IREM
PARIS 7

# Documents pour la formation des enseignants

**6**
**Juin 2005**

# Un module de licence préprofessionnel : faire de la géométrie , faire faire de la géométrie

A. Robert

ISSN : 2102-488X

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

# Un module de licence préprofessionnel :

# faire de la géométrie, faire faire de la géométrie

**A. Robert**

**Sommaire**

**Introduction**

Des recherches[1] ont montré que les connaissances mathématiques des étudiants préparant le Capes sont souvent peu organisées, peu disponibles (ce qui en est un peu un corollaire), et ceci jusqu'au deuxième trimestre de l'année scolaire, alors même que l'objet de l'année de préparation est aussi cette organisation. Cela correspond au fait que les étudiants n'ont pas l'habitude de trouver seuls les connaissances à utiliser dans des situations inédites, sans indications. Or ce caractère disponible des mathématiques à enseigner est très important à nos yeux pour de futurs enseignants. On constate cependant que cette disponibilité finit toujours s'acquérir au fil des ans chez les enseignants, mais cela peut être au prix d'une réduction des connaissances correspondantes. Les utilisations peu critiques des manuels en sont une illustration[2]. Comment faire pour minimiser cette réduction ?
Notre module de licence se veut une tentative de mettre en place chez les futurs enseignants divers moyens pour organiser leurs connaissances et pour savoir analyser les exercices du point de vue des connaissances à utiliser, au moins en géométrie.

Par ailleurs la rapidité et le morcellement des études universitaires actuelles, ainsi que l'hétérogénéité des étudiants amènent à ne plus tenir beaucoup compte de la qualité des rédactions en n'évaluant que la correction des raisonnements et des résultats.
Notre module de licence a aussi pour ambition de faire retrouver aux étudiants ce niveau du « très bien », aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.

Enfin, il s'agit de préparer ces futurs enseignants à réfléchir … aux élèves, en apprenant à analyser les énoncés d'exercices en fonction des activités qu'ils peuvent provoquer chez les élèves et en allant en stage dans des « vraies » classes. Cette partie de l'enseignement sera reprise et approfondie en préparation au Capes et en PLC2.

La formation comprend ainsi deux moments, coordonnés : au début on met en place un travail à l'Université sur les connaissances et les activités mathématiques, en géométrie, puis on organise des observations en classe (stage filé), en relation avec la première partie. Un rapport de stage, exposé collectivement, permet de finaliser l'ensemble.

---

[1] Par exemple on a des éléments la brochure publiée par J. Pian, intitulée « Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de Capes, vers une interprétation cognitive des apprentissages » (2001)

[2] Ainsi dans sa thèse (2002) C. Ben Sallah a montré des utilisations très réductrices des manuels chez certains jeunes enseignants.

## I Objectifs et choix pour l'enseignement : « faire de la géométrie, faire faire de la géométrie »

### 1) Le travail sur les connaissances à utiliser en géométrie au collège et au lycée (faire de la géométrie)

Jusqu'en licence, les connaissances mathématiques sont introduites aux étudiants avec leurs définitions et propriétés : les notions sont considérées comme des objets. Des exercices et problèmes sont proposés ensuite pour utiliser (mettre en fonctionnement) ces connaissances comme outils.

Dans ce module, nous tentons d'introduire un travail différent, complémentaire : nous donnons des moyens pour réfléchir à différentes « **qualités** » de mises en fonctionnement des connaissances dans les exercices et pour retrouver l'**organisation** de ces connaissances entre elles, en relation avec **les diverses activités mathématiques** qui accompagnent les utilisations.

Nous nous intéressons tout particulièrement aux activités mathématiques proposées et provoquées en classe par l'intermédiaire des choix d'énoncés d'exercices.

Ainsi nous introduisons des analyses d'énoncés sur des exercices d'abord résolus par les étudiants. Cela leur permet dans un premier temps d'apprendre à **repérer les connaissances à utiliser** dans des exercices : ils analysent lesquelles sont mobilisées, si elles sont anciennes ou nouvelles, si elles sont indiquées ou non. Dans un deuxième temps nous leur faisons travailler **la manière d'utiliser les connaissances**, les adaptations à introduire par rapport aux théorèmes donnés dans le cours, les mélanges entre différentes connaissances . Cela initie un travail sur ce que nous appelons la **qualité** des mises en fonctionnement en terme d'activités mathématiques.

En proposant des exercices à résoudre de différentes manières, on met aussi en évidence l'importance de l'**organisation** des connaissances les unes par rapport aux autres : cela concerne aussi bien le fait que les connaissances fonctionnent de manière isolée ou non que le fait que l'on doit connaître l'ordre dans lequel le cours est fait pour ne pas faire de cercles vicieux par exemple.

On envisage dans le même temps des questions liées à la **nature** de ces connaissances, en relation avec les connaissances antérieures : cela se fait grâce à un exposé sur les progressions possibles et les fondements. Cette réflexion débouche naturellement sur des questions sur les démonstrations et leur relativité et donc sur des questions sur l'écrit.

### 2) Un travail sur la forme à l'orale et à l'écrit

A l'occasion de la correction des exercices travaillés du point de vue des connaissances qu'ils font mobiliser, nous introduisons, comme nous venons de l'annoncer, une réflexion sur le rôle de l'écrit. Il s'agit de sensibiliser les étudiants au rôle productif de l'écrit.

D'une part l'écrit peut engendrer des automatismes liées à l'emploi du symbolisme, il permet d'étudier une figure tracée sur une feuille de papier (ou un écran d'ordinateur).

D'autre part l'écrit peut être appréhendé comme un véritable « **interlocuteur** », avec ses exigences. Ainsi travailler ce qui vient d'être écrit peut permettre de :

- Préciser : c'est souvent trop compliqué lorsque c'est seulement dans la tête ou à l'oral de se rendre compte de manques ;
- Ordonner - on découvre en questionnant son propre écrit qu'on pouvait changer l'ordre.
- Compléter : on a oublié par exemple une partie de la réciproque mais on ne peut s'en rendre compte qu'après avoir écrit avec précision la démonstration.
- Simplifier - souvent le premier jet est trop compliqué mais on ne peut s'en rendre compte qu'en voyant les choses écrites.

Par ailleurs, pour commencer à habituer les étudiants à travailler à la fois un énoncé, sa correction et le passage devant des élèves, nous proposons des énoncés incomplets, qu'il s'agit de transformer en véritables exercices à proposer aux étudiants.

**3) La prise en compte des élèves : faire faire de la géométrie**

En fait les étudiants doivent d'abord prendre en compte leurs « collègues » puisqu'ils ont tous à animer, chacun à leur tour, en petits groupes, une « vraie » séance de 1h30.
C'est à cette occasion que je fais transformer les énoncés un peu vagues que je propose en exercices à proposer aux autres étudiants. Cela peut les sensibiliser, qu'ils soient en position d'enseignants ou dans celle d'élèves, à la fois à la différence entre **analyses a priori et déroulement effectif** et aux **impératifs de clarté et de rigueur**.

De plus, **en stage** (en lycée ou en collège), les étudiants ont à observer certains exercices plus particulièrement en se centrant à la fois sur les aides de l'enseignant pendant la résolution et sur les réactions des élèves. Le rapport de stage, qui représente une grande partie du projet, permet de mettre en relation les analyses de ces exercices, avec la nature et la qualité des connaissances à mettre en fonctionnement et les déroulements effectifs.

**Mode d'emploi** : nous présentons dans la brochure les contenus proposés aux étudiants, regroupés par type de séances : cours et exercices, séances animées par les étudiants, séances sur logiciel, évaluations, stage et projet.

Ce qui s'intitule « cours » fait l'objet d'un exposé magistral et, en général, les documents correspondants sont distribués aux étudiants.

Les exercices sont cherchés en petits groupes de 4 à 5 étudiants. Un temps assez long est laissé avant la correction par l'enseignant.

Enfin pour chaque situation animée par un groupe d'étudiant, nous présentons le texte initial proposé au groupe, le texte final (que le groupe a proposé aux étudiants) et les éventuels éléments de corrigé que nous avons distribués.

## II La maquette

Il s'agit de travailler pendant 8 semaines (2h de cours et 3h de TD). Mais les séances sont de 1H30 et 3H30. Voici de ce fait l'organisation que nous avons arrêtée :

| Semaine | **Faire faire de la géométrie (animation étudiante à partir de S2)** | **Faire de la géométrie** |
|---|---|---|
| S1 | Présentation du cours :<br>Premiers exercices | Les « élémentaires » du collège |
| S2 | Droite d'Euler | Premiers exercices (suite et fin de la mise en place des outils)<br>Travail sur Cabri |
| S3 | Symétriques de H | Thalès – compléments, cas de similitudes |
| S4 | La formule de Héron | Partiel |
| S5 | Triangle isocèle, triangle équilatéral | Aires<br>Travail sur Cabri |
| S6 | Trapèze complet | Aires |
| S7 | Relation d'Euler | Cas d'égalités des triangles,<br>Théorème de Pythagore – |
| S8 | A propos de deux cercles | Bilan : : différents domaines de travail en géométrie |
| S9 | Cercle d'Euler, quadrilatère inscrit dans un cercle | Bilan didactique, stage, etc. |
| | Soutenances des projets, examen | |

**Evaluation :**

Il y a un partiel écrit P, un examen écrit E, un projet de stage et une soutenance de projet.

Voici les coefficients

**Examen écrit (60%) – note obtenue comme sup de E et de (E + P)/2.**

**Stage, projet, soutenance des projets : une seule note (40%).**

**III Le cours et les exercices**

Rappelons que ce cours a deux objectifs : faire de la géométrie, en réfléchissant aux connaissances en jeu et commencer à réfléchir à la manière de faire faire de la géométrie, en analysant des énoncés d'exercices, en animant des séances de TD et en allant en stage sur le terrain.

Pour cela nous avons choisi quelques notions clefs en géométrie, sur lesquelles nous développons plusieurs types d'activités pour nos étudiants. C'est ce que nous présentons dans ce paragraphe.

1. Mise en place des outils

   a. Le travail en géométrie plane : un premier aperçu (de Euclide[3] à la géométrie affine euclidienne)
   b. Un préalable : les configurations de base et autres propriétés élémentaires à la fin du collège
   c. Mise en place des outils : une liste d'exercices, des corrigés
   d. Eléments pour analyse un énoncé (question par question)

e) Compléments

[3] En annexe, nous joignons les définitions, demandes et notions communes des Eléments d'Euclide.

**Le travail en géométrie plane : un premier aperçu.**

**Au collège**, on travaille sur des points, des droites, des configurations élémentaires et quelques transformations qui ne sont pas définies dans le plan mais seulement sur des figures.
On admet des propriétés de la symétrie centrale, et à partir de là, on établit des propriétés des parallélogrammes, on étudie le parallélisme et l'orthogonalité.
On donne l'aire d'un triangle, la somme des angles, et l'inégalité triangulaire.
On introduit les médiatrices et le cercle circonscrit, ainsi que l'aire d'un cercle.
Les théorèmes de Pythagore et Thalès sont introduits (par étapes pour le second), ainsi que les autres droites remarquables des triangles.
On établit les propriétés du triangle rectangle et on introduit le cosinus puis les deux autres lignes trigonométriques dans le triangle rectangle. On caractérise les tangentes à un cercle.
On introduit la translation puis les vecteurs (sens direction, longueur).
On compose deux symétries centrales, et on introduit les rotations et les angles(géométriques) inscrits.

On fait un peu travailler en géométrie analytique, à partir d'un repère, essentiellement sur les coordonnées de points et de vecteurs.

**Au lycée**, on reprend quelques éléments de la géométrie précédente avec les cas d'égalité et de similitude. On ajoute un travail sur les vecteurs (multiplication par k) et en géométrie analytique (équations de droites…).
Puis on travaille en géométrie vectorielle, on introduit les barycentres, le produit scalaire, les angles « orientés », les homothéties et les translations, les problèmes de lieux.
Enfin on introduit les nombres complexes.
Les similitudes sont vues en spécialité math.

**Ensuite**, on présente l'algèbre linéaire et bilinéaire, quelquefois, la géométrie affine, ou projective, ou les géométries non euclidiennes. Sauf au Capes où tout le programme de géométrie du secondaire est inscrit dans le programme, avec des compléments.

De plus, l'utilisation des logiciels de géométrie est fortement préconisée par les programmes du second degré – pour faire construire des figures et trouver des lieux.

**mise en place de l'étude du travail géométrique.**

Les « objets » - configurations, théorèmes et propriétés, transformations, cadres et registres, types de problèmes, modes de raisonnement, fondements (et ordre).
Y a-t-il plusieurs géométries ?

**Domaines de travail en géométrie**

Un domaine de travail en géométrie est caractérisé par

1) Ce qui est admis, implicitement ou explicitement ou mal (fondements) – y compris « importé » d'un autre domaine (par exemple qu'est-ce qu'un point, une droite...)
2) Les objets (configurations par exemple), avec les cadres de définition et les modes d'écriture, les grandeurs, les transformations
3) Les théorèmes et propriétés (parallélisme, orthogonalité...) : il en existe une exposition cohérente, sans cercles vicieux. Ce sont pour une part des relations entre les objets et leurs grandeurs.
4) Les démarches, modes de raisonnement, démonstrations, niveaux de rigueur attendus (cas de figure ou pas ?)
5) Les types de problèmes (par exemple : incidence, lieux, constructions...) qu'on peut poser et résoudre en restant dans le domaine.

Il y a plusieurs domaines de travail en géométrie, relativement indépendants, qui permettent d'aborder des types de problèmes en partie analogues couvrant les problèmes du secondaire : celui d'Euclide, la géométrie affine (euclidienne), celui de la géométrie du collège. Il peut y avoir des emprunts plus ou moins subreptices d'un domaine à l'autre.
Il y a d'autres domaines de travail en géométrie : géométrie projective, géométries comme action de groupes, géométries non euclidiennes... Les problèmes précédents peuvent souvent encore être abordés dans ces nouveaux domaines, mais il y en a bien d'autres.

**Domaines de travail géométrique dans le plan (cadres) , outils, types de problèmes**

*Analytique* (repère, coordonnées, équations, expression analytique d'une transformation)

*Vectoriel* – vectoriel euclidien (cf. algèbre linéaire)

Barycentres

Produit scalaire

Transformations (homothéties)

*Ponctuel* (affine) : configurations (triangle, quadrilatère, cercle, polygone)

Droites parallèles, perpendiculaires,

Symétries,

Théorèmes de Pythagore et Thalès

Relations métriques (longueurs, angles), aires

Trigonométrie

Translations, rotations

*Transformations*

Homothéties

Isométries (translations, rotations, symétries – centrales et orthogonales, symétries glissées)

Similitudes

Projections

Inversions

Homographies

*Nombres complexes*

*Problèmes* d'étude de configuration, de construction, de lieux, liés aux transformations, liés à des mesures de grandeurs géométriques et notamment à des recherches de maximum ou minimum.

**Un préalable : Les configurations de base et autres propriétés élémentaires (à la fin du collège)**
**Ces propriétés sont établies au collège et supposées disponibles après.**

- Triangle rectangle – Th. de Pythagore,
- Tangentes à un cercle menées d'un point, cordes d'un cercle et médiatrice

- Parallèles, parallélogrammes, parallélogrammes particuliers
- Somme des angles d'un triangle, d'un quadrilatère
- Droite des milieux, Th. de Thalès

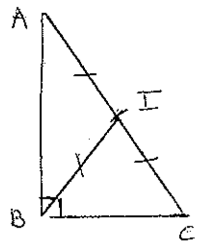
- Médiatrices d'un triangle – centre du cercle circonscrit
- Médianes d'un triangle – centre de gravité ou isobarycentre (position)
- Hauteurs d'un triangle – orthocentre (les 4 points)
- Bissectrices d'un triangle –intérieure (extérieures), centre du cercle inscrit (exinscrits),

- Propriétés supplémentaires des bissectrices et du centre du cercle inscrit
- Angles au centre, angles inscrits
- Position relative de deux cercles, inégalité triangulaire

- Relations métriques élémentaires, trigonométrie

- Transformations élémentaires

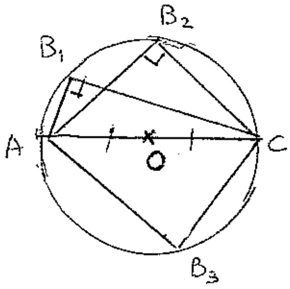
(5 feuilles jointes, les propriétés marquées d'un * sont moins élémentaires)




I milieu de [AC]
Si ABC est rectangle en B, $BI = \frac{AC}{2}$

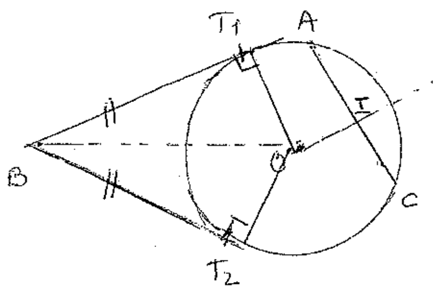
Si $BI = \frac{AC}{2}$, ABC est rectangle en B

---

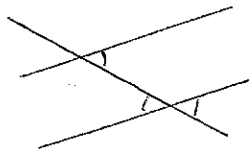



$B_1$, $B_2$ sur le cercle de centre O et de diamètre [AC] alors $AB_1C$ est rectangle en $B_1$, $AB_2C$ aussi est rectangle en $B_2$.
Si $AB_3C$ est rectangle et [AC] diamètre d'un cercle, $B_3$ appartient à ce cercle.

---

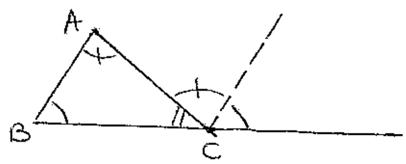



(AC) corde du cercle de centre O, I milieu de [AC] : alors $(OI) \perp (AC)$
( ou si (OI) est perpendiculaire à (AC), elle coupe [AC] en son milieu)



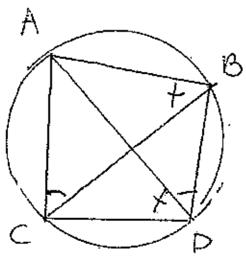
$(BT_1)$ et $(BT_2)$ tangentes au cercle : alors $BT_1 = BT_2$

---



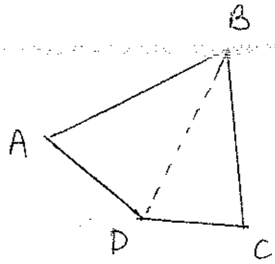

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$$

---



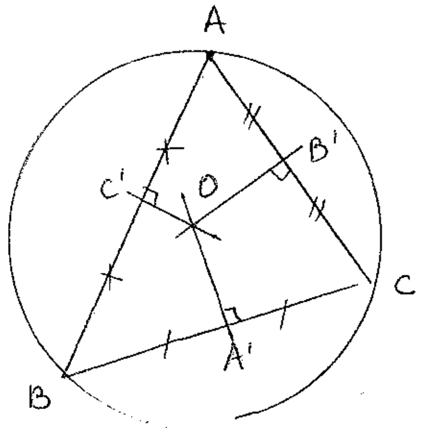

$$\widehat{A} + \widehat{D} = \pi$$

---




$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2\pi$$

<u>Triangles rectangles, propriétés élémentaires d'angles</u>

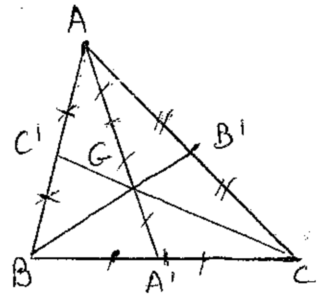



## Les médiatrices d'un triangle

O est le point d'intersection des médiatrices

$OA = OB = OC$

(centre du cercle circonscrit)



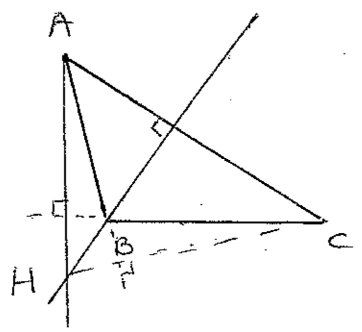

## Les médianes d'un triangle

G est le point d'intersection des médianes

$AG = \frac{2}{3} AA'$

(centre de gravité)

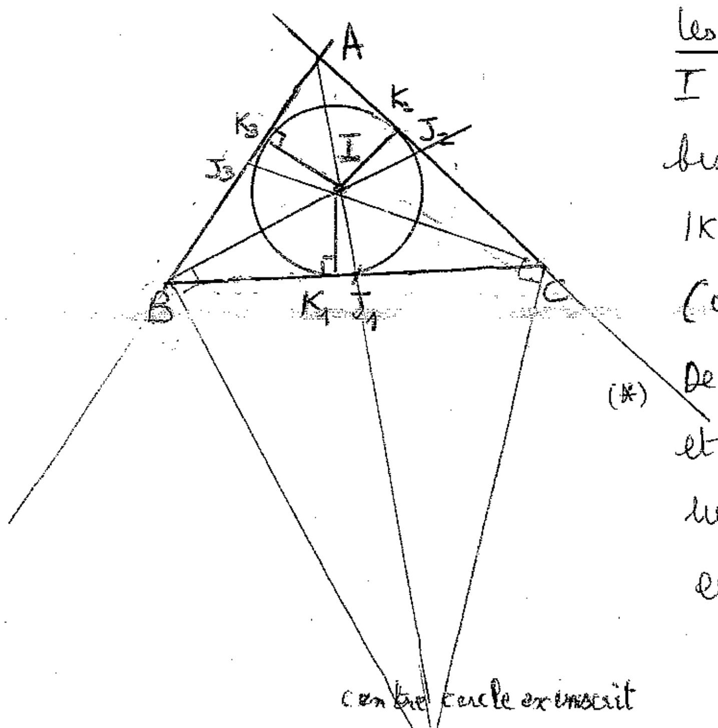
$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ (isobarycentre)




## Les hauteurs d'un triangle

H est le point d'intersection des hauteurs.

Dans l'ensemble $\{A, B, C, H\}$ un point quelconque est orthocentre du triangle formé par les 3 autres




## Les bissectrices intérieures d'un triangle

I est le point d'intersection des bissectrices intérieures.

$IK_1 = IK_2 = IK_3$

(centre du cercle inscrit)

De même <u>2 bissectrices extérieures</u> et la 3ème intérieure concourent en un point centre d'un des 3 cercles exinscrits dans le triangle

<u>Les droites remarquables d'un triang</u>

### 3.3 Relations métriques dans le triangle

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés ; on note $a$, $b$ et $c$ les longueurs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement.
On note $R$ le rayon du cercle circonscrit au triangle $ABC$ et $r$ le rayon du cercle inscrit dans le triangle $ABC$. On note $S$ la surface de ce triangle, $p$ son demi-périmètre, et $h_A$ la longueur du segment de hauteur issu du sommet $A$ (figures 51 et 52).

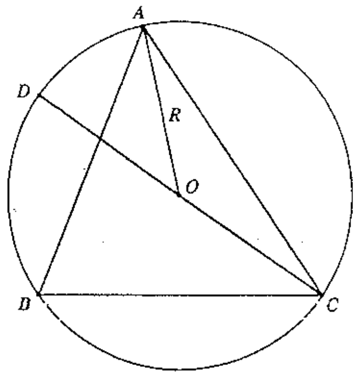



*Figure 51*

On a les relations suivantes

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}.$$

$$S = \frac{1}{2}h_A \cdot a = \frac{1}{2}h_B \cdot b = \frac{1}{2}h_C \cdot c.$$

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}.$$

(formule de Héron)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$2R = \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}.$$

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{abc}{4pR} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

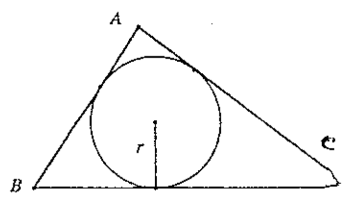



*Figure 52*

Cas particulier : triangle ABC rectangle en A (figure 53).

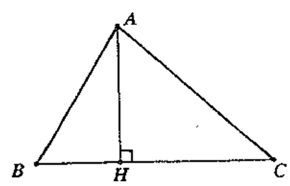



*Figure 53*

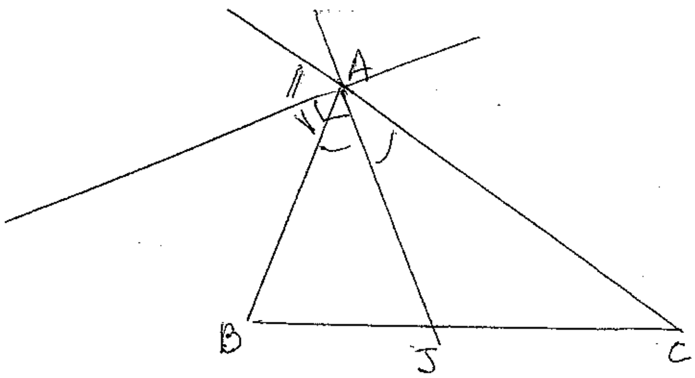
$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

$$AB^2 = \overline{BC}.\overline{BH}.$$

$$AC^2 = \overline{BC}.\overline{HC}.$$

$$AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC}.$$

$$AB.AC = BC.AH.$$

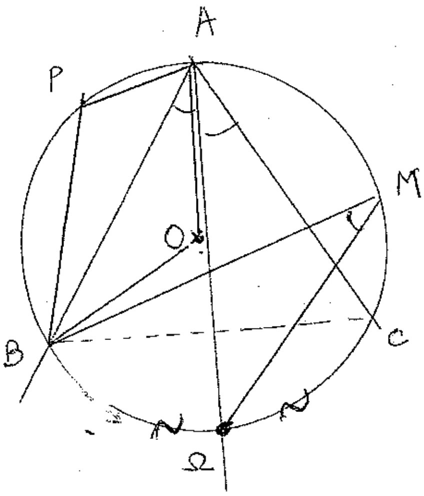



**Pied de la bissectrice intérieure**

$(AJ)$ bissectrice intérieure de $\widehat{A}$.

$$\frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$$

La bissectrice extérieure est orthogonale en A à $(AJ)$.




**Tracé de la bissectrice intérieure**

$(A\Omega)$ bissectrice intérieure de $\widehat{A}$.

$\Omega$ est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ (fixe!)

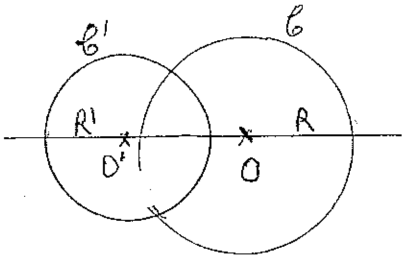
$$\widehat{BA\Omega} = \widehat{BM\Omega} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$$

(*) $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{CA}, \vec{CB}) = 2(\vec{PA}, \vec{PB})$ $(2\pi)$

(*) $(\vec{CA}, \vec{CB}) = (\vec{PA}, \vec{PB}) + \pi$ $(2\pi)$

**Cercles sécants**

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants si et seulement si




$$|R - R'| < OO' < R + R'$$

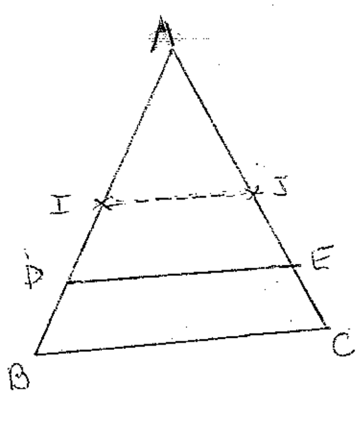



Figure donnée

**Théorème de Thalès** (une forme parmi d'autres)

Si $(DE) /\!/ (BC)$, alors $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

**Réciproque du théorème**

Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, alors $(DE) /\!/ (BC)$

**Un cas particulier :** $J \in [AC]$

Si $I$ milieu $[AB]$ et $(IJ) /\!/ (BC)$ alors $J$ est le milieu de $[AC]$

Transformations : des questions systématiques

Définitions [ différents cadres, ponctuel, affine ($\vec{f}$), analytique (matrice) ]

Propriétés caractéristiques (minimales)

Propriétés - conservation

- images de figures simples

- effets sur les longueurs, aires

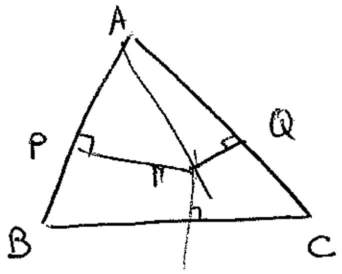
parallélisme, orthogonalité

Composition (inverse?)

Mise en place des outils

Exercice 1 : *tout triangle est isocèle…Le problème des figures en géométrie*

Soit ABC un triangle, non isocèle en A : la bissectrice intérieure issue de A et la médiatrice de [BC] se coupent en M. On appelle P et Q les projetés orthogonaux de M sur les côtés (AB) et (AC).




Montrer que AP = AQ, PB = QC et en déduire que AB = AC…

Exercice 2 : *le parallélogramme des milieux : raisonnements géométriques et diversités des outils*

Soit ABCD un quadrilatère et IJKL les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) Montrer que IJKL est un parallélogramme.
2) Réciproquement, soit PQRS un quadrilatère. Construire un quadrilatère dont P, Q, R et S sont respectivement les milieux des 4 côtés.
3) Comparer les aires de ABCD et IJKL.
4) En déduire une propriété de tous les quadrilatères ayant IJKL comme parallélogramme des milieux.

Exercice 3 : *une configuration simple classique(disponibilité d'outils géométriques)*

BGFD est un carré de côté a ; A, C, E, H sont des points de [GB], [BD], [DF] et [FG] tels que GA = BC = DE = FH = b.

On appelle O le milieu de [AE].

1) Montrer que le triangle ACE est rectangle isocèle.
2) Montrer que le triangle OBD est rectangle isocèle.
3) Montrer que ACEH est un carré. Quel est son centre ? Quel est le centre de BGFD ?

Exercice 4 : *un autre grand classique(travail dans différents cadres)*

ABCD est un carré, CDI et BCJ deux triangles équilatéraux respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du carré. Montrer que A, I, J sont alignés.

On pourra

Calculer les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{BAJ}$

Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ (ou introduire des coordonnées).

Introduire K tel que ACK soit équilatéral, étudier les points K, B et D et utiliser une rotation de centre C.

Exercice 5 : *un problème de lieu*

Soient ABCD un parallélogramme, M un point quelconque de (AD), N le symétrique de A par rapport à M, P le point d'intersection de (CM) et (BN).

Quel est le lieu des points P lorsque M décrit (AD) ?

Exercice 6 : *comparaison d'énoncés*

1. Soit ABCD un carré, M un point de [AB], P et N deux points de (AD) tels que DP = MB = DN (on choisit P sur le segment [AD]). Soit I le milieu de [MN].
Quel est le lieu de I lorsque M décrit [AB] ?
On fera une partie directe (inclusion) et une réciproque.

2. Soit ABCD un carré, M un point de [AB], P et N deux points de (AD) tels que DP = MB = DN (on choisit P sur le segment [AD]). Soit I le milieu de [MN].
En utilisant le théorème de Thalès, trouver le lieu de I lorsque M décrit [AB].
On fera une partie directe (inclusion) et une réciproque.

3. Soit ABCD un carré, M un point de [AB], P et N deux points de (AD) tels que DP = MB = DN (on choisit P sur le segment [AD]). Soit I le milieu de [MN].
En utilisant le théorème de Thalès, montrer que I appartient à (DB).
Réciproque ? Quel est le lieu de I?

4. Soit ABCD un carré, M un point de [AB], P et N deux points de (AD) tels que DP = MB = DN (on choisit P sur le segment [AD]). Soit I le milieu de [MN].
En utilisant le théorème de Thalès, montrer que (PM) est parallèle à (DB). En déduire le lieu de I lorsque M décrit [AB].

5. Soit ABCD un carré, M un point de [AB], P et N deux points de (AD) tels que DP = MB = DN (on choisit P sur le segment [AD]). Soit I le milieu de [MN].

1) Montrer que (PM) est parallèle à (DB)
2) Montrer que (DI) est parallèle à (PM).
3) En déduire que I appartient à (DB).
4) Réciproque ? Quel est le lieu de I?

6. Soit ABCD un carré, M un point de [AB], P et N deux points de (AD) tels que DP = MB = DN (on choisit P sur le segment [AD]). Soit I le milieu de [MN].

1) Montrer que (PM) est parallèle à (DB) en utilisant le théorème de Thalès.
2) Montrer de même que (DI) est parallèle à (PM).
3) En déduire que I appartient à [DB].
4) Montrer que le lieu de I est [DO], où O est le centre du carré.

CORRIGÉ Réciproque 2006

A partir de l'idée générale trouvée oralement, il faut **préciser** la démonstration, éventuellement **la compléter** (cf. problèmes d'existence, ou d'unicité), voire **l'ordonner autrement, même la simplifier** et décider de certaines normes pour écrire. Par exemple, on peut décider de citer un théorème par son nom, en indiquant ce qui permet de l'utiliser dans le cas particulier. D'autres décisions peuvent être prises ! Si la propriété n'a pas de nom, on peut l'évoquer, là encore d'autres décisions peuvent être prises ! Et jusqu'où justifier (redescendre) ?
Enfin, dans une question de ce genre (réciproque, question peu précise) il fait indiquer ou au début ou à la fin, la question précise à laquelle on va répondre (ou on a répondu).
*On entrevoit ici le rôle de l'écrit dans les apprentissages et la différence entre oral et écrit !*
*Qu'ont les élèves à leur disposition pour entrer dans l'écrit en mathématiques ?*

Il s'agit de montrer que le segment [DO] est le lieu de I.
On a déjà montré que ce lieu est inclus dans [DO]. **Réciproquement,** il faut encore montrer que si J est un point de [DO], J est dans l'ensemble considéré, c'est à dire qu'il existe un point M appartenant à **[AB],** un point P appartenant **à [AD]** et un point N appartenant à **(AD),** tels que MB = PD = ND, et tels que J est le milieu de [MN].
*En général dans vos rédactions, vous n'avez pas vérifié que M et P appartenaient aux segments convenables, et d'ailleurs vous n'avez pas fait spécialement intervenir que J était sur [DO] et pas sur (DB) (ce qui pouvait être un signal d'alerte) !*

Soit J un point de [DO]. On construit A' et B' symétriques de A et B par rapport à J.
**Le segment [A'B']** est coupé par (AD) en N.
*C'est là qu'est le problème ! Il est certain que la droite (AD) et la droite (A'B') se coupent (propriété des symétries centrales) mais on doit vérifier que leur point d'intersection appartient au segment [A'B'], car cela entraînera que M, symétrique de N par rapport à J, appartient au segment [AB] , ce qui est nécessaire.*

La droite (AD) coupe le segment [A'B'] si et seulement si la symétrique ($J_1$A') de cette droite par rapport à J coupe le segment [AB] (d'après une propriété des symétries centrales), où $J_1$ est le symétrique de D par rapport à J. Ou encore, comme ($J_1$A') est perpendiculaire à (AB), si et seulement si $J_1$ appartient au segment [DB] (cf.convexité).
**Or quand J décrit [DO], $J_1$ le symétrique de D par rapport à J, décrit [DB]** (en considérant les positions extrêmes et le fait qu'on a une bijection entre J et $J_1$, ou en considérant l'homothétie qui permet de transformer J en $J_1$). Ceci garantit la position recherchée de N.
*L'utilisation des positions extrêmes dans la partie directe était légitime car on en démontrait pas, on conjecturait la position de I sur (DB). Ici il faut démontrer... On peut utiliser un argument de positions extrêmes si on dispose des arguments de convexité (cachée au collège) : si on sait déjà qu'un point appartient à un segment, la donnée des extrémités de ce segment suffit pour décrire ce segment par exemple.*

On construit M symétrique de N par rapport à J, M appartient au segment [AB]. On construit P symétrique de N par rapport à D : P appartient à [AD] (par une justification analogue à la précédente sur la position de M).
Il reste à vérifier que MB = PD, la dernière égalité (PD= ND) est déjà acquise par construction.

*La démonstration du parallélisme de (DJ) et (PM) avec la composée des symétries centrales est possible, mais on peut simplifier beaucoup au moment de la rédaction comme beaucoup l'ont fait !*

Dans le triangle NPM, D est le milieu de [NP], J est le milieu de [NM], donc (DJ) est parallèle à (PM) d'après la réciproque du théorème de Thalès. Donc dans le triangle ADB, comme les droites (DJ) et (DB) sont les mêmes, d'après le théorème de Thalès, on a aussi l'égalité suivante : AP/AD = AM/AB, ce qui implique l'égalité AP = AM (équivalente à MB = DP) du fait que **ABCD est un carré.**

Des questions nouvelles surgissent souvent grâce à ce travail de rédaction précis (notamment pour l'enseignant) : par exemple que se passe-t-il si M décrit (AB) ? Si ABCD est un parallélogramme ?

Autres pistes de démonstrations de la réciproque

1. On considère le cercle de centre J et de rayon JA : il coupe (AB) en M et (AD) en N – comme l'angle NAM est droit, le triangle DNA est un triangle rectangle inscrit dans un cercle de centre J, donc J appartient à l'hypoténuse [NM] de ce cercle, donc J est le milieu de [NM].

Mais il faut vérifier à ce stade que M existe bien et qu'il est un point du segment [AB] ; et que N est un point de la demi-droite [AD) extérieur à [AD] !
Or M est le deuxième point d'intersection du cercle et de (AB) : il existe toujours (il peut être en A s'il y a tangence). De plus le milieu de [AM] est le projeté de J sur (AB) : ce point appartient à [AO'], où O' milieu de [AB], si J décrit [DO] ; donc M appartient à [AB] (mêmes arguments que précédemment).

On construit P symétrique de N par rapport à D : la droite (DJ) est parallèle à la droite (PM) – droite des milieux dans le triangle NPM (ou réciproque du théorème de Thalès). Le parallélisme de (DB) et (PM) implique alors, d'après le théorème de Thalès l'égalité suivante : AP/AD = AM/AB, ce qui implique l'égalité AP = AM (équivalente à MB = DP) du fait que **ABCD est un carré**.

2. On considère le projeté orthogonal $J_1$ de J sur (AD). Comme J appartient à [DO], le point $J_1$ appartient à [A'D], où A' est le milieu de [AD].
Le symétrique N de A par rapport à $J_1$ appartient à [$DA_1$], où $A_1$ est le symétrique de A par rapport à D. Le symétrique P de N par rapport à D appartient à [AD].
On construit M comme intersection de (AB) et de la parallèle à (DB) menée par P : ces deux droites se coupent et M appartient à [AB] du fait que P appartient à [AD].
D'après le théorème de Thalès, dans le triangle ADB, on a l'égalité suivante : AP/AD = AM/AB, ce qui implique l'égalité AP = AM (équivalente à MB = DP) du fait que ABCD est un carré.

Il reste ici à montrer que J est le milieu de [MN] (et en particulier que J, M, N alignés).
Dans le triangle PMN, la parallèle (DJ) à (PM) menée par D, milieu de [PN], coupe (MN) en son milieu J'. Ce point J' se projette orthogonalement sur (AD) en le milieu de [AN], c'est à dire $J_1$. Par unicité de la droite perpendiculaire à (AD) menée par $J_1$ et de l'intersection de deux droites, J = J'.

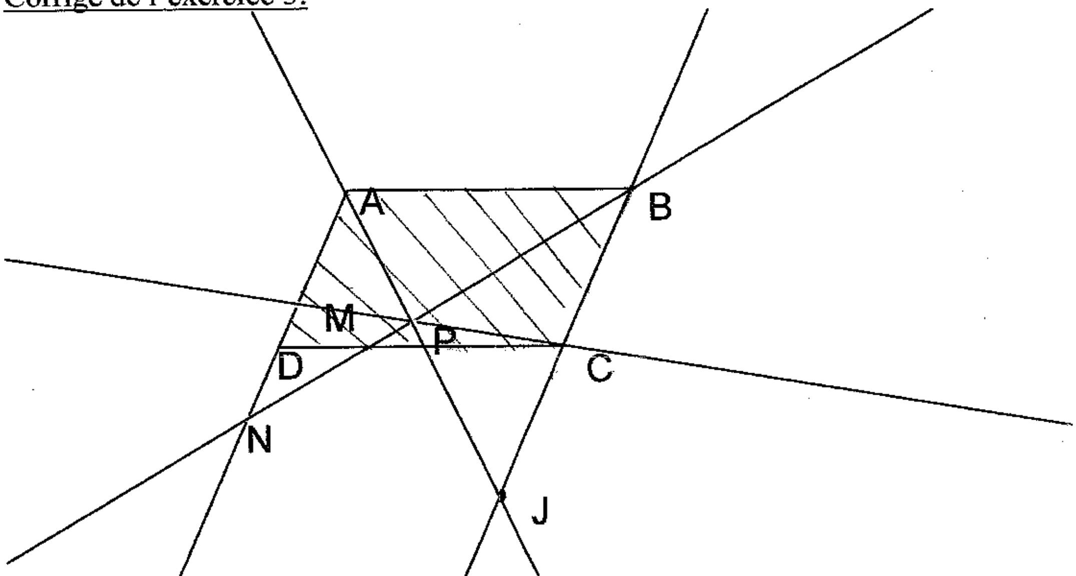
*Enfin on peut aussi justifier à chaque fois l'appartenance à un segment par un argument numérique en utilisant les bornes d'une fonction croissante par exemple.*

Exercice 5 : *un problème de lieu*

Soient ABCD un parallélogramme, M un point quelconque de (AD), N le symétrique de A par rapport à M, P le point d'intersection de (CM) et (BN).

Quel est le lieu des points P lorsque M décrit (AD) ?

Corrigé de l'exercice 5.




L'hypothèse sur M, A et N se traduit par M milieu de [AN].
Si M est en A, N et P sont aussi en A.
Si non, M et N sont distincts et leur position respective sur (AD) implique, par convexité, que (BN) et (CN) se coupent en P, qui n'appartient pas à (AD) (sinon M = N = A). Sauf si M est symétrique de D par rapport à A : alors (BN) et (CM) sont parallèles et P n'existe pas.

On trace la droite (AP). Elle coupe (BC) en J. **Il y a ici un point de vue particulier.**
Dans les triangles AMP et PCJ, on applique le théorème de Thalès : AM/CJ = PM/PC
Dans les triangles BCP et MPN, on applique le théorème de Thalès : MN/BC = PM/PC
Par suite, AM/CJ = MN/BC
Or AM = MN (par hypothèse), donc BC = CJ (C est le milieu de [BJ].
Le point J est fixe, ainsi que la droite (AP). Le lieu de P est donc inclus dans (AP).
On peut remarquer aussi que le point d'intersection I de (AP) et (DC) est le milieu de [DC] : on applique la réciproque du théorème de Thalès dans AJB.

Réciproquement, soit Q un point de (AP).
Il s'agit de chercher s'il existe un point M de (AD), un point N de (AD) tels que M soit le milieu de [AN] et tels que Q soit l'intersection de (BN) et (CM).
Si Q est en A, on prend M et N en A et Q est bien l'intersection de (BA) et (CA).
Sinon, on trace (BQ) et (CQ) : si Q est en J, c'est impossible.
Si Q n'est pas en J, ces deux droites ne sont pas parallèles à (AD), et coupent donc (AD) en N et M respectivement. Il reste à prouver que M est le milieu de [AN]. Il y a plusieurs cas de figures, qui peuvent se traiter de la même façon, selon la position de P sur (AP) : P appartient à [AI], [IJ] ou aux demi-droites portées par (AJ) d'origine J et A.
En appliquant le théorème de Thalès dans les mêmes triangles AMQ et QCJ d'une part et BCQ et MQN d'autre part,on a encore : AM/CJ = QM/QC = MN/BC.
Cette fois-ci comme CJ = BC, on en déduit AM = MN. Cqfd.
Le lieu de P est donc (AP) – {J}.

**Eléments pour analyser un énoncé (question par question)**

Ces analyses portent sur les connaissances que les élèves ont à utiliser dans un exercice et permettent de préciser le travail mathématique à faire à partir des éléments à la disposition des élèves (cours et exercices déjà faits).

Toutes ces analyses sont relatives à un niveau scolaire donné, un programme donné, une classe donnée et même un moment donné car elles dépendent de ce qui a déjà été « fait » !

Elles peuvent se faire à partir des seuls énoncés mais elles ont pour ambition de renseigner sur les activités mathématiques des élèves en train de résoudre les exercices : nous considérons qu'une partie des apprentissages se joue à ce moment-là.
Ces analyses permettent de se faire une idée de ce qui est proposé aux élèves, même si la réalité est plus compliquée.
Elles sont aussi utiles pour comparer ce qui est proposé avec ce qui se passe en classe. Elles permettent de mieux saisir par exemple des difficultés imprévues des élèves, qui « retardent » leur résolution. Elles amènent aussi à comprendre les modifications des activités des élèves dues au déroulement introduit par l'enseignant, grâce aux aides qu'il peut dispenser par exemple.

a) Les énoncés proposés aux élèves portent sur des connaissances qui peuvent être **anciennes ou en cours d'acquisition** : c'est une première distinction à prendre en compte vis-à-vis des activités et des apprentissages qu'ils peuvent induire.

b) De plus, ces connaissances peuvent être ou non **indiquées, fléchées** (directement ou indirectement par leur place dans un chapitre notamment) : on parle alors de fonctionnement de type **mobilisable** ou **disponible** (sans indication).
Le travail des élèves n'est en effet pas analogue selon qu'ils doivent

- rechercher les connaissances à utiliser, c'est-à-dire mettre en relation une propriété à démontrer et différents outils, à choisir
- ou mettre en fonctionnement, utiliser, en l'adaptant une propriété.

c) De même, la question posée peut être **fermée** (montrer que...) ou nécessiter des conjectures, plus ou moins larges : Entre « calculer... » et « que peut-on dire de ... ? » il peut y avoir encore beaucoup de différence de travail. Une question fermée sans aucune indication peut cependant ne pas être abordée immédiatement.

d) **Dans tous les cas**, que ce soit sur des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition, mobilisables ou disponibles, les mises en fonctionnement peuvent varier, avec des conséquences sur les activités et les apprentissages. Nous distinguons des grands **types d'adaptations**.

Si le travail consiste à appliquer une propriété sans calcul supplémentaire ni reconnaissance (remplacer les données générales par des données particulières) on parle **d'application simple et isolée** : l'utilisation **immédiate** d'une propriété donnée en cours, et d'une seule est mise en jeu une seule fois. On peut aussi évoquer un niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances.

Dans le cas contraire, six types se dégagent, qui peuvent intervenir simultanément, qui ont chacun un spectre assez large :

A1. *Les reconnaissances* (partielles) *des modalités d'application* des notions, théorèmes, méthodes, formules... : typiquement en géométrie reconnaître la(es) configuration(s) où utiliser le théorème de Thalès. Cela peut aller de reconnaissances de variables, de notations à des reconnaissances de formules ou de conditions d'applications de théorèmes.

A2. *L'introduction d'intermédiaires* – notations, points, expressions... : typiquement en géométrie introduire une parallèle, ou nommer un point pour utiliser Thalès.

A3. *Les mélanges* de plusieurs cadres ou notions..., les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres ou de registres (modes d'écriture), les mises en relation ou interprétations : typiquement en géométrie, utiliser du calcul algébrique pour obtenir le résultat (par exemple résoudre $x^2 = 1$ au milieu d'un problème de géométrie). Les énoncés qui jouent sur graphique/fonction contiennent automatiquement cette adaptation.

A4. *L'introduction d'étapes, l'organisation* des calculs ou des raisonnements (cela va d'utilisation répétée (in) dépendante d'un même théorème à l'introduction d'un raisonnement par l'absurde faisant intervenir le théorème) : typiquement en géométrie, utiliser quatre fois le théorème de Thalès de manière non indépendante puis sa réciproque. Les étapes peuvent être classiques (étude d'une fonction) ou à imaginer. *Les énoncés très découpés minimisent ce type d'adaptations.*

A5. *L'utilisation de questions précédentes* dans un problème.

A6. *L'existence de choix* – plusieurs méthodes peuvent convenir ou non.

e) Compléments : un minimum sur les espaces affines, des quadrilatères aux parallélogrammes, inégalité triangulaire et position relative de deux cercles.

**Minimum sur les espaces affines**

On munit le plan $\mathcal{P}$ *(ensemble de points)* d'une **structure d'espace affine** sur $\mathbb{R}^2$ (espace vectoriel).

Rappelons qu'on se donne pour cela une application $f$ de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^2$, notée $f(A,B) = \overrightarrow{AB}$ qui vérifie, pour tous A,B,C,O,M de $\mathcal{P}$

- La relation de Chasles : $f(A,B) + f(B,C) = f(A,C)$ ; encore noté : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Pour tout point O de $\mathcal{P}$, l'application $h$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pour tout M de $\mathcal{P}$ par $h(M) = \overrightarrow{OM}$ est bijective.

*D'où l'unicité du point M défini par $\overrightarrow{OM} = u$ (vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$).*

**Les applications affines** sont les applications f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telles qu'il existe une application linéaire $\phi$ vérifiant, pour tous A,B d'images A' et B' par f

$\phi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$

Enfin, si on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel, l'espace affine est muni d'une **distance** définie, pour tous A,B de $\mathcal{P}$ par

$AB = \| \overrightarrow{AB} \|$

**Propriétés immédiates :**

$\overrightarrow{AA} = 0, \ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

**Manque** : sous-espace affine, dimension d'un sous-espace affine, sous-espace affine engendré.

*Par exemple* :

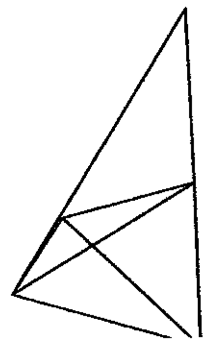
Deux droites parallèles sont deux sous-espaces affines de dimension 1 qui ont le même sous-espace vectoriel associé (engendré par un vecteur non nul).

Ainsi, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\,k$, les sous-espaces affines engendrés par {A,B} et {C,D} sont deux droites parallèles (qui pourraient être confondues).

Un quadrilatère ABCD est la donnée de 4 points A, B, C, D.

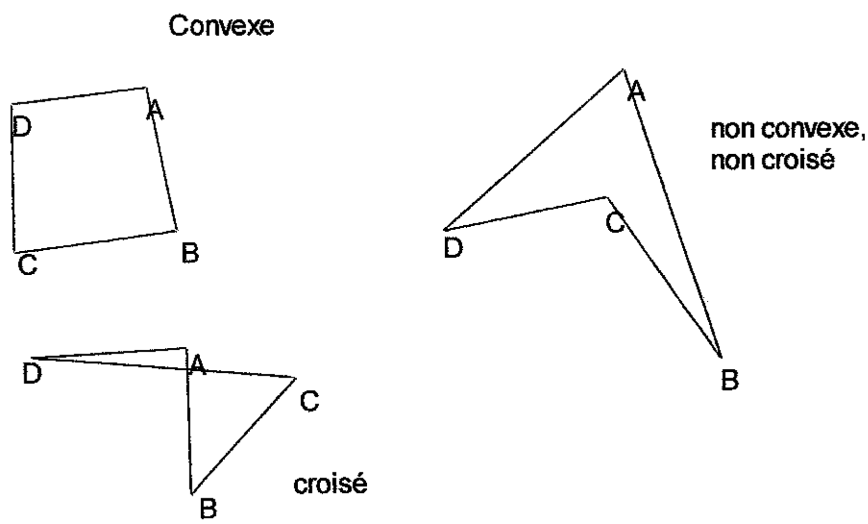
Les diagonales sont les **segments** [AC] et [BD].

Un quadrilatère complet est la figure suivante



Un quadrilatère ABCD est convexe si pour chaque côté, ABCD est contenu tout entier dans un des deux demi-plans limité par chaque côté),

quadrilatère
ABCD,
diagonales
[AC et [BD]




On peut montrer qu'un quadrilatère plan est convexe ssi les diagonales ont un point commun

Un parallélogramme ABCD est un quadrilatère tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou encore $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$), ce qui est équivalent d'après la relation de Chasles)

**ABCD est un parallélogramme si et seulement si**

- Ses côtés opposés sont parallèles (1)
- Ses diagonales se coupent en leur milieu (2)

*Démonstration dans le cadre affine*

Seule la réciproque de (1) est à démontrer.

On traduit le double parallélisme par l'existence de scalaires $\lambda$, $\mu$ tels que

$\overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC} = \mu \overrightarrow{AD}$.

Des relations de Chasles $\overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \lambda \overrightarrow{AB}$ on déduit $(1 - \lambda)\ \overrightarrow{AB} = (1 - \mu)\ \overrightarrow{AD}$ d'où $\mu = \lambda = 1$ (car ces deux vecteurs sont libres).

Pour (2) on appelle I et J les milieux respectifs de [AC] et[BD] et O un point quelconque.

On a $I = J \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ ie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

**On démontre encore en géométrie ponctuelle** que, si ABCD est un quadrilatère convexe, ABCD est un parallélogramme si et seulement si :

- Ses angles opposés sont égaux
- Deux côtés sont égaux et parallèles.
- Les côtés opposés sont égaux deux à deux

La restriction « convexe » permet de définir ici sans ambiguïté les angles et les côtés opposés.

Enfin, on démontre qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si la somme des carrés des longueurs des côtés est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales.

Parallélogrammes particuliers.

Soient trois points A,B,C.
On a toujours
$AB \leq AC + CB$
$AC \leq AB + BC$
$BC \leq AC + AB$

**Les trois points sont alignés si et seulement si une des trois inégalités précédentes est une égalité**
$AB = AC + CB$ **ou**
$AC = AB + BC$ **ou**
$BC = AC + AB$.

**Les trois points forment un triangle non aplati si et seulement si les trois inégalités sont strictes**
$AB < AC + CB$ **et**
$AC < AB + BC$ **et**
$BC < AC + AB$

Ce qui est équivalent à **$|AB - BC| < AC < AB + BC$.**

Si deux cercles de centre O et O' et de rayons R et R' respectifs sont sécants en M, on a OO'M est un vrai triangle donc **$|R - R'| < OO' < R + R'$ (*)**

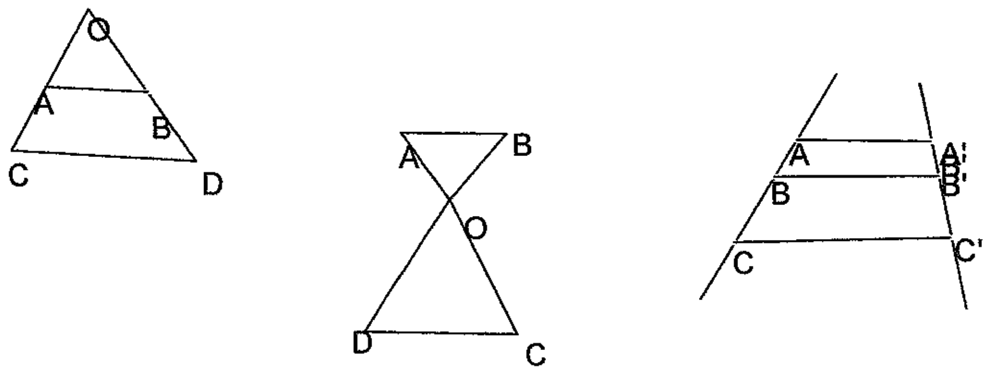
**Réciproquement** deux cercles qui vérifient (*) sont sécants.
Sinon, ils seraient ou tangents ou extérieurs ou intérieurs et on aurait une autre relation (**).

2.Le théorème de Thalès et sa réciproque

a) Compléments sur le théorème de Thalès et sa réciproque
b) Une analyse d'exercices de manuels
c) Une analyses d'EVAPM
d) Diverses applications du théorème et de sa réciproque (une liste d'exercices)

**<u>Compléments sur le théorème de Thalès et sa réciproque</u>**

**Introduction : variété des configurations et des expressions du théorème**




Quels rapports ? Si (AB)// (CD), ou (AA')// (BB')// (CC')

**Longueurs**

OA/AC = OB/BD

OA/OC = OB/OD = AB/CD

**Vecteurs**

si $\overrightarrow{OA} = r\overrightarrow{OC}$, alors $\overrightarrow{OB} = r\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB} = r\overrightarrow{CD}$

**Mesures algébriques**

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$$

Dans le dernier cas $\overline{A'B'}/\overline{B'C'} = \overline{AB}/\overline{BC}$

**Remarque**

La mesure algébrique est définie sur toute droite à partir de la donnée d'un vecteur directeur.

Elle dépend donc de ce vecteur. En revanche le rapport de deux mesures algébriques sur une droite est indépendant du choix du vecteur directeur.

Soit d une droite, O un point fixé de cette droite, $\vec{u}$ un vecteur directeur et $k\vec{u} = \vec{v}$ un deuxième vecteur directeur (k non nul).

On a, si M et N sont deux points de cette droite, d'une part $\overrightarrow{OM} = \overline{OM}\,\vec{u}, \overrightarrow{ON} = \overline{ON}\,\vec{u}$, et d'autre part $\overrightarrow{OM} = \overline{\overline{OM}}\,\vec{v}, \overrightarrow{ON} = \overline{\overline{ON}}\,\vec{v}$. Par suite $\overline{OM} = k\overline{\overline{OM}}$ et $\overline{ON} = k\overline{\overline{ON}}$ ce qui implique l'égalité des rapports.

## I Démonstrations du théorème de Thalès

### *1) Au collège*

a) Premier cas de figure

> On suppose O,A,C alignés dans cet ordre et O, B,D alignés dans cet ordre, sur deux droites distinctes et tels que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Alors OA/OC = OB/OD

Démonstration

On remplace les rapports de longueurs par des rapports d'aires, que l'on sait comparer ici.

OA/OC = aire(OAB)/aire(OBC)

En effet les hauteurs issues de B sont les mêmes, le rapport des aires est donc égal au rapport des longueurs des bases intervenant dans le calcul des aires.

On calcule ici l'aire d'un triangle en utilisant la formule (1/2bh).

De même OB/OD = aire(OAB)/aire(OAD)

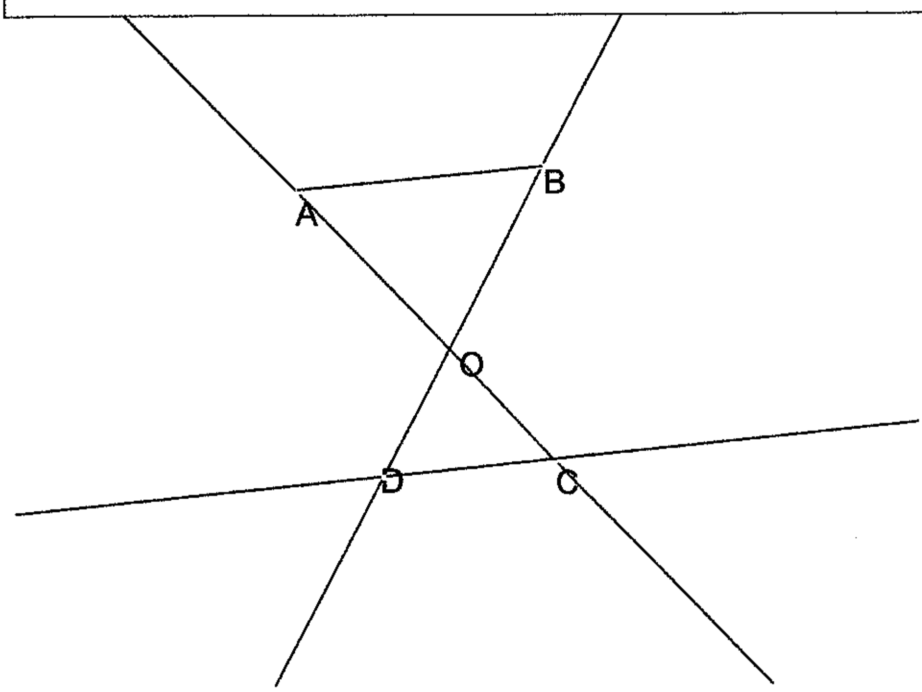
Or les aires des dénominateurs sont égales : en effet les aires des triangles ABC et ABD sont égales car ils ont une base commune et que les sommets opposés appartiennent à une parallèle à cette base (longueurs des hauteurs égales).

Le numérateur des deux rapports étant identique, ces rapports sont égaux.

Remarquons qu'une démonstration analogue est proposée dans les Eléments d'Euclide – à cela près que ce ne sont pas les formules d'aires qui sont utilisées mais directement les relations entre rapports d'aires et rapports des bases des triangles (dans les cas où c'est possible).

b) Deuxième cas de figure (*)

> On suppose A,O,C et B,O,D alignés dans cet ordre sur deux droites distinctes et tels que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Alors OA/OC = OB/OD.



Démonstration

On utilise les mêmes méthodes, et la remarque sur la méthode des Eléments d'Euclide est valable.

Le premier rapport est égal au rapport des aires des triangles BOA et de OBC (même hauteur).

Le deuxième rapport est égal au rapport des aires des triangles BOA et de OAD (même hauteur).

Or les triangles OBC et OAD ont la même aire : en effet les triangles ABD et ABC ont la même aire car ils ont une base commune et que les sommets opposés appartiennent à une parallèle à cette base (longueurs des hauteurs égales). De ce fait, les aires des triangles OBC et OAD, qui valent respectivement aire(ABC) – aire(OAB) et aire (ABD) – aire(OAB) sont égales.

c) Variantes

On démontre **l'équivalence de l'égalité OA/OC = OB/OD et de l'égalité OA/CA = OD/DB.**

En effet (par exemple dans le premier cas de figure) OC = OA + CA et OD = OB +DB, ce qui implique OC/OA = 1 + CA/OA et OB/OD = 1 + DB/OD ; d'où l'équivalence entre les deux égalités.

d) Le troisième rapport

Prenons le premier cas de figure (même chose avec l'autre).

On montre que, si O, A, C alignés dans cet ordre, O, B, D alignés dans cet ordre sur deux droites distinctes et tels que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors OA/OC = OB/OD = AB/CD.

Démonstration de la dernière égalité

On trace par D la parallèle à (OA) : elle coupe [CD] en C'.

D'après la première partie, on a DC'/DC = DB/DO.

Or ABC'C est un parallélogramme (ses côtés sont parallèles deux à deux), donc CC' = AB.

Par suite, OB/OD = 1 – (BD/OD) = 1 – (DC'/DC) = AB/DC.

e) Réciproque

On se place dans le premier cas de figure (c'est analogue dans l'autre cas).

On suppose que O, A, C et O, B, D sont des points alignés dans cet ordre et tels que OA/OC = OB/OD. Alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Démonstration

On peut raisonner par l'absurde.

Alors on mène par C la parallèle à (AB) qui coupe (OD) en D' (supposé différent de D, par l'absurde).

On a donc : OA/OC = OB/OD'. Par suite OD' = OD, et comme D et D' sont du même côté de O, D = D'. Impossible !

Donc D = D' et (CD) est parallèle à (AB).

f) Un essai de réciproque qui n'en est pas une

On se place dans le premier cas de figure.

*On suppose que O, A, C et O, B, D sont des points alignés dans cet ordre sur deux droites distinctes et tels que OA/OC = AB/CD. Alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.*

Cet énoncé est **faux** : en effet, il y a deux points D et D' qui vérifient OA/OC = AB/CD, dès que la distance CH de C à OB est inférieure (strictement) à CD, où H est le projeté orthogonal de C sur (OD). Dans certains cas, O, B , D'sont encore alignés dans cet ordre : dès que BD > 2BH. L'un de ces deux points est tel que (AB) et (CD) sont parallèles, d'après la partie directe, mais pas l'autre (unicité de la parallèle menée par C à (AB)).

g) Les contraposées

*Partons d'un exemple.*

*On se donne trois points O, A, B alignés dans cet ordre, tels que OA = 5, et OB =7 (une unité étant fixée). On se donne sur une autre droite passant par O, distincte de la première, deux points alignés dans l'ordre O, C, D tels que OC = 13 et OD = 18. Est-ce que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ?*

On calcule OA/OC (5/7) et OB/OD (13/18) et on compare : comme 5/7 <13/18, les droites ne sont pas parallèles. On raisonne ou par l'absurde (si elles étaient parallèles on aurait égalité de ces rapports) ou en évoquant la contraposée du théorème de Thalès :

OA/OC ≠ OB/OD ⇒ (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

h) De vieilles connaissances

*Soit ABC un triangle et I le milieu de [AB]. On mène par I la parallèle à (BC). Montrer qu'elle coupe [AC] en son milieu.*

Variante : *Soit ABC un triangle et I le milieu de [AB]. On mène par I la parallèle à (BC). On construit J sur cette parallèle (du côté de C) tel que IJ = BC/2. Montrer que J est le milieu de [AC].*

Démonstration

1) La parallèle à (BC) coupe [AC] en un point J tel que AJ/AC = AI/AB = ½, d'après le théorème de Thalès. J est donc le milieu de [AC].

2) Variante : Le milieu J' de [AC] est tel que (IJ') est parallèle à (BC) d'après la réciproque du théorème de Thalès. Il vérifie IJ' = BC/2. Il y a un seul point sur [IJ) qui vérifie cette égalité, donc J = J'.

Variante vectorielle : *Soit ABC un triangle. I est le milieu de [AB]. Le point J tel que* $\overrightarrow{IJ} = 1/2\overrightarrow{AB}$ *est le milieu de [AC].*

<u>i) Autres</u>

Il existe d'autres démonstrations élémentaires, s'appuyant sur une autre progression pour construire la géométrie.

2) *Au lycée et après : dans le cadre vectoriel*

<u>a) Avec les homothéties</u>

On suppose O,A,C alignés et O, B,D alignés sur deux droites distinctes et tels que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Alors $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$.

<u>Démonstration</u>

On considère l'homothétie de centre O telle que A a comme image C : cette homothétie, parfaitement déterminée par ces données vérifie : B a comme image D.

Par suite, il existe un réel k (non nul) tel que $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$ et on a $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

Il en résulte les égalités : $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

Justifions l'affirmation sur l'image de B : d'après les propriétés des homothéties, l'image de B appartient à (OB) et à la parallèle à (AB) menée par l'image C de A : c'est D.

*On peut proposer un énoncé unique pour les deux cas précédents.*

<u>b) Avec la modélisation par un espace affine et l'existence d'une base de $\mathbb{R}^2$</u>

On munit le plan d'une structure affine.

On suppose O,A,C alignés et O, B,D alignés sur deux droites distinctes et tels que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Alors si r est le réel tel que $\overrightarrow{OA} = r\overrightarrow{OC}$, on a $\overrightarrow{OB} = r\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB} = r\overrightarrow{CD}$

<u>Démonstration</u>

Comme les droites (OA) et (OB) sont distinctes et concourantes, les deux vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Exprimons les vecteurs sur cette base :

Les alignements et parallélisme des hypothèses entraînent qu'il existe des réels r,s,t tels que

$\overrightarrow{OA} = r\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = s\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{CD}$ (traduction des colinéarités de la figure)

En exprimant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sur la base $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$, on obtient

s$\overrightarrow{OD}$ - r$\overrightarrow{OC}$ = t($\overrightarrow{OD}$ - $\overrightarrow{OC}$ ).

Par suite, comme une combinaison linéaire nulle de deux vecteurs de base a des coefficient nuls,

s = t = r.

Il en résulte la forme vectorielle du théorème : si $\overrightarrow{OA} = r\overrightarrow{OC}$, alors $\overrightarrow{OB} = r\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB} = r\overrightarrow{CD}$

c) Une forme plus générale (qui se généralise à l'espace) : avec les projections.

Soit (AC) et (BD) deux droites non parallèles et M et N deux points de chaque droite, vérifiant (AB) // (CD) // (MN).

Alors si on appelle r le nombre réel tel que $\overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{MC}$, on a $\overrightarrow{BN} = r\overrightarrow{ND}$

La démonstration utilise le fait que les projections sur une droite parallèlement à une direction donnée sont des applications affines.

On considère ainsi la projection sur (BD) parallèlement à la direction (AB) : on appelle $\phi$ l'application linéaire associée.

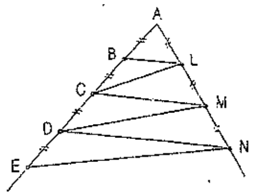
Dans cette projection A, M et C ont comme images respectives B, N et D.

Comme $\overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{MC}$, on a $\phi(\overrightarrow{AM}) = r\phi\overrightarrow{MC}$ (par linéarité de $\phi$)

soit $\overrightarrow{BN} = r\overrightarrow{ND}$

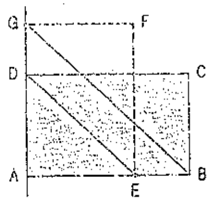
Exercices de manuels de troisième

**55** *Et si l'on savait pourquoi !*
a) Reproduire la figure :



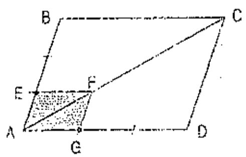
b) Démontrer que les segments en couleur sont parallèles.
c) Expliquer pourquoi les segments en traits noirs ne sont pas parallèles.

**56** *Rectangles de même aire*
Soit un rectangle ABCD et un point E du segment [AB]. La parallèle à (DE) passant par B coupe la droite (AD) en G



a) Démontrer que $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AG}$.
b) En déduire que les rectangles ABCD et AEFG ont la même aire.

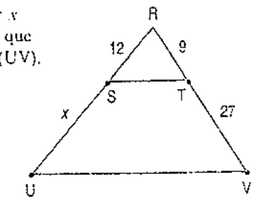
**57** *Réduction*
ABCD est un parallélogramme. Le point E, situé entre A et B est tel que $AE = \frac{1}{3}AB$.



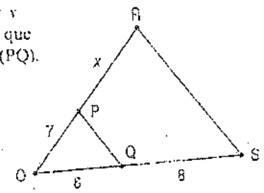
La parallèle à (BC) passant par E coupe (AC) en F. La parallèle à (CD) passant par F coupe (AD) en G.
a) Démontrer que $AF = \frac{1}{3} \times AC$ ; puis que $AG = \frac{1}{3} \times AD$.
b) Quel est le nombre $x$ tel que aire(AEFG) = $x \times$ aire(ABCD) ?

## Calculs de longueurs et d'aires

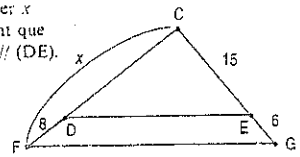
**58** Trouver $x$ sachant que (ST) // (UV).



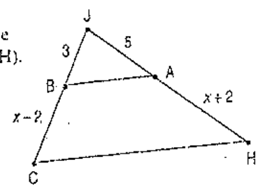
**59** Trouver $x$ sachant que (RS) // (PQ).



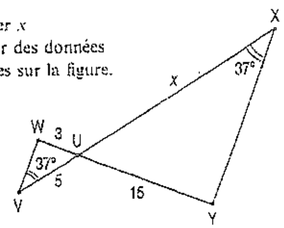
**60** Trouver $x$ sachant que (FG) // (DE).



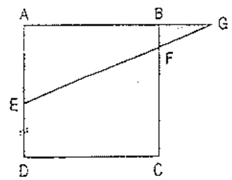
**61** Trouver $x$ sachant que (BA) // (CH).



**62** Trouver $x$ à partir des données inscrites sur la figure.

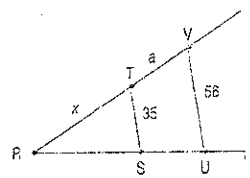


**63** ABCD est un carré de côté 10.



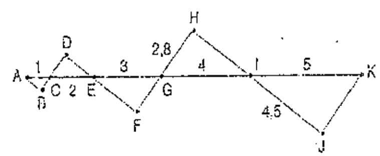
a) On suppose que ED = BG = 3.
Calculer BF.
b) On pose ED = BG = $x$.
Calculer BF en fonction de $x$.

**64** Les droites (ST) et (UV) sont parallèles et l'on a ST = 35 et UV = 56.
a) Calculer $x$, sachant que $a$ = 42.

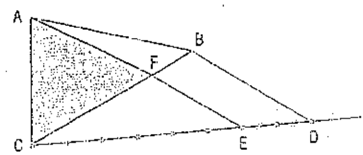


b) Calculer $x$ en fonction de $a$.

**65** *En dents de scie*
Calculer les dimensions de chaque triangle, sachant que les traits d'une même couleur sont parallèles entre eux.

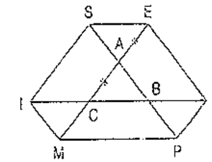


**66** On considère la figure suivante où (BD)//(EF).



Par combien faut-il multiplier l'aire de AFC pour obtenir l'aire de ABC ?

**67** *Périmètre*
Soit un triangle ABC et le symétrique E de C par rapport à A.
Les droites (ES), (BC) et (MP) sont parallèles, de même que les droites (EL), (AB) et (IM) et les droites (IS), (AC) et (LP).

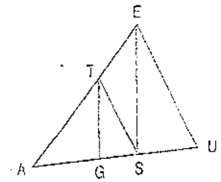


D'autre part, on a AB = 4, BC = 7 et CA = 5.
Calculer le périmètre de l'hexagone SIMPLE.

## Démonstrations avec Thalès

**68** Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AB = AC = 8 cm et BC = 5 cm.
Soit D le point du côté [AB] tel que BD = 6 cm.
La parallèle à (AC) passant par D coupe [BC] en E. Démontrer que le triangle BDE est isocèle.

**69** On suppose que (TS) // (EU) et (GT) // (ES).



a) Trouver deux quotients égaux à $\frac{AE}{AT}$.
b) En déduire que $AG \times AU = AS^2$.

**70** Soit un triangle KLM, et le milieu P de [ML]. Par le milieu I de [KP], on trace la parallèle à [KM] qui coupe (KL) en N et (ML) en A.
Calculer $\frac{LA}{LM}$ puis $\frac{LN}{LK}$.

**71** *Une propriété de la bissectrice*
Soit un triangle ABC. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe [BC] en L. La parallèle à (AB) passant par C coupe (AL) en T.
a) Démontrer que CAT est isocèle en C.
b) En déduire que $\frac{AC}{AB} = \frac{LC}{LB}$

# Exercices d'approfondissement

**Bissectrices**

Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment [BC] en I. La parallèle à (AB) passant par C coupe la droite (AI) en E.

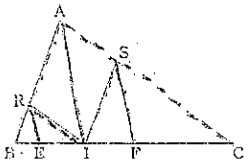
a. Démontrer que le triangle ACE est isocèle.

b. En déduire que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

*Application :* construire un triangle ABC tel que AB = 4 cm ; AC = 6 cm ; BC = 5 cm.
En n'utilisant que la règle graduée, construire la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

**Des quotients aux produits**

Sur la figure ci-contre, les droites d'une même couleur sont parallèles.




a. Démontrer que $BI^2 = BE \times BC$.

b. Démontrer que $CI^2 = CF \times CB$.

***** Sur le côté [AB] d'un triangle ABC, placer un point M distinct de A et de B.
La parallèle à (BC) passant par M coupe le segment [AC] en N.
Les droites (CM) et (BN) coupent la parallèle à (BC) passant par A respectivement en E et F.

a. Prouver les égalités suivantes :

$$1 - \frac{AM}{AB} = \frac{MB}{AB} ; \qquad 1 - \frac{AN}{AC} = \frac{NC}{AC} ;$$

puis en déduire l'égalité : $\frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CA}$.

b. Démontrer que A est le milieu du segment [EF].

a. Tracer un triangle ABC.
Construire le point M du segment [AB] et le point N du segment [AC] tels que :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad \frac{NA}{NC} = \frac{3}{5}.$$

b. Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

*Indication : exprimer NC puis AC en fonction de NA, en déduire le quotient $\frac{AN}{AC}$.*

a. Tracer un triangle RST tel que ST = 10,5 cm.
Construire le point E du segment [RS] et le point F du segment [RT] tels que :

$$\frac{RE}{RS} = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \frac{FT}{FR} = \frac{3}{4}.$$

b. Calculer EF.

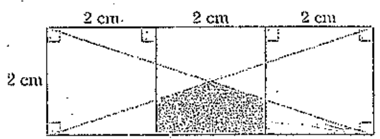
(Losange)

a. Les diagonales [AC] et [BD] d'un quadrilatère ABCD se coupent en O. Construire ce quadrilatère sachant que :
DC = 8,4 cm ; OD = 4,8 cm ; OC = 7 cm ; CA = 10,5 cm et DB = 7,2 cm.

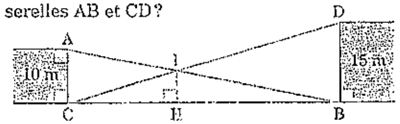
b. Démontrer que ABCD est un trapèze et calculer AB.

c. Les parallèles à (BC) et à (AD) passant par O coupent [AB] respectivement en E et F. Démontrer que AE = EF = FB.

***** Calculer l'aire de la surface bleue.




***** À quelle hauteur HI se croisent les passerelles AB et CD ?




*** Trapèze (1)**

Les diagonales [AC] et [BD] d'un trapèze ABCD de bases [AB] et [DC] se coupent en O.
Les parallèles à (BC) et à (AD) passant par O coupent la base [AB] respectivement en M et N.
On veut démontrer que AM = BN.

a. Prouver les égalité suivantes :

$$\frac{BD}{BO} = 1 + \frac{OD}{BO} ; \qquad \frac{AC}{AO} = 1 + \frac{OC}{AO} ;$$

puis en déduire les égalité :

$$\frac{BD}{BO} = \frac{AC}{AO} ; \quad \frac{BO}{BD} = \frac{AO}{AC} ; \quad \frac{BN}{BA} = \frac{AM}{AB}.$$

b. Conclure.

*** Trapèze (2)**

Les diagonales d'un trapèze ABCD de bases [AB] et [DC] se coupent en O.
On appelle I le milieu du segment [AB]. La droite (OI) coupe la base [DC] en J.
Démontrer que J est le milieu du segment [DC].

*** Trapèze (3)**

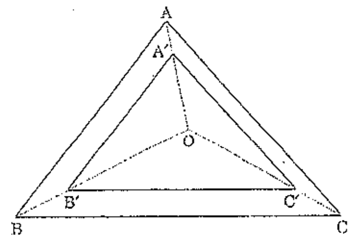
a. Tracer un trapèze ABCD de bases [AB] et [DC] ; on peut utiliser les lignes du cahier. Les droites (AC) et (BD) se coupent en F, les droites (AD) et (BC) se coupent en E. La droite (EF) coupe le segment [AB] en I et le segment [DC] en J. Faire plusieurs figures, qu'observe-t-on ?

b. Démontrer la propriété observée.

*Indication : on pourra comparer $\frac{AI}{JC}$ et $\frac{AI}{JD}$.*

*** Agrandissement, réduction**

Étant donné un triangle ABC et un point O, sur les demi-droites [OA), [OB) et [OC), on a placé les points A', B' et C' tels que :
OA' = 0,7 × OA ; OB' = 0,7 × OB ; OC' = 0,7 × OC.



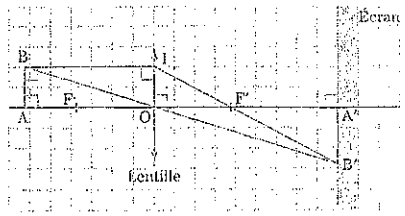

a. Démontrer que :
A'B' = 0,7 × AB ; A'C' = 0,7 × AC ; B'C' = 0,7 × BC.
Que peut-on dire des périmètres des triangles ABC et A'B'C' ?

b. Démontrer que les angles de sommets A', B', C' du triangle A'B'C' sont respectivement égaux aux angles de sommets A, B et C du triangle ABC.

c. On appelle H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. La droite (OH) coupe (B'C') en H'.
– Démontrer que OH' = 0,7 × OH ; en déduire que (AH) et (A'H') sont parallèles.
– Démontrer que (A'H') et (B'C') sont perpendiculaires.
– Démontrer que A'H' = 0,7 × AH.
Que peut-on dire des aires des deux triangles ?

**PHYSIQUE - CHIMIE**

Un objet AB est placé devant une lentille convergente comme le montre la figure ci-dessous.




On recueille l'image A'B' sur un écran. F' est le foyer objet de la lentille. B' est l'intersection des droites (IF') et (BO). On a :
OA = 50 cm ; OF' = 30 cm ; AB = 20 cm.

a. Justifier l'égalité AB = OI.

b. Démontrer que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$ ; $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'F'}{OF'}$.

c. En déduire que OA' vérifie la relation : 50(OA' – 30) = 30 OA', puis calculer OA'.

d. Calculer A'B' et le quotient $\frac{A'B'}{AB}$.

e. Reprendre le calcul de OA' et de A'B' dans les cas suivants :
OA = 60 cm ; OF' = 30 cm ; AB = 20 cm.
OA = 40 cm ; OF' = 30 cm ; AB = 20 cm.
OA = 50 cm ; OF' = 40 cm ; AB = 20 cm.
OA = 50 cm ; OF' = 20 cm ; AB = 20 cm.

*** Révision 4e**

[AD] est un diamètre d'un cercle de centre O et B, C deux points de ce cercle, distincts de A et D.

a. Quelle est la nature des triangles ABD et ACD ?

b. La parallèle à (BD) passant par C coupe (AB) en E. Démontrer que (CE) est une hauteur du triangle ABC.

c. La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe le cercle en A et J, la droite (CE) en H et la droite (BC) en I.
– Que représente H pour le triangle ABC ?
– En déduire que (BH) est perpendiculaire à (AC).
– Démontrer que (BH) est parallèle à (CD).

d. Démontrer que BHCD est un parallélogramme. On appelle K le point d'intersection de ses diagonales. Que représente K pour le segment [HD] ?

e. Quelle est la nature du triangle ADJ ?
En déduire que les droites (CI) et (DJ) sont parallèles puis démontrer que I est le milieu du segment [HJ].

*Brevet, Bordeaux 1994*

Evaluation EVAPM

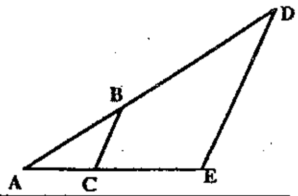
La figure est donnée ci-contre.

Sachant que:

a) AC = 2 cm , AE = 5 cm , AB = 3 cm.

b) Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Calculer AD.




*Ecrire le détail des calculs et les propriétés utilisées.*

Démarche correcte: 75%

3D101

N.R.:12%

R = 69%

réponse: AD = . . . . . .

Question E 21-22

Question B 31-32

La figure ci-contre étant donnée.

a) Les droites (AD) et (MB) sont parallèles.

b) En cm, les mesures réelles sont: JD = 3 ; JB = 1,8 ; AD = 4.

Calculer MB.

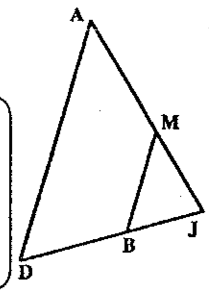
*Ecrire le détail des calculs et les propriétés utilisées.*

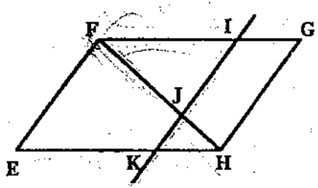
Référence explicite à Thalès : 69%

3D103

N.R.:16%

Réponse: MB = R = 63%




EFGH est un parallélogramme.

EF = 8 cm ; EH = 12 cm ; FH = 10 cm

(IK) est parallèle à (EF) et KH = 2,4 cm.

Calculer les longueurs HJ et JK.

*Explications et calculs*

N.R.:26%

3 D101

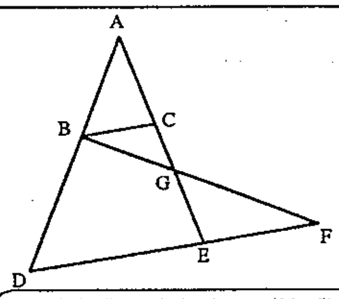
R = 51%

3 D103

R = 41%

Réponses: HJ = . . . . . . cm ; JK = . . . . . . cm

Question Q 10-11




La figure ci-contre étant donnée.

Sachant que:

a) Les droites (BC) et (DF) sont parallèles.

b) AC = 12 ; CG = 6 ; GE = 10 ; EF = 15 .

Calculer DE.

*Ecrire le détail des calculs et les propriétés utilisées.*

3 D103App

N.R.:42%

Calcul exact de BC: 19 %

R = 11%

Question N 25-26

Réponse: DE = . . . . . .

Question C 18-19

La figure ci-contre étant donnée. *(Dimensions indiquées sur la figure)*

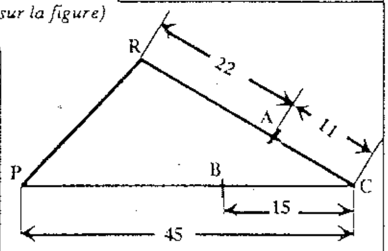
les droites (AB) et (RP) sont-elles parallèles?
*Justifier la réponse*

**R = 51%**

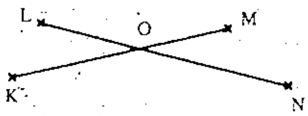
3D102

N.R.:13%

Référence explicite à la réciproque du théorème de Thalès: 42%




On donne: LO = 3 ; OK = 3,9 ; ON = 4,5 ; OM = 2,6
*(mesures faites avec la même unité)*




Les droites (LM) et (KN) sont-elles parallèles?
*Justifie ta réponse.*

3 D102

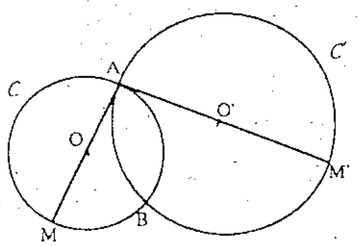
N.R.:21%

**Démarche correcte: 36%**

**R = 23%**

Question M 4-5

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles de centres O et O' qui se coupent en A et B.
La droite (AO) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en M.
La droite (AO') recoupe le cercle $\mathcal{C}'$ en M'.




Les droites (MM') et (OO') semblent parallèles.
Est-ce vrai ?..................
Prouve - le

N.R.:27%

4D114

**Démarche correcte: 36%**
**(EVAPM5/88 : 34%)**

**R = 24%**
**(EVAPM4/89 : 20%)**

Question F 18-19

**Diverses applications du théorème de Thalès et de sa réciproque**

Exercice 1 (trapèze complet)

Soit ACE un triangle, B et D deux points appartenant respectivement à [AC] et [AE].

On suppose que (BD) et (CE) sont parallèles. On appelle F le point d'intersection de (BE) et (CD).

La droite (AF) coupe [BD] en I et [CE] en J.

1) Montrer que $\frac{\overline{BI}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{CJ}}{\overline{JE}}$

2) Montrer que $\frac{\overline{BI}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{JE}}{\overline{CJ}}$

3) En déduire que I et J sont les milieux de [BD] et [CE].

Exercice 2

ABCD est un parallélogramme. Une droite passant par C coupe (AB) en E et (AD) en F. Montrer que

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = 1$

Exercice 3 (cas particulier du théorème de Ceva)

Soit ABC un triangle, A', B', C' trois points distincts des sommets et appartenant respectivement aux côtés (BC), (CA), (AB).

a) Montrer qu'il y a que si (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles, alors

$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$ (*)

b) Montrer que si la relation (*) est vérifiée et si (AA') est parallèle à (BB'), alors (CC') est parallèle à (AA').

Exercice 4

Soit ABC un triangle, $M_0$ un point de [AB]. La parallèle à (BC) menée par $M_0$ coupe (AC) en $M_1$, la parallèle à (AB) menée par $M_1$ coupe (BC) en $M_2$, la parallèle à (AC) menée par $M_2$, coupe (BC) en $M_3$, etc… Etudier la suite des points $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$,…

Pouvez vous imaginer des prolongements à cet exercice ?

3. Les cas de similitudes des triangles

a) compléments de cours
b) exercices et corrigés

**Triangles semblables**

Deux triangles en « configuration de Thalès » sont semblables.
Mais il existe d'autres cas où les triangles sont semblables...

**Première entrée :**
Deux triangles sont semblables s'il existe une similitude telle que l'un d'eux soit image de l'autre par cette similitude.
Alors par propriété des similitudes, les angles respectifs sont égaux et les côtés homologues respectifs proportionnels.
Mais une partie de ces propriétés suffit pour que deux triangles soient semblables...

**Deuxième entrée (cf. programmes actuels)**
**Définition** (c'est un choix parmi d'autres) : deux triangles sont semblables si leurs angles sont égaux deux à deux (on dit aussi qu'ils ont même forme).

**Corollaire** deux triangles sont semblables s'ils ont deux angles égaux.

Autrement dit,
1) On n'a pas besoin d'exhiber la similitude qui transforme un triangle dans l'autre pour pouvoir dire qu'ils sont semblables (c'est l'argument des partisans de cette entrée).
2) On donne un cas de similitude comme définition.

**Les cas de similitude des triangles**

S2 : Deux triangles sont semblables si leurs côtés homologues sont proportionnels.

S3 : Deux triangles sont semblables s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement proportionnels.

**Démonstration.**
Soient ABC et A'B'C' les deux triangles.

**S2** : Il y a deux démarches possibles : ou on se ramène à exhiber une similitude qui transforme ABC en A'B'C' (composée d'une homothétie et d'une isométrie), ou on raisonne sans transformation.

Pour cette **deuxième option**, supposons que $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

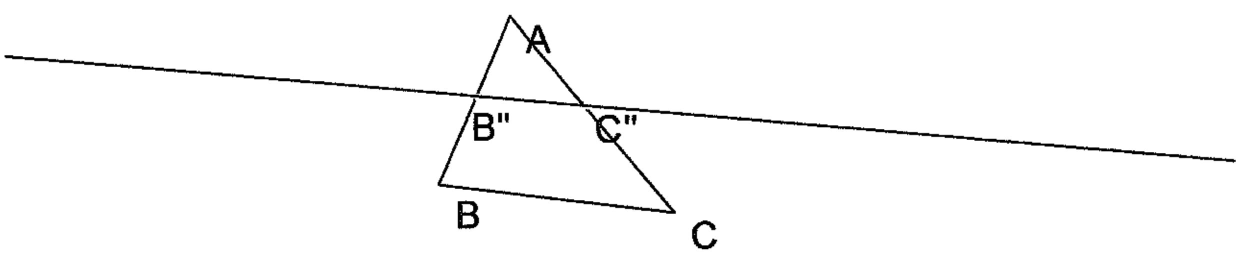
Autrement dit les angles homologues éventuels sont A et A', B et B', C et C'.
On construit sur [AB) le point B'' tel que AB'' = A'B' ; sur [AC) le point C'' tel que AC'' = A'C'. Les points A, B'',B' et A, C'', C' vérifient $\dfrac{AB}{AB''} = \dfrac{AC}{AC''}$, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (B''C'') est parallèle à (BC).
Donc, d'une part, d'après les hypothèses, B'C' = B''C'' (c'est l'égalité du troisième rapport dans le théorème de Thalès).
Par suite, les triangles A 'B'C' et A''B''C'' sont isométriques car ils ont leurs trois côtés respectivement égaux. Ils ont donc leurs angles égaux.
D'autre part, à cause du parallélisme, les angles AB''C'' et ABC sont égaux, de même les angles AC ''B'' et ACB.
Les triangles AB''C'' et ABC ont donc aussi leurs angles égaux.

Il en résulte que les triangles ABC et A''B''C'' ont leurs angles égaux et sont semblables.

**S3 : deuxième option.**

Supposons que les angles en A et A' sont égaux ; on a donc : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$

On commence la démonstration de manière identique.
On construit sur [AB) le point B'' tel que AB'' = A'B' ; sur [AC) le point C'' tel que AC'' = A'C'. Les points A, B'',B' et A, C'', C' vérifient $\frac{AB}{AB''}=\frac{AC}{AC''}$, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (B''C'') est parallèle à (BC).
Par suite les triangles AB''C'' et A'B'C' sont isométriques (un angle égal compris entre deux côtés égaux). Donc leurs angles sont égaux. Donc en utilisant le parallélisme de (BC) et (B''C'') on en déduit l'égalité des angles ABC et AB'' C'', ainsi que celle des angles ACB et AC''B'': les triangles ABC et A'B'C' ont donc leurs angles égaux ; ils sont semblables.

**Cas de similitudes des triangles :** *rédiger l'exercice 1 et analyser un exercice de seconde.*

Exercice 1

1) ABC est un triangle rectangle en A, (AH) hauteur issue de A, H appartient à (BC).

Montrer que $AH^2 = CH.BH$

Montrer que $AB^2 = BH.BC$

2) Soit C un cercle de centre O et de rayon R et M un point intérieur à ce cercle.

On mène par M deux sécantes qui coupent le cercle en A et B pour l'une et E et F pour l'autre.

Montrer que MA.MB = ME.MF.

En déduire que le produit P = MA.MB ne dépend pas de la sécante choisie et que $P = MO^2 - R^2$.

Ce résultat subsiste-t-il pour un point sur le cercle ? à l'extérieur du cercle ?

Un choix d'exercices de manuels de seconde

**transmath, page 217, ex 76**:

ABCD est un rectangle tel que AB = 2AD. On mène par A la perpendiculaire à (DB) qui coupe les segments [DB] en H et [DC] en E.

3) a) Montrer que DAE et DBC sont semblables.
   b) Déduisez-en que DE = ½ BC
4) Comparer les aires des triangles DEH et DBC

**pythagore, page 181, ex résolu 3 :**

Soit ABC un triangle. On désigne par O le centre du cercle circonscrit à ABC et par R son rayon. D est le symétrique de A par rapport à O et H est le pied de la hauteur issue de A.

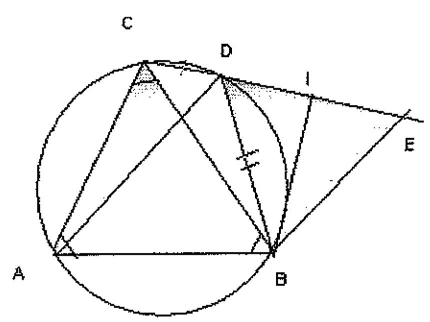
d) Montrer que les triangles ABD et AHC sont semblables.
e) Démontrer la relation : AH = (AB x AC) / 2R
f) On désigne par a, b et c les longueurs respectives des côtés [BC], [AC] et [AB] du triangle, et pat S son aire. Démontrer l'égalité R = abc / 4S

**déclic, page 280, ex 51 :**

Dans cette figure, ABC est un triangle équilatéral et D un point du petit arc BC tel que DB=2DC. La parallèle à (AD) passant par B coupe (CD) en E.

Démontrer que DEB est un triangle équilatéral.

Déterminer le rapport de l'aire du triangle DEB sur l'aire du triangle ABC.



**Corrigé succinct**

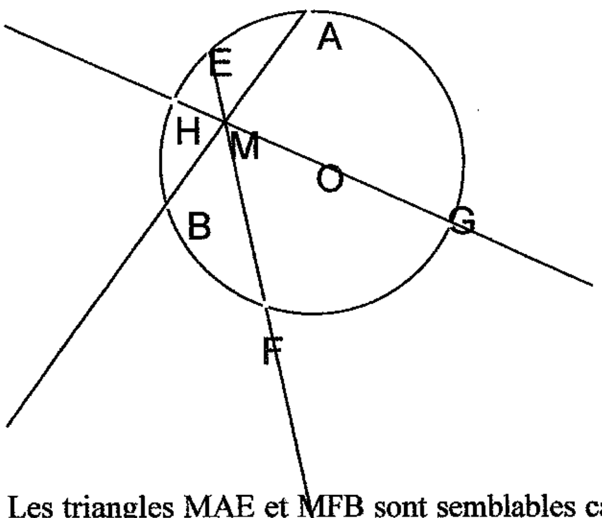
**Exercice 1.**

Il y a plusieurs méthodes, on choisit ici celle qui fait intervenir les triangles semblables. Lorsque deux triangles sont semblables, ils ont leurs angles égaux : on les note (si possible) de manière à ce que les sommets correspondant aux angles respectifs égaux soient dans le même ordre. Cela permet d'écrire automatiquement les rapports égaux des côtés proportionnels.

1) Les angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{CAH}$ sont complémentaires de l'angle en B du triangle ABC : ils sont égaux donc les triangles rectangles ABH et CAH sont semblables. On en déduit les égalités des rapports des côtés correspondants : $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$ soit $AH^2 = CH.BH$

De même les triangles CAH et CBA sont semblables : $\frac{AB}{CB} = \frac{BH}{BA}$ soit $AB^2 = BH.BC$.

2)




Les triangles MAE et MFB sont semblables car leurs angles en M sont égaux (opposés par le sommet) et les angles $\widehat{MEA}$ et $\widehat{FBA}$ sont égaux (angles inscrits interceptant le même arc).

On a donc $\frac{ME}{MB} = \frac{MA}{MF}$ ou encore ME.MF = MA.MB.

Comme ce résultat est obtenu à partir d'une sécante quelconque, il reste vrai pour n'importe quelle sécante.

On choisit le diamètre passant par M, qui coupe le cercle en G et H : MA.MB = MG.MH

$MG.MH = (MO + R)(R - MO) = -(MO^2 - R^2)$.

Comme P est négatif, cela donne en passant aux mesures algébriques $P = MO^2 - R^2$.

Si M est sur le cercle $MA.MB = 0 = MO^2 - R^2$ car MO = R.

Si M est à l'extérieur un raisonnement analogue permet de montrer que le résultat subsiste : la valeur de P ne dépend pas de la sécante choisie pour calculer ce nombre ; il vaut $MO^2 - R^2$.

P s'appelle la puissance de M par rapport au cercle.

Exercices à analyser.

**Transmath.**

1) a) Les deux triangles sont rectangles ; CBD = BDA comme angles alternes-internes ; or les angles DAE et BDC en sont complémentaires donc sont égaux. Comme ils ont deux angles égaux, les triangles DAE et CDB sont semblables.

b)Par suite les rapports des côtés correspondants sont égaux : $\frac{DA}{CD}=\frac{DE}{BC}$. Comme CD = AB, le premier rapport vaut ½ ainsi que le second.

2) Les aires des triangles DAE et CDB sont donc dans le rapport ¼.

De plus, on démontre que les triangles rectangles DEH et AED sont semblables (car ADH et HDE sont égaux comme complémentaires de DAH). On cherche le rapport de similitude.

On a aussi DAE = ABD ce qui implique l'égalité des tangentes de ces angles :

AD/AB = DE/DA = 1/2.

Par suite $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 5\ DE^2$ soit $AE = DE\sqrt{5}$ ; le rapport de similitude est $\sqrt{5}$.

Le rapport des aires de AED et DEH est donc égal à 5 : $(AE/DE)^2$.

On a donc Aire(BDC)/Aire(DEH) = Aire(DBC)/Aire(DAE) x Aire(DAE)/Aire(DEH) = 20.

La première question de cet exercice demande de reconnaître quelle propriété caractéristique des triangles semblables utiliser – l'énoncé n'aide pas complètement puisque les points ne sont pas nommés dans le bon ordre. La démonstration met en jeu des propriétés anciennes très élémentaires. Il y a un réel travail de reconnaissance, sauf si les élèves trichent en s'aidant de la deuxième question…

La deuxième question permet une application simple et isolée de la propriété de proportionnalité des côtés homologues dans des triangles semblables, à condition de les identifier : il faut juste reconnaître dans un des rapports la propriété donnée dans l'hypothèse. Si les points sont écrits dans le bon ordre il n'y pas de difficulté spéciale – ça devient bien plus difficile si les points, comme ici dans l'énoncé, sont dans le désordre, il faut rétablir les sommets homologues.

La dernière question demande d'introduire un triangle intermédiaire (il est soufflé par l'énoncé) et de mettre en fonctionnement de manière simple les calculs d'aires de triangles semblables. Il peut y avoir un piège du fait que dans l'énoncé les triangles ne sont pas nommés dans le « bon » ordre.

Cet exercice est l'occasion de faire fonctionner successivement, en l'indiquant plus ou moins explicitement, les principales propriétés des triangles semblables (définition, propriété des côtés, rapport d'aires) en mélangeant les connaissances à acquérir et des connaissances anciennes très élémentaires sur les angles, la trigo, le théorème de Pythagore ainsi que du calcul.

**Pythagore**

1) Les deux triangles sont rectangles (un triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle) ; les angles ACB et ADB, inscrits dans le même arc sont égaux. Donc les triangles ABD et AHC sont semblables.

Là on donne les triangles « comme il faut », avec correspondance des points homologues.

Dans la première question, il faut cependant faire fonctionner des connaissances anciennes mélangées au nouveau (égalité des angles inscrits interceptant deux arc égaux, triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle).

2)La deuxième question permet d'appliquer le fait que les triangles sont semblables en traduisant la proportionnalité des côtés homologues : AB/AH = AC/AD, avec AD = 2R.

Il faut donc savoir reconnaître les côtés homologues ou … tricher (résoudre à l'envers) !
C'est une application simple et presque isolée de cette propriété des triangles semblables, avec l'expression de BD comme diamètre et un petit calcul algébrique de transformation de quotient en produit.

3)La troisième question est un simple travail algébrique à partir de la relation précédente et de l'expression de S en fonction de AH et BC : AH = 2S/a.
C'est donc un travail ne mobilisant que des connaissances anciennes, avec la reconnaissance de la formule à choisir pour S.

Cet exercice fait fonctionner successivement la définition des triangles semblables et la principale propriété des rapports des côtés (en l'indiquant plus ou moins explicitement) ; il permet un mélange avec des connaissances anciennes sur les angles (notamment l'égalité des angles inscrits dans un même arc) et un travail algébrique à partir d'une relation métrique élémentaire.

**Déclic**
1) Les angles ADB et ACB sont inscrits dans le même arc donc ADB est égal à 60° ; de même CDA est égal à ABC donc à 60°. Par suite BDE vaut 180° - 120° donc 60°.
Les droites (BE) et (AD) sont parallèles donc les angles [correspondants] BED et ADC sont égaux : on a aussi BED = 60°.
Le triangle DBE est donc équilatéral.
2)Deux triangles équilatéraux sont semblables.
Le rapport des aires est donc égal au carré du rapport des côtés.
On appelle I le milieu de [DB] (pied de la hauteur issue de B) : DI = DB/2
On a dans le triangle rectangle BIC : $BI^2 + IC^2 = BC^2$
Ce qui s'écrit : $3/4DB^2 + DB^2 = 7/4DB^2 = BC^2$
Il en résulte que le rapport cherché est 4/7.

*C'est le seul exercice où on fait travailler la disponibilité de la notion* puisqu'il n'y a pas de question mentionnant explicitement de triangles semblables.
La première question ne met en fonctionnement que des connaissances anciennes sur les angles inscrits et les angles correspondants.
La deuxième question demande d'introduire soi-même la similitude de deux triangles équilatéraux pour calculer un rapport d'aires comme carré du rapport de similitude : il y a là une adaptation – introduction d'une étape intermédiaire et calcul explicite dans une figure d'un rapport de longueur faisant intervenir le théorème de Pythagore et la trigo.

## 4. Les aires (rappel de cours et exercices)

## Aire d'un triangle

**Chez Euclide**
Rappel il n'y a que des rapports de grandeurs (cf. documents D1,D2)

**Au collège**

Les réels sont supposés implicitement construits
Deux formules sont à la disposition des élèves à la fin du collège :

Soient ABC un triangle, H, K et L les pieds des hauteurs respectivement issues de A,B et C et S l'aire du triangle ABC ; on a :

$S = \frac{1}{2} AB.CL = \frac{1}{2} BC.AH = \frac{1}{2} AC.\ BK$

Si l'angle A est aigu : $S = \frac{1}{2} AB.AC \sin A$ (et de même pour les autres angles s'ils sont aigus)

**En géométrie affine euclidienne**

Soit ABC un triangle, le plan est supposé muni d'un repère orthonormé direct.
Soient ABC un triangle et S l'aire du triangle ABC ; on a :

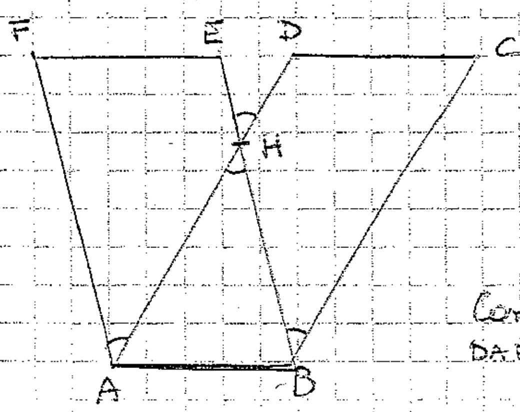
$S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|$

**Extensions**

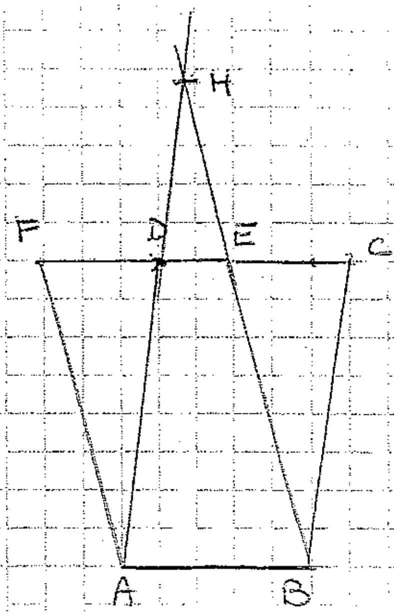
Aires algébriques, aires « affines ».

# D1

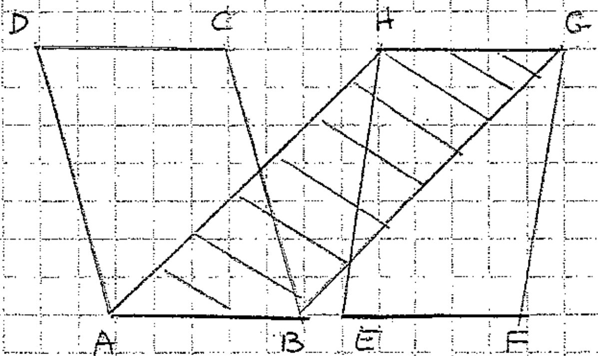
35




Comparer
DAF & EBC

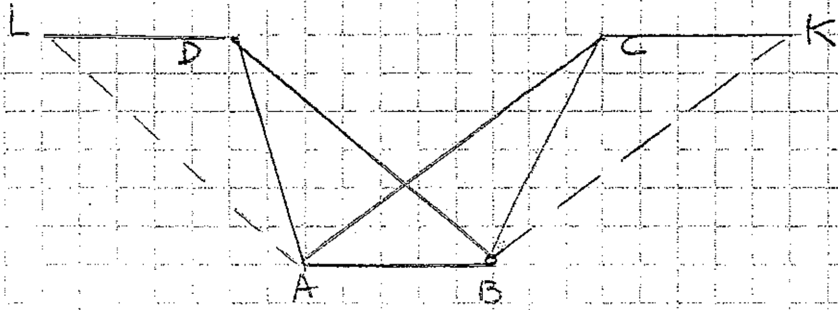



36



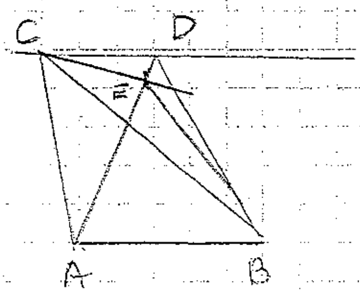

Introduire AHGB
se ramener à 35

37



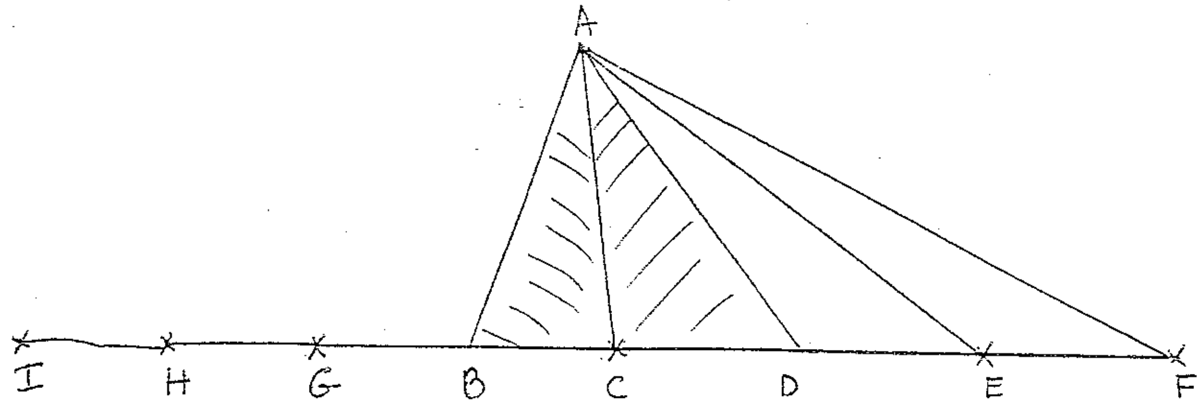

Introduire CK et DL
(égaux à AB)
se ramener à 35

39




Par l'Absurde :
Par C la // à (AB)
se ramener à 37

D2




$$\frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(ACD)} = \frac{BC}{CD}$$

On choisit m, n I et F tq $CI = m\,CB$ et $CF = n\,CD$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} m\,CB > n\,CD \Rightarrow m\,\text{aire}(ABC) > n\,\text{aire}(ACD) \\ \text{en effet } CI > CF \Rightarrow \underbrace{\mathcal{A}(ACI)}_{m\,\mathcal{A}(ACB)} > \underbrace{\mathcal{A}(ACF)}_{n\,\mathcal{A}(ACD)} \\ m\,CB < n\,CD \Rightarrow m\,\mathcal{A}(ABC) < n\,\mathcal{A}(ACD) \\ m\,CB = n\,CD \Rightarrow m\,\mathcal{A}(ABC) = n\,\mathcal{A}(ACD) \end{cases}$$

(Exple $\mathcal{A}(ACD) = \mathcal{A}(ADE) = \mathcal{A}(AEF)$

$\mathcal{A}(ACF) = 3\,\mathcal{A}(ACD)$

$\mathcal{A}(AIB) = 4\,(\mathcal{A}(ABC))$ )

## Aires

Exercice 1

Soit ABC un triangle, A' le milieu de [BC].

1) Montrer que aire (AA'B) = aire (AA'C).
2) Soit G l'isobarycentre de ABC. Montrer que aire (AGB) = aire (BGC) = aire (CGA) ; trouver six triangles d'aire égale.

   Comparer les aires du quadrilatère AC'GB' et du triangle GBC.
3) Montrer que si M appartient à [AA'], aire (AMB) = aire (AMC). Et si M appartient à (AA') ?
4) Réciproque : que dire des points M tels que aire (AMB) = aire (AMC) ?
5) Quel est l'ensemble des points M tels que aire (AMB) = aire (AMC) ?
6) Montrer que les égalités aire (MCB) = aire (MAB) = aire (MAC) caractérisent un unique point parmi les points intérieurs au triangle.

Exercice 2

1) Soit ABC un triangle. On appelle A' le symétrique de A par rapport à B, B' le symétrique de B par rapport à C, C' le symétrique de C par rapport à A.

Comparer les aires de ABC et A'B'C' et. leurs isobarycentres.

2) Soit ABCD un quadrilatère. On appelle A' le symétrique de A par rapport à B, B' le symétrique de B par rapport à C, C' le symétrique de C par rapport à D, D' le symétrique de D par rapport à A.

Comparer les aires de ABCD et A'B'C'D' et leurs isobarycentres.

Exercice 3

Soit ABC un triangle.

Trouver l'ensemble des points M intérieurs au triangle tels que

a) Aire (ABM) /Aire (ACM) = 1/3

b) Aire (ABM) = 1/3 aire (ABC).

c) Aire (ABM) = 1/3 aire (ABC) et Aire(ACM) = 1/6 aire (ABC).

Exercice 4

1) Soient ABC un triangle, I et J deux points appartenant respectivement à [AB] et [AC] et vérifiant AI/AB = $k_1$, AJ/AC = $k_2$. Montrer que : aire(AIJ) = $k_1k_2$ aire (ABC).

2) On appelle A', B', C' les milieux des côtés du triangle. Evaluer l'aire du triangle A'B'C' en fonction de l'aire du triangle ABC.

3) On considère un quadrilatère ABCD. Les points E, F, G, H appartiennent respectivement à [AB], [BC], [CD], [DA] et vérifient EA/EB = FB/FC = GC/GD = HD/HA.

Comparer l'aire du quadrilatère ABCD avec la somme des aires des triangles EAH et CGF.

Exercice 5

Soient ABCD un parallélogramme et I un point de [AC], distinct de A et C.

La parallèle à (AD) passant par I coupe (AB) en E et (CD) en G. La parallèle à (AB) passant par I coupe (BC) en F et (AD) en H.

1) Montrer que aire (HIGD) = aire (EIFB)

2) Montrer que les droites (EH) et (FG) sont parallèles et les droites (EF) (AC) et (HG) concourantes ou parallèles.

Exercice 6 : Théorème de Ceva

Soient ABC un triangle et P,Q,R trois points distincts des sommets et appartenant respectivement aux côtés [BC], [CA] et [AB]. On suppose que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Montrer que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}=-1$

Etablir la réciproque.

Exercice 7

1) Soit ABC un triangle. On construit le triangle A''B''C'' tel que : $\overrightarrow{AA''} = 3\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB''} = 3\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC''} = 3\,\overrightarrow{CA}$.

Trouver le rapport des aires de ABC et A''B''C''.

Montrer que l'isobarycentre de A''B''C'' est l'isobarycentre de ABC.

2) Un enseignant veut prolonger l'exercice.

a) On considère les points A'', B'', C'' tels que A'' soit le symétrique de B par rapport à A', B'' soit le symétrique de C par rapport à B', C'' soit le symétrique de A par rapport à C'.

Exprimer vectoriellement cette construction.

Est-ce que le rapport des aires de ABC et de A''B''C'' est encore constant (justifier) ?

c) On continue cette manière de prolonger, en introduisant A''' tel que $\overrightarrow{AA'''} = 4\,\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{AA_{n-1}} = n\,\overrightarrow{AB}$, et de même pour B et C.

Le rapport des aires de ABC et de A'''B'''C''' est-il constant (justifier) ? Même question avec ABC et $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$.

b) Des expériences sur un logiciel semblent indiquer que si on part d'un hexagone régulier et d'un pentagone régulier on a encore un rapport constant entre l'aire de l'hexagone (ou du pentagone) régulier initial et l'aire du nouveau polygone obtenu à partir des symétriques des sommets, comme dans l'exercice.

On va démontrer ce résultat.

Commencer par l'hexagone régulier, en utilisant une des méthodes qui ont déjà servi.

On analysera rapidement la résolution choisie.

Pour le pentagone régulier, calculer les angles de la figure initiale et retrouver la valeur de cos(2Π/5), puis démontrer le résultat.

Contrôle : le facteur multiplicatif serait, d'après le logiciel, $6-\sqrt{5}$.

Exercice 8

Soit ABC un triangle, A', B', C' trois points situés sur les côtés du triangle (segments) et distincts des sommets. On suppose que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes, et on appelle O leur point d'intersection.

Montrer la relation suivante (relation de Gergonne) :

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1 \ (*)$$

Exercice 9

Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centre O et O', de rayon R et R', tels que OO' > R + R'.

Les tangentes (O'A) et (O'B) issues de O' à $\mathcal{C}$ coupent $\mathcal{C}'$ en I' et J' ; les tangentes (OA) et (OB) issues de O à $\mathcal{C}'$ coupent $\mathcal{C}$ en I et J (avec I et I' dans le même demi plan limité par (OO').

Montrer que IJ = I'J'.

On pourra utiliser des calculs d'aires.

Exercice 10 : Quadrature d'un rectangle

1) Dans tout parallélogramme les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux.

2) Soit ABCD un rectangle. On cherche à construire un carré ayant la même aire.

On prolonge (AB) en (AE), de l'autre côté de B, avec AE = AD. Soit I le milieu de [EB]. Le demi cercle de diamètre [EB] coupe (DA) en H. Alors on va montrer que le carré de côté [AH] a même aire que ABCD.

a) Soit [AB] un segment et C un point du segment entre A et B.

L'aire du carré de côté [AB] est la somme des aires des carrés de côté [AC]} et [CB], et le double de celle du rectangle CAxCB.

b) Soit [AB] un segment et C son milieu. D est un point quelconque du segment entre A et B (distinct de C). Montrer que la somme des aires du rectangle ADJF et du carré KJIH de côté [CD] (extérieur à ADJF) est égale à l'aire du carré de côté [CB].

c) On reprend la figure décrite ci-dessus. En utilisant les questions précédentes démontrer le résultat.

Exercice 11 (complément au trapèze complet)

On considère deux droites sécantes en E ; une première droite coupe ces deux droites en A et B, et une droite parallèle à (AB) coupe [EA) en D et [EB) en C.

On appelle F le point d'intersection de (AC) et (BD).

a) Montrer que les triangles AFD et BFC ont la même aire.

b) La droite (EF) coupe les segments [AB] et [CD] respectivement en I et J.

Montrer que $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{aire(AFE)}{aire(BFE)}$ et $\dfrac{JD}{JC} = \dfrac{aire(EFD)}{aire(EFC)}$.

c) Montrer (directement) que $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{JD}{JC}$, et déduire de tout ce qui précède que I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

**Applications du fait que l'aire est un invariant semi-affine**

Exercice 1

1) Existe-t-il un rectangle de demi-périmètre 3 cm et d'aire 3cm$^2$ ?

2) Etudier les variations de l'aire d'un rectangle de périmètre donné, puis d'aire donnée.

3) Donner une interprétation graphique des questions 1) et 2).

4) Soient ABC un triangle rectangle isocèle en A et M un point de [BC].

On trace par M les parallèles à (AB) et (AC) qui coupent les côtés [AC] et [AB] respectivement en N et L.

Déterminer la position de M sur [BC] pour que l'aire du parallélogramme ALMN soit maximale.

5) Traiter la même question avec un triangle ABC quelconque.

Exercice 2

1) On considère un triangle OAB rectangle isocèle en O. On appelle I le milieu de [AB].

On considère une droite passant par I et qui coupe les demi-droites [OA) et [OB) en M et N.

On pose m = OM, n = ON, et on appelle a la distance de I aux côtés du triangle. Montrer que

$a = mn/(m + n)$

En déduire que l'aire du triangle OAB est inférieure à l'aire du triangle OMN.

2) On donne deux demi-droites distinctes [Ox) et [Oy), non dans le prolongement l'une de l'autre, et un point A situé dans la portion de plan comprise entre ces demi-droites correspondant à un angle en O aigu. On considère une droite passant par A qui coupe [Ox) et [Oy) en B et C.

A quelle condition sur cette droite l'aire du triangle OBC est-elle minimale ?

Construire la (les) droite(s) solution s'il en existe.

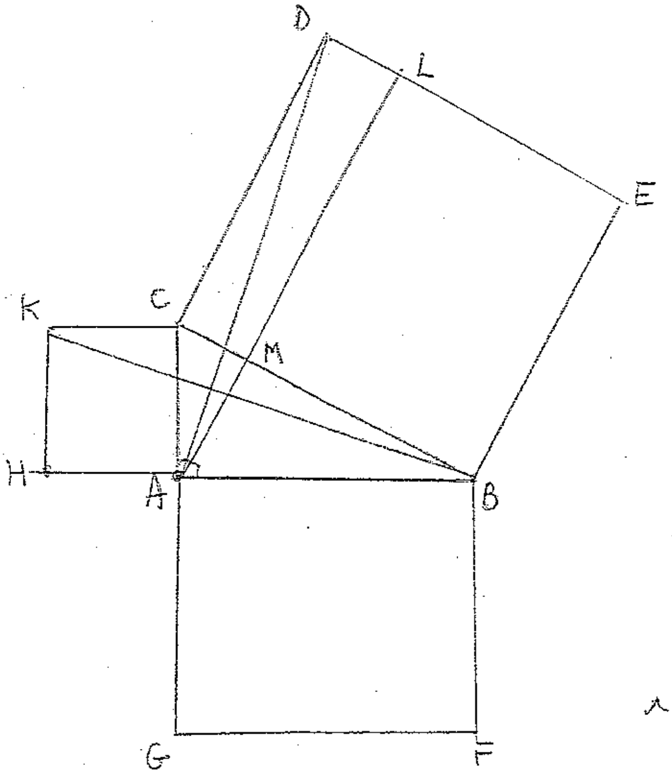
## 5. Le théorème de Pythagore et les cas d'égalité des triangles

a)Démonstration des Eléments d'Euclide et analyse
b)Liste d'exercices
c) Bilan : triangles de même aire, de même périmètre, égaux, semblables

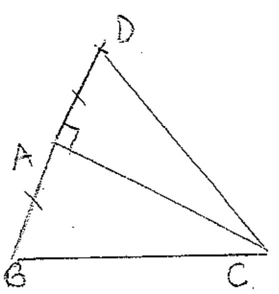
Soit ABC un triangle rectangle en A. On construit les carrés BCDE, ACKH, BAGF, et (AL) la parallèle à (CD) menée par A qui coupe [BC] en M (figure).

1) Montrer que G, A, C et B, A, H sont respectivement alignés
2) Montrer que les triangles DCA et KBC sont "égaux" (par un cas d'égalité).
3) Comparer les aires de CDLM et CDA, puis CKHA et KBC.
4) Conclure.

Où sert le 1) ?




Soit ABC un triangle tel que
$BC^2 = AB^2 + AC^2$.
On construit D tel que AD soit perpendiculaire à (AC) et tel que AD = AB (figure).
Montrer que les triangles ABC et ABD sont égaux (utiliser un cas d'égalité).
En déduire la réciproque du théorème de Pythagore.



La démonstration du théorème de Pythagore proposée par Euclide et distribuée dans le cours demande plusieurs étapes, qui sont détaillées dans l'énoncé.
La première question, fermée, est une application simple de la condition d'alignement de deux demi-droites qui font entre elles un angle plat (condition non indiquée).
La deuxième question est fermée, la méthode est indiquée, il reste à choisir le cas d'égalité à mettre en fonctionnement (reconnaissance des modalités précises et adaptation à la figure particulière).
La troisième question est un peu plus ouverte, il s'agit de reconnaître une utilisation de la méthode des aires (1) : l'aire d'un triangle est la moitié de l'aire d'un parallélogramme ayant une base commune avec le triangle et tels que le sommet opposé du triangle soit sur la droite portant le côté du parallélogramme opposé à la base commune.
On recommence une deuxième fois de manière analogue sur un autre triangle et un autre parallélogramme indiqués.
La dernière question est ouverte : il faut recommencer le même type de raisonnement mais en reconnaissant les triangles et les parallélogrammes à comparer, après avoir réfléchi à ce qui est à démontrer et à sa traduction en termes d'aires de carrés.

L'expérience en classe a confirmé que la troisième question était traitée après une petite réflexion, et que la quatrième demandait aussi un temps de réflexion.
Les cas d'égalité semblent mobilisables sans difficultés, la méthode des aires (1) aussi mais semble demander encore des réinvestissements (pour reconnaître les « candidats »).
L'enseignant intervient sur cette méthode et sur la « morale » de l'exercice : la traduction du théorème cherché en termes d'aires. On peut penser qu'il peut y avoir réinvestissement de cette dernière idée en tant que méthode, pas seulement pour ce théorème.

**Théorème de Pythagore, cas d'égalité, cas de similitude**

Exercice 1

1) Construire un triangle équilatéral d'aire double d'un triangle équilatéral donné.

2) Construire un carré d'aire 5 fois l'aire d'un carré donné.

3) Construire un demi-cercle d'aire égale à la somme des aires de deux demi-cercles donnés.

4) Quelles généralisations sont possibles ?

Exercice 2

Soit ABCDEFGH un cube.

On appelle I le milieu de [DC], J le milieu de [AD].

Comparer les deux longueurs suivantes : EJ + JI, ED + DI.

Exercice 3

Un triangle ABC a des côtés de longueurs 4 , 5 et 6 (une unité étant fixée).

Ce triangle est-il rectangle ? Justifier précisément votre réponse.

Exercice 4

Soit ABCD un carré de côté 10 (unités).

1) Construire (en justifiant l'existence et l'unicité des points) les points E et F tels que BE = 7 et EC = 3, CF = 2 et FD = 8.

2) L'angle AEF est-il droit ?

Exercice 5

Construire un triangle ABC tel que AB = 1, AC = ¾, et l'angle ABC vaut $\Pi/4$.

Conséquences ?

Exercice 6

Soit ABC un triangle équilatéral.

Sur [AC), [BA), [CB) on place A', B', C' tels que AA' = BB' = CC'.

Que peut-on dire de A'B'C' ?

Exercice 7

Soit ABC un triangle, BCGF et ABDE deux carrés extérieurs au triangle. On appelle I le point d'intersection de (AF) et (CD).

Montrer que AF = CD et que les droites (AF) et (CD) sont perpendiculaires.

On appelle (BH) la hauteur de DBF issue de B. Monter que (BH) coupe (AC) en son milieu.

Exercice 8

On considère un parallélogramme ABCD

1) On construit extérieurement sur les côtés [AD], [DC] et [CB], les carrés de centres respectifs P, Q et R. Montrer que PQR est rectangle isocèle.

2) On construit extérieurement les triangles équilatéraux ADM et ABN. Montrer que le triangle MNC est équilatéral.

Exercice 10

Construire un triangle ABC tel que AB = 3, BC = 4, CC' = 5, où C' est le milieu de [AB]. Discuter la construction si les longueurs AB et BC sont fixées et celle de CC' est variable.

Exercice 11

1) Soit ABC isocèle de sommet A. La médiatrice de [AC] coupe (BC) en D supposé extérieur à [BC]. On construit E sur (AD) de l'autre côté de A par rapport à D tel que AE = BD. Montrer que CDE est isocèle.

2) Soit ABC un triangle tel que les angles en B et C sont aigus. On appelle h le pied de la hauteur issue de A sur [BC] et on suppose que AH = BC. On mène par B la perpendiculaire à (BC) et on place un point D sur cette droite dans le demi-plan ne contenant pas A et tel que BD = HC. Que peut-on dire de ACD ?

**Triangles de même aire, de même périmètre, égaux, semblables…**

**Rappel** : Des triangles sont **égaux (ou isométriques)** s'ils ont leurs côtés respectivement égaux et leurs angles respectivement égaux.

Ou encore si les triangles sont semblables, le rapport des côtés homologues étant 1.

**Ceci est équivalent à** : il existe une isométrie transformant un triangle en l'autre. (démonstration non faite ici).

Dans les éléments d'Euclide sont donnés **les trois cas d'égalité** suivants (ce sont des conditions suffisantes) : on peut les obtenir à partir des cas de similitude des triangles dans le cas particulier où le rapport entre longueurs de côtés homologues est 1.

* Si deux triangles ont leurs 3 côtés respectivement égaux, ils sont égaux.
* Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, ils sont égaux.
* Si deux triangles ont deux angles respectivement égaux et le « côté commun » à ces deux angles égal, ils sont égaux.

Les travaux de Hilbert ont montré que pour fonder les Eléments d'Euclide, il fallait admettre le premier cas d'égalité.

Attention : dans les exercices, respecter les éléments homologues.

**Deux triangles « égaux » ont même aire et même périmètre** ; les périmètres de deux triangles semblables s'obtiennent en multipliant le périmètre de l'un d'eux par le rapport de similitude k ; les aires par $k^2$.

**Triangles de même aire, de même périmètre (ni égaux, ni semblables !)**

Le périmètre des triangles de même aire est variable : il est minimal lorsque le triangle est équilatéral.
L'aire des triangles de même périmètre est variable : elle est maximale lorsque le triangle est équilatéral.

<u>Une démonstration</u> consiste à utiliser la formule suivante : grâce à la formule de Héron on a toujours, si S est l'aire d'un triangle de demi-périmètre p, $S \leq p^2 /3\sqrt{3}$.
Donc si deux triangles ont le même périmètre, leur aire est maximale lorsqu'il y a égalité dans l'inégalité précédente, c'est à dire lorsque le triangle est équilatéral.
S'ils ont la même aire, leur périmètre est minimal lorsqu'il y a égalité, c'est à dire lorsque le triangle est équilatéral.

## IV Les séances sur logiciel

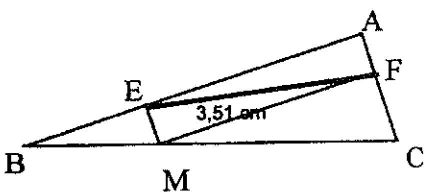
On donne un extrait du programme de troisième et une liste d'exercices à faire sur cabri (par exemple). Le corrigé du dernier exercice est joint.

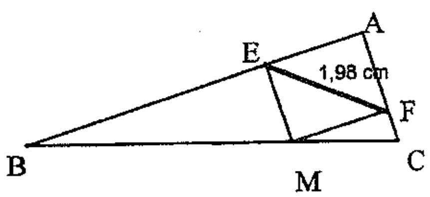
## C. Les constructions géométriques

Les logiciels de construction géométrique permettent la mise en évidence de relations entre les éléments d'une figure; elles doivent être explicitées par l'élève pour la dessiner. Ces logiciels permettent notamment d'observer une figure sans la reconstruire, lorsque l'on déplace par exemple un de ses points, afin de repérer des propriétés conservées et d'énoncer des conjectures. Ils constituent un moyen puissant d'exploration des figures, facilitent l'observation des propriétés (alignement, conservation de directions, concours de droites, etc.).

Leur utilisation en collège présente deux caractéristiques particulièrement intéressantes. La première est l'explicitation des propriétés mises en œuvre pour les constructions, par exemple, construire un triangle ABC rectangle en A à partir de son hypoténuse, conduit à utiliser la propriété de l'angle droit dans un demi-cercle, en construisant successivement le milieu de [BC], le cercle de diamètre [BC] et un point quelconque de ce cercle. La deuxième a trait à l'expérience graphique que font les élèves en observant une figure dont on déplace des éléments variables. Des propriétés apparaissent et provoquent des questions qui motivent et préparent à la démonstration.

Ce type de logiciel permet la mise en place de situations qui pourraient paraître complexes, mais auxquelles la dynamique de la figure permet de donner du sens. En voici un exemple que l'on peut traiter en classe de 3e:



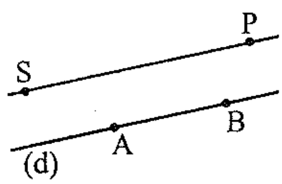

*ABC est un triangle rectangle en A, et M un point de l'hypoténuse [BC]. Les perpendiculaires à [AB] et [AC] passant par M coupent [AB] en E et [AC] en F.*

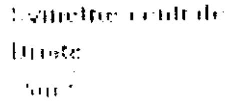
*Où placer M pour que la distance EF soit la plus petite possible?*

Une fois la construction réalisée, le logiciel permet d'afficher la distance EF qui varie quand on déplace M sur [BC], on peut facilement invalider les conjectures qui apparaissent fréquemment sur papier (le milieu ou les points B et C). Si le triangle ABC construit par l'élève est trop particulier, on peut le déformer (tout en le conservant rectangle). Le logiciel permet à l'élève d'observer que le point M peut être placé n'importe où sur [BC], que son déplacement modifie la longueur EF et ainsi de comprendre le problème posé. En déplaçant M l'élève peut aussi observer les invariants de la figure (ici que le quadrilatère MEAF est toujours un rectangle). L'observation du rectangle conduit à la solution (le pied de la hauteur) et à la démonstration.

Certains logiciels permettent de choisir les outils fournis à l'élève, en limitant les commandes mises à sa disposition. En voici un exemple:

*On donne une droite (d) et un point P quelconque, on limite les outils disponibles à « droite », « point » et « symétrie centrale ». On demande la construction d'une droite parallèle à (d) passant par P.*



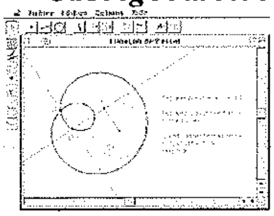
*un menu réduit*

Pour cela on peut procéder ainsi: on construit deux points quelconques A et B de la droite (d). La construction successive de R, image de P dans la symétrie de centre B et de S symétrique de R par rapport à A donne le point S. La droite (SP) est la parallèle cherchée. Cette construction est validée par la propriété des milieux.

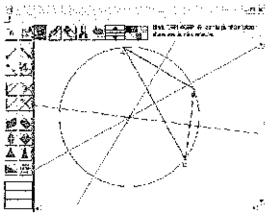
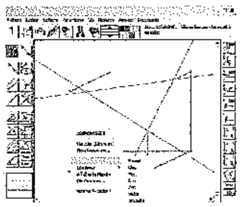
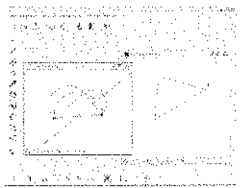
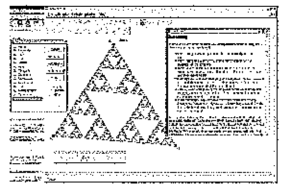
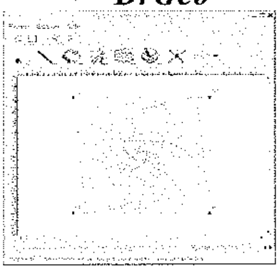
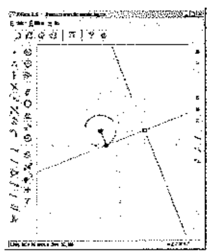
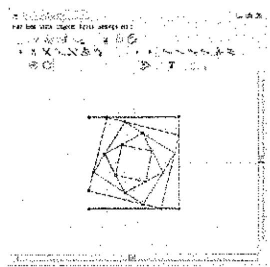
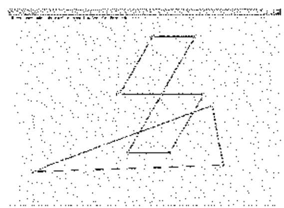
Dans ce type de problème, un choix judicieux des outils disponibles (éventuellement complexes) conduit à mettre en œuvre dans une construction, puis dans sa justification, les propriétés au programme des classes du collège.

# Logiciels de géométrie dynamique

*Les stars :*

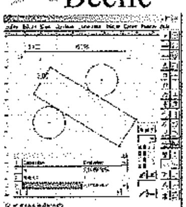
| | | | |
|---|---|---|---|
| ***Cabrigéomètre***  Mac, Windows http://www-cabri.imag.fr/ | ***Geoplan*** Mac, Windows http://www2.cnam.fr/creem/ | ***Géospace*** Mac, Windows http://www2.cnam.fr/creem/ | ***Cabr 3D*** Mac, Windows http://www-cabri.imag.fr/ |

*Les gratuits :*

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***Ateliers de géométrie 2D***  Linux, Mac, Windows http://atelier.apinc.org/ | ***Ateliers de géométrie 3D***  Linux, Mac, Windows http://atelier.apinc.org/ | ***Géonext***  Linux, Mac, Windows *http://geonext.de/* | ***Kseg***  Linux, Mac, Windows *http://www.mit.edu/~ibaran/* |
| ***DrGéo***  Linux http://www.ofset.org/drgeo | ***KGeo*** (vo)  Linux http://kgeo.sourceforge.net/ | ***Kig*** (vo)  Linux http://edu.kde.org/kig/ | ***Wingeom*** (vo)  Windows http://math.exeter.edu/rparris/ |

J'ai pas fini :

Déclic



Euclid'

**Exercices sur Cabri**

**Droite d'Euler (cercle d'Euler)**

Soit ABC un triangle non équilatéral.

On appelle H l'orthocentre, G le centre de gravité, O le centre du cercle circonscrit.

Que peut-on dire de ces trois points ?

**Exercice d'application**

Soient C un cercle fixe, [AB] une corde fixe de ce cercle et M un point qui décrit C – {A,B}.

a) Quel est le lieu de l'isobarycentre G du triangle MAB ?
b) Quel est le lieu de l'orthocentre H du triangle MAB ?
c) Quel est le lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle ?

**Symétriques de l'orthocentre d'un triangle**

Soient ABC un triangle, H son orthocentre, C son cercle circonscrit.

Que peut-on dire des symétriques de H par rapport aux côtés du triangle et aux milieux des côtés ?

**Aires successives**

a) On considère les points A'', B'', C'' tels que A'' soit le symétrique de B par rapport à A', B'' soit le symétrique de C par rapport à B', C'' soit le symétrique de A par rapport à C'.

Exprimer vectoriellement cette construction.

Est-ce que le rapport des aires de ABC et de A''B''C'' est constant (justifier) ?

c) On continue cette manière de prolonger, en introduisant A''' tel que $\overrightarrow{AA'''} = 4\ \overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{AA_{n-1}} = n\ \overrightarrow{AB}$, et de même pour B et C.

Le rapport des aires de ABC et de A'''B'''C''' est-il constant (justifier) ? Même question avec ABC et $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$.

b) Des expériences sur un logiciel semblent indiquer que si on part d'un hexagone régulier et d'un pentagone régulier on a encore un rapport constant entre l'aire de l'hexagone (ou du pentagone) régulier initial et l'aire du nouveau polygone obtenu à partir des symétriques des sommets, comme dans l'exercice.

On va démontrer ce résultat.

Commencer par l'hexagone régulier, en utilisant une des méthodes qui ont déjà servi.

On analysera rapidement la résolution choisie.

Pour le pentagone régulier, calculer les angles de la figure initiale et retrouver la valeur de cos(2Π/5), puis démontrer le résultat.

Contrôle : le facteur multiplicatif serait, d'après le logiciel, $6-\sqrt{5}$.

**Exercices supplémentaires**

**Exercice de début**

Explorer la configuration du trapèze complet :

ABC un triangle, on considère deux points D appartenant à [AB] et E appartenant à [AC] tels que (DE) soit parallèle à (BC) ; on appelle O le point d'intersection de [EB] et [DC].

On construit les milieux I et J de [DE] et [BC].

**Lieu géométrique**

Soit O le milieu d'un segment [AB], P un point de la médiatrice d de ce segment. On trace la perpendiculaire à (PB) en B et la perpendiculaire à (PA) en A. Lorsque ces deux droites se coupent on appelle Q le point d'intersection et I le milieu de [PQ].

Trouver les lieux de I et Q lorsque P décrit d.

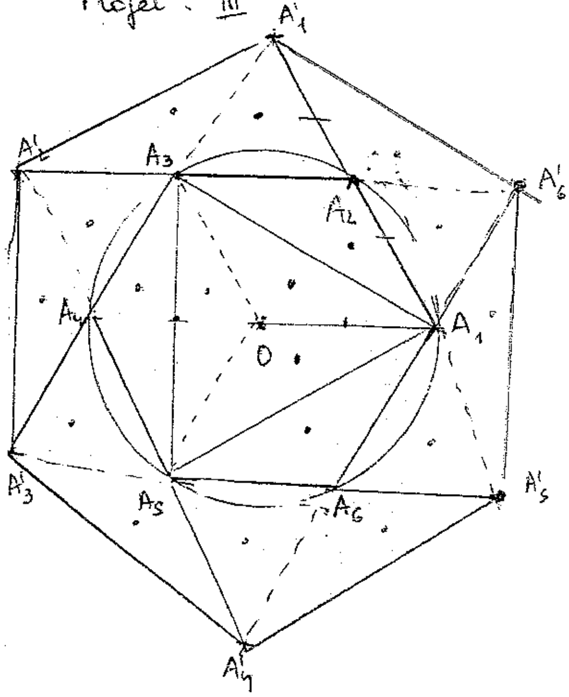
**Lieu mesure**

Soit ABC un triangle et P un point du plan. On appelle A', B' C' les symétriques de P par rapport aux trois côtés [BC], [AC] et [AB]. Quel est le lieu de P tel que aire (ABC) = aire (A'B'C') ?

Bibliographie

Géométrie avec Cabri, scénarios pour le lycée, Clarou, Laborde, Caponi, CRDP de Grenoble

Projet. III

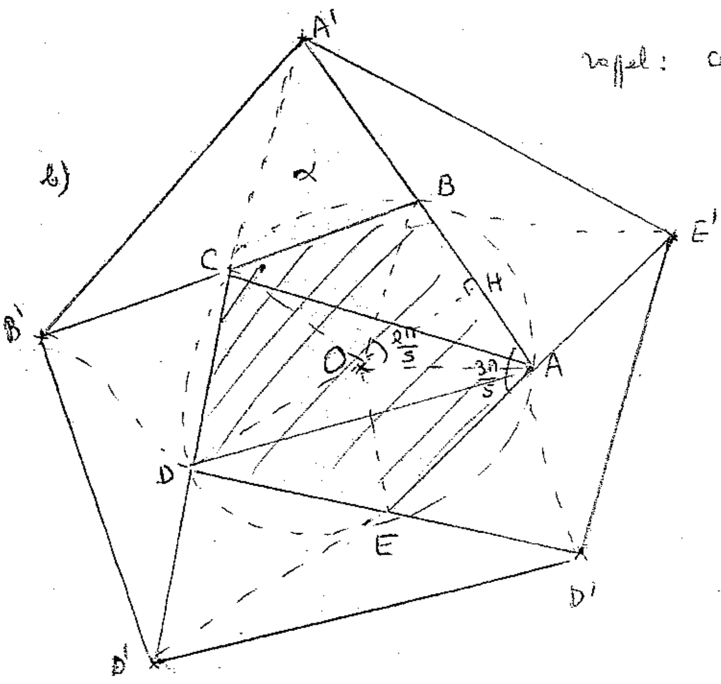



a) $S = 6\sigma$

$S' = 12 + S = 18\sigma$

$\frac{S'}{S} = 3$

b)




rappel : $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$$\begin{cases} S = 10\alpha + s \\ s = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

$\mathcal{A}_{ACD} = \beta$

$\mathcal{A}_{ABC} = \alpha$

$$\begin{cases} S = 12\alpha + \beta \\ s = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

$\alpha = \frac{1}{2} a^2 \times \sin \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{2\pi}{5}$

$\alpha = a^2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}$

$\beta = 5A - 2\alpha$

où $A = \mathcal{A}(OAB)$

$A = \frac{1}{2} a \times OH = \frac{1}{2} a \times \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}}$

$A = \frac{a^2 \cos \pi/5}{4 \sin \pi/5}$

$\beta = \frac{5}{4} a^2 \frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} - 2a^2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}$

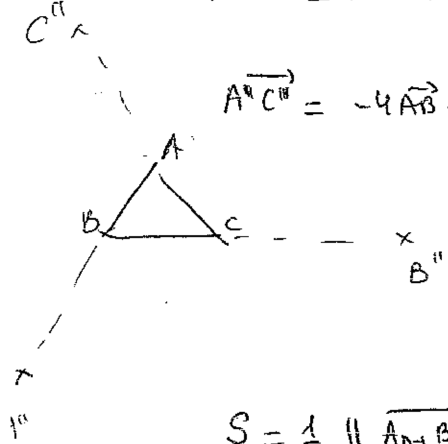
$$\frac{S}{s} = \frac{12\alpha + \beta}{2\alpha + \beta} = \frac{2\alpha + \beta}{2\alpha + \beta} + \frac{10\alpha}{2\alpha + \beta} = 1 + \frac{10\alpha}{s} = 1 + \frac{10\alpha}{5A} = 1 + \frac{2\alpha}{A}$$

$$\frac{S}{s} = 1 + \frac{2a^2 \sin \pi/5 \cos \pi/5}{a^2/4 \cos \pi/5 / \sin \pi/5} = 1 + 8 \sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 + 4\left(1 - \cos \frac{2\pi}{5}\right) = 5 - 4 \cos \frac{2\pi}{5} = 6 - \sqrt{5}.$$

d) $S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{A'''B'''} \wedge \overrightarrow{A'''C'''}\|$

$\overrightarrow{A'''B'''} = \overrightarrow{A'''A} + \overrightarrow{AB'''} = -4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB'''} = -4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} + 3(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$

$= -7\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$




$\overrightarrow{A''C''} = -4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CA} = -4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

$S=\frac{1}{2}\|(-7\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC})(-4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC})\|$

$S=\frac{1}{2}\|21\,\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} + 16\,\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}\| = 37\sigma$

$S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}}\wedge\overrightarrow{A_{n+1}C_{n+1}}\|$

$\overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}} = -n\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB_{n+1}} = -n\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+(n-1)(\overrightarrow{BC})$

$= -n\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+(n-1)(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}(-n+1-n)+\overrightarrow{AC}(n)$

$\overrightarrow{A_{n+1}C_{n+1}} = -n\overrightarrow{AB}+(n-1)(\overrightarrow{CA}) = -n\overrightarrow{AB}-(n-1)\overrightarrow{AC}$

$S=\frac{1}{2}\|(1-2n)\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC})\wedge(-n\overrightarrow{AB}-(n-1)\overrightarrow{AC})\|$

$S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|\ (2n-1)(n-1)+n^2$

$\boxed{S=\sigma(3n^2-3n+1)}$

**V Les situations animées par les étudiants eux-mêmes** (texte initial, texte final, quelques corrigés)

1.La droite d'Euler
2.Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle
3.La formule de Héron
4.Triangle isocèle, triangle équilatéral
5.Le trapèze complet
6.La relation d'Euler
7.A propos de deux cercles
8.Cercle d'Euler et quadrilatère inscrit dans un cercle

**Les 8 situations**

**Pour chaque exercice**

Le résoudre ; trouver éventuellement un énoncé analogue dans un manuel du lycée (beaucoup de ces exercices peuvent être proposés en seconde).

Choisir un énoncé pour la séance, le rédiger (texte et corrigé sur deux feuilles séparées) et l'analyser (quelles connaissances, quelles adaptations).
On pourra (faire) utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

Faire passer en classe : donner le texte choisi, laisser chercher (30 minutes au maximum), aider pendant la recherche, corriger au tableau.

Donner l'analyse de l'énoncé et comparer les prévisions avec ce qui s'est passé, indiquer le cas échéant la comparaison avec le manuel.

La rédaction du texte et du corrigé sera prise en compte dans l'évaluation.

**Droite d'Euler (cercle d'Euler)**

Soit ABC un triangle non équilatéral.

On appelle H l'orthocentre, G le centre de gravité, O le centre du cercle circonscrit.

1) Montrer que : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ; en déduire que O, G, H sont alignés (on appelle droite d'Euler la droite correspondante)
2) En utilisant l'homothétie h de centre G et de rapport $-1/2$, montrer que O,G,H sont alignés
3) Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit. Montrer que G est le centre de gravité du triangle AHA'. En déduire que O, G, H sont alignés.
4) Expliquer pourquoi l'image du cercle circonscrit par l'homothétie h passe par les milieux des côtés de ABC.

On peut démontrer (pour plus tard) que les pieds des hauteurs et les milieux des segments joignant les sommets du triangle et l'orthocentre sont sur ce cercle (cercle d'Euler).

*Pour la première question, on pourra montrer que le point M qui vérifie*

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ *est l'orthocentre.*

*Autrement dit*

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$ *où A' milieu de [BC]*

**Exercice d'application**

Soient C un cercle fixe, [AB] une corde fixe de ce cercle et M un point qui décrit $C - \{A,B\}$.

1) Quel est le lieu de l'isobarycentre G du triangle MAB ?
2) Quel est le lieu de l'orthocentre H du triangle MAB ?

# Droite d'Euler (cercle d'Euler)

Soit ABC un triangle non équilatéral.
On appelle : H l'orthocentre du triangle ABC,
G le centre de gravité du triangle ABC,
O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
Soient A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].
**Faire une figure**

1. Soit un point M vérifiant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
   a) Montrez que M est l'orthocentre du triangle ABC
   b) En déduire que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
   c) En déduire que O, G, H sont alignés (On appelle droite d'Euler la droite correspondante)

2. Soit l'homothétie h de centre G et de rapport $-1/2$.
   a) Montrez que le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par l'homothétie h
   b) Trouvez l'image de H par l'homothétie h
   c) En déduire que O, G, H sont alignés

3. Soit A'' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a) Montrez que BHCA'' est un parallélogramme
   b) Trouvez le centre de gravité du triangle AHA''
   c) En déduire que O, G, H sont alignés

## Exercice d'application

Soient C un cercle fixe, [AB] une corde fixe de ce cercle et M un point qui décrit C-{A,B}.
1. Quel est le lieu de l'isobarycentre G du triangle MAB
2. Quel est le lieu de l'orthocentre H du triangle MAB

**Le centre de gravité et l'isobarycentre d'un triangle ABC sont confondus.**

Le centre de gravité d'un triangle est l'intersection des médianes. Il est situé aux 2/3 de chacune d'elles à partir du sommet.
Soit G l'isobarycentre défini par $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$
En utilisant la relation de Chasles et en introduisant le milieu A' de [BC]on obtient
$3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{O}$ soit $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AA'}=\vec{O}$
Le point G est donc sur la droite (AA') et vérifie GA/AA' = 2/3 : c'est le centre de gravité.
Et réciproquement, en « remontant » la démonstration.

**Homothéties**

Pour définir une homothétie, on se donne un point fixe O (le centre) et un réel k (le rapport).
L'homothétie h de centre O et de rapport k est l'application du plan dans lui-même tel que, pour tout M du plan : $\overrightarrow{Oh(M)}=k\overrightarrow{OM}$.

On peut aussi définir une homothétie par deux points A, B et leurs images A', B', à condition que les deux droites (AB) et (A'B') soient parallèles et que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient différents.

Un point, le centre de l'homothétie et son image sont alignés (sauf pour le centre).
Les homothéties sont des bijections du plan sur lui-même.
Elles sont affines – leur application linéaire associée est kId (donc elles conservent les barycentres, donc les segments, les droites) et de plus elles transforment toute droite en une droite parallèle.
Elles multiplient les longueurs par k, les aires par $k^2$.
On peut chercher si deux figures données sont homothétiques puis déterminer les homothéties qui transforment l'une en l'autre (exemple : deux cercles).

**Symétriques de l'orthocentre d'un triangle**

Soient ABC un triangle, H son orthocentre, C son cercle circonscrit.
Montrer que les symétriques de H par rapport aux milieux des côtés et par rapport aux droites portant les côtés appartiennent à C.
Montrer que les symétriques par rapport aux milieux sont diamétralement opposés aux sommets du triangle.

**Indication**

Plusieurs ordres sont possibles. On peut utiliser des considérations d'angles, des transformations ou des configurations élémentaires.

**Applications** : tracé à main levée, le cercle d'Euler

**Compléments pour les symétriques de l'orthocentre.**

On appelle H2 le symétrique de H par rapport au milieu I de [BC] et H1 le symétrique par rapport à la droite (BC).

Divers énoncés (indépendants) : *en commençant par H2...*
1)Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle.
Montrer que A' est symétrique de H par rapport au milieu I de [BC] (A' et H2 confondus).
Conclure.

2) Montrer que H2 appartient au cercle circonscrit au triangle (propriétés angulaires ou non).

3) Soit H2 le point d'intersection de (HI) et du cercle circonscrit au triangle appartenant à l'arc de cercle ne contenant pas A. Montrer que ce point est symétrique de H par rapport à I.

*En commençant par H1...*
1)Montrer que le symétrique de H par rapport à (BC) appartient au cercle circonscrit au triangle.
Conclure pour H2.

2) Montrer que le deuxième point d'intersection de (AH) et du cercle circonscrit au triangle est le symétrique de H par rapport à (BC).

**Exercice :** ***Symétriques de l'orthocentre d'un triangle***

Soient $ABC$ un triangle, $H$ son orthocentre et $\Omega$ son cercle circonscrit de centre $O$.
Soit $I$ milieu de $[BC]$.

1) Faire une figure.

2) Soit $H_2$ le symétrique de $H$ par rapport à $I$.
   Le but de cette question est de montrer que $H_2$ est situé sur $\Omega$ :
   a) En considérant le triangle $AHH_2$, montrer que O est milieu de $[AH_2]$.
   b) Conclure.

3) Soit $H_1$ le symétrique de $H$ par rapport à la droite $(BC)$.
   On souhaite maintenant montrer que $H_1$ est situé sur $\Omega$ :
   a) En observant le triangle $HH_1H_2$, montrer que $AH_1H_2$ est un triangle rectangle en $H_1$.
   b) Conclure.

**Symétriques de l'orthocentre**

**En commençant par H2**
En fait on démontre aussi que H2 est le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit.

Alors, si H1 est le symétrique de H par rapport à (BC), dans le triangle HH1H2, la droite (BC) est la droite des milieux, donc (H1H2) est parallèle à (BC) donc perpendiculaire à (HH1) ; donc l'angle HH1H2 est droit, ainsi que l'angle AH1H2 ; or [AH2] est un diamètre du cercle circonscrit donc H1 appartient à ce cercle.

Ou bien, si on appelle H'1 l'intersection de (AH) et du cercle, le triangle HH'1H2 est rectangle (inscrit dans un diamètre). Donc comme (BC) est perpendiculaire à (AH), elle est parallèle à (H'1H2), et comme (BC) passe par le milieu de [HH2], (BC) coupe le côté [HH'1] en son milieu. H'1 est donc le symétrique de H par rapport à (BC).

1) Dans le triangle AHA', O est le milieu de [AA'], et (OI) est parallèle à (AH) avec OI = AH/2 (ou vectoriellement : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AH}/2$). Ceci implique que I est le milieu de [AA'].

2) Ou bien on considère la symétrie de centre I qui « conserve » les angles, d'où l'égalité suivante, à $\Pi$ près : $(\overrightarrow{H2B}, \overrightarrow{H2C}) = (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ qui implique que H2 est sur le cercle.

Ou bien, on considère le quadrilatère BHCH2 : ses diagonales se coupent en leur milieu, c'est un parallélogramme : donc (CH2) $\perp$ (AC). Par suite H2 appartient au cercle de diamètre [AH2] passant par C. De même il appartient au cercle de diamètre [AH2] passant par B. C'est le cercle circonscrit au triangle.

Ou bien, Dans le triangle AHH2, I milieu de [HH2] et $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AH}/2$ implique que O est le milieu de [AH2].

3) Il faut montrer que H2 est le symétrique de H par rapport à I. Pour cela on va montrer que H2 = A'.

$S_O(A) = A'$ ; $S_I(A') = X$ tel que $S_I \circ S_O(A) = X$
X est donc l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}2$ : c'est H.
Donc $S_I(H) = A'$ , or A' est sur le cercle et appartient à (IH) : c'est H2.

<u>En commençant par H1.</u>
H2 appartient au cercle circonscrit : (BC) droite des milieux implique que l'angle AH1H2 est droit, d'où H2 tel que [AH2] diamètre.

1) On travaille avec la symétrie d'axe (BC) et la conservation des angles.
2) On introduit le diamètre $\Delta$ parallèle à (BC) : le symétrique de A par rapport à ce diamètre est H1. En composant avec la symétrie par rapport à (BC) on obtient :

$S_{(BC)} \circ S_\Delta(A) = X = S_{(BC)}(H1) = t_{2\overrightarrow{OI}}(A) = H$.

**La formule de Héron** pour calculer l'aire d'un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés (a, b, c).

On rappelle les relations métriques élémentaires dans un triangle.
On appelle p le demi-périmètre du triangle.
Montrer que S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

**Application**

L'aire d'un triangle est inférieure ou égale à $p^2/3\sqrt{3}$
Dans quel cas y a-t-il égalité ?

**Trois points de départ possibles**

S = ½ AH.BC
On exprime AH en fonction des longueurs côtés du triangles en utilisant le théorème de Pythagore : on obtient une expression de HB (par exemple) en fonction des seuls côtés.
On est amené alors à utiliser une identité remarquable (différence de deux carrés), qui « s'arrange » pour donner la formule.

S = ½ ab sin C
On passe au cosinus et on utilise une formule d'Alkashi pour exprimer le cosinus ; en remplaçant en revenant au sinus, on a une différence de deux carrés, qui s'arrange pour donner la formule.

S = pr = (p-a) r'
Où r' est le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A de centre J.
En déduire que $S^2 = p(p-a)rr'$.
On appelle H le point de contact de [AB] et du cercle inscrit dans le triangle et K le point de contact de [AB] et du cercle exinscrit dans le triangle de centre J.
Montrer que BH = p-b et BK = p-c.
Comparer les angles des triangles IHB et JKB.
En déduire que

$$\frac{r}{p-c} = \frac{p-b}{r'}$$

En déduire la formule de Héron.

# LA FORMULE DE HERON

Soit ABC un triangle de côtés a, b, c.
On appelle p le demi-périmètre du triangle.
Soit r le rayon du cercle inscrit dans le triangle.

**Le but de cet exercice est de montrer que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$**

1)- Soit $S = \frac{1}{2}ab.\sin C$

a) Exprimer $S^2$ en fonction de cosC. En utilisant une formule d'Alkashi, montrer que

$$(1+\cos C) = \frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{2ab} \qquad \text{et } (1-\cos C) = \frac{-a^2-b^2+c^2+2ab}{2ab}$$

b) En utilisant une identité remarquable, trouver l'expression de S.

2)- Soit H un point de [BC] tel que (AH) est une hauteur du triangle ABC issue de A.
Soit $S = \frac{1}{2}AH.BC$

a) Exprimer BH en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC.

b) En utilisant une identité remarquable, exprimer $AH^2$ en fonction des longueurs des côtés du triangle.

c) En déduire la formule de Héron.

3)- Soit r' le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A de centre J.
Soient L le point de contact de [AB] et du cercle inscrit dans le triangle ABC et K le point contact de [AB] et du cercle exinscrit dans le triangle de centre J.
FAIRE UNE FIGURE.
Soit $S = pr = (p-a)r'$

a) Montrer que $S^2 = p(p-a)rr'$

b) Montrer que $BL = p-b$ et $BK = p-c$

c) Que peut-on dire des angles $\widehat{LBI}$ et $\widehat{BJK}$? En déduire que $\frac{r}{p-b} = \frac{p-c}{r'}$

d) En déduire la formule de Héron.

***Application :***

L'aire d'un triangle est inférieure ou égale à $p^2/3\sqrt{3}$.
Dans quel cas y a-t-il égalité ?

**Formule de Héron**

**Troisième point de départ**

On appelle J le centre du cercle exinscrit dans l'angle en A du triangle.
2Aire (ABC) = 2aire (ABJ) + 2aire (ACJ) - 2aire (BJC)
= cr' + br' – ar' = r' (b + c – a) = r'(2p – 2a)
S = r'(p – a).

En multipliant les deux égalités on obtient $S^2 = p(p-a)rr'$.

On utilise la propriété de « l'égalité des tangentes issues d'un même point à un cercle ».
2BH + 2AH' + 2CH = 2p = 2BH + 2AC = 2 BH + 2b
Ce qui est équivalent à BH = p – b.

De même pour BK.

Les deux triangles IHB et JKB sont rectangles (I est le centre du cercle inscrit).
Comme les deux bissectrices issues de B sont perpendiculaires, IBH et KBJ sont complémentaires, donc BIH = KBJ.
Les deux triangles HBI et KJB sont donc semblables (ils ont deux angles égaux).
Donc leurs côtés homologues sont proportionnels : $\dfrac{HB}{KJ} = \dfrac{HI}{KB}$, ce qui s'écrit

$$\frac{p-b}{r'} = \frac{r}{p-c}$$

Par suite **$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.**

**Premier point de départ**

D'après le théorème de Pythagore, en appelant H le pied de la hauteur issue de A
$AB^2 = AH^2 + HB^2$
$AC^2 = AH^2 + HC^2$
Ce qui implique $AB^2 - AC^2 = HB^2 - (BC - HB)^2$
Ce qui est équivalent à $BC^2 + AB^2 - AC^2 = 2HB.BC$
$HB = ½ [(BC^2 + AB^2 - AC^2)/BC]$
En remplaçant on obtient $AH^2 = AB^2 - [½ [(BC^2 + AB^2 - AC^2)/BC]]$
On utilise l'expression de la différence de deux carrés.
$AH^2 = [AB - ½ [(BC^2 + AB^2 - AC^2)/BC]].[AB + ½ [(BC^2 + AB^2 - AC^2)/BC]]$
On réduit au même dénominateur chaque facteur du second membre et on réduit en reconnaissant le développement des carrés (AB – BC) et (AB + BC) respectivement :
On obtient :

$$AH^2 = \frac{AC^2 - (AB-BC)^2}{2BC}\frac{(AB+BC)^2 - AC^2}{2BC}$$

$$AH^2 = \frac{1}{4BC^2}(AC - AB + BC)(AC + AB - BC)(AB + BC - AC)(AB + AC + BC)$$

On a par suite $S^2 = ¼\, BC^2.AH^2 = 1/16\, [(2p-2c)(2p-2a)(2p-2b)2p]$
**$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)p$**
On reconnaît la formule cherchée.

**Deuxième point de départ**

On sait que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

$\sin A = |\sin A| = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{1}{2bc}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}$

La quantité sous le radical se développe comme la différence de deux carrés et on reconnaît dans chaque facteur le développement de $(b-c)^2$ et $(b + c)^2$ respectivement :

$$4b^2c^2 - ( b^2 + c^2 - a^2)^2 = [a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2]$$
$$= (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)$$

$S = ½\, bc \sin A = ½\, bc\ \frac{1}{2bc} 4\sqrt{(p-b)(p-c)(p-a)p}$

C'est la formule cherchée.

**Aire d'un quadrilatère convexe inscriptible**

**Théorème de Brahmagupta :** un quadrilatère convexe inscriptible dont les côtés ont pour longueur a, b, c, d et de demi-périmètre p a pour aire

$S = \sqrt{(p-b)(p-c)(p-a)(p-d)}$

**Corollaire**

La quadrilatère inscriptible a l'aire maximale parmi les quadrilatères dont les côtés ont même longueur que lui.

**Formule de Héron**

**Application**

On utilise la convexité de la fonction x -> $-\ln(x)$, qui permet de montrer l'inégalité suivante entre moyenne géométrique et arithmétique suivante, si les $x_i$ sont positifs ou nuls :

$(x_1\, x_2 \ldots x_n)^{1/n} \leq (x_1 + x_2 + \ldots x_n)/n$

C'est une égalité ssi tous les $x_i$ sont égaux.

> La démonstration de cette inégalité se fait en passant aux logarithmes (fonction croissante ainsi que son inverse).
> L'inégalité annoncée est ainsi équivalente à la suivante :
> $\ln [(x_1\, x_2 \ldots x_n)^{1/n}] \leq \ln [(x_1 + x_2 + \ldots x_n)/n]$
> Soit à démontrer : $1/n\, [\ln(x_1) + \ln(x_2) + \ldots + \ln(x_n)] \leq \ln [(x_1 + x_2 + \ldots x_n)/n]$
> Ceci traduit exactement la convexité de la fonction x -> $-\ln(x)$.

Ici on a : $[(p-a)(p-b)(p-c)]^{1/3} \leq 1/3\, [(p-a) + (p-b) + (p-c)]$

Ce qui est équivalent à : $[(p-a)(p-b)(p-c)]^{1/3} \leq 1/3\, p$

Or $S = \sqrt{p(p\ a)(p\ b)(p\ c)}$

Ce qui est équivalent à : $(p-a)(p-b)(p-c) = \dfrac{S^2}{p}$

Equivalent à : $[(p-a)(p-b)(p-c)]^{1/3} = [\dfrac{S^2}{p}]^{1/3}$

L'inégalité précédente implique alors : $[\dfrac{S^2}{p}]^{1/3} \leq 1/3\, p$

Ce qui est équivalent, en simplifiant, à : $S^2 \leq (p/3)^3\, p$

Ce qui est équivalent à : $\mathbf{S \leq p^2/3\sqrt{3}}$

Il y a égalité ssi $[(p-a)(p-b)(p-c)]^{1/3} = 1/3\, [(p-a) + (p-b) + (p-c)]$

Ssi $(p-a) = (p-b) = (p-c)$ ce qui est équivalent à $à = b = c$ : **le triangle est équilatéral.**

**Triangle isocèle, équilatéral**

1) Un triangle est isocèle si et seulement si

- il a deux hauteurs (resp. deux médianes, deux bissectrices) de même longueur
- il a une hauteur qui est aussi médiane du côté correspondant

Compléter cette liste !

2) Soit ABC un triangle équilatéral et M un point intérieur au triangle.

Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle est constante.

Montrer que pour tout point M du cercle circonscrit l'un des segments [MA], [MB], [MC], a une longueur égale à la somme des deux autres.

**Application**

Le triangle équilatéral est le triangle d'aire maximale parmi les triangles ayant le même périmètre 2p.

**Indications**

Utiliser les cas d'égalités, les aires et les cas de similitudes des triangles.

Pour l'application penser à la formule de Héron.

# TRIANGLE ISOCELE, TRIANGLE EQUILATERAL

## I. Triangle isocèle

1) ABC triangle isocèle en A. On appelle $H_1$, $H_2$, $H_3$ les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C.

   A_ Faire une figure.

   B_ Montrer que $BH_2 = CH_3$

   C_ On appelle $M_1$ le pied de la médiane issue de A.
   Placer $M_1$ sur la figure sans tracer la médiane. Justifier.

2) ABC n'est plus supposé isocèle (en A)
   Montrer que si 1)B ou 1)C est vérifiée alors ABC isocèle (en A).

3) On peut échanger A et B, puis A et C (on appellera $M_2$ et $M_3$ les pieds des médianes issues respectivement de B et C).
   Conclure.

## II. Triangle équilatéral

1) <u>Montrer que la somme des distances de M au trois côtés du triangle est constante.</u>

   Tracer ABC le triangle équilatéral de côté a et placer M un point intérieur au triangle.
   Soit A', B', C' les projetés orthogonaux de M respectivement sur [BC], [AC], [AB].

   A_ Exprimer $S_1$ l'aire de ABM, $S_2$ l'aire de ACM et $S_3$ l'aire de BCM.

   B_ En déduire S l'aire de ABC.

   C_ Conclure.

2) <u>Démontrer que MC=MA+MB</u>

Tracer ABC le triangle équilatéral de côté a et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit de centre O et de rayon r.
Placer un point M sur le petit arc $\overset{\frown}{AB}$.

A_ Déterminer la mesure des angles $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMA}$

B_ Exprimer $MC^2$ de deux manières différentes.
En déduire MC.

**La configuration « trapèze complet »**

I Soit ABCDE un trapèze complet tel que les droites (BE) et (CD) sont parallèles (cf. figure)

On appelle O le point d'intersection de (BD) et (CE).

1) Montrer que si on appelle I et J les points d'intersection de (AO) avec [BE] et [CD], I est le milieu de [BE] et J est le milieu de [CD].

2)Question indépendante de la première.

On appelle I et J les milieux respectifs de [BE] et [CD]. Montrer que les quatre points A, I, J, O sont alignés.

Peut-on déduire la première question ou la deuxième de l'autre ?

II Soit ABCDE un trapèze complet (cf. figure).

On appelle O le point d'intersection de (BD) et (CE), I et J les milieux respectifs de [BE] et [CD].

Montrer que si trois des quatre points A, I, J O sont alignés les droites (BE) et (CD) sont parallèles.

**Indications**

On peut utiliser pour la première question des homothéties, le théorème de Thalès ou des propriétés d'aires.

**Application : deux constructions, à la règle seule.**

1) Soient D une droite, A et B deux points de D et I le milieu de [AB].

Tracer par n'importe quel point M hors de la droite D la parallèle à cette droite.

2) Soient D une droite, A et B deux points hors de D tels que D et (AB) soient deux droites parallèles distinctes. Construire le milieu I du segment [AB].

# TRAPEZE COMPLET

Soit ABCDE un trapèze complet tel que les droites (BE) et (CD) soient parallèles. On appelle O le point d'intersection de (BD) et (CE).

<u>I) Montrons, à l'aide de deux méthodes, que si on appelle I et J les points d'intersection de (AO) avec [BE] et [CD], I est le milieu de [BE] et J le milieu de [CD].</u>

a) _écrire les relations du théorème de Thalès dans chaque triangle.
_ en déduire que : I milieu de [BE], J milieu de [CD].

b) _ en considérant l'homothétie h de centre A qui transforme D en E et C en B, montrer que I milieu de [BE].
_ en déduire que J milieu de [CD].

<u>II) On suppose maintenant que I est le milieu de [BE] et J est le milieu de [CD]. Montrons que les points A, I, O et J sont alignés.</u>

a) à l'aide d'une première homothétie, montrer que A, I, J sont alignés.

b) à l'aide d'une deuxième homothétie, montrer que O, I, J sont alignés.

c) conclure.

<u>III) Applications : deux constructions **à la règle seule.**</u>

a) Soit (D) une droite, A et B deux points de (D) et I milieu de [AB]. Tracer par n'importe quel point M hors de (D) la parallèle à cette droite.

b) Soit (D) une droite, A et B deux points hors de (D) tels que (D) et (AB) soient deux droites parallèles distinctes.
Construire le milieu I de [AB].

**Relation (formule) d'Euler**

Soient ABC un triangle, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit de centre O et de rayon R et $\mathcal{G}$ son cercle inscrit de centre I et de rayon r.
Etablir la formule suivante (relation d'Euler)
$OI^2 = R^2 - 2rR$

**Indications**
On pourra utiliser la caractérisation de I comme barycentre des sommets A, B et C du triangle et des relations métriques dans le triangle. On appellera a,b,c les longueurs des côtés et p le demi-périmètre.
Penser aux deux relations métriques
$S = pr$ et $abc = 4RS$

**Application** (et suite !)
1) Montrer que deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{G}$ de centres O et I et de rayon R et r, le deuxième cercle étant intérieur au premier, sont respectivement le cercle circonscrit et le cercle inscrit à un même triangle si et seulement si on a la relation d'Euler.
2) En déduire que tout point du grand cercle est le sommet d'un triangle inscrit dans ce cercle et circonscrit au petit cercle.
3) On appelle $A^1$, $B^1$, $C^1$ les points de contact du cercle $\mathcal{G}$ et des côtés respectifs [BC], [AC], [BA] du triangle.
Montrer que les droites $(AA^1)$, $(BB^1)$, $(CC^1)$ sont concourantes.
Montrer que $BA^1 = p-b$, $CA^1 = p-c$, $AB^1 = p-a$.

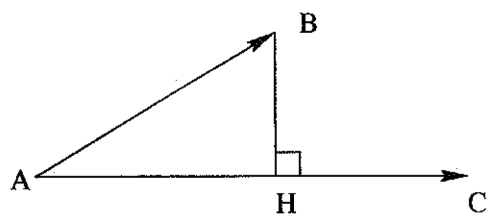
# La relation d'Euler

**Exercice n°1 :** Soit $ABC$ un triangle quelconque, $\Gamma$ son cercle circonscrit de centre $O$ et de rayon $R$ et $\Phi$ son cercle inscrit de centre $I$ et de rayon $r$. On note $N, P$ et $Q$ les milieux respectifs des segments $[AB], [BC]$ et $[AC]$. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. $S$ est l'aire du triangle et $p$ est le demi périmètre du triangle.

**Le but de cet exercice est de montrer que $OI^2 = R^2 - 2rR$ (c'est la relation d'Euler).**

1. Montrons que $I$ est le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$. Soit $G$ barycentre de $(A, a)$, $(B, b)$, $(C, c)$. On va montrer que $G = I$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AG}$ est la somme de 2 vecteurs de même norme et que $G$ appartient à la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
   (c) En déduire que $I = G$.
2. On va montrer que $OI^2 = R^2 - 2rR$.
   **Rappel** : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$

   $abc = 4RS$ et $S = rp$




   (a) Exprimer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
   (b) Prouver que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = R^2 - \frac{c^2}{2}$. En déduire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$.
   (c) En déduire que $OI^2 = R^2 - 2rR$.
3. Une autre façon de montrer que $I$ est le barycentre de $(A, a)$,$(B, b)$,$(C, c)$.
   (a) Soit $A_1$ le point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et de $[BC]$. On trace la parallèle $(A_1A)$ passant par $C$, elle coupe $(AB)$ en $D$. Soit $B_1$ le point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et de $[AC]$
      i. Montrer que le triangle $ADC$ est isocèle.
      ii. Montrer que
      $$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b} \text{ et que } \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

(b) On remarque que $\overline{BA_1} \times \overrightarrow{CA_1} + \overline{CA_1} \times \overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{0}$. En déduire que $A_1$ est le barycentre de $(B,b)$,$(C,c)$. De même montrer que $B_1$ est le barycentre de $(A,a),(C,c)$.

(c) Soit $G$ le barycentre de $(A,a),(A_1,b+c)$ et de $(B,b),(B_1,a+c)$. En déduire que $I$ est le barycentre de $(A,a),(B,b),(C,c)$.

**Exercice n°2 :** On se place dans les mêmes conditions que l'exercice précédent. Soit $A', B'$ et $C'$ les points de contact du cercle $\Phi$ et des cotés respectifs $[BC], [AC], [BA]$.

1. Calculer les distances $BA'$, $CA'$ et $AB'$.
2. En déduire à l'aide du théorème de Ceva que les droites $(AA'),(BB')$ et $(CC')$ sont concourantes.

   **Théorème de Ceva**: Les droites $(AA'),(BB')$ et $(CC')$ sont concourantes si et seulement si
   $$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

**Complément :** Il est possible de démontrer que lorsque l'on a 2 cercles : $\Gamma$ de centre $O$ et de rayon $R$, et $\Phi$ centre $I$ et de rayon $r$ intérieur au premier. Tout point de $\Gamma$ est le sommet d'un triangle inscrit dans $\Gamma$ et circonscrit à $\Phi$ ssi $OI^2 = R^2 - 2rR$ .
On se donne un cercle $\Gamma(O,R)$ et un cercle $\Phi(I,r)$ intérieur au premier. Soit $A$ un point de $\Gamma$ et deux tangentes menées de $A$ à $\Phi$ qui coupent $\Gamma$ en $B$ et $C$. On a alors que $\Phi$ est inscrit dans le triangle $ABC$ ssi $(BI)$ est bissectrice de $\widehat{ABC}$. Il s'agit alors de montrer que $(BI)$ est bissectrice de $\widehat{ABC}$ ssi $OI^2 = R^2 - 2rR$. On introduit $D$ tel que $(AI)$ coupe $\Gamma$ en $D$. La démonstration s'organise autour de deux idées :

1. On prouve que $(BI)$ est bissectrice de $\widehat{ABC}$ ssi $DI = BI$ (soit $DIB$ isocèle en $I$). Pour cela, on démontre que $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI})$ ssi $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BI}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID})$.
2. On utilise la puissance de $I$ par rapport au cercle $\Gamma$ : $P(I) = \overline{IA} \times \overline{ID} = OI^2 - R^2$. On a $\overline{IA} \times \overline{ID} = -IA \times ID = -IA \times BD$ d'après 1). On démontre alors que $IA \times BD = 2Rr$ et on en déduit $OI^2 = R^2 - 2rR$.

Conclusion : Le cercle $\Phi$ est donc inscrit dans le triangle $ABC$ ssi $OI^2 = R^2 - 2rR$.

**A propos de la relation d'Euler.**

(I. La réciproque).

**II. Tout ça c'est pareil... : selon qu'on travaille dans le cadre vectoriel ou le cadre ponctuel.**

**A) Pour un point M sur un segment [AB]**

Il est équivalent de

- Diviser [AB] dans le rapport k
- Vérifier MA/MB = k
- Etre barycentre de (A,1), (B,k)
- Etre barycentre de (A,MB) et (B,MA)

Les deux premières expressions sont immédiatement équivalentes (cadre ponctuel – affine euclidien).

On a toujours : $\overline{MB}\,\overline{MA} - \overline{MA}\,\overline{MB} = 0$

Ceci est équivalent à : M est barycentre de (A, $\overline{MB}$ ) et (B, $-\overline{MA}$ , ).

Or les coefficients du barycentre sont définis à un coefficient de proportionnalité près : comme les deux valeurs algébriques sont de signe contraire, on peut choisir MB comme nombre positif proportionnel à $\overline{MB}$ et on doit alors prendre MA comme deuxième coefficient. Ainsi M est barycentre de (A,MB) et (B, MA).

De même, comme les coefficients du barycentre sont définis à un coefficient de proportionnalité près, ceci est équivalent à : M est barycentre de (A,1) et (B, $-\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$) ou encore M est barycentre de (A,1), (B k). Rappelons que M est entre A et B, ce qui implique que le rapport des mesures algébriques $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ est négatif et son opposé positif (la valeur absolue de ce rapport est k).

**Extension** : pour un point de la droite (AB), qui n'est pas sur le segment, on remplace les dernières expressions par : être barycentre de (A,1), (B –k), ou encore être barycentre de (A,MB) et (B, -MA).

**B) Pour un point M intérieur au triangle ABC.**

Il est équivalent de

- Etre barycentre de (A,k), (B,n), (C,m), où k, n et m sont trois nombres positifs (de somme non nulle).
- Etre barycentre de (A, aire(MBC)), (B, aire(MAC), (C, aire(MAB)
- Appartenir aux droites (AA'), (BB'), (CC') où A' est le barycentre de (B,n) et (C,m), B' le barycentre de (A,k) et (C,m), C' le barycentre de (A,k) et (B,n).

D'après ce qui précède c'est encore équivalent à :

- Appartenir aux droites (AA'), (BB'), (CC') où A' divise [BC] dans le rapport m/n, B' divise [CA] dans le rapport k/m et C' divise [AB] dans le rapport n/k. Et on a m/n = A'B/A'C, k/m = B'C/B'A, n/k = C'A/C'B.

D'après ce qui précède en effet, A' divise [BC] dans le rapport m/n implique que A' est barycentre de (B,1) et (C,m/n) ou encore de (B,n) et (C,m) du fait que les coefficients du barycentre sont définis à un coefficient de proportionnalité près.

M est barycentre de (A,k), (B,n), (C,m) ssi $k\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC} = 0$.
Ceci implique que le produit vectoriel du vecteur du premier membre par $\overrightarrow{MA}$ est nul.
Ceci s'écrit : $0 = n\overrightarrow{MB} \wedge k\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{MC} \wedge k\overrightarrow{MA}$
Ceci implique, en prenant le double des normes de ces vecteurs :
n aire (MBA) = m aire (MCA).
De même m aire(MCB) = k aire (MAB) et k aire(MAC) = n aire(MBC).
On obtient : aire(MBA)/m = aire (MCA)/n = aire (MBC)/k
Et réciproquement, en utilisant encore ces dernières égalités et la propriété des coefficients barycentriques d'invariance par proportionnalité.

Si M est barycentre de (A,k), (B,n), (C,m), M est aussi barycentre de (A,k) et du barycentre partiel de (B,n) et (C,m) affecté de la somme m+n (supposée non nulle). Ce barycentre partiel est le point A'.
Donc M appartient à la droite (AA').
On démontre de même que M appartient aux droites (BB') et (CC').

Réciproquement, un argument de convexité permet de justifier que les deux droites (AA') et (BB') se coupent – et même à l'intérieur du triangle. Appelons X ce point.
On considère le barycentre de (A,k), (B,n, et (C,m). Ce point est sur (AA') – par associativité ou projection. Il est aussi sur (BB'), de même : c'est le point X.

*Une autre piste pour démontrer l'équivalence des deux premières expressions* :
On a, en introduisant A' point d'intersection de (AM) et [BC] : $\dfrac{aire(MAB)}{aire(MAC)} = \dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{m}{n}$
et les deux autres rapports analogues : on peut remplacer les coefficients aire(MAB), aire(MAC) et aire (MBC) par les trois nombres proportionnels m, n et k.

**Extension** : M appartient au plan (A,BC) : on introduit des aires algébriques et des coefficients réels.

**Application : le cas du centre I du cercle inscrit dans un triangle ABC.**

*Premier point de vue : ponctuel*

1) Le pied J de la bissectrice intérieure issue de A d'un triangle ABC vérifie

JB/JC = AB/AC = c/b

Donc il est barycentre de (B,b) et (C,c).

2) De même les pieds des bissectrices intérieures des deux autres angles sont barycentres de (C,c) et (A,a) et (A,a) et (B,b).
3) Il en résulte que leur point d'intersection I est barycentre de (A,a), B,b), (C,c).

*Deuxième point de vue : les aires*

On sait que aire (IBC) = 1/2ra, aire(IAC) = 1/2rb, aire (IAB) = 1/2rc.
Il en résulte qu'on peut prendre comme coefficients barycentriques de I par rapport à A,B et C, les trois aires ou encore a, b, c (nombres proportionnels).

*Troisième point de vue : à l'envers !*

Considérons le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c).
Ce point appartient à la droite (AA'), où A' est le barycentre de (B,b) (C,c) – soit par associativité soit par invariance du barycentre par projection. Ce point A' est le pied de la bissectrice intérieure issue de A : I appartient donc à cette bissectrice. De même avec une autre bissectrice. Le barycentre est le centre du cercle inscrit.

**Extension : le cas des centres des cercles exinscrits.**

On peut généraliser le résultat précédent en introduisant des coefficients négatifs.

**A propos de deux cercles**

Soient C et C' deux cercles de centres O et O' et de rayon R et R'.

1) Montrer qu'il existe deux homothéties ou une homothétie et une translation qui transforment C en C'.
2) Construire les tangentes communes aux deux cercles (dans les cas où c'est possible) en introduisant les transformations précédentes .
3) On dit que deux cercles sécants sont orthogonaux si leurs tangentes en les points d'intersection sont perpendiculaires. Montrer que c'est équivalent à

$OO'^2 = R^2 + R'^2$

4) Soit M un point du plan ; on se donne une droite passant par M qui coupe C en A et B.
   a) Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 = P$

On appelle puissance de M par rapport à C ce nombre P, qui ne dépend donc pas de la sécante menée par M.

   b) Ecrire une autre expression de P lorsque on peut mener par M une tangente au cercle en T (en fonction de MT).
   c) Trouver l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à deux cercles donnés.
   d) Montrer que deux cercles sont orthogonaux si et seulement si la puissance de O par rapport à C' est égale à $R^2$ (même chose avec O', C et R').

A propos de deux cercles

Soient C et C' deux cercles de centre O et O' et de rayon R et R'.

1) Définir deux homothéties ou une homothétie et une translation qui transforment C en C'.

2) Construire les tangentes communes aux deux cercles (en considérera deux cercles non sécants et distincts).Montrer qu'on peut les retrouver en utilisant les transformations précédentes.

3) On dit que deux cercles sécants sont orthogonaux si leurs tangentes en les points d'intersection sont perpendiculaires.
Montrer que c'est équivalent à $OO'^2 = R'^2 + R^2$
(On montrera l implication et sa réciproque)

4) Soit M un point du plan ; on se donne une droite passant par M qui coupe C en A et B.

   a) Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 = P$
   (on pourra par exemple introduire le point I milieu de [AB] )
   On appelle puissance de M par rapport à C ce nombre P, qui ne dépend donc pas de la sécante menée par M.

   b) Ecrire une autre expression de P lorsque on peut mener par M une tangente au cercle en T ( en fonction de MT).

   c) Trouver l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à deux cercles donnés. On appelle J le projeté orthogonal de M sur [OO'].

   d) Montrer que deux cercles sont orthogonaux si et seulement si la puissance de O par rapport à C' est égale à $R^2$ ( même chose avec O', C et R').

Rappelons d'abord que l'homothétie h de centre O et de rapport k transforme le cercle de centre A et de rayon R en le cercle de centre h(A) et de rayon $|k|R$.

La question est la suivante : on se donne deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de rayon R et R' et de centres O et O' et on cherche les homothéties éventuelles qui transforment l'un dans l'autre.
On se place dans le cas général, $O \neq O'$ et $R \neq R'$.

Si une telle homothétie h existe, nécessairement $|k| = R'/R$ et $O' = h(O)$ (d'après ce qui précède).
Autrement dit il n'y a que deux valeurs de k qui peuvent convenir et le centre de l'homothétie est sur la droite (OO').
Mais cela ne suffit pas à déterminer h !
Mais on sait qu'il n'y a que deux points qui divisent [OO'] dans le rapport $|k|$ (en fait k et $-k$)
Cela donne deux candidats, et deux seulement, dont on vérifie immédiatement qu'ils conviennent en reprenant l'image de $\mathcal{C}$ : c'est le cercle de centre O' et de rayon R'.
Dans le cas général il y a ainsi deux homothéties qui répondent à la question.

Pour construire leurs centres, on peut choisir alors A sur $\mathcal{C}$ : l'image de A est nécessairement à la fois sur $\mathcal{C}'$ et sur l'image de (OA), donc à la fois sur $\mathcal{C}'$ et sur la parallèle à (OA) menée par A'. Il n'y a que deux positions possibles diamétralement opposées (A' et A'').
Alors les centres des homothéties cherchées sont nécessairement l'intersection des droites (OO') et (AA') et l'intersection des droites (OO') et (AA'').
On vérifie que ces droites se coupent à cause de l'inégalité des rayons.

Pour tracer les tangentes s'il en existe, on peut utiliser ces centres d'homothétie : les tangentes à un cercle menée par l'un des centres sont tangentes à l'autres (conservation de la perpendicularité rayon/tangente) par l'homothétie).

**Cercle d'Euler et quadrilatères convexes inscrits dans un cercle**

**I Le cercle d'Euler**

Soit ABC un triangle, O,G,H respectivement le centre du cercle circonscrit, centre de gravité et orthocentre du triangle, A', B', C' respectivement les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB].

Soit H le cercle circonscrit à A'B'C'. montrer que les pieds des hauteurs du triangle et les milieux des segments [AH], [BH] et [CH] appartiennent à H.

Montrer que le rayon de ce cercle est la moitié du rayon du cercle circonscrit et que son centre appartient à la droite d'Euler du triangle (si le triangle n'est pas équilatéral).

**II Quadrilatère convexe inscrit**

Soit ABCD un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle.

On pose AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = v, BD = u et on note les angles du quadrilatère respectivement A, B, C, D du nom de leur sommet.

Montrer que

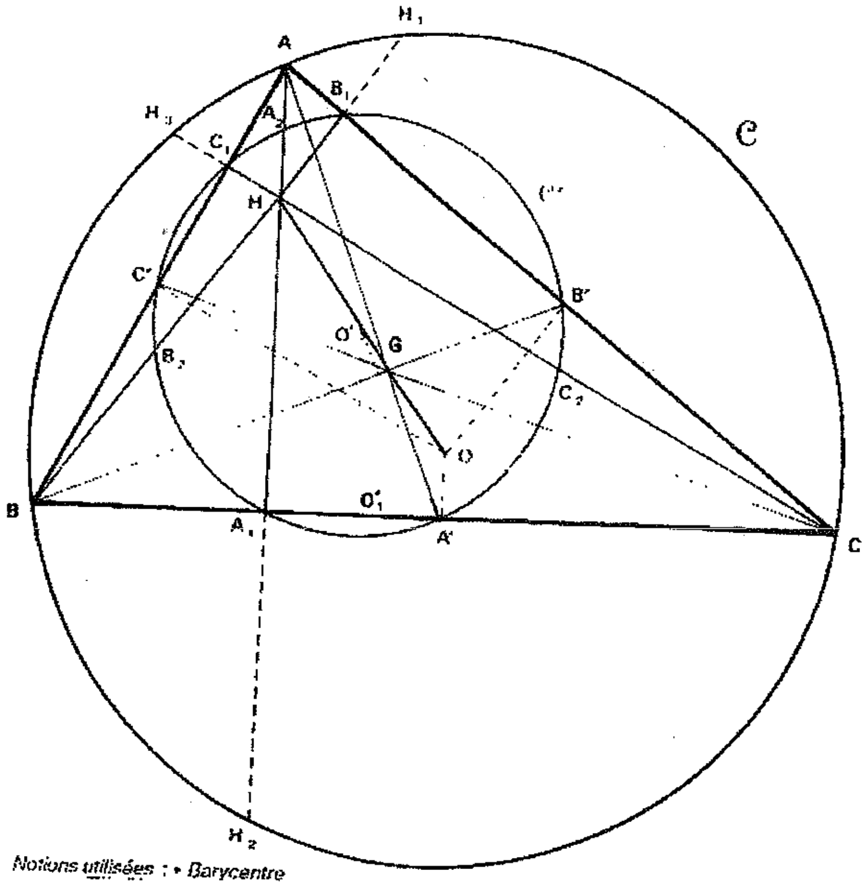
uv = ac + bd

cos A = $\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$

sin A/2 = $\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}$

Aire (ABCD) = $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

Cercle d'Euler




*Notions utilisées : • Barycentre*

# II. Quadrilatère convexe inscrit

Soit ABCD un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle.
On pose AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, AC=v, BD=u et on note les angles du quadrilatère respectivement A, B, C, D du nom de leur sommet.

A. Montrer que uv = ac + bc

1. En considérant un point I de [AC] vérifiant IBC=ABD, montrer que ABD et BCI sont deux triangles semblables.
   En déduire que bd = IC x u
2. Montrer que ABI et BCD sont deux triangles semblables
   En déduire que ac = IA x u
3. Conclure

B. Montrer que cos A $=(a^2+d^2-b^2-c^2) / 2(ad+bc)$

C. Montrer que sin A/2 $=\sqrt{(p-a)(p-d) / (ad+bc)}$

D. En remarquant que sin C/2 $=\sqrt{(p-b)(p-c) / (ad+bc)}$

Monter que A(ABCD)$=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

# Cercle d'Euler

Soit ABC un triangle et O,G,H respectivement le centre du cercle circonscrit le centre de gravite,

et l'orthocentre du triangle.

Soit A',B',C' les milieux respectifs des cot0s [BC],[CA]et[AB].

Soit gamma le cercle circonscrit a A B C de rayon R

Soit GAMMA le cercle circonscrit a A'B'C'de rayon R'

1)En considerant l'homothetie h de centre G et de rapport -1/2, montrer que R'=R/2

2)En utilisant les relations vectorielles induites par la droite d'Euler ainsi que l'homothetie h

montrer que O',centre de GAMMA est milieu de [OH] et qu'il appartient donc $\alpha$ la droite d'Euler de ABC.

3)Soit A'',B'',C'' les milieux respectifs de [AH],[BH]et[CH].

On cherche a montrer que A'',B'',C'' appartiennent a GAMMA.

- a) Deduire du 2) une deuxieme homothetie h', tel que h'(O)=O'.
- b) Trouver l'image de ABC par h'.
- c) Conclure.

4)Soit Ha,Hb,Hc les pieds respectifs des hauteurs de ABC issues de A,B et C.

Montrer que Ha,Hb,Hc appartiennent a GAMMA

Indication:

(Prouver que la droite M parallele $\alpha$ (OA') passant par O' est la mediatrice de [A'Ha] et conclure.)

5)Remarque: Que pouvez vous dire si ABC est equilateral

# VI Partiels

UVSQ Mathématiques Partiel du module « enseignement des mathématiques »
Le 7 avril 2005

*La rédaction doit être précise, complète mais sans phrases inutiles, et doit mettre en évidence le raisonnement. Si vous utilisez un théorème ou une formule ou une propriété des programmes du secondaire, vous les citez (intégralement s'ils n'ont pas de nom) sans les redémontrer.*
*Les 4 exercices sont indépendants.*

**I Analyses d'exercices**

A) Résoudre brièvement et analyser l'exercice suivant (proposé dans un manuel de troisième à la fin du chapitre sur le théorème de Thalès et sa réciproque). On précisera les mises en fonctionnement attendues de ce théorème et/ou de sa réciproque.

*Tracer un triangle ABC. Placer les points O, E, I et F milieux respectifs des segments [BC], [AB], [AO] et [AC].*

*1° Montrer que les points E, I, F sont alignés et que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.*

*2° Calculer* $EI/BO$ *et* $IF/OC$.

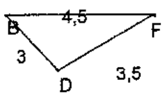
*3° La droite (OE) coupe la droite (BI) en K. Calculer* $KE/KO$.

*4° En déduire les valeurs des rapports* $OK/OE$ *et* $EK/EO$.

*5° La droite (CI) coupe la droite (OF) en L. Montrer que les droites (KL) et (BC) sont parallèles.*

B) Comment pouvez-vous interpréter les résultats suivants d'élèves de quatrième à une évaluation de fin d'année :

*On a donné aux élèves la figure ci-dessous avec la question : ce triangle est-il rectangle ?*
*Il est rappelé que les élèves doivent justifier leur réponse.*




*Il y a 23% de non réponses, 45% de résultats justes correctement justifiés.*

**II Un exercice sur le triangle**

Soit ABC un triangle quelconque. On suppose tracés le triangle, le cercle circonscrit au triangle et son centre O, la hauteur issue de A, et la perpendiculaire issue de O au côté (BC). On appelle A' le point d'intersection de [BC] et de cette perpendiculaire issue de O ; on appelle A'' le point d'intersection de cette droite et de l'arc BC situé de l'autre côté de O par rapport à (BC).

1) a) Indiquer comment on peut placer l'orthocentre du triangle sans tracé de droite supplémentaire.

b) Indiquer une propriété géométrique élémentaire des points A' et A''.

c) Indiquer comment on peut placer le centre de gravité (isobarycentre) du triangle sans surcharger la figure et donner au moins un moyen de contrôle grossier de cette construction.

*On justifiera les réponses par des propriétés qu'on ne démontrera pas.*

2) On appelle $h_a$ (resp. $h_b$, $h_c$) la longueur du segment $[AK_a]$ (resp. $[BK_b]$, $[CK_c]$) où $K_a$ $K_b$, $K_c$ sont les intersections des hauteurs issues de A, B et C et des côtés opposés (BC), (CA), (AB). Démontrer la formule suivante, où r est le rayon du cercle inscrit dans le triangle :

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

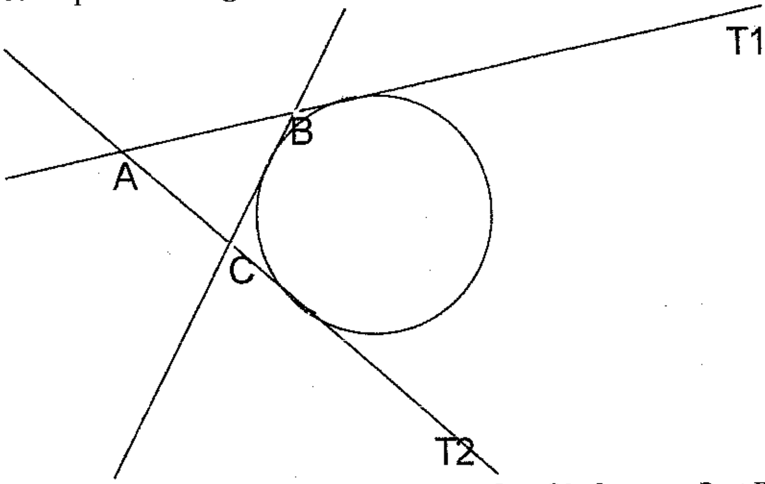
*Indication* : on pourra utiliser des relations métriques élémentaires dans un triangle.

3) On appelle P, Q, R les symétriques orthogonaux de O par rapport aux côtés (BC), (CA), (AB). Démontrer que l'aire du triangle PQR est égale à l'aire du triangle ABC.

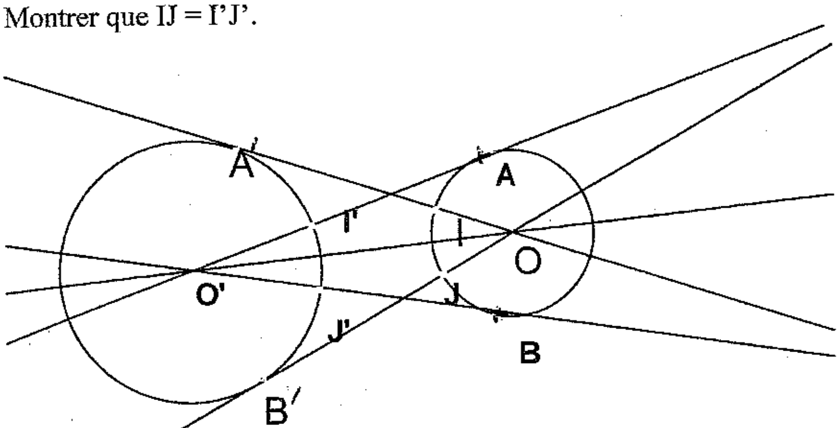
*Indication* : on pourra faire intervenir un triangle intermédiaire.

**III Un exercice sur les cercles**

1) Soit $\mathcal{G}$ un cercle fixe, A est un point extérieur à ce cercle d'où on mène les deux tangentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ au cercle. Une troisième tangente variable coupe respectivement les deux droites $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ en B et C de sorte que le cercle $\mathcal{G}$ est exinscrit dans ABC. Montrer que le périmètre du triangle ABC est fixe.




2) Soient deux cercles $C$ et $C'$ de centre O et O', de rayon R et R', extérieurs l'un à l'autre.
Quelle inégalité est vérifiée entre OO' et R+R' ?
Les tangentes (O'A) et (O'B) issues de O' à $C$ coupent $C'$en I' et J' ; les tangentes (OA) et (OB) issues de O à $C'$coupent $C$ en I et J (avec I et I' dans le même demi plan limité par (OO').
Montrer que IJ = I'J'.




*Indication* : On pourra utiliser comme intermédiaires des calculs d'aires des triangles O'IO et O'I'O.

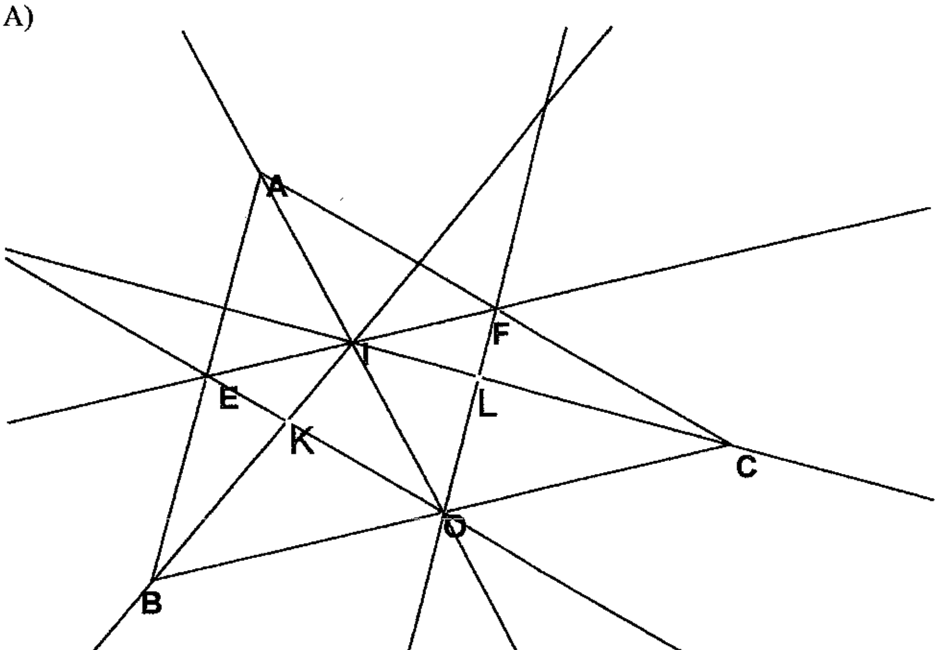
**IV Un problème de lieu**

*1) Question préliminaire*

Soit D et D' deux droites sécantes en X ; on fixe deux points sur D de part et d'autre de X, notés A et B et on appelle M leur milieu, supposé différent de X. Trois droites parallèles entre elles passant respectivement par A, B et M coupent D' en A', B' et M'. Montrer que M' est le milieu de [A'B'].

2) Soient [AB] un segment de milieu O et P un point variable de la médiatrice d du segment [AO].
On trace les perpendiculaires à (PB) en B et à (PA) en A. Lorsque ces deux droites sont sécantes, on appelle Q leur point d'intersection et on appelle I le milieu du segment [PQ].
Trouver les lieux de I et Q lorsque P décrit d.

**Corrigé succinct du partiel du 07/05/04**
**I Résolution et analyse d'exercices**
A)




1) D'après la réciproque du théorème de Thalès (EI) est parallèle à (BC) ainsi que (IF) : il en résulte que E,I,F sont alignés sur l'unique parallèle à (BC) passant par I, (EF).

| |
|---|
| On utilise deux fois de suite la réciproque (ou la droite des milieux) dans le même type de configuration, de manière non indépendante. Il s'agit de reconnaître les modalités d'application et de justifier un alignement des points par l'unicité de la parallèle à une droite passant par un point. |

Autres méthodes possibles : AEOF parallélogramme (aussi deux fois Thalès), homothétie.

2) D'après le théorème de Thalès qu'on peut appliquer, EI/BO = ½ = IF/OC.

| |
|---|
| C'est une application simple et isolée mais à faire deux fois de suite (répétée, de manière indépendante). |

3) <u>Il faut reconnaître une autre modalité d'application du théorème dans une configuration type « papillon » et utiliser ce qui précède</u> : KE/KO = EI/BO = ½.

4) Un calcul algébrique permet d'écrire OK/OE = 2/3, EK/EO = 1/3 <u>(mélange de deux cadres, géométrique et algébrique)</u>. On peut aussi reconnaître les centres de gravité de ABO et AOC.

5) Un raisonnement analogue permet d'établir par exemple que FL/FO = 1/3. On applique alors la réciproque du théorème de Thalès dans les triangles OEF et KLO pour obtenir le parallélisme cherché : (KL) // (EF) // (BC).

On peut aussi établir que IL/LC = IF/OC = ½ et utiliser la réciproque du théorème de Thalès dans les triangles IFL et LCO : on a directement : (KL)//(BC).

<u>Il y a donc un choix de méthodes et une étape à introduire seul : calcul d'un rapport non indiqué.</u>
<u>Mais la question 4 induit une méthode,</u> ce qui peut perturber certains.

| |
|---|
| Les questions ne laissent pas de place à des conjectures ; les élève ont à appliquer plusieurs fois le théorème et sa réciproque sans que ce soit explicitement fléché (mais ils le savent vu la place de l'exercice) ; la complexité tient davantage à des applications répétées et à la reconnaissance des configurations adéquates qu'à des adaptations plus compliquées : il y a peu de mélanges de domaines de travail, peu de connaissances anciennes, aucun intermédiaire à introduire, et ce n'est que dans la question 5) qu'il y a un choix de méthode et une étape à introduire seul. En revanche les questions ne sont pas toujours indépendantes. <u>La figure</u> joue un rôle important pour déterminer les « bons » rapports et peut-être pour certains élèves |

pour se faire une idée du résultat ou pour se contrôler : en mesurant. Le choix de prendre les milieux et pas un rapport quelconque contribue à cette possibilité de remplacer une activité mathématique par une autre.

B) Les élèves ne savent pas quoi essayer (1 sur 4) : la question est ouverte.
**L'expérience sur la figure n'est pas concluante ... évidemment – cela peut expliquer des non-réponses.**
Les élèves vont calculer $4{,}5^2$ et comparer avec $9 + 3{,}5^2$.
Pour cela ils doivent identifier le côté le plus long (la tête en bas) qui s'appelle ici BF. Est-ce que ça gêne certains ?
Ensuite ils ont à faire un calcul avec des décimaux – mais « ça tombe juste » : pas de problème avec le résultat donné par la calculatrice ! On aurait pu introduire une autre difficulté ici.
Enfin les deux résultats sont différents, cela amène à évoquer le théorème (la contraposée ou un raisonnement par l'absurde) et **pas la réciproque** pour conclure : si le triangle était rectangle on aurait égalité donc il n'est pas rectangle. C'est une source de difficulté !

**II Un exercice sur le triangle**

La première question nécessite un changement de point de vue : on doit interpréter des résultats géométriques en termes de tracés.

1) a) On prend le symétrique par rapport à (BC) du point d'intersection de la hauteur issue de A et du cercle (propriété).
b) A' est le milieu de [BC], A'' est le milieu de l'arc BC et il appartient à la bissectrice issue de A.
c) Ou bien on trace (AA') et (BB'), ou bien on trace l'intersection de (AA') et de (OH) – on vérifie que le point est au 2/3 de [AA'].
2) On sait que $S = \frac{1}{2} h_a a = \frac{1}{2} h_b b = \frac{1}{2} h_c c = pr$.
On calcule $1/h_a = a/2S$, $1/h_b = b/2S$, $1/h_c = c/2S$, ce qui donne pour la somme $p/S = 1/r$.

3) On introduit les projetés de O sur les côtés, A', B', C' qui sont les milieux des côtés.
Aire (PQR) = 4 Aire (A'B'C') = Aire (ABC) (propriété des aires vue en TD).

**III Un exercice sur les cercles**

1) On appelle P et Q les points de contact des tangentes issues de A.
On sait que AP = AQ ; ici cette longueur est constante et vaut $\sqrt{AO^2 - R^2}$.

On sait aussi que les segments de tangentes issues de B et C ont même longueur : on découpe [BC] en deux segments, en faisant intervenir le point de contact de (BC) et du cercle ; et on reconnaît deux segments respectivement de même longueur, [BP] et [CQ], sur chacune des autres tangentes issues de B et C au même cercle.
On obtient : Périmètre(ABC) = AB + AC + BC = AP + AQ = $2\sqrt{AO^2 - R^2}$.
Il y a d'autres méthodes.

2) Remarquons d'abord que (I'J') est perpendiculaire à (OO') :
soit par un argument de symétrie (la figure est symétrique par rapport à (OO'), soit parce que

a) (O'O) est bissectrice de BO'A : en effet les triangles O'OA et O'OB sont égaux car ils sont leurs trois côtés égaux, donc leurs angles homologues sont égaux d'où ce premier résultat.
b) O'I' = O'J' car ce sont des rayons, donc dans le triangle O'I'J' la bissectrice est médiatrice, d'où le résultat annoncé.

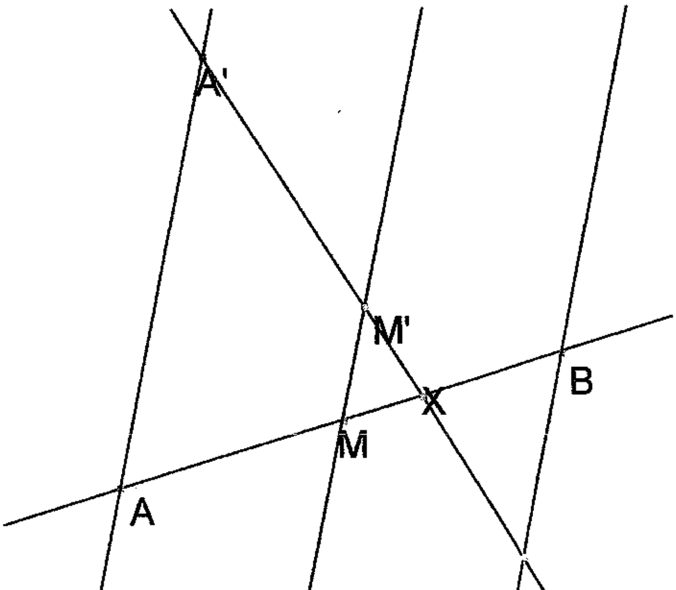
Il en est de même de (IJ) et (OO').

On a alors successivement, en exprimant de deux manières différentes l'aire d'un triangle comme demi-produit de la base par la hauteur :
Aire (O'I'O) = ½ OO' x ½ I'J' = ½ O'I' x OA = ½ RR'
Aire (O'IO) = ½ OO'x ½ IJ = ½ OI x O'A' = ½ RR'

Ces deux aires sont donc égales, donc IJ = I'J'

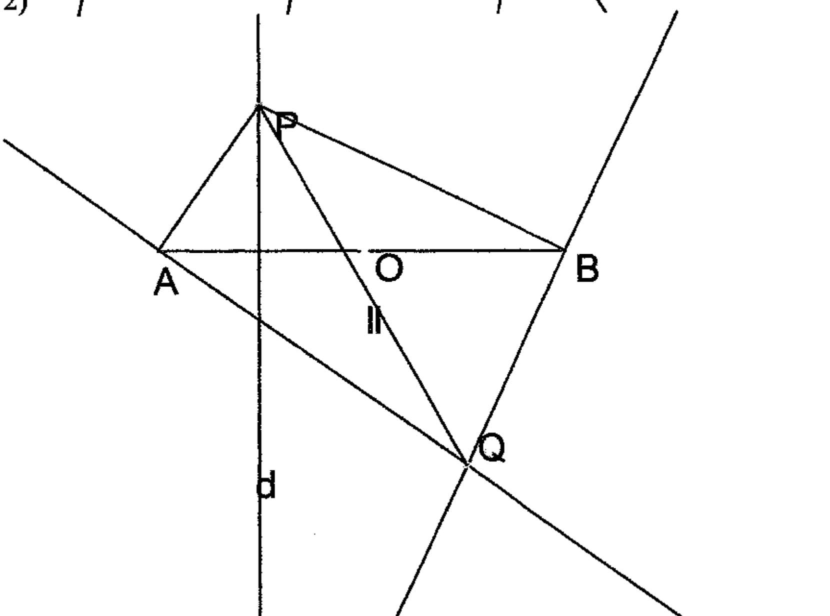
**IV Un lieu**

1)




Le milieu est conservé par projection. Ou théorème de Thalès généralisé.
Ou théorème de Thalès et travail algébrique sur les rapports.

2)




IA = IB (propriété des médianes des triangles rectangles)
Donc I appartient à la médiatrice de [AB].
Réciproquement si I est un point de cette médiatrice, on trace le cercle de centre I qui passe par A et on obtient deux points P puis Q qui conviennent. Le lieu de I est donc la médiatrice de [AB].

Par projection orthogonale, Q se projette au milieu q de [OB] (cf.. première question). Il appartient donc à la médiatrice de [OB].
Réciproquement, si Q est en q impossible. Sinon, les perpendiculaires à (QA) en A et (QB) en B se coupent en P qui doit être sur la médiatrice de [AO] et vérifier le fait que Q est à l'intersection des perpendiculaires à (PA) et (PB) en A et B. On refait alors la démonstration directe en échangeant P et Q, qui ont des rôles analogues : P a bien les propriétés attendues.
Le lieu de Q est donc la médiatrice de [OB] privée de q.

**Analyses d'exercices (complément)**

Souvent un travail question par question évite une énumération fastidieuse et peu précise, qui n'informe pas sur le travail attendu des élèves et peut même dériver sur des généralités sans intérêt.

Rappelons qu'on analyse si les élèves ont à travailler sur des connaissances
- anciennes ou non
- fléchées ou non (indiquées ou non)

S'agit-il d'applications simples et isolées ou y a-t-il des adaptations :
- reconnaissances de modalités d'applications
- plusieurs fois (indépendant ou non)
- mélanges (connaissances, cadres), changements de points de vue, relations
- introduction d'intermédiaires
- introduction d'étapes
- possibilités de choix
- nécessité de liens entre questions

On dégage ce qui peut être travaillé finalement dans l'exercice

On examine le rôle de la figure et l'énoncé en se demandant si certains élèves peuvent faire d'autres activités que celles qui sont attendues. On essaie de réfléchir à un énoncé permettant d'éviter cela.
*Exemples : Pour trouver un résultat, deviner sur la figure ou mesurer ou induire à l'envers ou deviner à partir d'un « surfléchage » de l'énoncé.*
*Pour montrer que des triangles sont semblables, utiliser la deuxième question (du type xy = zt) pour reconstituer les bons candidats.*
*Données numériques très particulières.*

UVSQ Mathématiques Examen du module « enseignement des mathématiques »
Le 15 juin 2005

*La rédaction doit être précise, complète mais sans phrases inutiles, et doit mettre en évidence le raisonnement. Si vous utilisez un théorème ou une formule ou une propriété des programmes du secondaire, vous les citez (intégralement s'ils n'ont pas de nom) sans les redémontrer.*

Résoudre les deux exercices suivants ainsi que deux exercices parmi les 8 situations proposées (S1 à S8). Les questions ajoutées aux textes proposés en séances sont indiquées en italique.

**I Un énoncé d'exercice à analyser sur « triangles semblables »**

*Résoudre l'exercice suivant, proposé dans un manuel de seconde dans le chapitre triangles semblables pour démontrer que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit d'un triangle sont alignés sur la droite d'Euler (la question 6 précise l'analyse qui est demandée ici).*

ABC est un triangle non équilatéral.
On appelle A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB], $A_1$, $B_1$ et $C_1$ les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, G est son centre de gravité et H son orthocentre.
La droite (OG) coupe la droite ($AA_1$) en K et la droite ($BB_1$) en K'.

1) Démontrer que les triangles AGK et A'GO sont semblables.
2) Démontrer que les triangles BGK' et B'GO sont semblables.
3) Déduire des résultats précédents une relation entre les longueurs GK et GO, puis entre GK' et GO.
4) Que peut-on en conclure concernant les points K, K' et H ?
5) En déduire que les points O, G et H sont alignés et que GH = 2GO.
6) Quels rôles joue la figure dans le travail proposé ?
   Quelle est la démarche pour démontrer l'alignement ? Quelles propriétés géométriques « anciennes » sont utilisées ?
   Que pensez-vous de cette méthode pour démontrer l'alignement cherché ?

**II Un exercice sur les aires**

Soient ABCD un parallélogramme et I un point de [AC], distinct de A et C.
La parallèle à (AD) passant par I coupe (AB) en E et (CD) en G. La parallèle à (AB) passant par I coupe (BC) en F et (AD) en H.

1) Montrer que aire (ADC) = aire (ABC).
2) Montrer que aire (HIGD) = aire (EIFB).
3) Montrer que les droites (EH) et (FG) sont parallèles.
4) Montrer que (AC) coupe [EH] et [FG] en leurs milieux respectifs.
5) Montrer que les droites (EF), (AC) et (HG) sont concourantes ou parallèles.

**S1 <u>Droite d'Euler</u>**

Soit ABC un triangle non équilatéral. On appelle H l'orthocentre du triangle ABC, G le centre de gravité du triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Soient A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

**Faire une figure.**

1) Soit un point M vérifiant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
a) Montrer que M est l'orthocentre du triangle ABC.
b) En déduire que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
c) En déduire que O, G, H sont alignés (on appelle droite d'Euler la droite correspondante).

2) Soit l'homothétie h de centre G et de rapport $-1/2$.
a) Montrer que le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par l'homothétie h
b) Trouver l'image de H par l'homothétie h.
c) En déduire que O,G,H sont alignés.

3) Soit A'' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle ABC.
a) Montrer que BHCA'' est un parallélogramme.
b) Trouver le centre de gravité du triangle AHA''.
c) En déduire que O, G, H sont alignés.

*4) **Question complémentaire** Donner la position respective des points O,G,H sur la droite (et faire un dessin).*

**Exercice d'application**

Soient C un cercle fixe, [AB] une corde fixe de ce cercle et M un point qui décrit C – {A,B}.

1) Quel est le lieu de l'isobarycentre G du triangle MAB ?
2) Quel est le lieu de l'orthocentre H du triangle MAB ?

**S2 <u>Symétriques de l'orthocentre d'un triangle</u>**

Soient ABC un triangle, H son orthocentre et Ω son cercle circonscrit de centre O.
Soit I le milieu de [BC].

1) Faire une figure
2) Soit $H_2$ le symétrique de H par rapport à I.
Le but de cette question est de montrer $H_2$ appartient à Ω.
a) En considérant le triangle $AH\,H_2$, montrer que O est le milieu de $[A\,H_2]$.
b) Conclure.

3) Soit $H_1$ le symétrique de H par rapport à la droite (BC).
On souhaite maintenant montrer que $H_1$ appartient à Ω.
a) En étudiant le triangle $H\,H_1\,H_2$, montrer $A\,H_1\,H_2$ est un triangle rectangle en $H_1$.
b) Conclure.

*4) **Question complémentaire** : Montrer directement que si $H_1$ appartient à Ω, $H_2$ aussi et réciproquement.*

**S3 La formule de Héron**

Soit ABC un triangle de côtés de longueurs respectives a =BC, b = AC, c = AB.
On appelle p le demi-périmètre du triangle et S sa surface. Soit r le rayon du cercle inscrit dans le triangle.

**Le but de cet exercice est de montrer que S** $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

1)On note $\widehat{C}$ l'angle de sommet C du triangle. On rappelle que S = ½ ab sin $\widehat{C}$.

a) Exprimer $S^2$ en fonction de $\cos\widehat{C}$. En utilisant une formule d'Alkashi, montrer que $(1 + \cos\widehat{C}) = a^2+b^2-c^2+2ab/2ab$ et $(1 - \cos\widehat{C}) = -a^2-b^2+c^2+2ab/2ab$

b) En utilisant une identité remarquable, trouver l'expression de S.

2)Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC (H appartient à (BC)).
On rappelle que S = ½ AH. a.

a) Exprimer BH en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC.
b) En utilisant une identité remarquable, exprimer $AH^2$ en fonction des longueurs des côtés du triangle.
c) En déduire la formule de Héron.

3)Soit r' le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A, cercle de centre J. Soient L et K les points de contact de [AB] et respectivement du cercle inscrit et du cercle exinscrit de centre J.
FAIRE UNE FIGURE
On rappelle que S = pr = (p-a)r'.

a) Montrer que $S^2$ = p(p-a)rr'.
b) Montrer que BL = p-b et BK = p-c.
c) Que peut-on dire des angles $\widehat{LBI}$ et $\widehat{BJK}$ ? En déduire que $\dfrac{r}{p-b} = \dfrac{p-c}{r'}$
d) En déduire la formule de Héron.

**Application** : démontrer que l'aire d'un triangle est inférieure ou égale à $p^2/3\sqrt{3}$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

***Question complémentaire***
*Démontrer que S = pr = (p-a)r'.*

## S4 Triangle isocèle, équilatéral

### I. Triangle isocèle

1) Soit ABC un triangle isocèle en A. On appelle $H_1$, $H_2$, $H_3$ les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C.
A)Faire une figure
B)Montrer que $BH_2 = CH_3$.
C) On appelle $M_1$ le pied de la médiane issue de A. Placer $M_1$ sur la figure sans tracer la médiane. Justifier.
2) ABC n'est plus supposé isocèle (en A).
Montrer que si la condition de la question 1)B) est vérifiée, ou si $M_1$ coïncide avec $H_1$, alors ABC est isocèle (en A).
3)On peut échanger A et B, puis A et C (on appellera $M_2$ et $M_3$ les pieds des médianes issues respectivement de B et C). Refaire le raisonnement précédent et conclure en donnant des conditions (nécessaires) et suffisantes pour qu'un triangle soit isocèle.

### II Triangle équilatéral.

1) On veut montrer que la somme des distances d'un point intérieur à un triangle équilatéral aux trois côtés du triangle est constante.
Tracer ABC un triangle équilatéral de côté a et placer un point M intérieur au triangle. Soient A', B', C' les projetés orthogonaux de M respectivement sur [BC], [AC], [AB].
A)Exprimer l'aire $S_1$ de ABM, l'aire $S_2$ de ACM et l'aire $S_3$ de BCM.
B)En déduire l'aire S de ABC.
C)Conclure.
2)On veut montrer que MC = MA + MB.
Tracer ABC un triangle équilatéral de côté a et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit de centre O et de rayon R.
Placer un point M sur le petit arc $\overset{\frown}{AB}$.
A)Déterminer la mesure des angles $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMA}$.
B)Exprimer $MC^2$ de deux manières différentes. En déduire MC.

***Question complémentaire***
*Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de demi-périmètre p en fonction de p. Montrer que le triangle équilatéral est le triangle d'aire maximale parmi les triangles de demi-périmètre p.*

## S5 Trapèze complet

Soit ABCDE un trapèze complet tel que les droites (BE) et (CD) sont parallèles. On appelle O le point d'intersection de (BD) et (CE).

I) Montrons à l'aide de deux méthodes, que si on appelle I et J les points d'intersection de (AO) avec [BE] et [CD], I est le milieu de [BE] et J est le milieu de [CD].

a) Ecrire des relations déduites du théorème de Thalès dans des triangles convenables.

b) En considérant l'homothétie de centre A qui transforme D en E, montrer que I est le milieu de [BE]. En déduire que J est le milieu de [CD].

II) On suppose maintenant que I et J sont les milieux respectifs de [BE] et [CD]. Montrons que les points A, I, J, O sont alignés.

a) A l'aide d'une première homothétie montrer que A, I, J sont alignés.

b) A l'aide d'une deuxième homothétie, montrer que O, I, J sont alignés.

c) Conclure.

III) Application : deux constructions, **à la règle seule**.

a) Soient (D) une droite, A et B deux points de (D) et I le milieu de [AB].
Tracer par n'importe quel point M hors de (D) la parallèle à cette droite.

b) Soient (D) une droite, A et B deux points hors de (D) tels que (D) et (AB) soient deux droites parallèles distinctes. Construire le milieu I du segment [AB].

***Question complémentaire***
*Soit ABCDE un trapèze complet. On appelle O le point d'intersection de (BD) et (CE), I et J les milieux respectifs de [BE] et [CD].*
*Montrer que si trois des quatre points A, I, J O sont alignés les droites (BE) et (CD) sont parallèles.*

## S7 A propos de deux cercles

Soient C et C' deux cercles de centres O et O' et de rayon R et R'.

1) Montrer que si $R \neq R'$, il existe deux homothéties qui transforment C en C'.

2) ***Question complémentaire*** *: a) traiter le cas particulier où les cercles ont même rayon.*
*b)Construire les tangentes communes aux deux cercles (dans les cas où c'est possible) en utilisant les transformations précédentes.*

On dit que deux cercles sécants sont orthogonaux si leurs tangentes en les points d'intersection sont perpendiculaires. Montrer que c'est équivalent à
$OO'^2 = R^2 + R'^2$
(On montrera l'implication et sa réciproque)

3) Soit M un point du plan ; on se donne une droite passant par M qui coupe C en A et B.

a) Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 = P$
(on pourra par exemple introduire le point I milieu de [AB] )

On appelle puissance de M par rapport à C ce nombre P, qui ne dépend donc pas de la sécante menée par M.

b) Ecrire une autre expression de P lorsque on peut mener par M une tangente au cercle en T (en fonction de MT).

c) Trouver l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à deux cercles donnés. On appelle J le projeté orthogonal de M sur [OO'].

d) Montrer que deux cercles sont orthogonaux si et seulement si la puissance de O par rapport à C' est égale à $R^2$ (même chose avec O', C et R').

## S6 La relation d'Euler

Exercice n°1 : Soient ABC un triangle quelconque, $\Gamma$ son cercle circonscrit de centre O et de rayon R et $\Phi$ son cercle inscrit de centre I et de rayon r. On note N, P et Q les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [AC]. On pose a = BC, b = AC, c = AB. S est l'aire du triangle et p le demi-périmètre du triangle.

**Le but de cet exercice est de montrer** que $OI^2 = R^2 - 2rR$ (c'est **la relation d'Euler**).

1. Montrons que I est le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c). Soit G barycentre de (A,a), (B,b), (C,c), on va montrer que G = I.

(a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(b) En déduire que $\overrightarrow{AG}$ est la somme de deux vecteurs de même norme et G appartient à la bissectrice de BAC.

(c) En déduire que I = G.

2.On va montrer que $OI^2 = R^2 - 2rR$.

Rappels : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$ ; abc = 4RS, et S = pr.

(a)Exprimer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

(b)Prouver que = $R^2 - c^2/2$. En déduire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$.

(c)En déduire que $OI^2 = R^2 - 2rR$.

3.Une autre façon de montrer que I est le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c).

(a)Soit $A_1$ le point d'intersection de la bissectrice de BAC et de [BC]. On trace la parallèle à $(AA_1)$ passant par C, elle coupe (AB) en D. Soit $B_1$ le point d'intersection de la bissectrice de ABC et de [AC].

i.Montrer que le triangle ADC est isocèle.

ii. Montrer que $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b}$ et que $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$

(b)On remarque que $\overline{BA_1} \times \overrightarrow{CA_1} + \overline{CA_1} \times \overrightarrow{A_1B} = \vec{0}$. En déduire que $A_1$ est le barycentre de (B,b) (C,c). De même montrer que $B_1$ est le barycentre de (A,a), (C,c).

(c)Soit G le barycentre de (A,a), ($A_1$,b+c) et de (B,b), ($B_1$,a+c). Utiliser G pour montrer que I est le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c).

**Exercice n°2* (à ne pas traiter) :** On se place dans les mêmes conditions que l'exercice précédent. Soit A', B' et C' les points de contact du cercle $\Phi$ et des côtés respectifs [BC], [AC], [BA].

1.Calculer les distances BA', CA' et AB'.

2. En déduire à l'aide du théorème de Céva rappelé ci-dessous que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Théorème de Céva : $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$

***Question complémentaire : démontrer le théorème de Céva .***

Complément* (à ne pas traiter) : il est possible de démontrer que lorsqu'on a 2 cercles, $\Gamma$ de centre O et de rayon R et $\Phi$ de centre I et de rayon r, intérieur au premier, tout point de $\Gamma$ est le sommet d'un triangle inscrit dans $\Gamma$ et circonscrit à $\Phi$ ssi $OI^2 = R^2 - 2rR$.

## S8 Cercle d'Euler et quadrilatères convexes inscrits dans un cercle

### I Le cercle d'Euler

Soient ABC un triangle, O,G,H respectivement le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle. Soient A', B', C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB]. Soit $\gamma$ le cercle circonscrit à ABC de rayon R et $\Gamma$ le cercle circonscrit à A'B'C' de rayon R'.

1)En considérant l'homothétie h de centre G et de rapport $-1/2$ montrer que R' = R/2.

2)En utilisant les relations vectorielles induites par les positions respectives des points O, G, H sur la droite d'Euler ainsi que l'homothétie h, montrer que O', centre de $\gamma$, est le milieu de [OH] et qu'il appartient donc à la droite d'Euler de ABC.

3)Soit A",B",C" les milieux respectifs de [AH],[BH]et[CH]. On cherche à montrer que A",B",C" appartiennent à $\Gamma$.

a) Déduire de la question précédente une deuxième homothétie h', tel que h'(O)=O'.

b) Trouver l'image de ABC par h'.

c) Conclure.

4)Soit Ha, Hb, Hc les pieds respectifs des hauteurs du triangle issues de A,B et C.

Montrer que Ha, Hb, Hc appartiennent à $\Gamma$.

Indication : Prouver que la droite parallèle à (OA') passant par O' est la médiatrice de [A'Ha].

5)Remarque: Que pouvez vous dire si ABC est équilatéral ?

### II Quadrilatère convexe inscrit

Soit ABCD un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle.

On pose AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = v, BD = u et on note les angles du quadrilatère respectivement A, B, C, D du nom de leur sommet.

A.Montrer que uv = ac + bd

1. En considérant un point I de [AC] vérifiant $\widehat{IBC} = \widehat{ABD}$, montrer que ABD et BCI sont deux triangles semblables.
2. Montrer que ABI et BCD sont deux triangles semblables.
3. Conclure.

B. Montrer que $\cos \hat{A} = \dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$

C. Montrer que $\sin \hat{A}/2 = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}$

***Question complémentaire*** *: en remarquant que* $\sin\hat{C}/2 = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}}$*, montrer que*

*A(ABCD)* $= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

## VII Stage, projets, soutenances

Les étudiants, seuls ou à deux, suivent un enseignant[4] dans ses classes pendant 25 heures (en moyenne).
Ils doivent rédiger à la suite de ce stage un projet qui comprend deux parties : une rédaction des « élémentaires du collège » avec des figures réalisées sur logiciel, un résumé d'une partie du stage.
Dans ce résumé ils présentent leur stage et exposent deux heures d'exercices. Ils donnent les énoncés, les corrections, l'analyse qu'ils ont appris à faire et comparent cette analyse avec ce qu'ils ont pu observer dans la réalité.
La soutenance est collective et permet de mutualiser les diverses expériences. Les étudiants présentent en effet leur stage, et développent une question rédigée dans le projet.

[4] Nous avons joint en annexe la lettre que nous envoyons à ces collègues.

Annexes

Elément d'Euclide (Traduction Vitrac).

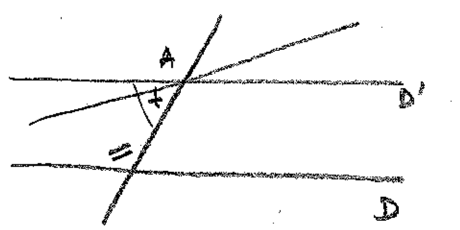
**Définitions**
1.Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
2.Une ligne est une longueur sans largeur.
3.Les limites d'une ligne sont des points.
4.Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.
5.Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6.Les limites d'une surface sont des lignes.
7.Une surface plane est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle.
8.Un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.
9.Et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé rectiligne.
10.Et quand une droite ayant été élevée sur une droite fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun des ces angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.
11.Un angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.
12.Un angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.
13.Une frontière est ce qui est limite de quelque chose.
14.Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontières.
15.Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique {celle appelée circonférence} par rapport à la quelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure sont {jusqu'à la circonférence} égales entre elles.
16.Et ce point est appelé centre du cercle.
17.Et un diamètre du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.
18.Un demi-cercle est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui ; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.
19.Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites ; trilatères : celles qui sont contenus par trois droites, quadrilatères par quatre ; multilatères par plus de quatre.
20.Parmi les figures trilatères est un triangle équilatéral celle qui a les trois côtés égaux ; isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement ; scalène celle qui a les trois côtés inégaux.
21.De plus parmi les figures trilatères est un triangle rectangle, celle qui a un angle droit ; obtusangle,c elle qui a un angle obtus ; acutangle celle qui a les trois angles aigus.
22.Parmi les figures quadrilatères est un Carré celle qui est à la fois équilatérale et rectangle ; est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale ; un losange celle qui équilatérale mais non rectangle ; un rhomboïde celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns les autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle ; et que l'on appelle trapèzes les quadrilatères autres que ceux-là.
23.Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas ni d'un côté" ni de l'autre.

**DEMANDES D'EUCLIDE** Où est le 5e postulat?

1) Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2) Et de prolonger continûment une ligne droite limitée.
3) Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.
4) Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5) Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

**NOTIONS COMMUNES** Traduire algébriqt

1) Les choses égales à une même troisième sont aussi égales entre elles.
2) Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.
3) Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4) Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.
5) Et les doubles du même sont égaux entre eux.
6) Et les moitiés du même sont égales entre elles.
7) Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
8) Et le tout est plus grand que la partie.
[9) Et deux droites ne contiennent pas une aire.]



Che(r)e collègue

Je me permets de vous écrire pour préciser quelques éléments à propos du stage que vous avez eu la gentillesse d'accorder à M.

Ces étudiants suivent un certificat de licence préprofessionnelle intitulé « faire de la géométrie, faire faire de la géométrie ».

Nous avons d'une part révisé la géométrie élémentaire du collège et abordé celle du lycée en essayant d'organiser les connaissances ; nous avons introduit quelques outils d'analyse des énoncés proposés aux élèves (nature et « qualité » des connaissances mises en fonctionnement) ; nous avons d'autre part fait travailler les étudiants entre eux : un groupe de 4 propose un exercice aux autres et les fait travailler puis corrige. Enfin nous avons un peu utilisé un logiciel de géométrie dynamique.

Notre objectif est de compléter ces éléments par un regard sur les activités des élèves en classe.

En ce qui concerne les activités de mes étudiants dans vos classes, je n'ai pas besoin qu'ils « prennent la classe » mais seulement qu'ils observent, surtout les séances d'exercices ; cependant s'ils réclament davantage, je vous laisse seul juge : ils ne sont qu'en licence et il n'est pas évident de les laisser faire - c'est sans doute plus facile l'année suivante, lorsqu'ils préparent le capes.

Leur seule tâche, en terme d'évaluation, consiste à relever les énoncés de deux heures d'exercices et à en faire l'analyse, comme nous avons appris à le faire depuis le début de cet enseignement, puis à comparer (superficiellement) cette analyse avec ce qu'ils auront pu observer en classe. Le tout fera l'objet d'un rapport de stage et sera « soutenu » collectivement.

Par ailleurs je vous saurai gré de répondre à certaines questions précises que nous avons abordées au fil de nos séances :

Comment choisissez-vous vos énoncés ?

Quelles normes de rédaction donnez-vous à vos élèves ?

Comment choisissez-vous vos contrôles (en relation avec ce qui a pu être fait en classe) ?

Que réservez-vous au travail à la maison (celui qui est prescrit) ?

Quelle utilisation faites-vous des logiciels de géométrie ?

Je vous remercie beaucoup de votre proposition d'accueil et reste à votre disposition si vous avez des questions à me poser.

Bien cordialement Aline Robert

## TITRE :

Un module de licence préprofessionnel: faire de la géométrie, faire faire de la géométrie

## AUTEUR/S :

Aline Robert

## RESUME :

On présente dans cette brochure un cours de 48 heures TD complété par un stage en classe. Ce module de licence se veut une tentative de mettre en place chez les futurs enseignants divers moyens pour organiser leurs connaissances et pour savoir analyser les exercices du point de vue des connaissances à utiliser, au moins en géométrie. Il a aussi pour ambition de faire retrouver aux étudiants le niveau du <<très bien>>, aussi bien à l'oral qu' à l'écrit.
Enfin, il s'agit de préparer ces futurs enseignants à réfléchir...aux élèves, en apprenant à analyser les énoncés d'exercices en fonction des activités qu'ils peuvent provoquer chez les élèves et en allant en stage dans des <<vraies>> classes. Cette partie de l'enseignement sera reprise et approfondie en préparation au Capes et en PLC2.
La formation comprend ainsi deux moments, coordonnés : au début on met en place un travail à l'Université sur les connaissances et les activités mathématiques, en géométrie, puis on organise des observations en classe (stage filé), en relation avec la première partie. Un rapport de stage, exposé collectivement, permet de finaliser l'ensemble.

## MOTS CLES :

Analyses d'énoncés en géométrie, théorème de Thalès, aires.

IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot
Directeur de publication Christophe Hache – Reprographie Nadine Locufier
www.iremp7.math.jussieu.fr
Dépôt légal :juin 2005 – ISBN : 978-2-86612-266-6