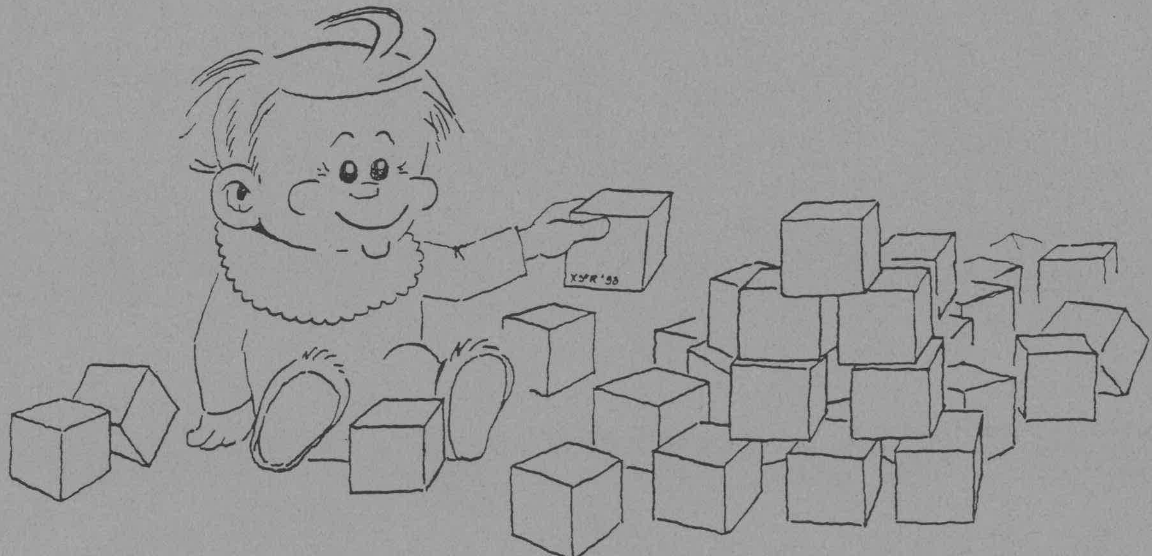
Xavier Saint Raymond

Intégrales simples et multiples

ou

L'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$

Agrémenté de quelques dessins de l'auteur.



IREM des Pays de Loire

Édition du 1er novembre 1998

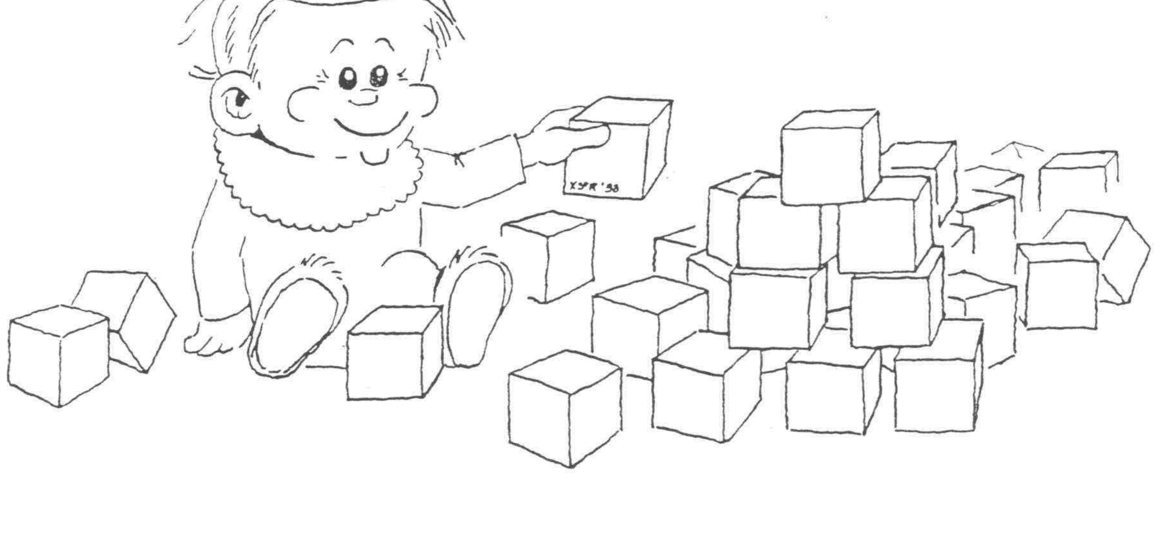
Xavier Saint Raymond

Intégrales simples et multiples

ou

L'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$

Agrémenté de quelques dessins de l'auteur.



IREM des Pays de Loire

Édition du 1er novembre 1998

Avertissement

Ce petit polycopié présente l'essentiel de la théorie de l'intégration de Lebesgue dans le cadre (restreint) de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. L'intégrale y est construite directement à partir des fonctions en escalier sans passer ni par les tribus ni par la mesure de Lebesgue qui n'est définie qu'après coup[1]. Si l'on compare cette construction avec celle, plus traditionnelle, par les tribus et mesures, on la trouvera sans doute plus compliquée techniquement, notamment à cause du lemme d'Égorov du paragraphe 2, mais elle présente aussi des avantages : grâce à la signification très géométrique des intégrales des fonctions en escalier et à l'absence de notions intermédiaires, notre présentation est sans doute plus motivante pour les étudiants. Dans ce format, ce cours vise en réalité deux publics bien différents : les étudiants en licence de mathématiques, et les candidats au concours de l'agrégation de mathématiques.

À l'intention des étudiants de licence, nous avons distingué typographiquement deux niveaux de lecture et avons ajouté en appendice un paragraphe de *préliminaires indispensables.* Dans ce dernier paragraphe se trouvent inclus un peu de logique mathématique et théorie des ensembles généralement méconnues de nos étudiants, quelques notions topologiques sur les fonctions de plusieurs variables réelles qui vont peut-être un peu au-delà de ce qui est effectivement enseigné en premier cycle, et des conseils de rédaction pour les devoirs. Quant aux deux niveaux typographiques, ils ont été conçus pour éviter en première lecture les démonstrations trop techniques qui risquent de faire perdre de vue les idées essentielles, et qui sont signalées dans le texte par des caractères plus petits.

Les candidats à l'agrégation trouveront naturellement dans ce polycopié un exposé assez complet de la théorie de l'intégration dans $\mathbb{R}^n$. Ils y trouveront en outre un certain nombre de compléments utiles : la notion de famille sommable de nombres complexes (paragraphe 2), la dérivabilité presque partout des fonctions monotones (paragraphe 6), un théorème fondamental de l'analyse dans le cadre des fonctions lipschitziennes et mesurables bornées (paragraphe 6), la transformation de Fourier et la convolution des fonctions intégrables (paragraphe 7), les fonctions gaussiennes et la formule d'inversion de Fourier (paragraphe 8), la transformation de Fourier des fonctions de carré intégrable (paragraphe 9), et un petit exposé succinct mais substantiel sur les séries de Fourier (paragraphe 10). Enfin, ils pourront élaborer eux-mêmes d'autres compléments à l'aide des nombreux exercices complétant chacun des dix paragraphes du cours.

L'auteur espère que ce polycopié pourra ainsi rendre service aux étudiants concernés, et tient à remercier l'IREM des Pays de Loire qui en a assuré l'impression et la diffusion.

Nantes, le 1er novembre 1998,
X. Saint Raymond.

---

(1) Ce cours s'inspire largement d'un cours de J. Dixmier à la Sorbonne, *L'intégrale de Lebesgue*, qui propose la même démarche. Merci par ailleurs à P. Gérard qui a bien voulu me prêter ses notes sur le lemme d'Égorov.