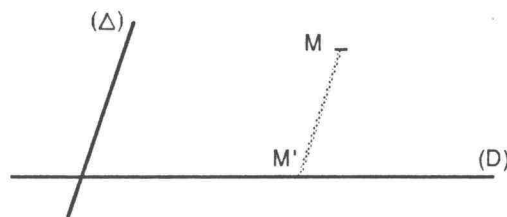
N. B. On a implicitement supposé que Δ_1 et Δ_2 sont distinctes.

(0-3) Réciproque du théorème de Thalès : on considère deux droites D et D', trois points A, B, C de D et trois points A', B', C' de D'. Si les droites (AA') et (BB') sont parallèles et si :

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

alors (CC') est parallèle à (AA') et (BB').

Définition : soit D et Δ deux droites non parallèles du plan ; on appelle projection sur D, parallèlement à Δ , l'application qui, à tout point M du plan, associe le point M', intersection de D avec la parallèle à Δ passant par M.



On peut alors énoncer le théorème de Thalès comme suit.

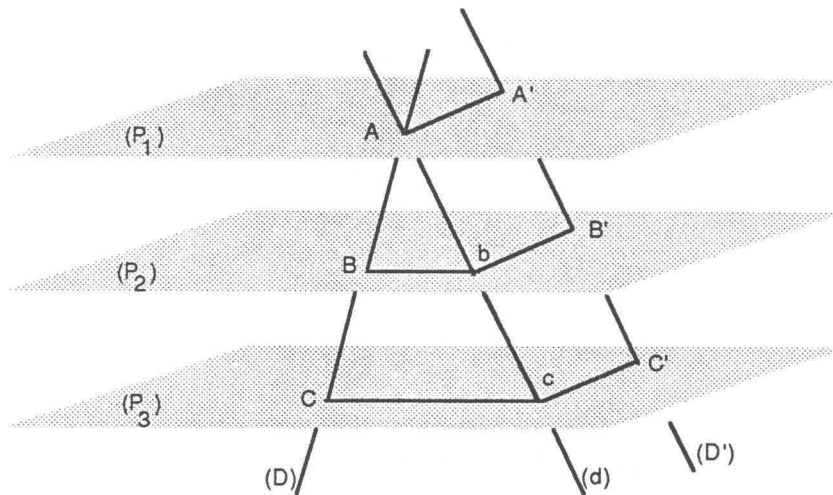
(0-4) Théorème : la projection d'une droite sur une autre, parallèlement à une direction donnée, respecte les rapports de mesures algébriques.

2) Cas de l'espace.

Le théorème (0-2) s'étend immédiatement à l'espace.

(0-5) Théorème : si deux droites D et D' coupent trois plans parallèles P_1, P_2, P_3 en A, B, C et respectivement A', B', C' alors on a :

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$



Démonstration : on considère la parallèle d à D' qui passe par un point arbitraire de D , par exemple A , elle coupe P_2 et P_3 en b et c . Les droites D et d d'une part, d et D' d'autre part, sont coplanaires. On peut donc appliquer le théorème (0-2). •

Définition : soit P un plan et D une droite non parallèle à P ; on appelle projection sur D parallèlement à P l'application qui, à tout point M de l'espace, associe le point M' , intersection de D avec le plan parallèle à P passant par M .

Dans l'espace, le théorème (0-4) devient :

(0-6) Théorème : la projection d'une droite sur une autre parallèlement à un plan respecte les rapports de mesures algébriques.

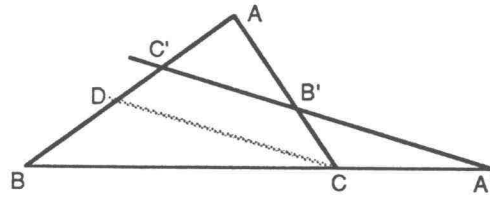
* Application : le théorème de Ménélaüs.

(0-6) Théorème de Ménélaüs : on considère un triangle ABC et trois points A', B' et C' distincts des sommets et situés respectivement sur les droites (BC) , (CA) et (AB) .

Les points A', B' et C' sont alignés si, et seulement si,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Démonstration : si A', B' et C' sont alignés, on peut considérer la projection sur la droite (AB) parallèlement à la droite contenant ces points, soit D l'image de C .



La propriété (0-4) entraîne que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'D}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{C'D}}{\overline{C'A}}$$

Le produit membre à membre de ces deux égalités donne :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

La condition avancée est donc bien nécessaire pour que A', B' et C' soient alignés.

Réciproquement, on suppose que la relation de l'énoncé soit vérifiée, ce qui entraîne que :

$$\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$$

Si (A'B') et (AB) étaient parallèles, la valeur de ce rapport serait 1, c'est exclu. Ainsi, ces droites sont sécantes, soit C'' leur point d'intersection, l'application du théorème direct montre que :

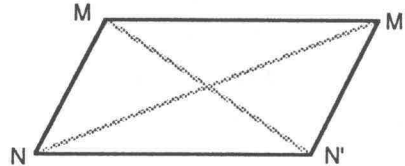
$$\frac{\overline{C''B}}{\overline{C''A}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$$

L'égalité de ces deux rapports nous assure que le point C'' n'est autre que le point C'. La conclusion en découle immédiatement.

§1 La translation.

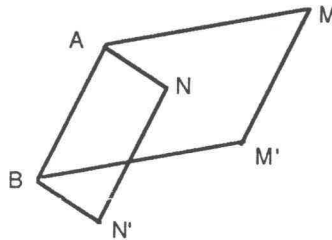
* Définitions et premières propriétés.

Définition : une application de E dans lui-même est une translation, si pour tous points M et N , d'images M' et N' , le quadrilatère $MNN'M'$ est un parallélogramme $MNN'M'$ ou, ce qui est équivalent, telle que MN' et $M'N$ aient le même milieu.



(1-1) Proposition : étant donnés deux points A et B de E il existe toujours une unique translation de E qui transforme A en B .

Démonstration : une telle translation, si elle existe, transforme tout point M de E en M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme. Le point M' est donc bien déterminé par la donnée de A , B et M . Cette translation est donc unique.



Réciproquement, la condition précédente définit une application t de E dans lui-même. Soit M et N deux points de E , M' et N' leur images par t ; les segments MM' et NN' sont parallèles et égaux à AB , de même sens que celui-ci. Le quadrilatère $MNN'M'$ est donc un parallélogramme et t est une translation. •

Remarque : une translation est bien définie par la donnée d'un point arbitraire et de son image.

Convention : la translation qui transforme A en B sera notée $t_{A,B}$.

(1-2) Proposition : pour tous couples (A, B) et (C, D) de E , on a $t_{A,B} = t_{C,D}$ si, et seulement si, le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

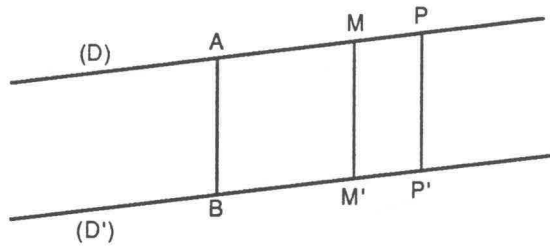
Démonstration : si l'on suppose que : $t_{A,B} = t_{C,D}$, alors $t_{A,B}(C) = D$ et le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme. Réciproquement, si $ABDC$ est un parallélogramme, on a $t_{A,B}(C) = D$ et la proposition précédente montre que $t_{A,B} = t_{C,D}$. •

* Propriétés géométriques.

(1-3) Proposition : une translation transforme toute droite en une droite parallèle.

Démonstration : étant donnée une translation, on considère une droite D quelconque, A un point de D , B son image par la translation et D' la parallèle à D qui passe par B .

Si M' est l'image d'un point M de D , alors $ABM'M$ est un parallélogramme. Ainsi, (BM') est parallèle à (AM) et M' appartient à D' .



Réciproquement, soit P' un point quelconque de D' et P le point tel que $ABP'P$ soit un parallélogramme. P est un point de D dont l'image par $t_{A,B}$ est P' . En conséquence, D' est l'image de D par la translation donnée. •

(1-4) Proposition : soit A et B deux points distincts de E ; les droites de E globalement invariantes par $t_{A,B}$ sont les parallèles à (AB) .

Démonstration : d'après la proposition précédente, une droite D est globalement invariante si, et seulement si, l'image M' d'un point M de D appartient à D , c'est-à-dire si, et seulement si, D est parallèle à (AB) . •

(1-5) Proposition : l'image d'un plan par une translation est un plan parallèle.

Si A et B sont deux points distincts de E , les plans de E globalement invariants par $t_{A,B}$ sont les plans parallèles à (AB) .

Démonstration : calquée sur les démonstrations des propositions (1-3) et (1-4). •

La proposition qui suit est une conséquence immédiate de la définition.

(1-6) Proposition : toute translation conserve les distances.

On en déduit que toute translation

- respecte l'orthogonalité,
- transforme tout cercle en un cercle de même rayon,
- transforme toute sphère en une sphère de même rayon,
- transforme tout triangle en un triangle égal et en respecte les points

remarquables.

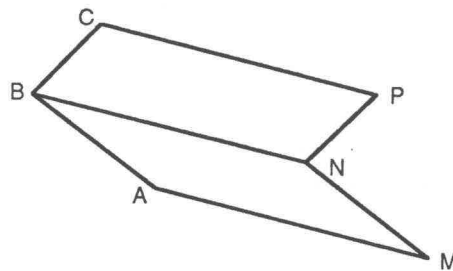
* Composition de translations.

(1-7) Proposition : le composé de deux translations est une translation. De plus, si A, B, C sont trois points de E, on a :

$$t_{B,C} \circ t_{A,B} = t_{A,C}.$$

Rappel : par définition, on note $t_{B,C} \circ t_{A,B}$ l'application qui à tout point M de E associe le point $M' = t_{B,C} [t_{A,B}(M)]$.

Démonstration : soit t et t' deux translations, A un point de E, B l'image de A par t et C l'image de B par t'.



D'après la proposition (1-1), on a :

$$t = t_{A,B} \text{ et } t' = t_{B,C}.$$

Soit M un point quelconque de E, N l'image de M par t et P l'image de N par t' ; le quadrilatère ABNM est un parallélogramme, par définition, ainsi que BCPN. Les segments AM, BN et CP sont donc parallèles, de même longueur et de même sens. Il s'ensuit que ACPM est un parallélogramme et le composée $t' \circ t$ est une translation. De plus, C est l'image de A par $t' \circ t$ et la proposition (1-1) montre que $t' \circ t$ est la translation $t_{A,C}$.

On vérifie aisément les propriétés qui suivent.

- (1-8) 1) Pour tout point A de E, $t_{A,A}$ est l'application identique,
2) Pour points A, B, C de E, on a :

$$t_{A,B} \circ t_{B,C} = t_{B,C} \circ t_{A,B} = t_{A,C}.$$

- 3) pour tous points A et B de E, $t_{A,B} \circ t_{B,A} = t_{B,A} \circ t_{A,B}$ est l'application identique.

Ainsi, la composition des translations est une opération commutative et toute translation est une application bijective.

§2 L'homothétie.

Soit O un point de E et k un nombre réel **non nul**.

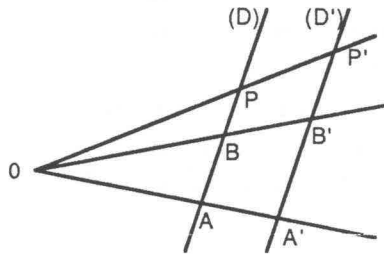
Définition : on appelle homothétie de centre O et de rapport k l'application de E dans lui-même qui transforme tout point M en M' tel que O, M et M' soient alignés et $\overline{OM'} = k \overline{OM}$.

Il résulte immédiatement de cette définition que cette transformation :

- est l'application identique de E si $k = 1$,
- admet O pour unique point invariant si $k \neq 1$,
- est bijective et admet pour application réciproque l'homothétie de même centre et de rapport $1/k$.

(2-1) Proposition : toute homothétie transforme toute droite en une droite parallèle.

Démonstration : on considère une homothétie de centre O et de rapport k . Comme il est clair que toute droite passant par O est globalement invariante, on considère une droite D quelconque qui ne passe pas par O , un point A de D et A' son image par l'homothétie donnée.



Soit D' la parallèle à D passant par A' , B un autre point de D et B' son image ; on a :

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k .$$

D'après la réciproque (0-3) du théorème de Thalès, B' appartient à D' .

Réciproquement, soit P' un point quelconque de D' et P le point de (OP') tel que :

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}} = \frac{1}{k} .$$

Si P' est confondu avec O , alors P l'est aussi. Dans le cas contraire, la réciproque du théorème de Thalès montre que le point P , ainsi défini, appartient à D . Or P' est, par définition, l'image de P par l'homothétie de centre O et de rapport k .

En conséquence l'homothétie considérée transforme D en D' . •

(2-2) Proposition : les droites globalement invariantes une homothétie de rapport différent de 1 sont les droites qui passent par son centre.

(2-3) Proposition : l'image par une homothétie de tout plan est un plan parallèle.

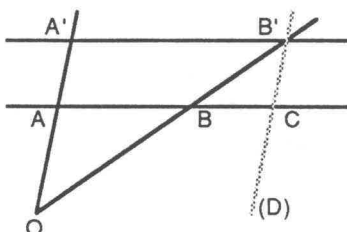
Démonstration : on reprend, point par point, la démonstration de (2-1). •

(2-4) Proposition : les plans globalement invariants par une homothétie de rapport différent de 1 sont les plans contenant son centre.

(2-5) Théorème : pour tous points A et B de E et pour toute homothétie de rapport k qui transforme A en A' et B en B', on a :

$$\overline{A'B'} = k\overline{AB}.$$

Démonstration : si A et B ne sont pas alignés avec O, on considère la droite D parallèle à (OA) qui passe par B'. Elle coupe la droite (AB) en C.



Le théorème de Thalès montre que :

$$k = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Ainsi, d'une part, on a :

$$\overline{AC} = k\overline{AB},$$

d'autre part, la droite (AB) est transformée en (A'B') qui est parallèle à (AB). Le quadrilatère AA'B'C est donc un parallélogramme et l'on a :

$$\overline{A'B'} = \overline{AC} = k\overline{AB}.$$

Si les points O, A et B sont alignés, on a, par définition :

$$\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = k\overline{OB} - k\overline{OA} = k(\overline{OB} - \overline{OA}) = k\overline{AB}.$$

Le théorème est alors acquis. •

(2-6) Corollaire : l'homothétie conserve les rapports de distances.

Démonstration : si une homothétie de rapport k transforme quatre points donnés A, B, C et D en A', B', C' et D', nous savons que :

$$\overline{A'B'} = k\overline{AB} \text{ et } \overline{C'D'} = k\overline{CD}.$$

Il s'ensuit que, dans tous les cas où CD est non nul, on a :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

On en déduit, de façon immédiate que :

- l'homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
- l'image d'un cercle (resp. d'une sphère) de rayon R est un cercle (resp. une sphère) de rayon |k|R.

Dans la pratique, le théorème (2-5) sera souvent utilisé sous l'une des formes qui suivent.

(2-7) Théorème : on considère cinq points A, B, C, B', C' tels que A, B et B' d'une part, A, C et C' d'autre part, soient alignés. Si les droites (BC) et (B'C') sont parallèles, alors on a :

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} .$$

Démonstration : la première égalité découle du théorème de Thalès. Pour démontrer la seconde, on considère l'homothétie de centre A et de rapport :

$$k = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$$

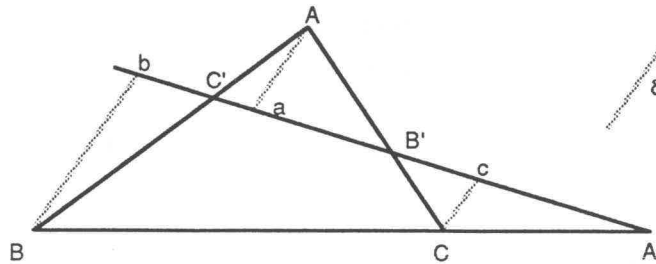
Elle transforme évidemment B en B' et C en C'. Le théorème précédent montre que :

$$\overline{B'C'} = k \overline{BC} .$$

Ce qui achève la démonstration. •

(2-8) Corollaire : le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa mesure est la moitié de la longueur de celui-ci.

* Application : on peut s'appuyer sur ce théorème pour proposer une démonstration très simple du théorème de Ménélaüs. Les données étant celles utilisées en (0-6), on suppose que les points A', B' et C' sont alignés. On considère une projection sur la droite contenant les points A', B' et C', suivant une direction arbitraire δ . On note a, b et c les images des sommets A, B, C.



Le théorème qui précède montre que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{Bb}}{\overline{Cc}} , \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{Cc}}{\overline{Aa}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}} .$$

le produit membre à membre de ces trois égalités donne immédiatement :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 .$$

Pour la réciproque on procède comme en (0-6). •

Enfin le théorème (2-5) admet une réciproque.

(2-9) Théorème : on considère deux droites parallèles D et D', trois points A, B et C de D et trois points A', B' et C' de D'. Si l'on a :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

les droites (AA'), (BB') et (CC') sont **concurrentes ou parallèles**.

Démonstration : l'homothétie ou la translation qui transforme A et B en A' et B', transforme aussi C en C'. •

§3 Les vecteurs.

Une translation est caractérisée par la donnée d'un point et de son image. Un tel couple de points n'est évidemment pas unique, ce qui nous conduit à poser la définition qui suit.

Définition : on appelle vecteur l'ensemble des couples de points définissant une même translation.

Convention : si A et B sont deux points de E, on note \overrightarrow{AB} le vecteur associé à la translation $t_{A,B}$ qui transforme A en B et, pour tout vecteur \vec{v} , on note $t_{\vec{v}}$ la translation correspondante.

* Premières propriétés des vecteurs.

Soit A, B, C, D quatre points de E ; la définition ci-dessus se traduit :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow t_{A,B} = t_{C,D}$$

et les deux assertions qui suivent sont des conséquences immédiates de (1-2) et (1-1).

(3-1) Proposition : soit A, B, C, D quatre points de E ; on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

(3-2) Proposition : soit O un point de E ; pour tout vecteur \vec{v} , il existe un unique point A de E tel que $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$.

Définition : l'application identique est une translation, le vecteur qui lui est associé appelé le vecteur nul, on le note : $\vec{0}$. Dans la pratique, on peut se contenter de le noter 0.

La proposition qui suit est une conséquence immédiate de cette définition.

(3-3) Proposition : pour tous points A et B de E, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B.$$

* L'addition des vecteurs.

1) Définition et premières propriétés.

Définition : soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs ; on appelle somme de \vec{u} et \vec{v} et l'on note $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur associé à la translation $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.

(3-4) Théorème : pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, on a :

$$(1) \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad (\text{commutativité de la somme})$$

$$(2) \quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

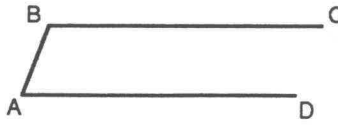
(associativité de la somme)

$$(3) \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad (\vec{0} \text{ est élément neutre pour l'addition})$$

$$(4) \quad \text{Pour tout vecteur } \vec{u}, \text{ il existe un unique vecteur noté } (-\vec{u}) \text{ tel que}$$

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} \quad (-\vec{u} \text{ est l'opposé de } \vec{u})$$

Démonstration : on considère un point A de E, B et D ses images par les translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$; soit C l'image de B par $t_{\vec{v}}$.



On a :

$$t_{A,D} = t_{B,C} = t_{\vec{v}}$$

le quadrilatère ADCB est donc un parallélogramme. On en déduit que :

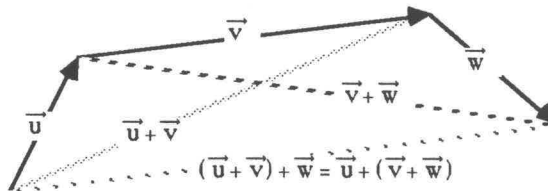
$$t_{A,B} = t_{D,C} = t_{\vec{u}}$$

et C est l'image de A par les translations :

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} \text{ et } t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$$

qui, de ce fait, sont égales.

La deuxième propriété résulte de l'associativité de la composition des applications, elle peut s'illustrer par le schéma suivant :



La troisième assertion est évidente.

Enfin, si \vec{u} est un vecteur quelconque, on considère deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Il est clair que l'unique translation qui, composée avec $t_{\vec{u}}$, laisse A invariant, est la translation $t_{B,A}$. Ce qui prouve la quatrième assertion. •

L'énoncé qui suit est une traduction immédiate de la définition de la somme de deux vecteurs.

(3-5) Théorème : pour tous points A, B, C de E, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

(Relation de Chasles)

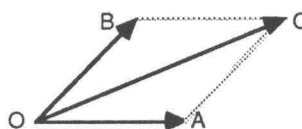
(3-6) Corollaire : pour tous points O, A, B de E, on a :

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{BA}, \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}. \end{aligned}$$

2) Construction de la somme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

La translation $t_{\overrightarrow{OB}}$ transforme le point A en C, quatrième sommet du parallélogramme OACB, de sorte que : $t_{\overrightarrow{OB}} \circ t_{\overrightarrow{OA}} = t_{\overrightarrow{OC}}$. Il découle immédiatement de la définition de la somme de deux vecteurs que :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$



On retrouve ainsi la "règle du parallélogramme". Elle a, en particulier, pour conséquence que si A et B sont deux points donnés de milieu M, pour tout point O, on a :

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

* Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Etant donnés deux points A et B de E et un nombre réel k, on considère le point C, aligné avec A et B et tel que :

$$\overline{AC} = k\overline{AB}.$$

(3-7) Proposition : le vecteur \overline{AC} , ainsi défini, ne dépend que du vecteur \overline{AB} et de k.

Convention : dans ces conditions, il sera légitime de noter :

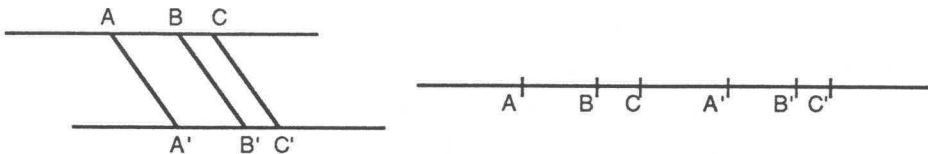
$$\overline{AC} = k\overline{AB}.$$

Démonstration : soit A' et B' deux autres points de E tels que $\overline{A'B'} = \overline{AB}$; on leur associe le point C' défini comme ci-dessus. Si A et B coïncident, on a $\overline{A'B'} = \overline{AB} = \vec{0}$, le point A' se confond alors avec B' ainsi que C' et l'on a $\overline{AC} = \overline{A'C'} = \vec{0}$. On suppose donc que A et B sont distincts. Le quadrilatère ABB'A' est alors un parallélogramme. Les droites (AB) et (A'B') sont donc parallèles. On a donc :

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

et par suite :

$$\overline{AC} = k\overline{AB} = k\overline{A'B'} = \overline{A'C'}.$$



Le quadrilatère ACC'A' est aussi un parallélogramme. On a donc bien

$$\overline{AC} = \overline{A'C'}.$$

(3-8) Théorème : soit O un point de E et k un nombre réel non nul. ; on considère deux points A et B de E, A' et B' leurs images par l'homothétie de centre O de rapport k. Alors on a :

$$\overline{A'B'} = k\overline{AB}.$$

Démonstration : c'est une conséquence immédiate de (2-5) et de (3-7).

(3-9) Théorème : pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} et pour tous nombres a et b, on a :

$$(5) \quad 0\vec{u} = \vec{0} \text{ et } a\vec{0} = \vec{0},$$

$$(6) \quad 1\vec{u} = \vec{u},$$

$$(7) \quad a(b\vec{u}) = (a \cdot b)\vec{u},$$

$$(8) \quad (a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u},$$

$$(9) \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

Démonstration : on considère un vecteur quelconque \vec{u} et deux points A et B tels que $\overline{AB} = \vec{u}$.

(5) Le point C tel que $\overline{AC} = 0\vec{u}$ vérifie :

$$\overline{AC} = 0\overline{AB} = \vec{0}.$$

Il n'est autre que A. On a donc bien :

$$0\vec{u} = \vec{0}.$$

Soit a un nombre réel quelconque, si $\vec{u} = \vec{0}$, A et B coïncident et le point C tel que $\overline{AC} = a\overline{AB}$ est confondu avec A et B. Ce qui fait que $\overline{AC} = \vec{0}$. On a donc bien :

$$a\vec{0} = \vec{0}.$$

(6) Le point C, tel que $\overrightarrow{AC} = 1\vec{u}$, est aligné avec A et B. Il est tel que :
 $\overrightarrow{AC} = 1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.
 Il se confond donc avec B et l'on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$, ce qui donne bien :
 $1\vec{u} = \vec{u}$.

(7) Soit a et b deux nombres réels ; si \vec{u} est nul, ou si $ab = 0$, l'assertion (7) se déduit de (5). On suppose donc que \vec{u} est non nul, ainsi que a et b. On considère les points C et C' tels que :

$$\overrightarrow{AC} = b\vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AC'} = a(b\vec{u}).$$

On a donc :

$$\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC'} = a\overrightarrow{AC}.$$

Ainsi, C et C' appartiennent à la droite (AB) et vérifient :

$$\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC'} = a\overrightarrow{AC}$$

Compte tenu de l'associativité de la multiplication des nombres réels, il vient :

$$\overrightarrow{AC'} = a(b\overrightarrow{AB}) = (ab)\overrightarrow{AB}.$$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{AC'} = (ab)\overrightarrow{AB}.$$

On a donc bien :

$$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}.$$

(8) Il est clair que l'assertion (8) se déduit de (6) si $\vec{u} = \vec{0}$. On peut donc supposer que \vec{u} est non nul. On considère les points C, C' et C'', tels que :

$$\overrightarrow{AC} = a\vec{u}, \overrightarrow{AC'} = b\vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AC''} = (a+b)\vec{u}.$$

On a donc :

$$\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'} = b\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC''} = (a+b)\overrightarrow{AB}$$

Ainsi, C, C' et C'' appartiennent à la droite (AB) et vérifient :

$$\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'} = b\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC''} = (a+b)\overrightarrow{AB}.$$

Compte-tenu de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, il vient :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AB} = (a+b)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC''}.$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC''}.$$

Ainsi, les segments CC' et AC'' ont le même milieu. On a donc :

$$\overrightarrow{AC''} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'}.$$

Ce qui prouve que :

$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}.$$

(9) On considère maintenant deux vecteurs quelconques \vec{u} et \vec{v} et un nombre réel a. On choisit un point O arbitraire ; soit A, B, C et A', B', C' les points tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v}, \overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v},$$

$$\overrightarrow{OA'} = a\vec{u}, \overrightarrow{OB'} = a\vec{v}, \overrightarrow{OC'} = a(\vec{u} + \vec{v})$$

Les points O, A et A' sont alignés, ainsi que O, B et B' de même que O, C et C'. De plus, on a :

$$\overrightarrow{OA'} = a\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'} = a\overrightarrow{OB} \text{ et } \overrightarrow{OC'} = a\overrightarrow{OC}.$$

Ainsi, A, B' et C' sont les images respectives de A, B et C par l'homothétie de centre O et de rapport a. Le quadrilatère OACB étant un parallélogramme, OA'B'C' est aussi un parallélogramme. Il s'ensuit que :

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}.$$

On a donc bien :

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

La démonstration est alors complète. •

* Espaces vectoriels et espaces affines.

L'ensemble des vecteurs de E se trouve, à présent, doté d'une structure algébrique dont les propriétés fondamentales sont énoncées dans les théorèmes (3-4) et (3-9).

On donne le nom d'espace vectoriel réel à tout ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un nombre réel vérifiant les mêmes propriétés (1)-(9).

Exemples : l'ensemble des fonctions réelles définies sur un intervalle, muni des opérations usuelles, est un espace vectoriel réel. Plus généralement, l'ensemble des applications d'un ensemble dans \mathbb{R} est muni d'une structure d'espace vectoriel. C'est, par exemple, le cas de \mathbb{R}^n : l'ensemble des applications de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans \mathbb{R} .

De façon générale, On appellera espace affine tout ensemble, associé à un espace vectoriel comme c'est le cas pour le plan ou l'espace de la géométrie usuelle. Plus précisément on dira que E est un espace affine si E est vide ou, dans le cas contraire, s'il existe un espace vectoriel V et une application

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow V \\ (A, B) &\rightsquigarrow \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

telle que :

(10) pour tous A, B, C de E on ait la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

(11) pour tout A de E et pour tout \vec{u} de V , il existe un unique point B de E tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Dans ces conditions on dira que V est l'espace vectoriel associé à E ou, plus succinctement, que V est la direction de E .

Ajoutons que si l'on choisit un point arbitraire O d'un espace affine E , dont la direction est V , l'application :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow V \\ M &\rightsquigarrow \overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

est une bijection qui, dans la pratique, permet d'identifier l'espace affine à sa direction.

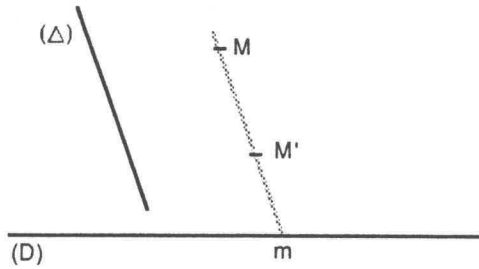
En outre, on remarquera que tout espace vectoriel V est un espace affine. Il suffit pour cela d'associer à tout couple (x, y) de V^2 le vecteur $y - x$.

Ces notions permettent la mise en œuvre en géométrie des concepts développés en algèbre linéaire. On peut ainsi de passer du point de vue "naïf" qui est le nôtre ici, à des conceptions plus abstraites, construites de façon formelle.

§4 L'affinité plane.

Définition : soit D et Δ deux droites sécantes du plan et k un nombre réel. On appelle affinité d'axe D , de direction Δ , de rapport k l'application qui, à tout point M du plan associe le point M' , défini comme suit. Si m désigne l'image de M par la projection sur D parallèlement à Δ , M' est le point tel que :

$$\overrightarrow{mM'} = k \overrightarrow{mM}.$$



Remarques.

- 1) Si $k = 0$, cette application n'est autre que la projection sur D parallèlement à Δ et si $k = 1$, on est en présence de l'application identique du plan.
- 2) Si $k = -1$, on parlera plutôt de symétrie (oblique) d'axe D et de direction Δ .

Les propriétés qui suivent sont immédiates.

(4-1) proposition : on considère une affinité f de rapport k .

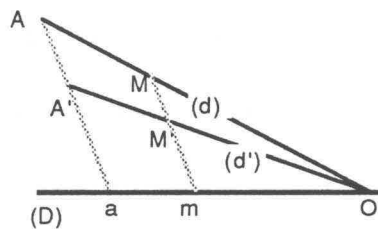
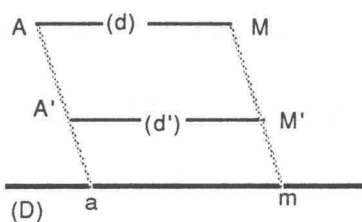
- 1) Si $k \neq 1$, l'axe de f est l'ensemble des points invariants par f .
- 2) Si $k \neq 0$, f est bijective et son application réciproque est l'affinité ayant même axe et même direction et dont le rapport est $1/k$.

(4-2) Proposition : l'image d'une droite, par une affinité de rapport non nul, est une droite.

Démonstration : considérons une affinité f , d'axe D de direction Δ , de rapport k et une droite d , autre que D .

La conclusion est immédiate si d est parallèle à Δ . En effet, dans ce cas, d coupe D en un point a et f coïncide, sur d , avec l'homothétie de rapport de centre a et de rapport k .

Soit A un point arbitraire de d n'appartenant pas à D ; On note A' son image par f et a sa projection sur D parallèlement à Δ . On désigne par M le point courant de d , soit M' son image par f et m sa projection sur D parallèlement à Δ .



On a toujours :

$$\frac{\overrightarrow{mM'}}{\overrightarrow{mM}} = \frac{\overrightarrow{aA'}}{\overrightarrow{aA}} = k.$$

Si d est parallèle à D , on note d' la parallèle à D et d qui passe par A' . La réciproque du théorème de Thalès montre que M' appartient à d' . De plus quand M décrit D , M' décrit d' . Cette droite est donc l'image de d par f .

Si d et D sont sécantes en O , on note d' la droite $(A'O)$. L'homothétie de centre O et de rapport $\overline{Om}/\overline{Oa}$ transforme A en M . La relation précédente montre qu'elle transforme aussi A' en M' . De plus quand M décrit D , M' décrit d' . Cette droite est donc l'image de d par f . •

(4-3) Proposition : l'affinité conserve les rapports de distances entre points alignés.

Démonstration : considérons une affinité d'axe D de direction Δ et de rapport k . Soit d une droite quelconque. Si d est parallèle à Δ , elle coupe D en un point m et, comme nous l'avons vu, l'affinité coïncide sur d avec l'homothétie de centre m et de rapport k . La conclusion est alors donnée par la proposition (2-5). Dans le cas contraire, c'est, au vu de la proposition précédente, une conséquence immédiate du théorème de Thalès. •

* Affinité vectorielle.

(4-3) Proposition : soit A, B, C, D, O cinq points quelconques du plan et leurs images A', B', C', D', O' par une affinité donnée. Soit a un nombre réel quelconque.

- 1) Si $\overline{AB} = \overline{CD}$ alors $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$.
- 2) Si $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$ alors $\overline{O'A'} + \overline{O'B'} = \overline{O'C'}$.
- 3) Si $a\overline{OA} = \overline{OB}$ alors $a\overline{O'A'} = \overline{O'B'}$.

Démonstration : si $\overline{AB} = \overline{CD}$ alors les quatre points A, B, C, D sont les sommets d'un parallélogramme. Comme l'affinité respecte le milieu, les quatre points A', B', D', C' sont aussi les sommets d'un parallélogramme et l'on a :

$$\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$$

La deuxième assertion se démontre de manière analogue et la troisième est une variante de la proposition (4-3). •

Le point 1) de la proposition précédente montre que toute affinité définit une application

$$\varphi : \vec{v} \rightsquigarrow \vec{v'}$$

de l'ensemble des vecteurs dans lui-même. Les points 2) et 3) montrent que l'addition des vecteurs, aussi bien que la multiplication par un scalaire sont stables relativement à celle-ci. En d'autres termes, on a toujours :

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u} + \vec{v}) &= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \\ \varphi(a\vec{u}) &= a\varphi(\vec{u}).\end{aligned}$$

Définition : on appelle cette application : l'affinité vectorielle (associée).

Remarques : 1) il est facile de vérifier que φ reste inchangée quand on remplace l'axe de l'affinité par une droite parallèle.

2) De façon générale, toute application qui remplit ces conditions est appelée une application linéaire.

3) Ce qui précède s'applique, en particulier, aux projections. Dans ce cas, on parlera de projection vectorielle.

§5 Repères.

* Repères du plan.

Définition : on appelle repère d'un plan la donnée d'un triplet ordonné de points **non alignés** de celui-ci.

(5-1) Théorème : soit (O, A, B) un repère du plan. Pour tout point M du plan, il existe un couple unique de nombres réels (x, y) tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}.$$

Démonstration : montrons que, si le couple (x, y) existe, il est unique. Soit M un point tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB},$$

soit M' la projection de M sur la droite (OA) , parallèlement à la droite (OB) ; d'après le théorème (4-3), on a :

$$\overrightarrow{OM'} = x\overrightarrow{OA},$$

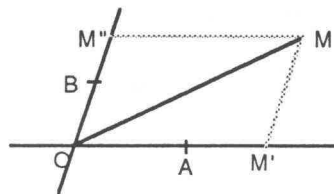
il s'ensuit que :

$$x = \frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OA}}.$$

Comme A et B jouent des rôles symétriques, si M'' est la projection de M sur (OB) , parallèlement à (OA) , on a aussi :

$$y = \frac{\overrightarrow{OM''}}{\overrightarrow{OB}}.$$

Reste à prouver qu'un tel couple existe bien. Soit M un point quelconque, M' et M'' ses projections respectives sur la droite (OA) parallèlement à la droite (OB) et sur la droite (OB) parallèlement à la droite (OA) .



Les quatre points $OM'MM''$ forment un parallélogramme, on a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}.$$

Posons :

$$x = \frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OA}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\overrightarrow{OM''}}{\overrightarrow{OB}}.$$

On a par définition :

$$\overrightarrow{OM'} = x\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OM''} = y\overrightarrow{OB},$$

ce qui conduit bien à la conclusion annoncée. •

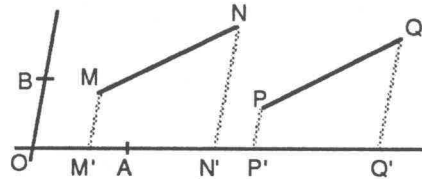
Définition : les nombres réels x et y , ainsi déterminés, s'appellent coordonnées (cartésiennes) du point M dans le repère (O, A, B) On les appelle respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M pour le repère considéré.

(5-2) Proposition : soit \vec{u} un vecteur du plan, si M et N sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$, de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans un repère donné (O, A, B) , les nombres $x' - x$ et $y' - y$ sont indépendants des points M et N.

Définition : ces deux nombres sont appelés coordonnées du vecteur \vec{u} dans le repère (O, A, B) .

Démonstration : soit P et Q deux autres points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$,

(x_1, y_1) et (x'_1, y'_1) leurs coordonnées respectives relatives au repère (O, A, B) . On note M', N', P', Q' les projections de M, N, P, Q sur la droite (OA) parallèlement à la droite (OB).



Par hypothèse, on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, le théorème (4-1) montre que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{P'Q'}$, ce qui donne :

$$\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'}$$

et par suite :

$$\begin{aligned} x' \overrightarrow{OA} - x \overrightarrow{OA} &= x'_1 \overrightarrow{OA} - x_1 \overrightarrow{OA} \\ (x' - x) \overrightarrow{OA} &= (x'_1 - x_1) \overrightarrow{OA}. \end{aligned}$$

D'où il vient que :

$$x' - x = x'_1 - x_1.$$

Comme A et B jouent des rôles symétriques, on a aussi prouvé que :

$$y' - y = y'_1 - y_1. \quad \bullet$$

(5-3) Proposition : étant donné un repère du plan (O, A, B) ; on convient de noter (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives de vecteurs quelconques \vec{u} et \vec{v} et a désigne un réel quelconque. Dans ces conditions, on a relativement au repère choisi :

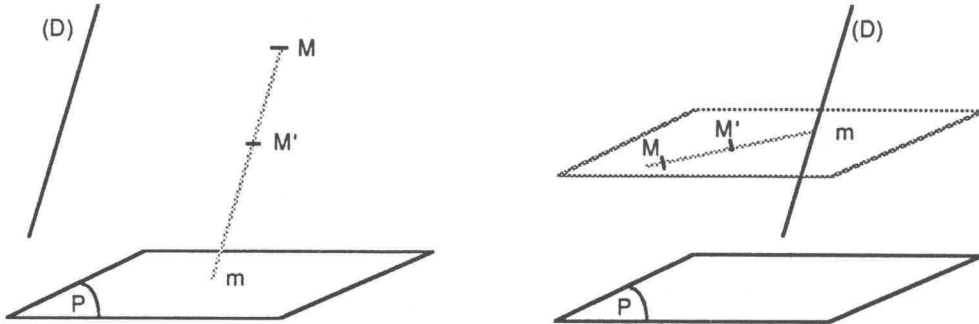
- $\vec{u} + \vec{v}$ admet pour coordonnées $(x + x', y + y')$
- $a\vec{u}$ admet pour coordonnées (ax, ay) .

Démonstration : ces deux résultats se déduisent immédiatement du théorème (4-3). •

* Repères de l'espace.

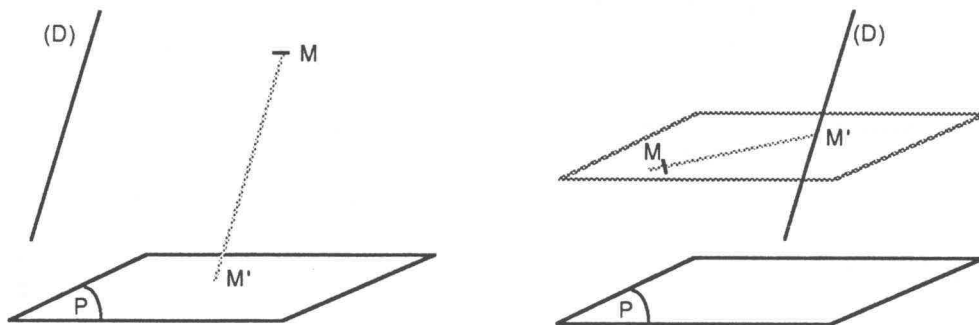
La notion d'affinité se généralise à l'espace dans les conditions suivantes. On considère un nombre réel k , une droite D et un plan P sécants. On définit :

- l'affinité de plan P , de direction D et de rapport k ,
- l'affinité d'axe D de direction P .



Le théorème (4-3) se généralise à l'espace sans poser de difficultés majeures. Les démonstrations sont, dans chaque cas, analogues à celle du plan. Les propriétés ainsi obtenues s'appliquent alors à

- la projection sur un plan parallèlement à une droite,
- la projection sur une droite parallèlement à un plan.



Définition : on appelle repère de l'espace la donnée d'un quadruplet de points non coplanaires.

(5-4) Théorème : soit (O,A,B,C) un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x,y,z) de nombres réels tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Démonstration : montrons l'unicité d'un tel triplet. On considère un point M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Soit la projection de M sur la droite (OA) parallèlement au plan (OBC) . Le théorème (4-3) montre que $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA}$ et par suite :

$$x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}.$$

Si R et S sont les projections respectives de M sur (OB) et (OC) parallèlement à (OAC) et (OAB) , on a de même :

$$y = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} \quad \text{et} \quad z = \frac{\overline{OR}}{\overline{OC}}.$$

Montrons l'existence de ce triplet pour tout point. On considère un point quelconque M. Soit P, Q et R ses projections respectives sur (OA), (OB), (OC) parallèlement à (OBC), (OAC) et (OAB). On pose

$$x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}, \quad y = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}}, \quad z = \frac{\overline{OR}}{\overline{OC}}.$$

On a ainsi, comme dans le plan :

$$\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} + z \overrightarrow{OC}.$$

Définition les nombres x, y, z ainsi déterminés s'appellent les coordonnées du point M dans le repère (O, A, B, C). On appelle respectivement x, y et z : l'abscisse, l'ordonnée et la cote de M relatives à ce repère.

On définit les coordonnées d'un vecteur de l'espace pour un repère donné de la même façon que dans le plan. La proposition (5-3) se généralise sans peine à l'espace.

* Repères orthonormés.

Définition : une unité de longueur étant choisie dans le plan ou l'espace, un repère orthonormé est la donnée

- pour le plan, de trois points (O, A, B) non alignés et tels que :
 - OA = OB = 1,
 - les droites (OA) et (OB) soient perpendiculaires.
- pour l'espace, de quatre points (O, A, B, C) non coplanaires tels que
 - OA = OB = OC = 1,
 - les trois droites (OA), (OB) et (OC) forment un trièdre trirectangle.

Cette définition va trouver sa justification dans les pages qui suivent.

§7 Le produit scalaire.

On convient, désormais, que toutes les **mesures algébriques** sont définies par rapport à des repères unitaires. Ainsi, étant donnés trois points O, A et B d'une droite D , le produit $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ reste invariant.

* Définition et propriétés de base.

On considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} et trois points O, A, B de E tels que :

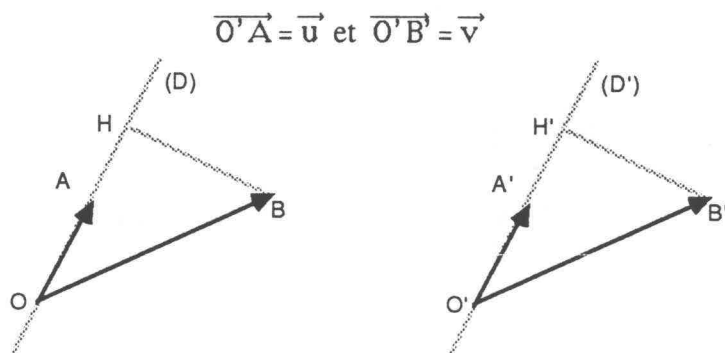
$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{OB} = \vec{v}.$$

Soit D une droite contenant O et A et H la projection orthogonale de B sur D .

(6-1) Proposition : le produit $\overline{OA} \cdot \overline{OH}$ ne dépend que des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Définition : on appelle ce nombre le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} . On le note $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Démonstration : supposons que les points O et A soient distincts. Soit O', A', B' trois points de E tels que :



Les quatre points $OAA'O'$ forment un parallélogramme. Ainsi, A' est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. De même, B' est l'image de B par cette transformation. Comme la translation respecte l'orthogonalité, H' est l'image de H par cette translation. On a donc

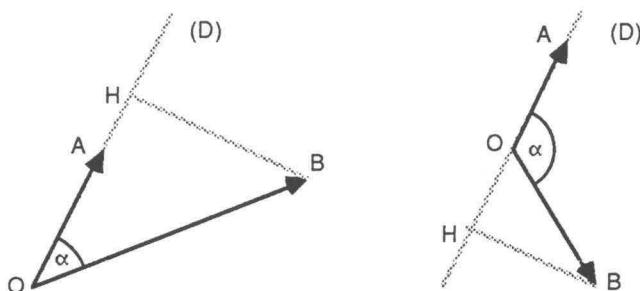
$$\overline{OA} = \overline{O'A'} \text{ et } \overline{OH} = \overline{O'H'},$$

il s'ensuit que :

$$\overline{OA} \cdot \overline{OH} = \overline{O'A'} \cdot \overline{O'H'}$$

(6-2) Proposition: soit O, A, B trois points distincts de E et α l'angle géométrique $A\hat{O}B$ (i. e. $0 \leq \alpha \leq \pi$). On a toujours :

$$(1) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cos \alpha$$



Démonstration : on note D la droite (OA) , soit H la projection orthogonale de B sur D . On choisit un repère de D tel que \overrightarrow{OA} soit un nombre positif., c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OA} = OA$.

Selon que l'angle $\widehat{AOB} = \alpha$ est aigu ou obtus, le segment OH a la même orientation que OA ou bien l'orientation opposée. Ainsi, \overrightarrow{OH} a le même signe que $\cos \alpha$. On a donc toujours :

$$\overrightarrow{OH} = OB \cos \alpha$$

et par suite

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = OA \cdot OB \cos \alpha. \quad \bullet$$

(6-3) Théorème : pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, et pour tout nombre réel, on a :

- (2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
 (3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$;
 (4) $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v}) = a \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Démonstration : la première assertion se déduit de la proposition précédente, les suivantes découlent immédiatement du théorème (4-3) et de sa généralisation à l'espace. \bullet

* Expression du produit scalaire dans un repère orthnormé.

(6-4) Théorème : soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormé (O, A, B, C) donné ; on a toujours :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Démonstration : on vérifie immédiatement que :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = 1 \text{ et } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0.$$

Comme, par définition, on a :

$$\vec{u} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \text{ et } \vec{v} = x'\overrightarrow{OA} + y'\overrightarrow{OB} + z'\overrightarrow{OC}$$

Le résultat annoncé se déduit simplement de (3) et (4). \bullet

* Notation.

Soit \vec{u} un vecteur. Il est clair que si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, la longueur AB ne dépend que de la donnée de \vec{u} . On convient donc de noter

$$\|\vec{u}\| = AB.$$

et d'appeler ce nombre le module de \vec{u} ou la norme de \vec{u} .

On a de façon évidente :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

§7 Premières applications du produit scalaire.

* Relations métriques dans le triangle.

On considère un triangle ABC. On note A' le milieu de BC et H le pied de la hauteur issue de A et l'on pose suivant l'usage :

$$a = BC, \quad b = CA, \quad c = AB \quad \text{et} \quad m_a = AA'.$$

On a tout d'abord :

$$\overline{BC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AB})^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB},$$

cette relation, on la retient plus aisément sous la forme qui suit.

$$(7-1) \text{ "loi des cosinus"} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

On a aussi :

$$2(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = (\overline{AB} + \overline{AC})^2 + (\overline{AB} - \overline{AC})^2 = 4 \overline{AA'}^2 + \overline{BC}^2.$$

On pose $m_a = AA'$, cette relation devient :

$$2(b^2 + c^2) = 4m_a^2 + a^2.$$

Elle permet d'exprimer la longueur de la médiane AA' en fonction de côtés :

$$(7-2) \text{ "Formule de la médiane"}$$

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

On a enfin :

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = (\overline{AC} + \overline{AB})(\overline{AC} - \overline{AB}) = 2 \overline{AA'} \cdot \overline{BC} = 2\overline{HA'} \cdot \overline{BC}.$$

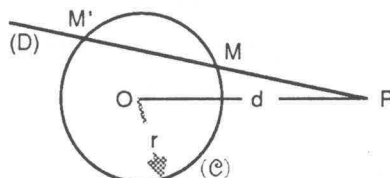
On retrouve ainsi la relation :

$$(7-3) \quad b^2 - c^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{HA'}.$$

* Puissance d'un point par rapport à un cercle - axe radical.

a) Définition. Dans un plan, on considère :

- un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon r,
- un point P de ce plan, on note $d = OP$,
- une droite D qui passe par P.



Soit \vec{u} un vecteur unitaire de la direction de D. Pour tout point M de D, il existe un unique réel λ tel que : $\overline{PM} = \lambda \vec{u}$. On a ainsi :

$$OM^2 = \overline{OM}^2 = (\overline{OP} + \overline{PM})^2 = (\overline{OP} + \lambda \vec{u})^2 = \lambda^2 + 2\lambda \overline{OP} \cdot \vec{u} + \overline{OP}^2.$$

Le point M est sur \mathcal{C} si, et seulement si :

$$r^2 = OM^2 = \lambda^2 + 2\lambda \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} + d^2,$$

c'est-à-dire, si λ est racine de l'équation du second degré :

$$x^2 + 2(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u})x + d^2 - r^2 = 0.$$

Le produit des racines est $\lambda \lambda' = d^2 - r^2$. En conséquence, si la droite coupe \mathcal{C} en deux points M et M', On aura :

$$\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = \overline{PM} \cdot \overline{PM'} = \lambda \vec{u} \cdot \lambda' \vec{u} = \lambda \lambda' = d^2 - r^2.$$

Il est ainsi prouvé que :

(7-4) Le produit $\overline{PM} \cdot \overline{PM'}$ est indépendant de la donnée de D.

Définition : on appelle ce nombre la puissance de P par rapport à \mathcal{C} . On le note $\mathcal{C}(P)$.

En résumé, nous avons prouvé que, pour toute droite qui passe par P et coupe C en M et M', on a :

$$C(P) = \overline{PM} \cdot \overline{PM'} = d^2 - r^2.$$

b) Expression analytique de la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Aux données ci-dessus, on ajoute un repère (O, I, J) du plan et soit (x, y) les coordonnées du point courant M et (a, b) les coordonnées du centre O de \mathcal{C} . On a ainsi :

$$OM^2 = \overline{OM}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2.$$

Le point M est sur le cercle \mathcal{C} si, et seulement si :

$$0 = OM^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2.$$

On obtient ainsi, l'équation cartésienne du cercle :

$$(7-5) \quad \mathcal{C}(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ où } c = a^2 + b^2 - r^2.$$

On considère un point P de coordonnées (x_0, y_0) . Nous savons que

$$d^2 = OP^2 = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(P) &= d^2 - r^2 \\ &= x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2bx_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 - r^2 \\ &= \mathcal{C}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

La puissance du point P de coordonnées (x_0, y_0) par rapport au cercle d'équation $\mathcal{C}(x, y) = 0$ s'exprime :

$$\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(x_0, y_0).$$

Remarque : on voit immédiatement que la condition :

- $\mathcal{C}(x,y) > 0$ caractérise les points situés à l'extérieur du cercle,
- $\mathcal{C}(x,y) < 0$ caractérise les points situés à l'intérieur du cercle.

c) Axe radical de deux cercles.

Considérons deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' , de centres O et O', de rayons r et r'. On recherche le lieu des points qui ont même puissance par rapport à \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

La différence des puissances d'un point P par rapport à ces deux cercles s'exprime :

$$\mathcal{C}'(P) - \mathcal{C}(P) = O'P^2 - r'^2 - (OP^2 - r^2) = O'P^2 - OP^2 - (r'^2 - r^2).$$

Si les cercles sont concentriques, cette expression est constante. Elle est nulle seulement si les cercles sont confondus. Dans ce cas le lieu cherché est donc ou bien vide, ou bien c'est le plan tout entier.

Dans le cas où les deux centres sont distincts, on a (cf. application 1) :

$$O'P^2 - OP^2 = 2\overline{OO'} \cdot \overline{IH},$$

où I désigne le milieu de OO' et H la projection orthogonale de P sur la droite (OO') . Il s'ensuit que :

$$\mathcal{C}'(P) - \mathcal{C}(P) = O'P^2 - OP^2 - (r'^2 - r^2) = 2\overline{OO'} \cdot \overline{IH} + r^2 - r'^2.$$

Le lieu des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles considérés est donc la perpendiculaire à la droite (OO') au point H tel que :

$$\overline{IH} = \frac{r'^2 - r^2}{2\overline{OO'}}.$$

Cette droite est appelée l'axe radical de \mathcal{C} et \mathcal{C}' . Son équation cartésienne s'obtient sous la forme :

$$\mathcal{C}(x,y) - \mathcal{C}'(x,y) = 0.$$

Nous laissons à chacun le soin de caractériser géométriquement et construire cette droite, ceci dans les divers cas qui peuvent se présenter.

Chapitre II : le barycentre

On désigne par E l'espace usuel.

§8 Définition du barycentre.

On considère n points A_1, A_2, \dots, A_n de E et n nombres réels a_1, a_2, \dots, a_n . A tout point O de E, on associe le vecteur suivant :

$$a_1 \overrightarrow{OA_1} + a_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n}.$$

(8-1) Proposition : soit O et O' deux points de E ; on a toujours :

$$a_1 \overrightarrow{OA_1} + a_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{OO'} + a_1 \overrightarrow{O'A_1} + \dots + a_n \overrightarrow{O'A_n}.$$

Démonstration : d'après la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_1}, \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_2}, \dots, \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_n}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} a_1 \overrightarrow{OA_1} + a_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n} &= a_1 (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_1}) + a_2 (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_2}) + \dots + a_n (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_n}) \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{OO'} + a_1 \overrightarrow{O'A_1} + a_2 \overrightarrow{O'A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{O'A_n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(8-2) Corollaire : si la somme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ est nulle, le vecteur

$$a_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n}$$

est indépendant du point O.

(8-3) Théorème : étant donnés n points A_1, \dots, A_n de E et a_1, \dots, a_n n nombres réels, si la somme $a_1 + \dots + a_n$ est non nulle, il existe un unique point G de E tel que :

$$a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Démonstration : soit O et G deux points de E. On a :

$$a_1 \overrightarrow{OA_1} + a_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n} = (a_1 + \dots + a_n) \overrightarrow{OG} + a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n}.$$

Le vecteur

$$a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n}$$

est donc nul si, et seulement si :

$$a_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n} = (a_1 + \dots + a_n) \overrightarrow{OG}.$$

Puisque la somme $a_1 + \dots + a_n$ est non nulle, ceci équivaut, à :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} (a_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n}).$$

Ainsi, le point O étant fixé, il existe un unique vecteur \overrightarrow{OG} tel que

$$a_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

Ce qui détermine bien le point G cherché. ■

Définition : le point G, ainsi défini, s'appelle le barycentre des points A_1, \dots, A_n affectés des coefficients a_1, \dots, a_n .

Remarque : on considère n points de E : A_1, \dots, A_n et n nombres réels : a_1, \dots, a_n dont la somme est non nulle. Le barycentre G des points A_1, \dots, A_n , affectés des coefficients a_1, \dots, a_n est caractérisé par l'une des trois propriétés suivantes :

$$(1) \quad a_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

(2) Pour tout point O de E

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} (a_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n}).$$

(3) Pour tout point O de E

$$(a_1 + \dots + a_n) \overrightarrow{OG} = a_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n}.$$

§9 Propriétés du barycentre.

(9-1) Proposition : on considère n points de E : A_1, \dots, A_n et n nombres réels : a_1, \dots, a_n dont la somme est non nulle. Pour tout nombre réel k, non nul, le barycentre des points A_1, \dots, A_n affectés des coefficients ka_1, \dots, ka_n , est égal au barycentre des points A_1, \dots, A_n affectés des coefficients a_1, \dots, a_n .

Démonstration : soit G le barycentre des points A_1, \dots, A_n affectés des coefficients a_1, \dots, a_n ; on a par définition :

$$a_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

On en déduit que, pour tout nombre réel k, on a :

$$(ka_1) \overrightarrow{GA_1} + \dots + (ka_n) \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Si k est non nul, la somme

$$ka_1 + \dots + ka_n = k(a_1 + \dots + a_n)$$

est non nulle et l'égalité vectorielle ci-dessus montre que G est aussi le barycentre des points A_1, \dots, A_n affectés des coefficients ka_1, \dots, ka_n . ■

(9-3) Proposition (associativité du barycentre) : le barycentre de n points ne change pas quand on remplace une partie d'entre eux par leur barycentre (s'il existe) affecté de la somme des coefficients correspondants.

Démonstration : soit G le barycentre des points A_1, \dots, A_n affectés des coefficients a_1, \dots, a_n .

Si $a_1 + \dots + a_p \neq 0$, on peut définir le barycentre H des points A_1, \dots, A_p affectés des coefficients a_1, \dots, a_p . On a par définition :

$$a_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + a_p \overrightarrow{GA_p} + a_{p+1} \overrightarrow{GA_{p+1}} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

et par suite :

$$a_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + a_p \overrightarrow{GA_p} = (a_1 + \dots + a_p) \overrightarrow{GH}.$$

Il s'ensuit que :

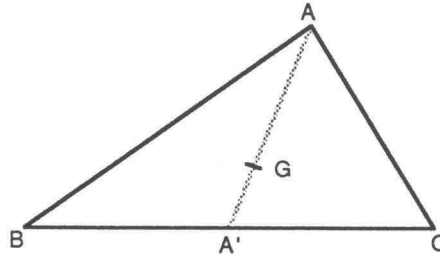
$$(a_1 + \dots + a_p) \overrightarrow{GH} + a_{p+1} \overrightarrow{GA_{p+1}} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Or, cette relation caractérise le barycentre G des points H, A_{p+1}, \dots, A_n affectés des coefficients $(a_1 + \dots + a_p), a_{p+1}, \dots, a_n$. ■

* Applications.

1) Le centre de gravité d'un triangle.

On considère trois points non alignés A, B, C.



Soit G le barycentre de A, B, C affectés de coefficients égaux et soit A' le barycentre de B et C affectés de coefficients égaux (A' est évidemment le milieu de BC). D'après la propriété d'associativité du barycentre, on a :

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}.$$

Le point G est donc sur la médiane (AA') du triangle le point tel que :

$$\frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GA'}} = -2,$$

ou, ce qui revient au même :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}.$$

Comme on n'a posé aucune hypothèse particulière, on a aussi montré que :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \text{ et } \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

où B' et C' désignent les milieux des côtés AC et AB.

Le barycentre cherché est donc à l'intersection des trois médianes du triangle. Ce point est appelé le centre de gravité du triangle. Il se caractérise par la relation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Il est tel que, pour tout point M de E, on a :

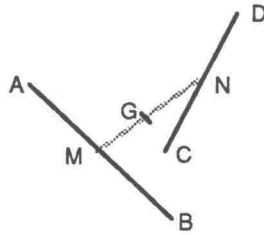
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \overrightarrow{MG}.$$

Remarque : ce point est effectivement le centre de gravité du solide formé par trois points matériels de même masse situés aux sommets du triangle. Mais c'est aussi le centre des masses d'une plaque homogène matérialisant son intérieur.

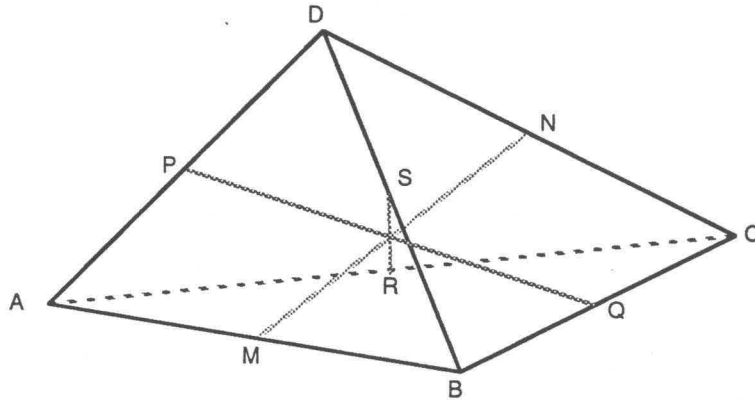
2) Le centre de gravité d'un tétraèdre.

On considère quatre points A, B, C, D de E. Soit G le barycentre de ceux-ci affectés de coefficients égaux.

a) Le barycentre de A et B (resp. C et D) affectés de coefficients égaux est leur milieu M (resp. N). Le point G cherché est donc le barycentre des points M et N affectés des coefficients 2 et 2. C'est donc le milieu de MN.



Comme on n'a posé aucune hypothèse particulière, il est aussi prouvé que G est le milieu des segments PQ et RS où les points P, Q, R et S sont les milieux respectifs de AD, BC, AC et BD.



On a ainsi démontré que, dans un tétraèdre, les segments joignant les milieux des arêtes opposées concourent en leur milieu.

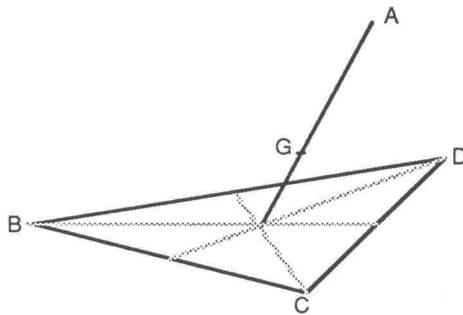
b) On peut également déterminer G, en remplaçant les trois points B, C, D par leur barycentre A' affecté du coefficient 3, on aura alors :

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$$

ou, ce qui est équivalent :

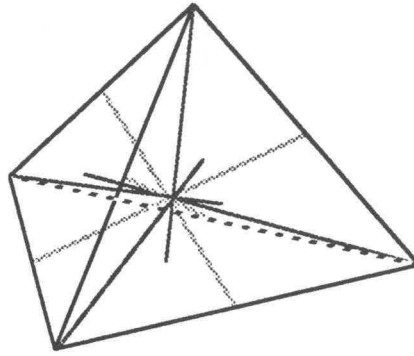
$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$$

Le point G appartient donc au segment joignant le sommet A au centre de gravité de la face opposée.



On en déduit que, dans un tétraèdre, les segments joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée concourent en un point G situé aux trois quarts de chacun de ceux-ci à partir des sommets.

On a ainsi mis en évidence le concours de sept droites remarquables.



* Les coordonnées du barycentre.

(9-4) Proposition : l'espace étant rapporté à un repère donné, on considère n points de E : A_1, A_2, \dots, A_n donnés par leurs coordonnées : $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ et n nombres réels de somme non nulle : a_1, \dots, a_n . Le barycentre de A_1, \dots, A_n affectés des coefficients a_1, \dots, a_n admet pour coordonnées :

$$x = \frac{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}{a_1 + \dots + a_n}, \quad y = \frac{a_1 y_1 + \dots + a_n y_n}{a_1 + \dots + a_n}, \quad z = \frac{a_1 z_1 + \dots + a_n z_n}{a_1 + \dots + a_n}.$$

Démonstration : soit (O, I, J) le repère donné, on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n}}{a_1 + \dots + a_n}.$$

On obtient les formules annoncées par projection sur les droites (OI) , (OJ) et (OK) . ■

§10 Les barycentres de deux points.

(10-1) Proposition : tout barycentre de deux points distincts est situé sur la droite qui les joint.

Démonstration : soit A et B deux points distincts de E , a et b deux réels de somme non nulle ; on considère le barycentre G de A et B affectés de coefficients a et b . Par définition, on a :

$$a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB} = (a+b)\overrightarrow{AG},$$

il s'ensuit que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{AB} étant proportionnels, les points A , G et B sont alignés. ■

Remarque : si $a = b$ alors $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Dans ce cas, G est le milieu du segment AB .

(10-2) Proposition : on considère deux points distincts A et B d'une droite donnée D.

Pour tout point M de D, il existe deux nombres réels a et b, de somme non nulle, tels que M soit le barycentre des points A et B affectés des coefficients a et b. Le couple (a, b) n'est pas unique, il est défini à un scalaire multiplicatif près.

Démonstration : soit M un point de D. Il existe un nombre réel b tel que :

$$\overrightarrow{AM} = b \overrightarrow{AB}$$

d'où

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= b(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \\ (1-b)\overrightarrow{AM} &= b\overrightarrow{MB} \\ (1-b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Le point M est donc, par définition, le barycentre de A et B affectés des coefficients 1-b et b. Si M est le barycentre de A et B affectés des coefficients a et b et si M coïncide avec B, alors a est nul et b est un nombre non nul arbitraire. Dans le cas contraire, a est non nul et le rapport des coefficients est fixé, par

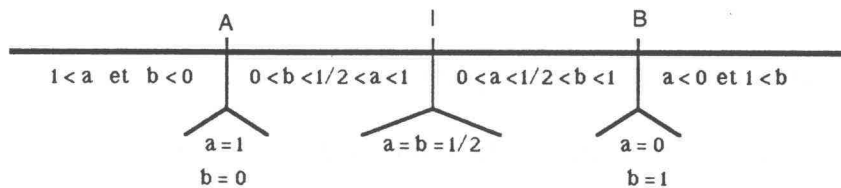
$$\frac{b}{a} = -\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}.$$

Les nombres a et b sont donc bien définis à un facteur près. ■

Il est facile de vérifier que si l'on impose à leur somme d'être égale à 1, alors ils sont uniques. Ce qui conduit à poser la définition qui suit.

Définition : étant donnés deux points A et B distincts d'une droite D et M un point de D ; on appelle coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B), les deux nombres a et b qui vérifient la relation $a + b = 1$ et tels que, M soit le barycentre des points A et B affectés des coefficients a et b.

Le point de coordonnées barycentriques a et b dans le repère (A, B), vient se placer par rapport aux points A et B, suivant le schéma ci-dessous.



* Point divisant un segment dans un rapport donné.

Soit A et B deux points distincts d'une droite D et M un point de D. Si M est distinct de B, on peut considérer le rapport

$$k = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}.$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{MA} = k \overrightarrow{MB}$$

ou encore

$$\overrightarrow{MA} - k \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Le point M apparaît donc comme étant le barycentre de A et B affectés des coefficients 1 et -k ou, ce qui revient au même, comme le point qui admet :

$$a = \frac{1}{1-k} \quad \text{et} \quad b = \frac{-k}{1-k}.$$

pour coordonnées barycentriques dans le repère (A, B).

Réciproquement, si le point M est donné comme étant le barycentre de A et B affectés des coefficients a et b, on a

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0},$$

et par suite

$$k = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = -\frac{b}{a}.$$

On a ainsi démontré la proposition qui suit.

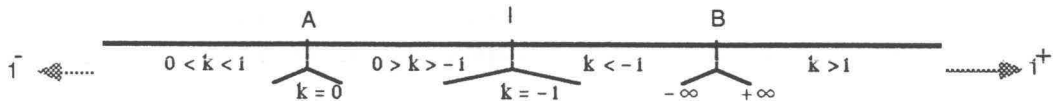
(10-3) Proposition : on considère deux points distincts A et B d'une droite D. Pour tout point M de D, **distinct de B**, il existe un unique réel $k \neq 1$, tel que :

$$k = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}.$$

Si M est le barycentre de A et B affectés des coefficients a et b, alors

$$k = -b/a.$$

Le point qui divise le segment AB dans le rapport k, vient, suivant les valeurs de k, se placer sur la droite (AB) selon le schéma ci-dessous.



* Un exemple d'application : lieu des points d'un plan dont le rapport des distances à deux points donnés est constant.

On considère deux points distincts A et B d'un plan et un nombre réel strictement positif k. On se propose de déterminer le lieu des points M du plan tels que :

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

Un point M appartient à l'ensemble ainsi défini si, et seulement si, on a :

$$MA^2 - k^2 MB^2 = 0.$$

Ce qui équivaut encore à :

$$(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = \vec{0}$$

• si $k=1$, il vient :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

où I désigne le milieu de AB. On a donc :

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$$

ou, ce qui est équivalent le point M se projette orthogonalement en I sur la droite (AB). On retrouve ainsi la médiatrice de AB.

• si $k \neq 1$ (donc si $1 - k \neq 0$), on peut alors considérer le barycentre H des points A et B affectés des coefficients 1 et $-k$. On considère aussi le barycentre K des points A et B affectés des coefficients 1 et k . On a ainsi :

$$\overrightarrow{MA} - k \overrightarrow{MB} = (1 - k) \overrightarrow{MH} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} + k \overrightarrow{MB} = (1 + k) \overrightarrow{MK}.$$

Il s'ensuit que :

$$(1 - k)(1 + k) \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MK} = 0.$$

Ce qui équivaut à :

$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$$

ou encore au fait que l'angle HMK est droit.

L'ensemble des points du plan, tels que

$$\frac{MA}{MB} = k$$

est donc, si $k \neq 1$, le cercle de diamètre HK, où H et K sont les points qui divisent le segment AB dans les rapports k et $-k$.

§11 Les barycentres de trois points.

(11-1) Proposition : le barycentre de trois points d'un plan appartient à celui-ci.

Démonstration : on considère trois points A, B, C d'un plan P et trois nombres réels a, b, c , de somme non nulle. Soit G le barycentre de A, B, C affectés des coefficients a, b, c ; on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a + b + c}.$$

D'après la définition de la somme de deux vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, il est clair que le point G ainsi défini appartient au plan P. ■

(11-2) Proposition : on considère trois points A, B et C non alignés, soit P le plan ainsi déterminé.

Pour tout point M de P il existe trois nombres réels, a, b et c de somme non nulle tels que M soit le barycentre de A, B, C affectés des coefficients a, b, c . Ces coefficients ne sont pas uniques, ils sont définis à un facteur près.

Démonstration : les trois points A, B, C forment un repère de P. Ainsi, pour tout point M de P, il existe deux nombres réels x et y (les coordonnées de M) tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}.$$

D'où, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \\ (1 - x - y)\overrightarrow{AM} &= x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} \\ (1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Le point M est donc le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients :

$$1 - x - y, \quad x \quad \text{et} \quad y.$$

Réciproquement, si M est barycentre des trois points A, B, C affectés des coefficients a, b, c , on a :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a + b + c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a + b + c} \overrightarrow{AC}.$$

Posons $s = a + b + c$. Par hypothèse, s est non nul. De plus b/s et c/s sont les coordonnées de M dans le repère (A, B, C) . Il s'ensuit que $b = sx$ et $c = sy$. On en déduit que $a = s(1-x-y)$. ■

Si l'on impose une valeur non nulle, à la somme des trois coefficients a, b, c , ceux-ci sont alors déterminés de façon unique. On peut, en particulier convenir que cette somme vaut 1. Ce qui donne la définition qui suit.

Définition : étant donnés trois points non alignés A, B, C ; on considère un point M du plan déterminé par A, B, C . On appelle coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B, C) , les trois nombres a, b et c qui vérifient la relation : $a + b + c = 1$ et tels que M soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b, c .

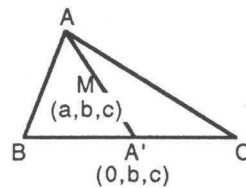
Considérons un triangle ABC , soit M un point quelconque de son plan. Nous venons de montrer que M est barycentre de A, B, C . Il existe donc trois nombres a, b et c de somme non nulle et tels que :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Si $b + c \neq 0$, on peut considérer le barycentre de B et C affectés des coefficients b et c ou ce qui revient au même, le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients $0, b$ et c . Soit A' ce point ; A' est sur la droite (BC) et l'associativité du barycentre montre que :

$$a\overrightarrow{MA} + (b+c)\overrightarrow{MA'} = \vec{0}.$$

A' est donc aussi sur la droite (AM) . Ainsi, A' est à l'intersection des droites (AM) et (BC) .



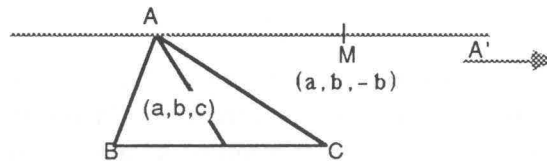
Si $b + c = 0$, alors $a \neq 0$ et l'on a :

$$\vec{0} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = a\overrightarrow{MA} + b(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{CB}$$

et par suite :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a} \overrightarrow{CB}.$$

Si $b \neq 0$, alors la droite (AM) est parallèle à (BC) .



Enfin, si $b = c = 0$, le point M n'est autre que le point A . on a donc prouvé la proposition qui suit.

(11-2) **Proposition :** pour tout triangle ABC et tous points A', B' et C' situés respectivement sur les droites $(BC), (CA), (AB)$ et distincts des sommets, si les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en un point M de coordonnées barycentriques (a, b, c) relativement au repère (A, B, C) alors :

- A' est le barycentre des points B et C affectés des coefficients b et c ,
- B' est le barycentre des points C et A affectés des coefficients c et a ,
- C' est le barycentre des points A et B affectés des coefficients a et b .

Ce qui s'écrit encore sous la forme suivante :

$$b\overrightarrow{A'B} + c\overrightarrow{A'C} = \vec{0}, \quad c\overrightarrow{B'C} + a\overrightarrow{B'A} = \vec{0}, \quad a\overrightarrow{C'A} + b\overrightarrow{C'B} = \vec{0}.$$

§12 Les théorèmes de Céva et de Ménélaüs.

* Le théorème de Céva.

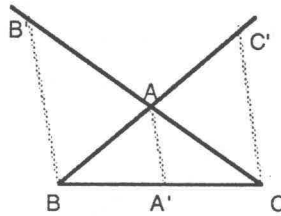
Conservons les données et les notations précédentes. Nous venons de démontrer que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{c}{b}, \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{a}{c}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{b}{a}.$$

Il s'ensuit immédiatement que si les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes alors :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Avant de doter cette propriété d'une réciproque, montrons que cette relation est aussi vérifiée, dans le cas où les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles.



Le théorème de Thalès donne alors :

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}, \quad \text{et} \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

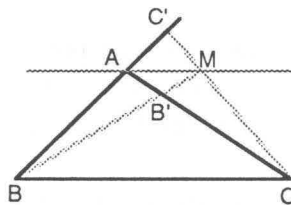
Il s'ensuit que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -1.$$

Réciproquement, supposons que soit vérifiée la relation :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

les droites (AA') , (BB') et (CC') peuvent être parallèles. Dans le cas contraire deux d'entre elles, au moins, se coupent. On ne restreint en rien la généralité du propos, en supposant que ce sont les droites (BB') et (CC') . Soit M leur point commun. Montrons que les droites (AM) et (BC) sont sécantes.



Supposons qu'elles soient parallèles. Le théorème (2-7) montre que, dans ces conditions, on aurait :

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MA}} = -\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}.$$

Ce qui exigerait que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1.$$

Ce cas ne pouvant pas se présenter, les droites (AM) et (BC) se coupent en un point A". Le théorème direct montre que :

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Dans ces conditions, l'hypothèse faite entraîne que :

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.$$

Ainsi, les points A' et A'' coïncident et les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Cette démonstration est alors complète, elle justifie l'énoncé qui suit.

(12-1) Théorème de Céva : on considère un triangle ABC, trois points A', B' et C' situés respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB) et dont aucun ne coïncide avec l'un des sommets.

Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont **concourantes ou parallèles** si, et seulement si,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Remarque : la démonstration que nous venons de proposer n'est évidemment pas la seule possible. Il est classique de démontrer le théorème direct en appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle AA'C et la transversale (BB'), puis au triangle AA'B et la transversale (CC'). Pour la réciproque on procède comme ci-dessus.

* Le théorème de Ménélaüs.

Il n'est pas sans intérêt de revenir sur le théorème de Ménélaüs dans le présent contexte. Rappelons son énoncé.

(12-2) Théorème de Ménélaüs : on considère un triangle ABC et trois points A', B' et C' situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB) et distincts des sommets.

Les points A', B' et C' sont alignés si, et seulement si, on a :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Démonstration : On peut toujours choisir trois nombres a, b et c tels que :

- C' soit le barycentre de A et B affectés des coefficients a et b,
- B' soit le barycentre de A et C affectés des coefficients a et c.

On a donc :

$$(a+b)\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{AB} \text{ et } (a+c)\overrightarrow{AB} = c\overrightarrow{AC}.$$

Si l'on avait b = c, la condition de l'énoncé équivaldrait alors à :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1,$$

Ce cas est donc exclu (c'est celui où les droites (BC) et (B'C') sont parallèles). On peut donc considérer le barycentre de B et C affectés des coefficients b et -c. Soit G ce point. On a :

$$(b-c)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC}.$$

Tenant compte des relations précédentes, il vient :

$$(b-c)\overrightarrow{AG} = (a+b)\overrightarrow{AC} - (a+c)\overrightarrow{AB}.$$

Ainsi, G apparaît comme étant le barycentre de B' et C' affectés des coefficients -(a+c) et (a+b). Ce point est donc sur la droite (B'C'). Comme, par hypothèse, il est aussi sur (BC) il est alors prouvé que, A' est aligné avec B' et C' si, et seulement si, il coïncide avec G ce qui s'exprime aussi bien

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c}{b}.$$

Or, par définition, a, b et c sont tels que :

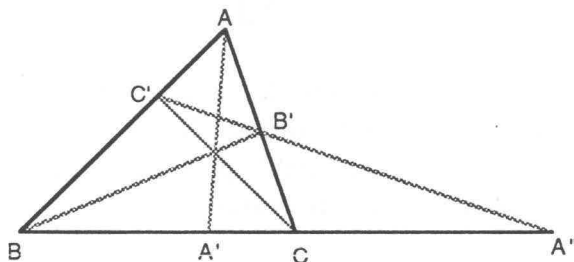
$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{a}{c} \text{ et } \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{b}{a}.$$

Il est alors démontré que A' est aligné avec B' et C' si, et seulement si, on a :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Remarque : le rapprochement des acquis de ces deux importants théorèmes montre que, dans la configuration ci-dessous, on a :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}}.$$

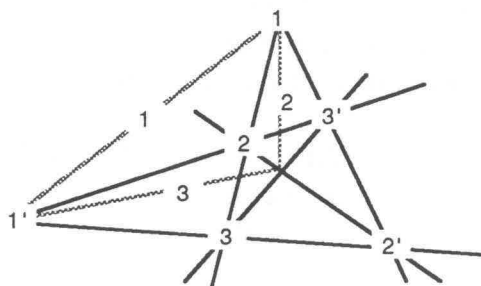


On dit alors que les points B, C, A', A'' forment une division harmonique.

Application : la droite de Newton d'un quadrilrère complet.

On appelle quadrilrère complet la configuration formée de quatre droites (ses côtés) deux à deux sécantes et telles que trois d'entre elles ne soient jamais concourantes.

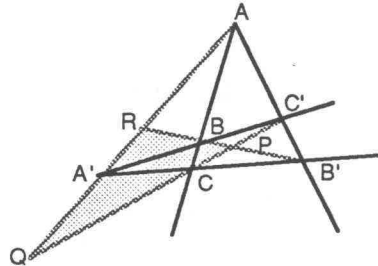
Celles-ci se coupent en $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ points : les sommets. Chacun d'eux est adjacent à deux côtés, les deux autres droites définissent le sommet qui lui est opposé.



On appelle diagonales les droites (ou, suivant le contexte, les segments) qui joignent deux sommets opposés. On en compte trois.

Montrons que le milieu des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés.

On considère un quadrilatère complet et l'on adopte les notations portées sur le schéma ci-après. Elles rendent compte de la relation d'opposition entre les sommets. Si deux des diagonales sont parallèles, la propriété avancée est un exercice élémentaire classique sur le trapèze. Sinon, les sommets du triangle des diagonales forment un repère (P,Q,R) du plan.



On note α , β et γ , les rapports dans lesquels les points A, B et C divisent respectivement les côtés du triangle PQR et l'on tient compte de la remarque précédente. Les sommets du quadrilatère complet apparaissent alors comme étant les barycentres de P, Q et R affectés des coefficients suivants :

$$\begin{aligned} A &: (0, 1, -\alpha) & A' &: (0, 1, \alpha) \\ B &: (-\beta, 0, 1) & B' &: (\beta, 0, 1) \\ C &: (1, -\gamma, 0) & C' &: (1, \gamma, 0) \end{aligned}$$

Le théorème de Ménélaüs entraîne que :

$$\alpha\beta\gamma = 1.$$

Soit I, J et K les milieux respectifs de AA', BB' et CC'. On désigne par O un point arbitraire, on a toujours :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'})$$

et par suite :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\alpha}(\overrightarrow{OQ} - \alpha\overrightarrow{OR}) + \frac{1}{1+\alpha}(\overrightarrow{OQ} + \alpha\overrightarrow{OR}) \right) = \frac{1}{1-\alpha^2}(\overrightarrow{OQ} - \alpha^2\overrightarrow{OR})$$

Les points I, J, K apparaissent alors comme étant les barycentres de P, Q et R affectés des coefficients suivants :

$$I : (0, 1, -\alpha^2) , J : (-\beta^2, 0, 1) , K : (0, 1, -\gamma^2).$$

On a vu que $\alpha\beta\gamma = 1$, il s'ensuit que :

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 1.$$

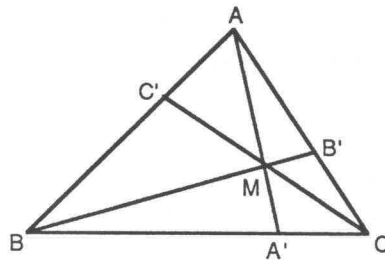
Le théorème de Ménélaüs montre alors que ces points sont alignés.

§13 Détermination de coordonnées barycentriques dans le plan.

Il s'agit de calculer les coefficients barycentriques α , β et γ d'un point donné M , relativement à un repère (A, B, C) du plan.

N.B. On convient de réserver désormais les lettres a , b , c pour désigner les longueurs des côtés du triangle ABC .

On écarte le cas, déjà traité, où M serait sur l'une des droites (BC) , (CA) ou (AB) . Nous supposons, comme précédemment, que les points A' , B' , C' sont situés respectivement sur les droites (BC) , (CA) et (AB) et que les droites (AA') , (BB') et (CC') se coupent en M .



Il y a essentiellement deux approches possibles, suivant qu'il est plus ou moins facile d'évaluer à un facteur près :

- les rapports : $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ et $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$

ou bien

- les aires des triangles MAB , MBC et MCA .

1) On suppose connus les rapports suivants :

$$p = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}, \quad q = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \quad \text{et} \quad r = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.$$

Les considérations, développées lors de l'analyse du Théorème de Ceva montrent que, le problème se réduit à déterminer trois nombres α , β et γ tels que :

$$p = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad q = -\frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{et} \quad r = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Si α est un nombre arbitraire non nul, les deux dernières relations donnent :

$$\beta = -\alpha r \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{\alpha}{q}.$$

Compte tenu du théorème de Ceva qui montre que $pqr = -1$, on a alors :

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{-\frac{\alpha}{q}}{-\alpha r} = \frac{1}{qr} = -p.$$

L'ensemble des solutions est donc de la forme suivante :

$$\left\{ \left(\alpha, -\alpha r, -\frac{\alpha}{q} \right) \mid \alpha \in \mathbf{R} \right\}$$

On pourra, grâce à cette méthode, montrer très facilement, par exemple que les coefficients barycentriques de l'orthocentre d'un triangle, non rectangle, s'expriment :

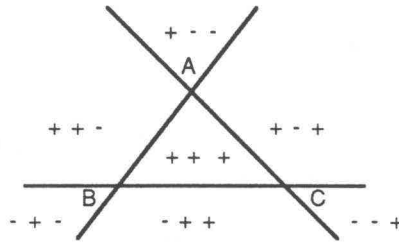
$$a \cos \hat{B} \cos \hat{C}, \quad b \cos \hat{C} \cos \hat{A}, \quad c \cos \hat{A} \cos \hat{B}$$

ou encore, puisque a, b et c sont proportionnels à $\sin \hat{A}$, $\sin \hat{B}$ et $\sin \hat{C}$:

$$\tan \hat{A}, \quad \tan \hat{B}, \quad \tan \hat{C}.$$

2) On interprète les coefficients barycentriques en termes d'aire.

On garde les notations précédentes. On définit l'aire algébrique du triangle MBC comme étant son aire géométrique affectée du signe "+" s'il a même orientation que le triangle ABC et du signe "-" dans le cas contraire. On définit de même l'aire algébrique des triangles MCA et MAB. Ainsi, selon que M appartient à l'une des sept régions du plan délimitées par les côtés du triangle ABC, les signes affectés aux aires des triangles MBC, MCA, MAB obéissent à la règle schématisée ci-dessous.



Soit M le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients α, β et γ . L'associativité du barycentre permet d'affirmer que :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + (\beta + \gamma) \overrightarrow{MA'} = \vec{0}.$$

Il s'ensuit que :

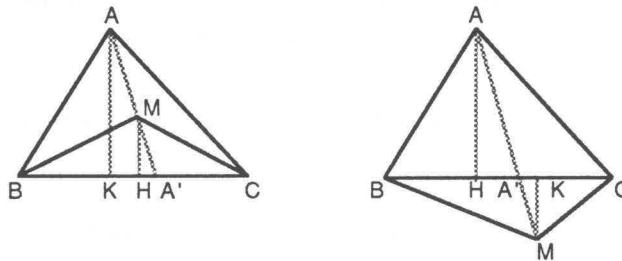
$$\alpha (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{A'A}) + (\beta + \gamma) \overrightarrow{MA'} = \vec{0},$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MA'} = \alpha \overrightarrow{AA'},$$

d'où il vient :

$$\frac{\overrightarrow{MA'}}{\overrightarrow{AA'}} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Soit H et K les projections orthogonales de A et M sur (BC).



On a évidemment :

$$\frac{\text{aire MBC}}{\text{aire ABC}} = \frac{\frac{1}{2} BC \overline{MK}}{\frac{1}{2} BC \overline{AH}} = \frac{\overline{MK}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{\text{aire MBC}}{\alpha} = \frac{\text{aire ABC}}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Ces considérations s'appliquent aussi bien aux triangles MCA et MAB, elles montrent que :

$$\frac{\text{aire MBC}}{\alpha} = \frac{\text{aire MCA}}{\beta} = \frac{\text{aire MAB}}{\gamma} .$$

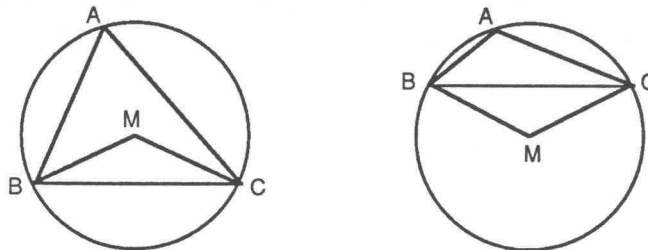
Ce qui se traduit par la proposition qui suit.

(13-1) Proposition : les aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques de M.

Ce résultat fournit un autre moyen commode de calculer des coefficients barycentriques pour certains points remarquables du triangle.

a) Le centre du cercle circonscrit.

Soit M le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



L'aire algébrique du triangle MBC est positive ou négative suivant que l'angle \widehat{BAC} du triangle ABC est aigu ou obtus. Si cet angle est aigu, on a :

$$\widehat{BMC} = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{A},$$

et dans le cas contraire :

$$\widehat{BMC} = 2\pi - 2\widehat{BAC} = 2\pi - 2\widehat{A} .$$

D'autre part, l'aire géométrique du triangle BMC est égale à

$$\frac{1}{2} R^2 \sin \widehat{BMC} ,$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Dans tous les cas, l'aire algébrique du triangle MBC s'exprime :

$$\frac{1}{2} R^2 \sin 2\widehat{A} .$$

Il en résulte que, des coefficients barycentriques du centre du cercle circonscrit sont :

$$\sin 2\widehat{A} , \sin 2\widehat{B} , \sin 2\widehat{C} ."$$

b) Le centre du cercle inscrit.

Soit I le centre et r le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC. Comme I est un point intérieur au triangle, les aires algébriques des triangles IBC, ICA, IAB sont positives. On a ainsi :

$$\text{aire ABC} = \frac{1}{2} ar , \text{aire ICA} = \frac{1}{2} br \text{ et } \text{aire IAB} = \frac{1}{2} cr .$$

Les nombres

$$a , b , c$$

sont donc des coefficients barycentriques du centre du cercle inscrit.

Un calcul analogue montrerait que les nombres

$$-a , b , c$$

sont des coefficients barycentriques du centre du cercle exinscrit dans l'angle A.

§14 La formule de Leibniz.

Soit A_1, \dots, A_n n points de E et a_1, \dots, a_n , n nombres réels ; on considère deux points M et M' de E , on a :

$$\begin{aligned} a_1 MA_1^2 + \dots + a_n MA_n^2 &= a_1 \overrightarrow{MA_1}^2 + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n}^2 \\ &= a_1 (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_1})^2 + a_2 (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_2})^2 + \dots + a_n (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_n})^2 \end{aligned}$$

Or on a :

$$(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_1})^2 = \overrightarrow{MM'}^2 + 2\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{M'A_1} + \overrightarrow{M'A_1}^2.$$

On développe ainsi chacun des carrés, puis on réduit l'expression, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} a_1 MA_1^2 + \dots + a_n MA_n^2 &= (a_1 + \dots + a_n) \overrightarrow{MM'}^2 + 2a_1 \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{M'A_1} + \dots + 2a_n \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{M'A_n} + a_1 M'A_1^2 + \dots + a_n M'A_n^2 \\ &= (a_1 + \dots + a_n) \overrightarrow{MM'}^2 + 2\overrightarrow{MM'} \cdot (a_1 \overrightarrow{M'A_1} + \dots + a_n \overrightarrow{M'A_n}) + a_1 M'A_1^2 + \dots + a_n M'A_n^2. \end{aligned}$$

Deux cas sont à envisager.

- Si $a_1 + \dots + a_n = 0$, le vecteur

$$\vec{v} = a_1 \overrightarrow{M'A_1} + \dots + a_n \overrightarrow{M'A_n}$$

est indépendant du point M' . On a alors :

$$(14-1) \quad a_1 MA_1^2 + \dots + a_n MA_n^2 = a_1 M'A_1^2 + \dots + a_n M'A_n^2 + 2 \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v}$$

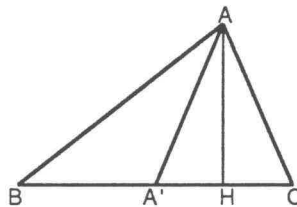
- Si $a_1 + \dots + a_n \neq 0$, le barycentre G des points A_1, \dots, A_n affectés des coefficients a_1, \dots, a_n est bien défini et l'on obtient la relation qui suit.

(14-2) Formule de Leibniz :

$$a_1 MA_1^2 + \dots + a_n MA_n^2 = (a_1 + \dots + a_n) MG^2 + a_1 GA_1^2 + \dots + a_n GA_n^2.$$

* Applications.

1) On considère un triangle ABC , on désigne par A' le milieu de BC et par H le pied de la hauteur issue de A .



- On affecte B et C de coefficients égaux à 1, la formule de Leibniz s'écrit alors :

$$AB^2 + AC^2 = (1+1)AA'^2 + A'B^2 + A'C^2.$$

On retrouve ainsi la "formule la médiane" :

$$AB^2 + AC^2 = 2.AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

- On affecte B et C des coefficients 1 et -1. On a dans ce cas :

$$\vec{v} = 1\vec{BB} - 1\vec{BC} = \vec{CB}.$$

La formule ci-dessus s'écrit :

$$AB^2 - AC^2 = A'B^2 - A'C^2 + 2\overline{AA'} \cdot \vec{v}.$$

On retrouve ainsi la relation classique :

$$AB^2 - AC^2 = 2 \overline{AA'} \cdot \overline{CB} = 2 \overline{A'H} \cdot \overline{BC}.$$

2) Détermination du lieu des points M tels que :

$$a_1 MA_1^2 + \dots + a_n MA_n^2 = k,$$

où a_1, \dots, a_n et k sont des nombres réels donnés. Ici encore, deux cas sont à envisager.

a) Si $a_1 + \dots + a_n = 0$.

- Si $\vec{v} = \vec{0}$, la valeur de l'expression $a_1 MA_1^2 + \dots + a_n MA_n^2$ est indépendante du point M. Le lieu cherché est donc, suivant la valeur de k , tout l'espace E, ou l'ensemble vide.

- Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, le lieu cherché est un plan perpendiculaire à la direction de \vec{v} .

b) Si $a_1 + \dots + a_n \neq 0$ alors on a :

$$(a_1 + \dots + a_n)MG^2 + a_1 GA_1^2 + \dots + a_n GA_n^2 = k.$$

Il s'ensuit que :

$$MG^2 = \frac{k - (a_1 GA_1^2 + \dots + a_n GA_n^2)}{a_1 + \dots + a_n}.$$

Ainsi, selon les données, le lieu cherché est soit :

- l'ensemble vide,
- le point G,
- une sphère de centre G.

Chapitre III : équations de droites et équations de plans

Le principe de la géométrie analytique consiste à substituer aux points et aux vecteurs leurs coordonnées relativement à un repère arbitraire. On peut ainsi remplacer tout ou partie des considérations géométriques par du calcul algébrique portant sur des nombres réels.

§15 Présentation paramétrique des droites et des plans.

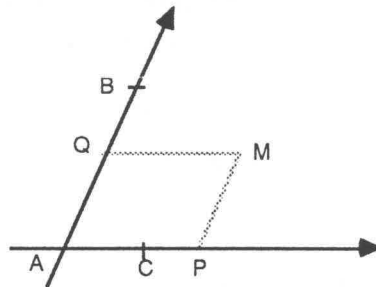
Rappelons brièvement les principes essentiels du repérage d'un point.

• Sur une droite D : étant donné un couple (A,B) de points distincts, tout point M de D est associé à un nombre unique λ tel que :

$$(1) \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

• Dans un plan P : étant donné un triplet (A,B,C) de points non alignés, tout point M de P est associé à un unique couple de nombres (λ, μ) tel que :

$$(2) \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}.$$



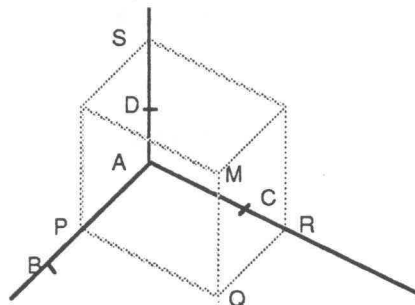
Les points P et Q tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AQ} = \mu \overrightarrow{AC}$$

sont les projections de M respectivement sur (AB) parallèlement à (AC) et sur (AC) parallèlement à (AB).

• Dans l'espace : étant donné un quadruplet de points non coplanaires (A, B, C, D), tout point M est associé à un unique triplet de nombres (λ, μ, ν) tel que :

$$(3) \quad \lambda \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} + \nu \overrightarrow{AD}.$$



Ce repère nous le noterons désormais (O, I, J, K) . Il pourra aussi bien être donné sous la forme $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si l'on convient que :

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \vec{j} = \overrightarrow{OJ}, \quad \vec{k} = \overrightarrow{OK}.$$

Dans ces conditions, tout point M est bien défini par ses coordonnées, c'est-à-dire le triplet (x, y, z) de nombres tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

De même, tout vecteur \vec{v} pouvant se présenter de façon unique sous la forme :

$$\vec{v} = \overrightarrow{OM}$$

sera bien défini par les coordonnées (x, y, z) du point M ainsi défini.

* Présentations paramétriques d'une droite

Considérons une droite D et deux points distincts de celle-ci : M_0 et M_1 donnés par leurs coordonnées respectives : (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) . Soit M un point quelconque de D . Relativement au repère (M_0, M_1) , la relation (1) s'écrit :

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \overrightarrow{M_0M_1} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

et se traduit, après projection sur les axes de coordonnées, par les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda (x_1 - x_0) \\ y - y_0 = \lambda (y_1 - y_0) \\ z - z_0 = \lambda (z_1 - z_0) \end{cases}$$

On en déduit une première présentation de la droite D par des équations paramétriques.

(15-1) Proposition : la droite (M_0M_1) est l'ensemble des points de coordonnées :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda (x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda (y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda (z_1 - z_0) \end{cases}$$

où le paramètre λ est un nombre réel quelconque.

On est naturellement conduit à remplacer la donnée de l'un des points par celle d'un vecteur directeur de la droite. Ici, on remplace la donnée de M_1 par celle du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{M_0M_1}$. On obtient alors la proposition qui suit.

(15-2) Proposition : étant donné un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et un vecteur \vec{v} non nul de coordonnées (a, b, c) , la droite qui passe par M_0 et admet \vec{v} pour vecteur directeur est l'ensemble des points de coordonnées :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

où le paramètre λ est un nombre réel quelconque.

On peut aussi écrire les relations de (15-1) sous la forme :

$$\begin{cases} x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \\ y = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \\ z = (1-\lambda)z_0 + \lambda z_1 \end{cases}$$

La droite D apparaît alors comme l'ensemble des barycentres des points M_0 et M_1 . Ceci nous donne une nouvelle variante de la présentation paramétrique d'une droite.

(15-3) Proposition : la droite (M_0M_1) est l'ensemble des points de coordonnées

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha x_0 + \beta x_1) \\ y = \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha y_0 + \beta y_1) \\ z = \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha z_0 + \beta z_1) \end{cases}$$

où les paramètres α et β sont deux nombres réels quelconques de somme non nulle.

Remarque : ces trois propositions s'appliquent au plan repéré par (O, I, J) en annulant toutes les cotes. Il est donc inutile de les adapter de façon explicite à la géométrie plane.

* Présentations paramétriques d'un plan.

Considérons un plan P donné par trois points non alignés M_0, M_1, M_2 dont les coordonnées sont notées (x_i, y_i, z_i) pour $i \in \{0, 1, 2\}$. La relation (2) s'écrit :

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \overrightarrow{M_0M_1} + \mu \overrightarrow{M_0M_2}$$

et se traduit, après projection, par les relations qui suivent.

(15-4) Proposition : le plan $(M_0M_1M_2)$ est l'ensemble des points de coordonnées :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$$

où les paramètres λ et μ sont deux nombres réels quelconques.

Il est possible de remplacer la donnée de l'un des points ou de deux d'entre eux par un ou deux vecteurs non nuls. Remplaçons la donnée de M_1 et M_2 par celle des vecteurs

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{M_0M_1} \text{ et } \vec{v}_2 = \overrightarrow{M_0M_2}.$$

On obtient alors la proposition qui suit.

(15-5) Proposition : on considère un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et deux vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 de directions distinctes, donnés par leurs coordonnées respectives (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) . Le plan qui passe par M_0 , dont la direction est définie par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 , est l'ensemble des points de coordonnées :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu a_2 \\ y = y_0 + \lambda b_1 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda c_1 + \mu c_2 \end{cases}$$

où les paramètres λ et μ sont deux nombres réels quelconques.

N.B. Le fait que les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 n'aient pas la même direction s'exprime par la condition :

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \text{ ou } a_1 c_2 - a_2 c_1 \neq 0.$$

On peut, comme pour la droite, faire apparaître le plan P comme ensemble des barycentres des trois points donnés. On obtient alors une présentation paramétrique homogène.

(15-6) Le plan $(M_0 M_1 M_2)$ est l'ensemble des points de coordonnées.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2) \\ y = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha y_0 + \beta y_1 + \gamma y_2) \\ z = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha z_0 + \beta z_1 + \gamma z_2) \end{cases}$$

où les paramètres α , β et γ sont trois nombres réels de somme non nulle.

§16 La droite dans le plan.

* Equations cartésiennes des droites.

Si nous rappelons ici des résultats élémentaires relatifs à la présentation de la droite sous forme implicite, c'est à seule fin de les replacer dans le présent contexte.

Le plan est rapporté à un repère, on considère une droite (D) donnée par ses équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$$

(où a et b ne sont pas tous les deux nuls).

Un point de coordonnées (x, y) appartient à D si, et seulement si, ces deux équations de l'inconnue λ ont une solution commune. Cette condition peut s'écrire

$$M \in D \Leftrightarrow bx - ay = bx_0 - ay_0.$$

Le membre de droite est une équation linéaire à deux inconnues : x et y, dont les coefficients ne sont pas simultanément nuls.

Réciproquement, considérons une équation quelconque de la forme :

$$ux + vy = w.$$

Le cas où les coefficients u et v sont tous deux nuls est sans intérêt. On écarte cette éventualité, ce qui nous conduit à envisager deux possibilités.

1) Si v est nul les solutions sont tous les couples (w/u, y) où y est un réel quelconque. C'est-à-dire que les solutions définissent les points d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

2) Si v est non nul, l'équation se résout en y sous la forme suivante :

$$y = -\frac{u}{v}x + \frac{w}{v}.$$

Les solutions sont donc tous les couples (x, y) tels que :

$$\begin{cases} x = 0 + \lambda \cdot 1 \\ y = \frac{w}{v} - \lambda \frac{u}{v} \end{cases}$$

où λ est un nombre réel quelconque. On reconnaît l'équation paramétrique de la droite D passant par le point de coordonnées (0, w/v) et dont la direction est celle du vecteur de coordonnées (1, -u/v).

La relation $ux + vy = w$ est donc une condition nécessaire et suffisante pour que le point de coordonnées (x, y) soit sur D.

Définition : dans ces conditions, on dira que $ux + vy = w$ est une équation cartésienne de D.

En résumé, on a démontré le théorème qui suit.

(16-1) Théorème : toute droite admet une équation de la forme $ux + vy = w$.

Toute relation $ux + vy = w$, où les coefficients u et v ne sont pas tous deux nuls, est l'équation cartésienne d'une droite.

* Interprétations métriques de l'équation cartésienne d'une droite.

On suppose que le repère choisi est **orthonormé** et l'on considère une droite D d'équation :

$$ax + by = c .$$

Soit M_0 un point de D, ses coordonnées (x_0, y_0) vérifient l'équation :

$$ax_0 + by_0 = c$$

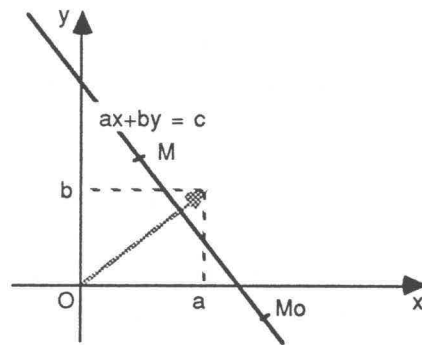
et l'on peut écrire l'équation de D sous la forme

$$ax + by = ax_0 + by_0$$

ou encore

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Notons \vec{v} le vecteur de coordonnées (a, b) , M le point courant du plan et (x, y) ses coordonnées.



La relation précédente s'écrit alors :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 .$$

et exprime que le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est orthogonal à \vec{v} . On en déduit le théorème qui suit.

(16-2) Théorème : si le plan est rapporté à un repère orthonormé, le vecteur non nul de coordonnées (a, b) est orthogonal à toute droite d'équation cartésienne :

$$ax + by = c.$$

* Distance d'un point à une droite.

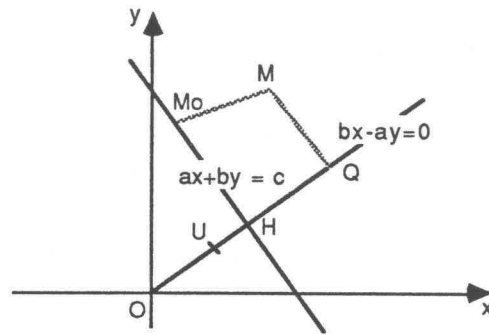
Le repère est toujours orthonormé. On considère :

- la droite D d'équation $ax + by = c$,
- un point arbitraire M_0 de D, dont les coordonnées sont (x_0, y_0) ,
- un point quelconque M de coordonnées (X, Y) .

Soit U le point tel que \overrightarrow{OU} soit un vecteur unitaire orthogonal à D. C'est-à-dire que :

$$\overrightarrow{OU} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a\vec{i} + b\vec{j}) .$$

On note H la projection orthogonale de l'origine sur D et Q la projection orthogonale de M sur la droite (OU).



On oriente la droite (OU) de O vers U. On a ainsi :

$$\overline{HQ} = 1 \cdot \overline{HQ} = \overline{OU} \cdot \overline{HQ} = \overline{OU} \cdot \overline{M_0M}.$$

Comme M_0 est sur D, on a : $ax_0 + by_0 = c$, et par suite :

$$\overline{HQ} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} [a(X - x_0) + b(Y - y_0)] = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (aX + bY - c).$$

On reconnaît, dans la dernière parenthèse, l'expression obtenue en substituant les coordonnées (X, Y) du point M dans l'équation de D, écrite sous la forme $ax + by - c = 0$. Oublions l'orientation de la droite (OU), ce résultat nous donne la proposition ci-dessous.

(16-3) Théorème : la distance du point de coordonnées (X, Y) à la droite d'équation $ax + by = c$ est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} |aX + bY - c|.$$

Convention : lorsque $a^2 + b^2 = 1$, on dira que l'équation de droite $ax + by - c = 0$ est normale.

Une telle équation peut encore s'écrire sous la forme

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + p = 0,$$

où $|p|$ représente la distance de l'origine à la droite ainsi définie.

§17 Systèmes linéaires - méthode d'élimination de Gauss.

Dans cette section, nous proposons une approche pragmatique de la résolution des systèmes d'équations linéaires. Cette question est traitée de façon exhaustive par ailleurs.

On dit qu'une équation algébrique est linéaire lorsqu'elle est du premier degré. Elle est alors de la forme suivante

$$(L) \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b .$$

où x_1, \dots, x_n sont les inconnues et a_1, \dots, a_n et b sont des coefficients réels.

Un système linéaire est la conjonction d'un certain nombre d'équations linéaires ayant les mêmes inconnues.

La donnée d'un système linéaire se présente en général sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=2 \end{cases}, \begin{cases} 2x+3y+5z=3 \\ 3x+2y+z=2 \end{cases}, \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=2 \\ x+y=0 \end{cases}, \begin{cases} 2x+3y+5z=3 \\ 3x+2y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} .$$

* Systèmes échelonnés.

Considérons les systèmes suivants

$$(1) \begin{cases} x+y+2z=-1 \\ y+3z=1 \\ z=2 \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} x+y-z+t=2 \\ y+t=0 \\ z+t=1 \end{cases} .$$

On peut les résoudre immédiatement par substitutions successives. On obtient pour le premier :

$$z=2, \quad y=1-3 \times 2 = -5, \quad x=-1+5-2 \times 2 = 0,$$

ce qui livre l'unique solution :

$$(0, -5, 2).$$

Pour le second système on procède à un calcul analogue en laissant l'une des inconnues indéterminée. On obtient la "solution générale" sous forme paramétrique :

$$x=3-t, \quad y=-t, \quad z=1-t \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

On peut aussi exprimer l'ensemble des solutions sous la forme :

$$S = \{(3-t, -t, 1-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Les deux systèmes linéaires que nous venons de considérer ont en commun leur forme dite échelonnée. Il n'est pas indispensable d'en donner ici une définition explicite. On peut se satisfaire de l'image suivante. Une colonne est associée à chaque inconnue. Chaque colonne repose sur une marche d'un escalier, une même marche pouvant porter plusieurs colonnes. Cette forme échelonnée autorise dans tous les cas la résolution "de bas en haut" par des substitutions successives.

* Les opérations élémentaires sur les lignes

Définition : étant donné deux systèmes linéaires ayant un même nombre d'inconnues ; on dit qu'ils sont équivalents s'ils ont même ensemble de solutions.

(17-1) Proposition : les opérations suivantes transforment un système linéaire en un système équivalent :

- (I) l'échange de deux lignes,
- (II) la multiplication de tous les coefficients d'une ligne par un même facteur **non nul**,
- (III) l'addition à tous les coefficients d'une ligne de leurs homologues pris dans une autre ligne arbitrairement choisie.

Démonstration : pour (I) et (II) c'est immédiat, pour (III) il s'agit, pour l'essentiel, d'un problème d'écriture. Celui-ci se résout de lui-même quand on dispose du cadre formel adapté : le calcul matriciel.

Définition : Les transformations (I) (II) et (III) sont dites élémentaires.

Notation : il est commode de décrire ces opérations sous la forme suivante :

- (I) $L_i \leftrightarrow L_j$
- (II) $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- (III) $L_i \leftarrow L_i + L_j$

où, naturellement, le symbole L_i représente la i -ème ligne.

* Méthode d'élimination de Gauss

Il s'agit, partant d'un système linéaire donné, de construire une suite de systèmes équivalents, de façon à obtenir un système échelonné. Pour cela on utilise à chaque pas des combinaisons simples d'opérations élémentaires. Examinons deux exemples.

Exemple 1 : soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 12 \\ 5x - 6y + 2z = -1 \\ -4x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Le premier coefficient de la première équation étant non nul on peut le choisir comme "pivot" de l'élimination de x dans la deuxième et la troisième équation. On procède, pour cela, aux combinaisons de transformations élémentaires symbolisées par :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow 5L_3 + 4L_1.$$

On obtient ainsi le système équivalent :

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 12 \\ -8y + z = -13 \\ 18y + 9z = 63 \end{cases}$$

On poursuit le calcul, en éliminant le coefficient de y dans la dernière ligne, au moyen de l'opération : $L_3 \leftarrow 4L_3 - 9L_2$. On obtient alors :

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 12 \\ -8y + z = -13 \\ 45z = 135 \end{cases}$$

Ce système est échelonné, il se résout immédiatement et livre la solution du système donné :
 $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Remarque : chacun, s'il le désire, peut rendre ces opérations mécaniques en pensant à des produits en croix.

Dans la la pratique, on évite de recopier les lignes dont on sait qu'elles ne seront plus modifiées. On repère leur forme définitive par un moyen quelconque afin de faciliter le bilan final. (on souligne, on encadre, on change de couleur d'encre ou, comme ici, on utilise des caractères gras)

Exemple 2 : Dans le système suivant m représente un paramètre.

$$\begin{cases} \mathbf{x + y - z - t = 0} \\ \mathbf{x + 3y} = 2 \\ \mathbf{z + t = 1} \\ \mathbf{2x + 4y - z - t = m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{2y + z + t = 2} \\ \mathbf{z + t = 1} \\ \mathbf{2y + z + t = m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{z + t = 1} \\ \mathbf{0 = m - 2} \end{cases}$$

Le système donné est équivalent au système échelonné ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{x + y - z - t = 0} \\ \mathbf{2y + z + t = 2} \\ \mathbf{z + t = 1} \\ \mathbf{0 = m - 2} \end{cases}$$

Si $\underline{m \neq 2}$ la dernière condition est contradictoire. On dira alors que le système donné est incompatible.

Si $\underline{m = 2}$ la dernière équation est la condition triviale " $0 = 0$ " et l'on peut procéder à la résolution en donnant à t une valeur arbitraire. On obtient ainsi :

$$x = y = 1/2 , z = 1 - t \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

On dit alors que $m = 2$ est la condition de compatibilité du système.

Désignant par S l'ensemble des solutions on aura en conclusion :

- si $m \neq 2$: $S = \emptyset$,
- si $m = 2$: $S = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Ces deux exemples nous offrent un échantillon de tous les cas possibles. Un système d'équations linéaires peut, suivant les cas :

- être incompatible,
- admettre une solution unique,
- admettre une infinité de solutions.

Dans ce dernier cas, on peut présenter l'ensemble des solutions sous forme paramétrique en exprimant les inconnues dites principales en fonction des inconnues non principales, ces dernières pouvant prendre toute valeur réelle.

En résumé

La méthode de Gauss pour résoudre un système d'équations linéaires se déroule comme suit.

- On choisit un "pivot d'élimination", en général, le premier coefficient non nul de la première inconnue.
- L'équation correspondante est mise en première position du système transformé.
- On procède aux opérations de lignes qui éliminent les autres coefficients de la colonne du pivot.
- On recommence les opérations décrites ci-dessus pour le système obtenu après suppression de la ligne du pivot,

... ceci tant qu'il reste au moins deux lignes à traiter.

On aboutit ainsi à un système échelonné qui, s'il est compatible, pourra avoir suivant les cas :

- une solution unique
- un ensemble de solutions qu'il est possible de présenter sous forme paramétrique en exprimant les inconnues principales en fonction des inconnues non principales.

Remarque : nous n'avons considéré que des nombres réels pour ne pas disperser l'attention. Mais il est facile de se rendre compte que \mathbb{R} peut être remplacé par tout corps commutatif, en particulier par le corps des nombres complexes.

§18 Le plan dans l'espace.

* Equation cartésiennes des plans.

Nous reprenons ici strictement la démarche suivie à la section 2 en nous plaçant dans l'espace à trois dimensions rapporté à un repère. On considère un plan P donné sous forme paramétrique par les équations :

$$(1) \quad \begin{cases} x - x_0 = \lambda a + \mu a' \\ y - y_0 = \lambda b + \mu b' \\ z - z_0 = \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

Pour un point M donné par ses coordonnées (x, y, z) , les équations ci-dessus forment un système linéaire de trois équations à deux inconnues λ et μ . Il est clair qu'on a :

$$M \in P \Leftrightarrow (1) \text{ est compatible.}$$

La méthode de Gauss va nous conduire à une condition équivalente en forme d'équation linéaire.

Une permutation éventuelle de λ et μ ou des coordonnées peut toujours nous ramener au cas où $a \neq 0$. On choisit a pour pivot, afin d'éliminer λ dans les deux dernières équations. Celles-ci deviennent respectivement :

$$a(y - y_0) - b(x - x_0) = \mu(ab' - a'b)$$

$$a(z - z_0) - c(x - x_0) = \mu(ac' - a'c)$$

Comme l'on sait que, par hypothèse, les coefficients a, b, c et a', b', c' ne sont pas proportionnels, on est sûr que l'un, au moins, des coefficients de μ n'est pas nul. Il est alors possible de procéder à l'élimination de μ dans l'une des deux équations qui prendra la forme suivante :

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0.$$

On obtient ainsi une condition de compatibilité du système de la forme :

$$ux + vy + wz = d$$

où les coefficients u, v, w et d sont des nombres réels indépendants de x, y, z .

En conclusion nous avons établi que pour tout plan P, il existe des nombres réels u, v, w et d tels que, pour tout point M de coordonnées (x, y, z) on ait

$$M \in P \Leftrightarrow ux + vy + wz = d.$$

Ajoutons que u, v, w ne sont pas tous nuls car la condition $M \in P$ ne peut être équivalente

- ni à la condition contradictoire " $0 = d$ et $d \neq 0$ ",
- ni à la condition vide " $0 = 0$ ".

Réciproquement, on considère l'équation :

$$ux + vy + wz = d$$

dont les coefficients u, v, w ne sont pas tous les trois nuls. On peut toujours supposer $u \neq 0$, alors la solution générale s'écrit :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{u} (d - \lambda v - \mu w) \\ y = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 \\ z = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 \end{cases} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R} .$$

On reconnaît les équations paramétriques du plan qui passe par le point de coordonnées $(d/u, 0, 0)$ et dont la direction est définie par les vecteurs de coordonnées :

$$(-d/u, 1, 0) \text{ et } (-w/u, 0, 1)$$

Ainsi, nous avons démontré le résultat qui suit.

(18-1) Proposition.

1) Tout plan admet une équation cartésienne de la forme :

$$ux + vy + wz = d.$$

2) Toute équation $ux + vy + wz = d$, dont les coefficients u, v, w ne sont pas tous les trois nuls est l'équation cartésienne d'un plan.

* Interprétation métrique.

Les démonstrations de la section 2, concernant la droite dans le plan, s'adaptent immédiatement à l'espace et donnent les deux propositions qui suivent.

(18-2) Proposition : l'espace étant rapporté à un repère orthonormé ; un vecteur non nul de coordonnées (a, b, c) est orthogonal à tout plan d'équation :

$$ax + by + cz = d.$$

(18-3) Proposition : la distance du point de coordonnées (X, Y, Z) au plan d'équation $ax + by + cz = d$ est égale à :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} | aX + bY + cZ - d |$$

Chapitre IV : géométrie orientée

§19 Aires et volumes algébriques.

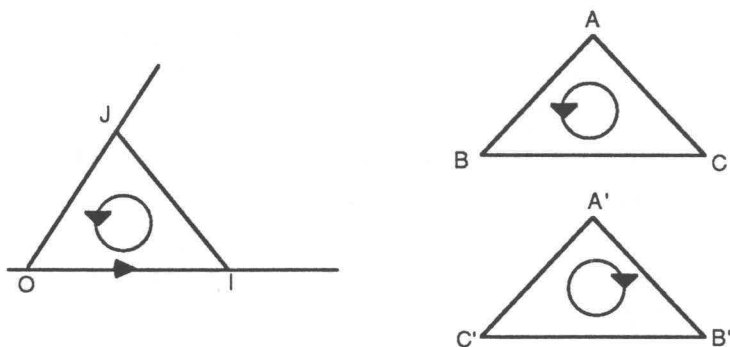
* Aire algébrique

Le plan est rapporté à un repère (O,I,J).

On considère un triangle orienté (A,B,C). On définit son aire algébrique comme étant son aire géométrique affectée du signe.

" + " si les triangles (A,B,C) et (O,I,J) ont la même orientation.

" - " dans le cas contraire.



N.B. Un triangle aplati n'a pas plus d'orientation que 0 n'a de signe.

Nous allons voir qu'il est facile d'exprimer le rapport des aires algébriques des triangles orientés (A,B,C) et (O,I,J) en fonction des coordonnées de A, B et C. Il suffit pour cela de s'appuyer sur les deux propriétés élémentaires ci-dessous.

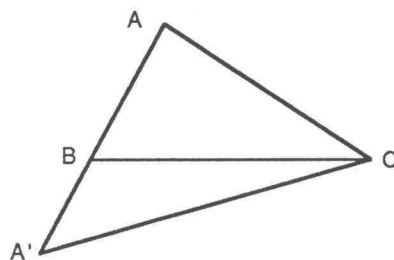
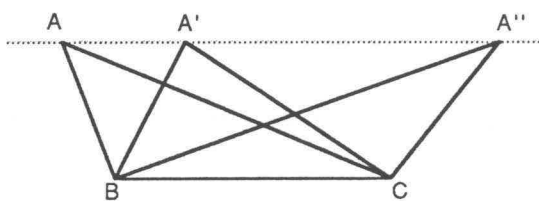
On considère deux triangles ayant un côté commun : ABC et A'BC.

(1) Si (AA') est parallèle à (BC), alors

$$\text{aire}(A',B,C) = \text{aire}(A,B,C)$$

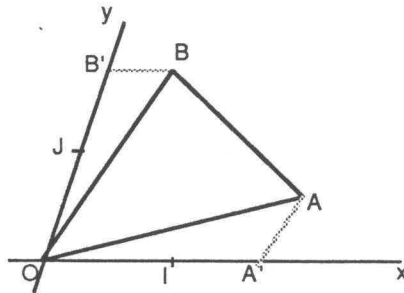
(2) Si B est aligné avec les sommets A et A', alors

$$\frac{\text{aire}(A',B,C)}{\text{aire}(A,B,C)} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{BA}}$$



Une translation ne modifiant ni l'aire ni l'orientation d'un triangle, on peut, sans nuire en rien à la généralité du propos, se limiter à ne considérer que des triangles ayant un sommet à l'origine du repère.

Soit (O,A,B) un triangle orienté donné par les coordonnées des sommets A et B : respectivement (a_1, a_2) et (b_1, b_2) . Nous supposons que B n'est pas sur la droite (OI) , c'est à dire que $b_2 \neq 0$.



On note A' la projection de A sur (OI) parallèlement à (OB) , et B' la projection de B sur (OJ) parallèlement à (OI) . La propriété (1) se traduit immédiatement par les deux égalités :

$$\text{aire}(O,A,B) = \text{aire}(O,A',B) = \text{aire}(O,A',B').$$

On applique (2) il vient, en notant a'_1 l'abscisse de A' :

$$\text{aire}(O,A',B') = a'_1 \cdot \text{aire}(O,I,B') = a'_1 \cdot b_2 \cdot \text{aire}(O,I,J).$$

On arrive ainsi à la relation :

$$\text{aire}(O,A,B) = a'_1 \cdot b_2 \cdot \text{aire}(O,I,J).$$

On calcule a'_1 en utilisant les équations paramétriques de la droite qui passe par A et admet pour vecteur directeur \overrightarrow{OB} :

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda b_1 \\ y = a_2 + \lambda b_2 \end{cases}$$

y s'annule pour $\lambda = -a_2/b_2$, x prend alors la valeur suivante :

$$a'_1 = a_1 - \frac{a_2}{b_2} b_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2}.$$

ce qui fait que :

$$\text{aire}(O,A,B) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \text{aire}(O,I,J).$$

On vérifie sans peine que cette formule reste vraie quand $b_2 = 0$ et qu'elle s'applique encore dans le cas où le triangle OAB est aplati.

Définition : on appelle déterminant d'ordre 2 la fonction de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R} qui, à tout tableau à quatre éléments, dont les lignes sont notées (a,b) et (c,d) associe le nombre $ad - bc$, qu'on note :

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

La formule précédente donnera, pour un triangle quelconque, après translation éventuelle, la proposition qui suit.

(19-1) Théorème : le plan étant rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère trois points A, B, C tels que :

$$\vec{CA} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} \text{ et } \vec{CB} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}.$$

On a :

$$\frac{\text{aire}(A,B,C)}{\text{aire}(O,I,J)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Dans la pratique, on choisit un repère orthonormé, l'aire du carré construit sur le repère est alors unitaire et la formule obtenue donne directement l'aire d'un parallélogramme orienté.

(19-2) Théorème : le plan étant rapporté à un repère orthonormé, on considère un parallélogramme ABCD, tel que :

$$\vec{AB} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} \text{ et } \vec{BC} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}.$$

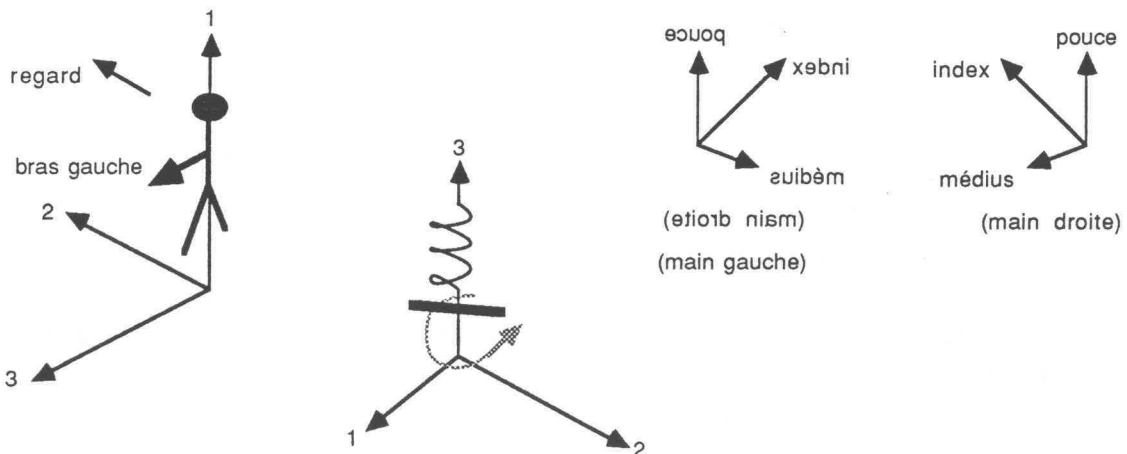
Alors on a :

$$\text{aire}(A,B,C,D) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Démonstration : le résultat est la conséquence immédiate du théorème précédent. car on a :
 $\text{aire}(A,B,C,D) = 2\text{aire}(A,B,C)$ et $1 = 2\text{aire}(O,I,J)$.

* Volume algébrique.

Nous supposons connu du lecteur l'un des "trucs" classiques qui permettent de comparer les orientations de deux repères de l'espace : bonhomme d'Ampère, tire-bouchon de Maxwell, trois doigts : pouce-index-médium de la main droite ou gauche, . . .



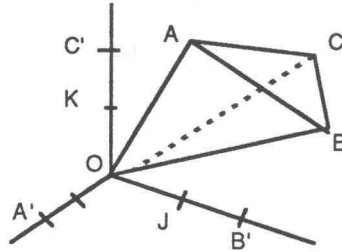
On considère un repère quelconque (A,B,C,D) de l'espace. Nous pouvons définir le volume algébrique du tétraèdre orienté qui lui est associé, comme étant son volume géométrique affecté du signe "+" ou "-", suivant que le repère considéré a, ou non, la même orientation que le repère de référence (O,I,J,K) . On notera ce nombre : $\text{vol}(A,B,C,D)$.

N.B. Cette définition s'étend à tout tétraèdre aplati qui, c'est clair, sera de volume nul.

La démarche suivie dans le plan s'adapte facilement à l'espace.

Nous laissons au lecteur le soin d'ajuster la formulation de (1) et (2), de considérer trois points définis par leurs coordonnées :

$$A : (a_1, a_2, a_3), \quad B : (b_1, b_2, b_3), \quad C : (c_1, c_2, c_3),$$



de prendre les précautions nécessaires pour pouvoir définir les points suivants :

- A' la projection de A sur (OI) parallèlement au plan (OBC)
- B' la projection de B sur (OJ) parallèlement au plan (OA'C)
- C' la projection de C sur (OK) parallèlement au plan (OA'B'), autrement dit, parallèlement au plan (OIJ).

Il apparaît alors si l'on note :

$$a'_1 \text{ l'abscisse de } A' \text{ et } b'_2 \text{ l'ordonnée de } B'$$

qu'on a la relation suivante :

$$\text{vol}(O, A, B, C) = c_3 \cdot b'_2 \cdot a'_1 \cdot \text{vol}(O, I, J, K).$$

On calcule a'_1 et b'_2 en utilisant des équations paramétriques convenablement choisies, on obtient ainsi :

$$a'_1 = \frac{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)}{b_2c_3 - b_3c_2},$$

$$b'_2 = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{c_3}.$$

On a donc :

$$\frac{\text{vol}(A, B, C, D)}{\text{vol}(O, I, J, K)} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

La forme de ce résultat conduit à poser la définition qui suit.

Définition : on appelle déterminant d'ordre 3 l'application de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ dans \mathbb{R} qui, à tout tableau de nombres dont les lignes sont notées

$$(a_i, b_i, c_i) \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

fait correspondre le nombre suivant :

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1),$$

Celui-ci s'exprime encore :

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

On convient de le noter :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(19-3') Le résultat précédent peut alors s'exprimer :

$$\frac{\text{vol}(A,B,C,D)}{\text{vol}(O,I,J,K)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

En considérant le cas d'un tétraèdre aplati, on obtient la proposition qui suit.

(19-4) Proposition : l'origine 0 est dans le plan (ABC) si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Nous supposons maintenant que le repère (O,I,J,K) est **orthonormé**. Le pavé P qui admet O, A, B, C pour sommets est orienté par la donnée de (O,A,B,C), il aura pour volume algébrique :

$$\text{vol}(P) = 6 \cdot \text{vol}(O,A,B,C),$$

on a aussi :

$$1 = 6 \cdot \text{vol}(O,I,J,K).$$

On en déduit l'énoncé qui suit en tenant compte de l'invariance du volume algébrique par translation.

(19-5) Théorème : l'espace étant rapporté à un repère orthonormé, le volume algébrique du pavé orienté P défini par les trois vecteurs de coordonnées :

$$(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$$

s'exprime :

$$\text{vol}(P) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

* Propriétés du déterminant d'ordre 3

Règle de Sarrus : on retrouve sans effort la formule donnant le développement d'un déterminant si l'on retient qu'elle comporte six termes, dont les signes sont distribués suivant le schéma ci-après :

$$\begin{array}{ccc}
 \times & \times & \times \\
 \times & \times & \times \\
 \times & \times & \times
 \end{array}
 + \begin{array}{ccc}
 \times & \times & \times \\
 \times & \times & \times \\
 \times & \times & \times
 \end{array}
 - \begin{array}{ccc}
 \times & \times & \times \\
 \times & \times & \times \\
 \times & \times & \times
 \end{array}$$

On remarquera, en outre, que l'expression d'un déterminant, telle qu'elle est donnée dans la définition, change de signe, si l'on échange les positions de deux des lettres a, b, c ou de deux des indices 1, 2, 3.

(19-6) Proposition : un échange de deux colonnes (resp. de deux lignes) change la valeur d'un déterminant en son opposé.

On remarquera qu'il existe un développement, analogue à celui donné dans la définition, pour chaque ligne et pour chaque colonne. Les signes des trois termes de chacun de ces six développements sont attribués suivant le schéma ci-dessous.

$$\begin{vmatrix}
 + & - & + \\
 - & + & - \\
 + & - & +
 \end{vmatrix}$$

La forme commune de ces expressions nous donne la propriété ci-après.

(19-9) Proposition : le déterminant est une fonction linéaire relativement à chaque ligne et à chaque colonne.

Ceci veut dire qu'on a, par exemple pour la première colonne, d'une part :

$$\begin{vmatrix}
 a_1+a'_1 & b_1 & c_1 \\
 a_2+a'_2 & b_2 & c_2 \\
 a_3+a'_3 & b_3 & c_3
 \end{vmatrix}
 = \begin{vmatrix}
 a_1 & b_1 & c_1 \\
 a_2 & b_2 & c_2 \\
 a_3 & b_3 & c_3
 \end{vmatrix}
 + \begin{vmatrix}
 a'_1 & b_1 & c_1 \\
 a'_2 & b_2 & c_2 \\
 a'_3 & b_3 & c_3
 \end{vmatrix}$$

et d'autre part :

$$\begin{vmatrix}
 \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\
 \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\
 \lambda a_3 & b_3 & c_3
 \end{vmatrix}
 = \lambda \begin{vmatrix}
 a_1 & b_1 & c_1 \\
 a_2 & b_2 & c_2 \\
 a_3 & b_3 & c_3
 \end{vmatrix}$$

Nous conclurons cette section en notant que la proposition (19-4) peut encore s'écrire sous la forme qui suit.

(19-10) Théorème : l'espace est rapporté à un repère.

On considère trois points non alignés : M_0, M_1, M_2 de coordonnées respectives (x_i, y_i, z_i) pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ et un point quelconque M de coordonnées (x, y, z) .

M est un point du plan $(M_0M_1M_2)$ si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0 .$$

On retrouve ainsi, donnée par une formule, l'équation cartésienne du plan qui passe par les trois points donnés.

§20 Produit mixte et produit vectoriel.

* Déterminant de trois vecteurs.

On considère trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} donnés dans un certain repère par leurs coordonnées :

$$(u_1, u_2, u_3) , (v_1, v_2, v_3) , (w_1, w_2, w_3).$$

Le déterminant de leurs coordonnées :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

dépend autant de la donnée du repère que de celle des vecteurs eux mêmes. En revanche, si l'on impose systématiquement aux repères d'être orthonormés et d'avoir tous une même orientation, ce déterminant devient alors une fonction des seuls vecteurs. En il représente alors le volume algébrique de tout pavé qui aurait pour sommets des points A, B, C, D tels que :

$$\vec{AB} = \vec{u} , \vec{AC} = \vec{v} , \vec{AD} = \vec{w}$$

Ainsi, on est conduit à **orienter l'espace**, c'est-à-dire qu'on distingue l'une des deux orientations possibles pour un repère. La convention usuelle appelle positive ou directe l'orientation associée au trois doigts de la main droite : pouce-index-médus pris dans cet ordre.

Dans toute la suite, le repère de référence sera systématiquement supposé **orthonormé direct**.

Définition : dans ces conditions, le déterminant ci-dessus est appelé le produit mixte des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} et noté :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Les propriétés algébriques du produit mixte sont la traduction de celles du déterminant considéré comme une fonction à trois arguments vectoriels. On retiendra tout particulièrement ce qui suit.

(20-1) Théorème : pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a :

$$(1) \quad -(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = (\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}),$$

$$(2) \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}).$$

De plus, le produit mixte est une fonction linéaire de chacun de ses arguments.

* Le produit vectoriel

(20-2) Etant donné deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , il existe un unique vecteur \vec{p} , tel que pour tout \vec{x} on ait :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = \vec{p} \cdot \vec{x}.$$

Définition : le vecteur \vec{p} , ainsi défini, est appelé le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} . On le note

$$\vec{p} = \vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Démonstration : on suppose que \vec{p} existe, on note (u_1, u_2, u_3) , (v_1, v_2, v_3) , (p_1, p_2, p_3) les coordonnées respectives de \vec{u} , \vec{v} , \vec{p} relatives au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (qu'on suppose toujours orthonormé direct). On remplace \vec{x} successivement par \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} dans la condition de l'énoncé, on obtient :

$$p_1 = \vec{p} \cdot \vec{i} = u_2 v_3 - u_3 v_2,$$

$$p_2 = \vec{p} \cdot \vec{j} = -(u_1 v_3 - u_3 v_1),$$

$$p_3 = \vec{p} \cdot \vec{k} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

En conséquence \vec{p} est donné par l'expression suivante :

$$\vec{p} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}.$$

Réciproquement, considérons le vecteur ainsi défini. L'expression du produit scalaire

$$\vec{p} \cdot \vec{x} = x_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

ne fait que reproduire la formule obtenue par développement, suivant la troisième colonne, du déterminant qui exprime le produit mixte de \vec{u} , \vec{v} et \vec{x} , à savoir :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}).$$

L'existence et l'unicité de \vec{p} sont ainsi démontrées. •

On retiendra de cette démonstration l'expression du produit vectoriel de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées, on la rappelle dans l'énoncé qui suit.

(20-4) Théorème : l'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de coordonnées respectives

$$(u_1, u_2, u_3) \text{ et } (v_1, v_2, v_3)$$

On a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}.$$

Remarque : un moyen commode pour retenir ce résultat est de regarder l'expression donnant $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme le développement du "déterminant" suivant :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \vec{i} \\ u_2 & v_2 & \vec{j} \\ u_3 & v_3 & \vec{k} \end{vmatrix}$$

! Il va sans dire que cette formule n'a, littéralement, aucun sens et qu'il ne s'agit là que d'un moyen mnémotechnique.

(20-5) Propriétés algébriques du produit vectoriel : pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et pour tous réels λ et μ , on a :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \\ (2) \quad & (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{w}) + \mu(\vec{v} \wedge \vec{w}) \\ (3) \quad & \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) + \mu(\vec{u} \wedge \vec{w}) \end{aligned}$$

On résume ceci en disant que le produit vectoriel est antisymétrique et bilinéaire.

! **N.B.** le produit vectoriel n'est pas associatif, on pourra à titre d'exercice démontrer la formule dite du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

On attendra cependant d'avoir pris connaissance des points 1) et 2) de l'énoncé essentiel qui suit.

(20-6) Théorème : propriétés géométriques du produit vectoriel.

1) Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul si, et seulement si, \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

2) Si $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq 0$, alors :

a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} ;

b) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire de tout parallélogramme ABCD tel que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \vec{v} ;$$

c) pour tout point Ω , $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est un repère d'orientation directe.

Démonstration : la définition aussi bien que l'expression des coordonnées d'un produit vectoriel justifient le point 1) de façon immédiate.

Le point 2a) est prouvé par la définition et :

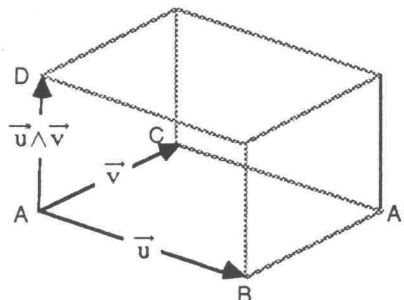
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{0}.$$

La clef du 2b) est donnée par la formule bien connue :

"Volume d'un pavé = aire de la base \times hauteur"

On considère quatre points A, B, C, D tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{u} \wedge \vec{v}.$$



Le point a) montre que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est la hauteur relative à la face $ABA'C$. On peut alors conduire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ &= (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \\ &= \text{volume du pavé} \\ &= \text{aire}(ABCA') \cdot \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|. \end{aligned}$$

Comme on a supposé : $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq 0$, on a bien :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \text{aire}(ABA'C).$$

Enfin, on a montré, en passant, que le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est positif et le point 2c) est acquis.

Du point 2 b) on tire la propriété qui suit.

(20-7) Corollaire : on considère trois points distincts A, B et C, on convient de poser $\alpha = \widehat{BAC}$.

On a toujours :

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \alpha = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$

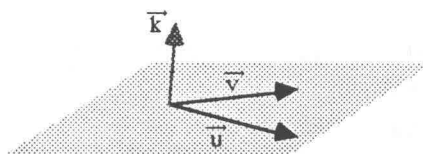
Remarque : on prendra bien garde que, dans l'espace, il est hors de question d'orienter les angles. En revanche, si les points A, B et C de la proposition ci-dessus sont pris dans un plan, orienté par la donnée d'un vecteur unitaire normal \vec{k} - ce qui est toujours possible - alors on a :

$$\frac{\vec{AB} \wedge \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \sin(\widehat{BAC}) \cdot \vec{k}.$$

Cette dernière formule peut s'écrire sous la forme purement vectorielle qui suit :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\widehat{u, v}) \cdot \vec{k}$$

Ceci vaut sous la seule hypothèse que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} appartiennent à la direction d'un plan orienté par la donnée d'un vecteur unitaire \vec{k} normal à celui-ci.



chapitre V : introduction à la géométrie de \mathbb{R}^n

§21 L'espace \mathbb{R}^n .

La géométrie analytique nous a familiarisé avec le calcul algébrique portant sur les éléments de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Jusqu'à ce point, la pertinence des calculs que nous pouvions mener, était assurée par leur traduction géométrique. Désormais, il convient de donner à ce type de calculs un cadre algébrique approprié qui, en nous dispensant de la référence systématique à la géométrie, élargira le champ d'application des propriétés mises en oeuvre. C'est pourquoi, nous sommes conduits à considérer les ensembles

$$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$$

comme des membres d'une famille dont l'élément générique s'écrit \mathbb{R}^n , où n est un entier positif arbitraire. Pour clore cette partie, nous nous bornerons à généraliser à \mathbb{R}^n des propriétés familières qui se prêtent à cette entreprise par simple abstraction du contexte géométrique et ne nécessitent pas le recours à un formalisme élaboré.

* L'espace vectoriel \mathbb{R}^n .

L'entier n étant donné ($n \geq 1$), \mathbb{R}^n apparaît comme l'ensemble des suites formées de n termes réels.

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

L'usage de la flèche n'est ici qu'un moyen commode d'éviter les confusions entre nombres et suites de nombres.

Cet ensemble est muni de deux opérations naturelles :

- l'une interne : l'addition qui à tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ associe

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

- l'autre externe qui à tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et à tout $\lambda \in \mathbb{R}$ associe :

$$\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

et qu'on appelle : multiplication par le scalaire λ .

Comme ces deux lois opèrent terme à terme, les propriétés algébriques de \mathbb{R} justifient, de façon immédiate, les assertions qui suivent.

Convention : on note

$$(0, \dots, 0) = 0 \text{ ou } \vec{0}$$

et pour tout $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$-\vec{x} = (-x_1, \dots, -x_n).$$

(21-1) Proposition : Pour tous $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ éléments de \mathbb{R}^n on a :

- | | | |
|-----|---|--|
| (1) | $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ | (commutativité) |
| (2) | $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ | (associativité) |
| (3) | $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ | ($\vec{0}$ est élément neutre) |
| (4) | $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ | ($-\vec{x}$ est l'opposé de \vec{x}) |

Pour tous \vec{x}, \vec{y} appartenant à \mathbb{R}^n , pour tous nombres réels λ et μ , on a :

- | | | |
|-----|--|------------------|
| (5) | $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$ | (distributivité) |
| (6) | $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$ | (distributivité) |
| (7) | $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$ | |
| (8) | $1.\vec{x} = \vec{x}$ | |

En bref : \mathbb{R}^n est un espace vectoriel (à coefficients réels).

* Droites - plans - hyperplans.

La donnée d'un élément non nul \vec{a} de \mathbb{R}^n définit, pour tout $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, le sous ensemble

$$\{\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

qui sera appelé une droite.

La donnée de deux éléments non nuls \vec{a} et \vec{b} de \mathbb{R}^n , dont les composantes ne sont pas proportionnelles, définit pour tout $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ le sous-ensemble :

$$\{\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

qui sera appelé un plan.

Ces définitions se justifient, de façon naturelle, par le fait que ces objets ont les propriétés caractéristiques des droites et plans de la géométrie, ce qui apparaît quand on développe le concept de dimension.

Une condition de la forme

$$\vec{x} \in H \Leftrightarrow u_1 x_1 + \dots + u_n x_n = v$$

où les coefficients u_1, \dots, u_n et v sont des réels, les u_i n'étant pas tous nuls, définit un sous-ensemble H de \mathbb{R}^n qu'on appelle un hyperplan.

Si l'on écrit les solutions de l'équation :

$$u_1 x_1 + \dots + u_n x_n = v,$$

ici en supposant que $u_n \neq 0$, on obtient :

$$x_n = (v - u_1 x_1 - \dots - u_{n-1} x_{n-1}) / u_n,$$

où x_1, \dots, x_{n-1} sont des réels quelconques. On en déduit une présentation de H sous forme paramétrique :

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \\ x_2 &= \lambda_2 \\ &\dots \dots \dots \\ x_{n-1} &= \lambda_{n-1} \\ x_n &= (v - \lambda_1 u_1 - \dots - \lambda_{n-1} u_{n-1}) / u_n \end{aligned}$$

Ceci peut se présenter sous la forme suivante :

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{a}_{n-1} \text{ pour } \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$$

en posant :

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= (0, \dots, 0, v/u_n) \\ \vec{a}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, -u_1/u_n) \\ \vec{a}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, -u_2/u_n) \\ &\dots \\ \vec{a}_{n-1} &= (0, 0, \dots, 1, -u_{n-1}/u_n) \end{aligned}$$

On voit ainsi apparaître un vecteur constant \vec{x}_0 et les combinaisons linéaires des $n-1$ éléments :

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}.$$

Remarque : un hyperplan est, dans \mathbb{R}^2 : une droite et dans \mathbb{R}^3 : un plan.

* Barycentre.

Comme tout espace vectoriel, \mathbb{R}^n est un espace affine, on peut donc y développer la théorie du barycentre.

L'adaptation se fait de façon automatique si l'on convient de considérer les éléments de \mathbb{R}^n aussi comme des points. On adopte alors la convention suivante : pour tous éléments \vec{a} et \vec{b} de \mathbb{R}^n :

$$A = \vec{a} = (a_1, \dots, a_n), \quad B = \vec{b} = (b_1, \dots, b_n),$$

on notera :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n).$$

§22 L'espace euclidien \mathbb{R}^n .

* Produit scalaire formel.

Définition : pour tout couple (\vec{x}, \vec{y}) d'éléments de \mathbb{R}^n le nombre suivant

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

est appelé le produit scalaire de \vec{x} et \vec{y} .

(22-1) Proposition : pour tous $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ appartenant à \mathbb{R}^n pour tout nombre réel λ , on a :

- (1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- (2) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} = (\vec{y} + \vec{z}) \cdot \vec{x}$
- (3) $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y})$
- (4) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ et $[\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}]$

Les démonstrations de ces propriétés sont de simples vérifications, nous laissons à nos lecteurs le soin de les développer.

* Norme.

C'est ici le produit scalaire qui va nous permettre d'introduire une notion de distance. La propriété (4) nous autorise à formuler la définition qui suit.

Définition : pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ on appelle norme de \vec{x} le nombre suivant :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

On déduit immédiatement de (3) et (4) les propriétés fondamentales de la norme.

(22-2) Proposition : pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- (5) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$
- (6) $\|\vec{x}\| \geq 0$ et $[\|\vec{x}\| = 0] \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

On déduit de (1) et (2) les deux "identités remarquables" classiques.

(22-3) Proposition : pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ on a :

- (7) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2 \vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2$
- (8) $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2 \vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \\ &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{x} + (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{y} \\ &= \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2 \vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2 \end{aligned}$$

Pour obtenir la seconde relation on remplace \vec{y} par $-\vec{y}$ et l'on applique (3) et (5). •

(22-4) (Inégalité de Schwartz). Pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$(9) \quad \|\vec{x} \cdot \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Démonstration : pour tout réel λ on a

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \lambda \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + 2 \vec{x} \cdot \lambda \vec{y} + \|\lambda \vec{y}\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\lambda \vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda^2 \|\vec{y}\|^2 \end{aligned}$$

Ce trinôme du second degré en λ est, par définition, positif ou nul. Son discriminant est donc négatif ou nul. On a ainsi :

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \leq 0.$$

L'inégalité annoncée s'en déduit immédiatement. •

(22-5) (Inégalité triangulaire) pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$(10) \quad \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Démonstration : On rapproche (7) et (9) on obtient

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + 2 \vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\ &= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2. \end{aligned}$$

Comme, par définition, $\|\vec{x} + \vec{y}\|$ et $(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)$ sont des nombres positifs, on a donc bien l'inégalité annoncée. •

* Distance.

On considère \mathbb{R}^n comme un espace de points suivant la convention posée à la fin de la section précédente.

Définition : on appelle distance de deux points A et B et l'on note $d(A,B)$ la norme du vecteur \overrightarrow{AB} .

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

On déduit immédiatement de ce qui précède :

(22-6) Proposition : pour tous points A, B, C.

$$(11) \quad d(A,B) \geq 0,$$

$$(12) \quad d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A=B,$$

$$(13) \quad d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C).$$

Démonstration : (11) et (12) traduisent (4) et (13) reformule (10) si l'on pose :

$$\vec{x} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{y} = \overrightarrow{BC}.$$

car on a alors :

$$\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{AC}. \quad \bullet$$

* Orthogonalité.

Définition : soit \vec{x} et \vec{y} deux éléments de \mathbb{R}^n , \vec{x} et \vec{y} sont dits orthogonaux si

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

De (7) on déduit immédiatement :

(22-5) Proposition : deux éléments \vec{x} et \vec{y} de \mathbb{R}^n sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Cette proposition se reformule immédiatement pour donner l'énoncé qui suit.

(22-6) Théorème de Pythagore : les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux si et seulement si

$$d(B,C)^2 = d(A,B)^2 + d(A,C)^2.$$

Remarque : on peut constater que la structure ainsi mise en place permet de généraliser à \mathbb{R}^n nombre d'opérations familières, sans qu'il soit indispensable de mettre en oeuvre un formalisme élaboré.

C'est ainsi, par exemple, qu'en analyse des données, on travaille sur des "nuages de points" de \mathbb{R}^n . Le barycentre correspond au concept de point moyen, la formule de Leibniz s'interprète en terme d'inertie du nuage de points. De façon plus générale, on traite de l'inertie suivant des méthodes en tous points semblables à celles qui sont développées en mécanique pour la géométrie des masses.

On peut ainsi étudier la dispersion d'un nuage de points suivant les directions de droites, plans, ... et hyperplans. Ce qui permet, en particulier, d'effectuer les meilleurs choix pour en proposer des représentations graphiques par projection sur des plans.

Dans un tel domaine, il n'y a pas de solution de continuité entre la géométrie abstraite qui traite des nombres et la géométrie empirique qui traite des figures.

Exercices

Chapitre I

Calcul vectoriel

I Dans le plan on considère trois points A, B et C, soit I le milieu de BC. Montrer que pour tout point M, on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \overrightarrow{MA} + 2 \overrightarrow{AI}.$$

En déduire qu'il existe un unique point G du plan tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Quel est ce point si A, B et C ne sont pas alignés ?

II On considère un triangle ABC, soit G son centre de gravité et D, E, F les points définis par les relations suivantes :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$

Calculer la somme

$$\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}.$$

III On joint les sommets d'un cube à tous ses autres sommets. Déterminer la somme de tous les vecteurs ainsi définis.

IV a) I et J sont les milieux respectifs de deux segments AA' et BB'. Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = 2 \overrightarrow{IJ}.$$

b) En déduire que si ABCD et A'B'C'D' sont deux parallélogrammes quelconques (dans le plan ou l'espace), les milieux des segments AA', BB', CC' et DD' sont les sommets d'un parallélogramme (et de ce fait, ils sont dans un même plan).

c) Cette propriété est-elle encore vraie si l'on considère les points qui divisent les quatre segments AA', BB', CC' et DD' dans un rapport algébrique donné ?

V Soit I et J les milieux respectifs de deux segments donnés AB et CD. Soit k un nombre réel différent de -1. On considère les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = k \overrightarrow{BD}$$

On désigne par O le milieu de MN.

1) Démontrer que : $\overrightarrow{IO} = k \overrightarrow{IJ}$, en déduire le lieu de O lorsque k varie.

2) Démontrer que O, est également le milieu du segment PQ, où les points P et Q sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BQ} = k \overrightarrow{BC}.$$

Transformations du plan

VI Soit Δ et Δ' deux droites parallèles, D une droite qui les coupe, O et O' deux points n'appartenant ni à Δ , ni à Δ' . Construire deux points M et M' vérifiant les conditions suivantes

- M appartient à Δ et M' à Δ' ,
- (MM') est parallèle à D ,
- les droites (OM) et $(O'M')$ sont parallèles.

VII Soit \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cercles du plan et Δ une droite ; construire une droite D parallèle à Δ et qui coupe \mathcal{C} en A et B , \mathcal{C}' en A' et B' tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

VIII On considère un quadrilatère convexe (*) $ABCD$. Par un point M du côté AB , on mène les parallèles aux diagonales AC et BD . Elles coupent respectivement (BC) en Q et (AD) en N . La parallèle menée par N à (AC) coupe (CD) en P .

Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

Quels sont les lieux des milieux de MN et PQ quand M décrit le segment AB ?

Quel est le lieu du centre O du parallélogramme $MNPQ$?

(*) Rien n'interdit d'envisager le cas des polygones non convexes.

IX On considère un quadrilatère $ABCD$. La parallèle à (BC) qui passe par A coupe (BD) en I . La parallèle à (AD) qui passe par B coupe (AC) en J . Démontrer que (IJ) est parallèle à (CD) .

X Etant donnés deux points distincts O et O' ; on note $h(O,2)$ l'homothétie de centre O et rapport 2, $h(O',\frac{1}{2})$ l'homothétie de centre O' et rapport $\frac{1}{2}$.

Montrer que $h(O,2) \circ h(O',\frac{1}{2})$ est une translation, en déterminer le vecteur.

Déterminer $h(O',\frac{1}{2}) \circ h(O,2)$.

XI On considère deux points distincts O et O' .

Montrer que $h(O,2) \circ h(O',\frac{1}{3})$ est une homothétie qu'on déterminera.

Déterminer : $h(O',\frac{1}{3}) \circ h(O,2)$.

Produit scalaire

XII Dans le plan, on considère deux points A et B, soit O leur milieu et k un nombre réel donné. Déterminer le lieu des points tels que :

$$(a) \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k,$$

$$(b) \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = k.$$

XIII Dans le plan, on considère quatre points A, B, C et D ; déterminer le lieu des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}.$$

XIV Dans le plan, on considère quatre points A, B, C et D ; soit k un réel donné. Déterminer le lieu des points M tel que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = k.$$

XV Soit ABCD un quadrilatère plan ou gauche ; montrer que :

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2 \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}.$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les diagonales AC et AD soient orthogonales.

XVI 1) Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs non nuls de l'espace ; montrer que si \vec{v} est orthogonal à $\vec{w} - \vec{u}$ et si \vec{w} est orthogonal à $\vec{u} - \vec{v}$, alors \vec{u} est orthogonal à $\vec{v} - \vec{w}$.

2) On considère un triangle ABC et une droite qui coupe BC en A', CA en B' et AB en C'. Soit H et H' les orthocentres respectifs des triangles ABC et AB'C'. Montrer que \overrightarrow{BC} est orthogonal à $\overrightarrow{HH'} - \overrightarrow{CB'}$ et $\overrightarrow{CB'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{HH'} - \overrightarrow{BC}$. En déduire que $\overrightarrow{HH'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB'}$.

3) Soit J et K les milieux de BB' et CC' ; exprimer $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB'}$ en fonction de \overrightarrow{JK} .

4) En déduire que, pour tout quadrilatère complet (cf. §11), les orthocentres des quatre triangles qu'il détermine sont alignés sur une perpendiculaire à la droite qui passe par les milieux de ses trois diagonales.

Chapitre II

Calcul barycentrique

- I** a) On considère trois points non alignés A, B et C. Construire le barycentre de A, B, C affectés des coefficients (-1), 1 et 1.
 b) Dans le plan, on considère quatre points distincts A, B, C et D. Construire le barycentre de A, B, C, D affectés des coefficients 1, 2, 3, 4.

- II** Montrer que les triangles ABC et A'B'C' ont même centre de gravité si, et seulement si :

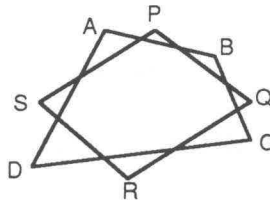
$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

- III** Soit A', B' et C' les points qui partagent les trois côtés d'un triangle ABC dans un même rapport donné ; montrer que les deux triangles ABC et A'B'C' ont même centre de gravité.

- IV** On considère un triangle ABC. Soit M un point quelconque de son plan, on désigne par P, Q et R les symétriques de M par rapport aux milieux des côtés BC, CA et AB, respectivement. On note G et K les centres de gravité respectifs des triangles ABC et PQR.

- a) Montrer que $\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MG}$.
 b) Montrer que les milieux des segments AP, BQ, et CR sont confondus en un point L et préciser les positions relatives des points M, G, K, L.

- V** On considère un quadrilatère convexe ABCD. On partage chacun de ses côtés en trois segments égaux et on joint les points obtenus pour former un quadrilatère PQRS suivant le schéma ci-dessous.



- 1) Montrer que PQRS est un parallélogramme.
 2) Soit O son centre, G le centre de gravité du quadrilatère ABCD et I le point d'intersection des diagonales AC et BD ; préciser les positions relatives des points O, I et G.

VI (Théorème de Desargues) On considère deux triangles ABC et A'B'C' situés dans un même plan. On suppose que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point O. On suppose en outre que (BC) et (B'C') se coupent en A'', (CA) et (C'A') se coupent en B'' et (BC) et (B'C') se coupent en A''.

1) Montrer qu'il existe six nombres réels a, a', b, b', c et c' tels que :

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{OA} + a'\overrightarrow{OA'} &= \overrightarrow{0} & a + a' &= 1 \\ b\overrightarrow{OB} + b'\overrightarrow{OB'} &= \overrightarrow{0} & b + b' &= 1 \\ c\overrightarrow{OC} + c'\overrightarrow{OC'} &= \overrightarrow{0} & c + c' &= 1 \end{aligned}$$

et les nombres a, b et c soient deux à deux distincts.

2) Montrer que A'' est le barycentre des points B et C affectés des coefficients b et -c. Déterminer les barycentres de C et A affectés des coefficients c et -a, puis de A et B affectés des coefficients a et -b.

3) Montrer que les points A'', B'' et C'' sont alignés.

Applications des théorèmes de Céva et Ménélaüs

VII Soit ABC un triangle ; une droite Δ coupe (BC) en P, (CA) en Q et (AB) en R. On désigne par P'(resp. Q', R') le symétrique de P (resp. Q, R) par rapport au milieu de BC (resp. CA, AB)

Montrer que P', Q' et R' sont alignés.

VIII Montrer que les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points de contact du cercle inscrit avec le côté opposé sont concourantes.

Applications de la formule de Leibniz.

IX On considère trois points A, B et C d'un axe orienté. On pose $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ et $\overline{AB} = c$.

1) Montrer que, pour tout point M du plan, on a

$$a\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}.$$

2) En déduire que :

$$MA^2\overline{BC} + MB^2\overline{CA} + MC^2\overline{AB} + \overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA} = 0.$$

3) Application : La bissectrice intérieure de l'angle A d'un triangle ABC coupe le côté opposé en D. Calculer la longueur AD en fonction de $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

X B, C et D sont trois points situés sur les trois arêtes d'un trièdre trirectangle de sommet A tels que :

$$AB = AC = AD = a$$

et k est un nombre réel donné.

1) Déterminer le lieu des points M de l'espace tels que :

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 - MA^2 = ka^2.$$

Pour quelle valeur de k le point D appartient-il à ce lieu ?

2) Déterminer le lieu des points M de l'espace tels que :

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3MA^2 = ka^2.$$

Peut-on déterminer k pour que le point B appartienne à ce lieu ?

Chapitre III

Nous ne pouvons que conseiller de reprendre systématiquement les exercices marqués (*) en modifiant les données numériques.

Le plan ou l'espace sera supposé rapporté à un repère (le cas échéant orthonormé-orthonormé direct), chaque fois que ce sera nécessaire. Déterminer les hypothèses minimales sous lesquelles une affirmation est vraie, c'est aussi, dans ce cadre, un point essentiel.

Equations de droites-équations de plans

I (*) On considère le plan passant par les trois points suivants :

$$A : (1, -1, 2), \quad B : (2, 1, -1), \quad C : (-1, 1, 1),$$

puis déterminer les équations cartésiennes de ses traces sur les faces du repère.

II Quelle est l'équation du plan défini par la donnée de ses traces sur les axes de coordonnées, c'est-à-dire trois points de coordonnées : $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$?

III (*) Vérifier que les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

sont les équations cartésiennes d'une droite dont on écrira une présentation sous forme paramétrique.

IV (*) Déterminer des équations cartésiennes d'une droite définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

V (*) Dans le plan, on considère trois points définis par leurs coordonnées :

$$A : (1, 1), \quad B : (10, 13), \quad C : (13, 6).$$

1) Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC ainsi que son rayon.

2) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre de ABC.

3) Déterminer les équations des bissectrices de l'angle en A.

VI Les deux droites ayant respectivement pour équations :

$$x + y = 1 \quad \text{et} \quad 2x + 3y = -4$$

sont deux hauteurs d'un triangle ABC dont le sommet A a pour coordonnées $(3, 1)$. Déterminer les coordonnées des sommets B et C.

VII (*) On considère le plan P passant par les points :
 $(1,2,2)$, $(2,1,1)$ et $(2,-3,-1)$
 et la droite D passant par les points de coordonnées :
 $(1,2,-1)$ et $(3,1,1)$.

1) Vérifier que P et D ne sont pas parallèles.

2) On note (x, y, z) les coordonnées d'un point M quelconque. Déterminer les coordonnées des images de M par les transformations suivantes :

- la projection sur P suivant la direction de D,
- la symétrie par rapport à P suivant la direction de D,
- la projection sur D suivant la direction de P,
- la symétrie par rapport à D suivant la direction de P.

Comme il y a bien des façons de répondre à ces demandes, il est conseillé de ne pas se lancer à l'aveuglette dans les calculs.

VIII (*) Même question, en remplaçant la droite D par la perpendiculaire à P passant par le point de coordonnées $(1, 2, 3)$.

IX Résoudre des systèmes de deux équations à trois inconnues et de trois équations à deux inconnues dont on aura choisi les coefficients au hasard.

X Ecrire les discussions sur l'existence des solutions des systèmes :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ a''x + a''y = c'' \end{cases}$$

et en donner une traduction géométrique.

Remarque : ces discussions n'ont rien d'objectivement difficile, mais leur rédaction peut, à juste titre, apparaître délicate pour qui manque d'entraînement, aussi convient-il de ne pas compliquer inutilement la tâche. C'est pourquoi, on pourra supposer que a est non nul et que les équations du second système ne sont pas deux à deux incompatibles.

XI Problème des boeufs de Newton

75 boeufs ont mis 12 jours à brouter l'herbe d'un pré de 60 ares.

81 boeufs ont mis 15 jours à brouter l'herbe d'un pré de 72 ares.

Combien de boeufs un pré de 96 ares pourra-t-il nourrir pendant 18 jours ?

On convient d'admettre que :

- la ration journalière de chaque animal est la même et reste constante,
- la quantité initiale d'herbe par are est la même dans tous les cas, ainsi que la quantité qui pousse par jour et par are.

Chapitre IV

Produit - vectoriel - mixte

I (*) On considère le tétraèdre de sommets :

$$A : (-1, 2, 3), B : (2, -5, 2), C : (1, -3, 7), D : (2, -1, -1)$$

déterminer sa hauteur de deux façons différentes.

Les méthodes utilisées sont elles réellement différentes ?

II Distance de deux droites dans l'espace.

On considère deux droites non parallèles :

- D qui passe par le point A et admet pour vecteur directeur \vec{u} ,
- D' qui passe par le point B et admet pour vecteur directeur \vec{v} .

1) Montrer que la distance d des deux plans contenant l'une et parallèle à l'autre est la plus courte distance d'un point de D à un point de D'.

2) Montrer que :

$$d = \frac{\|(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v})\|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

III Dans l'espace orienté et rapporté à un repère orthonormé direct, quatre points A, B, C et D sont donnés par leurs coordonnées :

$$A : (0, 3, 1), B : (1, 5, 4), C : (1, 0, 3), D : (4, 2, 4).$$

On note respectivement Δ et Δ' les droites (AB) et (CD).

- 1) Déterminer un vecteur \vec{u} qui soit orthogonal à Δ et Δ' .
- 2) Déterminer l'équation du plan contenant Δ et parallèle à Δ' .
- 3) En déduire les coordonnées des pieds de la perpendiculaire commune à Δ et Δ' .

IV Identité de Lagrange.

Etant donné six nombres quelconques : a, b, c, a', b' et c' montrer qu'on a toujours :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) = (aa' + bb' + cc')^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2$$

V Démontrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}, \\ \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

où A, B, C et P sont quatre points quelconques du plan.

En donner une interprétation géométrique.

VI On considère un repère (A,B,C) du plan. Exprimer au moyen du produit vectoriel les coordonnées barycentriques d'un point quelconque .

VII Démontrer la formule du "double produit vectoriel" :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}.$$

[commencer par régler le cas où \vec{v} et \vec{w} ont la même direction. Des considérations géométriques permettent de procéder au choix judicieux d'un repère dans un plan arbitraire contenant les directions de \vec{u} et \vec{v} . On peut alors obtenir l'égalité annoncée sans calculs fastidieux]

VIII "Division vectorielle". On considère un deux vecteurs donnés non nuls \vec{a} et \vec{b} . Déterminer l'ensemble des vecteurs \vec{x} tels que :

$$\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{x}.$$

IX On considère quatre points A, B, C, et D de l'espace. Déterminer l'ensemble des points P tels que

$$\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{PD}.$$

[On utilisera les acquis de l'exercice précédent]

X Démontrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \vec{0}, \\ (\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{w} \wedge \vec{u}) &= (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})^2. \end{aligned}$$

Chapitre V

Considération affines

I Soit H l'hyperplan de \mathbb{R}^n d'équation :

$$u_1x_1 + \dots + u_nx_n = v ;$$

écrire l'équation de l'hyperplan parallèle à H qui contient l'origine $\vec{0}$, puis de celui qui contient le point A : (a_1, \dots, a_n) .

II Décrire analytiquement une translation, une homothétie
 • dans le plan • dans l'espace ... • dans \mathbb{R}^n .
 Décrire la composée de deux homothéties dans \mathbb{R}^n .

III Démontrer l'associativité du barycentre dans \mathbb{R}^n .

IV Démontrer la généralisation à \mathbb{R}^n des propriétés (16-3) et (18-3).

! Attention dans le cours on s'est appuyé sur une définition du produit scalaire fondée sur des propriétés géométriques qui n'ont plus aucun sens dans \mathbb{R}^n .

Considérations métriques

V (*) dans \mathbb{R}^4 on considère l'hyperplan H d'équation :

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0.$$

1) Montrer que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout élément de H est une droite D qu'on déterminera.

2) Répondre aux demandes de l'exercice 7 du chapitre III.

Prix : 20 F
Octobre 1994