Le séminaire national de didactique des mathématiques est organisé par l'ARDM. Il a pour but de permettre la diffusion régulière des recherches nouvelles ou en cours, et de favoriser les échanges et débats au sein de la communauté francophone de didactique des mathématiques.

Différentes rubriques permettent de préciser les diverses fonctions du séminaire national :

- « Présentation de thèses » : beaucoup des thèses récemment soutenues font l'objet de présentations au séminaire national. C'est non seulement un moyen de faire connaître ces travaux mais aussi de favoriser l'intégration des jeunes chercheurs au sein de la communauté. On retrouvera ici les textes des interventions de 2009 de Caroline Bulf, Christine Chambris, Léa Cartier et Fernand Malonga Moungabio

- « Travaux en cours » : il s'agit d'assurer la diffusion de travaux de recherche engagés par des chercheurs en didactique. La diffusion de ces travaux non encore aboutis permet de les mettre en débat dans la communauté et d'informer sur les nouvelles tendances. Cécile Ouvrier Buffet, Sophie Gobert, Aurélie Chesnais, Anne Dumail, Julie Horoks, Monique Paries, Aline Robert proposent dans les pages suivantes un texte correspondant à leur présentation de 2009.

- « Revue de questions » : il s'agit de faire le point sur un thème ou une question de recherche. Cette rubrique fait l'objet d'une commande de la part des organisateurs du séminaire national : ils sollicitent un ou plusieurs chercheurs directement concernés par le thème ou la question de recherche choisie. On retrouve dans les actes les textes de Marie Jeanne Perrin et Marie Hélène Salin (didactique de la géométrie), et Ghislaine Gueudet et Fabrice Vanderbrouck (TICE et appren - tissage des mathématiques).

- « Ouverture sur... » : cette rubrique a pour objectif d'illustrer des ouvertures de la didactique des mathématiques sur d'autres domaines de recherche ou plus extérieurs (tournés vers des usages sociaux de la didactique). Denise Grenier présente un texte dans ce cadre.

- « Colloquium de didactique des mathématiques » : une fois par an (en général, le vendredi du séminaire d'octobre), en collaboration avec la Commission Française sur l'Enseignement des Mathématiques (CFEM), un invité de marque présente une revue de ses travaux. Cette formule vise à attirer un public plus large que la seule communauté de didactique des mathématiques sur des questions ayant trait à l'enseignement des mathématiques. La session 2008 du colloquium avait été reportée en janvier 2009 pour des raisons techniques, la session 2009 a eu lieu aux dates habituelles, ces actes contiennent donc deux textes de colloquium (Gérard Vergnaud et Gilbert Arsac).

Il nous faut ici remercier fortement les divers intervenants qui ont contribué au bon fonctionnement et au dynamisme du séminaire.

L. Coulange et C. Hache

Séminaire de janvier 2008
18 et 19 janvier 2008

COLLOQUIUM DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES 2008
Activité, développement, représentation 7
Gérard Vergnaud

Mathématiques discrètes : un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques ..31
Cécile Ouvrier-Buffet
IUFM de Créteil-Paris 12
DIDIREM ; ERTé Maths à Modeler

Didactique de la géométrie
Peut-on commencer à faire le point ? 47
Marie-Jeanne Perrin-Glorian
Laboratoire André Revuz, Université Paris-Diderot, Université d'Artois,
Marie-Hélène Salin
Laboratoire LACES, équipe DAESL, Université Victor Segalen Bordeaux 2

Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège 83
Caroline Bulf, bulf@math.jussieu.fr
Université Paris Diderot, Equipe DIDIREM

Séminaire de mars 2009
27 et 28 mars 2009

Conditions a priori sur les ostensifs du milieu pour faire signe d'un objet de savoir. 109
Sophie Gobert
Université de Nantes, Laboratoire du CREN

Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels. 139
Christine Chambris
Laboratoire André Revuz (ex DIDIREM)
IUFM de Versailles – Université de Cergy-Pontoise

Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes 161
Denise GRENIER,
Équipe Combinatoire et Didactique de l'Institut Fourier,
ERTé « Maths-à-modeler » et I.R.E.M.
Université Joseph Fourier, Grenoble

Présentation de thèse : Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation 179
Léa Cartier
ERTé Maths à modeler
Institut Fourier, Université Joseph Fourier, Grenoble

Interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire en France : cas des équations différentielles du premier ordre 193
Fernand Malonga Moungabio

Laboratoire André Revuz
Équipe DIDIREM – Université Paris Diderot

Technologies, enseignement et apprentissage des mathématiques : revue de questions..................219
Ghislaine Gueudet (CREAD, IUFM Bretagne UBO)
Fabrice Vandebrouck (LDAR, Université Paris Diderot)

Séminaire d'octobre 2009
16 et 17 octobre 2009

COLLOQUIUM DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES 2009
La démonstration : une logique en situation ?..243
gilbert Arsac
Université Claude Bernard Lyon, IREM et LIRDHIST

De la circulation des savoirs mathématiques dans la classe aux activités des élèves et à leurs productions en contrôle : questionner les relations, questionner les différences.............................267
Chesnais A., Dumail A., Horoks J., Pariès M., Robert A.
Laboratoire de Didactique André Revuz
Universités : Paris 7 – Denis Diderot, Paris 12, Cergy Pontoise, Arras

Annexe
Annonces des séminaires 2009

.... 303

Séminaire de janvier 2008
18 et 19 janvier 2008

COLLOQUIUM DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES 2008
Activité, développement, représentation

Gérard Vergnaud

Le texte qui suit a été présenté oralement le 16 janvier 2009 lors du colloquium organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM). En dépit d'une réécriture, il conserve les caractères d'un exposé oral.

Je vous remercie de m'avoir invité à discuter avec vous de mon travail, et je voudrais en profiter pour aborder des questions d'orientation, qui se sont posées à moi depuis le début de mes recherches, même si certaines de ces questions n'ont parfois trouvé de réponse dans ma conscience qu'au cours des dernières années. La prise de conscience est un processus plus lent et plus laborieux qu'il ne peut y paraître, même si ce processus est aussi ponctué par des « eurêka » importants, mais imprévus, et limités dans leur portée. Pour évoquer ces questions d'orientation je prendrai des exemples, de manière que mon propos ne soit pas un discours général de plus, et que vous puissiez vous représenter plus facilement la signification de mon propos.

Je suis psychologue et j'ai soutenu ma thèse sous la direction de Piaget en 1968 ; la soutenance était prévue pour le mois de mai 1968, et elle a été reportée en septembre, vous imaginez pourquoi. Parmi les questions qui me préoccupaient au début de ma carrière scientifique, figurait en bonne place la question du rapport du sujet avec le réel, c'est-à-dire la vieille question philosophique du réalisme, de l'idéalisme, du nominalisme, de l'objectivité. Le behaviorisme influençait encore largement les psychologues, et offrait, comme modèle princeps de la relation du sujet au réel, le couple stimulus/réponse : notamment pour conduire des recherches empiriques. Aujourd'hui je voudrais proposer, comme une meilleure théorisation, le couple situation/schème. Ce couple théorique est plus juste et plus fécond, non seulement que le couple stimulus/réponse, mais aussi que le couple objet/sujet qui nous vient de la philosophie, et qui a été emprunté par de nombreux chercheurs, en psychologie et en didactique, sans discussion suffisante d'ailleurs.

La première raison en faveur du couple situation/schème est que, si la connaissance est adaptation, comme Piaget et quelques autres grandes figures du passé nous invitent à le penser, il faut en tirer la leçon : ce qui s'adapte ce sont des schèmes, c'est-à-dire des formes d'organisation de l'activité, et ils s'adaptent à des situations. A cette raison théorique s'ajoute une raison pratique et méthodologique : situations et schèmes sont un cadre favorable au recueil de données empiriques. Cette dernière raison vaut notamment à l'encontre du couple sujet/objet, qui est essentiel mais très général, et qui n'est pas rapporté à une intention particulière du sujet ou à une question qu'il se poserait ; de telle sorte qu'on est démuni pour recueillir des données spécifiques suffisamment précises et intéressantes sur le contenu de l'activité. Loin de moi l'idée que ce serait seulement les formes d'organisation de l'activité qui s'adapteraient. L'adaptation concerne aussi la représentation des objets, et le sujet pris dans sa globalité. Mais ce sont les formes d'organisation de l'activité, les schèmes, qui sont au centre du processus d'assimilation et d'accommodation : par le choix de l'information pertinente et par l'action, par les choix subséquents de l'information et de l'action. Le décours temporel de l'activité est une source inépuisable de données, et l'on manque d'ailleurs de moyens simples et économiques pour l'étudier bien.

Un schème est beaucoup plus qu'une réponse, c'est une organisation de l'activité. Une situation est beaucoup plus qu'un simple stimulus : c'est un ensemble d'objets, de propriétés et de relations, pour lequel le sujet s'invente une activité, éventuellement avec l'aide d'autrui. Un stimulus n'est que le changement de valeur d'une des conditions de la situation ; or l'activité porte tout autant sur les conditions qui ne changent pas que sur celles qui changent. Cette raison m'a conduit à mettre la conceptualisation au centre de mes préoccupations. En effet la conceptualisation est toujours présente dans l'action, même si elle ne dit pas son nom et si elle reste largement implicite. Le couple stimulus/réponse, purement associationniste, ne permet pas d'étudier la conceptualisation du réel contenue dans les compétences complexes, lesquelles sont le défi de l'éducation et du travail, et sont constitutives de la culture et de l'expérience. Cela n'a pas empêché certains behavioristes, comme Skinner, d'appliquer à l'éducation une idéologie héritée du dressage des rats et des pigeons. L'éducation ne s'en est pas mieux portée.

Piaget n'a pas inventé le concept de schème, mais l'a emprunté à Kant et à certains psychologues néokantiens du début du $20^{\text{ème}}$ siècle, qui ont abondamment nourri ce concept, mais avec une vision inspirée principalement par l'exemple de la perception (Revault d'Allonnes). C'est Piaget qui a développé le mieux, et de la manière la plus systématique, une conception du schème comme activité, en particulier avec son étude de l'imitation et de l'intelligence chez le bébé. Il a fait du schème le prototype de l'activité perceptivo-gestuelle, qu'il a appelée à tort « sensori-motrice », suivant en cela la terminologie inadéquate de l'époque. L'œuvre de Piaget est incontournable.

Pour ma part, j'ai développé le concept de schème en l'utilisant pour des activités très différentes comme les gestes et les raisonnements, et en essayant d'en donner une analyse qui permette de tisser un lien clair entre activité et conceptualisation.

J'appelle conceptualisation, dans un sens large du terme, l'identification des objets du réel, de leurs propriétés et relations, que ces objets et propriétés soient directement accessibles par la perception, ou qu'ils résultent d'une construction.

L'identification par la perception fait partie intégrante du processus de conceptualisation, et certains progrès au cours du développement, proviennent justement des catégories avec lesquelles est sélectionnée et jugée pertinente l'information offerte par la situation. Si la perception est une composante de la représentation (j'y reviendrai à la fin de cet exposé), on sait aussi que beaucoup de concepts scientifiques résultent d'une construction hypothétique, qui a pu faire problème au cours de l'histoire. Il nous faut donc étudier les deux processus, en même temps d'ailleurs que le rôle du langage et des symbolismes, et surtout que l'activité en situation, source incontournable de la conceptualisation.

Dans une perspective développementale, il est essentiel d'accorder du poids à ce qui fait la différence : entre une forme d'organisation de l'activité et une autre, entre une situation et une autre, entre un individu et un autre, entre un moment de l'apprentissage et un autre, entre une période de l'expérience et une autre. Or ce qui fait la différence, ce sont bien les ressources disponibles chez le sujet à l'étude. L'expérience est essentielle dans le développement à long terme, comme Dewey le pensait ; et l'on n'a pas conduit assez de recherches théoriques et empiriques sur l'expérience. Les psychologues se contentent trop de discuter des rapports entre développement et apprentissage, en gommant la question de l'expérience. La didactique aussi devrait s'y intéresser davantage, tant il est vrai que l'expérience scolaire et l'expérience extrascolaire forment un ensemble moins dissociable qu'il y paraît, et que le développement est un processus sur la longue durée.

Qu’est-ce qu’un concept ? Et comment établir le lien entre une définition possible et la recherche en didactique ? Comment tenir compte du fait que la conceptualisation se développe en situation, à travers l’activité, et à travers des formulations et des symbolisations. A partir de ces interrogations, je suis arrivé à l’idée qu’un concept est un triplet de trois ensembles **: S, I, L**

S l’ensemble des situations qui donnent du sens au concept
I l’ensemble des invariants opératoires sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes
L l’ensemble des formes langagières et symboliques qui permettent de représenter concepts, situations et formes de traitement

Il est bien connu que, des deux grandes références que sont Piaget et Vygotski, le premier mettait l’action en avant, et s’intéressait au langage de manière marginale, tandis que le second s’intéressait plutôt au langage et relativement peu à l’action. Bien que je m’intéresse plutôt à l’action, je viendrai à la question du langage et des représentations symboliques dans la deuxième partie de mon exposé, en même temps que j’aborderai la question des rapports signifiants/signifiés. La connaissance est activité en situation, mais elle est aussi faite d’énoncés et de textes.

Une autre remarque me paraît utile pour que vous compreniez l’évolution du psychologue vers la didactique ; Piaget a cherché à identifier les structures logiques susceptibles de caractériser les grandes étapes du développement cognitif de l’enfant. Il a ainsi abouti aux structures de groupement et de groupe, censées caractériser le stade des opérations concrètes et celui des opérations formelles. J’ai ressenti le besoin de prendre à bras le corps les questions spécifiques de conceptualisation en arithmétique, en géométrie, en algèbre ; et de prendre mes distances avec le réductionnisme logique, qui m’apparaissait une voie sans issue. La théorie des champs conceptuels est née de ce besoin. Elle est donc le fruit de mes recherches en didactique et de ma collaboration avec les mathématiciens : plus de 30 ans, ce n’est pas rien ! Entendons-nous bien : les recherches sur des contenus conceptuels spécifiques existent bien chez Piaget, comme en témoignent ses travaux sur l’espace, sur les quantités discrètes et continues, sur les rapports entre les concepts de vitesse et de temps. Mais il existe dans son travail des interprétations discutables, pour la proportionnalité par exemple, interprétée par Piaget comme une structure logique, celles du groupe INRC, sans référence à la linéarité. J’avais besoin d’un cadre théorique différent de la logique, et qui permette de regarder la conceptualisation d’un point de vue développemental. D’où la définition :

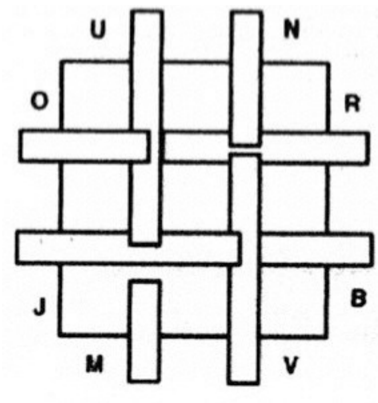
Un champ conceptuel est constitué à la fois
- d’un ensemble de situations dont la maîtrise progressive appelle une variété de concepts, de schèmes et de représentations symboliques en étroite connexion.
- et de l’ensemble des concepts qui contribuent à la maîtrise de ces situations.

Les barres encastrées

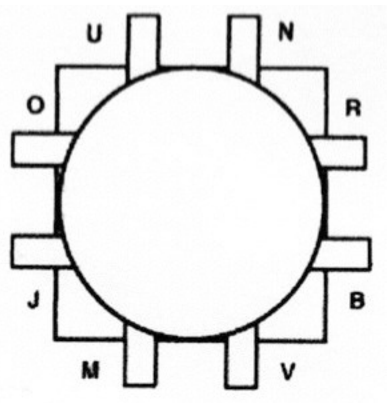
Cette recherche, que j’ai conduite au moment de la préparation de ma thèse, avait pour premier objectif de montrer que l’activité de l’enfant est organisée par autre chose que la seule réaction aux stimuli de l’environnement, comme tendaient à le prétendre les behavioristes. Elle a eu aussi l’intérêt de montrer certains phénomènes concernant la prise d’information et son interprétation dans le développement des compétences des enfants : notamment le poids des invariants opératoires dans la sélection et l’utilisation de l’information pertinente.

Les dispositifs que j’avais fabriqués pourraient trouver leur place dans un musée des arts primitifs de la psychologie. Celui qui est dessiné ci-dessous, un dispositif en bois et en carton, sent son amateur. Comme j’ai utilisé ce dispositif avec mes enfants et leurs camarades de classe, ma fille avait été interrogée par sa maîtresse : « qu’est-ce qu’il fait ton papa ? » et ma fille avait répondu « il est psychologue » « et c’est quoi psychologue ? » avait demandé la maitresse ; et ma fille avait répondu : « c’est marchand de jouets ».

Dispositif visible



Dispositif caché



Considérons d’abord le premier dispositif, dans lequel les relations entre barres sont visibles.

Les enfants sont invités à dégager la barre rouge (R), qui est bloquée par les deux barres, verte (V) et noire (N). Tirer la noire ne pose pas de problème ; tirer la verte en pose, parce qu’elle elle-même bloquée par la barre jaune (J). Celle-ci est à son tour bloquée par la barre violette (U), elle-même bloquée par la barre orange (O). Il existe aussi deux barres, bleue (B) et marron (M), qui ne bloquent rien, et qui sont là justement pour tester si les enfants vont faire la différence entre la présence et l’absence d’une relation d’encastrement.

J’ai expérimenté avec des enfants à partir de 4 ans jusque vers 6 ou 7 ans avec le dispositif dans lequel les relations entre barres sont visibles, et avec des enfants plus âgés avec le dispositif de droite où les relations sont cachées ; mais je n’en parlerai guère aujourd’hui. Je vais présenter quelques formes d’organisation de l’activité observées chez les enfants lorsque le dispositif est entièrement visible:

1. Essayer de tirer rouge, puis d’autres barres, un peu au hasard. Le hasard a évidemment bon dos puisque c’est probablement la difficulté pour le chercheur d’interpréter le choix de l’enfant qui conduit à parler de hasard.

2. Essayer de tirer rouge, tirer noir, puis essayer de tirer rouge, puis vert, puis rouge, puis vert, puis rouge à nouveau … en vain évidemment. On peut interpréter cette manière de faire comme la perception par l’enfant de la relation de connexité entre les deux barres verte et rouge, sans que soit aperçu son caractère antisymétrique, à savoir que la barre verte est encastrée dans la barre rouge, mais que la rouge n’est pas encastrée dans la verte.

3. Essayer de tirer rouge, puis vert, puis jaune, puis violet, puis orange, et recommencer à partir de rouge, ou d’une autre barre. Ce schème est en fait un premier algorithme, qui repose sur la perception du caractère antisymétrique de la relation d’encastrement. Cela permet de sortir du cercle vicieux du schème précédent, en remontant de la barre bloquée à la barre qui bloque.

4. L’algorithme le plus économique consiste évidemment à raisonner par transitivité, à examiner le dispositif avant d’agir, et à tirer directement la barre orange, puis à redescendre de la barre qui bloque à la barre bloquée. J’attire l’attention cependant sur le fait que ce n’est pas la relation d’encastrement qui est transitive, mais la règle d’action : *pour tirer X il faut tirer Y, pour tirer Y il faut tirer Z, donc pour tirer X il faut tirer Z.* Cet algorithme n’est pas observé chez les enfants avant l'âge de 6 ans, et souvent sensiblement plus tard, alors que l'algorithme 3, qui repose sur la seule antisymétrie, est observé chez certains enfants à partir de 4 ans et demi.

5. Un dernier schème mérite commentaire. Essayer de tirer rouge puis bleu, puis vert, puis marron, puis jaune, puis orange (qui sort). Ce schème repose sur l'organisation spatiale des barres autour du dispositif. Comme les barres sont en nombre fini, il est possible ainsi de venir à bout du problème, après un nombre suffisant de tours.

Or aucun enfant n'a réussi de cette manière. Cela me conduit à dire que la définition des algorithmes par « *leur aboutissement en un nombre fini de pas, soit à une solution s'il en existe une, soit à la démonstration qu'il n'existe pas de solution* », est une définition insuffisante du point de vue de la conceptualisation. Dans l'apprentissage des mathématiques, il faut considérer le caractère nécessaire des relations. Les mathématiques savantes s'intéressent surtout au nécessaire abstrait, celui qui relie par exemple des théorèmes à des axiomes et à des définitions. Ici on a affaire à du nécessaire concret, c'est-à-dire à des relations matérielles qui permettent, si on est en mesure de prendre l'information pertinente, de conduire son activité de manière rationnelle.

Lorsque j'ai appris à programmer en Angleterre il y a 40 ans, on parlait de l'algorithme du British Museum, justement pour souligner, par métaphore, que lorsqu'on a un nombre fini de cas, comme dans un catalogue, celui du British Muséum par exemple, y compris lorsque ce nombre est très grand, on peut aboutir à une solution en passant en revue tous les cas du catalogue. Certes, mais ce n'est pas le moyen de comprendre le développement de la rationalité.

Si je résume les représentations sous-jacentes à ces différentes organisations de l'activité, je trouve *la boîte noire* dans le premier cas, et d'ailleurs quand on demande aux enfants de dessiner le dispositif qu'ils voient, certains se contentent de dessiner l'ensemble des barres, soit autour du dispositif, soit les unes à côté des autres. Je trouve ensuite *la connexité* seule sans antisymétrie, puis *l'antisymétrie*, puis *la transitivité*. Cela est encourageant pour qui cherche la relation entre la conceptualisation et l'activité, et pour qui le développement est un objet essentiel de la recherche en psychologie. Les enfants sont évidemment incapables de formuler ces propriétés, mais ils ne les utilisent pas moins dans leur activité ; ce sont des invariants opératoires, c'est-à-dire des concepts-en-acte et des théorèmes-en-acte. La relation d'encastrement est elle-même un concept ; elle n'est pas saisie d'emblée avec toutes ses propriétés.

L'antisymétrie et la transitivité sont de l'ordre du mathématique. Comme je ne suis pas avare de métaphores, je voudrais ajouter que, avec le dispositif caché, on a une sorte d'illustration des rapports entre physique et mathématique. Les enfants doivent en effet faire des hypothèses sur les relations cachées, à partir des essais qu'ils font sur les barres, et se construire ainsi un modèle calculable. Inutile de préciser que cela est une vraie gageure, et que peu d'entre eux parviennent à quelque chose de raisonnablement effectif. On a cette fois affaire à une vraie boîte noire et, même si on ouvre une petite fenêtre permettant d'explorer les unes après les autres les différentes relations, en tournant l'écran ajouré sur le dispositif, les réussites sont rares. Comme dans le mythe de la caverne de Platon, le réel ne fournit qu'une partie des observables qui seraient nécessaires à la rationalité. Il faut donc en construire un modèle calculable, mathématique le plus souvent. Les mathématiques sont constitutives de la physique, mais la physique n'est pas pour autant réductible aux mathématiques : l'une des raisons est justement le caractère peu accessible, même par hypothèse, par métaphore et par glissement de sens, de l'information non observable.

Cette idée d'accès à l'information est essentielle. Je vais donc l'exploiter en proposant une classification des situations susceptible de nous aider à mieux comprendre le développement de la rationalité.

On peut distinguer trois grandes classes de situations : situations nécessaires, situations régulières et situations aléatoires. Dans les situations nécessaires, on a un accès suffisant à l'information pertinente et aux raisons et processus sous-jacents pour organiser son activité de manière rationnelle : c'est le cas du dispositif ci-dessus lorsque les relations d'encastrement sont totalement visibles. Dans les situations régulières, les régularités observables sont engendrées par des processus auxquels on n'a pas totalement accès. Ces régularités permettent des prédictions sur les événements singuliers, mais on n'a pas un accès suffisant aux processus pour prévoir à coup sûr. Dans les situations aléatoires, il n'y a même pas de régularité dans les événements singuliers, et on en est réduit, dans le meilleur des cas, à des prédictions sur des classes d'événements.

Pierre Gréco, avec qui j'ai beaucoup discuté et débattu au début de ma carrière, et dont j'ai beaucoup appris, distinguait entre « nécessaire, régulier, déterminé et aléatoire » ; j'ai critiqué et supprimé la catégorie du « déterminé », que je trouvais redondante par rapport à celle du régulier, et j'ai ajouté un deuxième critère de classification, qui peut être croisé avec le premier : la distinction entre situations productives, situations passives et situations interactives. Dans les situations productives, les événements ne dépendent que de l'action propre du sujet, alors que, dans les situations passives, ils n'en dépendent pas du tout. Evidemment les situations auxquelles on a affaire dans la vie sont le plus souvent interactives : les événements dépendent à la fois de l'action propre et de processus sur lesquels on n'a pas de prise directe.

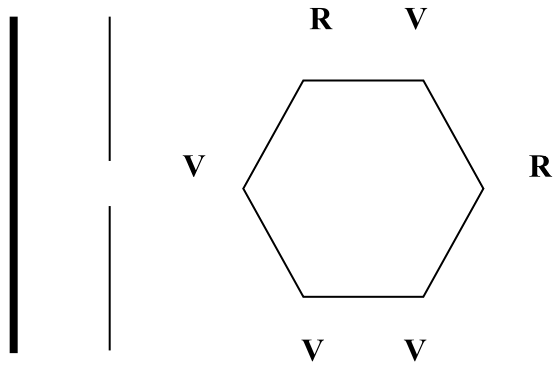
Au cours de son développement, l'enfant progresse en rationalité et en pouvoir sur le réel ; il le fait d'abord à travers les situations productives et nécessaires, qui sont de l'ordre du mathématique comme je l'ai avancé plus haut. L'extension de la rationalité aux situations régulières et aléatoires demande l'élaboration d'instruments conceptuels supplémentaires : des représentations calculables, comme les modèles géométriques, ou les probabilités. Evidemment cette position épistémologique peut être contredite, à commencer par le fait que, dans l'histoire des sciences, l'astronomie a connu une certaine avance sur les autres sciences, alors que c'est typiquement à des situations régulières et passives, que les astronomes avaient affaire : ils n'avaient aucun pouvoir sur les astres. Il n'en est pas moins intéressant de regarder les apprentissages et l'expérience des enfants à travers le prisme de la classification que je viens de présenter. Le poids du productif notamment est important dans la construction de la rationalité, parce que les sujets sont actifs et qu'ils accordent un certain privilège aux effets que produit leur action propre, même si cette action se place dans des processus d'interaction avec la nature : j'en prends pour témoignage le fait que Darwin, pour rendre intelligible l'évolution des espèces, qui relève typiquement de processus aléatoires interactifs, explique dans son ouvrage que les deux idées qui sont au centre de sa théorie, l'idée de variation et celle de sélection, lui ont été inspirées non par ses observations aux Galapagos, mais par les pratiques des éleveurs et des agriculteurs, particulièrement des jardiniers. Si ces pratiques, que Darwin avait étudiées et expérimentées lui-même, n'avaient pas fait partie de sa culture, il n'aurait peut-être pas pu faire le saut scientifique qui continue à agiter les esprits deux siècles plus tard.

Pour illustrer mon raisonnement je vais faire appel à des situations permettant d'illustrer la distinction entre nécessaire, régulier et aléatoire.

Dans un premier cas deux lampes, l'une verte, l'autre rouge, s'allument de manière aléatoire, avec comme seule contrainte que la lampe verte s'allume deux fois plus souvent que la rouge. Les expérimentations des psychologues montrent que la plupart des sujets, adultes comme enfants, ajustent progressivement leurs prédictions à la loi de probabilité *deux fois vert pour une fois rouge*, alors que la rationalité commanderait de prévoir toujours vert, pour maximiser les gains.

Dans un second cas, on peut observer une régularité qui permet de faire des prédictions sur les événements singuliers : par exemple la séquence régulière RVVRVVRVV…ou la séquence plus complexe RVRVVVRVRVVVRV…

Dans un troisième cas, cette dernière séquence est engendrée par la rotation d'un ensemble de 6 lampes, positionnées sur un cercle ou un hexagone, de telle sorte que chacune projette sur un écran soit une lueur rouge soit une lueur verte, avec la même régularité que dans la dernière suite RVRVVVRVRVVVRV…



On n'est pas très éloigné de la situation de la caverne de Platon. Il est clair que la dernière situation est une situation nécessaire pour l'observateur qui peut voir la rotation de l'hexagone, et une situation seulement régulière pour l'observateur qui ne voit que la lueur projetée sur le mur.

A partir de là je voudrais formuler trois principes d'incertitude :

Le premier concerne les situations aléatoires : on est incertain parce qu'on ne peut pas prévoir les événements singuliers ;

Le second concerne aussi les situations régulières : on est incertain parce qu'on n'a pas accès à toute l'information qui serait nécessaire ;

Le troisième principe concerne aussi et en premier lieu les situations nécessaires : on est incertain parce qu'on ne dispose pas des catégories de pensées, explicites ou implicites, qui permettraient de saisir et de traiter toute l'information pertinente, même lorsqu'elle est directement accessible.

Ce dernier principe exprime directement l'importance de la conceptualisation, et donc des invariants opératoires, dans le jeu contre l'incertitude. On le voit bien dans la manière dont les enfants traitent le dispositif des barres encastrées, lorsque le dispositif est visible ; mais les invariants opératoires, sont évidemment nécessaires aussi pour l'élaboration et la compréhension des représentations calculables concernant les situations régulières et aléatoires. En d'autres termes, le troisième principe d'incertitude concerne toutes les situations, les processus inobservables comme les processus observables.

On pourrait ajouter un dernier principe d'incertitude, transversal par rapport aux trois premiers : on est incertain parce qu'on ne peut pas modifier le cours des choses. Mais ce dernier principe tient justement au fait qu'on ne dispose pas des ressources conceptuelles pour appréhender les situations nécessaires, régulières et aléatoires. L'approche développementale de la conceptualisation est essentielle pour comprendre la victoire progressive des enfants sur l'incertitude.

Les structures additives

L'espace est un domaine privilégié des mathématiques, mais il n'épuise évidemment pas le problème de la conceptualisation du réel pour la période de l'enfance, et notamment la compréhension des quantités et des grandeurs, et de leurs relations. L'exemple du dénombrement me vient souvent à l'esprit, à la fois parce que c'est une compétence première dans le processus de construction du nombre, et aussi, raison théorique, parce que c'est un exemple concret de la relation entre conceptualisation et organisation du geste. Le premier domaine de pertinence du concept de schème est en effet le domaine des gestes. Simulons ce que fait une enfant de quatre ou cinq ans lorsqu'il compte les personnes de la première rangée : un, deux, trois, quatre…QUATRE !

Cette organisation de l'activité repose sur deux idées mathématiques essentielles:

la correspondance biunivoque : entre les personnes dénombrées, les gestes du doigt et de la main, les gestes du regard, et les gestes de la voix ;

Le cardinal : qui se traduit, dans l'imitation que je viens de faire, par la répétition du dernier mot-nombre : d'abord associé au dernier élément dénombré, puis à l'ensemble tout entier.

On sait que de nombreux enfants ont du mal à assurer la correspondance biunivoque, faute de coordonner correctement les trois registres : geste du pointage avec le doigt, regard, énonciation. Ils vont trop vite dans un des registres ou pas assez vite. Ce principe de biunivocité se traduit par la règle qu'il faut compter tous les objets (exhaustivité), et ne pas compter deux fois le même (exclusivité).

Le cardinal se prête à l'addition ; ce n'est pas le cas du nombre ordinal (ou numéro) associé au dernier élément de la collection. Tant il est vrai que, sans le concept de cardinal, il n'y a pas de nombre : l'addition est une propriété caractéristique du nombre par rapport aux relations d'ordre et d'équivalence. Une collègue américaine, Karen Fuson a observé des enfants qui, en réponse à la question « combien ? » pouvaient recommencer à compter les objets jusqu'à 7 ou 8 fois, incapables qu'ils étaient de résumer l'information par le cardinal de l'ensemble des objets.

Lorsque je suivais le séminaire de Guilbaud, au début de ma carrière, il avait expliqué notamment les trois axiomes de la théorie de la mesure :
Toute mesure est positive ou nulle
Il existe un objet de mesure nulle
On peut identifier une opération sur les objets qui autorise l'addition des mesures.

Ce sont justement ces axiomes qui s'appliquent au concept de cardinal, lequel est ainsi le premier exemple de mesure. Evidemment ces axiomes ne peuvent être que des axiomes en acte chez l'enfant, et les deux premiers n'ont probablement pas beaucoup de sens pour eux. En revanche l'axiome d'additivité permet de différencier les compétences des élèves.

Card (A union B) = Card (A) + Card (B)

Par exemple un enfant de quatre ans qui compterait les personnes du salon, puis celles du jardin, et qui, à la question « combien ça fait en tout », recompterait le tout, ne saurait être crédité de ce théorème-en-acte :

La restriction « *pourvu que A et B n'aient pas de partie commune* » relève, quant à elle, du principe de biunivocité.

Patrick Suppes, un mathématicien américain qui était très actif il y a une quarantaine d'années, avait formulé ce qu'il appelait un « problème de représentation ». Son but était alors de clarifier les conditions dans lesquelles les psychologues pouvaient se permettre certaines opérations arithmétiques (somme et moyenne par exemple) sur les données obtenues en psychométrie. Il avait formulé ce problème de représentation de la manière suivante :

« Comment caractériser les propriétés formelles des objets et des opérations qu'on peut leur appliquer, qui soient isomorphes à des opérations numériques adéquatement choisies. »

Cette formulation permet d'établir la relation avec les différents types d'échelle et les axiomes de la théorie de la mesure ; et de faire ainsi la critique des opérations et interprétations de certains psychométriciens : beaucoup d'entre eux, à l'époque de Suppes, faisaient des sommes et des moyennes sur des données qui ne pouvaient nullement supporter de telles opérations.

La formulation de Suppes permet aussi de critiquer les prétendues découvertes des psychologues du bébé qui, pour certains d'entre eux, prêtent au bébé des compétences numériques dès ses premiers mois d'existence. Ils ne font alors aucun usage de l'exigence posée par Suppes : dans ce cas la surinterprétation des chercheurs consiste à gommer le fait que, lorsqu'ils sont surpris par un nouveau tableau et se mettent à téter plus rapidement ou au contraire à s'arrêter, les bébés peuvent réagir à une différence ou une ressemblance avec ce qui a précédé, dans le meilleur des cas à une comparaison ordinale, en aucun cas à une opération proprement numérique. Entre l'équivalence et l'ordre comme premières conceptualisations des bébés dans l'exploration du réel, et l'échelle absolue que représentent le cardinal et l'axiome d'additivité, il y a une différence considérable. Dans le tableau des échelles présenté par Suppes, l'écart est occupé par les échelles d'intervalle, dans lesquelles il n'y a ni un zéro qui s'imposerait, ni une unité privilégiée (c'est le cas des températures), et par les échelles de rapport, dans lesquelles il y a bien un zéro naturel mais pas d'unité privilégiée (c'est le cas des mesures spatiales notamment). Evidemment les enfants de 4 à 6 ans ne sont pas concernés par ces constructions. Ils le sont par contre par l'échelle absolue que représente le cardinal. Une échelle d'ordre, ça n'est pas une échelle absolue, et il est un peu étonnant que certains collègues français, y compris certains académiciens, aient pris au sérieux cette thèse des compétences numériques précoces des bébés sans se poser la question de l'addition. Piaget ne serait jamais tombé dans cette erreur d'appréciation, même s'il n'a pas donné toute sa place au critère de l'addition, préoccupé qu'il était par la question des conservations, certes une bonne question, mais insuffisante à elle seule !

La formalisation mathématique de certaines compétences des bébés et des enfants peut ainsi contribuer à clarifier les discussions. C'est un argument pour la formalisation, en termes de théorèmes-en-acte, des conquêtes cognitives des enfants.

Sans l'addition il n'y a pas de nombre. La question subséquente est alors : comment cela commence-t-il ? Si l'additivité est une propriété constitutive du concept de nombre, qu'en est-il pour les jeunes enfants, entre 4 et 6 ans par exemple ?

On peut résumer les choses en disant qu'il existe pour eux deux prototypes de l'addition, en entendant par « prototypes » les premières situations par lesquelles les enfants donnent du sens à l'addition :
La réunion de deux parties en un tout : on peut la formaliser par une loi de combinaison binaire ;

L'augmentation d'une quantité initiale : elle est mieux formalisée par une opération unaire, une fonction qui transforme un état initial en un état final.

On peut montrer certaines équivalences entre les deux prototypes, mais il existe aussi des différences conceptuelles importantes entre eux, notamment parce que les parties et le tout sont représentables par des nombres positifs (ce sont des mesures), tandis que les transformations peuvent être des augmentations ou des diminutions, et appellent donc des nombres relatifs. En outre, alors que la relation partie-partie-tout offre la possibilité de deux classes de situations (rechercher le tout connaissant les deux parties et rechercher une partie connaissant le tout et l'autre partie), la relation état initial-transformation-état final offre la possibilité de six classes de situations (rechercher l'un des trois termes connaissant les deux autres, et cela dans les deux cas où la transformation est une augmentation ou une diminution). J'ajoute que la recherche de l'état initial demande un théorème-en-acte non trivial pour la plupart des enfants jusqu'au CE2 : l'inversion de la transformation directe et l'application de la transformation réciproque à l'état final. Cette opération de pensée est si difficile que certains enfants se tirent d'affaire, ou espèrent se tirer d'affaire, par un moyen plus long et plus coûteux ; faire une hypothèse sur l'état initial, lui appliquer la transformation directe, trouver un état final (le plus souvent erroné), et corriger l'hypothèse sur l'état initial.

J'ajoute encore que parmi les six classes de situations dont je viens de parler deux seulement font appel à une addition, les quatre autres à une soustraction, ce qui contredit l'idée communément admise que la soustraction et l'addition sont des opérations inverses l'une de l'autre. Elles le sont certes, mais pour certains cas de figure seulement, dans le cas du deuxième prototype : un gain de n billes annule une perte de n, comme une perte de n annule un gain de n ; la transformation qui fait passer de l'état final à l'état initial est l'inverse de la transformation qui fait passer de l'état initial à l'état final.

Ces distinctions semblent peu importantes pour des adultes mathématiciens, mais elles conduisent en fait à considérer une grande variété de situations non prototypiques, qui vont alimenter le long terme de l'apprentissage des structures additives. Pour commencer, alors qu'on pourrait imaginer qu'il existerait deux situations prototypiques de la soustraction (comme pour l'addition) il n'en existe qu'une : la diminution d'une quantité initiale. La recherche d'une partie connaissant le tout et l'autre partie demande une opération de pensée supplémentaire.

On sait par les travaux des historiens des mathématiques que les nombres négatifs n'ont pas été considérés comme des nombres par de nombreux mathématiciens jusqu'au 19ème siècle. On sait aussi qu'ils ont été élaborés à partir de problèmes de calcul algébrique, qui sont hors de la portée des élèves de l'école élémentaire ; or, on dispose, avec les transformations, d'un moyen relativement naturel de leur donner du sens ; sans sous-estimer pour autant les difficultés durables que peuvent rencontrer les élèves dans certaines situations. Je vais en donner un exemple plus loin avec la décomposition d'une transformation connue en deux transformations, dont l'une est connue et l'autre inconnue.

En tous cas l'épistémologie de l'apprentissage des mathématiques ne peut pas être identifiée purement et simplement à l'épistémologie des mathématiques, pour cette raison simple que les questions que se posent les enfants, même avec l'aide de l'adulte, ne sont pas les mêmes que celles que se posent les mathématiciens. Je donne ici au terme « épistémologie » un sens restreint, celui de la relation entre la connaissance et les problèmes, pratiques ou théoriques, auxquels elle apporte une réponse.

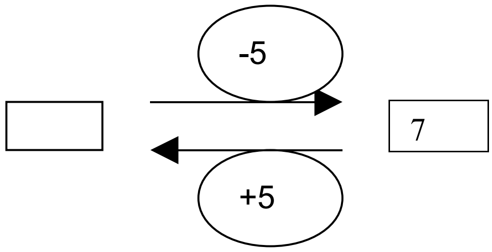
La résolution de problèmes d'arithmétique suppose des calculs relationnels, et pas seulement des calculs numériques, et c'est souvent sur les difficultés de ces relations qu'achoppent les enfants. Regardons ensemble les trois problèmes suivants, de niveau différent bien que demandant la même opération numérique, l'addition 7 + 5 :

Pierre avait 7 billes. Il en gagne 5. Combien en a-t-il maintenant ?
Robert vient de perdre 5 billes; Il en a maintenant 7. Combien en avait-il avant de jouer ?
Thierry vient de jouer deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie il a perdu 7 billes. En faisant ses comptes, il s'aperçoit que, en tout, il a gagné 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Le problème Pierre est résolu par la quasi totalité des enfants à la fin du cours préparatoire, tandis que le problème Robert n'est résolu qu'au CE2, parfois un peu plus tôt, souvent un peu plus tard. La difficulté vient évidemment de la nécessité d'inverser la transformation donnée dans l'énoncé (perdu des billes) et d'ajouter les billes perdues à l'état final. Cette opération de pensée repose sur un théorème-en-acte qui n'est pas donné dans l'énoncé :

En termes savants $F = T(I)$ $I = T^{-1} (F)$

En termes moins savants



Ce dernier symbolisme me permet d'ouvrir la question des représentations susceptibles d'aider les enfants. En effet alors que le problème Pierre peut être représenté par l'algèbre, par le schéma sagittal, et par les « patates » d'Euler-Venn, sans qu'aucune de ces représentations soit d'ailleurs vraiment indispensable pour résoudre le problème puisqu'il s'agit d'un cas prototypique, le problème Robert ne peut pas être représenté par des « patates » pour la raison princeps qu'il est impossible de représenter une transformation négative par une surface. En outre, si l'on se pose la question du passage de la représentation du problème à la représentation de la solution, le schéma sagittal ci-dessus est la seule représentation opératoire. En effet l'algèbre, ou ce qui en tient lieu pour les enfants de l'école élémentaire, demande, pour le passage d'une ligne à l'autre, un théorème de conservation de l'égalité et de la solution, qui n'est pas à la portée des enfants du cours préparatoire et du cours élémentaire.

$x - 5 = 7$
$x = 7 + 5$

Le fait de substituer un carré vide à la lettre x, comme on le fait souvent à l'école élémentaire ne change rien à l'affaire.

Avec le problème Thierry, la difficulté conceptuelle est gravement accrue par rapport aux problèmes Pierre et Robert, au point que l'échec est quasi total à la fin de l'école élémentaire et au début du collège. Souvent, lorsqu'on interroge les collègues sur le pourquoi de cette difficulté, ils invoquent la difficulté de l'énoncé. Je les invite alors à faire une expérience que j'ai faite à plusieurs reprises : on reprend la structure de l'énoncé Thierry et l'on se donne plusieurs cas de figure pour les énoncés concernant la seconde partie de billes et ce qui advient en tout ;

Thierry vient de jouer deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie il a ………………
En faisant ses comptes, il s'aperçoit que, en tout, il a……………
Que s'est-il passé à la première partie ?

On substitue aux pointillés les informations suivantes :

	Seconde Partie		En Tout
Gagné	7	gagné	15
Perdu	7	perdu	15
Gagné	15	gagné	7
Perdu	7	gagné	15
Gagné	15	perdu	7

Les enfants trouvent alors sans difficulté excessive la réponse dans les deux premiers cas. Par glissement de sens, ils se rabattent sur l'interprétation partie-partie-tout : les deux transformations sont de même signe, le tout est plus grand que la partie.

Dans le troisième cas il y a déjà un petit obstacle parce que le tout est plus petit que la partie, mais un autre glissement de sens intervient éventuellement : gagné 15 est interprété comme un état initial, gagné 7 comme un état final ; Thierry a donc perdu des billes ; il en a perdu la différence.

Dans les deux derniers cas, il est impossible de se ramener à un modèle parte-partie-tout ou à un modèle état initial-état final parce que les deux transformations sont de signe contraire. Les élèves échouent massivement. Ce serait une occasion d'introduire certains aspects du calcul dans les relatifs; à ma connaissance cela n'a été entrepris dans aucune expérimentation didactique.

A ce point de mon exposé, je peux soutenir que l'expression « champ conceptuel » n'est pas usurpée pour les structures additives : il relie l'arithmétique à l'algèbre, et en même temps l'école élémentaire à l'école secondaire.

Aux trois relations additives de base que sont la relation parte-partie-tout, la relation état initial-transformation-état final, et la relation référé-comparaison-référent (*combien de plus ou de moins que*) que je n'ai pas évoquée ici, mais qui est importante dans le développement conceptuel des enfants, on peut adjoindre des relations nouvelles qui, toutes, mettent en jeu des nombres relatifs ; la composition de transformations, la composition de relations, et la transformation d'une relation.

Comme un champ conceptuel est à la fois un ensemble de situations et un ensemble de concepts, il n'est pas superflu d'énoncer maintenant les concepts qui jalonnent la compréhension de ces situations : quantité discrète, grandeur continue, mesure, partie, tout, état, transformation, comparaison, référé, référent, composition binaire (de mesures, de transformations, de relations), fonction et opération unaire, inversion, nombre naturel, nombre relatif, position, abscisse, valeur algébrique. La plupart de ces concepts ne sont pas explicites ; ils sont « en-acte ».

Un autre commentaire théorique est que la pensée est à la fois systématique et opportuniste : si elle n'était pas systématique on ne pourrait pas comprendre comment l'enfant développe progressivement des compétences rationnelles ayant une certaine généralité. Si elle n'était pas opportuniste, on ne pourrait pas comprendre comment l'enfant fait feu de tout bois pour s'adresser à une situation jamais rencontrée auparavant.

On mesure aussi que, dans cette adaptation aux situations nouvelles, les formes d'organisation de l'activité, les schèmes, jouent un rôle central. Quel que soit le poids des représentations symboliques et du langage, la forme opératoire de la connaissance, celle qui permet d'agir en situation, est une expression essentielle de la connaissance. Même pour les mathématiques, qui forment un édifice impressionnant de textes et d'énoncés, il faut conserver à l'esprit que les mathématiques sont nées du besoin des hommes d'être opératoires.

Compétences et schèmes

La double expression de la connaissance, par l'action et par les énoncés, mérite un détour théorique. Cela ne concerne pas que les mathématiques, ni même les mathématiques d'abord. Aussi bien est-ce en travaillant avec des collègues des entreprises que j'ai été conduit à préciser ce qu'il fallait entendre par « compétence ». Voici quelques définitions, nullement exclusives les unes des autres, mais au contraire complémentaires. Ces essais de définition sont formulés dans les termes d'une relation d'ordre, justement parce que la compétence se prête presque toujours, dans les esprits, à un jugement de valeur relative. On peut adopter une perspective développementale (comparaison au cours du temps) ou une perspective différentielle (comparaison entre individus), comme c'est le cas dans la définition 1 ci-dessous.

1 **A est plus compétent au temps t' qu'au temps t s'il sait faire ce qu'il ne savait pas faire**

A est plus compétent que B s'il sait faire quelque chose que B ne sait pas faire

2 **A est plus compétent s'il s'y prend d'une meilleure manière**

3 **A est plus compétent s'il dispose d'un répertoire de ressources alternatives**

4 **A est plus compétent s'il est moins démuni devant une situation nouvelle**

Chacune de ces idées mérite commentaire :

La définition 1 est très proche de l'idée de performance, alors que, justement, le mouvement d'idées actuel vise à les différencier. Rien n'est dit en effet sur l'organisation de l'activité.

La définition 2 précise qu'il s'agit d'une « meilleure manière ». Il faut donc des critères, comme la rapidité, l'économie de moyens, la fiabilité, la sécurité, la compatibilité avec l'activité des autres.

La définition 3 surprend parfois les ingénieurs, pour lesquels on peut et doit s'en tenir à la meilleure manière. Or l'expertise d'un ingénieur, comme d'ailleurs d'un autre professionnel dans son domaine, consiste justement à disposer de plusieurs ressources, plus ou moins pertinentes selon le cas de figure rencontré. A titre d'exemple simple en mathématiques, je peux citer le cas de la recherche d'une quatrième proportionnelle, pour laquelle il existe plusieurs « bons raisonnements », dont la pertinence relative dépend des valeurs numériques. Il est d'ailleurs profitable qu'un enseignant encourage ses élèves à raisonner de plusieurs manières. En outre les élèves utilisent parfois des procédures erronées qui font partie du tableau, justement parce que les erreurs ne sont pas toutes aussi aberrantes les unes que les autres, et que certaines d'entre elles représentent un début de compréhension.

Enfin la définition 4 est très importante dans le monde du travail aujourd'hui, en raison du fait que les hommes et les femmes héritent en général des problèmes à résoudre de manière impromptue, pour lesquels il n'existe pas encore de solution toute faite.

Ce détour par le concept de compétence ne doit pas faire illusion. Ce n'est pas à mes yeux à soi seul un concept scientifique : il a le mérite de mettre l'accent sur la forme opératoire de la connaissance mais il n'est pas assez analytique pour que les chercheurs puissent, avec ce seul concept, décrire et analyser l'activité. C'est le concept de schème qui permet de faire le pas qui manque, justement parce qu'il permet de suivre pas à pas le déroulement de l'activité, et d'analyser ce déroulement dans ses différents aspects, comme la définition 3 ci-dessous nous y engage.

1 Un schème est une totalité dynamique fonctionnelle

2 Un schème est une organisation invariante de l'activité pour une classe définie de situations

3 Un schème comprend nécessairement quatre catégories de composantes:

- un but (ou plusieurs), des sous-buts et des anticipations

- des règles d'action, de prise d'information et de contrôle

- des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte)

- des possibilités d'inférence

4 Un schème est une fonction qui prend ses valeurs d'entrée dans un espace temporalisé à n dimensions, et ses valeurs de sortie dans un espace également temporalisé à n' dimensions (n et n' très grands)

La première définition, qui est une idée plus qu'une définition, correspond à peu près à ce que Piaget avait en tête lorsqu'il interprétait les gestes du bébé. Il ne ressentait guère le besoin d'une définition plus stricte. Au fond le schème était pour lui une sorte de bonne forme, analogue aux bonnes formes des gestaltistes pour la perception. Simplement, et cela représentait une importante idée nouvelle, c'était une forme dynamique, qui concernait l'action gestuelle en même temps que la perception.

La deuxième définition m'a été suggérée par ce que j'ai lu sur les algorithmes dans les années 60 (Trahtenbrot) : un algorithme demande à être référé à une classe de problèmes bien caractérisée.

Quant à la troisième définition, c'est la plus analytique : elle retient les quatre caractéristiques essentielles que sont la finalité, le caractère génératif du schème, son contenu épistémique, et la variabilité de l'activité associée à l'idée de classe de situations, et que permettent justement les possibilités d'inférences.

Déjà la deuxième définition, en retenant l'idée de classe de situations, permet de considérer le schème comme un universel, en ce sens que des quantificateurs universels sont nécessaires pour décrire un schème. Cela donne raison à Piaget, lorsqu'il faisait du schème un précurseur du concept. Une autre idée de la deuxième définition mérite l'attention : ce qui est invariant, c'est l'organisation de l'activité, non pas l'activité elle-même, ni la conduite observable. Le schème n'est pas un stéréotype.

Par rapport à d'autres essais de définition de l'activité en situation, je voudrais attirer l'attention sur quelques points. Concernant le caractère génératif du schème, Newell et Simon avaient il y a longtemps proposé l'idée de règle d'action, mais ils n'avaient pas relevé que la prise d'information et le contrôle sont des composantes essentielles de l'activité, qui font souvent la différence entre différents niveaux de compétence : par exemple dans le schème du dénombrement, c'est en raison de dysfonctionnements concernant les gestes du regard que certains enfants échouent à organiser la correspondance biunivoque que j'ai évoquée plus haut. On ne trouve pas cette idée non plus chez Leontiev.

Concernant la composante proprement épistémique du schème, c'est-à-dire les invariants opératoires, ils sont absents de presque toutes les approches de l'activité en situation, ce qui interdit d'opérer la liaison théorique entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance. Je reviens plus loin sur ce point. Le cas le plus patent est celui des réseaux sémantiques, invoqués aujourd'hui dans de nombreuses recherches, et qui, fondés sur un fonctionnement cognitif purement associatif, font l'impasse sur les processus différenciés de conceptualisation, notamment la distinction entre concept et théorème. Or cette distinction est essentielle pour comprendre qu'un même concept peut se décliner à plusieurs niveaux de puissance et d'efficacité en fonction des théorèmes qui l'accompagnent. On l'a vu pour les structures additives, mais un autre exemple permet de bien voir la différence entre un concept-en-acte et un théorème-en-acte. Dans une recherche que j'ai rapportée de nombreuses fois, des élèves de quatrième, après avoir réuni des informations nombreuses sur une ferme de la Beauce, et formulé certaines des questions qu'on était susceptible de se poser à partir de ces informations, se trouvent confrontés au calcul de la quantité de farine produite à partir de la récolte de la ferme : 972 000kg de blé ; et il faut 120 kg de blé pour faire 100 kg de farine. Pendant un quart d'heure, le groupe de quatre élèves que j'observais ne parvient pas à trouver le moyen de conduire le calcul. La sonnette de l'interclasse retentit. La semaine suivante les mêmes élèves achoppent à nouveau pendant une vingtaine de minutes sur la même question, jusqu'à ce que l'une d'elles (c'était un groupe de quatre filles) propose de diviser 972 000 par 120. Elle ne parvient pas à expliquer la raison de cette suggestion à ses compagnes. Mais celles-ci adoptent sa proposition, sentant confusément que ce rapport entre deux quantités de blé doit pouvoir être transposé du côté des poids de farine correspondants. Et de fait, elles parviennent à l'idée qu'on peut multiplier 100 kg de farine par ce rapport.

Ainsi, le rapport scalaire (sans dimension) entre deux quantités de même nature, est un concept-en-acte tenu pour pertinent avant même que le théorème-en-acte d'isomorphisme qui va permettre de traiter la situation soit lui-même explicitable : f(k120) = kf(120).

Un théorème est une proposition, et un théorème-en-acte est une proposition tenue pour vraie dans l'action. Un concept-en-acte n'est pas susceptible de vérité ou de fausseté, mais seulement de pertinence ou de non pertinence. Parmi les concepts-en-acte, on peut identifier des objets et des prédicats à une ou plusieurs places, mais ni les uns ni les autres ne sont des propositions. Un prédicat est une fonction propositionnelle, pas une proposition. Les relations entre théorème, objet et prédicat ont été beaucoup clarifiées par les travaux de Frege et Russell sur les propositions, les arguments et les fonctions propositionnelles.

Concernant les situations de proportionnalité entre grandeurs, je rappelle ci-dessous quelques-uns des théorèmes-en-acte qui ont été mis en évidence dans les raisonnements des élèves à la fin de l'école élémentaire et au collège.

les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire

$$f(x+x')=f(x)+f(x')$$

$$f(ax)=af(x)$$

$$f(ax+a'x')=af(x)+a'f(x')$$

le coefficient de proportionnalité

$$f(x)=kx$$

$$x=f(x)/k$$

le produit en croix et la règle de trois

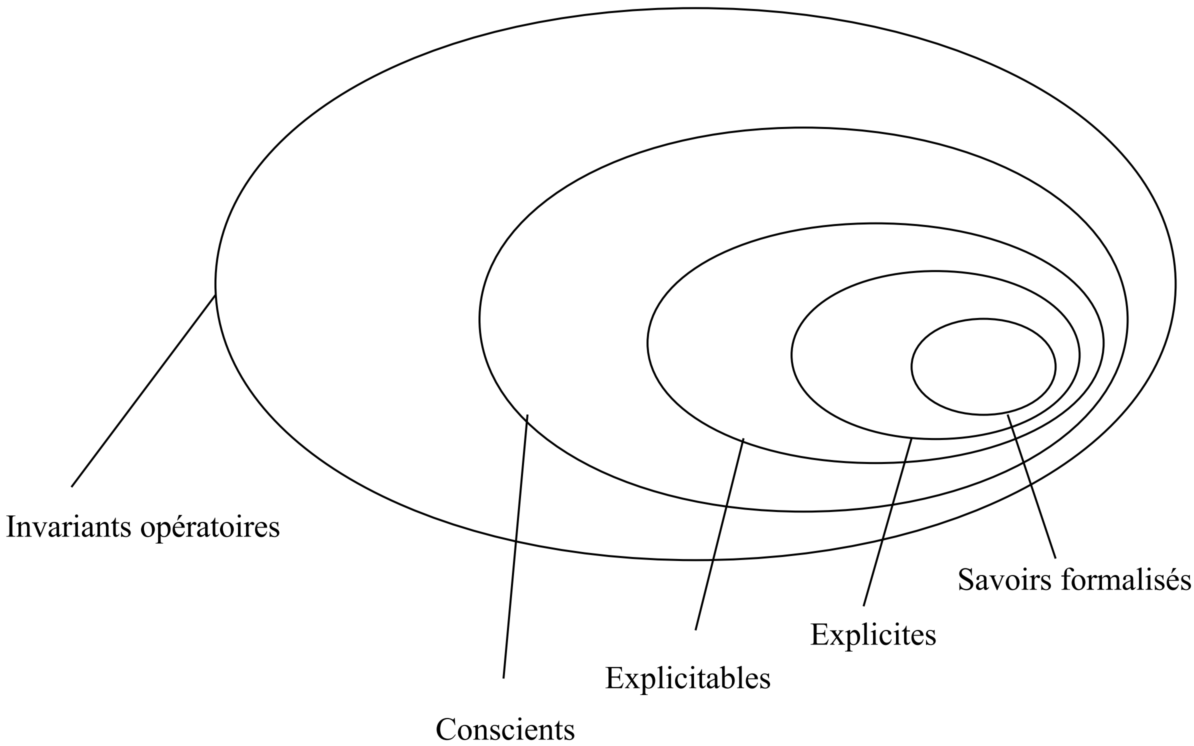
$$x'\times f(x)=x\times f(x')$$

$$f(x')=x' \times f(x)/x$$

la double linéarité

$$f(n_1 x_1, n_2 x_2)=n_1 n_2 f(x_1, x_2)$$

C'est intentionnellement que les théorèmes ci-dessus sont formulés dans un langage relative - ment formalisé : la raison en est qu'il existe un rapport plus étroit qu'il ne peut y paraître entre les mathématiques savantes et les mathématiques contenues dans l'activité arithmétique ordi - naire. Mon idée est qu'il y a une « quasi continuité » entre les invariants opératoires, fussent-ils faiblement conscients voire inconscients, et les connaissances formalisées du mathémati - cien. « quasi continuité » parce qu'il y a évidemment des changements qualitatifs, et même des ruptures, à plusieurs reprises dans le mouvement qui va de la conceptualisation dans l'ac - tion aux formes prédicatives élaborées de la connaissance.



Le schéma ci-dessus exprime les parentés et les filiations possibles entre invariants opéra - toires et savoirs formalisés. Même si le mouvement se fait plutôt du plus grand « cercle » vers le plus petit, le mouvement peut se faire aussi dans l'autre sens,. En effet un savoir formalisé ou explicite n'est pas nécessairement opératoire d'emblée : cela demande la confrontation avec des situations idoines, et certaines formes de prise de conscience.

Autres remarques : il ne faut pas identifier purement et simplement conscience et explicita - tion : d'une part il existe des formes conscientes d'identification des objets du réel et de leurs propriétés qui ne sont pas pour autant explicites, comme dans la perception et le geste par exemple ; d'autre part les hommes (et les chercheurs en particulier) ont développé des tech - niques spéciales (entretiens d'explicitation, d'auto-confrontation) pour amener les sujets à expliciter leur pensée et leur activité en situation. Il faut ainsi distinguer ente explicite et explicitable (l'explicitable n'est explicite que dans certaines conditions et en cas de besoin). Enfin un processus impressionnant, au cours de l'apprentissage consiste à remiser dans l'in - conscient certaines connaissances et formes d'organisation de l'activité qui avaient donné lieu d'abord à des traitements conscients.

Il existe donc des conceptualisations inconscientes, et pas seulement dans les domaines qui relèvent de la psychanalyse. En physique ou en biologie aussi la métaphore est un moyen de faire émerger l'inconscient dans la conscience. Il y a pléthore de processus métaphoriques dans les processus de conceptualisation, comme Bachelard a su le montrer mieux que qui-conque.

Les parentés et filiations dont je viens de parler ne signifient pas que les conflits n'existent pas entre invariants opératoires et connaissances formalisées. En voici un exemple, que j'em-prunte à la thèse de Jorge Rocha de Falcao .

Une classe de seconde est invitée à mettre en équation et à résoudre par l'algèbre une situation dans laquelle des étudiants sont employés par une agence de voyage pour vendre des billets d'avion. Ils sont rémunérés sur la base du nombre d'heures travaillées et du nombre de billets vendus, à quoi s'ajoute une partie fixe. De telle sorte que la formule de leur salaire mensuel serait normalement la suivante :

$$S = Hh + Bb + c$$

S salaire,
H nombre d'heures travaillées, h prime horaire,
B nombre de billets vendus, b prime par billet,
c partie fixe.

On demande de calculer le nombre de billets vendus, lorsque toutes les autres quantités (S, H, h, b, c) sont connues.

Voici la suite des écritures produites par un élève, qui au demeurant parvient à la solution.

$$S = H + B + \textit{partie fixe}$$
$$(xH \times 1\mathrm{H}) + (xB \times 1\mathrm{B}) + \textit{partie fixe} = S$$
$$\frac{S - (xH \times 1\mathrm{H} + c)}{b} = B$$

La première écriture traduit l'idée que le salaire est la somme de la rémunération horaire, de la rémunération liée aux billets et de la partie fixe. C'est une idée juste, mais les quantités ne sont pas analysées plus avant.

La seconde écriture est la traduction non conventionnelle d'une analyse dont on aperçoit aisé-ment le sens : nombre d'heures (xH) multiplié par la prime horaire (1H). La lettre H n'a pas le même sens dans les deux occurrences, sauf à représenter le nom commun « heure » ; x a le sens de « nombre de », et 1H le sens de « prime pour une heure ».

L'expression xB x 1B s'analyse de la même manière.

La dernière écriture est surprenante, puisque certaines règles de l'algèbre retrouvent une place : la soustraction de S de la parenthèse (xh x 1H + c), et la division par b. Au passage le sens de la capitale H et de la minuscule h est différencié.

Au total, les écritures personnelles de l'élève sont interprétables, mais elles mélangent algèbre et langage ordinaire, tout en s'appuyant sur une représentation des quantités et de leurs rela-tions qui relèvent davantage d'une conceptualisation de type « invariants opératoires » que d'une conceptualisation algébrique.

Nous pouvons tous avoir de telles dérives opportunistes. Cela traduit le poids des conceptuali-sations informelles dans le fonctionnement de la pensée. C'est une caractéristique importante des schèmes.

Conclusion : qu'est-ce que la représentation ?

Pour conclure, il me semble nécessaire de présenter une réflexion synthétique sur le concept de représentation, dont les behavioristes voulaient se débarrasser, au prétexte qu'on n'avait pas accès à la représentation d'autrui. En réalité la psychologie ne saurait se passer de ce concept qui, avec les concepts d'activité et de développement, est constitutif de la discipline, et indispensable aussi aux disciplines qui s'appuient en partie sur la psychologie. C'est le cas de la didactique, même si, bien entendu, celle-ci s'appuie sur plusieurs autres sources d'inspiration, en premier lieu le domaine d'activité dont l'apprentissage est visé et son épistémologie.

Je propose de distinguer quatre composantes du concept de représentation, complémentaires entre elles, et non indépendantes l'une de l'autre. Chacune mérite un court commentaire. Je serai bref.

Ces quatre composantes peuvent être énoncées de la manière suivante :

- le flux de la conscience ;
- les invariants opératoires : concepts-en-acte tenus pour pertinents et théorèmes-en-acte tenus pour vrais dans l'action ;
- les systèmes de signifiants/signifiés : le langage et les autres systèmes symboliques ;
- l'ensemble des schèmes d'organisation de l'activité.

La prise de conscience est essentielle pour comprendre les sauts qualitatifs dans l'apprentissage et dans l'expérience. Mais il est intéressant aussi de considérer une dimension moins exceptionnelle de la conscience : le flux quasi permanent d'images, de mots, de gestes et de sons, plus ou moins intériorisés dont chacun de nous a l'expérience personnelle. Le poids de l'imagination, notamment de l'évocation des objets absents ou non observables, est évidemment important pour saisir le contenu du flux de la conscience ; mais la perception aussi est essentielle, et ce sont souvent les processus perceptifs qui permettent de voir l'importance des invariants opératoires dans la conceptualisation : en effet, il n'y a pas d'action sans une certaine identification des objets et de leurs propriétés. Souvenons-nous de la relation d'encastrement et de la propriété d'antisymétrie.

Concernant les invariants opératoires, je n'ai guère besoin d'ajouter des commentaires, vu les exemples que j'ai évoqués plus haut à propos des structures additives et multiplicatives.

Les systèmes de signifiants/signifiés jouent un tel rôle dans la conceptualisation que certains auteurs, et non des moindres, ont tendance à identifier les concepts avec les mots qui les désignent (avec les mots ou les symboles). C'est une erreur d'appréciation, et pourtant il ne faut pas minimiser le fait que la symbolisation change le statut cognitif des concepts. En outre la science est faite de textes, même si les textes ne sont pas suffisants pour saisir la source et la portée de l'entreprise scientifique. La science est opératoire ou n'est pas. On mesure l'importance du langage jusque dans le mouvement même de la conscience, puisque le flux de la conscience est pour une part une parole intériorisée : son rôle est important dans la planification, la préparation et l'accompagnement de l'action.

S'il faut placer les schèmes dans la fonction de représentation, c'est parce que celle-ci n'est ni seulement un dictionnaire ou une bibliothèque, mais aussi, et d'abord, une activité. Il s'en suit que les formes particulières d'organisation de l'activité que sont les schèmes doivent faire partie intégrante de la représentation. L'imagerie cérébrale n'est pas en mesure aujourd'hui, et pour une période assez longue probablement, de nous fournir des exemples de schèmes circonscrits à des classes de situations bien définies (comme par exemple les schèmes de dénombrement) ; mais au moins elle met bien en évidence l'activité intense et multiforme des quelques 20 milliards de neurones dont les orbites d'activité, si elles pouvaient être circonscrites davantage, fourniraient un témoignage de l'existence neurophysiologique des schèmes.

Mais il n'est pas besoin du témoignage de la neurophysiologie pour considérer que les schèmes forment un ensemble différencié et hiérarchiquement organisé, dans lequel les formes s'appellent les unes les autres, des plus particulières aux plus générales et réciproquement. C'est la propriété d'adaptation aux situations nouvelles qui constitue le critère le moins contestable de la place qu'occupent les schèmes dans la représentation, dans son fonctionnement, et dans son développement.

Compléments

Dans la discussion qui a suivi l'exposé, Gérard Vergnaud a été amené à préciser certains points :

A une question de Pierre Duchet : Est-ce qu'on pourrait dire que le schème c'est la partie invariante commune à tous les sujets, ou au contraire la partie propre à chaque sujet, celle qui rend compte de la variabilité ? Et est-ce qu'il y a autre chose que les schèmes pour traduire la variabilité des sujets ?

Réponse de GV : Le concept de schème désigne d'abord la manière dont un individu organise son activité face à une certaine classe de situations. Il est vrai aussi qu'il existe des schèmes dans la culture d'une communauté, une classe par exemple, ou un groupe professionnel. Mais il est sage d'essayer de saisir le schème à travers les formes personnelles d'organisation de l'activité ; elles ne sont pas réductibles aux formes retenues dans un collectif.

Les émotions aussi sont source de variabilité bien évidemment, mais cela complique le tableau pour qui est préoccupé d'abord par le développement de la rationalité. Ce que j'ai dit aujourd'hui n'épuise nullement le problème de la variabilité, ni entre individus, ni chez le même individu selon les situations. En outre, il existe de la rationalité et de l'opératoire dans les émotions, même si les aspects non rationnels semblent quand même l'emporter. Enfin les émotions aussi sont organisées par des schèmes : le schème n'est pas synonyme de volontaire ou de délibéré.

Je voudrais ajouter une dernière idée : les collègues peu familiarisés avec le concept de schème acceptent assez aisément l'idée que cela puisse désigner l'activité dans des situations familières ou dans des tâches répétitives, mais ils ne l'acceptent guère pour l'invention et la découverte en situation. Or, justement, si ce sont les schèmes qui s'adaptent au cours de l'expérience, il faut leur reconnaître le caractère de ressource, et considérer que c'est en puisant dans leur répertoire de schèmes que les sujets s'adaptent, lorsqu'ils sont face à une situation nouvelle ; même si les ressources ne se réduisent pas aux schèmes.

A une question d'Alain Bronner : Je voudrais que tu reviennes sur les relations entre conceptualisation et représentation. Tu en as parlé au début de ton exposé, mais je suis un peu déconcerté par ce que tu as dit à la fin sur la représentation. Comment vois-tu l'articulation ?

Réponse de GV : La conceptualisation est effectivement essentielle dans la représentation, même si cette conceptualisation est fragmentaire, et éventuellement fausse. Ce que je mets dans la conceptualisation, c'est à la fois les invariants opératoires (qui sont constitutifs des schèmes), et aussi les catégories prédicatives qui nous permettent de parler du réel. Les systèmes de signifiants/signifiés contribuent à assurer une certaine stabilité des invariants opératoires, notamment en raison du partage des significations dans une communauté donnée. On pense mieux les choses avec d'autres que tout seul. La communication est essentielle et nous avons besoin pour cela du langage naturel et des systèmes symboliques, même si la signification des formes langagières et des symboles n'est pas exactement la même pour tous, y compris dans la même communauté.

Je vais donner un exemple avec le concept de volume, sur lequel nous avons abondamment travaillé à Orléans, avec André Rouchier, Graciela Ricco, Janine Rogalski et quelques autres, il y a plus de 20 ans. J'évoque seulement les deux conceptions du volume que sont la conception unidimensionnelle (le volume mesuré avec un autre volume) et la conception tridimensionnelle (le volume mesuré avec des informations sur les longueurs comme dans le volume du parallélépipède rectangle). Je ne m'attarde pas sur ces deux conceptions et sur les interférences qu'engendre leur coexistence, et je retiens seulement la question de la lecture de la formule du volume du prisme droit $V = AH$. Elle permet de montrer que nous avons besoin d'invariants opératoires pour lire et utiliser une formule.

Que trouvait-on dans les manuels de la classe de cinquième à l'époque ?

Evidemment l'utilisation directe de la formule : *pour calculer le volume, je dois connaître l'aire de base et la hauteur , et je multiplie l'une par l'autre*. Eventuellement, mais pas dans tous les manuels, la lecture indirecte : *pour calculer l'aire de base, je dois connaître le volume et la hauteur et diviser l'un par l'autre*. Mais il existe une troisième lecture, qui ne figurait à l'époque dans aucun manuel sauf celui de Deledicq, à savoir que *le volume est proportionnel à la hauteur quand l'aire de base est tenue constante, et à l'aire de base quand la hauteur est tenue constante*. Or c'est la véritable raison conceptuelle de la formule, liée à son caractère bilinéaire, et à l'indépendance des deux variables aire de base et hauteur. Les systèmes de signifiants/signifiés sont très importants dans la conceptualisation, mais il y a un prix à payer, le décodage des rapports signifiants/signifiés. Ce décodage, ou plutôt cette lecture, implique une conceptualisation, laquelle dépend largement des invariants opératoires. En résumé, pour répondre à Alain, la conceptualisation est bien au centre de la représentation, mais sous plusieurs formes.

A la question de Fabrice Vandebrouck : Je comprends qu'il y a des gros schèmes et des schèmes plus petits ; aussi lorsque j'étudie les pratiques d'un enseignant dans diverses situations, et que je regarde sa manière d'intervenir et d'organiser l'activité de ses élèves et la sienne, est-ce que je peux parler de sa pratique comme d'un gros schème ?

Réponse de GV : Le concept de pratique est un peu comme ceux de compétence et de personne, très général et pas véritablement scientifique à lui tout seul. Il n'est pas suffisamment circonscrit par des classes de situations, et pas suffisamment analytique. C'est d'ailleurs ce qui m'a conduit à relier la définition du schème à l'existence d'une classe de situations identifiée. Ce souci de rigueur m'est d'ailleurs venu à partir de mes lectures sur les algorithmes (Trathenbrot).

Le mieux est l'ennemi du bien et, malgré ses insuffisances, on peut progresser avec le concept de pratique. Mais il faut essayer d'approfondir nos analyses, parce que les conceptualisations contenues dans l'action en situation varient d'une situation à l'autre et d'un schème à l'autre : par exemple il existe une certaine variété de situations de proportionnalité et de schèmes de traitement ; ils n'appellent pas les mêmes théorèmes-en-acte. S'en tenir au concept de proportionnalité serait insuffisant.

Suzon Nadot avait soutenu une thèse de didactique avant de se consacrer à l'analyse des pratiques. Elle avait alors étudié la relation entre le graphe d'une fonction, sa représentation analytique, et le référentiel graphique support du graphe ; et elle avait eu la bonne idée de faire varier le graphe et le référentiel en tenant invariante la représentation analytique, de faire varier le graphe et la forme analytique en tenant le référentiel constant (ce que l'on fait le plus habituellement), et de faire varier le référentiel et la forme analytique en tenant le graphe constant, ce qu'on fait rarement dans l'enseignement. Dans les études sur les pratiques, on ne peut guère espérer circonscrire des situations aussi précisément définies, en tous cas pour l'instant. Et pourtant les pratiques existent ; on peut les considérer comme de gros schèmes, ainsi que le suggère Fabrice.

En didactique professionnelle, on étudie bien des pratiques, mais justement on tire les leçons des recherches en didactique des disciplines et l'on cherche aussi à identifier des schèmes et des invariants opératoires: un bon exemple est celui de la recherche de Sylvie Caens-Martin sur la taille de la vigne. J'aime beaucoup cet exemple, non seulement parce qu'il s 'agit de la vigne et du vin, mais aussi parce que la finesse des prises d'information du tailleur sur le cep est absolument surprenante et que les conceptualisations sont légion, concernant le nombre et l'aspect des pousses, la charge du pied de vigne et l'espace occupé, la vigueur du cep, et sa capacité à tirer bénéfice des tailles antérieures : il faut interpréter les traces qu'elles ont laissées, et anticiper les évolutions ultérieures.

Références

La liste qui suit n'est pas véritablement une liste de références, seulement la liste des auteurs évoqués. Un encouragement à les lire.

Bachelard G. (1949) *La psychanalyse du feu*.Paris, Gallimard.

Bachelard G. (1961) *La poétique de l'espace.* Paris, Presses universitaires de France.

Bachelard G. (1983) *L'eau et les rêves*. Paris, Corti.

Caens-Martin S. (1999) Une approche de la structure conceptuelle d'une activité agricole : la taille de la vigne. *Education Permanente.* 39, p 99-114.

Darwin C. (1985 édition française récente, traduction d'Edmond Barbier) *L'origine des espèces au moyen de la sélection naturelle, ou la lutte pour l'existence dans la nature*. Paris, Editions La Découverte.

Deledicq A. (1982) *Faire des mathématiques*, manuel de 5°. Paris, éditions Nathan.

Dewey J. (1916, 1975 traduction française) *Démocratie et éducation*. Paris, Armand Colin.

Da Rocha Falcao J. T. (1992*). Représentation du problème, écriture de formules et guidage dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre*. Thèse de doctorat. Université Paris 5, René Descartes.

Frege G. (1971) *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris, Editions su Seuil.

Fuson K.C. (1988) *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. C. (1991). Relations entre comptage et cardinalite chez les enfants de 2 a 8 ans In J. Bideaud, J. P. Fischer, & C. Meljac (Eds.), *Les chemins du nombre*. Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires de Lille.

Gréco P. (1991) *Structures et significations. Approches du développement cognitif*. Textes réunis et présentés par D. Bassano, Ch. Champaud, H. Lehalle, avec la collaboration de C. Marlot. Paris, Editions de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.

Guilbaud G. Th (années 1965-70) Séminaire (non publié) de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociales.

Kant E. (1781, 1976 pour une traduction française récente) *Critique de la raison pure*. Paris, Garnier-Flammarion.

Leontiev A. (1992 traduction française) *Le développement du psychisme ; Problèmes*. Paris, Editions Sociales.

Leontiev A (trad. Française) *Activité, conscience et personnalité*. Paris, Editions du progrès.

Nadot S. (1991) *Représentations graphiques et études de fonctions. Les problèmes didactiques et cognitifs du changement de repère. Une approche par la programmation informatique d'un traceur de courbes*. Thèse . Paris, Université René Descartes.

NewellA. & Simon H.A (1995). *GPS, a program that simulates human thought*. Cambridge, MIT Press.

Piaget, J. (1936, 1994). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Lausanne-Paris, Delachaux et Niestlé.

Piaget J. (1964, 3ème édition), *La formation du symbole chez l'enfant,* Neuchatel, Delachaux et Niestlé.

Piaget, J.(1949), *Introduction à l'épistémologie génétique.* Paris, Presses Universitaires de France.

Piaget, J. (1967). *Biologie et connaissance*. Paris, Gallimard.

Platon. (2005 traduction française récente de B. Piettre) *La République (livre 7) Le mythe de la caverne*. Paris, Nathan.

Revault d'Allonnes G. (1915) Le schématisme. *Compte rendu de la 43ème session de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences*. Paris : Masson et Cie, p 563-574.

Revault d'Allonnes G. Le mécanisme de la pensée: les schèmes mentaux. *Revue philosophique*, 60. fac similé dans *Psychologie Française*, 2000, 45.

Russell B. (1961) *Histoire de mes idées philosophiques*. Paris, Gallimard.

Suppes P. (1963) Basic measurement theory. In R.D.Luce (Ed) *Handbook of mathematical psychology,* New York, Wiley

Trahtenbrot P. A. (1963) *Algorithmes et machines à calculer.* Paris, Dunod.

Vergnaud G. (1968) *La réponse instrumentale comme solution de problème : contribution.* Thèse, Faculté des Lettres et Sciences humaines de Université de Paris.

Vygotski, .L.S. (1934/1985), *Pensée et langage,* Paris, Editions sociales.

Lectures complémentaires possibles

Vergnaud G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité,* Berne, Peter Lang. 6 éditions ; traduit en espagnol (1991), en italien (1994), en russe (1998), et en portugais (2010).

Vergnaud G.(Ed) (1991) *Les sciences cognitives en débat. Première école d'été du CNRS sur les sciences cognitives*. Paris, Editions du CNRS.

Vergnaud G. (Ed) (l994). *Apprentissages et Didactiques. Où en est-on* ? Paris, Hachette.

Vergnaud G., Bregeon J. L., Dossat L., Huguet F., Myx A.,Peault H. (1997) *Le Moniteur de Mathématiques. Cycle 3*. Paris, Nathan.

Vergnaud G. (2000) *Lev Vygotski : éducateur et penseur de notre temps.* Paris, Hachette Education.

Vergnaud G. (Ed). (1983). Didactique et Acquisition du Concept de Volume. N° spécial de *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4.

Vergnaud G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, in Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (Eds). *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*, Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum, 39-59

Vergnaud G. (1983). Multiplicative Structures. In Lesh R., Landau M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes,* Academic Press, pp. 127-174.

Vergnaud G. et al. (l990) Epistemology and psychology of mathematics education. In J. Kilpatrick & P. Nesher (Eds*). Mathematics and cognition.* Cambridge, Cambridge University Press, pp 2-17.

Vergnaud G. (1996) La théorie des champs conceptuels. In J. Brun (Ed). *Didactique des Mathématiques.* Delachaux et Niestlé. Lausanne

Vergnaud G., Récope M. (2000) De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui. *Psychologie française* (La Société Française de Psychologie a cent ans), 45, 1, 35-50.

Samurcay R; Vergnaud G. (2000) Que peut apporter l'analyse de l'activité à la formation des enseignants et des formateurs? *Carrefours de l'éducation,* 10, 48-63.

Vergnaud G. (2002) Piaget visité par la didactique. *Intellectica,* 33, 107-123.

Pastre P., Mayen P., Vergnaud G. (2006) La didactique professionnelle : note de synthèse. *Revue Française de pédagogie.* INRP, 154, 145-198.

Mathématiques discrètes : un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques

Cécile Ouvrier-Buffet

IUFM de Créteil-Paris 12

DIDIREM ; ERTé Maths à Modeler

Résumé

Un numéro spécial de ZDM (2004, volume 36) est consacré aux mathématiques discrètes. Plusieurs articles traitent de l'intégration des mathématiques discrètes dans le curriculum, dans différents pays. Cette branche « jeune » des mathématiques suscite l'intérêt du fait des nouvelles potentialités qu'elle offre. En effet, elle permet d'engager les étudiants dans une démarche mathématique, offrant ainsi un champ à part entière pour l'apprentissage de la preuve, de la modélisation, mais pas seulement. Certains soulignent même combien l'expérience en mathématiques discrètes peut favoriser le développement de processus heuristiques chez des étudiants ayant des difficultés en mathématiques.

Depuis plusieurs années, l'équipe Maths à Modeler propose des SiRC (Situations-Recherche pour la Classe). Ces situations sont souvent issues de la recherche mathématique et permettent un apprentissage de transversaux (processus de preuves, de définition, de modélisation, etc.). Certaines ouvrent une autre perspective : il s'agit d'appréhender, dans le discret, des concepts réputés difficiles à enseigner dans le continu. Une situation sera analysée de ce point de vue. Se poseront alors des questions encore plus méta concernant : les liens entre discret et continu, la pertinence d'avoir recours aux mathématiques discrètes pour enseigner des concepts enseignés dans un cadre continu, mais aussi la mise en place d'une problématique et la construction d'un questionnement mathématique (ou : comment permettre à des étudiants d'avoir une expérience mathématique ?).

Mots clefs

Mathématiques discrètes, situations-recherche, construction de définitions, déplacements sur la grille, problème de Frobenius.

Introduction

Ces 25 dernières années, les mathématiques discrètes se sont singulièrement développées. Elles touchent divers champs des mathématiques, tels que la théorie des groupes, la géométrie, la théorie des nombres, la combinatoire, la théorie des graphes, la cryptographie. Les structures discrètes sont des configurations que l'on peut décrire par un ensemble fini ou dénombrable de relations et les objets discrets sont ceux que l'on peut décrire par des éléments finis ou dénombrables. Mais c'est aussi et surtout une façon de considérer un objet mathématique (Grenier-Payan 1998).

Ce champ des mathématiques s'est certes nourri des autres, mais il a également développé des modes de raisonnement et de construction d'objets spécifiques. J'ai pu utiliser ces spécificités pour l'étude de la construction de définitions chez de étudiants du début de l'université, en particulier :

- l'accessibilité des objets discrets et la neutralité de ceux-ci, ce qui permet d'instaurer un rapport à ces objets distant de celui que les étudiants ont habituellement avec les mathématiques : la plupart des objets discrets sont faciles d'accès et neutres car non encore présents dans les programmes (ou, lorsqu'ils le sont, comme les graphes, il s'agit d'un cadre très particulier, voir Cartier (sous presse)) ;
- les objets discrets possèdent différentes définitions, de différentes natures ;
- le lien avec la preuve est lui aussi spécifique : certaines situations discrètes permettent d'aborder différentes visions sur la preuve.

Ces spécificités seront complétées ci-après. En particulier, un état des différentes motivations concernant l'introduction des mathématiques discrètes dans les *curricula*, en France et à l'étranger, sera présenté. J'analyserai ensuite une situation mettant en scène des objets discrets et dont l'un des objectifs est d'appréhender des concepts du continu. Il s'agit d'apporter des éléments de réponses aux questions suivantes : pourquoi utiliser les mathématiques discrètes ? Que peuvent apporter les mathématiques discrètes à la didactique ?

I Introduire les mathématiques discrètes dans les curricula : quelles motivations, quels objectifs ?

1. À l'étranger

Un numéro spécial de ZDM (2004) a été consacré aux mathématiques discrètes, plus précisément « Discrete Mathematics and Proof in the High School Education ». Dans ce volume est fortement soulignée l'accessibilité des objets discrets, notamment le fait que les structures discrètes sont parfois plus faciles à appréhender que les structures du continu (Weigand 2001). De plus, les mathématiques discrètes proposeraient une réelle ouverture pour les élèves en difficulté et un challenge pour les autres (DeBellis & Rosenstein 2004 ; Goldin 2004). Plusieurs questions sont posées dans ce numéro spécial de ZDM. Parmi celles-ci, nous trouvons :

- Comment les mathématiques discrètes contribuent-elles à la compréhension des structures mathématiques ?
- Les mathématiques discrètes peuvent-elles apporter une contribution spécifique pour l'apprentissage de l'argumentation et de la preuve en classe ?
- Se trouve-t-on face à un nouveau type de preuve avec l'utilisation des ordinateurs (exemple du théorème des 4 couleurs) ? La preuve a-t-elle un nouveau rôle, un nouveau statut ?

Mais aussi :

- Comment inférer le général à partir du particulier[1] ?
- Quels choix réaliser pour les *curricula*, et pour quels apprentissages ?

Ces questions concernent aussi bien les mathématiciens que les didacticiens, comme le souligne Schoenfeld (2000).

1 « *(we) should encourage students to learn to ask the generalizing question (...) The question, « What makes a problem example a good one for modeling the general on the particular? » leads to the notion of finding the most elementary, generic example; a sophisticated strategy of the research mathematical scientist* » (Goldin 2004, p. 59)

Étudions plus précisément les questions curriculaires. Lors de la conférence DIMACS (1992), il a été préconisé que les mathématiques discrètes devaient être introduites dans le curriculum pour elles-mêmes. Dans ce sens a été publié « Discrete Mathematics in the Schools » (1997) où le lecteur trouvera différentes activités réalisables en classe à différents niveaux. Une attention y est portée sur la gestion par l'enseignant, enseignant qui peut n'avoir jamais suivi d'enseignements de mathématiques discrètes en tant que telles, sauf cas particuliers. Le NCTM indique quelques années plus tard que :

(...) combinatorics, iteration and recursion, and vertex-edge graphs "should be an integral part of the school mathematics curriculum." (NCTM, 2000, p. 31)

Cette volonté d'intégration des mathématiques discrètes dans les curricula est liée aux arguments suivants (cf. DIMACS, 1997) :

- La preuve et l'abstraction sont travaillées en mathématiques discrètes (par exemple *via* la théorie des nombres, l'induction etc.) ;
- Les mathématiques discrètes sont propices à un travail sur les algorithmes et sur la récursivité ;
- Elles permettent une introduction à la modélisation, mais aussi à l'optimisation et à la recherche opérationnelle, ainsi que des mathématiques « expérimentales » ;
- Les résultats de mathématiques discrètes peuvent être rapidement appliqués de manière concrète ;
- Les problèmes encore ouverts dans la recherche « facilitent » et légitiment en quelque sorte le travail en groupes.

Rosenstein, Franzblau & Roberts Eds (1997) préconisent les mathématiques discrètes dans l'enseignement pour « redynamiser les mathématiques à l'école ». Rosenstein indique en particulier que :

> (...) discrete mathematics offers a new start for students. For the student who has been unsuccessful with mathematics, it offers the possibility for success. For the talented student who has lost interest in mathematics, it offers the possibility of challenge. Discrete mathematics provides an opportunity to focus on how mathematics is taught, on giving teachers new ways of looking at mathematics and new ways of making it accessible to their students. From this perspective, teaching discrete mathematics in the schools is not an end in itself, but a tool for reforming mathematics education (...)

Mais aussi que les mathématiques discrètes sont :

> (...) a new start for teachers and a new start for students (...) a new way to think about traditional mathematical topics and a new strategy for engaging their students in the study of mathematics. (Rosenstein 1997)

Un *Leadership Program* en mathématiques discrètes (LP-DM) a été développé et est soutenu par the *National Science Foundation* (NSF), *DIMACS* et *the Rudgers Center for Mathematics, Sciences and Computer Education* (CMSCE) : il s'agit d'enseignements de mathématiques discrètes dans le cadre du *problem-solving* et de la preuve, y compris pour la formation des enseignants. Ces avancées indiquent clairement la nécessité de développer une didactique des mathématiques discrètes, et ce, selon deux optiques : l'enseignement des mathématiques discrètes pour elles-mêmes, d'une part, et un enseignement de certaines connaissances et compétences (telles que la preuve et la modélisation) via les mathématiques discrètes. Il ne « faudrait » pas que les mathématiques discrètes ne soient vues « que » dans le cadre de la résolution de problèmes...

2. En France

La récente introduction de la théorie des graphes en enseignement de spécialité ES en terminale représente une entrée officielle des mathématiques discrètes en tant que telles dans les classes. N'oublions pas cependant que l'arithmétique est également un champ des mathématiques discrètes. Je vais y revenir ci-après.

Cette ouverture en théorie des graphes est légitimée en terminale ES ainsi :

> Ce thème sensibilise naturellement à l'algorithmique, et, en montrant la puissance de la théorie des graphes pour la modélisation, permet un autre regard mathématique sur diverses situations. (Programmes de terminale, réédition de 2005, p. 12)

Par ailleurs, les programmes insistent sur la cohérence de cette introduction avec l' « avant » et l' « après », que ce soit en gestion ou en informatique. Enfin, le fait que ce champ des mathématiques ne nécessite qu'un « vocabulaire minimum » est mis en avant dans les instructions officielles qui se concentrent fortement sur la résolution de problèmes.

Mais un nouveau rapport aux mathématiques est également escompté, et c'est là un point majeur :

> Pour de nombreux lycéens, le champ mathématique se limite au calcul, à l'étude des fonctions et à la géométrie élémentaire : s'ouvrir sur la théorie des graphes, c'est s'ouvrir à de nouveaux raisonnements, c'est s'entraîner à avoir un autre regard mathématique et finalement, progresser. (Document d'accompagnement des programmes, 2002, p. 107)

Si l'on considère maintenant les instructions concernant l'arithmétique, qu'en est-il des objets de la théorie des nombres ? Leurs spécificités discrètes sont-elles mises en avant ?
C'est effectivement le cas :

> (...) avec peu d'outils théoriques, on y démontre des résultats non triviaux (…)
> (...) des conjectures et des théorèmes dont l'étude théorique est redoutable peuvent être facilement énoncés.
> (...) Des phases expérimentales, des conjectures, des démonstrations « originales » (en comparaison de celles de géométrie ou analyse)
>
> (Document d'accompagnement des programmes, 2002, p. 53)

Et un peu plus loin, l'arithmétique apparaît comme un champ des mathématiques que l'on peut aborder « *sans être pénalisé par d'éventuels échecs dans d'autres chapitres* ».

Ainsi, les points forts d'un enseignement de mathématiques discrètes sont :

- L'accessibilité des objets et des énoncés (ces derniers sont « faciles » à produire par les élèves ; leur preuve peut être questionnée mais ne sera pas nécessairement traitée) ;
- L'indépendance de l'arithmétique ou de la théorie des graphes par rapport aux autres chapitres (les élèves en difficulté peuvent bénéficier d'un nouveau départ) ;
- Un accès à des problématiques de modélisation et à des preuves « originales » (SIC) mais aussi à de nouveaux raisonnements ;
- Un autre regard sur les situations (mais aussi sur les objets) et une démarche expérimentale (conjectures etc.) avérés.

Se présentent à nous, à mon avis, et il faudrait s'y atteler, trois possibilités pour la recherche en didactique en mathématiques :

- Une étude didactique de l'enseignement des mathématiques discrètes comme champ mathématique (au même titre que la géométrie, l'analyse, l'algèbre par exemple) ;
- Une étude didactique de l'utilisation des mathématiques discrètes comme un champ d'expérimentation pour approcher des concepts transversaux (tels que la preuve, la modélisation, la construction de définitions, etc.) :

> Les liens entre les choses sont plus importants que les choses elles-mêmes. D'où l'importance qui sera accordée aux concepts transversaux. (Payan 1995, p. 111)

Ce genre d'étude est en cours depuis de nombreuses années, en particulier au sein de l'ERTé Maths à Modeler[2] ;

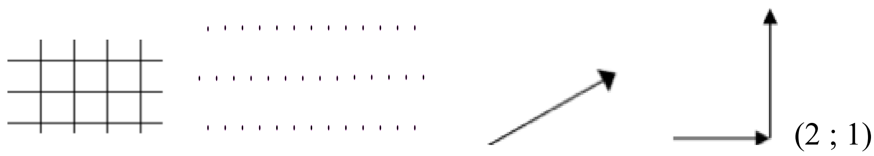
- Une étude épistémologique et didactique du comportement des objets discrets par rapport aux objets du continu : une opposition ? Il s'agit là plus particulièrement d'étudier comment les mathématiques discrètes peuvent contribuer à la compréhension d'autres champs des mathématiques.
  Je propose ci-après de présenter une situation issue des mathématiques discrètes qui a fait l'objet de différentes expérimentations, afin de soulever la question du comportement des objets discrets par rapport aux objets du continu.

II Présentation d'une situation « discrète » : des déplacements sur une grille discrète

1. Les objets en jeu

Il est ici question de déplacements sur une grille discrète.

Une grille discrète peut être à maillage carré ou triangulaire, par exemple. Un déplacement sur le maillage de cette grille pourra être modélisé par des vecteurs ou un couple de vecteurs horizontaux/verticaux ou encore par un couple de nombres entiers. Quant à un ensemble de déplacements, nous ne considérerons ici que les combinaisons entières **positives** de déplacements.



Une grille discrète ? Un déplacement ?

Tableau 1 – Les objets en jeu

Quels sont les questionnements possibles dans ce type de situations ? Il existe un fait expérimental : un ensemble de déplacements étant donné ainsi qu'un point de départ sur la grille, un point de la grille sera ou ne sera pas atteint. Peuvent alors émerger de nombreuses questions concernant l'aspect générateur et minimal de l'ensemble de déplacements initial, mais pas seulement. Avant d'entrer plus dans l'analyse de cette situation, considérons l'un problème des problèmes de la recherche en mathématiques discrètes qui lui est directement lié, en dimension 1 : le problème de Frobenius.

2 www.mathsamodeler.net

2. Le problème de Frobenius : une Situation-Recherche

1. Présentation du problème de Frobenius

Ce problème est aussi appelé « problème diophantien de Frobenius », en théorie des nombres. Il peut s'énoncer ainsi :

> Etant donné des entiers positifs $a_1, \ldots, a_n$ premiers entre eux, trouver le plus grand entier qui n'est pas une combinaison linéaire de $a_1, \ldots, a_n$ à coefficients entiers positifs.

Ce problème peut également être présenté dans le contexte de la monnaie[3]. Il est, d'un point de vue mathématique, NP-complet. Le lecteur pourra faire des essais en ligne à l'adresse suivante (avec au plus quatre entiers naturels premiers entre eux) :
http://www.math.uu.nl/people/beukers/frobenius/index.html.

Considérons ici le problème de Frobenius expérimentalement. Prenons quelques valeurs distinctes (deux ou trois) et regardons quelles sont les valeurs atteintes. Si nous ne prenons que des valeurs paires par exemple, la régularité des valeurs atteintes apparaît de manière quasi évidente. Il en va de même pour des cas particuliers impliquant des multiples. Considérons alors des cas non « triviaux », à savoir : des entiers premiers entre eux. Un phénomène (on peut parler de fait expérimental) se dégage rapidement : il existe des trous « au début » et à partir d'une certaine valeur, tous les entiers sont atteints. Mais ce qui est remarquable ici, c'est de s'interroger sur ces « trous ». Sont-ils caractérisables ? Répondent-ils à une régularité ? La réponse est non, et là réside toute la profondeur de ce problème. Cependant, le travail de conjectures sur des cas simples s'avère possible, tout comme l'élaboration de théorèmes locaux, et cela inscrit clairement ce problème dans le cadre des Situations-Recherche (voir le paragraphe suivant).

Ainsi, certains entiers ne sont pas atteints, mais à partir d'un certain rang, tous les entiers le sont (en excluant bien sûr des cas particuliers dans le choix des entiers $a_1, \ldots, a_n$). On dit que ces entiers atteints sont *représentables*.

L'étude pour deux entiers a_1, a_2 premiers entre eux est très accessible. On peut démontrer que le plus grand entier non-représentable est $a_1a_2 - a_1 - a_2$. Mais aussi que la moitié des entiers compris entre 1 et $(a_1 - 1)(a_2 - 1)$ sont représentables (théorème de Sylvester). Il existe des preuves arithmétiques, ou utilisant des séries, ou encore dans le cadre de la géométrie discrète (le théorème de Pick y est central). Pour plus de renseignements, le lecteur pourra se référer à Ramirez Alfonsin (2006) : il y trouvera les résultats pour n = 2 et 3 et surtout pour n = 4 (ce qui constitue la majeure partie de l'ouvrage). Le problème est encore ouvert pour n > 4.

2. Une Situation-Recherche

Les Situations-Recherche, et plus précisément les SiRC (Situations-Recherche pour la Classe), ont été définies ainsi par Grenier et Payan :
1. Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle. Elle doit être proche de questions non résolues. Hypothèse : c'est déterminant pour le rapport que vont avoir les élèves avec la situation.
2. La question initiale est facile d'accès. Il s'agit d'un problème posé « hors des mathématiques formalisées » : la situation « amène » l'élève à l'intérieur des mathématiques.
3. Des stratégies initiales existent. Les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et les plus réduites possibles.

3 Si les valeurs nominales des pièces en usage dans un système monétaire sont de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ quelles sommes sont payables exactement dans ce système ?

4. Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles.
5. Une question résolue renvoie très souvent une nouvelle question. Il n'y a que des critères de fin locaux. (Grenier-Payan 2003)

Ces situations mobilisent des heuristiques telles que : modéliser, prouver, définir, etc. Elles sont souvent issues des mathématiques discrètes et permettent effectivement différentes stratégies d'avancée dans le problème mais ouvrent également la porte à la pratique de raisonnements différents de par leur nature. Cela est particulièrement bien illustré avec une situation de pavage dans Grenier-Payan (1998).

Le problème de Frobenius s'inscrit dans le cadre des Situations-Recherche et a déjà été utilisé dans les classes (sous la forme de problèmes de monnaie, par exemple par l'équipe de Nice).

Prenons à titre d'illustration deux exemples et étudions les nombres représentables :
– Exemple 1 : les valeurs des pièces sont 5, 8 et 11.
Les nombres atteints sont : 5, 8, 10, 11, 13, 15, 16. A partir de 18, tous les entiers sont atteints. Le dernier entier non-représentable est donc 17.
– Exemple 2 : les valeurs des pièces sont 9 et 11.
Les nombres atteints sont : 9, 11, 18, 20, 22, 27, 29, 31, 33, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 47, 49, 51, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78. A partir de 80, tous les entiers sont atteints. Le dernier entier non-représentable est ici 79.

Ces deux exemples illustrent bien la « variabilité » du phénomène et les questions qui découlent de l'observation des « trous ».

Venons-en au problème de déplacements sur la grille, qui pourrait être considéré comme une extension du problème de Frobenius.

3. *Le problème des déplacements sur la grille*

1. Analyse succincte de la situation

Le problème général qui nous intéresse ici se présente ainsi :

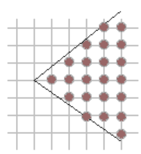
> Prenons une grille discrète ($\mathbb{Z}^2$). Un « point de la grille » est un point du maillage.
> Soit un ensemble E de k déplacements sur cette grille. A partir d'un point donné de la grille, quels sont les points atteignables en appliquant ces déplacements autant de fois que l'on veut ?

Il est possible de reformuler le problème en le type de tâches suivant :

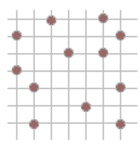
> Etant donné un ensemble E de k vecteurs à coordonnées entières, quels sont les points atteignables, à partir d'un point donné, par des combinaisons entières de ces vecteurs ?

On pourrait travailler en dimension 1, avec le problème de Frobenius. Mais restons plutôt en dimension 2. Si l'on se pose la question de savoir comment atteindre tous les points de la grille, deux propriétés apparaissent :

1) « **densément** » : sur tous les points d'une zone de la grille ce que nous appellerons "densément" ;



2) « **un peu partout** », proche de n'importe où, c'est-à-dire quelque soit un point P de la grille, il existe un point atteint A "proche" tel que la distance entre P et A soit bornée (indépendamment de P). Cette propriété sera dorénavant notée "**u.p-partout**" (pour "un peu partout") (NB : on pourrait aussi parler de



« couvrant »)

Lorsque les deux propriétés “u.p-partout” et “densément” sont vérifiées, il est alors possible d’atteindre tous les points de la grille. Ces deux propriétés ont une fonction opératoire pour définir “ensemble **générateur**”. On peut donc choisir d’étudier des ensembles de déplacements générant tous les points de la grille, ou générant seulement un ensemble de points donné.

Si l’on se place en dimension 1, sur $\mathbb{Z}$, on a le théorème suivant :

> Théorème : quel que soit k entier, il existe un ensemble minimal générateur de k déplacements.

Voici deux exemples sur $\mathbb{Z}$:

- E = {1; -1}

Si on enlève 1, on perd la densité.

- F = {2 ; 3 ; -6}
  - Si on enlève 2 ou 3, on perd la densité
  - Si on enlève -6, on perd la propriété u.p-partout.

Le problème inverse implique, quant à lui, le concept de **minimalité**.

Une fois l’ensemble des points atteints déterminé, on peut en effet étudier la question suivante : est-il possible d’enlever un déplacement sans changer l’ensemble des points atteints ?

Cette question est celle de la minimalité de l’ensemble des déplacements donné. Un ensemble de déplacements est dit **minimal** lorsque la suppression de l’un de ces déplacements modifie l’ensemble des points atteints.

On peut se poser alors la question de la caractérisation d’un ensemble générateur du plan discret qui soit minimal, un tel ensemble est dit **générateur minimal**.

Enfin, il faut s’interroger sur le point suivant : les ensembles générateurs d’un secteur donné du plan discret (ou de tout le plan discret) et **minimaux** (au sens ci-dessus) sont-ils **minimums**, c’est-à-dire, ont-ils tous la même cardinalité ?

On peut montrer le théorème suivant (Ouvrier-Buffet 2003, p. 273)

> Théorème : il existe des ensembles de déplacements sur la grille générateurs minimaux à k éléments, k aussi grand que l’on veut.

Mais, k étant donné (aussi grand que l’on veut), nous ne savons pas construire tous les ensembles de k déplacements générateurs minimaux.

Se dessinent alors des concepts et des problématiques, dans le domaine discret, que l’on retrouve dans le continu, en algèbre linéaire.

Si l’on s’intéresse à la notion de base qui découle de la problématique « générateur », « minimalité » et « minimum », dans le cas discret, toutes les bases n’ont pas le même nombre d’éléments. Cela est très rarement étudié en algèbre, d’autant plus que ce qui est enseigné en algèbre linéaire lisse ce phénomène. Un système générateur minimal, un système libre maximal ne sont en général pas des bases. Par exemple, pour $\mathbb{Z}/(6)$, considéré comme $\mathbb{Z}$-module, il n’existe pas de système libre (non vide) et $\{2 ; 3\}$ est un système générateur minimal. Et dans $\mathbb{Q}$, considéré comme $\mathbb{Z}$-module, tout système réduit à un élément non nul est un système libre maximal et il n’existe pas de base (voir aussi Bourbaki 1962, chapitre 2, §1, ex.16 pour un exemple de A-modules libres de bases finies, de cardinaux différents).

La situation des déplacements sur la grille permet ainsi la mise en place d'une problématique de nature épistémologique autour de concepts transversaux tels que : générateur, minimalité, (in)dépendance etc., concepts que l'on retrouve en algèbre linéaire.

Mais pas seulement ... Si l'on tente maintenant de décrire les concepts présents dans cette situation, la liste peut être longue, dans la mesure où lorsque l'on touche un concept, ses « proches » apparaissent. L'énumération ci-après témoigne de la difficulté à cerner les concepts d'une situation issue de la recherche.

Couple	Régions, bords, opérations
Nombres entiers, équation, opérations (addition, multiplication)	Proximité, génération (« u-p. partout »)
Polynômes	Densité
Vecteurs	
Combinaisons linéaires	Dépendance/indépendance
Génération	
	Chasles
Matroïdes, diophantiennes, algèbre, anneau	

Tableau 2 – Concepts en jeu

Certains de ces termes évoquent effectivement l'algèbre linéaire, champ mathématique dans lequel les définitions et le formalisme unificateur font obstacles (voir Dorier & al, 1997). Mais l'algèbre linéaire n'est **pas** le modèle de la situation des déplacements. En revanche, la situation des déplacements sur la grille peut permettre une rencontre « décontextualisée » avec des concepts que l'on retrouve effectivement en algèbre linéaire. Et rappelons ici la proposition de Rogalski :

> Nous faisons l'hypothèse que c'est une problématique plus que des problèmes qu'il faudra transmettre à l'étudiant, au moment de l'introduction des concepts qu'on veut enseigner. Plus précisément, il faut mettre les étudiants en état de comprendre – et d'accepter – le rôle du détour théorique formel et généralisateur comme une réponse à tout un champ de problème et de questionnements qui « se ressemblent » … alors qu'ils ne le savent pas. (Rogalski, in Dorier & al., 1997, p. 160)

Parvenir à une telle problématique implique une décontextualisation des concepts mêmes de l'algèbre linéaire. L'étude des déplacements sur la grille offre une telle possibilité, même si cette situation s'avère plus difficile que le problème continu. Elle est en revanche plus abordable et plus riche : les difficultés sont moins masquées qu'en algèbre linéaire. Il est important de souligner ici qu'avec la situation des déplacements, il n'y a pas de savoir préconstruit, contrairement à un enseignement très « classique » où le savoir est préconstruit et partiellement visible seulement, où l'on assiste finalement à une pseudo-déconstruction.

2. Une Situation de Construction de Définitions

La situation des déplacements peut être étudiée sous l'angle de la construction de définitions. C'est là une approche qui va enrichir l'analyse de la situation.

Quels pourraient être les rôles des définitions dans la « résolution » de cette situation ? La première fonction des définitions est ici de différencier les propriétés (générateur, minimalité, indépendance, redondance, etc.). La deuxième fonction est de permettre la vérification de l'aspect générateur et minimal d'ensembles de déplacements. La troisième fonction est celle de construction d'ensembles de déplacements générateurs minimaux. Mais la construction de définitions est tributaire des questionnements mathématiques liés au problème. Il ne s'agit pas seulement de "constater" que deux déplacements ne permettent pas d'atteindre tous les points de la grille et qu'il est possible de trouver un ensemble de quatre déplacements "bien choisis" générateur et minimal (quatre déplacements unitaires, dans les directions cardinales). Des questionnements portant sur les équivalences entre les propriétés de certains ensembles de déplacements dépend la construction de définitions.

Dans la situation déplacements, il existe une forte problématique de détermination d'ensembles de déplacements permettant d'atteindre tous les points d'une grille discrète : les résultats de l'algèbre linéaire (notamment le théorème de la dimension par exemple) sont ici mis en défaut.

Il s'agit maintenant, dans la logique d'étude de la construction de définitions dans cette situation, de déterminer des *zéro-définitions* (définitions à l'origine du processus de recherche) et *proof-generated definitions* (définitions générées dans la preuve) (cf. Ouvrier-Buffet, 2003, 2006 et 2007).

Il est possible de voir émerger une *zéro-définition* de la notion de "chemins différents" du type suivant : deux chemins (pour se rendre d'un point de la grille à un autre) sont différents lorsque les coefficients dans la combinaison entière de déplacements sont différents. Cela peut évoluer vers l'énoncé : deux chemins sont différents lorsque les déplacements utilisés sont différents. Cette définition peut également apparaître dès le début de la situation. Il est possible d'analyser l'utilisation de la propriété (l'existence d'au moins deux chemins différents) pour questionner la dépendance et la minimalité.

On a par ailleurs trois concepts à définir : "générateur", "minimalité" et "dépendance". Intéressons-nous maintenant aux *zéro-définitions* d'ensemble générateur de déplacements, d'ensemble générateur minimal de déplacements, et à leur évolution possible, avec l'objectif de la génération de tous les points de la grille.

- *Zéro-définition* d'un ensemble "générateur" de déplacements : un ensemble de déplacements permettant d'atteindre tous les points de la grille.

C'est une *zéro-définition* naturelle, mais peu opératoire pour la construction de tels ensembles et surtout coûteuse pour la vérification de cette propriété. Elle est donc amenée à évoluer dès que le nombre de déplacements à étudier est strictement supérieur à 2, vers une définition opératoire décrivant les deux propriétés "u.p-partout" et "dense".

- *Zéro-définition* d'un ensemble générateur minimal de déplacements
  - *zéro-définition* 1 : un ensemble de déplacements générateur minimal est un ensemble de trois déplacements permettant d'atteindre tous les points de la grille.
  - *zéro-définition* 2 : un ensemble de déplacements générateur minimal est un ensemble de déplacements non liés.

La première *zéro-définition* est liée à la connaissance d'étudiants lambda sur les bases en géométrie analytique, voire en algèbre linéaire. La résolution d'une tâche impliquant un ensemble de quatre déplacements générateur et minimal permet d'invalider cette *zéro-définition*.

La seconde *zéro-définition* a une origine géométrique : pour des étudiants n'ayant pas encore suivi un cours universitaire d'algèbre linéaire, des connaissances sur la colinéarité de vecteurs dans le plan et la coplanarité dans l'espace peuvent intervenir.

Le statut de ces *zéro-définitions* devrait évoluer vers le statut de *proof-generated definitions* du fait des problématiques de preuve suivantes : la preuve de l'existence d'ensembles de déplacements générateurs minimaux, la construction de tels ensembles, la preuve nécessaire à l'établissement des propriétés "générateur" et "minimal" de certains ensembles de déplacements.

III Des expérimentations

1. La situation des déplacements vue comme une Situation-Recherche

Cette situation a été expérimentée en tant que Situation-Recherche dans le dispositif Maths.en.Jeans, au collège (niveau 4[ème]), sous la forme suivante :

> Des personnes (ou, si vous préférez, des relais électroniques…) sont disposées sur un plan en formant un réseau à maille carrée. Chaque personne peut communiquer des informations à certaines autres personnes, à condition de respecter certaines règles ; ces règles sont les mêmes pour toutes les personnes. (Maths.en.Jeans, 1994)

Je ne développerais pas ici les spécificités du dispositif Maths.en.Jeans, mais cela resterait à étudier, afin de caractériser finement l'impact des différents modes de gestion possibles dans des SiRC.

Les élèves sont parvenus à des théorèmes et conjectures concernant la génération des points d'une droite d'une part, et la génération des points de la grille d'autre part. Leurs énoncés sont les suivants :

> Théorème : [avec une règle positive et une règle négative] si nous arrivons à allumer les points +1 ou –,1 alors nous arriverons à allumer tous les points de la droite.
> Conjecture : si a et b sont premiers entre eux, alors nous atteindrons les points 1 et –1.
> Théorème : si on arrive à atteindre les 4 voisins de 0 (1 au nord, 1 au sud, 1 à l'est, 1 à l'ouest), alors on est sûr de pouvoir atteindre tous les points de la grille.

La cardinalité des ensembles de déplacements et la minimalité de ceux-ci n'ont pas été abordées par les élèves.

Cette situation des déplacements sur la grille a également été expérimentée, en première année d'université. Les résultats sont résumés dans le paragraphe suivant.

2. Les déplacements sur la grille : une Situation de Construction de Définitions

Les résultats reproduits ci-après concernent une expérimentation réalisée en première année d'université (Ouvrier-Buffet 2003).

Trois cas d'études avaient été posés aux étudiants, cas pour lesquels les questions suivantes devaient être abordées :
- Quels points de la grille peut-on atteindre (un point de « départ » étant donné) ?
- Deux points étant donnés, existe-t-il des chemins « différents » pour se rendre d'un point à un autre ?
- Peut-on supprimer un ou plusieurs déplacements ? Si oui, quelles en sont les conséquences?

L'ensemble des trois problèmes a permis de réaliser la dévolution de la situation de la façon suivante : un premier problème (à deux déplacements) a permis de négocier le fait que cette situation était différente de l'algèbre (linéaire) et que deux déplacements ne suffisent pas pour aller partout sur la grille. Un deuxième problème (à quatre déplacements avec dépendance) apporte la question de la preuve autour de la question suivante : peut-on supprimer un déplacement sans changer la propriété « génération » ? La question de l'aspect « dépendance » est ainsi posée. Mais à ce stade, on ne sait pas si tous les ensembles générateurs n'ont que trois éléments. Un troisième et dernier problème (à quatre déplacements indépendants c'est-à-dire générateur minimal) permet de « montrer » que trois déplacements ne sont pas toujours suffisants et que le théorème de la dimension est faux dans le cas discret.

Les étudiants ont utilisé différentes représentations (voir quelques exemples dans le tableau 3 ci-dessous ; les représentations algébriques avec systèmes n'ont pas été reproduites ici) et se sont placés dans le cadre de l'algèbre, utilisant les termes « générateurs, libres ou non » et des systèmes d'équations. Mais ils ont été aussi « en-dehors » de l'algèbre car ils ne questionnent pas le théorème de la dimension, pas plus que l'existence d'un ensemble de k déplacements générateur minimal pour $k > 4$. Plus étonnant, le fait que deux déplacements pourraient suffire est très persistant chez les étudiants, même après avoir démontré que deux déplacements ne suffisent pas lors du premier problème à deux déplacements.

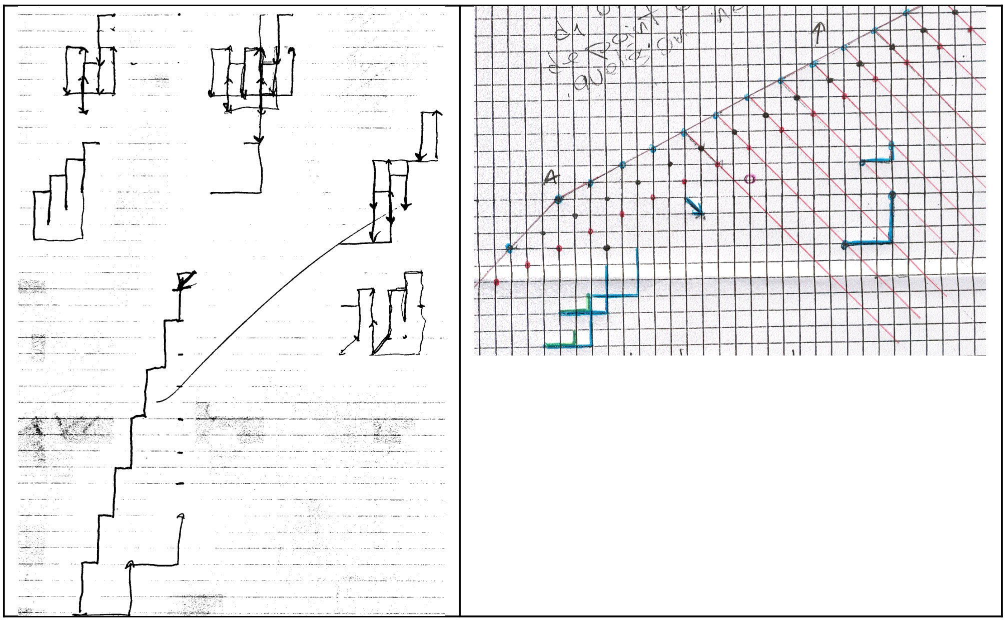


Tableau 3 – Représentations utilisées (graphiques seulement)

Qu'en est-il de la production de définitions ?

Des définitions concernant la génération et la minimalité furent approchées par les étudiants. Cela étant, il n'est pas possible d'attester de *zéro-définitions*. Il s'agit en fait de *définitions-en-acte*. Ces dernières, du côté du concept-outil, se sont acheminées vers des *zéro-définitions* (concept-objet). Au niveau des concepts, à la prédominance des quatre points cardinaux s'est ajoutée la prise en compte de la propriété « u.p-partout », mais pas de celle de « dense ». Trois *définitions-en-acte* de ce type sont apparues. Il s'agit de :

> Générateur : dès qu'il permet d'atteindre les 4 points cardinaux.
>
> Générateur minimal : lorsque tous les déplacements sont utilisés dans la recherche des déplacements "élémentaires".
>
> Ensemble non minimal de déplacements : lorsqu'un déplacement est combinaison entière des autres.

La première *définition-en-acte* est en fait une *proposition-en-acte*.

Les deux *définitions-en-acte* suivantes permettent à l'action des étudiants d'être opératoire. Ce sont des fonctions propositionnelles en relation avec la *proposition-en-acte* de générateur (quatre directions nécessaires).

Comment interpréter le fait que seules des *définitions-en-acte* soient apparues ? La situation fait travailler sur des objets (déplacement, chemin) et les concepts à définir sont des propriétés de ceux-ci (générateur, indépendance, minimalité, etc.). En fait, la difficulté de la tâche ici est la résolution du problème : les objets sur lesquels l'on travaille n'ont pas besoin, dans un premier temps, d'être explicitement définis. Ces caractéristiques de la situation expliquent en partie qu'aucune « vraie » activité de définition des propriétés des déplacements (générateur, etc.) n'ait eu lieu. Les *définitions-en-acte* montrent que les étudiants se détachent difficilement de l'action. De plus, ils se limitent aux cas proposés et ne prennent pas en charge une généralisation qui pourrait faire évoluer des *définitions-en-acte*. De plus, la distance entre manipulation et formalisation est trop rarement travaillée dans l'enseignement, ce qui explique que les étudiants n'ont pas pu prendre une distance suffisante par rapport aux objets manipulés.

3. Quelques remarques pour conclure

Au-delà de la seule situation de construction de définitions, il est intéressant de faire un parallèle entre les élèves de 4ème et les étudiants en ce qui concerne la nature de leurs résultats. Les élèves de 4ème sont sur des procédures arithmétiques alors que les étudiants sont sur des procédures clairement algébriques. On peut également noter que, dans une Situation-Recherche, que ce soit ou non une situation de construction de définitions, il y a une sensibilité aux conditions initiales et au contexte dans lequel est réalisée la situation. L'étude *via* la construction de définitions permet une analyse épistémologique sensiblement différente de celle basée sur le problème de Frobenius par exemple et ouvre également une porte quant à la gestion possible de cette situation des déplacements en classe.

En effet, si l'on considère cette situation sous l'angle des SiRC, la gestion qu'il sera possible d'en faire dans la classe s'avèrera spécifique. De même s'il est question de la regarder comme une situation de construction de définitions. Ces deux modes de gestion, très proches, ont en commun les points qui suivent. Dans les SiRC, où il est question de savoirs transversaux (tels que l'implication, la preuve, la modélisation, etc.), et non pas notionnels, l'enseignant est en double position de chercheur et de gestionnaire de la situation. Dans la gestion des SiRC, le contrôle par l'enseignant de l'activité de l'élève se fait d'abord en fonction de l'avancée dans la résolution du problème et aussi par rapport aux objectifs d'apprentissage, les savoirs transversaux. Les notions mathématiques susceptibles d'apparaître comme des **outils** de résolution peuvent être fournies par l'enseignant (Grenier-Payan 2003).

Des règles, dont celles du débat scientifique (Legrand 1993), apparaissent alors :

> Des règles moins « classiques » (...), telles que celle-ci « Si une conjecture s'avère fausse, peut-on la modifier pour en faire une autre conjecture ? ». Ces règles et propriétés du débat scientifique forment des connaissances de base pour l'activité mathématique et des éléments de rétroaction. Elles sont constitutives d'un milieu pour une SiRC (Grenier-Payan 2003).

Et justement, les leviers sur lesquels il est possible d'agir dans une situation de construction de définitions viennent s'enrichir par la gestion d'un processus définissant : celui-ci peut être appréhendé par les étudiants au travers des *zéro-définitions*. Si l'évolution de ces dernières n'émerge pas, le gestionnaire de la situation pourra contribuer à l'évolution des *zéro-définitions* en utilisant des leviers tels que ceux décrits dans Ouvrier-Buffet (2006, 2007).

IV Ouverture

La situation des déplacements sur la grille ouvre une voie en ce qui concerne l'utilisation des structures discrètes pour appréhender des concepts transversaux que l'on retrouve dans le domaine du discret et dans le domaine continu (tels que générateurs, minimalité, densité, base, etc.). Si l'on cherche à problématiser ces mêmes concepts dans des situations impliquant des objets matériels (pour des raisons évidentes, entre autres, de dévolution), on peut penser à : la couverture du plan par des fractales, la génération de certains types de graphes…

Il faut également s'interroger sur les invariants en mathématiques discrètes que l'on retrouve dans le continu, de manière spécifique : si le discret peut être plus facilement appréhendable que le continu, il ne faudrait pas penser que cela est toujours le cas. Et si l'on se réfère à l'argumentation de Thom, « *le continu précède ontologiquement le discret* » (Thom 1992, p. 137). De nouvelles perspectives de recherche se dessinent clairement.

Bibliographie

Bourbaki N. (1962), *Algèbre.* 3ème édition. Paris, Hermann.

Cartier L. (sous presse), *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation*. Thèse Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

DIMACS (2001) Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science: *Educational Program*. http://dimacs.rutgers.edu/Education

Dorier JL. & al. (1997), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Goldin G.A. (2004), Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 36 (2), 56-60.

Grenier D., Payan C. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 18/1, 59-100.

Grenier D., Payan C. (2003), Situations de recherche en « classe » essai de caractérisation et proposition de modélisation, *Les cahiers de laboratoire Leibniz*, 92, http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/Cahiers2003.html.

Legrand M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques. *Repères IREM* n°10. Topiques Editions.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.) (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ouvrier-Buffet C. (2003), *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/fr/

Ouvrier-Buffet C. (2006), Exploring Mathematical Definition Construction Processes. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 63, n°3, 259-282.

Ouvrier-Buffet C. (2007), *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique*. Collection « Education et sciences ». Editions Fabert.

Payan C. (1995), La géométrie entre les lignes (aspects combinatoires sous-jacents). *Séminaire Didatech* n°168, Université Joseph Fourier, 111-125.

Ramirez Alfonsin JL. (2006) *The Diophantine Frobenius Problem*. Oxford University Press.

Rosenstein J.G, Franzblau D.S., Roberts F.S (Eds) (1997) *Discrete Mathematics in the Schools*. DIMACS Series in Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science Vol. 36. American Mathematical Society & NCTM.

DeBellis, V.A. & Rosenstein J.G (2004) Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 36 (2), 46-55.

Schoenfeld A.H. (2000), Purposes and methods of research in mathematics education. New Brunswick, NJ, 2-4 oct 1992. *DIMACS Series* Vol. 36. American Mathematical Society.

Thom R. (1992), L'antériorité ontologique du continu sur le discret. In Salanskis, JM & Sinaceur, H. (Eds) *Le labyrinthe du continu - Colloque de Cerisy*, 137-143. Springer-Verlag.

Weigand H.G. (2001), Diskrete Mathematik und Tabellenkalkulation: Zur Einführung. *Der Mathematikunterricht*, 47(3), 3.

Discrete mathematics and Proof in the High School (2004), *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 36 (2), 44-84 et Vol. 36 (3), 82-116.

Programmes de Mathématiques, classe terminale séries ES, L, S (juillet 2003, réédités en novembre 2005). CNDP.

Document d'accompagnement des programmes. Mathématiques, classe terminale série économique et sociale, série scientifique (juillet 2002). CNDP.

Didactique de la géométrie
Peut-on commencer à faire le point ?

Marie-Jeanne Perrin-Glorian
Laboratoire André Revuz, Université Paris-Diderot, Université d'Artois,

Marie-Hélène Salin
Laboratoire LACES, équipe DAESL, Université Victor Segalen Bordeaux 2

Résumé

Cet exposé répond à une demande de revue de questions sur le thème de la géométrie. Nous avons d'emblée apporté deux limitations à notre travail : d'une part, centrer la réflexion sur la géométrie dans la scolarité obligatoire, primaire et collège, sans aborder la question de la construction et de la formulation de la démonstration et sans inclure la mesure des grandeurs géométriques ; d'autre part, réaliser seulement une revue des travaux français. Même dans ce cadre restreint, nous ne présentons pas une synthèse des travaux existants. En revanche, en nous appuyant sur des recherches réalisées sur ce thème depuis 1973 (date avancée en 1993 comme marquant le début de la didactique des mathématiques), nous essayons de formuler et d'argumenter des questions, abordées ou non par les recherches, qui nous paraissent importantes pour l'enseignement de la géométrie à ces niveaux et qu'il nous paraît souhaitable d'aborder dans les recherches à venir. Nous tentons de situer les cadres théoriques utilisés dans ces recherches dans un questionnement plus général, avec un souci de nature épistémologique, épistémologie des mathématiques, mais aussi épistémologie de la didactique.

Mots-clés

Géométrie, enseignement de la géométrie, revue de questions de didactique de la géométrie, espace sensible, espace graphique, modélisation, enseignement obligatoire, développement historique de la didactique de la géométrie, recensement de travaux.

Introduction

Cet exposé répond à une demande des organisateurs du séminaire, Lalina Coulange et Christophe Hache : réaliser une revue de questions autour des travaux en didactique de la géométrie. Nous les remercions de nous avoir donné l'occasion de travailler ensemble. C'était un travail intéressant mais un gros travail et il n'est pas fini. Nous sommes conscientes de ne pas avoir répondu à la commande qui, à mesure que nous avancions nous paraissait de plus en plus vaste. Nous y avons apporté deux limitations : d'une part, nous n'avons considéré que la géométrie dans la scolarité obligatoire, primaire et collège, sans aborder la question de la construction et de la formulation de la démonstration et sans inclure la mesure des grandeurs géométriques ni les vecteurs. D'autre part, nous nous sommes limitées aux travaux francophones et même français. En revanche, nous avons essayé d'ancrer notre questionnement dans une réflexion prenant en compte le développement historique de la didactique des mathématiques en France et de la didactique de la géométrie en particulier, en remontant en amont de ce qu'on appelle habituellement didactique. Nous ne ferons donc pas une synthèse des travaux de didactique de la géométrie. Une telle synthèse resterait à faire. Notre projet a plutôt été de questionner les travaux qui ont accompagné et étudié l'enseignement de la géométrie en France et son évolution depuis une quarantaine d'années [1] et d'essayer d'en tirer des questions pour des recherches futures.

Nous nous sommes intéressées plus particulièrement au début du collège parce qu'il nous paraît important de développer des recherches à ce niveau puisque c'est là et pas beaucoup avant que peut se négocier vraiment l'entrée dans une démarche géométrique théo rique (pré-axiomatique). En effet, c'est à partir de cet âge que le développement des enfants et de leurs connaissances permet de l'envisager et c'est à partir de ce niveau que les enseignants, spécia-listes de mathématiques, sont censés disposer de la formation mathématique nécessaire à cet enseignement.

Nous n'avons pas envisagé les questions du point de vue des cadres théoriques actuellement utilisés en didactique de la géométrie pour garder toute liberté d'introduire les distinctions et catégories qui nous semblaient pertinentes afin d'essayer d'englober tout ce qui a été fait, et aussi d'identifier ce qu'il serait intéressant de faire. Évidemment nous partageons une culture didactique très liée à la théorie des situations qui sera peut-être perceptible.

Tout notre travail est porté par une forte interrogation épistémologique, épistémologie de la géométrie bien sûr mais aussi épistémologie de la didactique, notamment sur ses finalités : nous avons essayé de dépasser la perspective de l'enseignement actuel et de nous mettre dans une perspective plus générale avec l'idée que la didactique vise non seulement à aider les enseignants et la formation des enseignants mais aussi à éclairer les choix des décideurs.

Nous avons d'une part cherché à tirer le bilan de ce qui a été fait en tentant d'identifier les avancées, les abandons, les questions qui restent à creuser. D'autre part, nous avons essayé de croiser ce bilan avec un regard sur des aspects épistémologiques et théoriques pour voir comment on pouvait poser maintenant des questions pour les recherches en didactique de la géométrie pour le primaire et le collège, en amont et en parallèle de celles concernant ~~à~~ la démonstration.

Dans une première partie, nous présenterons notre vision du développement historique des travaux de didactique de la géométrie en France. Dans une deuxième partie, nous reviendrons sur les finalités de l'enseignement de la géométrie et nous nous intéresserons plus particulièrement à ce que nous appelons l'espace graphique, comme interface entre les aspects pratiques et théoriques de la géométrie. Au fil de cette réflexion, nous dégagerons quelques questions qui nous paraissent se poser en didactique de la géométrie. Dans la conclusion, nous tenterons quelques pistes pour une synthèse (future) des travaux existants et pour de nouvelles recherches. Il faut noter qu'au moment de la préparation et de la présentation de cet exposé, les actes de l'école d'été de 2007 n'étaient pas parus et que nous n'avons eu accès qu'à une partie des versions provisoires des textes ; comme nous n'avons participé ni l'une ni l'autre à cette école d'été, même si nous référons ici ou là à quelques-uns des textes qui en sont issus, notre travail est donc à considérer comme une contribution supplémentaire au thème « Géométrie » de ces actes plutôt que comme une suite.

1 Il serait intéressant de remonter plus loin, en particulier dans la première moitié du 20ième siècle, au cours duquel de nombreux mathématiciens ont réfléchi et écrit sur la géométrie et son enseignement (Poincaré, Méray, Bourlet, Fréchet...)I

Première partie : Regard historique sur les travaux de didactique de la géométrie

Une première question concerne la date à partir de laquelle commencer cet historique. Le colloque « Vingt ans de didactique » ayant eu lieu en 93, nous avons décidé de regarder ce qui s'est passé à partir des années 73.

Une deuxième question est relative aux moyens de recueillir de l'information sur cette période : Grand N commence en 74, RDM en 80, Petit x en 83, Repères IREM en 90. Mais, dès leur création à partir de 1969, les IREM travaillaient et l'APMEP a publié des brochures attestant des travaux de l'époque, dont beaucoup concernaient l'enseignement de la géométrie, objet de nombreuses polémiques.

Notre « état des lieux » est découpé en deux parties : 73-93 puis à partir de 93. 93 est la borne de ce premier état des lieux car c'est une date à laquelle les textes donnant de grandes orientations pour les recherches sur l'enseignement de la géométrie ont été publiés et serviront de point de départ à de nombreuses thèses.

Quatre raisons (au moins) expliquent pourquoi il est intéressant de réaliser un historique : il y des questions récurrentes, par contre d'autres se posent qui n'étaient pas évoquées, d'autres ne sont pratiquement plus prises en compte alors qu'elles n'ont pas été résolues, enfin, l'EIAH a mis en lumière de nouveaux objets.

1. Premier état des lieux : 1973-1993

Les années 73-83 : le travail des groupes IREM

A la création des IREM, la didactique n'est pas constituée en tant que discipline, (elle ne porte pas encore de nom), les groupes de recherche qui se constituent ont pour but d'associer enseignants du secondaire, professeurs d'école normale et enseignants du supérieur pour travailler à partir des nouveaux programmes, liés aux mathématiques modernes[2].

- **Au point de départ du questionnement sur la géométrie dans les IREM**, il y a le programme du collège de 70-73. Voici ce qu'André Revuz écrivait en 1975 :

> « Le programme de 70 était dans l'esprit de ceux que j'appellerais modestement les plus lucides de ses auteurs, un programme de transition avec un objectif immédiat : donner clairement à la géométrie le statut épistémologique qui est le sien, de théorie physique, et un objectif plus lointain : diffuser l'idée que le modèle le plus opérationnel de la réalité qu'elle étudie est celui d'un espace affine sur un espace vectoriel de dimension 3 et muni d'un produit scalaire. »

Cette intention a été réalisée par la commission Lichnerowicz en choisissant de

> « traiter des propriétés affines d'abord (en 4ème) et de mettre provisoirement entre parenthèses la notion de distance ».

Mais il y a loin de passer des intentions au contenu effectif de l'enseignement, d'où la création de nombreux groupes IREM sur ce sujet, comme le groupe Jeomatri (IREM de Grenoble). Revuz note la production de ce groupe comme un exemple très intéressant de manuel montrant « qu'il est parfaitement possible de faire comprendre aux élèves le statut épistémologique de la géométrie, c'est-à-dire, en particulier le statut des axiomes », et ceci dans le cadre de l'introduction de la géométrie affine en 4ème.

2 A partir de 83, la didactique naissante se saisit de la question de l'enseignement de la géométrie, de manière plus fondamentale que dans cette première décade, où les équipes IREM sont confrontées à l'impact des décisions prises par la commission Lichnerowicz.

Pourtant, très vite, (à partir de 73), certains groupes IREM réagissent face au traumatisme que provoque la « géométrie des maths modernes » sur l'ensemble des enseignants de collège.

L'IREM de Clermont-Ferrand lance une Offre Publique de Collaboration (OPC) pour une expérimentation de programmes de quatrième et troisième (surtout en géométrie mais non exclusivement). Cinq IREM répondent favorablement, et la recherche est inscrite parmi les recherches INRDP[3]. Une évaluation fouillée est menée sous l'égide de Régis Gras, avec tout l'arsenal statistique qu'il développe.

Voici comment cette recherche est présentée (Pérol, 1979) :

> « Il s'agit de préparer un éventuel changement de programme applicable après les diverses phases de l'expérimentation, donc dans quelques années. […] La Commission ministérielle Lichnerowicz a, lors de sa réunion du lundi 2 avril, approuvé le principe d'une telle expérimentation. […] nous pensons que les programmes actuels ont de très graves défauts et que les nouvelles annexes et commentaires divers ne peuvent constituer que des palliatifs. Il faut donc songer à les remplacer et, pour faire mieux, il faut cette fois les appuyer sur une expérimentation sérieuse. Parmi les reproches que nous pouvons adresser aux actuels programmes, relevons-en deux pour fonder sur eux nos propositions.
>
> 1) Les élèves qui ne poursuivront pas des études par la voie longue ont été considérés comme sans intérêt. Les tracés divers dont beaucoup auront besoin n'arrivent qu'après des chapitres plus théoriques qui leur font perdre pied. Nous soutenons que c'est, au contraire, sur leurs besoins à eux que l'enseignement doit être bâti et que l'on obtiendra ainsi, par surcroît, un meilleur enseignement pour ceux qui poursuivront des études longues de mathématiques.
>
> 2) La voie actuelle choisie pour l'apprentissage n'a été justifiée que par ses qualités comme voie d'exposition. En caricaturant à peine, on pourrait dire qu'a été faite pour elle la première phase du mode d'emploi de Bourbaki. Mais nous ne pouvons pas supposer à nos élèves "une certaine habitude du raisonnement mathématique" puisque notre tâche à nous est précisément de les rapprocher de ce but éloigné. »

Les objectifs principaux de cette recherche OPC sont de « fonder davantage l'enseignement de la géométrie sur l'activité des élèves, s'intéresser ainsi prioritairement non à l'édification d'une mathématique mais au développement des diverses capacités de tous les élèves ». Les orientations choisies sont relatives aux méthodes d'enseignement, à l'axiomatique et aux démonstrations.

Il s'agit selon nous, d'une des premières recherches en didactique des mathématiques, tentant de prendre en compte à la fois les contenus mathématiques, les objectifs de l'enseignement et les sujets de l'enseignement, les élèves. Les observations se sont déroulées dans 30 classes et ont touché entre 600 et 800 élèves. Cette recherche a fourni beaucoup de matériaux pour les brochures publiées par l'APMEP : Géométrie au premier cycle tome 1, APMEP n°21 (1977), tome 2 n°22 (1978) et un compte-rendu : Recherche inter-IREM 73-78 en géométrie de 4ème-3ème dite OPC : « Réflexion critique et évaluation » publié dans la brochure APMEP n° 34 (1979).

En ce qui concerne les résultats des élèves, la différence de score au test de sortie entre les élèves des classes témoins et ceux des classes expérimentales est nette en géométrie (+ 36%), les enfants faibles et les redoublants progressent mieux dans ces dernières que dans les classes témoins.

3 Nom à l'époque de l'INRP actuel.

- **En 78, arrivent de nouveaux programmes de 4ème - 3ème**, résultat de négociations complexes entre l'Inspection Générale, le ministère et l'APMEP. Ces programmes motivent certains groupes IREM à diversifier et approfondir leurs travaux. De nouvelles brochures sont publiées par l'APMEP : Activités mathématiques en quatrième-troisième n°33 (1980) et n° 38 (1981).

Comment caractériser le contenu de ces quatre brochures ? Elles témoignent d'un questionnement diversifié de la part des nombreux rédacteurs des articles[4] sur des questions de fond comme : la géométrie, théorie physique ou théorie mathématique, le rôle à donner à l'axiomatique dans l'enseignement en 4ème et 3ème, l'importance du lien géométrique-numérique et du point de vue vectoriel ; elles témoignent à la fois d'une culture mathématique importante (dans le choix et la présentation des activités proposées aux professeurs pour leurs élèves) et de conceptions pédagogiques nouvelles, marquées par les méthodes actives. Toutefois, sans être totalement absente, la question des finalités de l'enseignement de la géométrie est peu présente, le problème du rapport de l'élève aux figures tracées n'est pas vraiment étudié même s'il est évoqué par certains, (voir Revuz 1979 p.29 et Barra et coll., même op. p.38). On ne trouve pas d'analyse *a priori* des situations rapportées ni d'observations systématiques de classes.

- **En ce qui concerne le primaire,** contrairement à ce qui s'était passé pour le secondaire, ce n'est que peu à peu que les personnes engagées dans les recherches IREM vont s'intéresser à la géométrie. Par contre, dès la fin des années 70, on trouve dans les aides pédagogiques publiés par la COPIRELEM ainsi que dans les ERMEL CE et CM, et dans Grand N, des descriptions d'activités géométriques riches et nouvelles par rapport aux enseignements traditionnels, expérimentées dans des classes. Toutefois, ces activités ne sont pas cadrées, il n'y a pas de réflexion générale sur les finalités de l'enseignement de la géométrie ni sur les savoirs à enseigner.

La décade 83-93

Deux « institutions » différentes travaillent sur l'enseignement de la géométrie : les groupes IREM, engagés dans l'action sur le terrain, qui produisent des documents pour l'élaboration de nouveaux programmes puis leur mise en œuvre, et les universitaires, qui produisent des études plus fondamentales.

- **Entre 79 et 85, des groupes IREM** travaillent à l'élaboration de documents pour préparer puis mettre en œuvre de nouveaux programmes dont la parution s'échelonne entre 85 (pour la 6ème où ils sont mis en application en 1986) et 88. L'enseignement de la géométrie y occupe une place importante, avec l'apprentissage du raisonnement déductif qui doit commencer dès la 6ème.

Le travail sur cette question est jalonné par la parution des suivis scientifiques et de différentes brochures IREM, qui font une place importante, à partir de la quatrième à la réflexion sur l'enseignement de la démonstration.

- L'émergence de points de vue plus proprement didactiques : des textes importants

A la troisième école d'été, Colette Laborde (1984) fait un « exposé sur la géométrie ». La 4ème partie s'appelle « Problèmes d'enseignement de la géométrie », elle dégage trois thèmes sur lesquels des recherches seraient à développer : restauration d'une problématique de la géométrie, le dessin et la figure géométrique, le numérique et le géométrique. Elle cite peu de références françaises.

4 dont nous conseillons la lecture à ceux qui ne les connaitraient pas !

C’est à partir de 83 que sont publiées les premières réflexions de fond sur l’enseignement de la géométrie :

Brousseau (1983) : « Étude de questions d’enseignement. L’exemple de la géométrie » (Séminaire Grenoble).

Arsac (1988) : « L’origine de la démonstration » (RDM 8.3) puis Arsac & coll (1992) : « Initiation au raisonnement déductif au collège » (PUL).

Duval (1988) : « Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence » (Annales de didactique n°1).

Duval et Egret (1989) : « L’organisation déductive du discours » et : « Comment une classe de 4ème a pris conscience de ce qu’est une démarche de démonstration » (Annales de didactique n°2).

Chevallard & al. (1991-92-93) : Autour de l’enseignement de la géométrie au collège.
Chevallard et Julien (1991) : première partie, Petit x 27
Mercier et Tonnelle (1992) : deuxième partie Petit x 29
Mercier et Tonnelle (1993) : troisième partie Petit x 33

Toutes ces dates sont un peu fictives, car les travaux dont certains témoignent ont été initiés antérieurement, en particulier à l’occasion de l’accompagnement par les IREM des nouveaux programmes de collège 1985. C’est le cas des textes d’Arsac, Chevallard *et al.*, Duval, dont les statuts sont d’ailleurs très différents.

Ces textes, très riches, sont difficilement résumables. Nous pouvons tout de même essayer de préciser leur visée afin de montrer la diversité des problématiques dégagées à cette période [5].

Les propositions de Guy Brousseau

Elles s’insèrent dans une réflexion plus générale sur le sens des connaissances, lié aux situations dans lesquelles elles fonctionnent. Brousseau propose de différencier la géométrie comme modèle de l’espace et la géométrie comme théorie mathématique en présentant deux situations fondamentales, représentatives de ces deux fonctions.

Cet article est référencé dans de nombreux travaux, qui ne touchent pas tous à la géométrie étant donné l’horizon ouvert par l’article. Il restaure « une problématique de la géométrie » comme modèle de l’espace qui peut permettre de donner un cadre, une cohérence et des outils méthodologiques pour l’enseignement de la géométrie à l’école primaire et il propose une entrée dans la problématique géométrique au collège s’appuyant à la fois sur un rapport explicite à l’espace et sur des interventions didactiques fortes de l’enseignant.

Les travaux d'Arsac

Son étude d’épistémologie didactique de la démonstration emprunte à Balacheff la distinction entre preuve et démonstration. Il pose ainsi son objet :

> « Tout le problème consiste à comprendre comment on peut être amené à passer de preuves fondées sur l’évidence de la figure à des démonstrations dont la figure n’est plus que le support, ce qui est d’ailleurs le problème posé dans l’enseignement de la géométrie » (Arsac opus cité p. 276).

Cette étude sert de base aux travaux de l’IREM de Lyon, sur l’initiation au raisonnement déductif dans le domaine de la géométrie, qui en privilégie le sens. Une des situations étudiées, « le triangle aplati », va devenir emblématique des questions d’autres chercheurs sur le rapport à la figure : Berthelot & Salin (1992), Berté (1995-1996), Floris (1995).

5 On voit apparaître les noms des futurs directeurs de thèse dans les recherches en didactique des mathématiques sur la géométrie.

Les travaux de Duval

Annales 1 : Duval expose trois formes[6] d'appréhension des figures de géométrie : perceptive, opératoire et discursive que l'élève doit savoir distinguer. Il insiste sur le rôle de l'appréhension opératoire[7].

Annales 2 : Le premier article est relatif à l'apprentissage de la démonstration et s'appuie sur une analyse cognitive de la démonstration. Le deuxième propose une ingénierie ayant pour but d'aider les élèves à maîtriser les aspects « techniques » de la démonstration en 4ème.

Les travaux de l'équipe marseillaise

« L'approche tentée consiste à produire une image objective de ce qu'est dans la réalité historico-culturelle la géométrie » en répondant aux questions suivantes :

- Quel est l'objet de la géométrie ?
- Qu'est-ce que l'espace ?
- Comment s'organisent nos connaissances relatives à l'espace ?
- Comment se construit le savoir géométrique ?
- Comment se sert-on du savoir géométrique ?

Comme le texte de Brousseau, ceux de l'équipe marseillaise embrassent large ! Il s'agit de relancer la réflexion des professeurs confrontés au nouveau programme, (le dossier date de 87) sur : « Qu'est-ce que la géométrie ? » et « Géométrie et enseignement ». Les questions ci-dessus sont abordées d'un point de vue épistémologique appuyé sur de nombreux exemples. Dans le deuxième article, un très long développement porte sur le travail du schéma. La troisième partie comporte une courte analyse sur les rapports des élèves à la géométrie enseignée en 6ème et 5ème et une liste d'exemples illustrant la question « Est-il possible de rendre visibles les mathématiques à l'œuvre dans le cours de géométrie du collège ? ». La conclusion annonce une suite qui n'est pas venue, malheureusement :

> « Nous pourrions envisager maintenant de nous affronter à la question centrale que tout enseignement de la géométrie se doit de prendre en charge, celle de la géométrie comme *lieu d'exercice de la rationalité.* C'est ce que nous ferons dans un dernier volet, à venir. Mais il fallait retrouver pour cela le chemin de l'espace sensible, pour que la géométrie aide à construire cet objet culturel qui voudrait se donner pour universel et naturel, comme s'il faisait partie du milieu de toute action spatiale. Il fallait donc que la géométrie donne des outils de modélisation de l'espace. C'est seulement à ce prix que la géométrie pourra ne plus être, pour les élèves du Collège, l'occasion d'un travail purement matériel ou symétriquement l'occasion d'un travail purement formel. Le rapport de modélisation que nous cherchons à trouver permet en effet que le retour à l'espace sensible serve de moyen de validation des résultats du travail géométrique. Ces résultats deviennent en effet, dans l'espace sensible de l'action matérielle, des réponses vérifiables expérimentalement. »

- Deux cours de la 5ème Ecole d'été (1989) font le point sur les recherches sur l'enseignement de la géométrie, (publiés dans le volume 9.3 de RDM).

Laborde (1990) : « L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques » (RDM 9.3, p. 337-363).

Arsac (1990) : « Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France » (RDM 9.3, p. 247-280).

6 Dans un texte ultérieur paru en 1994 dans Repères-IREM n° 17, il en ajoutera une quatrième : l'appréhension séquentielle, liée à la construction avec des instruments.

7 Cf Mesquita Ana (1989) et Padilla Sanchez Virginia (1992).

L’existence de ces deux cours suppose un développement important des recherches depuis 1984, développement effectivement en cours de réalisation, qui marque la différence avec la période précédente, riche en propositions d’actions innovantes mais peu contrôlé es.

C. Laborde commence par préciser ce qu’elle entend par phénomène didactique, fait d’observation interprété à l’aide d’une analyse. Le cours procède à un découpage des phénomènes lié au fonctionnement du système didactique selon le triplet : détermination des contenus d’enseignement, organisation des interactions savoirs-apprenants, organisation entre savoirs, enseignant et apprenants en situation d’enseignement. L'auteur dégage en particulier trois jeux « subtils » liés à l'organisation des milieux des situations d'enseignement de la géométrie : le jeu sur la perception, le jeu sur les instruments, et le jeu sur les systèmes de signifiants, qu'elle met en relation avec les phénomènes didactiques relevés dans les recherches citées.

Le but de l'article d'Arsac est de classer les problématiques présidant aux recherches actuelles sur l’enseignement de la démonstration et du raisonnement. Ces recherches se situent dans deux perspectives différentes : certaines, réalisées dans des groupes IREM et publiées dans les « Suivis scientifiques » partent des problèmes rencontrés par les professeurs et proposent des remédiations. D’autres s’appuient sur une analyse épistémologique du fonctionnement de la démonstration et essaient d’en tirer des conséquences didactiques. L’article montre que ces deux points de départ conduisent à des problématiques différentes : le premier met l’accent sur les problèmes liés à la forme, le second sur les problèmes du sens des démonstrations. L'auteur met en doute la possibilité de l'enseignement systématique de la démonstration.

- Quelques thèses soutenues pendant cette période (83-93), importantes pour leurs répercussions sur les recherches ultérieures sur l'enseignement de la géométrie :

N. Balacheff : Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège (1987).

D. Grenier : Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième (1988).

B. Parsysz : Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée : contribution à l'étude de la relation voir/savoir (1989).

R.Berthelot et M.H.Salin : L’enseignement de l’espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire (1992).

2. *Et depuis 1993 ?*

Les recherches en didactique se sont développées dans de nombreuses directions. L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire, qui nous occupe ici, a été l'objet d'un certain nombre de thèses et d'articles originaux[8], dont il est impossible de faire une synthèse. Nous avons toutefois tenté de les classer pour faire apparaître les thèmes d'études principaux et dégager en conclusion quelques questions nous paraissant essentielles, questions qui seront reprises et développées dans la seconde partie de notre exposé. Nous n'avons retenu ici que les thèses et les articles renvoyant à des recherches de grande envergure, ne pouvant citer tous les articles intéressants mais plus ponctuels, publiés dans Petit x ou Grand N.

8 Par le terme « original », nous désignons des articles qui ne sont pas la reprise ou l’exploitation assez proche de thèses. Ex : Berté (1995)

Quatre thèmes d'études

Nous avons réalisé à peu près (et difficilement) une partition des textes en quatre thèmes, mais beaucoup d'entre eux comportent des parties qui relèveraient d'une autre catégorie que celle dans laquelle nous les avons placés. Voici les titres de ces quatre thèmes :
- Analyse de l'enseignement : Transposition didactique et comparaisons curriculaires.
- Observation, analyse et interprétation des difficultés d'enseignement et d'apprentissage, particulièrement dans l'enseignement au collège et dans la formation des PE.
- Production d'ingénieries didactiques, en réponse à une problématique précise.
- Les recherches développées pour la formation professionnelle.

Les recherches faisant appel aux EIAH nous ont posé particulièrement problème : pour beaucoup d'entre elles, les EIAH ne sont pas étudiées en tant que telles mais elles constituent un moyen d'examiner certaines questions et d'en approfondir l'étude. Aussi, nous avons ajouté une étoile à côté du nom de l'auteur de la publication. Il faut noter l'importance de l'article de Laborde et Capponi (1994), dont le titre : « Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique » évoque l'un des arrière-plans théoriques des recherches menées sur l'enseignement de la géométrie dans certains EIAH [9].

Analyse de l'enseignement : Transposition didactique et comparaisons internationales	
Transposition didactique	**Thèses ou programmes de recherche portant sur des comparaisons curriculaires entre la France et d'autres pays**
Analyse du processus sur un contenu particulier : Tavignot (1991) *Étude de la transposition didactique d'un point de vue épistémologique :* Chaachoua (1997)*, Both Carvalho (2001)* *Articulation des concepts :* Berté (1995) RDM 15/3 Dans beaucoup de thèses non citées ici, une partie relève de l'étude de la transposition didactique, d'un point de vue historique.	France / Allemagne : Cabassut (2005) France / Italie : Celi (2002) France / Chili : projet Ecos DIDIREM-Valparaiso (2006) France / Vietnam : Doan Huu (2001),

9 Ayant écarté le champ de la démonstration de notre exposé, nous ne citons pas non plus les travaux autour des EIAH concernant la démonstration en géométrie.

Des thèses ou travaux visant à décrire l'enseignement ordinaire, analyser et interpréter les difficultés d'enseignement, particulièrement au collège et dans la formation des PE	
Analyse de l'existant (élèves et/ou enseignants) Rauscher (1993) Abboud-Blanchard (1994)* Fregona (1994) Mul (2000) Assude & Gélis (2002)* Horoks* (2006) *Formation des enseignants* Rolet (1996)* Vergnes (2000) Houdement & Kuzniak (1999 à 2007) Caliskan (2006)* Tapan (2006)* Jore (2006)* Acosta (2008)*	*Conceptions, connaissances des élèves et/ou des enseignants* Pfaff (1991) Jovenet (1998) Vadcard (2000)* Miyakawa (2005) Lima (2006)* Bulf (2008) *Aspects langagiers* Robotti (2002) Mathé (2006)

Production et / ou analyse d'ingénieries didactiques, associées à d'autres thèmes d'études (école et collège)	
Enseignement primaire Fregona (1994) Argaud (1998)* Gobert (2001) Equipe ERMEL (2006) Equipe lilloise (2005 et ss) Coutat (2006)*	*Collège* Rommevaux (1997) Groupe « Didactique des mathématiques » IREM d'Aquitaine (Petit x 65; 70) Jahn (1998)* Recherche INRP collège (Pressiat et al) colloque inter-irem géométrie 2000) Laguerre (2005) Restrepo (2008)*

Les recherches développées pour la formation professionnelle
Bessot A.& Eberhard M. : Représentations graphiques d'assemblages de cubes et finalités des situations. (1987) et Une approche didactique de la lecture de graphismes techniques en formation professionnelle de base aux métiers du bâtiment (1993) Bessot A. & Laborde C.: Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture - tracé du bâtiment (2006) Bessot A. Laborde C., Metzler L. (2006) Construction du simulateur et usages en formation

Ces recherches concernent l'apprentissage des connaissances nécessaires à la maîtrise des rapports avec l'espace physique dans le cadre de la formation professionnelle des métiers du bâtiment. Initiées en 1988 par Annie Bessot et Madeleine Eberhardt, elles ont donné lieu à plusieurs publications. La continuité et la richesse de ces travaux ne sont pas assez connues ! Seront-ils poursuivis après le départ à la retraite de leurs auteurs ?

Quelques remarques sur cette liste de travaux

Différents aspects des recherches sur l'enseignement de la géométrie apparaissent plus ou moins clairement selon les cadres théoriques et les objets de recherche :

- Aspects épistémologiques : nature de la géométrie, finalités de la géométrie, de son enseignement, objets de la géométrie ;
- Aspects sémiotiques : figures, langage, instruments…
- Aspects conceptuels, rapport à la géométrie, aux objets de la géométrie ;
- Aspects institutionnels, choix curriculaires, organisation de l'enseignement ;
- Aspect « situations », organisation d'un milieu d'apprentissage ;
- Aspects liés à la médiation de l'enseignant : pratiques des enseignants, formation des enseignants, médiation sémiotique.

Mais ces aspects ne prennent pas tous la même importance dans les travaux cités, et il faudrait en étudier l'évolution, par exemple sur ces dix dernières années. A la fin de cette revue, il nous semble que quatre questions importantes se dégagent actuellement, sur lesquelles nous allons revenir :

Quatre questions actuelles importantes

Les finalités de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire

La question ne paraît plus être posée (du point de vue de la recherche), malgré les difficultés rencontrées dans le choix qui a été fait en France avec les programmes de 85 et suivants pour le collège et le virage pris en 2008 pour l'école primaire, (rejet des apprentissages spatiaux au delà du cycle 2). Ceci nécessite comme le disait Chevallard en 86, de se poser à nouveau la question « qu'est-ce que la géométrie ? »

Que faut-il enseigner à l'école primaire et comment ?

Suivant les finalités choisies, des réponses différentes peuvent être apportées à la première partie de la question. Pour la seconde partie, malgré des propositions d'ingénieries très riches, le « comment ? » reste une question ouverte si elle doit prendre en compte une contrainte forte, l'insuffisance de formation des professeurs d'école, tout particulièrement en ce qui concerne la géométrie.

Figures, rapports aux figures et à la démonstration

C'est la question en débat depuis toujours, que le choix d'introduire des « ilots déductifs » en 6ème a encore plus mise en lumière. Cela aurait pu être « La Question », unique, de l'exposé car elle met en relation l'avant (le primaire) et l'après (4ème et au delà).

Quelle(s) structuration(s) pour le savoir géométrique au collège et à l'école primaire?

Cette question, objet de tant de débats pour le collège dans les années 70, semble très peu abordée actuellement. Elle demeure pourtant essentielle. A quoi sert de s'acharner sur la démonstration, à en faire un objet d'enseignement si elle n'est pas au service de la construction d'un savoir géométrique consistant ?

Deuxième partie : Quelques réflexions théoriques pour tenter de préciser ces premières questions

1. Qu'est-ce que la géométrie ? Pourquoi l'enseigner ?

Trois modes de fonctionnement de la géométrie

Nous avons vu que Brousseau a différencié la géométrie comme modèle de l'espace et la géométrie comme théorie mathématique en présentant deux situations fondamentales, représentatives de ces deux fonctions de la géométrie. René Berthelot et Marie-Hélène Salin ainsi que d'autres chercheurs par la suite ont précisé et mis en œuvre cette distinction pour analyser des séquences d'enseignement en primaire ou au collège. En y ajoutant l'intérêt de la géométrie pour modéliser d'autres domaines de savoir, nous pouvons distinguer, hors de tout projet d'enseignement, trois modes de fonctionnement de la géométrie :

1) La géométrie comme théorie mathématique autonome (indépendamment de son rapport avec l'espace physique), gouvernée par une axiomatique pouvant revêtir différentes formes : géométrie euclidienne, analytique, vectorielle, etc. et justifiée par sa cohérence et son utilité dans le champ des mathématiques voire d'autres disciplines scientifiques.

2) La géométrie comme modèle de l'espace physique, « technologie de l'espace, théorie de la maîtrise pratique de l'espace » comme le dit Chevallard (1990-91, p. 60), auquel on peut attribuer, comme pour tout modèle, deux sens de fonctionnement, deux finalités :

- une finalité pratique : on utilise le modèle dans le but d'agir sur le réel pour obtenir un résultat concret, une réalisation matérielle ou un déplacement, soit comme professionnel soit pour la vie quotidienne ;
- une finalité théorique : on construit le modèle pour comprendre le réel et le théoriser.

- Ces deux finalités sont liées : le modèle théorique, quel qu'il soit, doit permettre de rendre compte des problèmes pratiques.

3) La géométrie comme modèle (au sens de moyen de représentation) pour d'autres champs de savoir, c'est-à-dire pour produire une représentation géométrique d'autres grandeurs, de notions issues d'autres champs de savoir, y compris à l'intérieur même des mathématiques et constituer pour ces divers champs un puissant outil heuristique, ce qu'on appelle parfois la pensée géométrique ou l'intuition géométrique par le fait qu'on peut transférer dans ces champs des intuitions issues de notre rapport à l'espace (cf. jeux de cadres, Douady, 1987).

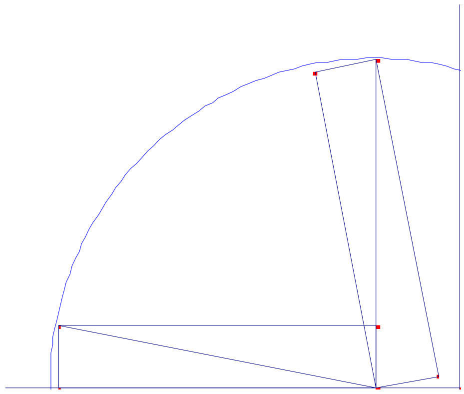
Ces trois modes de fonctionnement ne sont pas étrangers. Les théories mathématiques, aussi abstraites soient-elles, gardent un lien avec la réalité parce que les axiomes ne sont pas choisis n'importe comment. Même quand ils le sont pour des raisons purement logiques, ils le sont en référence à d'autres théories qui, à l'origine, ont été construites pour modéliser un pan de réalité. C'est particulièrement vrai en géométrie. Ainsi les géométries non euclidiennes sont nées d'interrogations portées par l'axiomatique euclidienne qui, elle, visait à modéliser la réalité. Les théories algébriques de la géométrie sont nées pour unifier des théories correspondant à des points de vue différents. Nous y reviendrons. Elles évitent le problème de l'espace mais ne le règlent pas.

> « Certes le géomètre peut refuser de comparer son expérience avec celle du physicien. Il peut s'enfermer dans des systèmes axiomatiques, en posant comme données *a priori* les axiomes et la logique de la déduction. Il évitera ainsi, de justesse, le problème de l'espace (…) mais il n'aura rien fait pour l'éclairer. » Gonseth, 1945, I-8.

Pour l'enseignement dans la scolarité obligatoire, nous allons surtout nous intéresser au deuxième mode de fonctionnement avec ses deux finalités, pratique et théorique. Remarquons cependant que l'enseignement a presque toujours une finalité théorique même si elle est différée, y compris dans l'enseignement professionnel, du moins tel qu'il se fait actuellement : ce n'est jamais la précision de la réalisation pratique qui intéresse le professeur mais la justesse du raisonnement dans le modèle théorique ; or la finalité a évidemment un effet majeur sur le contrat didactique. Ceci nous amène une première question :

Le savoir mathématique se limite-t-il à la finalité théorique ? L'enseignement des mathématiques se limite-t-il à la finalité théorique des savoirs mathématiques ?

Pour l'éclairer, arrêtons-nous un instant sur la géométrie comme moyen de contrôle de l'espace, sur le rapport théorie/pratique en géométrie.



- Une première remarque, c'est que, quelle que soit la finalité, la théorie peut dispenser de l'expérience, ce que nous pouvons illustrer avec un exemple vécu par l'une d'entre nous : devant installer un meuble dans une pièce assez basse, la théorie lui a suggéré de mesurer la diagonale du rectangle de côté quand le meuble était encore sur le sol, ce qui lui a permis d'éviter d'abîmer le plafond. De même, pour fabriquer une vitre en forme de parallélogramme (cf. Berthelot & Salin, 1992), un vitrier géomètre aurait pu se contenter de trois mesures sans réaliser un encadrement sur place.

- Une deuxième remarque, c'est que la théorie permet d'expliquer les résultats de l'expérience, comme dans le cas des médiatrices ou du triangle aplati (Berthelot & Salin, 1992).

- Une troisième remarque, c'est qu'il faut distinguer plusieurs niveaux d'expérience, notamment sur le terrain avec les objets de la réalité ou sur le papier avec des schémas, des figures qui représentent soit la réalité soit un modèle théorique.

- Enfin, si la théorie donne une solution, la réalisation effective (et même la possibilité de cette réalisation) dépend des instruments ; inversement, on peut disposer d'une solution satisfaisante dans la pratique même si la théorie ne donne qu'une solution approchée voire démontre l'inexistence d'une solution exacte.

On retrouve ici les trois aspects de la géométrie soulignés par Gonseth (1946, ch. II) : intuition, expérimentation, déduction :

- L'intuition porte avec elle son évidence, elle se présente comme une réalité immédiate. La connaissance par intuition est une connaissance *a priori* chez l'adulte mais elle se construit progressivement chez l'enfant.
- Il y a plusieurs niveaux d'expérimentation. Pour que la géométrie assume l'aspect d'une discipline expérimentale, il faut en réaliser les notions et les êtres par des objets. La réalisation des objets et des instruments n'est pas au hasard : elle s'appuie sur l'intuition que nous avons de l'espace, des formes et des possibilités de déplacer les objets.
- La théorie permet de régler et d'interpréter l'expérience : les actes de l'expérimentateur ne sauraient être séparés de la réflexion qui les inspire.

  > « L'activité théorique se présente comme une expérimentation mentale sur des éventualités nettement conçues et telles que l'intuition sache chaque fois décider si elles sont compatibles ou si elles sont contradictoires entre elles. Ces éventualités, pour une part, s'im-

> posent ; et, pour une autre part, l'esprit les imagine librement. Elles sont par ailleurs sou-mises aux règles du raisonnement, c'est-à-dire aux lois qui régissent leurs combinai-sons. » (Gonseth, 1946, II-62)

Dans les synthèses successives, la théorie contrôle de plus en plus l'intuition. Au final, quand on a une axiomatisation complète, on ne recourt à l'intuition que dans le cadre de ce qui a été défini par la théorie mais l'intuition du sensible peut continuer à fonctionner justement parce que les axiomes ne sont pas quelconques : le choix des axiomes est lié à l'intuition du monde sensible, avec des économies obtenues par déduction. Comme le dit Gonseth, (1946, II-67) « En géométrie, le théorique tient partout à l'intuitif ».

Ce que dit aussi et surtout Gonseth, c'est qu'à aucun niveau de théorisation, on ne peut sépa-rer les trois aspects, intuitif, expérimental, théorique. Il y a une dialectique entre les différents niveaux : chacun influe sur les autres. Il ajoute que si l'on regarde ce que font les auteurs de manuels (en 1946 ou avant, donc) et non ce qu'ils disent, on voit que tous font appel aux trois aspects et qu'aucun ne peut amener un démenti à l'autre. Cela se voit clairement aussi dans l'utilisation par un expert d'un logiciel de géométrie dynamique : il utilise l'expérimentation dans une dialectique entre l'intuition visuelle sur l'écran, la théorie dont il dispose et celle qui est embarquée dans les outils du menu.

Pourquoi enseigner la géométrie ? Qu'enseigner en géométrie ?

Le rapport de la commission Kahane sur la géométrie (Kahane, 2002[10]) énumère un certain nombre de raisons d'enseigner la géométrie dans la scolarité obligatoire. Nous en retenons ici trois principales liées aux modes de fonctionnement que nous avons identifiés plus haut :

On peut considérer qu'il est nécessaire d'enseigner la géométrie à tous les enfants en lien avec sa finalité pratique : la géométrie donne des moyens de contrôle de l'espace et de traitement de problèmes qui se posent dans l'espace (objets de l'espace et espace des déplacements). Elle est donc utile pour tout le monde dans la vie personnelle et sociale ; elle a une utilité spéci-fique dans certaines professions.

On peut enseigner la géométrie comme théorie mathématique axiomatique pour assurer les fondements de la géométrie pratique et trouver des solutions aux problèmes qu'elle pose ; c'est aussi et surtout une source de problèmes non aisément algorithmisables favorisant le développement du raisonnement déductif.

De plus, l'utilisation de l'intuition géométrique dans d'autres domaines demande que cette intuition soit créée, quel que soit le point de vue considéré, pratique ou théorique.

Cependant, les raisons d'enseigner la géométrie sont étroitement liées à la question de ce qu'il faut enseigner en géométrie. De plus, du point de vue de la didactique de la géométrie, par delà les raisons d'enseigner la géométrie, et le choix de ce qu'il faut enseigner en géométrie se pose encore une autre question que nous n'aborderons guère : comment enseigner la géomé-trie ? Avant de revenir sur ce qu'il nous paraît important de considérer pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et au collège ainsi que dans la formation des enseignants, nous vous proposons un petit détour historique et épistémologique qui nous permettra d'aborder en termes de continuités et de ruptures, d'abord le développement de la géométrie, ensuite son enseignement.

10 Le rapport est paru en 2000, il a été publié chez Odile Jacob en 2002.

Continuités et ruptures dans le développement des théories géométriques

Dans le développement des théories, tel que le décrivent Dahan-Dalmedico et Pfeiffer (1986)[11], on observe des développements dans différentes directions et des réorganisations qui englobent ce qui précède, c'est-à-dire une progression dialectique.

Aux 17ème et 18ème siècles, on a d'abord des développements et des apports qui marquent des avancées importantes pour la suite :

- *La géométrie analytique*

L'apport de Descartes (1637) est fondamental par la rencontre de la géométrie avec l'algèbre, l'introduction du calcul pour éviter les cas de figure.

- *La géométrie projective*

Par la suppression du cas particulier des parallèles, elle permet d'éviter les cas de figure dans la géométrie synthétique. Le projet de Desargues (1591-1661) est de « faire profiter la théorie des coniques des acquis des peintres en perspective et inversement [d']améliorer les techniques des artistes, ingénieurs et tailleurs de pierre en les formulant en termes mathématiques concis » (D.-D. & P., p. 128). Son principal ouvrage « Brouillon project d'une atteinte aux évènements d'une rencontre du cône avec un plan » (1639) ne fut tiré qu'à 50 exemplaires que l'auteur distribuait à ses amis géomètres. Il utilise un vocabulaire particulier mis au point avec ses amis de l'académie Mersenne (1635) mais a peu de retentissement à son époque. Ses idées sont reprises par Pascal (1623-1662) et La Hire (1640-1718). Beaucoup plus tard, en 1854, Chasles redécouvre une copie du « Brouillon project ».

Poncelet (1788-1867) reconstruit la géométrie dans sa prison en Russie (comme officier de Napoléon) à partir de ses souvenirs des cours de Monge et Carnot et y développe ses propres recherches. Le traité des propriétés projectives des figures paraît en 1822 et marque une réaction à la trop forte emprise de la géométrie métrique, renforcée par l'emploi exclusif des méthodes analytiques. Il veut donner à la géométrie synthétique une aussi grande généralité que celle qui caractérise la géométrie analytique (en particulier en évitant la considération des cas de figure). Il met pour la première fois l'accent sur l'idée de transformation géométrique, vue comme correspondance entre figures de deux plans qui transforme un point de la première en un point de la seconde ou un point de la première en une droite de la seconde (dualité). (D-D. & P., p. 139-146)

- *La géométrie descriptive*

Monge (1746-1818) aurait élaboré sa théorie entre 1760 et 1770 alors qu'il était chargé à l'école du génie de Mézières de résoudre un délicat problème du relief d'une fortification (D-D. & P., p. 137-139). La géométrie descriptive est introduite dans les programmes de l'école normale de l'an III.

Au 19ème siècle, la découverte des géométries non euclidiennes pose la question des fondements et de la possibilité d'unification des différentes théories.

- *Les géométrie non euclidiennes* (D-D. & P., p. 151-159)

Vers 1800 (et même un peu avant) des mathématiciens commencent à envisager qu'on peut remplacer le postulat des parallèles par sa négation et Gauss (1777-1855) puis Lobatchevski (1793-1856) et Bolyai (1802-1860) commencent à développer des géométries à laquelle ils refusent toute faculté de décrire l'espace physique. Jusqu'en 1800 la géométrie euclidienne était censée décrire le monde sensible ; ses théorèmes étaient considérés comme absolument vrais. (D-D. & P., p. 153-159). Gauss s'intéresse à l'axiome des parallèles dès 1792 et déve-

11 Abrégé dans la suite D-D & P.

loppe cette étrange géométrie à partir de 1813 mais ne publie pas, craignant les clameurs des Béotiens. Vers 1825, Bolyai et Lobatchevski élaborent indépendamment une théorie équivalente à celle de Gauss (hypothèse de l'angle aigu dans le quadrilatère de Saccheri). Ils publient respectivement en 1826 et 1833. Riemann (1826-1866) en 1854, lors de son admission à la faculté de philosophie de Göttingen, rédige son célèbre mémoire intitulé « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie » publié en 1867.

Le lien entre les objets mathématiques et le monde réel est remis en question. Riemann écrit :

> « Une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques, et l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions. Or il s'ensuit de là nécessairement que les propositions de la géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés par lesquelles l'espace se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience... » (cité par D-D & P. p 159).

Il reconnaît dans l'espace physique une variété à 3 dimensions, formée seulement par son contenu matériel, qui détermine également sa métrique. Si les corps sont indépendants des lieux, la courbure de l'espace doit être constante. Mais cette courbure constante n'est plus nécessaire si l'on fait dépendre la métrique de la répartition de la matière. Le corps entraîne le champ métrique qu'il engendre : il y a interaction entre l'espace et les corps qui y sont plongés (D-D & P. p. 159).

- *Algébrisation des géométries projectives (coordonnées homogènes)*

En 1847 Von Staudt (1798-1867) définit des coordonnées projectives permettant de libérer la géométrie projective de toute considération métrique, elles sont reformulées par la suite par Klein pour les rendre indépendantes de l'axiome des parallèles. Parallèlement Möbius (1790-1868) et Plücker (1801-1868) introduisent (Plücker, 1829, 1834) les coordonnées homogènes qui permettent de formuler analytiquement les propriétés de la géométrie projective.

- *Interprétation projective des propriétés métriques*

Des efforts visent aussi à l'interprétation projective des propriétés métriques : Laguerre (1834-1886) tente en 1853 de mettre la mesure des angles sur des bases purement projectives. Cayley (1859) élabore indépendamment, à l'aide d'une forme quadratique dans le plan projectif, une mesure projective des longueurs et des angles qui généralise celle de Laguerre.

- *Synthèse de Klein*

Dès 1871 Klein entrevoit la possibilité d'englober les géométries non euclidiennes dans la géométrie projective en examinant cas par cas les géométries engendrées par les différentes quadriques de l'espace. Il parvient en 1872 à unifier les géométries ainsi que la méthode analytique et la méthode synthétique (projective) en proposant dans le programme d'Erlangen une classification des géométries par les groupes de transformation.

Finalement, après le fondement ensembliste des nombres apparu dès la fin du 19ème siècle, le 20ème siècle voit la reformulation en termes d'espaces vectoriels. Ainsi, plus de 20 siècles après la crise des irrationnels et une première définition de ce qui deviendra les réels, appuyée sur les rapports de grandeurs avec un raisonnement par cas et par l'absurde (Eudoxe), le changement de point de vue qui conduit au fondement de la géométrie sur les nombres est totalement achevé. Nous retenons de ce détour historique que la géométrie s'est développée d'abord pour traiter des problèmes d'espace et de grandeurs, que la mesure des grandeurs a conduit à étendre les nombres et à fonder les réels, que la géométrie s'est développée ensuite pour cadrer théoriquement de plus en plus l'intuition spatiale ; on peut y voir des ruptures amenées par la considération d'un nouveau point de vue (par exemple l'indépendance de l'axiome des parallèles) mais aussi des réorganisations et réinterprétations qui maintiennent l'unité du savoir géométrique.

En conclusion, pour l'enseignement, on pourrait distinguer trois points de vue sur la géométrie en prenant en compte d'une part les finalités (pratique/théorique) et d'autre part à l'intérieur de la finalité théorique, l'axiomatisation à la Euclide à partir d'objets décrivant l'espace et l'axiomatisation à partir des espaces vectoriels qui met les réels au départ et n'intervient explicitement que dans le supérieur. Cependant, toutes les théories ne se valent pas du point de vue de la pratique. Faut-il privilégier la facilité des démonstrations ou l'adéquation avec les connaissances spatiales ? Quelle place donner à chacune, à quel moment ? La question se pose (de manière différente) pour les élèves et pour la formation des enseignants. Au bout du compte, il nous semble qu'il reste un choix pour le secondaire : fonder la géométrie sur les grandeurs en ne faisant apparaître les nombres qui y sont cachés que dans un deuxième temps ou mettre les nombres dès le début et tout fonder sur les nombres. L'enseignement classique correspond au premier choix. C'est le deuxième choix qu'on a essayé de faire dans les années 70. Ne peut-on faire actuellement une synthèse dialectique : redonner toute leur place aux grandeurs pour le sens sans se priver des nombres quand ils permettent de simplifier considérablement les écritures et les raisonnements ?

Pour l'enseignement, ce détour soutient donc la question : *quelle place accorder aux nombres et aux grandeurs dans l'enseignement de la géométrie pour assurer à la fois la cohérence de l'enseignement et son utilité pour répondre aux différentes finalités ?*

Continuités et ruptures dans l'enseignement obligatoire

Beaucoup de travaux l'ont montré, il y a une rupture nécessaire dans le rapport aux figures quand on les envisage du point de vue de la démonstration. Ainsi, les travaux des années 80 ont identifié la rupture entre « la géométrie d'observation » et « la géométrie de démonstration »[12] en passant de la cinquième à la quatrième. La réponse des programmes a été d'initier à la démonstration dès le début du collège. On a ainsi introduit plus tôt un rapport symbolique aux figures (il faut faire confiance à ce qui est codé donc au langage symbolique et pas à ce qu'on peut vérifier avec les instruments). Actuellement, dans l'enseignement, cette rupture se fait donc au début du collège avec rejet des connaissances du primaire. Est-il nécessaire qu'elle se situe à ce niveau ? Ne peut-on envisager une construction plus progressive au long de l'enseignement de la géométrie en primaire et au début du collège, d'un point de vue théorique appuyé sur la recherche de propriétés générales et l'enrichissement continu des connaissances théoriques mais en s'appuyant sur un milieu constitué de « figures-dessins » (au sens de Parzysz, 1989) ?

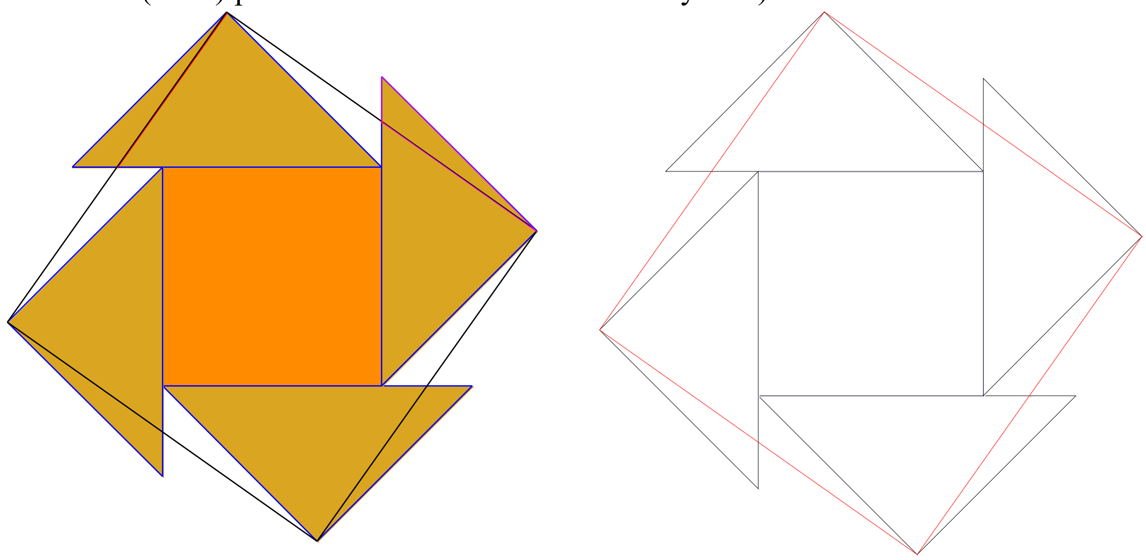
Par ailleurs, dans l'enseignement primaire, la reproduction de figures-dessins passe le plus souvent par l'usage de mesures. Au début du collège, le sens du terme « reproduire » est censé se modifier mais pour que tous les élèves aient une même figure, plus facile à contrôler, on impose souvent des mesures alors qu'elles n'interviennent pas pour le problème posé. L'usage fréquent des mesures, qui a pour conséquence de fixer la figure, n'enlève-t-il de la généralité et de la richesse aux problèmes concernant les dessins géométriques ? On peut dès le primaire adopter un point de vue différent, en donnant une place à ce que l'équipe de Lille a appelé la restauration de figures (cf. Duval, Godin, Perrin-Glorian, 2005 ; Duval et Godin, 2005 ; Keskessa, Perrin-Glorian, Delplace, 2007) : il s'agit de reproduire une figure donnée (modèle) en

12 D'autres dénominations ont été utilisées plus tard comme « géométrie du constat » et « géométrie déductive ». Ces diverses dénominations à usage des professeurs sont discutables.

donnant une amorce de la figure à obtenir : le jeu sur le modèle, l'amorce et sur les instruments disponibles permet la mise en œuvre de propriétés géométriques indépendamment des mesures.

Faut-il dès le début du collège, considérer la figure d'un point de vue symbolique (codage, texte) et apprendre à se méfier de ce que disent les instruments ? Ne peut-on s'appuyer sur l'usage des instruments dans la construction d'un point de vue théorique ? L'usage des instruments de géométrie n'est-il pas à construire lui-même en lien avec celui des propriétés géométriques dont ils sont porteurs ? A l'entrée en sixième, cet usage, notamment celui de l'équerre est encore problématique pour beaucoup d'élèves (Offre, Perrin-Glorian, Verbaere, 2006).

La nécessité de démontrer passe par le souci de généralité et peut se rencontrer dès la manipulation d'objets géométriques matériels tels les gabarits ou les dessins. Prenons un exemple tiré de Abu-l'Wafa : il s'agit de fabriquer un carré trois fois plus grand qu'un carré donné (voir aussi Maurin (2008) pour le doublement d'un carré au cycle 3) :



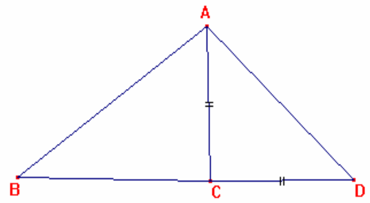
On peut obtenir le grand carré par découpage de deux des carrés ou en dessinant les morceaux dans la bonne position. Comment prouver qu'on obtient bien un carré ? Quels sont les outils théoriques pour faire une démonstration qui prolonge la résolution du problème pratique ? On voit ici que les définitions et théorèmes dont on dispose permettent plus ou moins facilement de rendre compte de la manipulation. Une démonstration proche de la manipulation consisterait à montrer l'égalité des petits triangles qu'on déplace en utilisant l'égalité des angles opposés par le sommet, l'égalité à un demi-droit des angles des triangles rectangles isocèles et donc l'égalité des autres angles ainsi que l'égalité des côtés des triangles rectangles isocèles. On montre l'existence d'angles droits par compensation d'angles. Ce genre de raisonnement est entièrement appuyé sur l'expérience et la manipulation (compensation des aires des triangles) mais le découpage a une portée théorique : la finalité est théorique et non pratique, même si on découpe et superpose les petits triangles dans un premier temps. La finalité est théorique à partir du moment où on se pose la question : est-ce que cela marcherait pour n'importe quel carré ? En faisant cela, on travaille sur les grandeurs, longueurs et aires mais on n'a nul besoin de faire intervenir les nombres. Par la suite, on pourra faire le lien et remarquer qu'on a ici une construction géométrique de racine de 3. Cependant, avec l'organisation actuelle de la géométrie on n'a plus de moyen de faire ce type de raisonnement proche d'une manipulation sur les surfaces parce que les cas d'isométrie des triangles n'arrivent qu'en seconde et même plus du tout avec les nouveaux programmes. On dispose en cinquième de la symétrie centrale mais la symétrie centrale est beaucoup plus difficile à mettre en œuvre pour obtenir une démonstration : elle demande par exemple d'identifier un parallélogramme qui n'apparaît pas immédiatement sur la figure.

Dans l'équipe de Lille, les situations de reproduction de figures étudiées ont justement parmi leurs objectifs de tenter d'appuyer la construction des concepts géométriques en amenant des questions de nécessité à propos de tracés de figures matérielles.

Actuellement, dans l'apprentissage de la démonstration, on apprend aux élèves à se méfier de la figure ; en particulier les irrationnels (ou les idécimaux) sont abondamment utilisés pour introduire des contradictions entre point de vue des mesures et point de vue théorique dans des exercices mettant en général en jeu le théorème de Thalès ou le théorème de Pythagore. On prend des valeurs numériques telles que des points ont l'air alignés, des angles ont l'air droit mais ils ne le sont pas du fait de l'irrationalité d'une des mesures. Cependant, peut-on supposer que des mesures de segments données sont des valeurs exactes ? Quel sens ont des calculs théoriques sur des figures particulières ?

Par exemple, dans le problème ci-contre, proposé en quatrième :
Si on avait supposé l'angle ACD droit et demandé de calculer AD on aurait trouvé 4,8 $\sqrt{2}$ dont une valeur approchée à 1mm près est justement 6,8. L'angle ACB est droit puisque ABC est semblable au triangle 3, 4, 5 (il faut bien que l'un des deux angles soit droit pour qu'on puisse conclure).

1) Réaliser la figure suivante avec BC=6,4cm, AC= CD=4,8cm ; AD=6,8cm ; BA=8cm.



2) Les points B, C, D sont-ils alignés ? Justifier.

Les exercices de ce type fournissent des mesures dont on ne dit pas avec quelle précision elles sont connues ; on demande aux élèves de construire une figure avec ces mesures et bien souvent, à la précision qu'il serait légitime de supposer d'après les données (1mm près), les calculs ne permettent pas de trancher.

Cette remarque ne veut pas dire que ce type de problème n'est pas intéressant, au contraire. Mais, pour qu'il ait un sens, il faut pouvoir élucider jusqu'au bout la différence entre la figure tracée et la figure théorique, distinguer ce qui relève de la précision des mesures et du soin du tracé et ce qui relève de la théorie. Faut-il utiliser ce genre de problème quand on n'a pas encore abordé les irrationnels ? *Comment traiter la question des approximations dans les rapports entre nombres et géométrie ? Quelle élucidation peut-on en faire ? A quel niveau ?*

Ces questions nous ramènent à celle de la finalité de l'enseignement de la géométrie en distinguant l'enseignement obligatoire, l'enseignement professionnel, l'enseignement scientifique, la formation des enseignants. Veut-on principalement, pour l'enseignement scientifique, une théorie efficace qui permette d'aller le plus vite possible aux résultats ? Dans ce cas, le choix des années 70[13] était peut-être bon. Mais l'enseignement obligatoire doit ouvrir à tous les autres enseignements et à la formation générale de tout un chacun. Si l'on considère que le travail sur les figures et les objets de l'espace est nécessaire et formateur en lui-même, il faut en tirer les conséquences et lui accorder une place suffisante. *Une question qu'il serait sans doute important d'approfondir : celle de l'usage de la géométrie « théorique » dans les problèmes professionnels.*

13 Nous pensons aux programmes du lycée ; la question de ce que pourrait être un programme de collège qui permette d'introduire l'algèbre linéaire dès le lycée reste entière mais faut-il la poser ?

Continuités et ruptures dans la formation des enseignants

Le changement de modèle de la géométrie introduit une vraie rupture au niveau du supérieur : la géométrie élémentaire peut se retrouver dans le modèle des espaces affines euclidiens. Cependant, malgré l'utilisation d'un certain vocabulaire géométrique en algèbre linéaire, le lien entre la géométrie du secondaire et celle du supérieur n'est pas nécessairement fait.

Dans l'enseignement et la formation des enseignants, coexistent ainsi deux modèles : d'une part le modèle axiomatique euclidien, y compris complété par Hilbert où on peut construire les nombres à partir de la mesure des grandeurs et donc où les nombres se déduisent de la géométrie ; d'autre part, le modèle construit sur les espaces vectoriels avec R au départ.

Les choix à faire concernant la formation des enseignants en géométrie dépendent évidemment des choix faits pour la formation des élèves. Nous pouvons cependant pointer les questions suivantes :

Quand, comment fait-on le lien entre les deux modèles théoriques dans la formation des enseignants du secondaire ? Comment repenser la géométrie élémentaire d'un point de vue supérieur ?

La formation des professeurs des écoles pose des questions différentes mais tout aussi importantes et pas plus faciles. *Est-ce que c'est leur capacité à faire des démonstrations qu'il est pertinent de développer ou leur capacité à utiliser les concepts géométriques pour raisonner sur les problèmes de l'espace (espace physique ou espace de la feuille de papier) ?*

2. L'espace graphique[14] : Lieu d'expérimentation dans les deux finalités

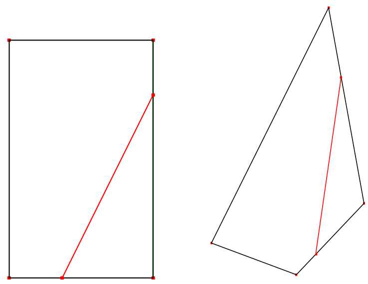
Dans la réflexion sur le rapport entre théorie et pratique concernant la géométrie, l'expérience et l'expérimentation jouent un rôle important[15], notamment par la schématisation et la réalisation de figures, sur lequel nous allons nous arrêter maintenant pour essayer de décrire le rôle de ce qu'on peut appeler l'espace graphique (que ce soit une feuille de papier ou un écran d'ordinateur) comme terrain d'expérimentation en géométrie, aussi bien dans un problème pratique, posé et à résoudre dans l'espace sensible que pour un problème géométrique (théorique). Nous l'illustrerons d'abord par quelques exemples issus de la littérature.

La géométrie comme moyen de résoudre des problèmes de l'espace sensible dans une problématique de modélisation

Nous commencerons par un exemple extrait de la thèse de Sophie Gobert (Gobert 2001). Il s'agit d'un problème de mesure de distance inaccessible décrit par Berthelot et Salin (1992) et dont une mise en œuvre en CM2 est étudiée par S. Gobert sous le nom « Terrain et tige » .

14 Cette partie a été laissée proche de l'exposé du séminaire ; les textes : Gobert (2009) publié depuis, et Gobert (à paraître dans ce même volume), enrichissent la réflexion sur le sujet.
15 Voir le travail bibliographique de Gobert et Hersant (2009).

Un terrain de forme polygonale est dessiné dans la cour (rectangle pour la séance 1, quadrilatère quelconque pour la séance 4), dans lequel on ne peut pas entrer et qu'on ne peut pas survoler non plus ; une tige joint deux côtés consécutifs ; il faut déterminer sa longueur sans faire de calcul (précision apportée au cours de la séance 1) ; différents types « d'instruments » sont à la disposition des élèves.

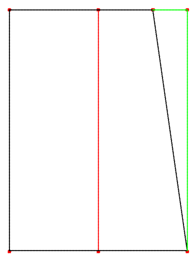


A la première séance (rectangle), les élèves sont tous dans une problématique pratique, voire le calcul[16], même si un groupe essaie de se servir de figures géométriques à construire à l'extérieur du « terrain ». Les deuxième et troisième séances se passent en classe avec des tracés sur papier : il s'agit d'abord d'expliciter ce qu'on a fait dans la cour puis de prévoir ce qu'on va faire à la séance suivante. La consigne a un caractère de généralité imposé par le fait qu'on ne dispose pas du terrain : elle porte sur les méthodes. Cependant, à la séance 2, un élève ne rentre pas dans cet aspect général : il veut faire un dessin à l'échelle du terrain. De plus, pour tous, le contrôle des actions et des propriétés se fait par la vue dans les deux environnements ; l'usage des instruments est le même (par exemple, le fait de prolonger un segment avec la règle sans prendre appui sur le segment déjà tracé).

Il ressort cependant que des procédures géométriques apparaissent plus facilement dans l'environnement papier-crayon, en lien avec la situation spatiale. Par exemple, la référence à la situation dans la cour empêche le pliage dans le cas de la symétrie et oblige à chercher des propriétés géométriques. Les connaissances géométriques, explicitées à la séance 2 avec l'aide de l'enseignant, sont à adapter à la séance 3, notamment en ce qui concerne la symétrie puisqu'il n'y a plus d'angle droit.

Ainsi, les élèves rentrent dans une certaine mesure dans la problématique de modélisation au niveau de la méthode qu'ils justifient par les propriétés des figures qu'ils essaient de construire : « c'est dans l'articulation dialectique des deux environnements que peut être rendue plus efficace la dévolution de la problématique de modélisation pour la construction (apprentissage) des modèles géométriques utilisés. » (Gobert 2001).

Mercier et Tonnelle (1992) fournissent un autre exemple intéressant où le problème pratique se pose dans l'espace à 3 dimensions : il s'agit de construire un toit pour un bâtiment de base trapézoïdale. C'est un vrai problème professionnel, un peu plus complexe que celui du vitrier qui doit faire une vitre en forme de parallélogramme. Le maçon, comme le vitrier, y apporte une solution pratique appuyée sur l'expérience et ne mettant en œuvre que des connaissances spatiales. L'usage de la représentation est beaucoup plus complexe puisqu'il demande une coordination de plans ou un raisonnement sur une figure en perspective.



L'exemple montre que le maçon a deux problèmes : choisir les bons plans pour représenter son problème de l'espace (3 projections qu'il faut coordonner) puis traiter le problème successivement dans deux plans. Cet exemple montre une fois de plus que la théorie dispense de l'expérience ou qu'elle aide à choisir les bonnes expériences (optimisation du coût conceptuel, temporel et pécuniaire). Il amène aussi à poser la question de l'enseignement général du collège qui doit déboucher à la fois sur le professionnel et sur le théorique.

16 Ils essaient de trouver une formule donnant la longueur à partir de certaines mesures qu'ils effectuent.

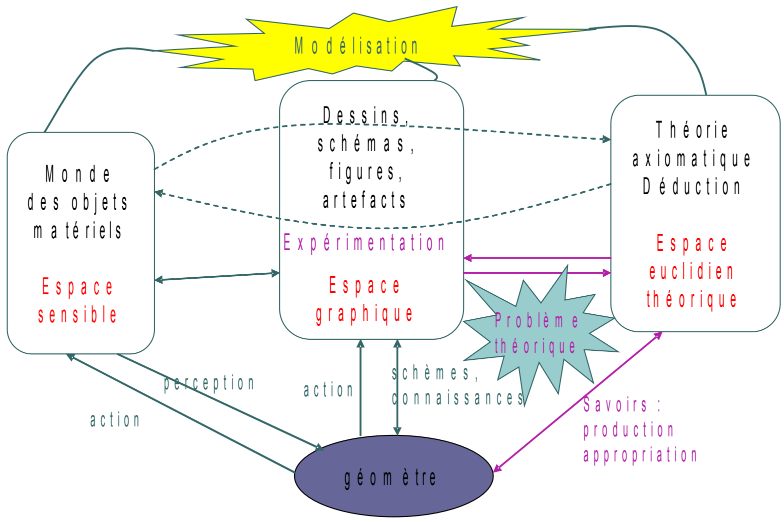
Ces deux exemples posés dans l'espace sensible montrent que l’expérimentation graphique est différente de l’expérimentation dans la réalité et nous suggèrent quelques premières réflexions :

- Le schéma amène une position différente par rapport à l'espace : on est à l’extérieur de la feuille (micro-espace plutôt que méso-espace) ce qui contribue à mettre à distance l’espace sensible.
- Il correspond à une mise en signes des relations repérées dans l'espace ; il permet aussi de produire de nouveaux signes (par exemple construction de nouveaux tracés) qu'il faudra interpréter dans l'espace.
- Il y a des niveaux différents dans l’expérimentation graphique qui permet de mettre en relation un problème dans l’espace et son traitement géométrique où on est plus ou moins près d’un discours organisé (voir aussi les distinctions faites par Chevallard et Jullien (1991, p. 56-59), Mercier et Tonnelle (1992 p. 23-37) entre « schéma » permettant la représentation d’une idée, « épure d’une expérience graphique » et « figure de géométrie », notamment Mercier et Tonnelle (1992 p. 34) :

> « Nous appellerons *schéma* la présentation de *l'idée* que l'expérience réalise et *épure* sa réalisation. Le risque de confusion vient du fait que les outils sémiotiques employés dans les deux cas paraissent les mêmes : des traits sur une feuille. Schéma et épure sont des objets graphiques que l'on prend pour eux-mêmes, ce qui n'est pas le cas du dessin et de la figure qui *représentent* des objets absents, le premier représentant un objet matériel, la seconde des relations mathématiques : les relations spatiales théorisées qui forment la géométrie ».)

Les trois espaces de la géométrie

En résumé… nous pouvons distinguer trois espaces : l'espace sensible, l'espace graphique et l'espace euclidien théorique. Le schéma suivant tente de représenter les interactions entre ces différents espaces dans une problématique de modélisation.



Le géomètre peut être un mathématicien ou un élève ou un professionnel. Suivant le cas, la finalité n’est pas la même, les savoirs ne sont pas les mêmes. Le problème est dans l’espace sensible. Le schéma permet de représenter des objets ou des situations de l’espace sensible, de les amener dans le micro-espace plan de la feuille de papier. Nous ne différencions pas ici le cas d'un problème dans l'espace 3D et celui d'un problème 2D. Il est bien évident que la schématisation est beaucoup plus complexe dans le premier cas. La construction de maquettes, dont Rommevaux (1997) a montré la fécondité, permet aussi de ramener le problème dans le micro-espace des objets qu'on manipule. La schématisation permet ainsi d'identifier dans les données du problème des éléments théoriques qui permettent de le modéliser.

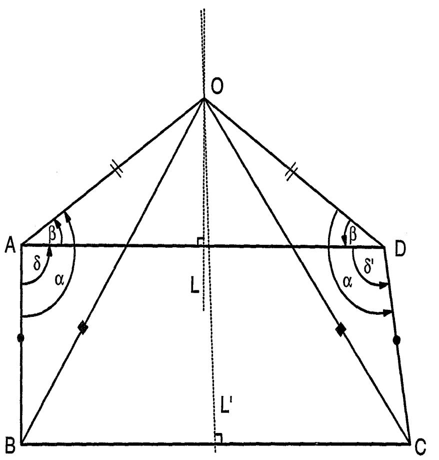
Le dessin ou la figure (qui sera éventuellement à refaire de ce nouveau point de vue) peut ensuite devenir un représentant d'un objet théorique qui permet la déduction, une figure-dessin qui peut elle-même être une épure c'est-à-dire la réalisation effective d'une expérience graphique (Chevallard et Jullien, 1991, Mercier et Tonnelle, 1992).

L'espace graphique, par le double regard qu'il permet sur les figures-dessins nous paraît un point clé de la modélisation géométrique.

Dans ces deux exemples relatifs à la problématique de modélisation d'un problème de l'espace sensible, nous nous sommes intéressés à la finalité pratique. Examinons maintenant le rôle de la figure dans la géométrie avec une finalité théorique.

L'espace graphique : lieu d'expérimentation pour l'élaboration théorique

Nous partirons, ici aussi, d'un exemple : il est extrait de « La bosse des maths » (Dehaene 1997 p. 273) et permet de se demander dans quelle mesure on peut raisonner juste sur une figure fausse. Le problème est théorique. La figure représente un objet théorique mais elle porte aussi des propriétés visuelles particulières qui peuvent traduire d'autres propriétés géométriques non prévues *a priori*, éventuellement contradictoires avec l'objet théorique étudié et dont il est difficile de faire abstraction. L'une de nous a proposé cet exemple à des PLC2 pendant plusieurs années de suite : les seuls qui ont trouvé d'où venait l'erreur ont commencé par refaire la figure avec des instruments de géométrie.



Démonstration : *Soit un quadrilatère ABCD tel que les côtés AB et CD soient égaux et que l'angle $\delta = \angle BAD$ soit droit. L'angle $\delta' = \angle ADC$ est arbitraire. Nous allons pourtant prouver qu'il égale l'angle droit δ.*
Soit L la médiatrice du segment AD et L' celle du segment BC. Soit O l'intersection de L et L'. Par construction, O est équidistant des points A et D (OA = OD) et également des points B et C (OB = OC). Comme AB = CD, les triangles OAB et ODC ont des côtés égaux et sont donc semblables. Donc leurs angles sont égaux :
$\angle BAO = \angle ODC = \alpha$.
Le triangle OAD étant isocèle, on a également $\angle DAO = \angle ODA = \beta$.
D'où nous déduisons $\delta = \angle BAD = \angle BAO - \angle DAO = \alpha - \beta$; et $\delta' = \angle ADC = \angle ODC - \angle ODA = \alpha - \beta$; soit $\delta = \delta'$. Ce qu'il fallait démontrer.
Où est l'erreur ? *Réponse page 295 !*

L'expert (le mathématicien) qui résout un problème de géométrie contrôle un double rapport à la figure : théorique sur la figure comme représentant un objet géométrique théorique, perceptif sur la figure matérielle sur la feuille de papier, qu'elle soit tracée à main levée, construite à la règle et au compas, sur papier quadrillé ou sur l'écran de son ordinateur avec un logiciel (avec de plus un double contrôle de l'effet des déplacements dans le cas de la géométrie dynamique). Pour cela, il doit disposer d'une appréhension opératoire de la figure (Duval 1994), manipuler avec pertinence les sur et sous-figures, reconnaître des configurations dans des positions variées, des tailles différentes… Il se sert des propriétés visuelles, même s'il raisonne dans la théorie. Beaucoup de textes ont abordé la discussion de la nature et du rôle de la figure dans un problème de géométrie : du « figural concept » de Fischbein (1993) aux distinctions faites par Laborde et Capponi (1994) en passant par la distinction dessin/figure (Parzysz 1988). Nous pouvons dans ce cas reprendre la partie droite de notre schéma : l'espace graphique permet d'expérimenter sur une réalisation matérielle du problème théorique, « l'épure » dont parlent Chevallard, Jullien, Mercier et Tonnelle.

Et pour les élèves ?

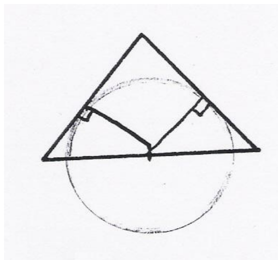
Nous partirons encore d'un exemple pour illustrer le rôle des figures et l'interaction figure-texte dans la résolution d'un problème de géométrie. Il est extrait d'un article de V. Celi et A. Bessot (Celi & Bessot, 2008). Le texte du problème est le suivant :

> Écrire un programme de construction qui permette à un camarade de troisième de construire un cercle tangent aux côtés d'un angle donné.
> Tout dessin dans le programme de construction est interdit.
> Vous ne devez jamais utiliser les mots « tangent », « tangente », etc…
> Votre programme sera transmis à un binôme d'une classe de troisième d'un autre établisse - ment.

C'est un problème de construction. La preuve est pragmatique (on obtient la figure attendue). Les élèves travaillent en binôme.

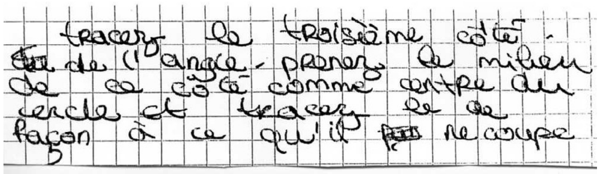
Examinons la recherche du binôme 8 qui fait partie des 5 binômes sur 13 qui fournissent un message final qu'on peut interpréter comme constructible à la règle et au compas. A u cours du travail, le binôme 8 rédigera 3 messages.

Avant le message 1, on assiste à une prise de conscience de la demande de généralité « Il faut un truc qui marche avec tous les triangles ». Les élèves ont produit la figure ci-contre. Les perpen-diculaires sont tracées à main levée par E1 dans une discussion avec E2 qui lui dit qu'au départ il n'avait pas pensé que « tangente ça veut dire qu'il y a un angle droit (…) par rapport au rayon du cercle » alors que E1 y avait pensé.

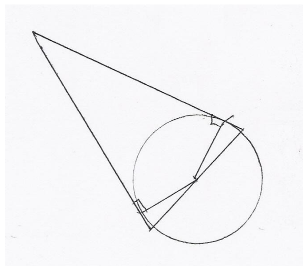


Le triangle et le cercle ont sans doute été tracés en prenant le problème à l'envers puisque l'ar - ticle dit que « les élèves du binôme 8 commencent par chercher à résoudre le problème du tracé d'un angle tangent à un cercle donné (problème réciproque plus routinier) » (p. 34).

Le message 1 est rédigé après 17 mn

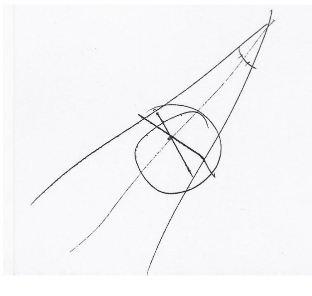

tracer le troisième côté de l'angle - prenez le milieu de ce côté comme centre du cercle et tracez le de façon à ce qu'il ne coupe

Une deuxième figure est tracée pour tester le message 1. Le triangle est tracé à la règle par E2 « je teste à la règle » ; le reste est contrôlé visuellement. E1 déclare que ça ne marche que parce que le triangle est aigu. E2 s'inquiète des perpendiculaires et les trace à l'équerre.

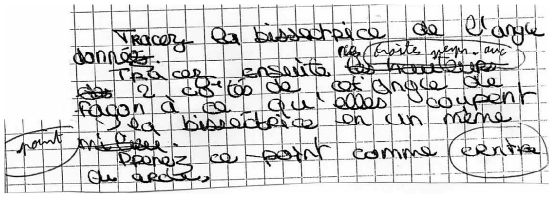


Ensuite, E2 refait un dessin à main levée « et tu fais deux angles droits qui partent et qui se coupent ici, au milieu [avec l'équerre] et s'ils se coupent là, cela veut dire qu'ils sont à égale distance. » […]

E1. En fait, il faut tracer la bissectrice de l'angle.

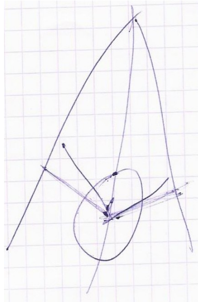


Le message 2 est écrit après 27 minutes d'interaction


Tracez la bissectrice de l'angle donnée.
Tracez ensuite ~~les hauteurs~~ (droite perp. aux) ~~des~~ 2 côtés de cet angle de façon à ce qu'elles coupent la bissectrice en un même (point) ~~milieu~~.
Prenez ce point comme (centre) du cercle.

E2. le cercle il peut être ça ! On n'a pas dit la taille du cercle !

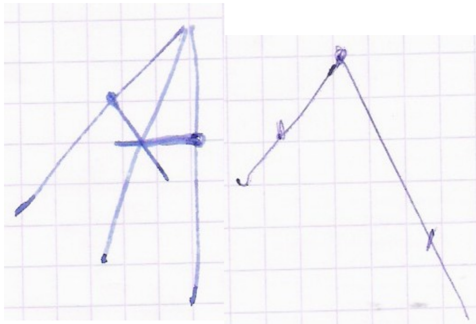
Cercle de rayon ? … même pas de rayon… de rayon ?… et aussi on n'a pas donné de noms aux points. Il faut nommer les points…



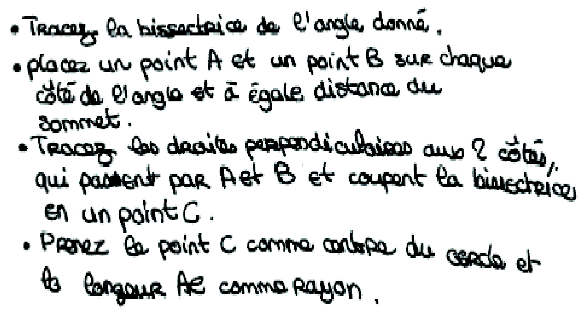
E1. Il faut déjà que l'on place ces deux points au même niveau là [puis trace la bissectrice à main levée]

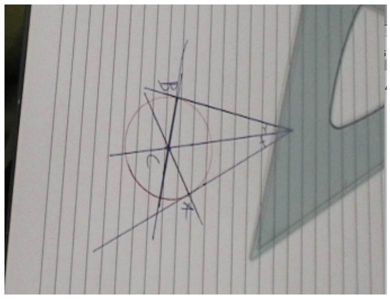
E2. Il faut voir ce que cela fait si on ne place pas au même niveau.

Ouais ! Il faut qu'on les place à la même distance de l'angle, à égale distance de l'angle



Message final du binôme 8 (après 31 minutes)


- Tracez la bissectrice de l'angle donné.
- placez un point A et un point B sur chaque côté de l'angle et à égale distance du sommet.
- Tracez les droites perpendiculaires aux 2 côtés, qui passent par A et B et coupent la bissectrice en un point C.
- Prenez le point C comme centre du cercle et la longueur AC comme rayon.



Il est testé aux instruments (règle graduée, rapporteur, équerre). Le compas ne sert qu'à tracer le cercle.

De cet exemple et des analyses proposées, nous retenons quelques remarques plus générales :

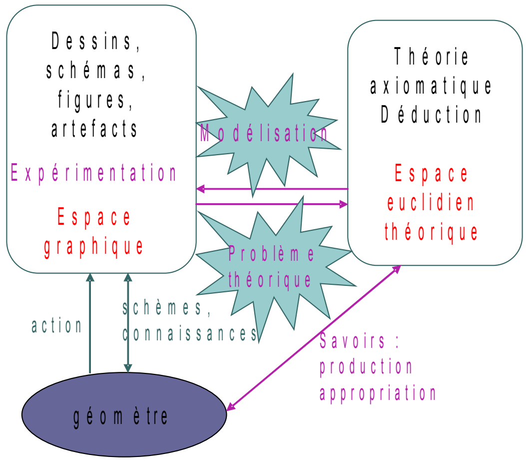
- Les instruments sont utilisés au moment de la dévolution (seulement la règle et l'équerre, le reste, égalité de longueur et partage de l'angle, se font avec un contrôle visuel lié sans doute à la symétrie) et au moment de la vérification des messages.

- Dans la discussion et l'échange des arguments, ce sont les dessins à main levée qui dominent en faisant apparaître nettement la caractéristique visuelle correspondant à la propriété géométrique à prendre en compte.

- Les élèves ont une image mentale du dessin attendu appuyée sur la symétrie qui joue au niveau intuitif. Les premiers échanges visent à se mettre d'accord sur les propriétés de cette image (en particulier les rayons perpendiculaires). La discussion porte essentiellement sur les moyens d'obtenir les effets visuels attendus par une construction aux instruments. Les propriétés géométriques sont utilisées dans ce but. La perpendicularité est explicitée ; les autres propriétés restent implicites.

- Ici on a un problème posé dans l'espace graphique. Les savoirs géométriques servent au contrôle de l'espace graphique. On pourrait dire que c'est aussi une modélisation mais mettant en jeu deux des espaces seulement (petite boucle dans le schéma de la page 68), ce qui correspond à la problématique de modélisation de Berthelot et Salin (1992) mais entre l'espace graphique et l'espace théorique.

- On pourrait jouer sur le coût des instruments pour faire évoluer les procédures, les propriétés géométriques utilisées et faciliter l'apparition d'une construction à la règle et au compas.



Des questions plus générales

1) Il semble que dans l'enseignement les professeurs dépensent beaucoup d'énergie à apprendre aux élèves à se méfier des figures et des mesures. Mais ne leur apprend-on pas trop tôt à se méfier de quelque chose d'indispensable dont l'usage n'est pas encore suffisamment construit pour eux ? (voir Berthelot & Salin 2001).

2) Pour jouer son rôle crucial, l'espace graphique ne nécessite-t-il pas un apprentissage de l'élève et une gestion précise en tant que milieu de la part de l'enseignant ? Ne mérite-t-il pas une étude plus poussée de la part des chercheurs ? Cette étude demanderait de prendre en compte la complexité de l'activité sémiotique en géométrie. Plusieurs chercheurs se réfèrent aux travaux de Peirce pour cette étude (Conne 2008) et cet aspect apparaît dans les travaux de l'école d'été 2007 (cf. Bloch 2009 ; Gobert 2009).

3) Dans l'espace graphique, les tracés peuvent se faire à main levée ou avec des instruments. La place des instruments dans l'apprentissage de la géométrie a été peu étudiée jusqu'ici. Elle pourrait l'être dans trois directions au moins :

- Etude de l'instrumentation aussi bien des instruments usuels que des logiciels. Les concepts d'instrumentation et d'instrumentalisation introduits par Rabardel (1995) en appui sur la notion de schème à partir de la distinction entre artefact et instrument ont été utilisés en didactique des mathématiques pour étudier l'usage des technologies numériques. Ils seraient sans doute utiles aussi pour étudier les difficultés dans l'usage par les élèves des instruments classiques de géométrie. En effet, si l'on considère que les artefacts sont les objets matériels construits par l'homme qui permettent de construire ou d'effacer des figures-dessins, on peut y inclure, avec plus ou moins d'importance suivant les niveaux d'enseignement considérés, outre les logiciels qui permettent de produire des dessins géométriques, les instruments de géométrie classiques, mais aussi du matériel plus rudimentaire : gabarits, pochoirs, ou autres morceaux de papier gardant une partie plus ou moins grande d'une forme qu'on veut reproduire, des supports comme le papier quadrillé, et aussi ciseaux, gomme… Ces artefacts permettent de produire des caractéristiques graphiques visuelles qui se traduisent par des propriétés géométriques. Leur utilisation pertinente pour obtenir les effets visuels attendus, par des techniques identifiées ou non, nécessite plus ou moins de connaissances géométriques. L'usage des artefacts pour apprendre la géométrie suppose pour l'utilisateur la construction de schèmes, certains liés à la connaissance de l'artefact lui-même et à son appropriation, d'autres davantage liés aux connaissances géométriques et à l'usage de l'artefact avec un but externe, qui correspondent à ce que Rabardel a appelé instrumentation et instrumentalisation.
- Etude des instruments comme élément du milieu et variable didactique.

– Etude des rapports dialectiques entre usage des instruments de géométrie et déconstruction dimensionnelle.

Ces deux dernières questions sont abordées dans les travaux du groupe de recherche de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais (voir bibliographie).

Conclusion

Nous avons posé de nombreuses questions au cours du déroulement de ce texte. Nous tentons dans cette conclusion d'indiquer des pistes pour une synthèse des travaux existants ou pour de nouvelles recherches. Nous les regrouperons en cinq grands thèmes.

1. *Questions de transposition didactique. Un projet d'ensemble à étudier…*

Peut-on imaginer une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie du primaire à la fin du secondaire, tenant compte de finalités différentes pour chaque degré ...

- qui parte de formulations à partir d'expériences concrètes et de problèmes posés dans l'espace sensible en primaire et début du collège,

- pour déboucher sur la synthèse euclidienne (avec une redondance d'axiomes et sans viser l'exhaustivité) construite progressivement au cours du collège,

- avant d'introduire les vecteurs et la géométrie analytique,

- pour reprendre le tout dans l'enseignement supérieur à partir de la notion d'espace vectoriel ?

Ce projet semble bien vaste, il nous semble pourtant important de situer des recherches plus ciblées dans un continuum cohérent à élaborer. Sur ce sujet, nous connaissons peu de travaux français[17].

2. *La conception d'ingénieries pour l'école et le début du collège demande d'aborder un grand nombre de questions dont nous retenons ici quelques-unes :*

Le recueil des ingénieries existantes destinées à cette tranche de la scolarité serait d'un volume imposant. Il nous semble que leur regroupement, leur étude et leurs prolongements pourraient se faire autour de trois grandes questions :

- L'expérience quotidienne ne suffit pas pour constituer un milieu sur lequel appuyer l'entrée dans la géométrie parce qu'elle reste implicite : il faut pouvoir prendre du recul par rapport à cette expérience et formuler, décrire, représenter, etc. *Quelle expérience construire pour constituer un milieu adéquat à l'apprentissage de la géométrie ?* Il y a aussi un vocabulaire en situation à mettre en place. Le *rôle du langage* est assez peu étudié. Certains travaux se sont cependant intéressés à ces questions, par exemple la thèse de Anne-Cécile Mathé (2006) qui s'appuie sur les apports de Wittgenstein pour étudier les jeux de langage autour des solides dans des classes de primaire. En amont de ces expériences, comment l'enseignement des mathématiques en primaire peut-il prendre en charge la construction de certaines connaissances spatiales ? Lesquelles ? Quelles relations avec l'enseignement d'autres disciplines ?

17 Voir Brousseau (2000), peu connu, présentant une réflexion de fond sur le sujet

- *Comment articuler le travail dans les différents espaces, y compris avec un logiciel de géométrie dynamique ?* Les distinctions entre différents paradigmes pour la géométrie (Houdement et Kuzniak, 2000; Houdement, 2007), celle entre GI et GII notamment, reprise dans beaucoup de travaux sur la géométrie de l'école et du collège, ont permis de formuler et d'expliquer certains malentendus courants dans l'enseignement de la géométrie au collège ; elles donnent des pistes pour la formation des enseignants mais donnent-elles des outils pour concevoir des ingénieries didactiques ? Les réflexions que nous présentons dans les parties II.1.4 et II.2 nous semblent à approfondir et développer pour la conception ou l'analyse de telles ingénieries.

- *Comment construire un savoir géométrique consistant à partir de l'entrée dans la démonstration ?* S'il semble y avoir accord maintenant sur le fait que celle-ci ne peut se faire qu'après avoir suffisamment pratiqué la déduction, *la question du choix des axiomes et des définitions* se pose réellement, même si on n'en parle pas dans ces termes aux élèves. Il n'est pas indifférent que les axiomes soient ou non proches de l'expérience concrète qui peut se construire dans l'espace sensible ou dans l'espace graphique. Il nous semble qu'il serait bon de reprendre certaines des réflexions menées sur ce thème dans les années 70 et d'en mener de nouvelles comme a commencé à le faire Berté (1995) et (1997).

3. La problématique de modélisation

Si nous revenons plus spécifiquement sur cette problématique, issue des travaux de Berthelot et Salin, c'est parce qu'elle semble une piste intéressante pour l'enseignement de la géométrie à l'école et au collège en suscitant des besoins théoriques à partir d'une finalité pratique. Elle n'a pourtant été que peu reprise dans les recherches ultérieures [18], peut-être à cause de la difficulté de la faire vivre dans des ingénieries didactiques du fait de l'écart important avec les pratiques ordinaires. Les recherches qui ont poursuivi les travaux de Berthelot et Salin ont montré qu'il était nécessaire de reprendre la réflexion tant du point de vue de la consistance théorique des problématiques pratique et de modélisation que du point de vue expérimental, en particulier concernant la problématique de modélisation spatio-géométrique. L'étude de la problématique de modélisation par la conception et la mise en œuvre d'ingénieries didactiques soulève en effet diverses questions, notamment liées au rôle de la schématisation et à la formation des enseignants, dont nous donnons quelques exemples.

Questions sur le rôle de la schématisation

Isabelle Bloch (Bloch & Pressiat, 2009), s'interroge sur la construction des références spatiales nécessaires à un fonctionnement correct de la problématique de modélisation et propose de développer des recherches sur des situations de schématisation.

Questions concernant la démarche de modélisation du point de vue de l'apprentissage des élèves

Ex : Quels types de raisonnements géométriques sont-ils accessibles aux élèves avant la 4ème au travers de situations de modélisation spatio-géométriques ?

Questions expérimentales concernant l'enseignement

Ex : Peut-on identifier des conditions scolaires minimales qui permettent d'installer un processus de modélisation (programmes, coordination entre classes ou cycles, attente des familles vis à vis de l'école, rapport individuel au savoir, rapport des enseignants à l'espace et à la géométrie) ?

18 Il faut noter l'importance du travail des équipes de l'INRP (ERMEL, 2006) qui s'en sont partiellement inspiré et proposent un cursus pour le cycle 3 intéressant mais complexe !

4. Éléments constitutifs du travail du professeur particulièrement complexes pour l'enseignement de la géométrie

De nombreuses recherches ont montré la complexité particulière de l'enseignement de la géométrie relatives :

- aux différents types d'interactions possibles avec le milieu : rapports effectifs, ostension assumée, ostension déguisée, ostension maîtrisée (Gobert 2001). *Quelles sont les marges de manœuvre de l'enseignant ?*
- aux interactions langagières : *Quels sont les contrôles possibles du professeur sur les interactions langagières, les formulations ?*

Comment alors concevoir une formation spécifique pour les professeurs, d'école, du secondaire, de l'enseignement professionnel ?

5. Réflexion à mener sur les cadres théoriques spécifiques à la géométrie.

Nous n'avons pas abordé la question de la compatibilité des différents cadres théoriques utilisés en didactique de la géométrie. Nous avions laissé cette question pour les échanges terminaux mais, vu l'heure tardive et le public relativement clairsemé, aucun point de la discussion n'a porté sur cette question. Nous tentons de l'amorcer ici. Il nous semble que les distinctions que nous venons de faire en termes de finalités de la géométrie, de problématiques et d'espaces (sensible, graphique, euclidien) ne recoupent pas les différents paradigmes définis par Houdement et Kuzniak, même si ces distinctions partent de préoccupations communes. Le découpage des questions nous paraît différent : GI et GII nous semblent surtout distinguer des « paradigmes » (si tant est que l'on puisse employer ce mot) différents au niveau des moyens de validation mis en œuvre alors que c'est la finalité et la problématique que nous mettons en avant dans nos distinctions. Notre réflexion sur l'espace graphique tend à montrer la complémentarité et la compatibilité des points de vue sous-tendus par la « géométrie naturelle » et la « géométrie axiomatique naturelle » plutôt que leur incommensurabilité, une fois qu'ils sont maîtrisés. L'incommensurabilité semble plutôt se situer entre des rapports aux figures ou des contrats didactiques. La discussion sur la compatibilité des cadres théoriques et leur articulation est donc ouverte : peut-on les articuler ou correspondent-ils à deux visions radicalement différentes de la géométrie ? Quelle est la portée de chacun des cadres ? Les résultats obtenus dans des cadres différents sont-ils compatibles ?

Bibliographie

Arsac G. (1988). L'origine de la démonstration. Essai d'épistémologie didactique *Recherches en didactique des mathématiques.* 8.3, 267-312.

Arsac G. (1990). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 9/3, 247-280.

Arsac G. & al. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège.* Presses Universitaires de Lyon.

Barra & al. (1975). Quelle géométrie ? *Géométrie au premier cycle tome 1.* brochure APMEP n°21 38-49.

Berté A. (1995). Différents ordres de représentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15/3, 83-130.

Berté A. (1996-1997). Progressions et problématiques en géométrie à partir d'un exemple. l'inégalité triangulaire. *Petit x 45,* 41-53.

Berthelot R. & Salin M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse. Université de Bordeaux 1.

Berthelot, R. & Salin M.H (2000-2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie de constat à la géométrie déductive ? *Petit x*, 56, 5-34.

Bloch I. & Pressiat A. (2009). L'enseignement de la géométrie, de l'école au début du collège : situations et connaissances. In Bloch I. & Conne F. (2009). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIVème école d'été de didactique des mathématiques,* 65-88. Grenoble : La Pensée sauvage.

Brousseau G. (1983). Étude des questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique.* LSD, IMAG. Université Fourier. Grenoble.

Brousseau G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire, in *Actes du Séminairede Didactique des Mathématiques de l'Université de Crète* . Rethymon.

Celi V. & Bessot A. (2008). Statut et rôle du dessin dans la formulation d'un programme de construction au collège. *Petit x* n° 77, 23-46.

Chevallard Y. & Jullien M. (1991). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège (1 ère partie). *Petit x* n° 27, 41-76.

Conne F. (2008). L'expérience comme signe didactique indiciel. *Recherches en didactique des mathématiques.* 28/2, 219-264.

Dahan-Dalmedico A. & Pfeiffer J. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.* Paris : éditions du Seuil, collection Points-sciences.

Dehaene S. (1997). *La bosse des maths.* Paris : Odile Jacob.

Douady R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7/2, 5-32.

Duval R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Sciences Cognitives et de Didactiques de Strasbourg,* 57-74. IREM de Strasbourg

Duval R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM* n°17, 121-138.

Duval R. & Egret M.A. (1989). L'organisation déductive du discours : interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* Vol. 2.

Duval R. & Godin M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures. *Grand N* n° 76, 7-27.

Duval R., Godin M. & Perrin-Glorian M.J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire in Castela et Houdement (éds) *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques, Année 2004.* pp. 5-89. Paris : Éditions ARDM, IREM Paris 7.

ERMEL (2006). *Propositions d'enseignement de la géométrie au cycle 3.* Paris : Hatier.

Fischbein E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics.* Vol 24 n°2, 139-162.

Floris R. (1995). La géométrie traite-t-elle des illusions d'optique ? quatre élèves aux prises avec le triangle aplati. *Petit x n° 39* 29-53.

Gobert S. (2001). *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Gobert S. (2009). Éléments d'analyse a priori pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. In Bloch I. & Conne F. (2009). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. CD-rom des ateliers et séminaires de la XIVème école d'été de didactique des mathématiques.* 19 pages. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Gobert S. ET Hersant M. (2009). « Espace, figure, géométrie ». Étude pour que la question vive. In Bloch I. & Conne F. (2009). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. CD-rom des ateliers et séminaires de la XIVème école d'été de didactique des mathématiques.* 27 pages. Grenoble : La pensée sauvage.

Gobert S. (à paraître). Conditions a priori sur les ostensifs du milieu pour faire signe d'un objet de savoir in Coulange & Hache *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques 2009.* ARDM & IREM Paris7.

Godin M. ET Perrin-Glorian M.J. (2009). De la restauration de figures à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. In COPIRELEM. *Enseigner les mathématiques à l'école, où est le problème ? Actes du colloque de Bombannes, juin 2008. résumé* p. 83, texte complet dans le CD-rom associé.

Gonseth F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace.* Editions du Griffon, Lausanne.

Houdement C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre la géométrie de l'école et la géométrie du collège. *Repères IREM n° 67,* 69-84.

Houdement C. & Kuzniak A. (1999). Sur un cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics. 40/3, 283-312.*

Houdement C. & Kuzniak A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 20/1, 89-115.

Kahane J.P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques.* Chapitre 3 : La géométrie. pp. 87-169. Paris : Odile Jacob.

Keskessa B., Perrin-Glorian M.J. & Delplace J.R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N* n°79, 33-60.

Laborde C. (1984). Exposé sur la géométrie *Actes 3iéme École d'été de didactique des mathématiques* Institut IMAG, 189-207.

Laborde C. (1990). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 9/3, 337-363.

Laborde C. & Capponi B.(1994). Cabri-Géomètre, constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* n°14/1.2, 165-210.

Mathé A. C. (2006). *Jeux et enjeux de langage dans la construction d'un vocabulaire de géométrie spécifique et partagé en cycle 3.* Thèse de doctorat Université Lyon 1.

Maurin C. (2008). Mesurer ? pour quoi faire ? deux exemples de situations pour des élèves de CM2 et de 6ème, *Grand N* n° 81.

Mercier A. & Tonnelle J. (1992). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège (2 ème partie). *Petit x* n° 29, 15-56.

Mercier A. & Tonnelle J. (1993). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège (3 ème partie). *Petit x* n° 33, 5-35.

Offre B., Perrin-Glorian M.J. & Verbaere O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N* n° 77, 7-34 et *Petit x* n° 72, 6-39.

Parzysz B. (1988). Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics,* 19 (1), 79-92.

Parzysz B. (1989). *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée : contribution à l'étude de la relation voir/savoir* Thèse de doctorat Université Paris 7.

Pérol C. (1979). O.P.C. Qu'est-ce que c'est ? In *Recherche inter-Irem 1973-78, en géométrie de 4ème-3ème, dite OPC : réflexion critique et évaluation* Brochure APMEP n° 34, p. 5.

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

Revuz A. (1975). Ainsi passent les programmes, *Géométrie au premier cycle tome 1* brochure APMEP n°21 p. 22-35.

Rommevaux M.P. (1997). *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle.* Thèse, université de Strasbourg 1.

Liste des documents répertoriés

Abboud-Blanchard M. (1994). *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire des mathématiques : symptôme d'un malaise. Un exemple : l'enseignement de la symétrie orthogonale au collège* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Acosta M. (2008). *Démarche expérimentale, validation et ostensifs informatisés. Implication dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie,* Thèse de doctorat, Université de Grenoble et Université de Genève.

APMEP (1977) et (1978). *Géométrie au premier cycle* tome 1 n°21, tome 2 n°22.

APMEP (1980) et (1981). *Activités mathématiques en quatrième-troisième* n°33 et n°38

Argaud H. C. (1998). *Problèmes et milieux a-didactiques pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géomètre.* Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.

Assude T. & Gélis J.M. (2002). Dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics. 50, 259-287.*

Balacheff N. (1987). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège*. Thèse de doctorat. Université Grenoble 1.

Bessot A. & Eberhard M.. (1987). Représentations graphiques d'assemblages de cubes et finalités des situations. in *Le dessin technique*, Ed. Hermès, Paris-Londres-Lausanne.

Bessot A., Déprez S., Eberhard M. & Gomas B. (1993). Une approche didactique de la lecture de graphismes techniques en formation professionnelle de base aux métiers du bâtiment. In A. Bessot et P. Vérillon (eds) *Espace graphique et graphismes d'espace. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bessot A. & Laborde C. (2006). Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture-tracé du bâtiment. *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques 2005.* ARDM&IREM Paris7.

Bessot A., Laborde C. & Metzler L. (2006). Designing a simulator for marking out in building trades and using it in vocational education. *Workshop "TEL in working context", 13-15 November 2006,* Grenoble.

Both Carvalho N. (2001) .*Le sort des problèmes de constructions dans le contexte français de l'enseignement des transformations géométriques, au lycée, dans les années 1990. Une étude didactique en classe de seconde, avec une approche des aspects fonctionnels utilisant Cabri-géomètre II.* Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.

Bulf C. (2008). *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège.* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot-Paris 7.

Cabassut R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Caliskan N. (2006). *Usages de la géométrie dynamique par des enseignants de collège. Des potentialités à la mise en œuvre : quelles motivations, quelles pratiques ?* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Celi V. (2002). *Une comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Chaachoua H. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes.* Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.

COMMISSION INTER-IREM COPIRELEM (1983). *Aides pédagogiques pour le cycle Moyen*. *Géométrie. Elem-Math. T. 7*. APMEP : brochure 49.

Doan Huu (2001). *L'enseignement de la géométrie dans l'espace au début du lycée dans ses liens avec la géométrie plane - Une étude comparative entre deux institutions : la classe de seconde en France et la classe 11 au Viêt-Nam.* Thèse Université de Grenoble 1.

Équipe DIDIREM - ÉQUIPE PUC (2006). Valparaiso (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. *Numéro spécial s6* IREM Paris 7.

Equipe LILLOISE (2005 et ss). Les changements de regard sur les figures. *Grand N* n° 76-79.

ERMEL (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire Cours élémentaire tome 1.* Ed. Sermap-OCDL.

ERMEL (1982). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cours moyen tome 3.* Ed Sermap Hatier.

Fregona D. (1994). *Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie, interactions, contrats et transpositions didactiques.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1.

Grenier D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseigne-ment sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.

Horoks J. (2006). *Les triangles semblables en classe de 2nde : des enseignements aux apprentissages*. *Etude de cas.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Jahn A. P. (1998). *Des transformations de figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de seconde.* Thèse de doctorat, Université Grenoble 1.

Jore F. (2006). *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Jovenet A. M. (1998). Perception et conceptualisation de la symétrie. Une situation adaptée aux élèves myopathes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18/1, 35-58.

Keskessa B. (1992). *Preuves et résolutions de problèmes de lieux géométriques. Une étude comparée des environnements papier-crayon et cabri-géomètre en classe de seconde.* Thèse de doctorat, Université Grenoble 1.

Laguerre E. (2005). *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Lima I. (2006). *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs : étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale* Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.

Mesquita A. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie - Eléments pour une typologie.* Thèse de doctorat Université Strasbourg.

Miyakawa T. (2005). *Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de symétrie orthogonale.* Thèse de doctorat, Université Grenoble 1.

Mul A. (2000). *Enseignement de la géométrie du cycle III à la sixième. Des éléments du quotidien scolaire* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Padilla SanchezV. (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques.* Thèse de doctorat Université Strasbourg.

Pfaff N. (1991). *Processus de conceptualisation autour du théorème de Thalès.* Thèse de doctorat, Université Paris 5.

Rauscher J.C. (1993). *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège.* Thèse de doctorat, Université de Strasbourg.

Restrepo A. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème.* Thèse université Grenoble 1.

Robotti E. (2002). *Le rôle médiateur de la verbalisation entre les aspects figuraux et théoriques dans un problème de démonstration en géométrie plane.* Thèse de doctorat, Université Grenoble 1.

Rolet C. (1996). *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions de futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre.* Thèse de doctorat, Université Lyon 1.

Rommevaux M.P. (1997). *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle.* Thèse de doctorat, Université de Strasbourg 1.

Tapan S. (2006). *Différents types de savoirs mis en œuvre dans la formation initiale d'enseignants de mathématiques à l'intégration de technologies de géométrie dynamique* Thèse de doctorat, Université Grenoble 1.

Tavignot P. (1991). *L'analyse du processus de transposition didactique. Exemple de la symétrie orthogonale au collège.* Thèse de doctorat, Université *Paris 5.*

Vadcard L. (2000). *Étude de la notion d'angle sous le point de vue des conceptions.* Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.

Vergnes D. (2000). *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège

Caroline Bulf, bulf@math.jussieu.fr

Université Paris Diderot, Equipe DIDIREM

Résumé

Le travail de recherche relaté ici décrit la ou plutôt les recherches effectuées au cours de ma thèse (Bulf 2008). La problématique de notre travail de thèse s'articule autour de la question générale sur le rôle joué par la symétrie axiale, en tant qu'élément de notre réalité, dans l'apprentissage des autres transformations du plan enseignées au collège. Agit-elle en tant qu'obstacle ou en tant que levier ? Nous faisons référence à la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991) pour analyser la conduite de l'élève mais aussi au cadre des paradigmes géométriques et des Espaces de Travail Géométrique (ETG) de Houdement et Kuzniak (2006) quant à la nature du travail géométrique en jeu dans l'activité de l'élève.

Notre travail de thèse comprend trois études distinctes mais complémentaires que nous avons choisies d'exposer ici :

– une étude portant sur la nature du concept de symétrie dans l'Espace de Travail Géométrique des tailleurs de pierre et des ébénistes.

– une étude portant sur l'Espace de Travail Géométrique des élèves d'une classe de 5[e] et d'une classe de 3[e] à travers l'analyse d'un questionnaire commun.

– une étude cherchant à expliquer les résultats obtenus concernant l'ETG personnel de ces élèves en questionnant les effets de l'enseignement reçu par ces élèves.

Mots clefs

Didactique des mathématiques, géométrie élémentaire, enseignement secondaire, transformations du plan, symétrie, conceptualisation, paradigmes géométriques, espaces de travail géométrique.

I Problématique de recherche et cadre théorique associé

1. *Questionnement de départ : le rôle de la réalité*

Notre travail de recherche s'inscrit au départ dans le courant actuel de recherche en didactique des mathématiques qui porte sur l'étude du rôle de la réalité dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Nous avons choisi de nous concentrer sur l'étude d'un concept mathématique au fort pouvoir d'évocation dans notre environnement quotidien mais qui est également présent dans l'institution scolaire : le concept de symétrie. En effet la symétrie axiale est abordée dès l'école élémentaire à travers des activités de pavage ou de pliage puis elle est introduite de manière formelle en 6[e]. Aussi, d'un point de vue constructiviste, on peut supposer que la symétrie axiale va participer à la construction des nouvelles connaissances visées par le collège, autrement dit la symétrie centrale en 5[e], la translation en 4[e], et la rotation en 3[e] (selon le découpage stipulé par les programmes et en vigueur au moment de notre recherche[1]).

1 BO n°10 Hors-Série du 15 octobre 1998, pp. 106-114 (programme de 3e). BO n°5 Hors-Série du 9 septembre

Le recours à la réalité peut se révéler être un levier pour atteindre les concepts scientifiques visés par l'enseignement des mathématiques. Nous faisons là référence à deux courants actuels de recherche en didactique des mathématiques : la *Realistic Mathematics Education* (RME) (Presmeg & Van Den Heuvel-Panhuizen 2003) dont Freudenthal (1983) fut l'investigateur en Hollande ; et le cadre de la Didactique des Domaines d'Expérience (DDE) (Bartolini-Bussi & Boero, 1998) sous l'égide de Boero (1999) en Italie. Ces deux courants fonctionnent dans des directions orthogonales à partir d'un contexte réel (Kuzniak et al., 2008). La mathématisation verticale proposée par la RME s'inspire de Freudenthal, qui voit les mathématiques comme une activité humaine qui consiste à résoudre et à chercher des problèmes dans un processus de mathématisation. Ainsi, les « *mathematics in context* » proposées par certaines de leurs situations ont pour but d'accéder à des niveaux plus élevés et plus abstraits de connaissance par l'intermédiaire de la réalité. La DDE s'apparente davantage à une mathématisation de dimension horizontale, car on questionne les potentialités de différents contextes réels, à travers l'expérimentation et la manipulation, dans le but de faire émerger des concepts mathématiques.

Cependant, le rôle de la réalité dans la construction de connaissances scientifiques peut se poser en termes d'obstacles : obstacle de l'image familière, obstacle de l'expérience première, obstacle du sens commun (Bachelard 1934). Dans le cas de la symétrie axiale, de nombreux travaux en psychologie notamment (Rock & Leaman 1963) (Palmer 1985) suggèrent même l'idée d'un obstacle perceptif. Il a été montré dès la fin du XIXème siècle par Mach les effets de l'axe médian vertical sur la perception. Cet aspect de la symétrie n'est pas négligeable car la perception fait partie intégrante du processus de conceptualisation (Vergnaud 2007). Pour illustrer notre propos, nous citons l'exemple suivant (figure 1) proposé par Mach et largement repris par la suite, dans lequel on perçoit plutôt un carré à gauche et plutôt un losange à droite alors que seule la position de la figure change.

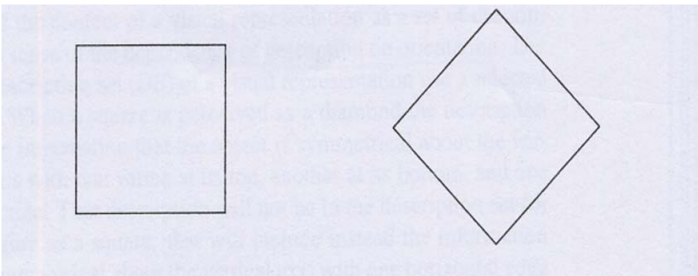


Figure 1 : la perception du carré-diamant (Giaquinto 2005, p. 32)

Palmer et Giaquinto expliquent alors cet effet par la mise en évidence d'une paire d'axes de symétrie dans les deux cas par rapport à la gravité (figure 2) : la figure est perçue comme un carré lorsque les médiatrices des côtés forment un repère orthogonal (dans le sens de la gravité sur la feuille de papier), alors que cette figure est perçue comme un losange lorsque les bissectrices des angles, que les sommets « saillants » mettent en évidence, forment un repère orthogonal par rapport à la gravité[2] .

2004, pp. 4-16 (programme de 6e). BO n°5 Hors-Série du 25 août 2005, pp. 9-16 (programme de 5e). BO n°6 Hors-Série du 19 Avril 2007 (nouveaux programmes pour la rentrée 2008).

2 "*The figure is seen as a square when its side-bisector axes are vertical and horizontal and as a diamond when its angle-bisector axes are vertical and horizontal : in these orientations the gravitational bias selectively reinforces one pair of frames and not the other*" (Palmer 1985, p. 72).

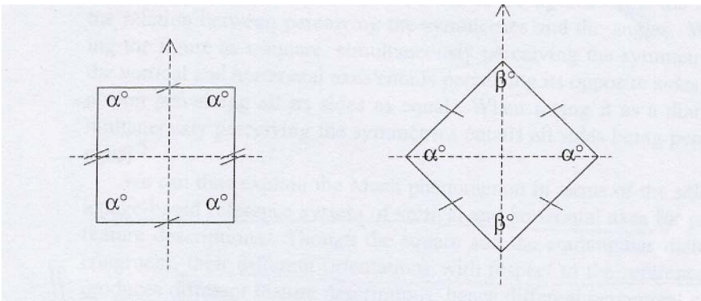


Figure 2 : interprétation du carré-diamant (Giaquinto, 2005, p. 37)

Dans le cadre de la didactique des mathématiques, de nombreux travaux témoignent des effets de la symétrie axiale sur les conceptions des élèves dont (Grenier & Laborde 1988), (Denys 1986), (Grenier 1990) et (Lima 2006). Ces auteurs mettent en évidence la résistance d'un certain nombre de conceptions familières erronées liées à la symétrie axiale (la verticalité, l'alignement, le découpage en deux plans distincts superposables, etc.). Tavignot (1993) traite plutôt la question de l'impact du poids culturel et familier dans l'enseignement en problématisant la question de la transposition didactique d'un tel concept dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard. En particulier, l'auteur met en évidence des décalages entre les choix de la noosphère et les choix didactiques des professeurs. Concernant l'enseignement des autres transformations du plan, Cassan (1997) suggère que la très forte institutionnalisation de la symétrie axiale peut être un obstacle à l'apprentissage visé par l'enseignement de la symétrie centrale ; Bkouche (1992) souligne le caractère artificiel de l'enseignement des propriétés de conservation ainsi que la négligence des concepts d'invariance et enfin Jahn (1998) se concentre sur la transition collège/lycée et révèle la négligence de la dialectique globale/ponctuelle.

Notre travail consiste alors à croiser ces différents constats concernant l'enseignement et l'apprentissage de la symétrie axiale et des autres transformations du plan. On se demande en particulier si on peut relier les conceptions résistantes de la symétrie axiale chez les élèves aux difficultés didactiques rencontrées lors de l'enseignement des autres transformations du plan. Et si ces difficultés existent, sont-elles inhérentes au concept de symétrie ou sont-elles liées à l'organisation actuelle des programmes ?

2. Construction du cadre théorique

Nous avons construit un cadre d'analyse qui va nous permettre de problématiser cette première approche du concept de symétrie concernant son rôle dans la construction des nouvelles connaissances visées par le collège. Vergnaud (1991) place au cœur du processus de conceptualisation la notion de représentation du réel dont l'étude est révélée à travers l'activité de l'élève. Nous adoptons le point de vue de Vergnaud qui considère l'apprentissage comme l'adaptation de schèmes (un schème étant l'organisation invariante de la conduite dans une classe de situation donnée). Nous faisons donc référence à la théorie des champs conceptuels mais nous avons en réalité mené une étude partielle du champ conceptuel des isométries car nos analyses insistent surtout sur l'adaptation de certains invariants opératoires (concepts et théorèmes-en-acte) dans un seul type de situations.

Afin de compléter cette approche cognitive, nous faisons référence au cadre de Houdement et Kuzniak (2006) des paradigmes géométriques et des Espaces de Travail Géométrique (ETG) afin de prendre en compte la spécificité géométrique du travail de l'élève en jeu. En particulier nous supposons que **l'articulation de ces deux cadres révèle la notion d'ETG comme un espace privilégié pour analyser la conceptualisation en jeu.** En effet, Houdement et Kuzniak catégorisent les modes de pensée géométriques en termes de paradigmes géométriques qui se caractérisent par leur rapport à la réalité. La Géométrie I (GI), « la géométrie naturelle » concerne des raisonnements géométriques qui reposent sur la perception et la manipulation d'objets matériels issus de l'espace local et réel. Et réciproquement, l'espace local et réel apparaît comme un support privilégié pour GI (on suppose que le schème du pliage fait ainsi partie de GI). La Géométrie II (GII), la « géométrie axiomatique naturelle » concerne des raisonnements géométriques dits hypothético-déductifs mettant en jeu des modèles mathématiques prédéfinis dans un système tel que celui de la géométrie euclidienne. Et réciproquement, ces modèles mathématiques sont prédéfinis pour faire fonctionner des raisonnements hypothético-déductifs tels que ceux réalisés dans le cadre de la géométrie euclidienne. L'approche formelle de la symétrie axiale au collège par exemple met en jeu des modèles mathématiques concernant le point, la droite, etc. Nous éludons dans notre étude la Géométrie III (GIII), la « géométrie axiomatique formaliste », car elle ne concerne ni le collège ni la réalité. Les interconnexions décrites ici entre paradigmes géométriques ne sont pas exclusives. Il existe des modèles de référence implicites dans GI, et, l'espace réel et local peut également être sollicité dans GII. Il n'existe pas de frontière nette entre ces deux paradigmes ; on parlera plutôt de basculements de paradigmes, ou de jeu GI-GII, car on peut effectivement passer d'un paradigme à un autre au cours d'une même situation. On suppose alors que ce jeu GI-GII est en partie régulé par le contrat didactique (Brousseau 1998) autrement dit il dépend des relations maître-élève qui ont eu lieu durant l'enseignement qui précède l'activité observée.

De plus, si les deux paradigmes GI-GII sont en interaction alors **l'espace réel** et **les objets de référence** le sont aussi. Cette interaction peut nécessiter un processus de construction impliquant l'intervention d'**outils** (artefacts, schèmes d'action, etc.). L'articulation de ces trois composants (l'espace réel et local, les objets de référence, les outils) constitue alors **l'Espace de Travail Géométrique (ETG).** C'est à ce niveau que se situe notre point d'ancrage de la théorie des champs conceptuels car cette articulation rend compte du processus conceptualisation au sens de Vergnaud :

> « Ce que j'entends par conceptualisation, c'est l'identification des objets du monde, de leurs propriétés, relations et transformations, que cette identification résulte d'une perception directe ou quasi-directe, ou d'une construction. » (Vergnaud 2007, p342)

On reconnaît alors dans cette citation les composants de l'ETG (« objets du monde », « propriétés ») et l'intérêt de leurs liens (« relations et transformations », « perception », « construction ») dans le processus de conceptualisation. L'ETG apparaît ainsi finalement comme un espace privilégié pour analyser la conceptualisation en jeu et nous interpréterons en termes d'invariants opératoires les relations et articulations des différents composants de l'ETG qui vont alors s'adapter lors de l'enseignement et de l'apprentissage des différentes transformations du plan au collège.

3. Formulation des questions de recherche

Nous sommes maintenant en mesure de formuler les questions de recherche qui problématisent notre questionnement de départ, précédemment énoncé, concernant le rôle de la symétrie axiale dans l'apprentissage et l'enseignement des autres transformations du plan :

- **Q1 : La symétrie axiale pilote-t-elle l'organisation et les inférences des invariants opératoires des autres transformations du plan au collège dans la construction de l'ETG personnel de l'élève ? Si oui, comment ?**
- **Q2 : Comment l'ETG personnel évolue-t-il au cours de l'enseignement des autres transformations du plan ?**
- **Q3 : Quel est l'ETG idoine développé en classe ? Quelle est la distance entre cet ETG idoine et l'ETG personnel que l'élève développe finalement ?**

Avant de nous attaquer à ces questions dans un contexte exclusivement scolaire, nous avons mené une étude dans une réalité professionnelle dont la pratique privilégie le recours à la géométrie GI, contrairement à l'institution scolaire qui privilégie GII.

II Etude de l'Espace de Travail Géométrique des tailleurs de pierre et des ébénistes

Cette étude est donc directement motivée par ce lien immédiat avec la réalité et la méthodologie mise en œuvre nous permet une observation du concept de symétrie dans l'action car les situations rencontrées se réfèrent dans l'action au concept de symétrie, et « au fond de l'action, la conceptualisation » (Vergnaud 1996). On cherche alors à étudier la nature du concept de symétrie dans un paradigme *a priori* GI assumé et à déterminer sa place dans l'ETG personnel de l'artisan.

1. Méthodologie adaptée

Nous avons rencontré quatre tailleurs de pierre (nous noterons TP) et trois ébénistes (TB pour Tailleur de Bois) dans leurs ateliers. Nous avons mené des entretiens exploratoires semi directifs à partir de photos de motifs de la Cathédrale Notre Dame de Paris (voir un extrait ci-contre) et des cas de figures courants en taille de pierre ou de bois tels qu'une volute, révélant différents cas de symétries. Les questions portent principalement sur le tracé du motif et sa réalisation, en essayant d'insister sur la justification des techniques, des instruments et des moyens de contrôle. Il s'agit d'une situation d'action dans laquelle on retrouve une phase de communication et de validation (nous ne faisons pas référence à la théorie des situations) afin de faire parler et réfléchir les artisans sur leurs propres actions. Comme Bessot et Laborde le rappellent : « moins une tâche est problématique, plus les actions pour la réaliser sont transparentes et donc difficiles à expliciter » (Bessot & Laborde, 2005). D'où l'intérêt que l'entretien se déroule dans leurs ateliers, où ils se retrouvent dans leur environnement familier et peuvent alors appuyer leur discours par de courtes démonstrations avec leurs propres outils.

Inspirées par les travaux antérieurs sur le rôle des mathématiques en voie professionnelle (Bessot & Laborde 2005) (Straesser 2000) et ou sur les mathématiques dans l'activité professionnelle (Noss, Hoyles & Pozzi 2000) (Williams & Wake 2007), nos analyses se basent sur les procédures et les formulations recueillies à travers notre corpus qui regroupe les retranscriptions de tous les entretiens (dont certains extraits sont donnés dans le développement de ce papier), quelques photos et vidéos, ainsi que le recueil des dessins et figures réalisés lors des entretiens.

2. La symétrie, un concept organisateur de la conduite

L'analyse de ces données a mis en évidence une structuration de l'espace par des invariants opératoires propres de la symétrie axiale, dont principalement le schème de bidécomposabilité, c'est-à-dire le fait de décomposer en deux parties superposables, dans lequel on retrouve le concept-en-acte d'invariance globale et d'invariance point par point. L'artisan « prépare » son espace personnel en déterminant des repères extra-figure (le support et le cadre de la figure sont indépendants de la figure) qui supporteront la figure. Les repères intra-figure (dépendants de la figure) « structurent » la figure de manière la plus adaptée d'après l'artisan, au problème pratique posé. Ces repères constituent pour l'artisan des repères de position (pour positionner les instruments par exemple), de mesure ou encore de tracé, afin de mettre en évidence les régularités de la figure (dont l'axe -ou le centre- de symétrie est un repère évident).

> TP1 : « Il faut que j'aie les dimensions, pour pouvoir me dire dans quel cadre ça rentre et dans quel bloc capable, j'entends par là les dimensions maximales de l'ouvrage, une fois que j'ai les dimensions par rapport à un axe ou des cotes. (…) Il est inscrit dans une surface plane. (…) Pour vérifier que le motif est bien cadré sur cet axe et que j'ai le bon axe. (…) C'est-à-dire on trace un trait droit, qui sera l'axe, on prend les dimensions capables, on prend les contours, ensuite on reprend les cotes déterminantes, et ça va nous déterminer l'emplacement du motif (…) donc l'axe vertical me permet de faire une symétrie correcte, en fait, c'est une croix, ça cale quelque chose, je ne sais pas comment vous expliquer ça, c'est une cible en fait. Si je trace la même croix sur un morceau de pierre et que je la fixe au calque à cet endroit, ça me permet de caler les choses. »

Pour réaliser ce travail de structuration, l'artisan dispose d'un répertoire d'objets de référence (tels que le point, la droite, le cercle, le carré, etc.) ainsi que des techniques, cristallisé dans la pratique. La mise en œuvre de ces objets de référence et techniques à travers une instrumentation spécifique dans l'espace réel et local constitue l'Espace de Travail Géométrique personnel de l'artisan. La formulation de ces différents composants est parfois tellement proche de celle que l'on pourrait trouver dans les ouvrages de référence (les deux principaux cités par les artisans sont (Chanson 1988) et (Ricaud 1999)), elle-même tellement proche de celle que l'on peut trouver dans les éléments d'Euclide, qu'on ne peut finalement distinguer la véritable origine de leur pratique. Nous parlons alors d'un véritable phénomène d'intrication entre ces différents facteurs (ouvrages de référence, enseignement, expériences, etc.). Cependant, leur répertoire semble relativement figé car lors de situations incidentelles, c'est-à-dire lors de situations légèrement différentes de celles qu'ils ont l'habitude de résoudre, ils ne questionnent pas la validité de la technique et l'adaptent en développant plutôt des « stratégies d'ajustement » (au « jugé » ou *via* des instruments de mesure plus spécifiques). Par exemple, la technique de la médiatrice de deux cordes pour retrouver le centre d'un arc de cercle ou d'une courbe est généralement citée par les artisans mais elle est peu restituée dans son intégralité. Ils complètent leur construction en mesurant au réglé [3] ou en utilisant un perroquet[4].

3 Un réglé ou règle : « Toute baguette ou latte parfaitement rectiligne, graduée ou non, utilisée pour le tracé de traits droits. » (Une particularité du réglé est qu'il n'y a pas de bords contrairement à la règle ordinaire graduée de l'écolier).

4 Un perroquet : « Règle plate incurvée, utilisée pour tracer de longues courbes ». Ces définitions proviennent de l'ouvrage de JeanVigan (1994) Dictionnaire général du bâtiment, Le petit Dicobat, Rig-Orangis : Arcanture.

TP1 : « Je vais prendre un segment [la corde], je vais trouver son milieu, soit par cote soit par croisé d'arc avec le compas [technique de la médiatrice]. Je prends la pointe de mon compas sur un côté que j'aurai déterminé, j'envoie à l'œil plus loin que la moitié, je trace un arc de cercle, la même chose sur l'autre point et je rejoins forcément, clac. (…) Et là-dessus je peux retrouver mon rayon… mais je ne me souviens plus très bien…. »

3. Un exemple de théorème-en-acte généré par la pratique

Une de nos questions portait sur la construction d'une volute simple. Un des ébénistes a alors répondu :

TB1: « On est obligé de développer une première fois puis d'inverser pour qu'il se retrouve complètement à l' opposé. »

La symétrie centrale est interprétée (et mimée) comme la composée de deux symétries axiales dont les axes sont : un horizontal puis un vertical dans un même plan. On retrouve le rôle prépondérant de cette paire d'axes, signifiant de la composée de deux symétries axiales. On « développe » en deux temps : il s'agit de la succession de deux « dépliages ». Ce schème met en relation les concepts-en-acte de conservation, d'invariance globale et d'orientation. On peut alors faire l'hypothèse que l'origine de cette conception vient d'une technique propre à l'ébénisterie : la marqueterie. En effet, cette technique consiste à reproduire un motif issu d'une fine tranche de bois par « développement » en 3D (puisqu'on plie et déplie une fine feuille de bois) en suivant des composées de symétries axiales d'axe horizontal ou vertical, ou des composées de translation (développement 2D), ou encore des composées de symétries axiales et translations, autrement dit des symétries glissées. Ainsi, dans le cas de la volute simple, on retrouve les gestes quotidiens et routiniers associés à ceux de la marqueterie, d'où la mise en œuvre naturelle de composées de symétries axiales.

4. Conclusion sur l'étude de l'ETG des tailleurs de pierre et des ébénistes et liens vers l'institution scolaire

Finalement cette étude concernant l'ETG personnel des tailleurs de pierre et ébénistes (plus largement développée dans le chapitre 3 de la thèse) a permis de mettre en évidence une organisation de la conduite de l'artisan dirigée en partie par des invariants caractéristiques de la symétrie axiale. De plus, l'articulation des composants de son ETG révèle une forte intrication des objets de référence et des techniques tirées d'apprentissage antérieurs ou de leurs propres expériences. Cela nous incite à penser que le concept de symétrie dont ils réfèrent n'est pas une conception experte du concept familier ni une conception antagoniste à une conception scientifique mais correspond plutôt à un concept intermédiaire, un concept « naturalisé ». Enfin, l'organisation relativement figée de cet ETG révèle la mise en œuvre de stratégies d'ajustement possibles notamment par une très forte instrumentalisation.

On distingue justement la rupture entre GI et GII par cette gestion de l'approximation. Le collège lui cherche à détacher l'élève de cette GI en reniant cette approximation (même efficace). Nous revenons alors vers nos questions de recherche (Q1, Q2, Q3) précédemment énoncées en se demandant alors quelle est l'adaptation et l'organisation des invariants opératoires de la symétrie dans une géométrie qui ne se veut plus figée mais au contraire tend vers GII. Nous abordons la partie la plus conséquente de la thèse (développée surtout dans les chapitres 6 et 7 de la thèse) qui porte notamment sur l'analyse d'un questionnaire commun proposée dans une classe de 5e et dans une classe de 3e et sur l'analyse des observations des séances d'enseignements des transformations du plan en vue d'expliquer les résultats obtenus.

III Etude longitudinale au collège

Comme déjà évoqué, nous avons réalisé une étude partielle du champ conceptuel des isométries car nous n'avons pas choisi une entrée par les situations (au sens de Vergnaud) c'est-à-dire que nous n'avons pas considéré un ensemble de situations qui génère alors des classes caractérisées par des invariants opératoires. Vergnaud lui-même décrit la complexité d'une telle entreprise dans le cadre de la géométrie :

> « (…) il est bien difficile de construire des situations et d'élaborer des exercices relevant de la géométrie des figures sans toucher en même temps la question des positions relatives et la question des transformations. De même, il n'y a pas de géométrie des transformations sans figures et sans positions. » (Vergnaud 2001)

Nous avons alors choisi une autre entrée, celle des concepts mathématiques inhérents au concept de symétrie et que l'on retrouve dans les invariants opératoires constitutifs du schème. Nous avons alors déterminé un seul type de situations : la reconnaissance des transformations du plan à partir d'un support graphique et d'un énoncé qui ne propose pas de dénomination des objets représentés (« soit un triangle … ») ni aucune hypothèse sur des propriétés mathématiques.

1. Apport des travaux de Duval dans l'analyse de l'ETG

Un premier questionnaire exploratoire a pointé la nécessité de la prise en compte du type de déconstruction des figures au sens de Duval (2005). En effet les différentes stratégies mises en œuvre par l'élève impliquent différents traitements de la figure possibles. Duval définit trois types de déconstruction figurale :

- **la décomposition méréologique** implique un découpage de la figure de départ (dans le plan par exemple on notera 2D) en sous-figures de même dimension (2D). Duval propose l'exemple du parallélogramme (figure 3) découpé en triangles (dans ce cas, les sous-figures sont de même forme ; le découpage est homogène).

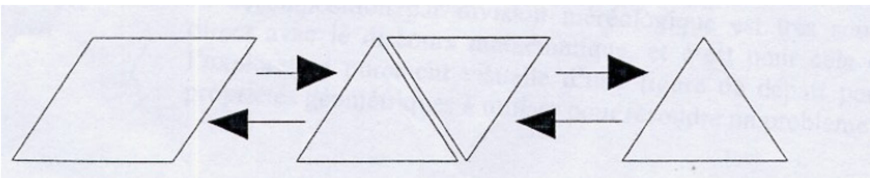


Figure 3 : exemple d'une décomposition méréologique (Duval 2005, p. 21-22)

- **la déconstruction instrumentale** implique l'utilisation d'outils (règle graduée, compas, etc.) dans le but de reconstruire la figure. Dans le cas de la symétrie axiale, l'élève peut par exemple, reconnaître le schème de construction de la médiatrice.

- **la déconstruction dimensionnelle** implique une déconstruction en unités figurales de dimension inférieure (figure 4) dans le but de mettre en relation ces unités figurales (1D ou 0D). Par exemple, certaines propriétés métriques sont caractéristiques de la symétrie axiale ou centrale.

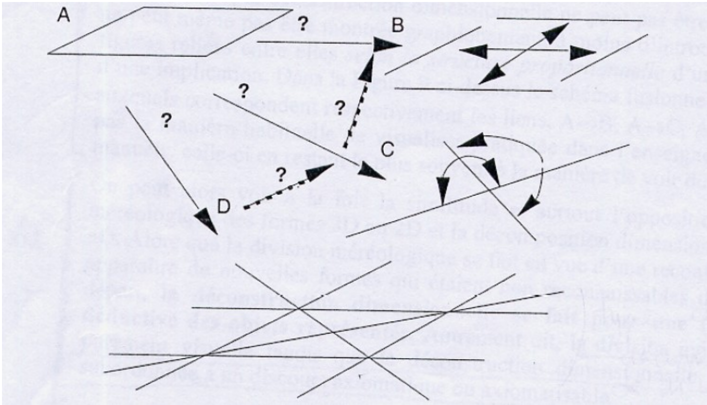


Figure 4 : « Décomposition en unités figurales par déconstruction dimensionnelle d'une forme » (Duval 2005, p. 23).

Duval oppose la déconstruction dimensionnelle à la décomposition méréologique et à la déconstruction instrumentale.

> « Même les activités de construction de figures, […] car l'attention porte justement sur la reconstruction d'unités figurales 2D à partir d'unités figurales 1D automatiquement produites par l'instrument. C'est pourquoi la déconstruction dimensionnelle, c'est-à-dire le passage des surfaces aux lignes (les lignes n'étant pas visuellement des bords), représente une révolution cognitive par rapport aux autres types de visualisation. […] Alors que la division méréologique se fait en vue d'une reconfiguration faisant apparaître de nouvelles formes qui étaient reconnaissables dans la figure de départ, la déconstruction dimensionnelle se fait pour une (re)construction déductive des objets représentés. Autrement dit, la division méréologique reste purement visuelle tandis que la déconstruction dimensionnelle est entièrement subordonnée à un discours axiomatique ou axiomatisable ». (Ibidem, pp. 23-24).

Par conséquent, le processus de déconstruction dimensionnelle est nécessaire pour accéder à la géométrie déductive, autrement dit pour atteindre GII d'après notre cadre théorique.

Ainsi, l'analyse du traitement de la figure au sens de Duval, selon la transformation en jeu, permet de décrire les relations entre les composants de l'ETG (c'est à dire l'espace réel et local ou le support graphique, les instruments et les objets de référence). Une nouvelle question est alors formulée, qui nourrit directement les questions Q1 et Q2 :

- **Q4 : Quel est le rôle joué par la symétrie axiale dans le traitement de la figure dans la construction de l'ETG personnel de l'élève ?**

1. Méthodologie adaptée et traitement des données

Nous avons proposé un questionnaire à deux moments cruciaux où les connaissances des élèves ont été déstabilisées :
- en 5^e après l'enseignement de la symétrie centrale
- et en 3^e après l'enseignement de la rotation.

Nous proposons dans ce papier seulement l'analyse de la situation dite des triangles (figure 5 et 6) qui se déroulait en deux temps.

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2
b) 2 → 3

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

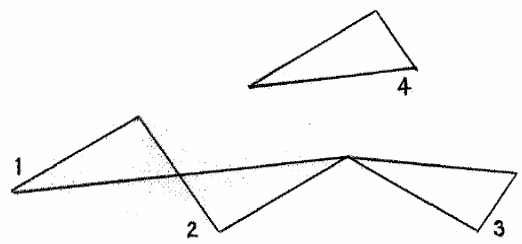


Figure 5 : la situation des triangles dans le cas dit de perception globale (PG).

Dans la première tâche (figure 5) dite PG (Perception Globale), il s'agit de reconnaître une symétrie centrale ou une rotation de 180° à partir d'un support graphique sur fond blanc dans lequel les figures considérées ne sont pas nommées mais désignées dans leur ensemble par un chiffre. La deuxième tâche (figure 6) est donnée huit jours plus tard. Il s'agit toujours de reconnaître les mêmes transformations du plan mais cette fois le support graphique est un quadrillage et les figures sont nommées par leur sommet sur le support graphique et dans l'énoncé. L'énoncé (dans les deux cas) est adapté au niveau scolaire (on ne parle que de symé - tries en classe de 5e).

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC
b) CDE en GFE
c) ABC en MNP

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

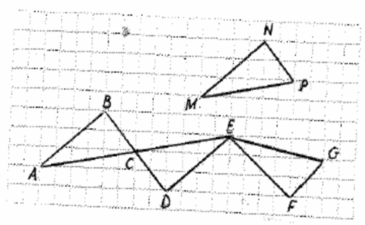


Figure 6 : la situation des triangles dans le cas dit de perception ponctuelle (PP).

Nous faisons alors l'hypothèse que la prise d'informations par l'élève va changer selon la per - ception suggérée par la tâche. Les variables didactiques des deux tâches étant différentes (fond blanc, quadrillage, points nommés), elles appellent *a priori* à un traitement différent.

En particulier, l'énoncé des tâches ne propose ni de dénomination des objets représentés ni des hypothèses qui fixeraient des propriétés mathématiques. Aussi, si un élève propose les propriétés mathématiques relevées sur le graphique (perceptivement, ou en mesurant), elles peuvent être vraies ou presque vraies (par exemple : AC=CE ou AC et CE sont presque égales) sont des propositions recevables tout comme AC n'est pas égale à CE si l'on tient compte des marges d'erreurs. Etant donné que l'élève peut se satisfaire de constatations perspectives, on suppose que l'organisation des composants de l'ETG va être différente dans ces deux tâches : PG s'inscrirait plutôt dans un paradigme GI et PP plutôt dans GII (même si ce n'est finalement pas tout à fait GII car aucune propriété mathématique n'est donné en amont). Cette dichotomie n'étant pas stricte étant donné que l'énoncé affirme qu'il faut reconnaître des transformations, donc c'est qu'elles existent. Le support blanc étant plus vierge, les adaptations possibles de l'élève y sont plus larges et plus diverses (l'élève peut se contenter de superposition acceptables et donc se situer dans GI ou passer à une discrétisation du plan et proposer des égalités de mesures et déduire les transformations en jeu, il s'agit alors d'un raisonnement déductif, c'est en ce sens que nous inscrivons plutôt l'ETG dans GII) tandis que dans le cas PP, les figures sont désignées par leur sommet dans un quadrillage pouvant servir de repère. De plus, une description point par point de la figure et de son image est suggérée dans l'énoncé. Cependant, les perceptions suggérées par la tâche n'impliquent par que l'élève va s'inscrire dans l'une ou l'autre perception exclusivement comme nous le verrons a posteriori. En effet l'analyse des productions des élèves porte surtout sur les différences de traitement des figures selon la transformation en jeu et selon le changement de contrat (c'est-à-dire selon la perception suggérée par la tâche) en 5^{e} et en 3^{e}. **Nous allons en particulier mettre en évidence comment le comportement attendu des élèves en 5^{e} et en 3^{e} révèle la stabilité de leur ETG mais également met en évidence des traitements de la figure propres aux transformations en jeu et différentes à ces deux niveaux scolaires.**

Nous avons choisi de mener une étude qualitative des productions. Néanmoins, nous avons recueilli 30x2 copies en 3^{e} et 27x2 copies en 5^{e}, nous avons donc choisi de réaliser une classification des productions selon des critères de réussite et selon la stabilité de cette réussite afin d'organiser nos analyses et de mettre en évidence des profils d'élèves. Nous définissons plusieurs catégories et sous-catégories :

- CATEGORIE VRAI-VRAI (V-V) : les élèves proposent des réponses correctes quelle que soit la tâche c'est-à-dire dans la situation PG puis PP.
- SOUS-CATEGORIE VRAI-VRAI Variable : les élèves de cette sous-catégorie présentent des changements explicites dans la justification de leurs réponses (toujours correctes quelle que soit la tâche).
- SOUS-CATEGORIE VRAI-VRAI Invariable : les élèves de cette sous-catégorie ne présentent pas des signes de changement dans la justification de leurs réponses.

- CATEGORIE FAUX-FAUX : les élèves présentent des réponses erronées (ou pas de réponses du tout) dans les deux cas PG et PP.
- SOUS-CATEGORIE FAUX-FAUX Variable : les élèves de cette sous-catégorie présentent des changements explicites dans la justification de leurs réponses (pourtant toujours incorrectes).
- SOUS-CATEGORIE FAUX-FAUX Invariable : les élèves de cette sous-catégorie ne présentent pas de signes de changement dans la justification de leurs réponses.

- CATEGORIES MIXTES : les élèves changent de réponses selon la perception suggérée par la tâche :

– CATEGORIE FAUX-VRAI : les élèves présentent des réponses erronées dans la situation PG mais correctes dans la situation PP.

– CATEGORIE VRAI-FAUX : les élèves présentent des réponses correctes dans la situation PG mais erronées dans la situation PP.

Nous avons également numéroté les copies d'élèves :

- 3.i : i allant de 1 à 29 élèves en 3e (l'élève de la copie 3.30 était absent lors d'une des deux séries du questionnaire, on compte alors 29 élèves au lieu de 30).
- 5.j : j allant de 1 à 26 élèves en 5e (l'élève de la copie 5.16 était absent lors d'une des deux séries du questionnaire, on compte alors 26 élèves au lieu de 27).

Les tableaux suivants (6.5 et 6.6) répertorient la conduite de tous les élèves interrogés selon la perception suggérée par la tâche à la question a. (où il s'agit de reconnaître une symétrie centrale - SC - ou une rotation de 180°) et à la question b. (où il s'agit de reconnaître une symétrie axiale - SA -). Nous avons représenté par une flèche le comportement d'un élève à la question a. puis à la question b. Certaines flèches vont alors dans la même direction, nous obtenons ainsi plusieurs profils d'élèves en fonction des changements similaires de catégories d'une transformation à une autre. On distingue les élèves qui appartiennent à la catégorie V-V et les élèves qui présentent au moins une fois une erreur (catégories mixtes et F-F). Parmi ces élèves de 3e qui sont au moins une fois dans l'erreur, on constate que certaines flèches vont dans la même direction, c'est-à-dire qu'un certain nombre d'élèves ont le même comportement à la question a. et à la question b. On distingue ainsi clairement deux profils d'élèves, et nous les avons représentés par un nuage de couleur dans le tableau 6.5.

En revanche en 5e, on ne distingue pas de flèches qui ont la même direction (hormis les flèches – bien moins nombreuses qu'en 3e – qui représentent les élèves qui appartiennent à la catégorie V-V). En effet, les profils sont beaucoup plus éclatés et on ne relève pas vraiment de comportements similaires dans l'erreur. Par exemple, il semble que les élèves qui appartiennent à la catégorie F-F *invariable* à la question b. (ces élèves ne reconnaissent pas la symétrie axiale) ont tous eu un comportement différent à la question a. (un disque coloré regroupe ces élèves dans le tableau 6.6).

Deux pages « paysage » dans un fichiers à part

2. Etude de l’ETG personnel des élèves de la classe de 3e

Nous avons analysé chaque production d’élève de chaque profil. Nous avons alors déduit que l’ETG personnel des élèves de 3e semblait relativement stable. Nous expliquons cette stabilité par un usage souple (et sans erreurs) des invariants opératoires caractéristiques de la symétrie axiale selon la tâche (et comme attendu *a priori)*. Les élèves de 3e semblent adapter leur ETG selon la perception suggérée par la tâche lorsqu’il s’agit de reconnaître une symétrie. Par exemple, un élève citera plutôt des arguments empiriques tels que le « reflet du dessin » dans le cas dit de « perception globale » (tout en inscrivant sur la figure le codage de l’orthogonalité) pour justifier la symétrie axiale alors que dans le cas dit de « perception ponctuelle », ce même élève justifiera la reconnaissance de la symétrie axiale en donnant explicitement et uniquement les relations d’orthogonalité entre deux segments (d’extrémité un point et son image) et en laissant le support graphique vierge. Dans ce cas, l’élève met en œuvre explicitement une déconstruction dimensionnelle de la figure afin de justifier sa reconnaissance de la symétrie par des propriétés caractéristiques de celle-ci dans le cadre de la géométrie affine euclidienne. Nous caractérisons l’ETG personnel des élèves de 3e comme étant stable car on distingue un seul type d’erreur qui porte sur la reconnaissance de rotation erronée à la fois dans le cas a. et dans le cas b. et quelle que soit la perception suggérée par la tâche. L’élève applique alors le théorème-en-acte de cocyclicité qui consiste à vérifier que si un point et son image supposée appartiennent à un même cercle, alors il s’agit d’une rotation. Ce théorème-en-acte est valide dans le cas a. (car il s’agit d’une rotation de 180°) mais n’est pas valide dans le cas b. car il s’agit de reconnaître une symétrie axiale (figure 7). Ce théorème-en-acte rend compte d’une déconstruction instrumentale car l’élève retrouve le schème instrumenté (avec le compas) de la construction de l’image d’un point par une rotation. Cependant ce théorème-en-acte ne prend pas en compte la conservation de la mesure d’angle qui est pourtant une caractéristique mathématique essentielle de la rotation. On pouvait s’attendre à une telle erreur étant donnée la position relative des deux triangles. Cependant, cette erreur est également fréquente dans le cas PP alors que la transformation est décrite point par point : « CDE en GFE ».

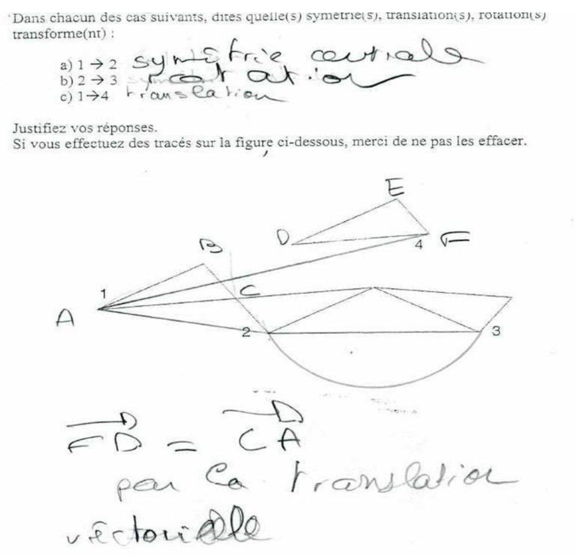


Figure 7 : exemple d’un emploi non valide du théorème en acte de cocyclicité dans le cas PG.

On observe ainsi un traitement de la figure différent selon la transformation en jeu :

- **une déconstruction instrumentale dans le cas de la rotation**, qui semble relativement constante quelque soit la perception suggérée par la tâche. Malgré le changement de contrat, le rapport à la figure reste celui mise en œuvre par une déconstruction instrumentale. Ceci semble cohérent avec la thèse de Duval qui oppose la déconstruction instrumentale et la déconstruction dimensionnelle ; cette dernière n'allant pas de soi et est pourtant la seule à être associée avec une activité discursive.
- **une adaptation à la tâche dans le cas de la symétrie axiale** (et même centrale), pouvant aller jusqu'à la mise en œuvre d'une déconstruction dimensionnelle maîtrisée et qui conduit jusqu'à un véritable raisonnement déductif. En effet « l'appréhension discursive d'une figure correspond à une explicitation des autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explicitation est de nature déductive » (Duval 1994, p. 124).

3. Etude de l'ETG personnel des élèves de la classe de 5e

D'après le tableau 6.6, les profils des élèves de la classe de 5^{e} sont plus éclatés. Ceci annonce en effet que l'ETG personnel des élèves de 5^{e} est plus instable que celui des élèves de 3^{e} (ce qui n'est pas surprenant). Les erreurs y sont plus diversifiées. On relève notamment un « amalgame d'une notion sur un support donné » au sens d'Artigue (1990), déjà remarqué dans les travaux de Cassan (1997). Certains élèves reconnaissent davantage de symétries axiales erronées dans le cas PG et davantage de symétries centrales erronées dans le cas PP (il serait nécessaire d'étudier des situations intermédiaires où l'axe n'est pas vertical et les figures n'ont pas de points communs). Nous justifions néanmoins ces confusions du fait de la trop grande proximité des invariants opératoires entre ces deux transformations à ce niveau scolaire (bien que l'une soit un déplacement et l'autre un antidéplacement). Nous relevons en particulier des effets de contrat exprimant des passages artificiels vers la déconstruction dimensionnelle dans le cas PP. Illustrons notre propos en citant l'exemple d'un élève (et il n'est pas le seul) qui propose des réponses correctes dans le cas PG mais qui propose des réponses erronées dans le cas PP (alors que le quadrillage révèle l'axe de symétrie vertical contrairement à la situation PG). En effet, cet élève justifie ses réponses dans le cas PG par des arguments empiriques du type « si on replie la figure sur la droite (d) on s'aperçoit que la figure est superposable » (question b.) alors qu'il change d'avis et justifie la reconnaissance d'une symétrie centrale (erronée donc) à la question b. dans le cas PP par l'énonciation d'une propriété au format institutionnel « car dans la symétrie centrale l'image d'une figure est une figure de même longueur et c'est le cas ici ».

4. Conclusion : une évolution du statut de la symétrie axiale à travers l'ETG personnel de l'élève

Si nous comparons les ETG personnels des élèves de 5^{e} et de 3^{e}, la symétrie axiale semble jouer un rôle très différent à ces deux niveaux dans la construction de l'ETG personnel de l'élève. En 5^{e}, la symétrie axiale apparaît plutôt comme un obstacle didactique car elle génère de nombreuses erreurs dues à la proximité des invariants opératoires entre la symétrie axiale et la symétrie centrale. On relève en particulier un passage artificiel vers la déconstruction dimensionnelle, phénomène qui nous renvoie au point de vue de Duval qui dénonce les contraintes institutionnelles de l'enseignement secondaire « à faire comme si la déconstruction dimensionnelle était évidente, alors qu'elle est contraire au fonctionnement normal et intuitif de la visualisation » (Duval 2005, p. 47). En revanche en 3^{e}, la symétrie axiale semble plutôt jouer un rôle essentiel dans l'organisation de l'ETG de l'élève et semble s'adapter à la tâche, révélant même une dialectique GI-GII maîtrisée. La symétrie axiale permet même à l'élève d'organiser son propre réseau de propriétés métriques et même de réaliser un raisonnement déductif. Les invariants opératoires relatifs à la reconnaissance de la symétrie semblent cette fois opposés à ceux de la rotation. En effet les invariants opératoires de cette dernière (qui renvoient plutôt à une déconstruction instrumentale) semble figés quelques soient les changements de variables didactiques prévues entre les cas PG et PP.

Il serait alors approprié de proposer des tâches intermédiaires jouant sur d'autres variables didactiques (telles que la position des figures en proposant des figures qui n'ont pas de points communs par exemple) afin de confirmer l'hypothèse que la perception suggérée par la tâche module la distance entre l'ETG personnel de l'élève et l'ETG de référence attendu par le professeur en fonction de la transformation en jeu. Dans le but d'expliquer les résultats obtenus à partir de l'analyse de ces tâches, nous avons observé l'enseignement reçu par ces élèves concernant la symétrie centrale en 5^{e} et la rotation en 3^{e}, donné par le même professeur Mme B.

5. Liens avec l'enseignement reçu par ces élèves

Ce paragraphe concerne directement la question Q3 de recherche concernant la distance entre l'ETG mis en place par le professeur et l'ETG que l'élève s'approprie finalement. Nous questionnons la transférabilité des processus de déconstruction des figures soulevée par Duval (2005) et qui, d'après l'auteur, ne vont pas de soi. Quelle est la prise en charge de ces différents passages de déconstruction dimensionnelle par l'enseignant à ces deux niveaux différents : en 5^{e} et en 3^{e} ?

Méthodologie adaptée : analyse des séances en terme d' « incidents »

Notre méthodologie d'analyse se concentre sur l'analyse des malentendus entre le professeur et les élèves, visibles à partir de nos retranscriptions des séances. Nous faisons alors référence à la notion d' « incident » au sens de Roditi (2003) :

> « Une manifestation publique (au sens où elle s'intègre à la dynamique de la classe) d'un élève ou d'un groupe, en relation avec l'enseignement, et en décalage négatif par rapport à l'ensemble des réponses correctes envisageables compte tenu de la tâche proposée. » (Roditi 2003, p192)

Résultats : une distance sous-estimée entre L'ETG « standard » mis en place par le professeur et l'ETG personnel de l'élève

Nos analyses ont alors mis en évidence une distance sous-estimée entre l'ETG idoine mis en place par le professeur et l'ETG personnel de l'élève en 5^{e} et en 3^{e}. Cette distance peut alors s'expliquer en partie par des incidents relatifs à des changements implicites de dimension des objets en jeu qui font écho à un phénomène décrit par Duval (2005) : le « hiatus dimensionnel ».

> « Toutes les progressions de connaissances semblent s'organiser selon le même ordre « conceptuel » : ((((points→droites)→segments de droites)→polygones)→polyèdres). […] cela va donc dans un sens contraire du travail long et nécessaire de déconstruction dimensionnelle pour entrer dans la compréhension des connaissances géométriques. » (Duval 2005, p45-47)

Nous illustrons notre propos par un extrait de séquences lors de la construction du symétrique d'une figure par symétrie centrale lors de la première séance consacrée à la symétrie centrale en 5e. Cet extrait témoigne alors d'un malentendu entre le professeur et l'élève concernant la dimension dans laquelle s'inscrit l'ETG de l'élève et celui du professeur :

> « E : ben moi je calque sur la figure F1, après avec le compas, je mets le compas sur le point O et sur le calque.
> P : Ah! La pointe du compas ? Donc qu'est-ce que tu fais avec le point O ?
> E : C'est l'axe.
> P : C'est l'axe ? Le point c'est l'axe… c'est un point !
> E : Oui.
> P : Un axe, c'est une droite. Et qu'est-ce que tu fais avec ce point avec ton compas dessus ? … Il dit qu'il met le compas sur le point O et après ?
> E' : Après il met le compas sur le point O et il tourne la feuille.
> P : Vous avez entendu ? (…) Quel geste a-t-elle fait ? Elle a tourné quoi ?
> E : Autour de O.
> P : Autour du point O qui lui est … complètement…
> E : L'axe de symétrie.
> P : C'est le centre ! »

Les échanges fermés entre l'élève et le professeur révèlent un malentendu résistant. Le professeur s'attend à ce que l'élève dise que le centre de symétrie est fixe ou est le centre de symétrie, or l'élève fait une correspondance des signifiants (par analogie avec la symétrie axiale) de cette invariance alors matérialisée par la branche du compas. Par conséquent pour l'élève, « le centre de symétrie est donc l'axe de symétrie », alors que le professeur lui, considère seulement le plan et donc le centre de symétrie. Les interlocuteurs n'usent donc pas des mêmes référents, et leur ETG ne sont pas dans la même dimension (celui de l'élève se situe en 3D alors que celui du professeur est en 2D), ce qui provoque cet incident.

Nous expliquons aussi cette distance par des incidents provoqués par la dénaturation de certaines pratiques institutionnalisées comme l'illustre cet extrait de séances en classe de 3 e lors de l'institutionnalisation de la construction de l'image d'un segment par une rotation. On assiste alors à la mise en place du théorème-en-acte de cocyclité, identifié d'après notre questionnaire.

> « E : Je prends la distance AO et je reporte de l'autre côté.
> P : Et après ?
> E : Ben on fait un genre de demi-cercle.
> P : un arc de cercle.
> E : Un arc de cercle de 50°.
> P : Un arc de cercle. Et je mesure un angle de 50° (…) je trace et j'obtiens le point A'. Faites ça avec organisation, c'est-à-dire moi je vous conseille de transformer le point A puis de transformer le point B puis de tracer le segment; ne faites pas tout en même temps, et tournez dans le sens positif.
> E **: On fait aussi le point B avec 50° ?**
> P : Pardon ? Ben oui, c'est la même rotation. Dis donc demain matin, si vous venez en cours, prenez votre compas et votre rapporteur, ça peut servir… »

On constate alors que le professeur met en place de manière séquentielle la construction de l'image d'un segment par une rotation (étape par étape et avec la représentation externe des arcs de cercle) dans laquelle finalement le lien entre les étapes à travers la conservation de la mesure d'angle, caractéristique mathématique de la rotation, n'est pas institutionnalisé, car tout se passe comme si cela allait de soi « ben oui, c'est la même rotation ».

Conclusions sur les liens avec l'enseignement reçu par ces élèves

Les deux extraits de séances cités précédemment illustrent bien les effets possibles de l'enseignement reçu par ces élèves sur la construction de leur ETG et donc sur le processus de conceptualisation en jeu. On relève en particulier des changements implicites de la dimension des objets mathématiques en jeu, qui peuvent provoquer un certain nombre d'incidents et par la suite des adaptations erronées (et relevées par la suite dans notre questionnaire). Nous caractérisons ces effets comme une conséquence de l'existence d'une distance (sous-estimée) entre l'ETG « standard » mis en place par le professeur (impliquant des basculements implicites de paradigmes GI-GII, et aussi, ce qu'appelle Duval le « hiatus dimensionnel ») et l'ETG personnel que l'élève s'approprie finalement.

IV Conclusions générales, limites et perspectives

Notre recherche porte sur les effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège. Nous avons adopté le terme de conceptualisation au sens de Vergnaud, c'est-à-dire que nous avons cherché à étudier le processus d'appréhension d'un concept chez un élève à travers son activité (scolaire). Nous avons alors déterminé un type de situation (la situation de reconnaissance des transformations du plan) que nous avons proposé à des élèves de 5^{e} et de 3^{e} afin d'étudier et de comparer les différentes adaptations de leurs invariants opératoires qui organisent leur Espace de Travail Géométrique. Un tel dispositif méthodologique et théorique avait pour but de répondre aux questions de recherche Q1 et Q2 citées précédemment qui avaient pour but de nourrir la question plus générale concernant le rôle de la symétrie axiale en tant que levier ou en tant qu'obstacle dans l'apprentissage des autres transformations du plan. Les résultats obtenus après notre travail de recherche comportent évidemment des nuances et ne nous permettent pas de trancher entre ces deux pôles : obstacle ou levier. Nos analyses se sont concentrées sur le rôle joué par la symétrie axiale dans le traitement de la figure au cœur de la construction de l'ETG personnel de l'élève (Q4) qui alimente alors les questions de recherche Q1 et Q2.

Dans le cas des élèves de 3^{e}, nous avons mis en évidence une opposition entre les invariants opératoires de la rotation et ceux de la symétrie axiale. Selon la tâche, la reconnaissance de la symétrie axiale organise une déconstruction dimensionnelle de la figure et met en place un réseau de propriétés dans le cadre de la géométrie affine euclidienne : l'orthogonalité, le milieu, l'équidistance, la conservation des mesures, ou encore la symétrie vue comme une application du plan point par point, tandis que la rotation s'en tient à une déconstruction instrumentale (théorème-en-acte de cocyclicité) de la figure inhibant les propriétés de conservation métriques telle que la conservation de la mesure d'angle. Dans certains cas observés, la symétrie axiale assure donc l'organisation des éléments de dimension inférieure (1D et 0D) de la figure en vue d'un raisonnement déductif pour reconnaître justement une symétrie axiale.

Notre étude de cas des ETG personnels des élèves de 5^{e} a mis en évidence un rôle très différent attribué à la symétrie axiale. Les schèmes de reconnaissance de la symétrie axiale et ceux de la symétrie centrale sollicitent certains concepts et théorèmes-en-acte communs tels que le schème de bidécomposabilité, l'équidistance, le milieu et la conservation des mesures assurée par le principe de superposition. La proximité de ces schèmes provoque, chez certains élèves, un « amalgame » entre la symétrie axiale et la symétrie centrale. Dans certains cas observés, la symétrie axiale apparaît donc comme un obstacle cognitif, voire didactique d'après nos observations de classe (non relatées ici). On constate ainsi un changement de statut accordé à la symétrie axiale au cours du collège. Pourquoi et comment s'opère un tel basculement ?

Nous avons observé les premières séances d'enseignement de la symétrie centrale en 5 e et de la rotation en 3e du même professeur, Mme B. (qui était le professeur de ces élèves interrogés) afin d'étudier le rôle joué par l'enseignement. Notre objectif était de répondre aux questions de recherche Q3 (énoncées précédemment). Les basculements de paradigmes, le « hiatus dimensionnel » à propos des changements de dimension des objets mathématiques en jeu ou encore la dénaturation par l'élève de certaines pratiques institutionnalisées en classe, peuvent expliquer l'existence d'une distance entre l'ETG idoine (standard) construit en classe et l'ETG personnel que l'élève s'approprie finalement. Ces glissements sont difficilement prévisibles car ils se forment lors d'incidents qui peuvent sembler négligeables (comme l'incident lié à la conservation de la mesure d'angle en 3 e) ou semblent camouflées tant que l'élève ne se retrouve pas dans une situation qui les mette explicitement en défaut.

L'intérêt de ce travail porte également sur l'étude de la conduite d'une population dans des activités qui ne visent pas un raisonnement géométrique déductif, mais qui vise une réalité pratique. La symétrie axiale apparaît comme un concept organisateur de la conduite dans ces deux institutions pourtant bien distinctes. Dans le cas de l'institution scolaire, la symétrie axiale peut révéler une maîtrise de la dialectique GI-GII, mais il resterait à démontrer si de tels basculements de paradigmes sont favorables au développement de la pensée géométrique. Dans le contexte de l'institution professionnelle, la symétrie axiale se révèle être un concept « naturalisé » (dans le sens où la routinisation de certaines pratiques a poli l'origine de ces pratiques), et joue un rôle organisateur dans l'organisation de l'Espace de Travail Géométrique de l'artisan. Il resterait également à déterminer, dans le cadre de la didactique professionnelle, si ce concept pourrait être apparenté à un « concept pragmatique » au sens de Pastré (2002).

Nous indiquons dans ce paragraphe un certain nombre de limites (non exhaustif) à ce travail : celles de nature méthodologique mais aussi celles liées au contexte humain et culturel dans lequel s'est réalisé ce travail de recherche. Nous évoquerons également la portée limitée de nos résultats par rapport à l'ambition initiale de ce travail.

L'un des choix théoriques porte sur la théorie des champs conceptuels. Nous avons nuancé dès le début notre utilisation de ce cadre théorique en nous limitant à un seul type de situations. Or, une étude du champ conceptuel plus aboutie impliquerait l'analyse d'autres classes de situations (dont celle de construction par exemple ou encore à partir de situations intermédiaires inspirées de celles présentées ici qui permettraient de tenir compte d'autres variables didactiques) et permettrait de mettre en évidence d'autres types d'invariants et de compléter notre étude sur la construction de l'ETG personnel d'un élève. Nous pouvons également envisager de poursuivre ce travail à partir de ces données déjà récoltées mais non exploitées. Un autre pan méthodologique que nous n'avons pas exploité est celui de mener des entretiens individuels avec certains élèves. En effet, un entretien individuel aurait également guidé voire précisé certaines de nos interprétations concernant des signifiants graphiques isolés. Notre thèse est finalement une étude partielle des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries, car, d'une part, nous n'avons pas considéré le cas de la translation, et d'autre part parce que le processus de conceptualisation des isométries n'est tout simplement pas achevé en classe de 3e. Au contraire, l'enseignement des transformations du plan continue au lycée, notamment à travers la géométrie analytique où l'élève sera amené à reconsidérer à nouveau le groupe des isométries. Les schèmes disponibles de l'élève s'adapteront donc à de nouvelles situations. Notre étude rend tout de même compte de certains effets didactiques liés directement au concept de symétrie axiale dans la nature même du travail géométrique de l'élève.

Enfin, la récolte de nos données s'est déroulée entre septembre 2005 et juin 2007 sous la contrainte d'un certain programme scolaire qui a changé depuis. En effet, la rotation a été supprimée des programmes à la rentrée 2008. Un tel changement va donc impliquer une nouvelle conceptualisation des transformations du plan auprès des élèves de collège et relance alors le débat sur le rôle accordé à la symétrie axiale, qui va peut-être être encore plus dogmatique. Quel effet aura ce retardement de l'enseignement des rotations ? Va-t-il conforter le rôle organisateur du concept de symétrie dans le développement du réseau des propriétés qui caractérisent les isométries ? Toutes ces questions nous offrent également de nouvelles perspectives de recherche et de nouvelles investigations possibles.

Bibliographie

Artigue M. (1990), Épistémologie et Didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2/3), 241-286.

Bachelard G. (1934), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris : Vrin (édition 2004).

Bartolini-Bussi M. & Boero P. (1998), *Teaching and Learning Geometry in Contexts, ICMI study perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*, Kluwer, 52-62.

Bessot A. & Laborde C. (2005), *Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture – tracé du bâtiment*, Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier Grenoble (document interne).

Bkouche R. (1992), De la géométrie et des transformations, *Repères IREM*, 4, 135-158.

Boero P. (ed.) (1999), Teaching and learning mathematics in context, *Educational Studies in Mathematics*, 39 (1-3).

Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : la Pensée Sauvage.

Bulf C. (2008), *Etude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Irem Paris 7.

Cassan (Gobert) S. (1997), Centre de symétrie d'une figure, comparaisons de productions d'élèves de CM2 et de cinquième, *Petit x*, 46, 55-84.

Chanson L. (1988), *Traité d'ébénisterie*, Dourdan : H. VIAL (15ème édition).

Denys B. & Grenier D. (1986), Symétrie orthogonale : des élèves français et japonais face à une même tâche de construction, *Petit x,* 12, 33-56.

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères – IREM,* 17, 121-138.

Duval R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 5-53

Euclide (1994), *Les éléments d'Euclide*, traduction et commentaires de B. Vitrac Paris : PUF.

Freudenthal H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht/Boston/Lancaster: Mathematics Education Library, Reidel Publishing Company.

Giaquinto M. (2005), *From symmetry perception to basic geometry*, in: Mancosu P., Jorgensen K. F. & Pederson S.A., *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, Springer, 31-55.

Grenier D. & Laborde C. (1988), *Transformations géométriques – Le cas de la symétrie orthogonale*, in : Vergnaud G., Brousseau G., & Hulin M. (éd.) *Didactique et acquisition des grenierconnaissances scientifiques, Actes du colloque de Sèvres Mai 1987*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 65-86.

Grenier D. (1990), Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(1), 5-60.

Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Jahn A.P. (1998), *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-Géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde*, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Kuzniak A. Parzysz B. et Vivier L. (2008), Du monde réel au monde mathématique, un parcours bibliographique et didactique, *Cahier de DIDIREM*, IREM de l'Université Paris Diderot (Paris 7), 58, 5-22.

Lima I. (2006), De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs – Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Noss R., Hoyles C. & Pozzi S. (2000), *Working knowledge: Mathematics in use*, in: Bessot A. & Ridgway J. *Education for Mathematics in the workplace*, Mathematics Education Library Kluwer Academic Publishers, 24, 17-35.

Palmer S.E. (1985), The role of symmetry in shape perception, *Acta Psychologica*, 59, 67-90.

Pastré P. (2002), L'analyse du travail en didactique professionnelle, *Revue française de Pédagogie*, 138, janvier-février-mars, 9-17.

Presmeg N. & Van Den Heuvel-Panhuizen M. (2003), Realistic Mathematics Education Research: a PME special issue, *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.

Ricaud P. (1999), *Tracés d'Atelier et géométrie Tome 1 et Tome 2*, Dourdan : H. VIAL.

Rock I. & Leaman R. (1963), An experimental analysis of visual symmetry, *Acta Psychologica*, 21, 171-183.

Roditi E. (2003), Régularité et Variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 183-216.

Straesser R. (2000), *Mathematical means and Models from vocational contexts – a german perspective*, in: Bessot A. & Ridgway J. *Education for Mathematics in the workplace*, Mathematics Education Library Kluwer Academic Publishers, 24, 65-80.

Tavignot P. (1993), Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 13(3), 257-294.

Vergnaud G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2/3), 133-170.

Vergnaud G. (1996), *Au fond de l'action, la conceptualisation*, in : Barbier G.-M (dir.) *Savoirs théoriques et savoirs d'action*, Paris : PUF, 275-292.

Vergnaud G. (2001), Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, *Actes du colloque GDM* (Groupe des Didacticiens des Mathématiques) [5].

Vergnaud G. (2007) *in* : Merry M. (dir.) *Activité Humaine et Conceptualisation, questions à Gérard Vergnaud,* Toulouse : Presses Universitaires du Mirail. 27-37 & 341-357.

Williams J. & Wake G. (2007), Black boxes in workplace mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 64, 317-343.

5 http://smf.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/EnseignementPrimaire/ConfMontrealmai2001.pdf

Séminaire de mars 2009
27 et 28 mars 2009

Conditions *a priori* sur les ostensifs du milieu pour faire signe d'un objet de savoir.

Sophie Gobert

Université de Nantes, Laboratoire du CREN

Résumé

Ce texte expose de manière plus claire et cohérente, bien qu'encore très sommaire, les éléments ébauchés lors de la présentation orale au séminaire en mars 2009. Le propos est une contribution à l'étude du concept de milieu dans le cadre de la TSD. La question que nous tentons de cerner actuellement est la suivante : quelles sont les *conditions* sur le *milieu* à prendre en compte dans l'*analyse a priori* d'un ensemble de situations didactiques pour permettre au professeur de piloter le dynamisme des interactions élèves-milieu, afin de rendre possible la rencontre entre les élèves et le géométrique, à l'école primaire ? Une formulation succincte pourrait résumer nos préoccupations à long terme : comment peut-on modéliser le milieu comme système dynamique ouvert, à la fois pour l'évolution de la théorie des situations didactiques, et pour l'évolution des organisations didactiques des professeurs à l'intention de leurs élèves ?

Ce texte est un début, pour poser quelques repères qui ne pourront encore être articulés comme il se devrait.

Dans une premier temps, nous préciserons la problématique générale au regard des éléments suivants : milieu en théorie des situations didactiques, distinction activité et tâche, activité géométrique, activité du professeur.

Dans une seconde partie, nous réinterrogerons les distinctions « micro, macro, méso espaces » pour en dégager deux critères d'analyse *a priori* d'une situation spatiale visant des apprentissages géométriques

Dans une troisième, nous proposerons de catégoriser les ostensifs que le professeur choisit d'utiliser pour concevoir une situation, et tenterons de mettre en lien une hypothèse de dialectique des répertoires avec le processus de sémioses.

Mots clefs :

Géométrie, espace, milieu, activité géométrique, micro espace, meso espace, macro espace, ostensifs, signes, école primaire

I Problématique et cadres généraux

1. *Le milieu, en théorie des situations didactiques (TSD)*

Nous entendons par le terme « milieu », ce que François Conne (Conne 2001) en dit dans la citation suivante, dans laquelle il considère la notion de milieu de la TSD (Brousseau 1998) sous l'angle d'un questionnement d'épistémologie didactique du rapport entre « réalités et situations ».

> « Dans la tsd, c'est encore autre chose [suite à une analyse concernant la théorie des champs conceptuels [1]]. La situation est un objet qui contient les interactions du sujet avec la réalité ; ou, plus précisément, la réalité sur laquelle il y aura interaction prend place dans la situation, **les interactions elles-mêmes sont situées**. Cette place est désignée par le terme de milieu. La tsd fait un pas de plus que les autres approches, elle n'en reste pas à l'idée de situation mais en propose une objectivation, et cela fait que la situation devient un modèle. Alors le milieu est, dans le modèle, la place assignée à la réalité, c'est lui qui la représente. La réalité n'est plus seulement découpée en segments, mais encore son représentant, le milieu, est structuré en niveaux que caractérisent les types d'interactions qu'il faut distinguer selon les statuts des sujets et des objets qui interagissent dans la situation. De plus, les situations sont différemment structurées selon que l'on a une situation d'action, de formulation ou de validation. » Conne (2001) [Marquage en gras par l'auteur]

Il indique ensuite qu'une des caractéristiques d'une approche théorique est de savoir quelle place elle assigne à la réalité.

> « Ce qui distingue donc les approches, et en particulier celle de la tcc [théorie des champs conceptuels Vergnaud 1991] de celle de la tsd, c'est de savoir quelle place assigner à la réalité. Pour la première la réalité est la situation, ou plutôt la situation est un découpage dans la réalité. On y affirme qu'il ne faut parler d'*interaction sujet-situation*, la situation est en dehors du sujet. Pour la seconde la réalité n'est qu'un des sous systèmes de la situation, et la situation inclut les interactions que ses différents sous-systèmes entretiennent entre eux.
> On rejoint alors la question de la réalité mathématique. Comme nous l'avons vu, la tsd cherche à dépasser l'idée de situation pour en faire un objet qu'elle puisse modéliser mathématiquement. Ce faisant, elle en vient tout naturellement à rechercher des situations fondamentales, petits modèles universels régissant une variété de réalisations didactiques. C'est une toute autre ambition que celle des approches plus classiques qui se contentent de dire : “ Pour enseigner, il faut choisir dans la diversité des situations réelles, la didactique est la discipline qui permet d'optimiser ce choix ”. » Conne (2001)

Dans ce qui a été exposé au séminaire, nous avions l'intention de préciser comment le réel du milieu peut *a priori* se structurer en plusieurs catégories, structure provenant de l'analyse de nécessités tant épistémologique, didactique, que psychologique. Ce sera l'objet de notre troisième partie, où nous partirons d'une caractérisation des ostensifs utilisés dans les situations

1 Concernant la théorie des champs conceptuels (tcc) voici ce qu'il dit : « Pour la tcc par exemple, la réalité est rencontrée en situation, et la didactique ne doit pas seulement choisir les situations les plus adéquates pour ses projets, mais encore veiller à tenir compte des situations les plus courantes où les sujets rencontreront les savoirs qu'on veut leur enseigner. Ici, situation veut dire segment de réalité, réalité en contextes culturels et sociaux. La tcc insiste pour dire que si Piaget parlait d'interaction sujet-objet, elle proposerait quant à elle de parler d'interaction sujet-situation, la situation est donc un segment de cette réalité externe au sujet. On a découpé la réalité en situations parce qu'on ne peut pas tout faire en même temps. Parce que les situations offrent des profils forts variés de combinaisons conceptuelles. On a éventuellement établi un réseau de situations à faire parcourir lors de l'enseignement. »

didactiques de géométrie à l'école primaire, pour tenter de comprendre comment ils peuvent être mis en mouvement et avoir une fonction sémiotique fondamentale dans l'étude de la mésogénèse.

Auparavant, reprenons les écrits de Perrin-Glorian (1999) concernant les distinctions apportées pour la notion de milieu dans le cadre de la TSD :

> « Dans le développement de la théorie des situations, on peut voir que la notion de milieu est utilisée à deux échelles différentes : une échelle un peu globale où il s'agit de déterminer un milieu pour l'apprentissage d'un savoir, à laquelle se rattache l'idée de situation fondamentale, et une échelle plus locale d'étude d'une situation à laquelle se rattache la structuration du milieu. »

Concernant une situation fondamentale, c'est-à-dire ce « petit modèle universel, régissant une variété de réalisations didactiques » (Conne, op.cit) elle précise :

> « Le milieu de la situation fondamentale est un milieu pour l'apprentissage du savoir qu'elle représente. Ce milieu peut-être décomposé selon les différentes situations adidactiques que peut engendrer la situation fondamentale, ce qui nous donne une structuration que j'appellerai horizontale du milieu adidactique, structuration correspondant à une structuration du savoir mathématique lui-même. On a ici un sens très large de la notion de milieu, c'est en ce sens que Dilma Fregona (1995) [thèse dirigée par Brousseau] a pu parler de figures planes comme milieu dans l'enseignement de la géométrie. »

Nous retiendrons qu'une structuration horizontale est intrinsèquement liée à une organisation mathématique des savoirs, c'est-à-dire, un choix de « chaînes logiques » articulant les savoirs entre eux, objets, relations, et règles de constructions. Ainsi, nous aurons à interroger les choix possibles d'organisations mathématiques des savoirs de la géométrie à l'école primaire et des articulations avec les possibles des organisations didactiques. Par exemple, le titre de la thèse de Fregona « les figures planes comme milieu dans l'enseignement de la géométrie » est une affirmation implicitement liée à des choix de modélisation. Précisons qu'un des enjeux de notre travail est de mettre en évidence un autre choix possible, pour le contexte de l'école primaire, qui justifiera l'assertion le paradigme suivant : *l'espace (lieux, objets, images, langages) comme milieu pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire*.

Par ailleurs, afin de poursuivre la distinction faite par Perrin-Glorian, en référence aux travaux de Brousseau (1990), complété par ceux de Margolinas (1995), ajoutons ceci :

> « A une autre échelle, quand les variables didactiques sont fixées, on a une situation didactique déterminée qu'on peut étudier de manière plus approfondie pour étudier les jeux de l'élève avec la connaissance visée. On a ici la structuration que j'appellerai verticale du milieu où la situation adidactique apparaît au niveau caractéristique de l'apprentissage, celui d'une réflexion sur l'action qui a lieu dans la situation de référence. Les milieux de niveau inférieur ou égal à celui de la situation d'apprentissage (milieu matériel, milieu objectif, milieu de référence) ne sont pas porteurs d'intentions didactiques mais les niveaux d'indice supérieur [milieu d'apprentissage, milieu didactique, milieu métadidactique] le sont. » Perrin Glorian (1999)

Nous allons essayer de percevoir en quoi dès les premiers choix faits par le professeur d'organisation d'un milieu matériel, et des tâches assignées sur ce milieu, les milieux objectif et de référence sont bien porteurs d'intention didactique, sans que cela ne contredise la modélisation proposée.

2. Activité géométrique des élèves.

Nous avons à préciser ce que nous mettons sous l'expression « activité géométrique des élèves à l'école primaire ».

En premier point, le mot activité n'est pas à entendre au sens qu'on lui donne souvent quand on regarde ce qui se fait en classe. L'activité n'est pas ce que propose l'enseignant à l'élève. Ici, nous adoptons le regard explicité par Janine Rogalski (Rogalski 2008), dans son travail avec Aline Robert (Robert 2008), en théorie de l'activité, qui distingue « tâche » et « activité » :

> **« La tâche est ce qui est à faire ; le « but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions » (Léontiev, 1984). L'activité est ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche :** non seulement ses actes extériorisés, mais aussi les inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend, dans ce qu'il fait et qu'il se retient de faire ; l'activité comprend aussi la manière dont le sujet gère son temps, et également son état personnel – en terme de charge de travail, de fatigue, de stress, et aussi de plaisir pris au travail-, ainsi que ses interactions avec autrui dans la situation de travail. »
> « La tâche a toujours un objet (dans un sens très large) qu'il s'agit de transformer ou d'étudier, et elle peut se décrire au minimum en termes de résultats à atteindre : l'état de l'objet quand la tâche aura été (correctement) réalisée. […] Une telle définition ne préjuge ni du niveau auquel la tâche est décrite, ni de l'espace de liberté du sujet. » Rogalski (2008)

Ainsi l'activité géométrique d'un élève pourra se définir comme *ce que développe un élève lors de la réalisation d'une tâche comportant une dimension scientifique rattachée au cadre de la géométrie*. D'aucuns diront que le problème de la définition n'est que translaté vers ce qu'on entend par « dimension scientifique ». Or ici les références sont nombreuses sur lesquelles nous pouvons nous appuyer : observation de phénomènes, questionnement de régularités selon le domaine de fonctionnement, recherche de critères de validité, formulations de conjectures, construction d'un questionnement, recherche d'arguments, développement de pratiques argumentatives, schématisation modélisation de situations spatiales par des objets et des relations de l'univers géométrique, …

> « Si la réalité nous apparaît multiple, non seulement plurielle, mais diverse et variée, il semble que **de leur côté** les mathématiques y apportent un peu d'ordre, elles qui excellent à découvrir comment on retrouve dans cette multiplicité les mêmes choses autrement. […] Je rajouterais même que lorsqu'on a trouvé, en tel ou tel domaine, un modèle universel (ou canonique), lorsqu'on a débusqué les isomorphismes, on peut retrouver la multiplicité du réel sous la forme d'une modulation de modélisations / réalisations / simulations variées. Il y a donc un double mouvement de schématisation et de modélisation, d'unification et de diversification qui me paraît essentiel. » (Conne op. cit.)

Une des questions qui lie tâche et activité géométrique, celle que nous étudions, peut alors être reformulée ainsi : *sous quelles conditions, a priori, les activités des élèves développées au cours de la réalisation de tâches, comportent-elles des dimensions scientifiques caractéristiques d'une pratique de la géométrie ?*

Notre question se justifie entre autres par le fait que les prescriptions faites aux enseignants à travers les programmes formulent les apprentissages visés pour les élèves en terme de capacité à effectuer telle tâche : reconnaître, dessiner, construire, reproduire, décrire, utiliser du vocabulaire, utiliser des techniques de tracé … Dans quelle(s) mesure(s) ces tâches vont-elles permettre aux élèves de rencontrer le géométrique, c'est à dire de développer une activité géométrique ?

Pour l'ensemble de ces tâches proposées à l'école primaire, les objets des milieux matériels suggérés par les programmes, manuels, ouvrages de formation, travaux de recherche, qu'ils soient effectifs ou évoqués réfèrent toujours à la réalité spatiale, et sans doute qu'il ne peut en être autrement. Alors comment est-il possible de dialectiser en situation didactique les rapports d'un élève à l'espace de façon à lui permettre de développer une activité géométrique ? A ce stade de l'exposé, nous devons préciser que nous ne partageons par les paradigmes sous-jacents au discours promu par les programmes de l'école primaire et du collège, sous-tendus par des auteurs d'ouvrages pour la formation ou par des chercheurs, consistant à dissocier et hiérarchiser pour des niveaux de classes différents entre géométrie pratique, instrumentée, et déductive (ou théorique). Cette distinction utile pour comprendre et étudier le rapport qui peut se nouer entre les objets du travail didactique, les tâches et les contraintes de la tâche, n'induit en rien un découpage chronogénétique de l'enseignement.

Si Ferdinand Gonseth[2] (Gonseth 1945-1955) a dissocié les aspects « intuitif », « expérimental » et « théorique », dans la construction de la géométrie, c'est justement pour bien montrer comment différents horizons de réalités peuvent se constituer dans lesquels chacun de ces rapports à une démarche scientifique jouent de manière dialectique. Cernant leur autonomie, et montrant leur inéluctable lien, Gonseth en s'interrogeant sur une épistémologie didactique de la géométrie, reconstruit les synthèses dialectiques associées à trois grandes étapes dans le processus de développement de la pensée scientifique : il questionne le géométrique dans son rapport à l'espace sensible, à « la connaissance naturelle » ; la première synthèse dialectique correspondra alors aux fondements de la géométrie euclidienne. Il questionne le géométrique dans son rapport à la géométrie euclidienne ; une seconde synthèse dialectique correspondra alors aux fondements, au-delà d'une géométrie euclidienne, des géométries non euclidiennes. Nous donnons à lire en annexe 1 quelques extraits des différents tomes de son ouvrage « la géométrie et le problème de l'espace »

3. Activité du professeur

Si nous visons l'étude des activités géométriques des élèves, pour cerner leurs apprentissages, nous avons choisi de le faire en nous intéressant au professeur et aux choix qu'il fait d'organisation didactique du (ou des) milieu(x) de la (ou des) situation(s). De ce point de vue nous nous situons dans la démarche et la méthodologie de recherche de Robert (2008) :

> « **Nous avons choisi d'aborder les apprentissages des élèves par l'intermédiaire des activités mathématiques qui leurs sont proposées en classe**. [...] L'enseignement va alors être caractérisé en relation avec ces activités : nous devons analyser tout ce qui peut contribuer à définir les activités proposées aux élèves, les contenus mathématiques en jeu, les déroulements organisés – dont les dévolutions, les médiations, les expositions de connaissances, et, de ce fait, les discours de l'enseignant qui modulent ces activités – tant du point de vue sémantique que du point de vue de leurs modalités. […] **nous mettons au premier plan la variété des mises en fonctionnement des connaissances** et nous nous sommes donnée les moyens de la repérer à partir des énoncés des exercices, alors que d'autres chercheurs sont davantage polarisés sur l'exhaustivité des types de tâches des exercices portant sur un sujet donné, ou sur l'introduction des notions. » [En gras nous soulignons]

Précisons que c'est bien un travail sur l'analyse *a priori* que nous menons, et qu'il est nécessaire de s'appuyer sur les déroulements effectifs pour effectuer ce travail. Précisons que nous nous intéressons aux situations ordinaires de classe, qui ne peuvent pas toujours (voir rarement) être modélisées par des situations d'adaptations à un milieu (TSD, Brousseau).

2 Philosophe mathématicien, sur lequel certains chercheurs ont appuyés des discours pouvant donné un argumentaire à cette conception, mais que nous lisons avec d'autres chercheurs, bien différemment.

Ainsi les cadres théoriques, en didactique des mathématiques, dans lesquels notre travail se situe sont à l'articulation de la théorie des situations didactiques (Perrin-Glorian), pour l'étude du milieu essentiellement (le milieu horizontal d'une situation fondamentale, et la structure vertical du milieu pour les situations didactiques), et le cadre de la double approche (Robert), pour le point de vue adopté sur le professeur et les pratiques enseignantes.

Notre question plus restreinte, à l'activité du professeur, concerne alors les éléments sur lesquels il peut jouer dans la préparation de sa situation permettant *a priori* et selon certaines conditions de faire jouer un jeu géométrique aux élèves. Pour le moment, et pour ce texte, nous sommes partie de l'analyse faite par Marie-Hélène Salin et René Berthelot (notés B&S par la suite, cf. bibliographie) des distinctions entre micro, méso et macro espaces, permettant de dégager deux éléments pour le professeur. Ces considérations font l'objet de la partie suivante. Par ailleurs d'autres considérations sur les ostensifs seront proposées en dernière partie, et aboutissant également au repérage de quelques variables mésogénétiques.

II Retour sur la distinction didactique des micro, méso, macro espaces.

1. Rappels

En 1983, G. Brousseau introduit et circonscrit les termes de micro, méso, et macro espaces, dans le cadre du suivi du travail de thèse de G. Galvez (Galvez 1985), afin de décrire des « classes de situations relatives à des activités spatiales de déplacements ». G. Galvez s'est intéressée aux problèmes posés par les déplacements et le repérage dans l'espace urbain de Mexico pour les enfants de l'école. Voici comment ils définissent ces termes :

> « Le **micro espace** est le secteur de l'espace proche du sujet, et qui contient des objets accessibles à la vision comme à la manipulation. […] La perception de l'objet peut se caractériser comme exhaustive. […] On peut considérer que le micro espace est l'espace de l'objet en face duquel se situe le sujet, mais du dehors. »
>
> « On peut dire que le **méso espace** est l'espace des déplacements du sujet […]. Espace des interactions liées à la détermination et à la modification des positions à l'intérieur d'un domaine domestique, comme aux mouvements du sujet à l'intérieur des limites de ce domaine […]. »
>
> « Le **macro espace** correspond à un secteur de l'espace dont la dimension est telle qu'on peut l'embrasser seulement par l'intermédiaire d'une succession de visions locales, séparées entre elles par les déplacements du sujet sur la surface terrestre. »

En 1992 B&S[3] réinterrogent l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire (B&S 1992) à partir de l'articulation que celui-ci entretient avec l'espace sensible. Ils le font aussi bien à partir des problèmes posés que des modes de résolution utilisés, et repèrent alors finement ce qui distingue (lie et relie) les connaissances spatiales et les connaissances géométriques. En s'intéressant à des classes de problèmes autres que les activités spatiales de déplacement, ils sont amenés à dissocier deux aspects amalgamés dans les définitions initiales des termes « micro » « méso » « macro » : *la taille de l'espace* et *la nature des contrôles qu'un sujet peut avoir sur ce avec quoi il est en interaction dans cet espace* par rapport à un problème donné (l'espace, les objets de cet espace, et/ou ses propres actions sur cet espace). Ainsi la distinction « micro-méso-macro espaces » est réinterrogée en menant une explicitation de ce qui les caractérise en terme de rapport à un milieu et de nécessité didactique des connaissances développées par les élèves à propos des notions telles que les longueurs, les angles, les droites, les distances, les formes, les transformations.

3 Rappel : Marie-Hélène Salin et René Berthelot

Ces deux aspects ne sont pas repris dans l'intervention de Brousseau sur « les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire » (Brousseau 2000). Il présente les micro, méso et macro espaces en termes de « variante du milieu », en s'appuyant sur les travaux de B&S pour rappeler que « la conception des objets de la géométrie est différente dans chacun de ces milieux ». Voici comment il précise les termes :

> « Le jeu des variantes et des variables de la situation fondamentale de l'espace permet de déterminer au moins trois conceptions de l'espace et par conséquent trois « milieux » spatiaux correspondants : le micro espace, le meso-espace et au moins trois macro-espace. »
>
> Le macro espace
> « **Les situations où un sujet doit prendre des décisions relatives à un territoire** beaucoup trop grand pour qu'il puisse l'embrasser d'un regard, lui **posent** – comme à notre chauffeur de taxi - **des problèmes**, entre autres de recollement de cartes et d'incrustation. Pour identifier et retrouver un lieu, établir un trajet, déterminer la forme d'un territoire etc. il est **nécessaire de développer des concepts** et des moyens spécifiques. Les solutions sont d'ailleurs différentes suivant qu'il s'agit de la terre entière ou d'une zone urbaine, rurale, sylvestre, souterraine, maritime, ou aérienne. »
>
> Le micro espace
> « A l'opposé, **l'enfant construit ses premières connaissances spatiales** dans la manipulation de petits objets. Par le toucher avec ses mains ou sa bouche autant que par la vue, par les mouvements qu'il leur fait subir, il identifie leur consistance, leur forme solide, leurs positions relatives, et leurs propriétés. Le micro-espace est le milieu de l'élaboration de la conception du mouvement des objet autres que l'observateur. **Il s'agit de conception pas de taille objective des objets**. Un pilote d'hélicoptère peut interpréter le sol à ses pieds à l'aide de sa conception micro-spatiale. »
>
> Le méso-espace
> « Les situations où l'enfant doit concevoir ses propres déplacements dans un territoire placé sous le contrôle de sa vue, sont l'occasion de **développer des représentations** différentes de celles du micro-espace et qui préfigurent celles **qui seront nécessaires** dans le macro-espace. »

Il nous semble cependant qu'il est important de revenir aux expérimentations réalisées par B&S dans leur thèse pour étudier l'influence de cette variable « type d'espace » sur les procédures et stratégies des élèves, et repérer dans quelle mesure elle nous fournit un outil au travail didactique.

2. *Les situations d'expérimentations de B&S*

Deux types de tâche ont été proposés à des élèves de CM primaire : a) placer les sommets d'un rectangle dont deux sommets sont déjà fixés et dont les dimensions sont données et b) placer des objets dans des boîtes, un objet par boîte, toutes les boîtes devant être remplies.

Pour la situation a) le milieu objectif de la situation a pris plusieurs valeurs : la cour de récréation dans laquelle des rectangles sont dessinés au sol : dans un cas ces rectangles sont de dimensions1m par 2m et dans un autre cas ils sont de dimensions 7m par 9m.

Une seconde expérimentation a été réalisée en classe avec des rectangles constitués par les extrémités au sol des quatre pieds de bancs, dont les dimensions étaient dans un cas de 2m par 4m, et dans un autre cas de 5cm par 40cm.

Dans l'analyse que B&S ont pu faire des stratégies des élèves, pour chacune de ces expérimentations, ils n'ont pas constaté de différence notable dans les stratégies utilisées par les élèves.

Pour la situation b) les milieux objectifs des situations ont également subi des variations :

- Dans un premier dispositif, il s'agissait pour les élèves de placer des haricots dans des boîtes, de petit format, disposées en quadrillage (3 par 5), non déplaçables.
- Dans un second, les boîtes pour placer les haricots sont déplaçables.
- Dans un troisième dispositif, il s'agissait de placer des lettres dans des casiers disposés en quadrillage (3 par 5) non déplaçables, mais de format bien plus grand que les boîtes aux haricots.

Tout comme pour les expérimentations précédentes, B&S ne notent pas de différences majeures dans les stratégies utilisées par les élèves dans chacun de ces cas.

Voici alors ce qu'ils concluent à cet ensemble d'expérimentations :

> « **Les caractéristiques globales des rapports avec le milieu** ne seraient-elles pas plus déterminantes que la taille en ce qui concerne les modes de traitement de l'espace par le sujet, et par conséquent les représentations ?
> **Nous avons alors mis en doute la pertinence de la caractérisation des représentations par un milieu dont la taille serait le facteur déterminant**, et par conséquent la pertinence des concepts de micro-espace, méso-espace, et macro espace, si on les différencie par ce seul facteur. Par contre nous avons donné **plus d'importance aux contraintes portant sur les interactions possibles entre le sujet et le milieu**, contraintes bien décrites par Galvez » (B&S 1992 p110, c'est nous qui soulignons)

Rappelons ces contraintes décrites par Galvez :

> « Tous les déplacements du sujet et de l'objet sont possibles : il y a une perception exhaustive de l'objet. […] Le sujet est à l'extérieur de l'espace. »
> « Les déplacements du sujet sont limités par la disposition des objets. […] Le sujet est à l'intérieur de l'espace, il a besoin de décentrations. »
> « Le sujet est à l'intérieur de l'espace, il a besoin de se décentrer pour intégrer et coordonner des perceptions fragmentaires. » (Galvez 1985)

Nous nommerons par la suite chacune de ces contraintes respectivement par les termes *microspatiale, mésospatiale, macrospatiale.*

Reprenons alors les expérimentations de B&S dans un tableau croisant les deux critères « conditions d'interaction du sujet avec le milieu » et « taille de l'espace ».

	Condition microspatiale	Condition mésospatiale	Condition macrospatiale
Taille micro	B&S 1992, Problème des bancs **dans la classe**. Problème des haricots *boîtes déplaçables*.	Problème des haricots *boites non déplaçables*.	
Taille méso	B&S 1992, Problèmes des rectangles **dans la cour**.	Problème des lettres, *casiers non déplaçables*	
Taille macro			

Une question doit maintenant attirer notre attention : dans quelle mesure des éléments d'analyse caractéristiques de « classes de situations relatives à des activités spatiales de déplacements » peuvent être utilisés pour analyser d'autres types de situations ? En effet, les problèmes « rectangles » et « bancs » concernent une situation de construction de formes planes, et les problèmes de rangement d'objets dans des boîtes correspondent à une situation d'énumération. Même si pour certains dispositifs les élèves ont à se déplacer dans l'espace pour agir, les situations ne relèvent pas d'une activité de déplacement, au sens où ce n'est pas le déplacement qui est l'objet de la tâche, c'est-à-dire celui qu'il s'agit de transformer ou d'étudier (cf. citation de Rogalski).

Et pourtant il est clair qu'une distinction de cet ordre là nous fournit un élément précieux pour l'analyse *a priori* des situations. Regardons alors comment nous pouvons développer ce qui est suggéré par B&S pour le formaliser à l'attention de l'analyse de situations relevant d'un domaine plus large.

3. Évolution du domaine d'usage de la distinction.

Rappelons que les situations de déplacements constituent l'une des quatre grandes classes de situations proposées à l'école primaire : situations de déplacements, situations de positionnements, situations d'étude d'objets de l'espace, situations d'étude de formes planes. Ce repérage est évidemment fait selon un grain très grossier d'un premier repérage de la nature de l'objet d'étude en terme d'objet de savoir.

La distinction micro, méso, macro significative pour les classes de situations de déplacements doit donc être repensée pour ces autres classes de situations, en s'appuyant sur la distinction précisée par B&S. C'est en termes de *la taille des objets du milieu objectif*, et de *contraintes d'interaction du sujet avec ces objets* que nous reformulons les critères.

Sur le critère de taille

Quelle que soit la classe de situations considérée, la taille macro est quasi absente de la plupart des situations proposées à l'école primaire, et la taille méso est assez rarement utilisée pour faire jouer le jeu aux élèves. Par contre une autre taille, distincte de la taille micro, et plus petite est fortement présente et importante. C'est la taille « miniature »[4]. Regardons cela sur un exemple.

Considérons la tâche suivante, proposée par une professeure enseignant en maternelle : « Un trésor est caché sous un gobelet opaque situé d'une certaine façon avec d'autres gobelets. Il faut retrouver le trésor en posant des questions qui utilisent du vocabulaire spatial. Les mains ou les pieds ne peuvent pas montrer des positions, il faut utiliser des mots pour cela. »

Autour du même objectif d'usage de certains termes du vocabulaire spatial, de la même tâche, de la même contrainte d'interaction sur le milieu, l'enseignante organise trois milieux objectifs différents pour la situation : dans un coin regroupement de la classe, une chaise et des gobelets type verres pour boire ; autour d'une table, une chaise en miniature et des legos creux sur une zone spatiale délimitée par une surface plastique ; dans l'espace de motricité, le long d'un parcours de motricité, lors d'un moment d'arrêt d'un déplacement le long de ce parcours.

4 Nous avions choisi le mot « dinette » dans un premier temps, mais la lecture d'une chapitre de *La poétique de l'espace,* de Gaston Bachelard (1957), intitulée « la miniature » nous a fait pencher pour ce vocable.

En terme de taille du milieu objectif de la situation le premier et le troisième dispositif utilisent des objets de même taille qui peut se qualifier de « micro ». Comment caractériser celle-ci au regard du second dispositif ? La différence nette entre « objets à notre échelle humaine » ou « objets en miniature » joue de manière importante dans la conceptualisation des rapports à l'espace. Nous avons donc bien à caractériser ces différentes échelles de manière différente.

De façon à pouvoir utiliser ce critère de manière plus générale, c'est-à-dire adaptée à un domaine plus large de situations, serait-il possible de parler d'un *ordre de grandeur pour le rapport de taille entre des actants de la situation et taille des objets de la situation* ? Cet ordre de grandeur se définirait alors, en première approximation, sur trois intervalles : autour de 1, bien inférieur à 1 et plus, ou bien supérieur à 1 et plus. Plus le rapport est petit, inférieur à 1, plus le sujet est pris dans l'espace sur lequel il travaille ou dans lequel il agit ; plus le rapport de taille est grand, supérieur à 1, plus le sujet est extérieur à l'espace qu'il manipule ou grand par rapport aux objets qu'il actionne et de fait le sujet est hors de son espace d'action.

Sur la contrainte d'interaction au milieu objectif de la situation

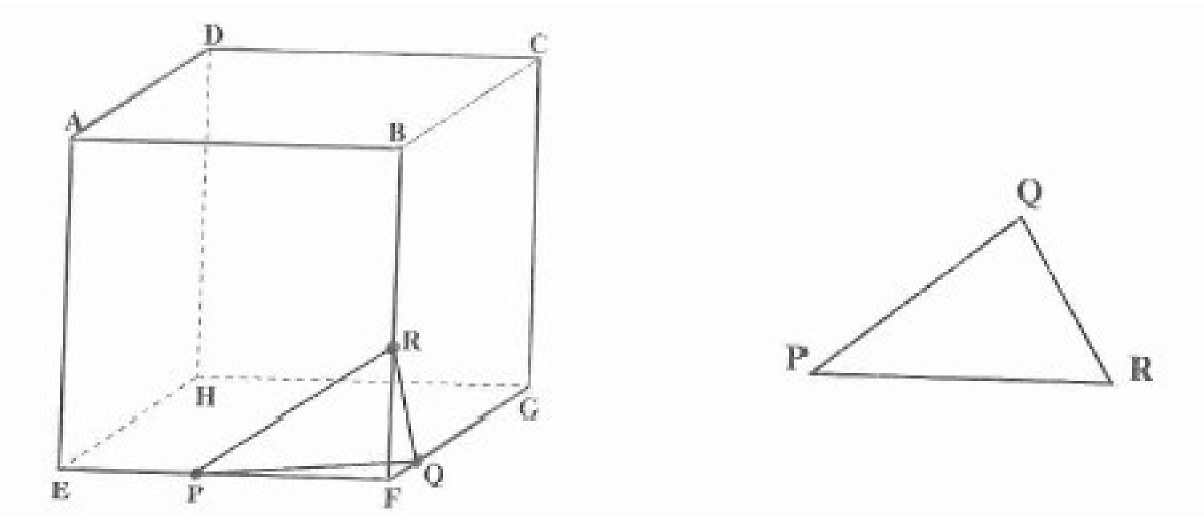
Repartons pour préciser ce critère de ce qu'en disent B&S :

> « Nous nous appuyons sur l'hypothèse que la conceptualisation naît des limitations apportées à la résolution immédiate des problèmes rencontrés par une activité sensori-motrice. Suivant **le type et l'importance des limitations opposées à l'action du sujet**, les conceptualisations correspondantes peuvent être plus ou moins élaborées. Nous allons examiner quels rôles jouent les concepts géométriques de base dans la maîtrise de ces situations, c'est à dire jusqu'à quel degré leur conceptualisation est nécessaire pour résoudre les problèmes liés à chacune des trois familles d'interactions [microspatiale, mésospatiale, macrospatiale] » (B&S 1992, p216) [c'est nous qui soulignons]

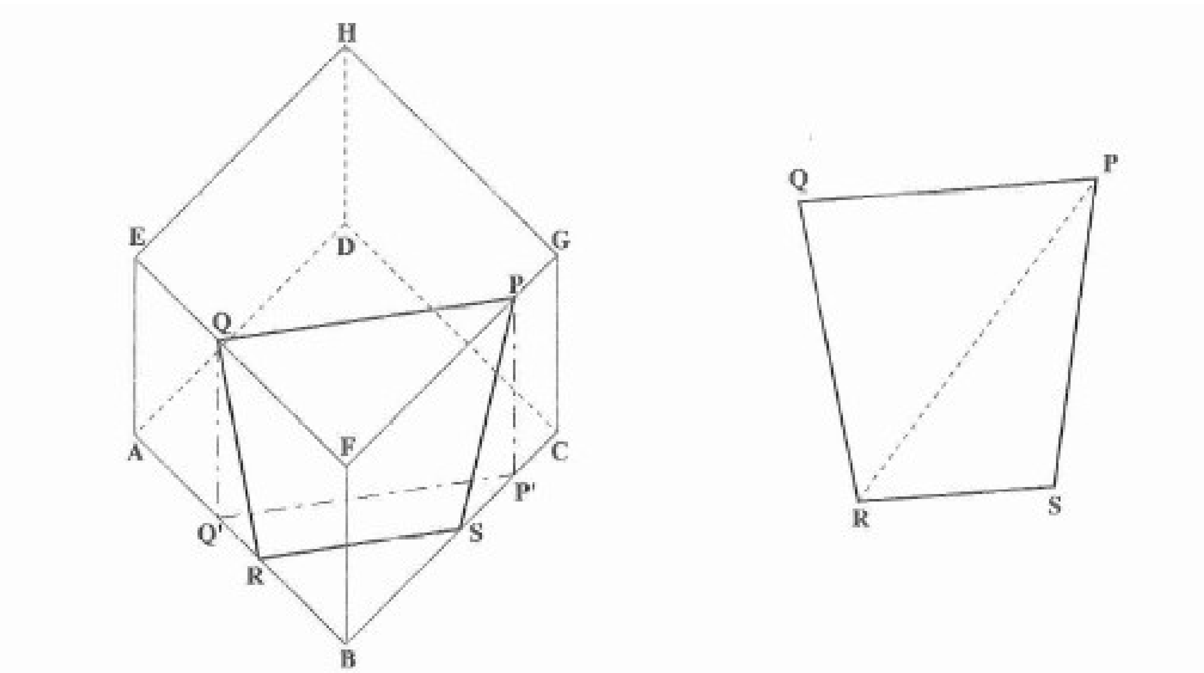
Prenons comme exemple la situation d'étude de sections d'un cube par un plan définit par trois points situés sur trois arêtes distinctes du cube, situation proposée par Marie-Paule Rommevaux dans sa thèse (Rommevaux 1997). L'expérimentation concerne le lycée, cela permet de mieux comprendre ce qui en jeu, nous utiliserons ensuite un exemple de l'école primaire pour réadapter le propos au contexte.

Dans le dispositif d'apprentissage mis en place par M-P. Rommevaux les élèves utilisent un cube transparent sur lequel ils doivent dans un premier temps dessiner les intersections avec les faces du cube d'un plan donné par trois points situés sur les arêtes. A priori du fait de sa transparence le cube offre un contrôle global de l'ensemble de ses faces, donc de lui-même. Par contre le travail de détermination des sections obtenues n'est pas simple selon les cas de positionnement des points sur les arêtes (l'annexe 2 donne les informations nécessaires à la lecture des images ci-dessous).

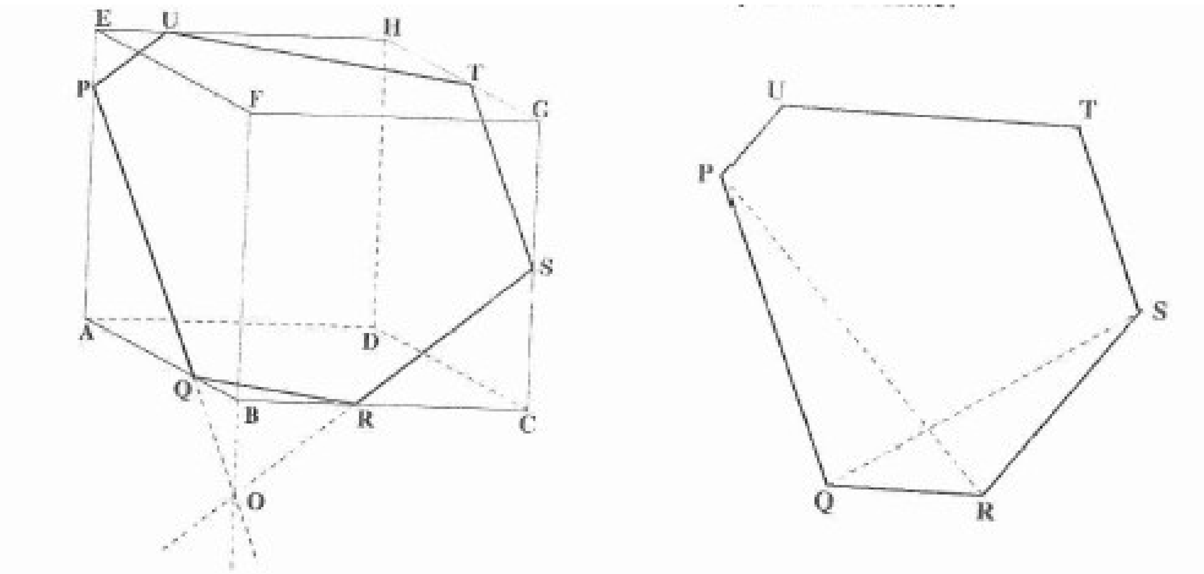
Certaines positions de ces points font coïncider les segments joignant ces points avec les seg - ments définissant la section obtenue, on est alors dans un cas où le type d'interaction corres - pond à une contrainte microspatiale.



D'autres positions ne permettent pas du premier coup d'œil, ni parfois du second, d'avoir une vue des sections obtenues. Le contrôle est alors partiel, il nécessite des choix de point de vue, des changements de point de vue. Le type d'interaction peut alors se caractériser par une contrainte mésospatiale.



Dans d’autres cas encore les élèves n’ont aucun contrôle global des objets de la tâche (intersections du plan de section et des faces du cube), ni même de contrôles partiels. Les changements de point de vue, le recollement des vues ne suffisent plus. La contrainte d’interaction est de type macrospatiale.



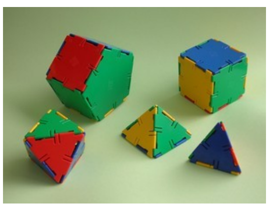
Cet exemple nous permet à la fois de bien repérer qu’à une taille fixée (ici taille micro), les contraintes d’interaction peuvent varier, et à la fois qu’elles varient en fonction de la nécessité ou non de faire appel à des connaissances, des schémas, ou des outils de nature différente, et ne faisant pas partis du milieu objectif de la situation. Ce qui paraît être en jeu de manière plus générale (et que B&S avaient déjà formulé) est *la nécessité plus ou moins forte d’avoir recours à des médiations qui participent de près ou de loin à l’acquisition et la conceptualisation des enjeux d’apprentissages.* Plutôt que de conserver les expressions « contraintes microspatiales, mésospatiales, macrospatiales » trop liées dans leurs formulations au critère de taille, nous ferons alors le choix d’utiliser des expressions plus adaptées à ce qui est en jeu : « les nécessités de médiation » :

Sans nécessité de médiation : le sujet peut agir directement sur les objets du milieu, et cette action lui procure l’information recherchée (l’information portée par l’intention d’agir). Il peut se passer de médiation, ou bien celle-ci est suffisamment intégrée (sous forme d’un schème) pour qu’il n’y fasse pas référence de manière explicite ou visible. La manipulation va suffire.

Avec recherche d’une médiation : le sujet a besoin d’une médiation en plus de son action, ou pour la prolonger ; autre chose qui n’est pas dans le milieu et qui est à construire ou à importer dans le milieu et qui symboliquement aura fonction d’une connaissance.

Avec recherche et coordination de plusieurs médiations : le sujet a besoin de plusieurs médiations, et de les coordonner, de façon à obtenir l’information recherchée.

Prenons un second exemple, beaucoup plus simple et simpliste, d’une tâche courante à l’école primaire : reproduire un objet type « solide » avec un certain matériel pédagogique.



Le jeu sur la variable éloignement du modèle et des pièces à disposition pour la reproduction, permet de générer des différences de nécessités dans le recours à des médiations.

Si modèles et pièces sont proches, l'ajustement perceptif ou tactile permet d'effectuer directement la reproduction. Qu'en est-il si les pièces et le modèle sont éloignés mais visibles dans un même environnement ? Si les pièces et le modèle sont éloignés et non visibles simultanément, les unes dans une pièce et l'autre dans une autre pièce, ou si les pièces et le modèle sont temporellement éloignées, le modèle est caché après observation et non visible quelques jours plus tard pour le choix des pièces, le sujet a besoin de médiations, d'intermédiaires entre sa prise d'information et la reproduction.

Dans ces différents cas, les contraintes d'interaction du sujet avec le milieu sont de natures différentes : sans nécessité de médiation, avec recherche de médiations, avec recherche et coordination de plusieurs médiations (bien que nous n'ayons pas illustré pour cette tâche cette possibilité de troisième cas, mais c'est faute de temps et d'imagination).

Le lecteur aura en tête peut-être une autre variable fondamentale pour ce type de tâches, la nature du solide modèle, la nature des pièces de reproductions, celle du matériel de construction du modèle, … Nous aborderons ce point dans la partie suivante, concernant les ostensifs, cette variable ne relève pas de l'étude du type d'interactions au milieu mais plutôt des significations des enjeux de savoirs travaillés[5].

Ainsi, pour clore cette partie, résumons les points clés :

Pour les classes de situations liées à l'étude des déplacements, des positionnements dans l'espace, et les classes de situations liées à l'étude des objets de l'espace, deux critères sont importants dans les choix qu'un professeur peut opérer pour construire une situation didactique : l'ordre de grandeur du rapport de taille entre les sujets agissants et les objets du milieu matériel, et les types de nécessités de médiations dans les interactions sujet-milieu matériel dans l'effectuation de la tâche (les contraintes d'action pour le milieu objectif).

Dans la partie suivante, le propos portera sur un autre critère : le choix des ostensifs qu'un professeur utilise en situation leurs articulations.

5 Signification non pas du savoir, mais des enjeux de savoir. La question de la signification, et de sa recherche, est inscrite à la fois relativement au savoir, et à la fois relativement à sa mise en jeu.

III Dialectique des répertoires d'ostensifs et sémioses

1. Ostensifs et répertoires d'ostensifs

Pour aborder l'étude du fonctionnement des interactions sujet-milieu nous allons commencer par considérer les objets du milieu comme des ostensifs. Repartons alors de la définition donnée par Chevallard (1994)[6] :

> « L'observation de l'activité humaine amène à répondre en établissant une distinction fondamentale entre deux types d'objets : les objets ostensifs, d'une part, les objets non ostensifs, d'autre part.
> a) On appelle ostensifs les objets qui ont pour nous une forme matérielle, sensible, au demeurant quelconque. Un objet matériel (un stylo, un compas, etc.) est un ostensif. Mais il en va de même
> - des gestes : nous parlerons d'ostensifs gestuels ;
> Des mots, et plus généralement, du discours : nous parlerons ici d'ostensifs discursifs (ou langagiers) ;
> - des schémas, dessins, graphismes : on parlera en ce cas des ostensifs graphiques ;
> - des écritures et formalismes : nous parlerons alors d'ostensifs scripturaux.
> Le propre des ostensifs, c'est de pouvoir être manipulés, ce mot étant entendu en un sens large : manipulation au sens strict (celle du compas, ou du stylo, par exemple), mais aussi bien par la voix, le regard, etc. »

Distinguer ces ostensifs n'a de sens que dans le contexte où ils sont pris dans des choix réalisés par un enseignant pour construire anticiper *a priori* sur les milieux d'une situation d'enseignement. C'est pourquoi, pour notre part, nous restreignons l'usage du terme « ostensif » à ceux engagés dans une tâche proposée par un professeur en situation didactique d'étude de l'espace, d'objets de l'espace, et des formes planes[7].

Montrons sur un exemple courant en quoi le choix des ostensifs et leur articulation de travail induit des milieux de référence et par suite d'apprentissage bien différents. Reprenons l'exemple de reproduction d'un solide, ici un cube.

---

6 Nous pourrions nous passer de référer à Chevallard et utiliser le terme de « représentations », en ne retenant que les définitions suivantes données (parmi beaucoup d'autres) dans le Petit Robert 2006.

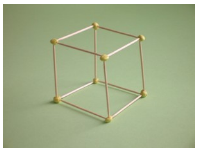
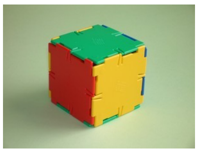
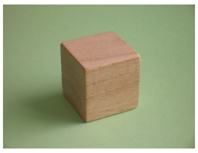
> « I. Action de mettre devant les yeux ou devant l'esprit de qqn.
> 1. VX ou DR. Production, présentation […] (voir exhibition).
> 2. Mod. le fait de rendre sensible (un objet absent ou un concept) au moyen d'une image, d'une figure, d'un signe (voir représenter). […] – SPECIALT. Action de représenter (la réalité extérieure) dans les arts plastiques. […] - DIDACT. Le fait de représenter par le langage (voir description, évocation).
> 3. Image, figure, signe qui représente (voir emblème, symbole ; diagramme, graphique, 3. plan, schéma […] œuvre littéraire ou plastique qui représente quelque chose. »

Cependant dans la littérature de recherche en sciences de l'éducation, ou en psychologie, ce terme de « représentations » est très souvent utilisé pour d'autres aspects, relatifs par exemple aux représentations mentales, aux conceptions, …

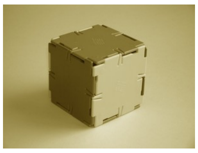
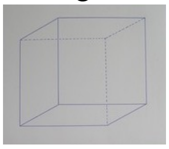
7 Le propos de la partie précédente pouvait difficilement concerner « les formes planes ». Ce thème est par contre bien un des contextes de l'étude exposée dans cette troisième partie.

Le choix de l'ostensif de départ pour signifier le cube est assez vaste : ce peut être un cube, une image de cube ou des expressions langagières pour désigner un cube, et pour chacun de ces types d'ostensif, on peut encore trouver des possibilités diverses. Par exemple :

Objets :

   ...

Images :

  ...

Langage :

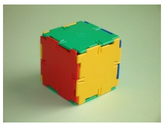
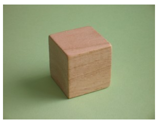
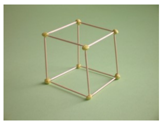
« un cube » ; « un polyèdre avec six faces carrées » ...

De même, le choix du matériel à utiliser pour la reproduction peut être varié :

- Pièces pleines pour construire des faces ;
- tiges et morceaux de gomme pour construire des arêtes et des sommets ;
- pièces évidées pour construire des faces ;
- papier crayon et instruments pour construire des faces.

Les différents choix possibles pour l'ostensif modèle et pour l'ostensif de reproduction définissent des milieux matériels et objectifs qui génèrent alors des milieux de référence de nature différente au regard des savoirs qui seront en jeu : plutôt orientés vers la notion de faces d'un solide, plutôt orientés vers les notions d'arêtes et de sommets, plutôt orientés vers la notion de patron. Par ailleurs, les conditions de médiations (au sens où nous les avons redéfinies dans la partie précédente) peuvent être de nature très différentes également. Pour exemple, les trois associations suivantes :

  ;   ;  

Ces distinctions, ces études de choix et d'associations constituent des nœuds dans l'analyse *a priori* d'une telle situation pour laquelle alors, la notion d'ostensifs semble pertinente.

Nous proposons dans ce texte de distinguer quatre répertoires d'ostensifs bien distincts liés au rapport qu'un sujet entretient avec la réalité de la situation :

- le répertoire des objets spatiaux (qui ne sont pas seulement des objets matériels, mais des objets matériels déjà mis à distance des objets du quotidien, dans leur apparence) ;

- le répertoire des images fixes (pas seulement les schémas, dessins graphismes, mais aussi les images photographiques, les représentations en perspectives, les vues, et les dessins techniques)[8] ;
- le répertoire des images dynamiques (celles des images fixes qui peuvent être dynamisées par l'intermédiaire d'un logiciel (en géométrie, en dessin technique, en architecture, en géographie …) ;
- le répertoire des expressions langagières (pas seulement les mots et les discours, mais les expressions langagières structurées d'une certaines façon, les pratiques langagières scolaires).

Nous donnons en annexe 3 quelques exemples pour les situations portant sur l'étude des formes planes.

Cette catégorisation, comme toute catégorisation, n'a de sens que par rapport à la question qu'elle permet de clarifier. Quelles sont donc les nécessités sous-jacentes à la catégorisation des ostensifs en répertoires tels que définis ci-dessus ?

2. Les répertoires d'ostensifs comme signe d'une dialectique

On ne peut parler d'ostensif que dans le cadre d'une interaction didactique orientée par un enjeu de savoir, voire un ensemble de situations didactiques imbriquées, enchevêtrées, articulées, sur un long terme. *Les répertoires sont une façon de décrire les ostensifs de manière dégagée de la contingence didactique, tandis que chacun de ces ostensifs, dans une situation didactique, est un signe qui participe aux processus de significations et de conceptualisation d'une notion.*

La référence prise ici est celle du signe peircien, tel que F. Conne nous la livre actuellement (Conne 2008) :

> « Je rappelle quelques définitions de la sémiotique indispensables pour ancrer la perspective adoptée :
>
> . Signe : (…) *something by knowing which we know something more.* (C.P. 8.332)[9]
>
> . Signe : (…) un signe ou *représentamen,* est quelque chose [1] qui tient lieu pour quelqu'un [3] de quelque chose [2] sous quelque rapport ou à quelque titre. Il s'adresse à quelqu'un c'est-à-dire qu'il crée dans l'esprit de cette personne un signe équivalent ou peut-être un signe plus développé. Ce signe qu'il crée, je l'appelle interprétant du premier signe. Ce signe tient lieu de quelque chose : de son objet (C.P. 2.228, Fisette 1993, p. 10).

8 Au regard de la diversité des images de ce répertoire et de leur importance tant didactique que professionnelle, citons l'introduction de l'ouvrage *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (Bessot Verillon 1992) dont les recherches exposées ont été peu reprises en didactique des mathématiques (cf. Hersant Gobert 2007): « La représentation et le traitement des données spatiales constituent les fonctions premières des graphismes d'espace. Plans, cartes, dessins techniques, dessins géométriques, *conservent,* pour ceux qui savent les utiliser, des informations de nature spatiale. Ces informations s'avèrent indispensables pour la réalisation de tâches professionnelles ou de la vie courante : fabriquer une pièce mécanique, détecter une panne électrique, s'orienter dans une ville par exemple. Mais aussi pour le géomètre, l'architecte, le concepteur et, de plus en plus souvent, pour les ouvriers et les techniciens confrontés aux nouvelles technologies industrielles, les graphismes permettent d'élaborer, d'anticiper, de contrôler et de valider des solutions à des problèmes spatiaux. Moyens extériorisés de stockage, de représentation et de raisonnement relatifs aux données spatiales, les graphismes constituent donc des auxiliaires précieux pour l'action et la réflexion dans de nombreux domaines d'activité. Cependant leur maîtrise pose des difficultés importantes qui préoccupent depuis longtemps à la fois les milieux de l'éducation et du travail. »

9 « (…) quelque chose dont la connaissance nous porte quelque chose de plus à la connaissance » (traduction de F. Conne).

> Si le signe tient pour son objet, cela n'implique pas pour autant que ce dernier serait déjà totalement connu. Au contraire, **c'est par le signe que nous connaissons mieux l'objet, au travers des enchaînements de ses interprétants ou sémioses. Si l'objet est connaissable c'est parce que ces sémioses ne sont pas libres mais contraintes par l'objet lui-même**. De ce point de vue, la relation qu'entretient un signe à son objet est quelque chose de crucial pour toute personne qui s'intéresse aux développements sémiotiques. Cette relation se décline sur trois modes : les relations iconique, indicielle et symbolique […].» [nous soulignons en gras]

Ce que nous cherchons, ce sont des conditions, *a priori,* permettant que les éléments des répertoires (les ostensifs) se mettent en mouvement comme signes de quelque chose ayant avoir avec le géométrique, dans des situations didactiques, pour produire de la signification, de la connaissance ou du savoir pour les élèves. Reprenons ici une citation de Fisette dans son ouvrage « Pragmatique de la signification » (Fisette 1993), pour mieux cerner le pourquoi de notre point de vue, concernant un questionnement général sur l'enseignement et les apprentissages :

> « Un mouvement de sémiose ne suit pas un développement linéaire : il ressemblerait plutôt au mouvement d'une spirale qui repasse incessamment dans les mêmes lieux tout en marquant des enrichissements, si bien que le même objet est fréquemment revu, la lecture et les acquisitions étant différentes d'un passage à l'autre. C'est que l'apprentissage […] n'est pas le fait d'une simple accumulation de données, mais bien le fait d'une intégration des connaissances qui se fait, pourrait-on dire, simultanément dans deux orientations de l'esprit, à la façon d'un regard successivement tourné vers l'extérieur, cherchant dans le monde de nouveaux objets de savoir, et tourné vers l'intérieur, cherchant à construire une nouvelle cohésion, à créer une nouvelle conscience. Je suggérerai que cet apprentissage, ce processus de découverte que j'ai voulu afficher clairement dans son mode de fonctionnement spécifique, correspond moins à une pensée établie et sûre d'elle-même, avançant par déductions, qu'à des processus abductifs inscrivant des tentatives, des propositions nouvelles venant se greffer sur les précédentes pour les nuancer, les déplacer. » (p16)

Petite digression sur les jeux de cadres : Régine Douady (1986) a montré depuis longtemps l'importance des jeux de cadres dans la conceptualisation et la mise en fonctionnement des connaissances dans l'exercice des mathématiques du secondaire et du supérieur. Elle définit un cadre ainsi :

> « Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. […] Le mot « cadre » est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique...
> Les jeux de cadres sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves. Les jeux de cadres sont source de déséquilibres ; la rééquilibration participe à l'apprentissage. Les jeux de cadres jouent un rôle moteur dans l'une des phases de la dialectique [outil-objet]. »

Au niveau de l'école primaire, du fait de l'absence ou de l'impossibilité d'un travail spécifique de construction de ces cadres, on peut se poser la question de savoir ce qui peut d'être source de déséquilibre, et occasionner des évolutions des conceptions des élèves participant à l'apprentissage ou la mise en fonctionnement de concepts spatiaux ou géométriques.

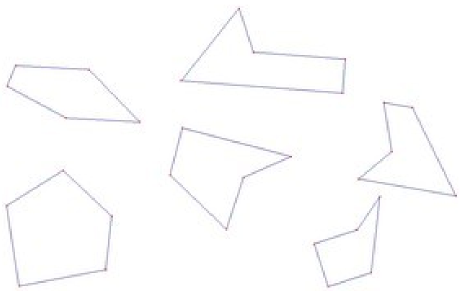
La dialectique des jeux de cadres pourrait se penser à l'école primaire selon une dialectique des répertoires. Mais pour cela nous avons besoin de dépasser l'ostensif pour le voir comme un signe pris dans les sémioses à l'œuvre dans les situations didactiques. Et de faire appel plus finement ensuite aux différentes manières d'être du signe à son objet (icône, indice, symbole).

« De cette analyse je puis tirer une proposition didactique concernant les tâches intéressantes à faire faire aux élèves pour un tel champ d'expérience. **Il s'agira de mettre en tension ces deux aspects iconiques et indiciels que j'ai dégagés afin de permettre la mise en relation féconde […] tendue, entre images anticipatrices et indices produits par le dispositif** […]. Cette mise en relation en se réduit pas en une relation dyadique, mais **met tout aussi bien en jeu la modalité symbolique du signe**, et c'est ici que ces expériences sont instructives. Les expériences, leurs variations, les comparaisons entre elles, les relances tout cela établit des liens entre interprétants associés à ces signes […] et se situe donc exactement dans cette dimension symbolique, et cela sans qu'il soit nécessaire de les institutionnaliser tous. La modalité symbolique et les interprétants se rapportent autant aux objets sur lesquels on expérimente qu'aux expériences elles-mêmes. » (Conne 2008) [nous soulignons en gras]

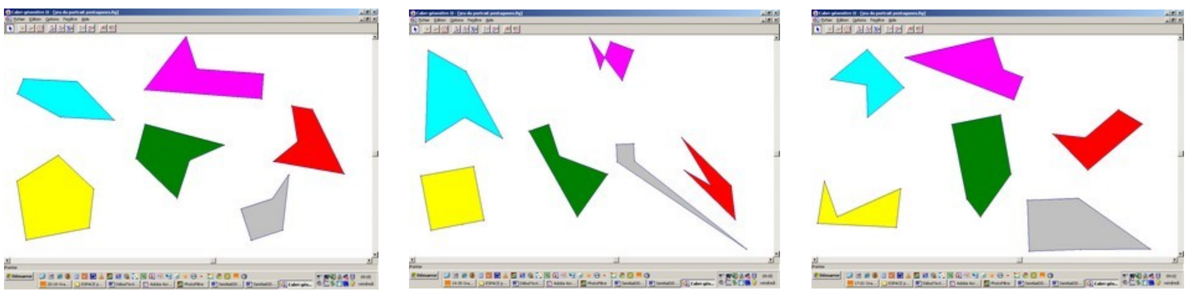
3. Un exemple

Prenons une tâche ordinaire proposée à l'école primaire, de jeu de portrait avec des formes planes. Le principe consiste à poser des questions, portant sur les formes des dessins, pour retrouver une forme choisie initialement par l'enseignant. L'objectif de ce type de tâche est de permettre la formulation et l'utilisation en contexte de propriétés géométriques concernant les polygones, telles que perpendicularité, parallélisme et isométrie des côtés, présence d'éléments de symétrie ; propriétés faisant l'objet d'études par ailleurs, en amont ou en aval d'une telle situation. La tâche doit être répétée suffisamment de fois, avec des dispositifs pédagogiques pouvant être divers, pour permettre à la classe de se mettre d'accord et de fonctionner avec un répertoire d'expressions langagières communes.

Le choix de faire travailler les élèves sur des images fixes, dessins aux traits sur papier, comme celles-ci-dessous par exemple, c'est-à-dire de construire un milieu objectif avec des ostensifs de ce répertoire induit un certain type d'interaction des élèves aux objets du milieu. En particulier, ils travaillent sur les dessins et leurs attributs spatiaux (orientation, taille, allure générale, ressemblance à des objets du quotidien).



Le choix de faire travailler les élèves sur des images dynamiques, dessins aux pixels sur écran d'ordinateur, construits comme figures dans un environnement de géométrie dynamique, c'est-à-dire possédant des propriétés spatiales invariantes dans le mouvement, change considérablement le rapport des élèves aux dessins, puisque ceux-ci évoluent, se déforment en fonction du mouvement que l'on fait subir à certains points.



Notre propos ne porte pas sur la pertinence de tel ou tel choix mais sur la nécessité pour le didacticien d'étudier comment un dispositif qui articule ces deux choix, et donc dialectise le rapports des élèves aux formes planes, peut être porteur de sémioses [10]. Comment l'expérience pour les élèves de découvrir des dessins fixes sur une feuille de papier, en mouvement sur l'ordinateur, de pouvoir des déformer de sorte à obtenir des dessins sans grande ressemblance avec les dessins d'origine, de pouvoir les reformer à l'état fixe des dessins d'origine, de pouvoir les transformer en dessins connus élémentaires, comment cette expérience de mise en relation avec le répertoire des expressions langagières est porteuse, *a priori,* d'apprentissages scientifiques du géométrique ?

L'analyse que fait F. Conne d'autres expériences en utilisant les distinctions du signe percien en terme d'icône, d'indice, de symbole, et des trois horizons de priméité, secondéité, tiercéité, nous parait être une piste très sérieuse, bien que difficile, sur laquelle notre réflexion didactique peut s'engager pour avancer. Pour le moment, nous nous contenterons de parler de dialectique des répertoires d'ostensifs pour faire signe d'un objet de savoir, et c'est dans cette optique que nous interprétons son propos fédérateur :

> « La thèse de cet article est que la valeur de l'expérience dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques est à la mesure du jeu qu'elle permet dans ces renvois des signes à leur objet : a) la manière dont sont sollicitées les connaissances collatérales et mises en relations des savoirs entre eux, b) les verdicts des dispositifs matériels et des procédures que leur usage requièrent et enfin c) les résonances par lesquelles ces expériences stimulent l'imagination. »
>
> « On doit alors compter avec l'intention et le choix de faire faire telles ou telles expériences aux élèves et celle aussi d'en contrôler les aboutissants. Néanmoins il faut pouvoir assurer un minimum d'authenticité aux expériences ainsi promues. Ceci est possible dès lors que l'on considère que l'expérience est le signe d'un objet, que l'intention d'enseigner porte sur l'objet et que l'expérience n'est qu'un moyen. Ainsi la question didactique nous amène à examiner de plus près la relation de l'expérience à son objet. » (Conne 2008)

Nous proposons en annexe 4 un extrait plus conséquent de l'article dont il est question.

Conclusion

L'idée de ce texte est de poursuivre le questionnement engagé par d'autres chercheurs sur la recherche d'un milieu (horizontal) d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace et des milieux (verticaux) de situations didactiques associées. Nous proposons de sortir des « figures planes comme milieu pour l'enseignement de la géométrie » proposés par Fregona et Brousseau, pour postuler *un milieu spatial* pour lequel les objets goniométriques peuvent être considérés comme des objets et non comme des choses empiriques. Nous avons tenté de clarifier des répertoires d'ostensifs qui fonctionnement comme des signes de ces objets matériels, et tentons de clarifier les articulations entre ces répertoires ou à l'intérieur de ces répertoires. En particulier notre seconde partie correspond à l'étude de deux conditions d'usage des ostensifs, signe d'un enjeu de savoir : le jeu sur les dimensions et le degré de nécessité d'une médiation sémiotique. La troisième partie serait à développer quand aux articulations entre ou interne aux autres répertoires : images fixes, images animées, langage.

10 En fait il y a trois répertoires en jeu, puisque celui des expressions langagières est l'objet même du travail de l'activité.

Bibliographie

Bachelard G. (1957) *La poétique de l'espace,* PUF.

Berthelot R., Salin M-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire,* Thèse, Université Bordeaux I.

Bessot A., Verillon P. (Coord. Par) (1992) *Espaces graphiques et graphismes d'espaces,* Ed. La pensée sauvage.

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 19, n°1, pp. 77-124.*

Broussea G. (1990) Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 9/3, La pensée sauvage.

Brousseau G. (1998) *Théories des situations didactiques*, La pensée sauvage.

Cf. Laborde et Capponi 1994.

Chevallard Y. (1994) « Ostensifs et non ostensifs dans l'activité mathématique », Résumé des séances de l'UV de didactique des mathématiques, Licence de mathématiques, Université Aix-Marseille II http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensif - s.pdf

Conne F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, Vol. 12.2-3.

Conne F. (2001) Evolution de la référence à la *réalité* dans les manuels suisses romands au cours du XXème siècle, *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques*.

Conne F. (2008) L'expérience comme signe didactique indiciel, *Recherches en didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, Vol 28, n°2, pp219-264.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, Recherches en didactique des mathématiques, vol 7/2

Fisette J. (1993) *Pragmatique de la signification*, Ed. XYZ Montréal, Canada.

Fregona D. (1995) *Les figures planes dans l'enseignement de la géomét*rie, Thèse, Université Bordeaux I, IREM d'Aquitaine.

Galvez G. (1985) *El aprendizage de la orientacion en el espacio urbano : una proposicion para la ensenanza de la geometria en la escuela peimaria*, Thèse, Centre de recherches du IPN, Mexico.

Gobert S. (2001) Questions de didactique liées à l'articulation du spatial et du géométrique dans l'enseignement à l'école primaire, Thèse, Université Denis Diderot Paris 7, IREM de Parie 7.

Gonseth F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Neuchâtel, Suisse (diffusé par Ed. Dunod, Paris).

Hersant M., Gobert S. (2007) « Espace, figure, géométrie » Etude pour que la question vive, *Actes de la 14e école d'été de didactique des mathématiques,* Sainte-Livrade.

Margolinas C. (1992) Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 12/1.

Margolinas C. (1995) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, In *Les débats de didactique des mathématiques*, coordonné par Margolinas C., Ed. La Pensée Sauvage.

Perrin-Glorian M-J. (1999) Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 19/3, pp-

Robert A. (2008) « Le cadre général de nos recherches en didactique des mathématiques », chapitre 1 de la partie 0 « Cadrages théoriques », In *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* F. Vandebrouck (coordonné par), 2008, Octarès Editions, Toulouse, pp11-22.

Roglaski J. (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Chapitre 2 de la partie 0 « Cadrages théoriques », In *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, F. Vandebrouck (coordonné par), Octarès Editions, pp22-30.

Rommevaux M-P. (1997) *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle,* Thèse, Université L. Pasteur, Strasbourg I, Ed. IRMA.

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didcatique des mathématiques,* Vol. 10/2.3, La Pensée Sauvage.

Annexes

1. ANNEXE 1

Extraits de GONSETH F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Neuchâtel, Suisse (diffusé par Ed. Dunod, Paris).

Tome I : La doctrine préalable.
Tome II : Les trois aspects de la géométrie.
Tome III : L'édification axiomatique.
Tome IV : la synthèse dialectique.
Tome V : Les géométries non euclidiennes.
Tome VI : Le problème de l'espace.

Extrait du tome I

Gonseth écrit, avant d'introduire le « principe d'idonéité » :

> « Enrichis de quelques expériences négatives, nous voici ramenés à notre problème. Il est resté entier : choisir - puisqu'il le faut - une doctrine préalable informant la construction systématique de la géométrie. Non seulement ce problème préliminaire n'a pas encore trouvé de solution, mais nos essais ont eu pour conséquence de faire surgir derrière ce problème mineur un problème majeur de même nature : celui de l'édification d'une théorie de la connaissance. Ni pour l'un ni pour l'autre, nous n'avons encore découvert les moyens adéquats et légitimes de les traiter. La seconde suggestion […] qui vient d'être examinée n'est ainsi pas moins décevante que la première. Elle se révèle aussi peu susceptible que notre première idée de nous mettre en possession des éléments d'une solution satisfaisante. Nous ne pouvons en rester là. Il nous faut imaginer autre chose. Il doit exister une troisième éventualité ; l'existence même de la géométrie en est garante. L'intention métaphysique n'a pu nous mettre en main le fil d'Ariane, l'intention dialectique y réussira-t-elle peut-être ? »

La première suggestion était : « faut-il s'en remettre à principe d'indifférence ? » Gonseth étudie que ce choix ne peut se justifier.

> « La solution d'indétermination, solution qui consiste à choisir une doctrine préliminaire quelconque, et à l'adopter non pas pour sa convenance, mais pour quelque raison d'immédiate commodité. Cette solution est donc à rejeter, et nous voici ramenés à l'obligation de choisir en connaissance de cause. » [dans un paragraphe ultérieur : « le principe d'indifférence conduit à une solution d'indétermination. »]

La seconde suggestion était : « Faut-il s'en remettre à une discipline antérieure ? » Après un détour par une clarification de ce qu'il entendra par intention métaphysique et intention dialectique, il conclura :

> « En cédant à l'intention métaphysique, nous nous écartons des conditions du savoir réel. Rien ne nous autorise à penser qu'une discipline objective puisse jamais être fondée sur une doctrine préalable et première, au sens métaphysique de ces mots. » [Plus tard, dans un paragraphe ultérieur : « le principe du recours à une discipline antérieure entraîne une solution métaphysique. »]

Suite et troisième suggestion :

> « On remarquera que le tournant décisif, le passage à une nouvelle perspective, à une nouvelle façon de penser est marqué par l'intervention du mot « idoine ». Le sens qu'il doit prendre ressort clairement du contexte : il signifie qui convient, qui tient compte des conditions, qui répond aux exigences, qui est conforme aux fins et aux intentions, approprié à sa fonction, etc.
>
> Nous pouvons maintenant introduire le principe d'après lequel la préférence peut être accordée à telle ou telle doctrine préalable : c'est le principe de la meilleure convenance, que nous appellerons aussi principe d'idonéité. […]
>
> La troisième suggestion est donc celle de la réponse aux exigences sine qua non du parfait provisoire, tandis que la première était celle du pis aller et la seconde du parfait indiscernable. Elles sont essentiellement différentes, divergentes. Chacune d'elles s'écarte résolument des deux autres. » [Dans un paragraphe ultérieur : « le principe d'idonéité introduit une solution dialectique.] »

Extrait du tome II

Au tout début :

> « Le principe d'idonéité nous impose l'obligation d'édifier une géométrie satisfaisante dans la perspective de la science moderne, une géométrie qui réponde aux exigences et au contenu de la connaissance actuelle. « C'est un devoir tout naturel, pensera-t-on, un devoir qu'il est presque superflu de formuler. » Qu'on ne s'y trompe pas : si nous le prenons véritablement au sérieux, il nous demandera un effort persévérant et une grande liberté de jugement.
>
> Bien que le principe d'idonéisme nous libère des difficultés philosophiques de la première heure, il ne nous livre pas dans leurs détails les fondements et la méthode convenant à la constitution effective de la géométrie. Ceux-ci sont encore à conquérir. Sans eux, il serait vain de vouloir aborder le problème de l'espace. »

Fin page 83-84 (sur 88)

> « Il n'en demeure pas moins que les trois aspects [l'aspect intuitif, l'aspect expérimental, l'aspect théorique] sont envisagés comme trois aspects d'une même réalité. Bref, on établit une équivalence de vérité.
>
> Nous disions, il y a un instant, que l'aspect théorique est prédominant. Nous ne le contredisons pas. S'il est convenu que trois personnages parleront des mêmes choses et qu'ils ne se contrediront pas, il n'est pas nécessairement entendu que leurs rôles auront la même importance. On peut répartir le dialogue entre eux de cent façons différentes, sans rompre

la convention. Il en est de même dans le dialogue entre les trois aspects de la connaissance spatiale. Ce dialogue, c'est-à-dire la façon dont un enseignement géométrique est construit, peut comporter les dosages les plus divers des recours aux trois sources de notre information. A travers ces dosages, l'absence de contradiction n'en reste pas moins la base des relations réciproques. En un mot : L'équivalence de vérité des trois aspects est l'idée dominante de la doctrine préalable de la géométrie élémentaire. La connaissance géométrique s'organise sous cette idée dominante. […] au niveau d'une connaissance conforme à une vision naturelle du monde. […] Donnons au jeu des trois aspects le nom qu'il mérite, le nom que les remarques précédentes justifient : c'est un jeu dialectique, une synthèse dialectique de l'intuitif, de l'expérimental et du théorique. »

Extraits du tome III

Ce tome est consacré à « l'étude de la façon dont l'aspect théorique se constitue en une structure rationnelle, en un système déductif »

En page 106 dans la conclusion :

« Pour l'avoir pratiquée consciencieusement, en allant jusqu'au bout de notre expérience axiomatique, nous savons maintenant comment la pensée rationnelle se saisit de son objet et en organise la connaissance. […] Certes, en s'axiomatisant, la pensée géométrique a affirmé son caractère théorique. […]

Mais la convenance des axiomes reste suspendue à notre vision intuitive de l'espace, que l'expérience quotidienne renouvelle : mais la dialectique est toute mélangée (dans une mesure que nous n'avons pas même su apprécier) d'éléments intuitifs relatifs à l'espace, au temps, au nombre, à l'objet, etc. En un mot, la pratique axiomatique, la pensée rationnelle se spécifie : elle s'épure, elle se réalise mieux dans le sens d'une autonomie voulue et recherchée ; […].

Mais la marche de la spécification a son revers. Regardons, par exemple, l'idée de mesure dans le continu, à laquelle nous avons été conduits. Du point de vue théorique, c'est une pure merveille. Mais convient-elle également à la description des « réalités physiques » qu'on se proposait de mesurer ? Chacun sait qu'il n'est est rien ; dans la mesure même où notre analyse s'achève dans sa perspective théorique, la réalité du monde atomique lui devient étrangère.

Un antagonisme surgit ainsi entre deux moments essentiels du progrès de la connaissance : celui de la spécification et celui de la fermeture de la synthèse dialectique qui s'était réalisé dans le chapitre précédent, au niveau de l'information naturelle. N'est-ce là qu'un accident ?

Au contraire. Pour retrouver les conditions d'une synthèse dialectique renouvelée, pour que l'idée dominante d'une nouvelle dialectisation s'impose presque d'elle-même il faut appeler à l'existence et faire intervenir une série de notions telles que celles de schéma, de modèle, d'horizon de réalité. Ce sont les instruments d'un nouveau stade de la connaissance …Le chapitre IV leur sera consacré. »

Extrait du tome IV

En fin de tome

« Le moment décisif de la synthèse dialectique est donc la constitution des l'horizon axiomatique A. Chose remarquable, le rôle organisateur de ce dernier, sa fonction clé à la pointe de tout le système confère une nouvelle valeur à son autonomie. Celle-ci n'est pas absolue, nous le savons. Elle existe cependant, dans la mesure où la structure propre de l'horizon schématique et la technique déductive ont été dégagées de l'intuition géométrique. L'importance de la déduction dans l'abstrait (dans un abstrait aussi épuré que possible) s'en trouve tout particulièrement soulignée. L'essai de constituer l'autonomie de la géométrie théorique (c'est-à-dire son axiomatisation) nous a conduit à placer celle-ci dans un cadre plus général. Les contingences de l'intuition géométrique y perdent leur valeur significative et l'intuition s'y retire vers un autre ordre de faits (vers les « faits logiques »), les notions et les relations géométriques s'y défont de leurs qualités d'engagement dans le monde géométrique pour ne garder que leur qualité d'objet et de relations entre objets. Par sa projection sur l'horizon axiomatique, la géométrie théorique a donc pris place au sein d'une théorie des objets – des objets dont on cherche à ne retenir que la qualité d'être des objets indépendamment de toute propriété précise qui pourrait leur appartenir d'avance – en un mot des objets logiques.

Cette théorie est-elle indépendante de toute expérience et de toute intuition, dans un horizon propre de réalité ? Ou bien n'y présente-t-elle qu'un aspect d'une synthèse, à laquelle d'autres aspects sont indissolublement liés ? […]

En un mot pour finir, quant au but précédent des indications précédentes. Ce but est de prévenir un jugement précipité sur la dialectique de la déduction. Si nous avions pu croire que cette dernière se présente bien dégagée, sous une forme bien achevée devant laquelle l'examen s'arrêterait parce qu'il aurait trouvé son terme, ce qui précède nous aurait détrompés. Sous un examen qui veut gagner en profondeur, la dialectique déductive ne se révèle pas moins complexe que l'exercice intégral de la connaissance spatiale. Chose étrange, à première vue du moins, tout le problème semble renaître dans l'un des éléments de la solution.

Ce fait ne compromet-il pas irrémédiablement le résultat de notre étude ? Il le ferait, si la justesse de la méthodologie traditionnelle (et non dialectique) s'imposait sans recours. Certes, ce fait est irrécusable. Mais il ne fait pas obstacle à la méthodologie dialectique. Il la justifie. C'est pour en tenir compte qu'elle est ce qu'elle est : c'est l'une des expériences fondamentales dont elle se réclame. »

« Nous n'avons, en effet pas franchi la dernière étape de notre progression méthodologique. Il nous reste encore une expérience décisive à faire, avant de tirer la leçon générale de notre longue analyse.[…] il nous reste à voir comprendre comment il peut se créer une certaine distance entre celui qui connaît et l'intuition qui l'informe et ne cessera de l'informer. Comment l'intuition, de moyen indispensable et inaliénable de connaissance qu'elle est au niveau de l'information naturelle, peut devenir un obstacle et peut être tournée. Comment une géométrie peut se détacher partiellement de son support intuitif et proposer une vision révisée de l'espace.

Ce sera l'occasion de voir que l'expérimentation géométrique n'est pas invariablement liée aux horizons I, E et T [intuitif, expérimental, théorique], mais qu'elle peut aussi prendre l'horizon axiomatique comme champ d'activité.

Ce sont là des faits importants dont nos conclusions générales auront à tirer parti. Ils interviendront au chapitre prochain, à l'occasion de la constitution des Géométries non-euclidiennes.

L'édification de géométries venant contredire l'intuition sur certains points ne peut naturellement pas rester sans effet sur la conception des rapports des trois aspects. L'idée dominante de leur synthèse devra donc être révisée, elle aussi. Ce sera notre dernière expérience. »

Cette phrase clôt le chapitre IV.

A suivre …

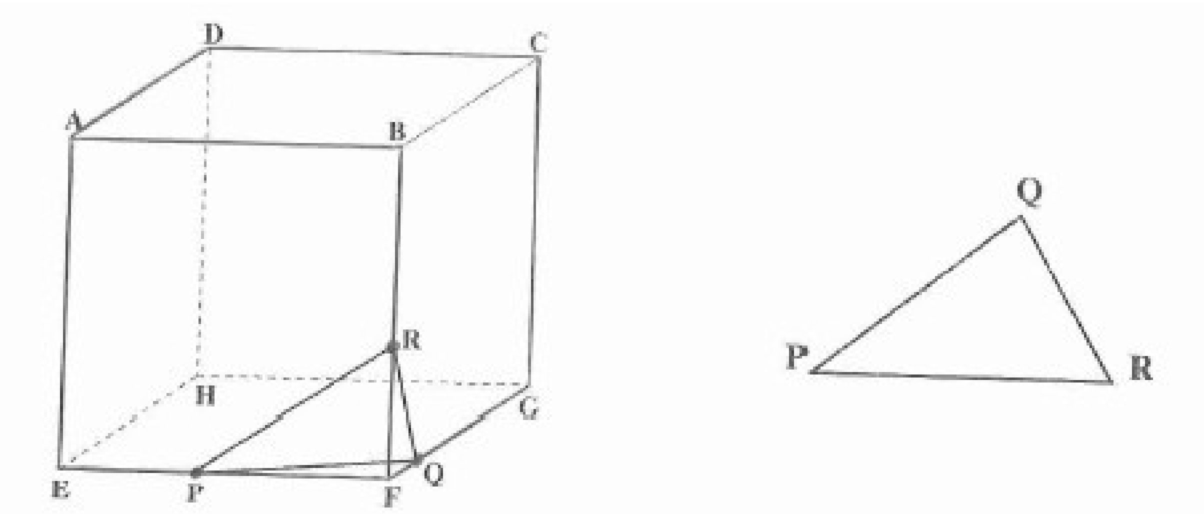
2. *Annexe 2*

Données communes aux différents cas :

ABCDEFG est un cube d'arête 5 cm. Les arêtes [AE], [BF], [CG] et [DH] sont parallèles. P, Q, R sont trois points sur trois arêtes distinctes, dont les positions seront différentes pour chaque cas étudié.
On coupe les cube suivant le plan (PQR). La tâche consiste à représenter la section formée par ce plan avec le cube sur la représentation en perspective parallèle, et en vraie grandeur.

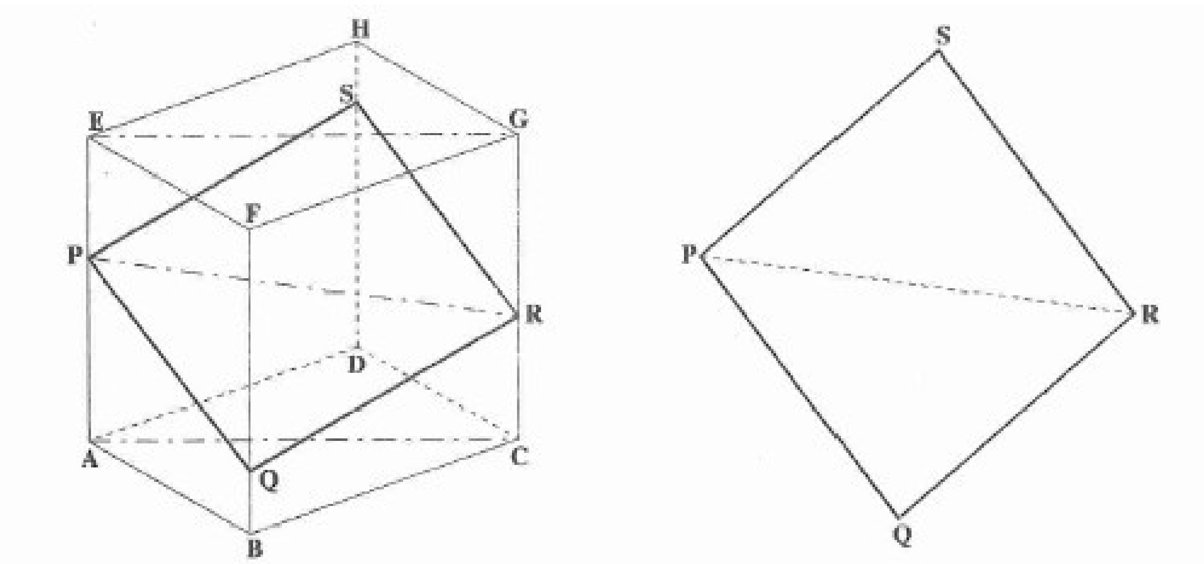
Données de la feuille 3 :

P est le point de l'arête [EF] tel que FP=3cm
Q est le point de l'arête [GF] tel que FQ=1cm
R est le point de l'arête [BF] tel que FR=2cm



Données de la feuille 4 :

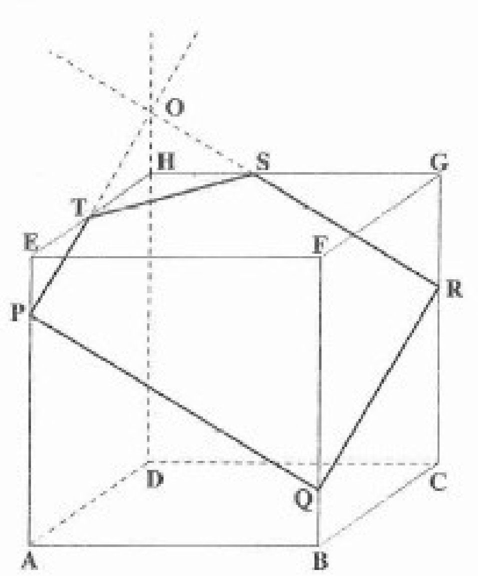
P est le point de l'arête [AE] tel que AP=3cm
Q est le point de l'arête [BF] tel que BQ=1cm
R est le point de l'arête [CG] tel que CR=2cm

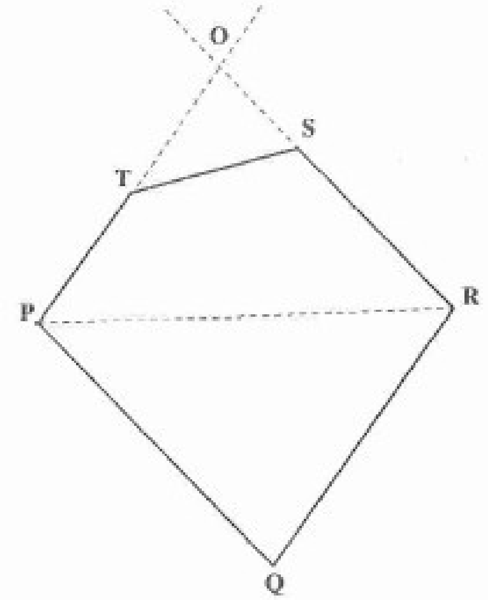


Perspective parallèle du dessin : projection sur un plan parallèle à un plan diagonal, les fuyantes font un angle de 60° et le coefficient de réduction est de 1⁄2.

Données de la feuille 6 :

P est le point de l'arête [AE] tel que AP=4cm
Q est le point de l'arête [BF] tel que BQ=1cm
R est le point de l'arête [CG] tel que CR=3cm

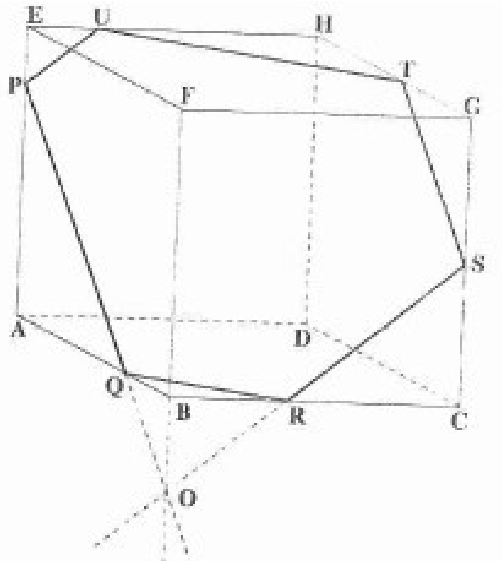


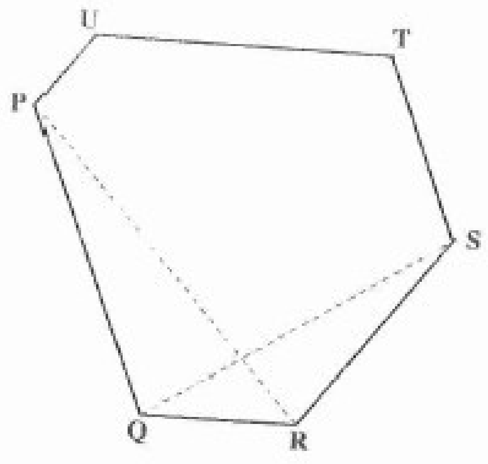


Perspective parallèle du dessin : projection sur un plan parallèle à une face, les fuyantes font un angle de 35° et le coefficient de réduction est de 1⁄2.

Données de la feuille 7 :

P est le point de l'arête [AE] tel que AP=4cm
Q est le point de l'arête [AB] tel que AQ=3,5cm
R est le point de l'arête [BC] tel que BR=2cm





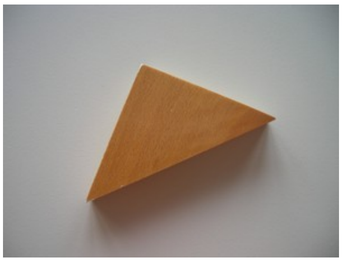
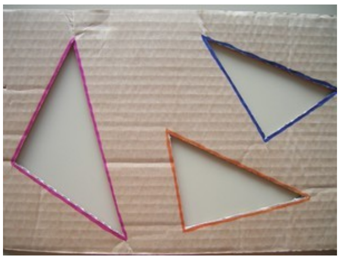
Perspective parallèle du dessin : projection sur un plan parallèle à une face, les fuyantes font un angle de 153° et le coefficient de réduction est de 3/5.

3. Annexe 3

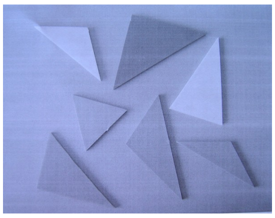
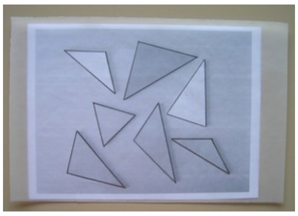
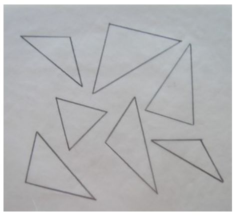
Exemples d’ostensifs pour l’étude des FORMES PLANES

Domaine d’exemples choisi : LES TRIANGLES

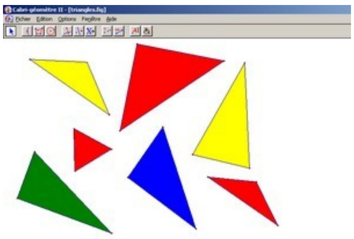
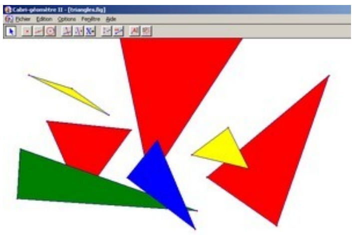
Répertoire spatial, exemples d’ostensifs :

   …

Répertoires des images fixes, exemples d’ostensifs :

   …

Répertoires des images dynamiques, exemples d’ostensifs :

  …

Répertoire des expressions langagières, exemples d’ostensifs :

« triangles »

« triangles rectangle isocèle »

...

4. Annexe 4

Extrait de CONNE F. (2008) L’expérience comme signe didactique indiciel, *Recherches en didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, Vol 28, n°2, pp219-264.

> a) Un signe iconique prête à son objet son apparence - qualitative, caractéristique ou générique - comme ressemblance suggestive. Dans ce cas, le signe tient pour son objet en tant qu’il partage avec lui son apparence ou celle qu’on lui suppose. L’icône présente ainsi une possibilité d’être de son objet, elle est suggestive – sans suggérer pourtant quelque chose de précis. La relation d’une icône à son objet est une assimilation, le signe ne se distingue pas de son objet, dont on n’est même pas assuré qu’il existe. […]

b) Un signe indiciel prête à son objet sa présence – ou une de ses occurrences – comme signal – un fait qui attire notre attention ou une simple intuition qui nous traverse l'esprit. Contrairement au signe iconique qui nous informe seulement d'une forme logiquement possible que pourrait avoir un objet dont on ne sait si il existe, le signe indiciel parce qu'il a été affecté par son objet nous en assure l'existence.

[…] L'indice et son objet sont dans une relation effective qui peut pourtant être complexe. Les signes indiciels sont essentiels aux processus d'interprétation, mais l'interprétation des indices est toujours une affaire délicate, parce que la relation qu'entretiennent les propriétés de l'indice et ceux de son objet peuvent être non seulement distendues mais fort abstraites. Certaines propriétés de l'indice sont reliées à l'objet, mais cela n'en fait pas pour autant des propriétés de l'objet lui-même.

c) Un signe symbolique prête à son objet sa logique comme conception – possible, informante ou significative. Un signe symbolique « veut dire quelque chose », il contraint l'esprit de l'interprète. Toutefois, cela ne détermine pas pour autant sa signification d'une manière univoque et définie une fois pour toute. Par conséquent, si le symbole « veut dire », il peut vouloir dire ceci à tel ou tel et cela à tel ou tel autre. […] Un symbole n'est pas un signe qui attribue une qualité à un objet, ni un signe qui établit la correspondance entre un objet et quelque chose que ce dernier affecte, mais un signe qui saisit un objet dans un filet de significations. J'attire l'attention sur le fait qu'un symbole est un signe dont la relation à l'objet est sémiotique.»

« […] Ainsi donc si l'expérience nous oriente, c'est qu'elle oriente les sémioses qui nous portent dans le dédale des relations mathématiques caractérisant ce domaine de connaissance les multiples modèles de la réalité qu'il nous offre. »

Extrait de la conclusion

1 Un signe indiciel atteste de l'existence de son objet. Telle est la première fonction didactique de l'expérience (niveau 2, factuel).

[…]

Mes analyses ont ainsi mis en évidence le lien étroit qui réunit procédure effective, solution et expérience. S'il est vrai qu'on n'enseigne jamais aux élèves que des savoirs qui existent déjà, il faut encore pouvoir leur en indiquer l'existence. Telle est la fonction des expériences qu'on leur donne à faire. Dans l'exemple n°1, le pliage proposé par Boule attestait que la propriété de la somme des angles avait une incidence sur ce dernier en le rendant parfaitement jointif. Le dessin du clown transperçant une feuille marquée de plis orthogonaux attestait la possibilité de produire à volonté des figures réversibles. La confection du patron de la boîte de l'exemple n° 3 indiquait la pertinence de l'idée de transformation isométrique dans la détermination des contours de son patron. Le découpage de la croix à l'exemple n° 4 attestait l'existence d'une quadrature de celle-ci.

Ainsi donc la question de savoir jusqu'où selon les circonstances il sera didactiquement pertinent de livrer aux élèves les réponses et solutions aux problèmes qu'on leur a posés, s'il est ou non souhaitable de leur enseigner des trucs qui les impressionneront par leur effet, ces questions interviennent toutes au même titre : choisir et contrôler les expériences effectives que l'on voudrait leur faire faire et leur ménager. On a souvent l'idée que l'expérience effective vaudrait surtout par ses démentis bruts, voire, sous une forme adoucie, ses surprises. Mais si on considère qu'au travers d'une expérience effective, et toujours particulière, la réalité nous indique ses réponses, cela ne fera aucune différence qu'elle nous oppose son démenti, nous renvoyant à un nouveau problème, ou qu'elle nous offre une solution de facilité. Là-dessus l'enseignant, ou quelques camarades pourront encore ajouter leur grain de sel. Lorsqu'on donne un problème à résoudre à des élèves, on leur demande de trouver le moyen de questionner la réalité pour leur indiquer la réponse. En tant que signe indiciel, la résolution se contente d'indication sur l'existence du savoir qui permet de déterminer la réponse cherchée. La valeur qui sera attribuée à la rétroaction du réel (ou, dit en termes de la théorie des situation, rétroaction du milieu) : démenti, ou procédé opportun, etc., est relative à des interprétants et participe d'un renvoi symbolique et plus seulement indiciel du signe à son objet.

2 Expérience effective, expérience imaginée (niveau 1, possible).

Cela dit on ne saurait limiter l'expérience à ne fonctionner que sur un mode effectif. Non seulement une expérience étant toujours particulière et on ne s'en tiendra pas longtemps à la répéter à l'identique - c'est exactement ce que faisait remarquer Peirce et c'est aussi cela qui est en jeu dans l'exemple n°1-, mais encore on recherchera les expériences qui pourraient nous apporter de nouvelles informations, ce qui signifie que par l'imagination on explorera un possible. À l'expérience effective, dont on attend recevoir une sanction factuelle et qui est selon les termes peirciens un signe indiciel dicent, vient donc s'ajouter une autre modalité, l'expérience de pensée, imaginative, celle qui suggère des expériences à faire selon ce qu'on peut en escompter, et que dans les termes peirciens toujours, on nomme signe indiciel rhématique. C'est à ce niveau que l'on cherche en particulier des variantes, voir qu'on les organise en diagrammes selon les différentes valeurs que prendront telles ou telles variables, ou encore que l'on constituera la trame d'un plan d'expérience.

3 L'expérience comme creuset de relations (niveau 3, général).

Par l'expérience nous posons une question au réel, que nous le fassions en imagination ou effectivement. Ce dernier ne nous dit pas comment interpréter ses réponses, cela est laissé aux jeux ultérieurs de nos interprétants. L'expérience ne nous livre jamais non plus de réponse déliée, isolée mais seulement amalgamée à d'autres aspects des objets que nous étudions.

[…] Ainsi donc si l'expérience nous oriente, c'est qu'elle oriente les sémioses qui nous portent dans le dédale des relations mathématiques caractérisant ce domaine de connaissance les multiples modèles de la réalité qu'il nous offre.

Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels.

Christine Chambris

Laboratoire André Revuz (ex DIDIREM)

IUFM de Versailles – Université de Cergy-Pontoise

Résumé :

En 150 ans, des bouleversements profonds ont affecté les relations entre grandeurs et nombres dans les mathématiques savantes et enseignées, et dans la vie courante. Nous voulons comprendre le statut actuel de ces relations à l'école primaire française et envisageons d'autres statuts pour demain. Notre cadre théorique de référence est la théorie anthropologique du didactique.

Nous avons approfondi l'étude de l'enseignement du système métrique, de la numération de position des entiers et de l'articulation entre ces deux enseignements. Nous avons aussi abordé celle des relations entre opérations (sens, techniques de calcul) et grandeurs (notamment la longueur et les représentations utilisant des schémas cotés).

Notre étude s'est développée selon trois axes en étroite interaction :

- les liens entre grandeurs, nombres, opérations et pratiques pour la vie courante : dans cet axe, nous avons analysé ces liens avant la réforme des mathématiques modernes puis les ruptures que cette dernière a provoquées dans ces liens. Notre corpus pour cette partie était constitué de textes du 20^{e} siècle : programmes, manuels scolaires (2^{e} et 3^{e} primaire) ;
- les savoirs savants : dans cet axe, il s'est agi d'une part de repérer les savoirs transposés à différentes époques, d'autre part d'identifier des conditions à satisfaire pour des théories mathématiques (éventuellement à formuler) susceptibles de servir de référence pour l'enseignement des grandeurs, nombres et opérations. Pour cela, nous avons pris en compte des besoins mathématiques et didactiques : notamment tâches, discours justificatifs destinés aux élèves, cohérence des savoirs, continuité des apprentissages ;
- les connaissances des élèves actuels (277 élèves en 5^{e} primaire) : dans cet axe, il s'est s'agi de mieux cerner les ruptures et manques apparus avec l'étude des liens et des savoirs savants.

Mots clefs

Relations entre grandeurs, nombres et opérations, réforme des mathématiques modernes, écologie des savoirs, chaînes et besoins trophiques, numération de position, théorie mathématique pour l'enseignement élémentaire, école primaire

Introduction

Ce texte constitue une présentation de ma thèse intitulée « Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels » (Chambris, 2008). Je l'ai soutenue le 6 novembre 2008. Marie-Jeanne Perrin-Glorian a dirigé mon travail.

Ce texte comprend trois parties. Dans une première partie, introductive, je présente mes questions de départ, le cadre théorique que j'ai retenu et la problématique qui en découle, ensuite mes hypothèses de recherche. Dans une deuxième partie je présente en parallèle ma méthodologie et des résultats. Le plan de cette partie s'appuie sur la méthodologie de la thèse. Cette partie est découpée en trois moments. Le premier moment est consacré à l'étude globale des programmes, des théories mathématiques des grandeurs et des rapports entre programmes et théories. Le deuxième moment présente conjointement des éléments quant aux chaînes trophiques impliquant grandeurs, nombres ou opérations avant la réforme et des éléments relatifs au questionnaire que j'ai proposé aux élèves. Le troisième moment est consacré à l'évolution des organisations mathématiques sur la numération au 20$^{\text{ème}}$ siècle. Pour finir, je tire quelques conclusions et présente des perspectives de recherche en didactique.

Questions de départ et choix du cadre théorique

Au départ de ce travail, il y a la réforme des mathématiques modernes[1]. Elle a séparé l'étude des grandeurs et des nombres. Une manifestation de cette rupture est la création du domaine mesure dans le programme de 1970 de l'école primaire. Ensuite, à partir des années 80 et, de plus en plus, on voit réapparaître localement des grandeurs pour étudier le « numérique », comme si les grandeurs étaient nécessaires pour étudier les nombres.

Je veux donc comprendre ce qu'apportait l'enseignement des grandeurs avant la réforme. S'agissait-il seulement d'enseigner des pratiques de la vie courante pour elles-mêmes ou au contraire l'enseignement des grandeurs contribuait-il à d'autres apprentissages plus conceptuels, notamment sur les nombres ?

Par suite, je veux aussi comprendre ce qu'il en est des relations entre grandeurs et nombres dans l'enseignement d'aujourd'hui et ce qu'il en résulte dans les connaissances des élèves. Sont-ils capables d'utiliser conjointement leurs connaissances sur les grandeurs et les nombres pour étudier des situations ? Leur manque-t-il quelque chose ?

Pour étudier ces questions, j'utilise la théorie anthropologique du didactique. Principalement, j'utilise une facette de cette théorie : l'écologie des savoirs. L'écologie des savoirs permet d'étudier des questions telles que : comment les objets d'enseignement vivent-ils ? Avec qui vivent-ils ? Comment naissent-ils ? Pourquoi meurent-ils ?

Dans une perspective écologique ma problématique consiste alors à étudier l'écologie des grandeurs et des nombres dans les mathématiques de l'école primaire avant la réforme et après pour comprendre la situation actuelle et pour envisager d'autres possibles.

Précisions sur le cadre théorique et hypothèses de recherche

Avant de préciser les questions que j'étudie en explicitant mes hypothèses de recherche, je reviens au cadre théorique. Comme on va le voir, je me réfère abondamment à la notion de praxéologie (Chevallard, 2007). J'ai aussi utilisé les notions de chaînes et besoins trophiques, qui sont des éléments un peu moins connus de la TAD.

Une chaîne trophique (du grec « trophein », nourrir) est une sorte de chaîne alimentaire pour les objets d'enseignement (Artaud, 1997). Cirade (2006) indique que :

> l'organisation des connaissances mathématiques suppose des chaînes trophiques, dans lesquelles une praxéologie « se nourrit d'une autre » et, par cela, paradoxalement, *la fait exister* dans l'institution qui lui sert d'habitat.

1 Dans la suite du texte, je parlerai de « la réforme ».

On peut d'abord énoncer que, pour un objet d'enseignement, le fait d'être utile à d'autres, d'être dans une chaîne, d'être mangé par d'autres, est un bon moyen d'exister. Ensuite, pour vivre, un objet d'enseignement a des besoins, notamment technologiques : par exemple, pour qu'une tâche vive dans une institution donnée il peut être bon que sa technique puisse être justifiée dans cette institution.

Pour fonder ma première hypothèse de recherche, je me réfère d'abord à Yves Chevallard (1992) qui affirme que :

> la Réforme provoque un bouleversement écologique au sein du curriculum, en déréglant nombre d'écosystèmes mathématiques, produits d'une évolution longue et complexe, dont certains, aujourd'hui encore, n'ont pu être revitalisés.

Je me réfère ensuite à Bronner (2008) qui étudie le numérique dans le secondaire. Il montre que, jusqu'en 1945 au moins, une théorie des grandeurs fondait l'étude des nombres.

Ma première hypothèse consiste alors à affirmer qu'il existait des chaînes trophiques en primaire avant la réforme notamment pour ce qui concerne l'étude des nombres, grandeurs et opérations. J'essaie donc d'en repérer.

Pour ma deuxième hypothèse, je m'appuie en outre sur Parouty (2005) qui étudie les connaissances des élèves actuels en numération. Elle observe notamment que lorsqu'on apprend aux élèves à résoudre des problèmes de numération « en contexte », ils progressent globalement dans toute la numération et pas seulement dans la résolution de tels problèmes ce qui n'aurait rien de remarquable. Pourtant l'enseignement de tels problèmes semble n'être pas très répandu.

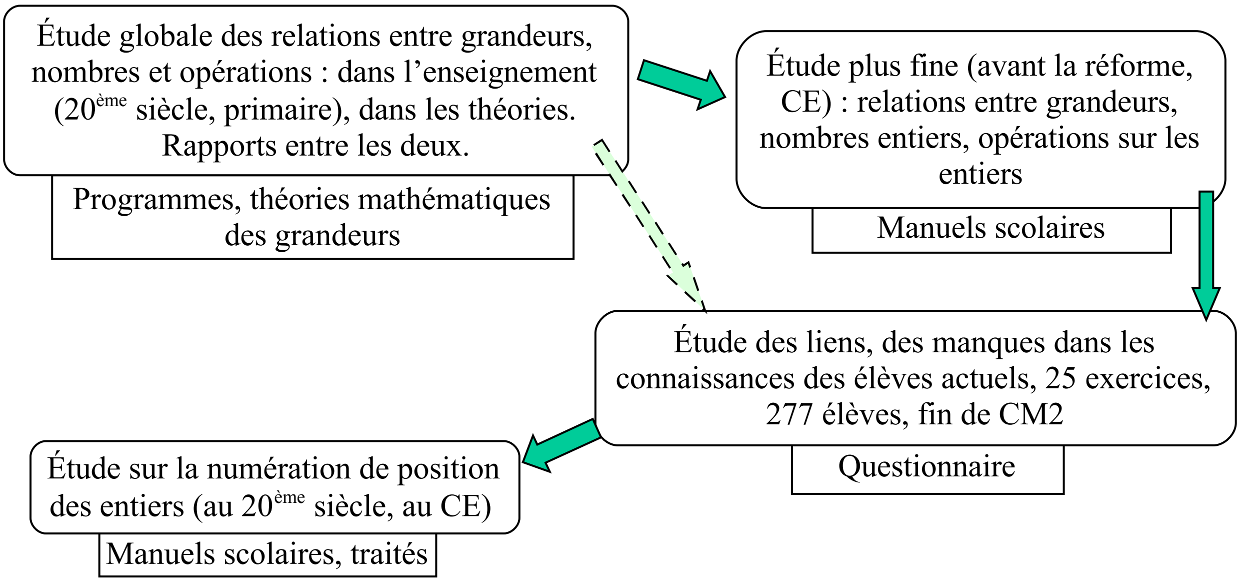
Je fais alors l'hypothèse que la réforme a profondément détérioré certaines chaînes trophiques en primaire et que les remaniements qui l'ont suivie n'ont pas réussi à récréer des liens. Ceci serait vrai en particulier pour l'étude de la numération de position.

Avant de formuler ma troisième hypothèse, je fais référence au travail de Robert Neyret (1995). Il pointe, en 1995, le manque et donc le besoin d'un traité pour la formation des maîtres quant aux fractions et décimaux. Il distingue en fait deux types de savoirs savants : le savoir savant utile à la sphère productrice des savoirs et le savoir savant, mathématiquement correct, mais adapté aux besoins de l'enseignement, qu'il appelle traité. Je les appelle savoirs savants de premier et de second ordre.

Ces éléments m'amènent à formuler une 3^{e} hypothèse de recherche : certains savoirs savants, ceux du 1er ordre, sont plus adaptés que d'autres, ceux du 2nd ordre, pour être transposés.

I Méthodologie et résultats

Pour présenter la méthodologie et les résultats je me réfère au schéma suivant que je décris ensuite :



Dans un premier temps, je cherche à mettre à jour, de façon globale, les relations entre grandeurs, nombres et opérations : d'une part dans les mathématiques de l'école primaire tout au long du 20ème siècle, d'autre part dans les théories mathématiques des grandeurs. J'étudie aussi les rapports entre les deux. Ceci me permet d'envisager d'autres possibles. Pour mener à bien ce projet, je m'appuie sur les programmes, pour tous les niveaux de l'école primaire, et j'étudie des textes mathématiques qui sont des savoirs savants de premier ou de second ordre.

Après mon étude globale des programmes et des théories, je souhaite mieux comprendre la situation antérieure à la réforme pour ce qui concerne les relations entre grandeurs, nombres et opérations dans l'enseignement. Pour ce faire, je restreins mon objet d'étude en me limitant d'une part aux relations qui impliquent les nombres entiers et d'autre part à un seul niveau de l'école primaire, le cours élémentaire.

Je cherche donc à mieux cerner les chaînes trophiques qui ont pu exister avant la réforme : d'une part celles évoquées dans les programmes, c'est-à-dire les relations entre système métrique et numération, et d'autre part, d'autres qui n'y sont pas évoquées mais qui sont susceptibles d'exister du fait d'une théorie sous-jacente des grandeurs pour étudier les nombres, ce sont celles qui impliquent les opérations. À la place des programmes, j'utilise des manuels scolaires du cours élémentaire.

Ensuite, à l'aide d'éléments des deux premières parties de ma recherche : identification de tâches qui correspondent à des axiomes nécessaires à l'élaboration de théories, identification de chaînes trophiques dans l'enseignement ancien, et d'une connaissance empirique de l'école primaire actuelle, je conçois un questionnaire pour les élèves. En fait, je veux savoir si ces chaînes trophiques et ces tâches issues de la théorie constituent ou non des « trous » dans les connaissances des élèves. Je vais proposer des exercices qui mettent en jeu des savoirs supposés acquis. Ils sont supposés acquis en ce sens qu'ils mobilisent des connaissances sur les entiers et des connaissances élémentaires sur les grandeurs. *A priori*, je pense toutefois que, pour certains d'entre eux, ces savoirs sont peu ou pas enseignés. Je prends notamment des exercices de l'enseignement ancien dans lesquels j'actualise les pratiques de la vie courante. Ensuite, je fais passer le questionnaire et j'analyse les réponses.

Dans ce texte, pour présenter les résultats, je rapproche les éléments relatifs aux chaînes trophiques et au questionnaire. Je commence par deux aspects relatifs aux opérations, je poursuis par des éléments qui concernent les relations entre numération et système métrique.

L'analyse des résultats des élèves au questionnaire et l'étude de l'écologie de la numération et du sytème métrique avant la réforme m'amènent à étudier l'enseignement de la numération de position : il s'agit ensuite de comprendre la situation actuelle de cet enseignement. Pour cela, je fais une nouvelle incursion dans le passé, j'essaie de comprendre cet enseignement avant la réforme et les évolutions qui l'ont suivie. J'utilise des manuels scolaires du cours élémentaire et des traités, anciens et récents.

Étude globale des relations entre grandeurs, nombres et opérations

Chaînes trophiques, aspect global : créations et rupture jusqu'en 1970

Tout d'abord du point de vue des liens visibles dans les programmes, je repère que le programme de 1923 prescrit l'articulation du système métrique et de la numération – ce qui n'était pas le cas du programme antérieur de 1882.

Ensuite, l'étude du programme de 1970 me permet de mieux cerner la rupture entre les grandeurs et les nombres lorsqu'elle est introduite. Avant 1970, il y a l'arithmétique. En 1970, en remplacement de l'arithmétique, on crée en fait deux domaines : la mesure et le numérique, qui apparaissent ainsi comme les deux faces d'une même pièce. En 1970, dans le numérique, les nombres, même non entiers, mesurent le discret. Dans le domaine « mesure », ils mesurent le continu[2]. Cette rupture manifeste le changement de théorie de référence car on essaie ainsi de créer une étude des nombres non entiers qui ne s'appuie pas sur le fractionnement des grandeurs, un peu comme dans la théorie savante où les réels sont construits à partir des entiers.

Rapports entre programmes et théories : théorie transposée, théorie reconstituée

Sur le plan des rapports entre les programmes et les théories, j'essaie d'identifier ou de caractériser les théories sous-jacentes dans les programmes à différentes époques. Pour cela j'utilise deux méthodes. Pour la première, il s'agit de repérer les théories effectivement transposées, c'est-à-dire celles qui ont pu servir de référence « officiellement ».

De ce point de vue, le premier chapitre du livre de Lebesgue, « La mesure des grandeurs », paru en 1931, semble avoir très largement inspiré les modifications du programme de 1945 concernant le rabattement des décimaux sur les entiers et les fractions vues comme opérateurs.

2 Plus précisément, le domaine « mesures » de 1970 est constitué par ce qui relevait du continu dans l'« ancienne arithmétique » et des grandeurs géométriques (aire et volume) de l'« ancienne géométrie ».

Il est connu que depuis 1970, le numérique est le savoir savant de référence [3]. Pourtant, dans les programmes, depuis 1980, on prescrit l'étude des fractions par la mesure des grandeurs et, en 2002, des discours justificatifs sur la proportionnalité qui impliquent des opérations sur les grandeurs. Ces éléments sont officiellement réintroduits pour satisfaire les besoins de l'organisation didactique, à savoir la construction des savoirs par les élèves. Ils s'inscrivent mal dans le numérique où il n'y a pas de grandeurs.

Je cherche alors à rapprocher d'une théorie mathématique ces tâches et discours explicatifs impliquant des grandeurs. J'utilise un savoir savant de 2nd ordre, la théorie des grandeurs développée par Rouche (1992, 1994) au début des années 1990. Les tâches et discours réintroduits s'inscrivent bien dans cette théorie. Ceci me permet de rapprocher les différentes composantes des praxéologies enseignées : tâches, techniques, technologies et la théorie. Ceci constitue, pour moi, une deuxième méthode pour caractériser une théorie sous-jacente dans les programmes.

Corrélativement, je repère aussi des manques dans les programmes par rapport à la théorie : c'est-à-dire des tâches qui n'apparaissent pas dans le programme mais qui correspondent à des axiomes nécessaires à l'élaboration de la théorie. Et je me demande si ces tâches ne seraient pas nécessaires à l'apprentissage.

Quelle théorie de référence choisir pour l'enseignement actuel des grandeurs, nombres et opérations ?

Enfin, fondamentalement, je cherche à identifier ce que pourrait être une bonne théorie des grandeurs pour l'école primaire. Ce travail n'est pas achevé. Il ne s'agit d'ailleurs pas forcément d'identifier une théorie, mais éventuellement plusieurs qui se complèteraient.

Je cherche donc une (ou des) théories qui permette de « coiffer »[4] les besoins mathématiques et didactiques relatifs aux grandeurs, nombres et opérations : c'est-à-dire, recouvrant notamment les tâches, techniques, technologies prescrites par les programmes ou l'ayant été, et qui pourrait aussi permettre de satisfaire les besoins pour le début du secondaire. L'étude de théories existantes permet de comparer les présupposés des théories et les objets qu'elles permettent de construire. En confrontant cela aux besoins pour l'enseignement, on peut envisager des choix concernant ce qui serait possible ou souhaitable d'enseigner et les théories qui accompagnent ces choix, théories qui sont susceptibles de faire apparaître d'autres tâches.

---

3 Parce que Lebesgue (1931) semble reléguer les grandeurs au domaine de la « métaphysique », on a parfois interprété l'exclusion des grandeurs en 1970 comme une sorte d'exécution posthume de sa volonté. Cette hypothèse nous semble à exclure pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le premier chapitre de « La mesure des grandeurs » est une construction des réels qui s'appuie sur la mesure des segments géométriques et Lebesgue le revendique. Il ne s'agit donc en aucun cas d'exclure le continu ou la géométrie pour construire les nombres. Ensuite, il nous semble nécessaire de recontextualiser les éléments relatifs à la métaphysique. C'est probablement certaines constructions d'objets par classe d'équivalence qu e rejète Lebesgue, il semble en effet qu'on puisse voir là une conséquence très directe de la crise des fondements. Enfin, c'est Lebesgue qui écrit « toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objet : 5 sacs de 300 pommes ; 2 m. 75 d'étoffe à 28 fr. 45 le mètre ». Plus que le programme de 1970, il nous semble donc probable que le programme de 1945 constitue une transposition du 1er chapitre livre de Lebesgue (mort en 1941). Ceci n'empêche pas que, dans la préparation de la réforme, la noosphère a probablement retravaillé la construction des réels du chapitre 1 (qui valorise les développements décimaux) pour en faire une construction des réels qui ne s'appuie pas sur la mesure des grandeurs. Par suite, il est bien possible que Lebesgue a servi de caution « morale » à l'éviction des grandeurs, à son corps défendant.

4 Je reprends l'expression de Neyret.

Chaînes trophiques avant la réforme et questionnaire destiné aux élèves

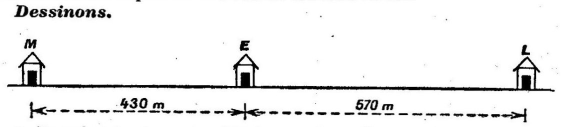
Relations entre grandeurs et opérations

Pour montrer les relations entre grandeurs et opérations, je vais me limiter à l'exemple de la longueur car il en général plus développé que les masses ou les capacités dans les manuels mais aussi parce que c'est probablement une grandeur fondamentale pour l'étude des nombres en général, même pour la sphère mathématique savante.

Je présente un peu en détail la question des schémas cotés. Je prends l'exemple d'un manuel scolaire du CE1.

5. Quittant leur école et marchant en sens contraire, Martin et Louis sont rentrés chez eux, en M et L, après avoir fait l'un 430 m et l'autre 570 m. Quelle distance sépare les maisons de ces deux élèves?

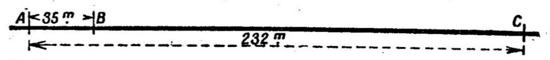
Dessinons.



6. Marcel et Louise ont quitté leur maison. Ils sont allés sur la même route et dans le même sens. Une heure plus tard, Marcel, qui est à pied, est arrivé à 4 km de cette maison, tandis que Louise, à bicyclette, en est à 15 km. A quelle distance sont-ils alors l'un de l'autre?

Dessinons pour bien comprendre.

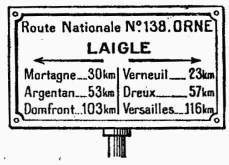
7. Un cycliste et un automobiliste sont partis d'un même lieu pour se rendre à une ville V, distante de 131 km de leur point de départ. Lorsque l'automobiliste arrive à destination, le cycliste a parcouru 36 km. A quelle distance le cycliste est-il alors de l'automobiliste?



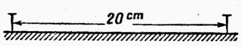
8. Pierre part de A, Jean part de B, distant de A de 35 m. Ils vont dans la même direction et Pierre rattrape Jules en C, à 232 m de A. Quel trajet a parcouru Jean?

9. Louis et Claude, allant dans le même sens, partent de A et de B. Lorsqu'ils se rejoignent en C, Louis a parcouru 96 km et Claude en a parcouru 111. Quelle est la distance de A à B?

10. Calculez la distance de :
a) Argentan à Domfront;
b) Dreux à Versailles;
c) Argentan à Dreux; etc.



11. Quelle sera la distance de ces deux clous si je les déplace : *a*) tous les deux vers la droite de 10 cm; *b*) tous les deux à gauche : A de 10 cm et B de 5 cm; *c*) A à gauche de 8 cm et B à droite de 2 cm; *d*) A à droite de 8 cm et B à gauche de 2 cm?



(Marijon et al., 1947, pp.50-51, CE1, 22e leçon : Problèmes sur l'addition et la soustraction)

La leçon est intitulée « Problèmes sur l'addition et la soustraction ». Avant cette leçon, les élèves ont déjà rencontré des schémas cotés, toujours dans des problèmes d'arithmétique qui portent sur la longueur dans des unités de longueur déjà étudiées. Dans ce manuel, c'est sur cette page que les kilomètres interviennent pour la première fois dans les problèmes d'arithmétique, sans doute est-ce parce que cette leçon suit l'étude du kilomètre.

On voit dans cette leçon une progression pour l'apprentissage des schémas cotés pour résoudre des problèmes de positions relatives sur une ligne. Au début, l'énoncé comporte un dessin ; ensuite, on demande à l'élève de « dessiner », à la fin il n'y a plus d'indication relative au dessin. Les problèmes mettent en jeu diverses difficultés qui impliquent des mesures de longueurs et des positions relatives sur une ligne, notamment des pancartes.

Plus tard dans l'année, dans ce manuel, on retrouve de tels problèmes, avec des difficultés supplémentaires : ils impliquent alors des vitesses. On peut penser qu'on est dans une progression qui permet d'arriver aux « problèmes de trains » du certificat d'étude. Plus tard, également, on trouve des leçons qui mobilisent des schémas cotés pour résoudre des problèmes qui portent sur d'autres grandeurs que la longueur.

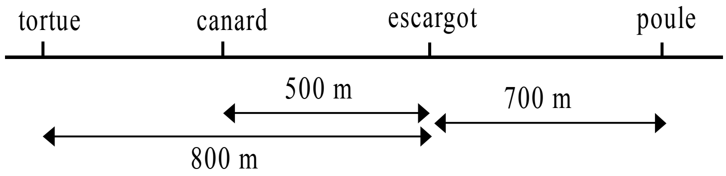
Ainsi, dans le cadre de l'apprentissage de la longueur, on apprend à utiliser des schémas cotés, avant de les utiliser pour résoudre des problèmes relatifs à d'autres grandeurs. Ces apprentissages se réalisent à travers l'étude de certaines pratiques de la vie courante, caractéristiques de la grandeur : problèmes de distances puis de positions relatives sur une ligne pour la longueur ; problèmes de perte et bénéfice pour la monnaie par exemple.

Plus généralement, il me semble qu'on peut dire, que dans les livres anciens, le sens des opé - rations se construit notamment dans l'étude des différentes grandeurs et que l'étude d'une grandeur se construit notamment dans l'étude des opérations où on la rencontre [5].

J'ai proposé à des élèves de CM2 des exercices relatifs à la question des schémas cotés. Je retrouve des erreurs connues sur la lecture des schémas mais je pense que j'arrive à mieux les caractériser. J'ai retenu deux de ces exercices. Je précise que les élèves n'avaient pas accès à la règle graduée lorsqu'ils les ont traités.

Voici le premier :

Sur un chemin, il y a quatre animaux : un escargot, une tortue, une poule et un canard.



Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et l'escargot ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre le canard et la poule ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et le canard ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et la poule ?

Les quatre animaux sont représentés sur une ligne droite. Certaines distances sont indiquées à l'aide de flèches cotés. Les proportions sont visiblement fausses sur le dessin. Il y a quatre tâches à effectuer.

Trois de ces tâches sont réussies à plus de 75%. Pour déterminer la distance entre la tortue et l'escargot, il faut lire la distance sur le schéma, 800 (R=85%). Pour la distance entre le canard et la poule, il faut additionner deux longueurs : 500 et 700 (R=75%). Pour la distance entre la tortue et la poule, il faut additionner 800 et 700 (R=75%).

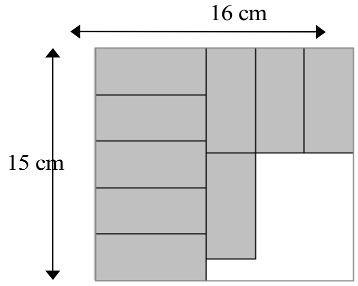
L'autre tâche consiste à déterminer la distance entre la tortue et le canard. Elle mobilise une soustraction : 800-500. Elle est beaucoup moins bien réussie que les autres mais en fait il y a trois réponses majoritaires : 300 (35%), 500 (31%), 400 (20%). Les réponses 400 et 500 sont probablement dues au fait que le canard semble être représenté « au milieu » entre la tortue et l'escargot, 400 est probablement obtenu par le calcul 800:2 et 500 la distance entre la tortue et le canard à la distance entre le canard et l'escargot. Ces deux réponses montrent une interpré - tation du schéma en termes de proportionnalité, plus ou moins grossière.

Pour cette dernière question, j'observe, par ailleurs, qu'environ 5% des élèves rayent une pre - mière réponse : 400 ou 500 puis donnent la bonne réponse 300. Ceci est probablement le signe d'un renoncement à la proportionnalité et la manifestation d'un conflit entre la valeur 800 qui se lie sur le dessin et ce qui s'obtient par un calcul additif très simple impliquant les proportions du dessin (400+500 ou 500+500).

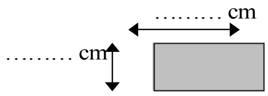
5 Tous les manuels ne présentent pas une progression aussi structurée que (Marijon, CE1) sur les schémas cotés mais dans tous ceux que j'ai consultés, j'ai observé les éléments que je signale en conclusion.

Voici maintenant un autre exercice qui implique des schémas. Il est directement inspiré des évaluations d'entrée en 6ème. J'ai modifié un peu les valeurs numériques.

Sophie veut découper des étiquettes rectangulaires toutes identiques dans une plaque de carton rectangulaire de dimensions 16 cm et 15 cm. Elle en a tracé neuf comme tu peux le voir sur le dessin.



Calcule les dimensions d'une étiquette et indique-les sur le dessin ci-dessous.



Une erreur prégnante consiste à donner, malgré l'absence de règle graduée, les dimensions du dessin (les élèves répondent alors 1cm et 2cm ou 1cm et 3cm). Environ 10% des élèves fournissent une telle réponse. Toutefois, cette erreur est très minorée par rapport à ce qu'on observe dans les évaluations d'entrée en 6ème où la moitié des élèves mesurent avec la règle. Parallèlement, on observe une réussite beaucoup plus forte dans la thèse qu'aux évaluations nationales : dans la thèse 40% des élèves réussissent contre 13% aux évaluations nationales. J'attribue ce progrès à la suppression de la règle graduée. Cette suppression semble provoquer un changement de contrat didactique qui autorise les élèves à chercher autre chose que la simple mesure avec la règle.

Pour résumer, je retrouve deux types d'erreurs connues sur l'apprentissage des schémas cotés : celle où les élèves considèrent que les dimensions de la réalité sont celles du schéma, une autre où ils utilisent avec raison les dimensions cotées mais à tort les proportions du schéma. Je pense que je mets en évidence des conditions pour les faire apparaître et peut-être disparaître : la suppression de la règle graduée pour modifier le contrat didactique, des proportions fausses et des calculs simples pour favoriser la compréhension des schémas en créant un conflit cognitif. Ces éléments offrent des perspectives pour des ingénieries didactiques.

Pour conclure sur cette question des schémas cotés, je ne pense pas que les difficultés cognitives des élèves d'hier étaient différentes de celles des élèves d'aujourd'hui mais la densité des réseaux trophiques apparaît comme un moyen, utilisé hier, pour les prendre en charge. Ce moyen n'est probablement plus utilisé aujourd'hui. J'ignore évidemment son degré d'efficacité.

Relations entre opérations et nombres

Après les relations entre grandeurs et opérations, je prends le cas de la division pour les relations entre opérations et nombres. Dans les livres à partir des années 30, le symbolisme des deux points pour la division est introduit assez tôt, dans la leçon « division », toujours après la multiplication. On étudie ensuite en parallèle des techniques de calcul et des problèmes de division.

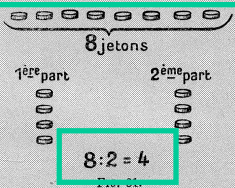
Pour illustrer cela, je prends l'exemple de trois leçons d'un même manuel scolaire du cours élémentaire (Boucheny et al., 1930, CE), publié pour la première fois au début des années 30.

15e LEÇON

DIVISION

75. 1er cas. — *Valeur d'une part.*

OPÉRATION CONCRÈTE. — **Jeanne partage également 8 jetons entre 2 enfants. Combien en donne-t-elle à chacun d'eux ?**



Pour faire ce partage, Jeanne peut donner d'abord un jeton à chaque enfant. Elle aura ainsi distribué 2 jetons.

Elle donnera de nouveau un jeton à chaque enfant; elle aura alors distribué 2 fois 2 jetons ou 4 jetons.

Elle pourra faire 4 distributions semblables (fig. 31).

Chaque enfant aura donc 4 jetons.

76. Jeanne a fait le partage des jetons par **soustractions** successives, en retirant 2 jetons de son tas de jetons autant de fois qu'elle a pu le faire.

Elle peut faire ce partage plus rapidement en s'appuyant sur la table de multiplication.

Elle dira : En 8, combien de fois 2 ? 4 fois, car $2 \times 4 = 8$.

Elle écrira : $8 : 2 = 4$; ou bien $\frac{8}{2} = 4$. Cette opération est une **division.**

77. Pour partager un nombre en parties égales, on fait une division,

$$8 \,\big|\, \underline{2} \\ 4$$

le nombre 8, que l'on partage, est le **dividende;**
le nombre 2, qui indique le nombre de parts, est le **diviseur;**
le nombre 4, qui indique la valeur de chaque part, est le **quotient.**

Le signe de la division est : que l'on énonce **divisé par.**

Dans la pratique, on dispose l'opération comme ci-contre.

78. 2e cas. — ***Nombre de parts.***

Jeanne a 8 jetons qu'elle veut mettre par piles de 2. Combien peut-elle former de piles?

CALCUL MENTAL

Multiplier et diviser par 3.

1. *Apprendre par cœur la table suivante (fig. 41) :*

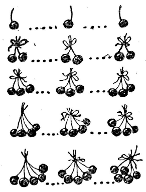


FIG. 41.

3	fois 1	font	3	3	fois 6	font	18
3	» 2	»	6	3	» 7	»	21
3	» 3	»	9	3	» 8	»	24
3	» 4	»	12	3	» 9	»	27
3	» 5	»	15	3	» 10	»	30

2. Multiplier un nombre par 3, c'est le tripler.

Quel est le triple de 4? de 7? de 8?

3. Diviser un nombre par 3, c'est en prendre le tiers.

Quel est le tiers de 6? de 12? de 24? de 15? de 30?

4. *Combien a-t-on de cerises si l'on en a :*
2 groupes de 3? 3 groupes de 2? 3 groupes de 3?
3 paniers de 20? de 30? de 200? de 300?

5. *Un jardinier met des navets par bottes de 3. Combien fera-t-il de bottes avec 9 navets? avec 18? avec 12? avec 24? avec 15? avec 30? avec 21? avec 27?*

17e LEÇON

CENTAINES

80. ***Le nombre cent.*** — Prenons 99 jetons :

99 jetons correspondent à 9 piles de dix jetons et 9 jetons.

Ajoutons 1 jeton; nous avons **cent** jetons ou une **centaine** de jetons (fig. 32).

Avec cent jetons, nous pouvons former dix piles de dix jetons.

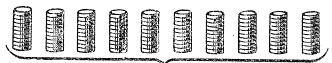


FIG. 32.

Une centaine vaut dix dizaines ou cent unités.

Le nombre cent s'écrit 100. Le chiffre 1 qui représente une centaine s'écrit au 3e rang à partir de la droite.

81. ***Centaines.*** — Constituons des sacs de jetons contenant chacun cent jetons.

Prenons 2 sacs (fig. 33); nous avons 2 centaines de jetons, ou **deux cents,** que l'on écrit 200.

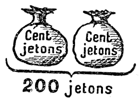


FIG. 33.

Prenons successivement 3, 4, ... 9 sacs de cent jetons; nous obtenons ainsi :

trois centaines ou **trois cents,** que l'on écrit		300,
quatre centaines ou **quatre cents,**	»	400,
.....		
neuf centaines ou **neuf cents,**	»	900.

On compte par centaines comme on compte par dizaines et par unités.

82. ***Opérations sur les centaines.*** — Réunissons 2 sacs et 3 sacs de cent jetons. Nous avons en tout :

2 centaines + 3 centaines = 5 centaines de jetons,
ou 200 + 300 = 500.

On a de même :

5 centaines — 3 centaines = 2 centaines ou 500 — 300 = 200.
3 centaines × 2 = 6 centaines ou 300 × 2 = 600.
8 centaines : 2 = 4 centaines ou 800 : 2 = 400.

(Boucheny et al., 1930, CE, extraits des 15e, 17e et 19e leçons intitulées respectivement : Division, Centaines et Entre deux centaines consécutives[6] pour le « calcul mental »)

Une première technique de calcul de division est ainsi constituée par l'apprentissage des tables de multiplication, qu'on apprend, souvent mais pas toujours, simultanément pour multiplier et diviser. Une autre technique est reliée à la numération. Pour diviser 800 par 2, on divise 8 centaines par 2 et donc 8 par 2, ce qui permet d'ailleurs de consolider les tables de multiplication. D'autres techniques sont encore institutionnalisées lors de l'élaboration de l'algorithme : avec les divisions, par exemple par 10 puis par les nombres d'un chiffre suivi de zéros.

6 On remarque que la « leçon 19 » est déconnectée du calcul mental. Dans ce manuel, l'apprentissage des différentes tables (d'addition et de multiplication) apparaît dans la rubrique « calcul mental » dans les leçons successives pendant plusieurs mois, plus ou moins indépendamment du thème de la leçon.

L'extrait suivant tiré d'un manuel faisant partie d'une collection dirigée par le mathématicien Albert Châtelet publiée au début des années 30 et qui a probablement eu un écho assez grand à l'époque montre non seulement l'exemple de la division par les nombres d'un chiffre suivi de zéros mais illustre aussi la mise en relation de trois composantes d'une praxéologie relative à cette technique.

DIVISION PAR PLUSIEURS DIZAINES

VITESSE MOYENNE. — Problème. — *Une voiture automobile parcourt, sur une piste,* **72 km.** *en* **50 minutes.** *Combien a-t-elle parcouru,* **en moyenne**, *par minute ?*

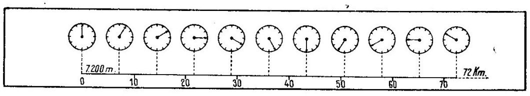
On calcule comme si l'automobile parcourait la même longueur chaque minute.

50 mn., c'est 10 fois 5 mn. En divisant la longueur par 10, on obtient l'espace parcouru en 5 mn. :

72.000 m. : 10 = 7.200 m. ; reste 0.

En divisant ce premier quotient par 5 on obtient l'espace parcouru en 1 mn. :

7.200 m. : 5 = **1.440 m. par mn. ;** *reste* **0.**



Solution. — L'automobile parcourt en moyenne :

72.000 m. : 50. = **1.440 m. par mn.,** *reste* **0.**

AVRIL-MAI 179

RÈGLE ET DISPOSITION PRATIQUE.

```
72.00|0 | 5|0          22.8|3 | 7|0
22        1440          18      32
 20                      43
  00
   00
```

On sépare un zéro à droite du diviseur et un chiffre à droite du dividende. On fait ensuite la division du nouveau dividende par le nouveau diviseur qui n'a qu'un chiffre. A la droite du reste, on place le chiffre séparé du dividende.

Exemples : 72.000 à diviser par 50 ; on divise 7.200 par 5, quotient **1.440**, reste 0 ; reste définitif **0.**

2.283 à diviser par 70. On divise 228 par 7, quotient **32,** reste 4 ; reste définitif **43.**

PROBLÈMES

1046. *Calculer mentalement les divisions :*

210 : 30 200 : 50 630 : 70 180 : 20.

(Châtelet, 1932[7], pp.178-179, CE, extrait de la 72e leçon : Division par plusieurs centaines)

Sur cet exemple, caractéristique de ce que j'ai trouvé dans les manuels à partir des années 30, on a une tâche :

> Une voiture automobile parcourt, sur une piste, 72 km en 50 minutes. Combien a-t-elle parcouru, en moyenne, par minute ?

On a ensuite une technique justifiée par une technologie :

> On calcule comme si l'automobile parcourait la même longueur chaque minute. 50 minutes, c'est 10 fois 5 minutes. En divisant la longueur par 10, on obtient l'espace parcouru en 5 min : 72000 m : 10 = 7200 m ; reste 0. En divisant ce premier quotient par 5 on obtient l'espace parcouru en 1 minute : 7200m : 5 = 1440 m par minute ; reste 0.

On a enfin une règle et la disposition pratique dans la potence :

> On sépare un zéro à droite du diviseur et un chiffre à droite du dividende. On fait ensuite la division du nouveau dividende par le nouveau diviseur qui n'a qu'un chiffre. À la droite du reste, on place le chiffre séparé du dividende. [8]

Dans les livres anciens, les différentes techniques de calcul de division constituent donc à la fois des étapes dans l'apprentissage de la technique opératoire définitive mais aussi des méthodes de calcul définitives lorsque les nombres sont du type donné : pour calculer 12 : 3 on utilisera toujours les tables et pour diviser par 30 on divisera toujours par 10 puis par 3.

Dans le curriculum actuel, l'accent est mis sur le sens du problème qu'on ne distingue pas toujours du sens de l'opération. Dans mon questionnaire, j'observe qu'un même élève peut d'une part connaître la division, c'est-à-dire qu'il est capable de l'utiliser pour résoudre un problème de division et utiliser une multiplication à trou pour en résoudre un autre. Dans les deux cas, l'élève identifie le sens du problème mais il n'identifie le sens de la division que dans le premier cas. Ceci m'amène à formuler la nécessité, pour l'enseignement actuel, de distinguer entre sens du problème et sens de l'opération. Toutefois, cette distinction ne peut probablement se faire qu'en introduisant de façon plus précoce un symbolisme pour la division :

7 Si ce manuel est pour le « cours élémentaire », il comporte une suggestion pour son utilisation qui consiste à étudier les leçons d'octobre à janvier au CE1, celles de février à juin au CE2.

8 On remarque que dans l'exemple de la division par 50, on étend la règle, sans commentaire, au cas du reste non nul qui est plus délicat à justifier.

le mot division et un signe spécifique pour l'opération. Ceci doit permettre de commencer à apprendre le sens de l'opération et d'institutionnaliser des techniques de calcul, avant de disposer de la technique classique complète.

Écologie du système métrique et de la numération

Dans l'étude des programmes, j'ai déjà indiqué qu'en 1923, on prescrit une articulation entre système métrique et numération qui n'apparaissait pas avant. Je cherche à comprendre comment cela se manifeste dans ce qui est enseigné aux élèves.

À partir des années 30, l'étude du système métrique se greffe sur celle de la numération. Pour présenter cette greffe, j'évoque seulement une tâche, tout à fait banale. Elle n'est pas présente au début du 20$^{\text{ème}}$ siècle, elle apparaît dans les années 30. Il s'agit de « trouver des objets plus ou moins lourds qu'un kilogramme et vérifier ».

J'ai reconstitué les chaînes ou plutôt le réseau trophique dans lequel elle se trouve. En fait je vais montrer que cette tâche est utile dans quatre domaines de savoirs, c'est-à-dire quatre habitats. Cette tâche peut d'abord être interprétée comme une tâche de comparaison de grandeurs, de la masse en l'occurrence. Elle contribue ainsi à la connaissance de la grandeur masse. Le fait qu'on compare à « un kilogramme », et non deux objets entre eux, permet de l'inscrire dans la connaissance du système métrique : on apprend ainsi ce qu'est « un kilogramme ». Le fait qu'on vérifie, probablement en utilisant une balance et une masse marquée, permet de l'inscrire dans une connaissance des pratiques de la vie courante : utiliser une balance (ici en l'occurrence, connaître le déséquilibre) et connaître (reconnaître) la masse marquée du kilogramme. Enfin, cette tâche ne se situe pas n'importe où dans les manuels antérieurs à la réforme : elle apparaît juste après l'étude du millier. Le kilogramme est ainsi vu comme le millier de grammes, on a ainsi une « idée de mille », mille grammes alors qu'on avait donné avant, avec l'étude du gramme, une idée de « un », avec celle du décagramme, une idée de « dix », enfin avec l'étude de l'hectogramme, une idée de « cent ». Les grandeurs et leur mesure apparaissent ainsi comme un matériel de numération.

Je cherche maintenant des liens dans les connaissances des élèves actuels : au sein de la numération, au sein du système métrique, dans les relations entre les deux. Je reprends les résultats de Parouty. Elle demande à des élèves de CE2 de trouver le nombre de paquets de 100 carrelages qu'il faut acheter pour avoir 8564 carrelages. Elle observe 10% de réussite. On est au CE2, c'est-à-dire l'année pendant laquelle ce type de problème devrait être travaillé. Elle relève une progression au CM2 car les élèves posent la division (ils ont appris à le faire). Elle montre ensuite que, quand on apprend aux élèves à résoudre ce genre de problèmes, ils progressent, globalement, dans toute la numération. C'est pour moi le signe de liens qui se font avec l'ingénierie mais qui ne sont pas généralisés actuellement.

Dans le questionnaire, j'ai notamment proposé aux élèves des exercices de « conversions ». « Compléter 8kg=… hg » (R=71%). C'est une conversion « hors contexte », formelle. J'ai aussi proposé : « Combien de paquets de 100 g de farine peut-on remplir avec 4 kg de farine ? » (R=32%). Le nombre de paquets de 100 g dans 4 kg peut être interprété comme une conversion d'hectogrammes en kilogrammes. Cet exercice était dans l'enseignement ancien un exercice de conversion, étudié avec le kilogramme, après le nombre mille.

Pour identifier les liens que font les élèves entre les exercices, j'ai réalisé une analyse factorielle des réussites. J'observe notamment que les réussites aux deux exercices en contexte et hors contexte sont statistiquement indépendantes. J'en déduis que les élèves ne voient pas qu'une conversion qu'ils savent faire, formellement, peut leur être utile pour résoudre un problème, en contexte.

Évolution des organisations mathématiques sur la numération au 20e siècle

Pour mieux comprendre les résultats des élèves actuels quant aux liens entre numération et système métrique et aux liens internes à chaque domaine. J'ai effectué une étude rapide de manuels récents. Cette étude me laisse penser que numération et système métrique sont désarticulés de plusieurs points de vue, notamment celui des tâches. Par exemple, entre les deux domaines, les décompositions ne se ressemblent pas (324 = 300 + 20 + 4 et 324 m = 3 hm 2 dam 4 m) ; les conversions existent en système métrique mais pas en numération. En fait, l'enseignement de la numération a apparemment beaucoup plus bougé que l'enseignement du système métrique par rapport à la situation antérieure à la réforme. Par ailleurs, dans les manuels actuels du CE1 et du CE2, on n'indique pas de façon systématique que 10 dizaines = 1 centaine.

Ces éléments vont être le moteur de la dernière partie de ma thèse (chapitre 6) sur l'évolution des organisations mathématiques sur la numération au 20e siècle.

Une certaine permanence dans les tâches

Fondamentalement, la numération de position est un objet pérenne de l'enseignement primaire. Ceci se manifeste par la permanence d'un certain nombre de tâches emblématiques et « immuables » qu'on retrouve tout au long du 20ème siècle. Si ces tâches n'ont pas fondamentalement changé pendant un siècle, les types de tâches qui se développent autour de ces tâches sont en revanche beaucoup moins stables. On observe notamment des réorganisations dans les agencements des différentes tâches entre elles qui modifient les types de tâches plutôt que les tâches de référence. En outre, la réforme qui est l'occasion d'un bouleversement général de l'étude de la numération de position minore le rôle de certaines tâches et en fait apparaître d'autres.

J'ai ainsi identifié sept tâches de référence pour la numération de position des entiers au cours élémentaire. Ces tâches sont déclinées de multiples façons, éventuellement variables selon les époques. Mêmes si elles se nourrissent plus ou moins les unes les autres, les cinq premières sont relativement distinctes et constituent des pratiques sociales de référence. Elles sont « utiles » pour la vie courante.

« Dénombrer une grande collection » : avant la réforme cette tâche est décrite sans être explicitement prescrite pour le discret mais le mesurage, présent avec l'étude des unités métriques, relève de cette tâche pour le continu ; au moment de la réforme elle est le plus souvent prescrite « en bases » dans le discret. Le dénombrement à partir d'une collection partiellement groupée en unités, dizaines, etc. fait partie de ces tâches ; de même la détermination du cardinal d'une collection évoquée, partiellement groupée, comme « 3 paquets de 100, 7 paquets de 1000 ». « Lire un nombre écrit en chiffres », « Compter de 1 en 1, de 10 en 10… en montant, en descendant » sont des tâches permanentes. « Combien de paquets de 100 dans 8643 ? » correspond à une propriété de la numération de position (la troncature), je parlerai du « nombre de ». L'ordre n'est pas explicitement enseigné au début du siècle mais il l'est implicitement, je considère que « comparer des nombres » est une tâche emblématique.

Je repère une tâche technologique, « décomposer, recomposer un nombre en ses unités ». Cette tâche est permanente mais instable. Elle disparaît toutefois plus ou moins pendant le temps de la réforme. Elle ne me semble pas être emblématique dans la mesure où elle ne correspond pas à une pratique de référence. Ceci ne l'empêche pas d'être une tâche essentielle dans l'organisation de la numération de position.

Au moment de la réforme, des changements de base apparaissent. Cette tâche n'est pas prescrite dans le programme de 1970, néanmoins un type de tâches se développe autour d'elle dans les manuels du cours élémentaire. C'est une tâche emblématique de la numération de position : elle ne peut pas ne pas exister dès lors qu'on travaille « en bases ».

Théories et technologies

Les traités (Bezout & Raynaud, 1821), à partir du milieu du 18ème siècle, présentent une théorie de la numération de position formulée dans des termes élémentaires et qui ne fait pas appel à la division euclidienne. Je l'évoquerai sans la présenter complètement. On retrouve dans les manuels du début du 20e siècle et jusqu'aux années 40, un texte du savoir qui reprend presque mot pour mot les éléments de la théorie. On a, à partir de 1945, des variations que je n'ai pas précisément étudiées.

Le texte du savoir est construit à partir d'un ostensif, c'est-à-dire, ici, un moyen de désigner les nombres, banal mais essentiel, que j'ai appelé la numération en unités et de quatre discours explicatifs, des technologies. Deux technologies seront ajoutées, uniquement dans les manuels, et non dans le traité qui ne bouge pas, un peu avant les années 30 pour articuler numération et système métrique. Je n'en présenterai qu'une.

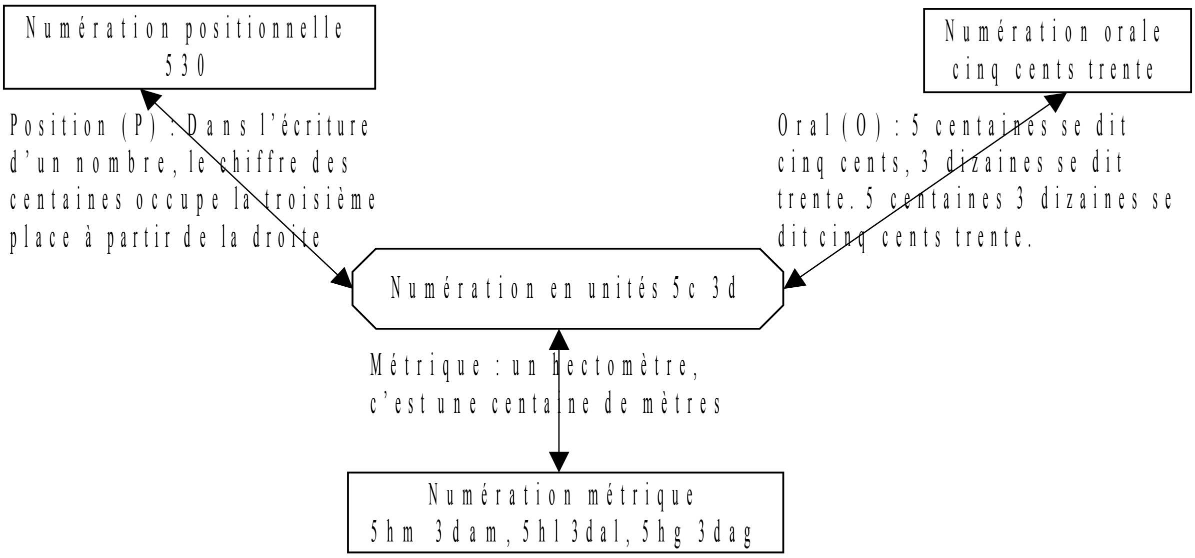
J'appelle donc « unités de la numération » les mots : unités, dizaines, centaines, milliers… La « numération en unités » consiste à utiliser, ces mots, les unités de la numération, pour désigner les nombres : ainsi 580 (cinq huit zéro) c'est 5 centaines 8 dizaines.

Je prends maintenant l'exemple du rang des centaines pour présenter, les quatre technologies autour desquelles se construit la théorie, mais on trouve la même chose aux différents ordres. Outre le fait que les technologies permettent formuler la théorie, elles se déclinent aussi en techniques pour traiter les tâches. J'y reviendrai.

Les deux premiers discours permettent de construire les nombres. Cela se fait en utilisant la numération en unités. Il s'agit :

- du discours de comptage (C) : « On compte par centaines comme on a compté par dizaines et par unités » ;
- du discours de relations entre les unités de la numération (R) : « Une centaine c'est dix dizaines ».

J'en viens aux autres discours que je présente à l'aide d'un graphique. J'ai représenté la numération en unités au centre et les autres systèmes de désignation des nombres (et des grandeurs mesurées) autour. On peut lire ces discours comme une médiation entre la numération en unités et les autres numérations : positionnelle, orale et métrique.



En utilisant le discours de position (P), pour 5c3d, on obtient que 5 est en 3^{ème} position et 3 est en 2^{ème} position. Le nombre 5c 3d s'écrit donc 530 (cinq trois zéro). Le discours pour l'oral (O) consiste en une traduction entre les deux numérations : 5 centaines se dit 5 cents, on a aussi 3 dizaines se dit trente au rang des dizaines. Donc 5 centaines 3 dizaines se dit cinq cents trente.

Vers le moment de la réforme, les unités de la numération sont péjorées et une théorie savante de la numération de position qui utilise la décomposition polynomiale vient concurrencer la théorie classique : $N = r_k a^k + r_{k-1} a^{k-1} + \dots + r_1 a^1 + r_0 a^0$, $N = (r_k r_{k-1} \dots r_1 r_0)_{\text{base } a}$. Cette théorie, savante, prend *peu* en charge les types de tâches « scolaires » classiques. Elle est en revanche nécessaire pour traiter les changements de base qui apparaissent, en primaire, au moment de la réforme.

On observe de façon très nette, au moment de la contre-réforme, un processus de transposition didactique de la théorie savante. Il fait émerger des technologies pour la numération de position se formulant avec des écritures chiffrées des puissances de dix (1, 10, 100… que j'appellerai ECPD). Ces technologies permettent de traiter *plus ou moins* les types de tâches classiques. Elles concurrencent et viennent en grande partie se substituer aux technologies classiques qui disparaissent *plus ou moins*.

Je donne un exemple et j'en profite pour évoquer l'hétérogénéité des manuels actuels. Comment sait-on que le nombre de cubes dans 2 plaques de cent s'écrit 200 (deux zéro zéro) ?

Dans la théorie classique, la technique consiste à enchaîner deux technologies : le comptage, on compte des centaines comme on a compté des unités (1 centaine, 2 centaines) ; puis la position, 2 centaines s'écrit avec un 2 en troisième position (200 - deux zéro zéro).

Souvent, dans les manuels actuels, il est écrit 2×100 ou 100+100 puis 200. Pour obtenir ces éléments, on observe des variations :

- on pose une addition en colonne,
- on fait un tableau de numération et on complète avec des zéros,
- on compte « à l'oral » de cent en cent puis on traduit en écriture positionnelle ou on compte à l'écrit de cent en cent avec l'algorithme de la suite écrite,
- on ne dit rien…

Je cherche maintenant à interpréter les nouvelles technologies en ECPD dans une théorie mathématique. En fait, j'ai substitué dans la théorie classique les ECPD aux unités de la numération. C'est-à-dire que je prends comme objets premiers les signes : 1, 10, 100, 1000… à la place des mots unités, dizaines, centaines, milliers et que j'utilise les opérations d'addition et de multiplication pour relier les signes. Ce faisant, on obtient une « nouvelle » théorie mathématique. Elle peut être considérée comme un savoir savant (de second ordre). Cette substitution laisse néanmoins le choix pour un certain nombre de variations qui peuvent correspondre à autant de théories.

Dans la théorie classique, on compte par centaines comme on compte par unités, c'est un axiome. Dans la théorie en ECPD, ce sont des axiomes qui disent que 200 est le résultat de 2×100 ou de 100+100 (il y a des variations possibles dans le choix de l'opération : multiplication ou addition, dans la formulation de l'axiome qui donne le « résultat »). Je distinguerai dans la suite deux versions de la théorie : la version « multiplicative » qui utilise la multiplication et l'addition, la version « additive » qui utilise seulement l'addition.

Cette nouvelle théorie de la numération formulée en ECPD intègre *grosso modo* l'ensemble technologique créé depuis la contre réforme. *Grosso modo*, les technologies enseignées correspondent aux axiomes de la théorie. Les variations des manuels correspondent souvent à des variations dans les choix des axiomes ou de leur formulation.

Je crois que ces théories ne sont pas publiées (en tout cas, je ne les ai pas trouvées). Selon moi, on peut interpréter les variations dans les manuels comme la manifestation de cette absence.

J'ai dit que les unités de la numération sont péjorées à partir de la réforme. Je vais m'attacher à présenter des conséquences de cette péjoration sur la technologie qui concerne les relations entre unités de la numération (R). Cette relation est essentielle dans l'étude de la numération, j'évoquerai plus tard quelques exemples. Ma question est : comment faire pour exprimer la relation 10 centaines = 1 millier quand on n'a pas les unités de la numération mais les ECPD ?

Dans la théorie classique, avec les unités de la numération, on dit que 10 centaines = 1 millier. J'ai dit qu'on pouvait reconstruire une théorie de la numération en ECPD : la relation 10 centaines = 1 millier se traduit alors diversement. Dans une version « multiplicative » de la théorie, elle se traduit par $10\times100=1\times1000$, cette égalité provient des deux « axiomes » : $10 \times100=1000$ (définition de 1000) et $1\times1000 =1000$ (1 élément neutre). Ce faisant, on a élevé les besoins trophiques puisqu'on a besoin d'une multiplication et de ses propriétés pour exprimer la relation. Dans une version « additive » de la théorie, on a 900+100=1000 (définition de 1000). L'avantage est qu'on abaisse ainsi les besoins trophiques puisqu'on n'a plus de multiplication. L'inconvénient est qu'on a une écriture unique, 1 suivi de 3 zéros, pour désigner deux choses : 1 paquet de 1000 et 10 paquets de 100.

Tâches et types de tâches

La marginalisation des unités de la numération a aussi des effets sur les types de tâches. J'ai dit que les tâches emblématiques étaient stables. En revanche, le type de tâches « conversions » a disparu de l'étude de la numération sans doute parce qu'il ne peut pas exister sans la numération en unités. Il correspond à la technologie (R) de relation entre unités. Il est essentiel pour l'étude de la numération, cela est particulièrement visible dans les technologies, pour justifier la retenue dans les techniques opératoires par exemple.

Avant, il était très structuré (par la progression des manuels qui s'appuie sur la théorie). Avec la leçon « le millier », on explicite la relation 1 millier = 10 centaines et on peut travailler des tâches telles que : « combien faut-il ajouter de centaines à 600 pour faire 1 millier ? ». Dans la leçon « les milliers », on va travailler des relations telles que 30 centaines = 3 milliers. Dans la leçon « entre deux milliers », on pouvoir travailler des relations telles que 35 centaines = 3 milliers 5 centaines ou encore des tâches telles que : combien de paquets de 100 enveloppes faut-il pour avoir 3500 enveloppes ?

Au moment de la réforme, il est doublement affaibli. Outre la péjoration des unités de la numération, il ne se formule pas en base autre que dix. Au moment de la contre-réforme, il survit avec la tâche emblématique : « nombre de ». Par exemple, dans plusieurs manuels de l'époque, il n'apparaît que dans un mot croisé.

problème

Reproduis et complète la grille des « nombres croisés ».

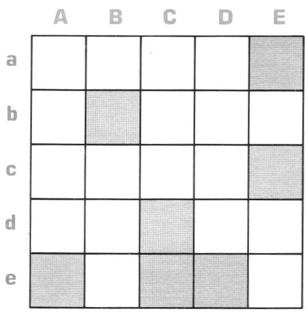
HORIZONTALEMENT

a. Le nombre qui précède 1 100.

b. (100 + 1) × 7.

c. 89 centaines.

d. 9 dizaines. 8 × 12.



VERTICALEMENT

A. Le nombre qui précède 1 090.

B. (60 × 15) + 3.

C. 97 dizaines.

D. Le nombre qui précède 9 010.

E. (9 × 8) − 9.

(Eiller et al., 1987, p.113, CE2, extrait de la leçon : Ordre sur les nombres de 0 à 10000 (2))

On observe, par ailleurs, l'émergence récente d'un type de tâches autour de la tâche « nombre de » : calculer 3 c 21 d par exemple. Ce développement d'un type de tâches autour de la tâche « nombre de » semble plutôt assurer l'existence du « nombre de » que satisfaire les besoins technologiques pour les techniques opératoires par exemple.

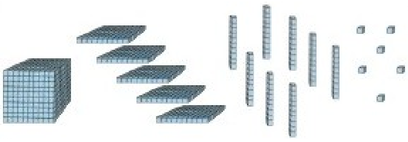
9 Calcule.

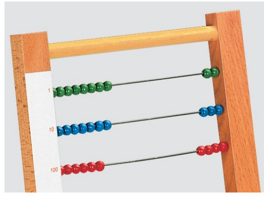
24 dizaines et 3 unités = ...

3 c + 21 d = ...

(Peltier et al., 2003, p.25, CE2, extrait de la leçon : Numération : échanger et calculer (1))

Dans les manuels, à partir de la réforme et après, on voit apparaître de nombreux matériels pour étudier la numération. Bien sûr, ils permettent de « manipuler » ce qui était le credo de la réforme mais on peut aussi les voir comme des substituts au discours technologique, et donc une façon de prendre en charge, dans un registre non symbolique, les besoins trophiques accrus avec les ECPD, notamment l'impossibilité, avec des discours élémentaires d'évoquer la relation entre unités : le multibase pour faire les paquets successifs, pour la retenue ; le compteur (et boulier) notamment pour la suite écrite et l'ordre.



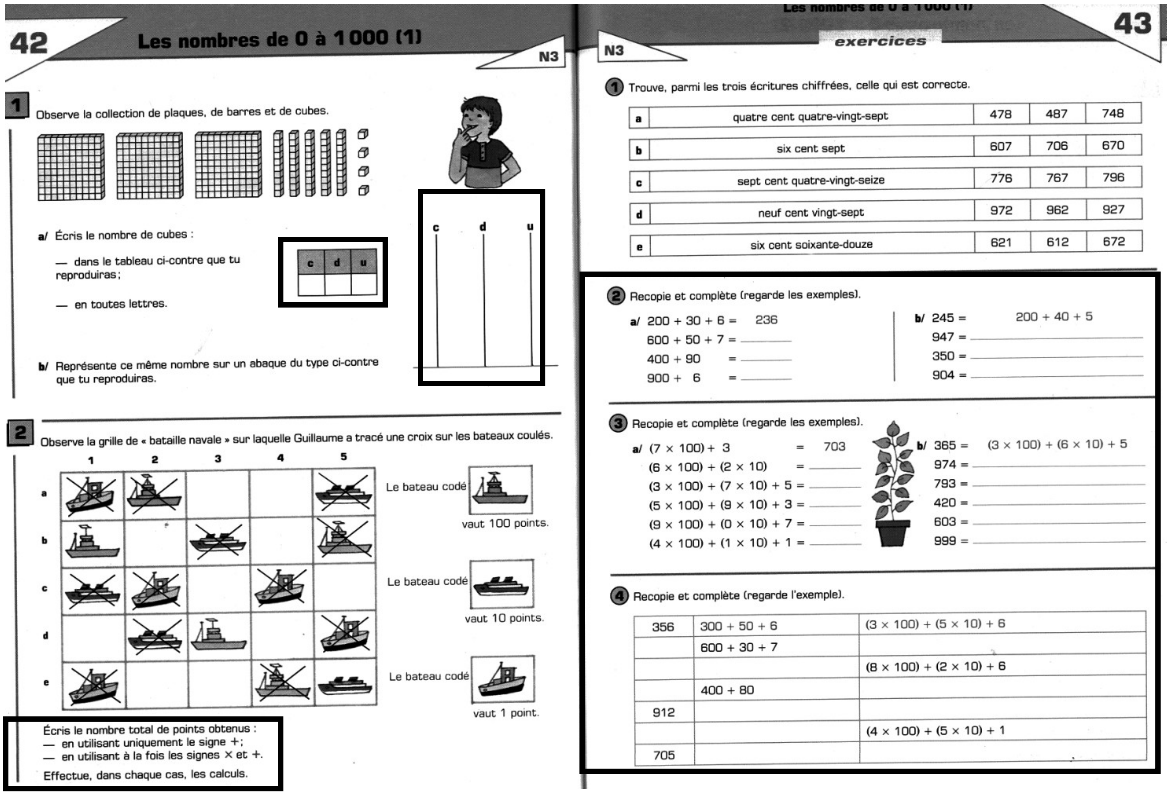


Exemples de matériels qui apparaissent dans les manuels au moment de la réforme.

J'en viens au type de tâches que j'ai qualifié de « technologique ». Autrefois, la tâche « chiffre des » appartient au type de tâches décomposer recomposer. À la question « quel est le chiffre des dizaines de 654 ? », la réponse est « le chiffre des dizaines est 5 ». Lorsqu'il s'agit de « décomposer 654 en ses unités », la réponse est 6 centaines 5 dizaines 4 unités. C'est sensiblement la même technique dans les deux cas, c'est une adaptation de la technologie de position (P) : dans l'écriture d'un nombre, le chiffre des centaines occupe la troisième position.

En fait, les décompositions-recompositions disparaissent quasiment au moment de la réforme : on écrit directement les nombres dans le tableau de numération. J'illustre ce qui semble se passer au moment de la contre-réforme avec le manuel Math et Calcul (Eiller, 1987, CE2) souvent considéré comme emblématique des années 80.

À partir de la contre-réforme, pour recréer un travail dans le registre symbolique, des décompositions-recompositions reviennent mais elles sont prescrites dans les ECPD. La technique pour traiter la somme est souvent implicite, il faut « effectuer les calculs ». Un type de tâches avec des unités de la numération survit dans le tableau. On voit ainsi qu'on ne peut se passer des unités de la numération pour étudier la numération. On peut penser que ce n'est pas la même technique pour les deux types. Le type de tâches s'est fragmenté. D'une praxéologie locale, on passe à deux praxéologies ponctuelles.



42 Les nombres de 0 à 1000 (1) N3

1 Observe la collection de plaques, de barres et de cubes.

a/ Écris le nombre de cubes :
— dans le tableau ci-contre que tu reproduiras ;
— en toutes lettres.

c	d	u

b/ Représente ce même nombre sur un abaque du type ci-contre que tu reproduiras.

2 Observe la grille de « bataille navale » sur laquelle Guillaume a tracé une croix sur les bateaux coulés.

Le bateau codé vaut 100 points.
Le bateau codé vaut 10 points.
Le bateau codé vaut 1 point.

Écris le nombre total de points obtenus :
— en utilisant uniquement le signe + ;
— en utilisant à la fois les signes × et +.
Effectue, dans chaque cas, les calculs.

N3 exercices 43

1 Trouve, parmi les trois écritures chiffrées, celle qui est correcte.

a	quatre cent quatre-vingt-sept	478	487	748
b	six cent sept	607	706	670
c	sept cent quatre-vingt-seize	776	767	796
d	neuf cent vingt-sept	972	962	927
e	six cent soixante-douze	621	612	672

2 Recopie et complète (regarde les exemples).

a/ 200 + 30 + 6 = 236
600 + 50 + 7 = ……
400 + 90 = ……
900 + 6 = ……

b/ 245 = 200 + 40 + 5
947 = ……
350 = ……
904 = ……

3 Recopie et complète (regarde les exemples).

a/ (7 × 100) + 3 = 703
(6 × 100) + (2 × 10) = ……
(3 × 100) + (7 × 10) + 5 = ……
(5 × 100) + (9 × 10) + 3 = ……
(9 × 100) + (0 × 10) + 7 = ……
(4 × 100) + (1 × 10) + 1 = ……

b/ 365 = (3 × 100) + (6 × 10) + 5
974 = ……
793 = ……
420 = ……
603 = ……
999 = ……

4 Recopie et complète (regarde l'exemple).

356	300 + 50 + 6	(3 × 100) + (5 × 10) + 6
	600 + 30 + 7	
		(8 × 100) + (2 × 10) + 6
	400 + 80	
912		
		(4 × 100) + (5 × 10) + 1
705		

(Eiller et al., 1987, pp.42-43, CE2, leçon : les nombres de 0 à 1000 (1))

Depuis peu, des décompositions en unités de la numération reviennent, en complément de celles en ECPD, comme on peut le voir dans un manuel plus récent ci-dessous. La technique pour recomposer 6 c 5 d 4 u en 654 semble être en ce moment : 6 c = 600, 5 d = 50, 4 u = 4 puis 600 + 50 + 4 = 654. En termes technologiques, les unités de la numération apparaissent assujetties aux ECPD.

1 Observe l'exemple, puis décompose les nombres.

648 = 600 + 40 + 8

472 586 908 759 390

2 Décompose les nombres en centaines, dizaines et unités selon l'exemple.

543 c'est 5 centaines 4 dizaines 3 unités

856 450 624 302 718

(Blanc et al., CE2, 2002, p.17, extrait de la leçon : Les nombres jusqu'à 999)

Le type de tâches classique semble être en train de se recomposer mais la technologie a changé, elle repose sur les ECPD. Ceci redonne un peu de légitimité aux unités de la numération mais elles sont assujetties aux ECPD.

Conclusions et perspectives

En reprenant les trois aspects, théories, chaînes trophiques et numération de position, je présente des conclusions et des perspectives de recherche en didactique dont certaines ont une dimension historique ou épistémologique.

À propos des théories, je crois avoir montré à deux reprises comment on peut interpréter les praxéologies aujourd'hui prescrites dans des savoirs savants de second ordre. D'une certaine façon, après le grand bouleversement de la réforme, le savoir qui apparaît dans les documents pour le maître se reconstitue, lentement, en un savoir savant de second ordre, qui n'est pas le savoir savant de référence.

Je n'ai que peu pris en compte la question du formalisme et de la langue naturelle dans la formulation des théories, cette question émerge avec l'étude du rôle des unités de la numération. Il me semble que c'est un point important pour penser des théories pour le primaire.

Sur le plan de l'épistémologie des mathématiques, le début des années 30 correspond à la fin de la crise des fondements. A cette époque, paraissent le livre de Lebesgue, la mesure des grandeurs, et une collection de livres pour l'école primaire dirigée par le mathématicien Châtelet. Que sait-on du rôle de ces mathématiciens dans la conception et la mise en œuvre du programme de 1945 ? On sait qu'un peu plus tard des mathématiciens ont été particulièrement actifs au moment de la réforme pour l'enseignement secondaire. Qu'en est-il pour l'enseignement primaire ? Qui sont les inspirateurs des changements mathématiques ?

Pour ce qui concerne les chaînes trophiques, l'enseignement ancien me paraît être extrêmement dense du point de vue des réseaux trophiques. Et beaucoup des chaînes que j'ai identifiées me semblent être aujourd'hui perdues. Mon travail permet peut-être de mieux comprendre des effets souterrains de la rupture de la réforme.

Que peut-on faire de ces chaînes trophiques que j'ai mises à jour pour l'enseignement d'aujourd'hui ? Et comment le faire ? Quelles pratiques de la vie courante qui impliquent des grandeurs est-il souhaitable d'enseigner ? Par ailleurs, l'enseignement ancien a la réputation d'être peu générateur de prise d'initiative chez les élèves. S'agit-il de trouver un équilibre entre ce qui relève d'institutionnalisations systématiques et de ce qui n'est pas institutionnalisé mais travaillé quand même ou s'agit-il d'autre chose ?

L'étude des chaînes trophiques dans l'enseignement ancien pourrait être affinée sur des thèmes proches : la numération des grands nombres, des nombres de deux chiffres. L'étude des opérations au cours élémentaire mériterait d'être approfondie. Par ailleurs, le livre de Liping Ma (1999) laisse penser que des chaînes trophiques, riches et complexes, existent aujourd'hui dans certains pays, notamment en Chine, et pas dans d'autres, aux États-Unis par exemple. C'est un aspect à développer dans des études internationales.

Enfin, dans les manuels scolaires, les années 30 apparaissent comme un moment particulièrement fécond du point de vue du développement des chaînes trophiques. Pourquoi et comment cela se passe-t-il ?

Je termine par la numération. Dans la thèse, l'étude de la numération n'est pas aboutie, ce texte propose des avancées sur ce point. J'ai montré que la marginalisation de l'ostensif numération en unités et son « remplacement » par les écritures chiffrées des puissances de dix a des conséquences sur toutes les composantes de la praxéologie : des types de tâches à la théorie. D'autre part, l'absence de numération en unités crée un vide dans les tâches prescrites et dans les technologies accessibles aux élèves. J'ai aussi noté une grande hétérogénéité des discours technologiques des manuels. Elle est peut-être imputable à l'absence de théorie explicite, admise comme référence commune.

J'ai fait une étude de manuels dans laquelle j'observe des variations nombreuses pour les quarante dernières années. Dans la mesure où on peut penser que la « première fois » qu'un enseignant investit un thème (c'est souvent au cours sa formation initiale ou dans les années qui la suivent immédiatement) est particulièrement déterminante pour ses pratiques ultérieures, une question qui se pose est alors de savoir ce qui se passe effectivement dans les classes pour l'enseignement de la numération de position. Enfin, à la lumière de ce travail, on peut envisager de repenser des ingénieries d'apprentissage de la numération de position pour des élèves.

Pour finir, la théorie classique de la numération m'apparaît remarquable du point de vue de la simplicité de sa formulation et de son efficacité pour traiter les tâches. Elle est déjà présente au 18ème siècle, quand et comment s'est-elle élaborée ?

Bibliographie

Artaud M. ; 1997 ; Introduction à l'approche écologique du didactique - l'écologie des organisations mathématiques et didactiques ; *Actes de la 9ème école d'été de didactique des mathématiques ;* 100-139

Bezout, Reynaud ; 1821 *; Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout ; avec des notes et des tables de logarithmes, par A. A. L. Reynaud.* 9e édition. consulté sur Internet le 21 décembre 2007, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table

Bronner A. ; 2008 ; La question du numérique dans l'enseignement du secondaire ; *Actes de la 13e école d'été de didactique des mathématiques ;* 17-45

Chambris C. ; 2008 ; *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* ; Thèse ; Université Paris-Diderot (Paris 7)

Chevallard Y. ; 1992 ; Une réforme inaccomplie ; *La gazette des mathématiciens ;* 54 ; 17-21

Chevallard Y. ; 2007 ; Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique ; *Actes du 1er congrès international sur la Théorie Anthropologique du Didactique, Baeza. ;* consulté sur Internet le 26 juin 2009, http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf

Cirade G. ; 2006 ; *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel ;* Thèse de Doctorat ; Université d'Aix-Marseille I.

Lebesgue H. ; 1931 ; *La mesure des grandeurs.* Rééd. (1975) Paris : Albert Blanchard

Ma Liping ; 1999 ; *Knowing and teaching elementary mathematics ;* Lawrence Erlbaum associates, publishers. Mahwah, New Jersey. London

Neyret R. ; 1995 ; *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres ;* Thèse ; Université Joseph Fourier Grenoble

Parouty V. ; 2005 ; Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres*. Commission Inter-IREM COPIRELEM ; IREM de Toulouse, Toulouse

Rouche N. ; 1992 ; *Le sens de la mesure.* Bruxelles : Didier Hatier

Rouche N. ; 1994 ; Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique *Repères-IREM* 15 25–36

Références des manuels scolaires

Blanc J.-P., Bramand P., Debû P., Gély J., Peynichou D., Vargas A. (2002) *Pour comprendre les mathématiques CE2.* Paris : Hachette éducation

Boucheny G., Guérinet A. (1930) *L'arithmétique au cours élémentaire (1re et 2e année).* Paris : Librairie Larousse

Châtelet A., Condevaux G. Blanquet L. (1932) *Arithmétique. Cours élémentaire (1re et 2e année).* Paris : Bourrelier-Chimènes

Eiller R., Brini R., Martineu M., Ravenel R., Ravenel S. (1987) *Math et calcul CE2.* Paris : Classiques Hachette

Marijon A., Masseron R., Delaunay E. (1947) *Cours d'arithmétique. Le calcul à l'école primaire. Cours élémentaire.* Coulommiers-Paris : Brodard et Taupin

Peltier M.-L., Vergnes D., Clavié C. (2003) *Euro Maths CE2.* Paris : Hatier

Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes

Denise GRENIER,

Équipe *Combinatoire et Didactique* de l'Institut Fourier,

ERTé « Maths-à-modeler » et I.R.E.M.

Université Joseph Fourier, Grenoble

Résumé

Ce texte est une présentation partielle de travaux réalisés dans l'ERTé « Maths-à-modeler », accessibles dans des articles publiés, tels Grenier & Payan (1998, 2003, 2006), Grenier (2006, 2008), Grenier &Tanguay (2008), et dans les thèses que j'ai co-encadrées de Julien Rolland (1999), Cécile Ouvrier-Buffet (2003), Virginie Deloustal-Jorrand (2004), Karine Godot (2005), Léa Cartier (2008) et Michèle Gandit (2008).

Nous proposons au débat la question suivante : quelle place pour une activité scientifique dans les classes de mathématiques, permettant de développer chez les élèves des capacités à expérimenter, argumenter, conjecturer, modéliser, définir, prouver ? Et comment enseigner ces savoir-faire ? L'ERTé maths-à-modeler construit, expérimente et analyse depuis de nombreuses années des « Situations de Recherche pour la Classe » (SiRC). Nous montrerons quelques exemples de situations construites sur le modèle SiRC, pour lesquelles nous disposons d'analyses a priori fiables, de propositions pour la formation d'enseignants et d'éléments pour leur gestion. Enfin, nous développerons des arguments didactiques pour défendre leur intérêt et leur viabilité en classe à côté des activités classiques d'enseignement.

Mots clefs

Situation de recherche, démarche scientifique, expérimentation, modélisation, preuve

I Constats, hypothèses et objectifs

L'activité d'un chercheur, c'est, pour une grande part, choisir une question, expérimenter, étudier de cas particuliers, choisir un cadre de résolution, modéliser, énoncer de conjectures, prouver, définir, changer éventuellement la question initiale ... Les *savoir-faire* associés, que nous qualifierons de *transversaux* (pour les distinguer des savoirs notionels), sont constitutifs de la démarche scientifique, ils sont nécessaires pour faire des mathématiques et ne peuvent être réduits à des techniques ou à des méthodes. Ils ne peuvent non plus être contraints par le temps (aucun chercheur n'est capable de dire comment et quand il aura résolu le problème sur lequel il travaille).

Il est largement admis dans notre communauté que l'enseignement en France ne prend pas réellement en charge ces savoir-faire. Depuis de nombreuses années, en tant qu'enseignante et didacticienne, j'ai pu vérifier que la plupart des étudiants en sciences (L1, L2, master2 de didactique) et beaucoup d'étudiants en mathématiques (L3, PLC, master1) ne possèdent pas ces savoirs et savoir-faire de base. *Leur rapport aux mathématiques est très éloigné de celui du chercheur,* comme l'atteste des expressions fréquentes à tous les niveaux d'étude, face à un problème qui leur semble « ouvert », telles celles-ci :

> Je ne sais pas résoudre ce problème, je l'ai jamais rencontré
> Je ne sais pas faire, je ne connais pas la technique
> Le problème est mal posé, on n'a pas toutes les hypothèses
> A quel chapitre il se rattache, ce problème ?

Les attitudes correspondantes vont de l'incapacité à initier la résolution ou à tenter de se faire une idée du problème (par exemple, en expérimentant, ou en étudiant des cas particuliers), jusqu'au refus de s'investir dans le problème (« si je n'y arrive pas en 5 minutes, je n'y arriverais jamais » déclare un enseignant de mathématique !).

On peut donner une explication plausible à ces affirmations et attitudes, qui interpelle le contrat didactique usuel dans tout l'enseignement : la quasi totalité des problèmes que les élèves et étudiants ont à résoudre en classe – et donc que les enseignants font résoudre à leurs élèves - sont rattachés à un chapitre, avec pour objectif essentiel l'application d'un théorème, d'un algorithme ou d'une technique. Et lorsqu'il est demandé de « démontrer que », toutes les hypothèses et seulement celles-ci sont données.

Ces constats nous conduisent à nous interroger sur la capacité des étudiants à résoudre un problème « nouveau », pour lequel on ne dispose pas d'une technique connue et immédiatement disponible et qu'on ne peut « rattacher » à aucun théorème ou cadre théorique connus : autrement dit, sur leur capacité à « faire vraiment des mathématiques ».

Les programmes scolaires en mathématiques à tous les niveaux insistent sur l'importance de l'*expérimentation,* la *découverte* et la *qualité* de l'activité scientifique en classe. Comment cela se traduit-il en classe ? Peut-on vraiment croire que l'élève va jouer naturellement au chercheur, que cette compétence lui est innée ? Et quelles connaissances peut-il construire ainsi ? Cet objectif des programmes est ambitieux, mais il nécessite à notre avis de mettre en place des organisations mathématiques et didactiques spécifiques.

Nos analyses des **manuels scolaires et des pratiques de classe** révèlent qu'en fait, le temps accordé à l'activité de recherche et à la démarche expérimentale y est très réduit ; dans les manuels, les « problèmes pour chercher » sont peu présents et n'occupent jamais une place centrale dans les chapitres (ils sont soit au début - introductifs, mais de quoi ? - soit à la fin, pour approfondir - si on a le temps. De plus, l'activité expérimentale est de plus en plus souvent confondue avec l'utilisation de tableurs, logiciels (de géométrie dynamique ou de calcul formel), ou l'utilisation de l'ordinateur. Cette conception de l'expérimental en mathématique est particulièrement visible au lycée, dans la description de l'épreuve pratique de maths au bac (tentative des deux dernières années) et dans les discours actuels sur la mise en place d'un enseignement d'algorithmique en Seconde.

Les réserves ou les craintes exprimées par les enseignants à propos de l'intégration des « problèmes de recherche » en classe sont de différents ordres. Voici trois causes d'inquiétudes ou de refus qui sont quasi unanimement exprimées[1] :

- Les contraintes institutionnelles : il n'y a pas ni le temps ni la « place » pour laisser les élèves chercher vraiment. C'est bien la question d'une organisation mathématique et didactique spécifique qui se pose ici.
- La conviction que les problèmes de ce type ne sont pas accessibles aux élèves (quel que soit le niveau !), et ce serait donc du temps perdu pour l'apprentissage. Mais cela dépend de quels apprentissages il s'agit. Là, ce sont les conceptions des enseignants sur ce qu'il est prioritaire d'enseigner et sur les capacités des élèves qui sont en question.
- L'absence de formation à la gestion de ces situations. Comment contrôler, valider ou invalider, les stratégies et les conjectures différentes qui vont probablement émerger ? Comment aider l'élève pour faire avancer la résolution ? Quel est le critère de fin de la recherche ? Ici, c'est un changement de position de l'enseignant qu'il faut accepter.

Ces craintes s'appuient de plus sur des pratiques didactiques usuelles très éloignées de celles qui permettraient de faire vivre ces situations en classe, en voici deux exemples remarquables :

- L'interdiction, pour l'élève, de modifier une question, de changer les hypothèses, de choisir le cadre de résolution.
- La donnée, par certains manuels et enseignants, de « règles de contrat» censées aider l'élève à écrire et contrôler sa démonstration, telles que :

  « Pour démontrer, on utilisera **seulement** les données du problème et les propriétés du chapitre »

  « Quand vous faites une démonstration, vérifiez que vous utilisez **toutes** les hypothèses ».

Ces règles du contrat usuel ont bien sûr leur légitimité dans des moments spécifiques, en particulier celui de l'apprentissage ou du travail d'une technique, ou de l'utilisation spécifique d'un théorème. Cependant, elles vont à notre avis à l'encontre de l'apprentissage de la démarche scientifique et de ce qu'est l'activité mathématique.

1. Hypothèses et objectifs de nos travaux

Nous faisons l'hypothèse qu'il est possible d'enseigner ces savoir-faire transversaux, à tous les niveaux, aux moyens de situations fiables qui nécessitent des organisations didactiques appropriées réalisables dans les classes.

Nos travaux dans l'ERTé « maths à modeler », depuis de nombreuses années, nous ont permis de mettre au point – construire, expérimenter, analyser - des « situations de recherche pour la classe »[2] (SiRC) - c'est-à-dire des problèmes et leur mise en scène - susceptibles de remplir ces objectifs, accessibles dans des contextes institutionnels variés et à différents niveaux scolaires.

Ces SiRC s'inspirent des problèmes de la recherche mathématique. Certaines d'entre elles présentent la caractéristique originale de pouvoir être *dévoluées à l'identique, à des niveaux différents de connaissance.*

1 A partir de réponses à des questionnaires soumis systématiquement pendant plusieurs années.

2 Une caractérisation, qui a un peu évoluée, a été donnée au séminaire national de didactique à Paris en octobre 2002.

2. Caractérisation du modèle SiRC

Dans Grenier et Payan (2003), nous donnions une caractérisation du modèle SiRC, pour les situer par rapport aux « situations-problèmes » et « problèmes ouverts » que l'on rencontre dans les travaux de didactique. Nous la reprenons ici en la commentant.

- **Une SiRC est proche d'une question vive de la recherche mathématique**

Cette condition, assez contraignante, a pour but d'éviter que la question ou la réponse semblent évidentes ou familières. L'objectif est de donner une pertinence à l'activité de recherche à tous les niveaux. Cette condition peut être artificiellement recrée par la mise en scène du problème, dans le cas où la question posée est résolue dans le recherche.

- **La question initiale est facile d'accès et pertinente à des niveaux différents**

Notre intention est de rompre avec la pratique didactique usuelle qui tend à attribuer tout problème à un niveau scolaire précis. Les savoir-faire transversaux doivent en effet être pris en charge tout au long de la scolarité, du primaire à l'université. Pour remplir cette condition, les énoncés des SiRC sont forcément peu mathématisés, mais nous cherchons à éviter les « bruits » non mathématiques courants dans les problèmes dits de « modélisation », qui complexifient la tâche pour l'élève et l'empêchent parfois de rentrer dans les mathématiques.

- **Des stratégies initiales existent, mais elles ne résolvent pas complètement la question**

En d'autres termes, il faut assurer la dévolution du problème, tout en laissant une incertitude qui engage dans l'activité de résolution, et ne peut être réduite par la seule application de techniques ou propriétés usuelles connues (c'est ainsi que Brousseau décrit, dans sa théorie, une « bonne » situation). Le cadre théorique de résolution n'est ni donné, ni évident, mais il est possible de s'emparer du problème sans cela.

- **Plusieurs avancées dans la résolution sont possibles, par essais-erreurs, étude de cas particuliers, production d'exemples, etc.**

Il s'agit de permettre la résolution de cas particuliers et de favoriser la construction par les élèves de conjectures — issues de l'exploration de la question — qui ne seront pas évidemment vraies, mais pourront être examinées au moyen d'exemples et de contre-exemples construits par les élèves eux-mêmes.

- **On peut changer les hypothèses, ou la question initiale, et s'emparer d'un nouveau problème**

La question initiale peut déboucher sur des questions annexes : fermeture du problème par choix de valeurs de certains paramètres, ou question nouvelle issue de l'activité de recherche.

Ces caractéristiques ne sont pas faciles à réaliser. On s'accordera aisément sur le fait que très peu de problèmes de la recherche actuelle en mathématiques peuvent être transposés ainsi. Le choix des « bonnes » questions de recherche et de leur transposition pertinente en SiRC est une tâche difficile. D'autre part, les savoir-faire transversaux mis en jeu diffèrent et ne sont pas tous présents dans chacune des situations : certaines mettent en jeu plutôt la modélisation, d'autres le processus conjecture-exemples-contre exemples-preuve, d'autres encore la définition d'objets mathématiques.

3. Analyse didactique d'une SiRC

Au cours des dix dernières années, notre équipe a construit, expérimenté, analysé et mis à l'épreuve un certain nombre de SiRC plus ou moins proches du modèle décrit ci-dessus, mais qui toutes apportent des apprentissages de ces savoir-faire, à des niveaux très variés. Certaines sont maintenant intégrées dans des cursus institutionnels (en seconde, L1-L2 sciences, L3 de maths, cours doctoral maths-info), ce qui nous a obligés à mettre en place une évaluation de ces apprentissages.

L'analyse a priori d'une « situation de recherche pour la classe » consiste, comme pour toute situation (didactique ou a-didactique), à décrire le milieu - ses objets, les actions possibles, les connaissances de base, celles qui sont en jeu, et des éléments de gestion. Dans nos SiRC, il s'agit de décrire les stratgies initiales, expérimentations et modélisations locales possibles, les conjectures qui en découlent (vraies ou fausses), les preuves susceptibles d'être produites.

Les spécificités de cette analyse tiennent d'une part au fait que ce sont les savoirs transversaux qui sont enjeu d'apprentissage, et non un concept mathématiques strict - même si bien sûr il y en a forcément en jeu dans la situation – et, d'autre part, que la résolution complète du problème n'est pas toujours réalisable.

Une SiRC est caractérisée par des variables (didactiques ou adidactiques), et au moins une ***variable de recherche,*** paramètre du problème qui pourrait être une variable didactique (c'est-à-dire à la disposition de l'enseignant), mais qui est laissé à la disposition de l'élève. Les variables de recherche sont constitutives des SiRC, autrement dit une situation pour laquelle on ne peut mettre une variable à la disposition de l'élève n'est pas une SiRC. Cette variable de recherche détermine ce qui, dans la situation, conduit à une activité mathématique, parce que :

- il y a, à la charge de l'élève, une question et un enjeu de vérité, dont il peut s'emparer mais qui ne sont pas résolubles rapidement,
- il n'y a pas de « boîte à outils » (théorèmes, propriétés, algorithmes) disponible de manière évidente pour la résolution.

Bien sûr, toute variable du problème ou de la situation ne peut être variable de recherche. Un des objectifs de nos expérimentations est de détreminer les paramètres qui peuvent être laissés à la charge de l'élève.

L'organisation didactique est constitutive d'une SiRC, dans le sens qu'elle jour un rôle primordial dans la réussite de la situation[3]. Cependant, elle est tout à fait réalisable. Le travail en petits groupes est un moyen d'assurer la dévolution du problème et de favoriser les échanges sur les stratégies et les solutions. Le temps est un élément important. La situation ne sera porteuse d'apprentissages que si elle peut se poursuivre sur plusieurs séances si cela s'avère nécessaire. Il est donc important que chaque groupe tienne un « cahier de recherche », pour faire mémoire de l'état de la résolution d'une séance à l'autre : cas étudiés, conclusions, questions non résolues, nouvelles questions, mais aussi difficultés, pistes abandonnées, etc. La mise en scène du problème (contexte de l'énoncé, matériel pour expérimenter, outils de résolution) est tout aussi importante. Certains de nos SiRC s'appuient entièrement sur des objets manipulables.

La gestion d'une SiRC doit comporter, outre une alternanace de phases collectives de débat et de phases de travail en groupes, un moment d'institutionnalisation des connaissances en jeu. Cette organisation vaut aussi bien en formation d'enseignants qu'avec des élèves en classe.

Plus que l'organisation didactique, c'est plutôt ***les objets des phases collectives de débat et d'institutionnalisation*** qui peuvent être ressenties comme sources de difficultés pour l'enseignant, puisque ce sont avant tout les savoirs transversaux. Il s'agit donc de porter l'attention sur les reformulations des déclarations des élèves (hypothèses, propriétés, conjectures), sur les

3 La situation de l'agrandissement du puzzle de Brouseau est de ce point de vue très éclairante : l'organsitation du travail (en groupe, puis en individuel, puis de nouveau en groupe) est constitutive de la situation.

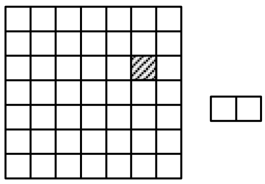
codages ou les modélisations utilisées, sur les exemples et contre-exemples et leur rôle, sur la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, sur la mise au point et l'écriture des preuves.

II Un exemple prototypique. Pavage de polyminos

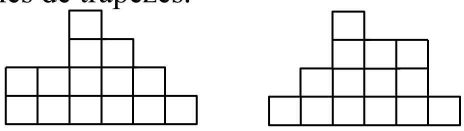
1. La situation

Les trois problèmes de la situation ci-dessous constituent une situation fondamentale pour le raisonnement et la preuve. Elle est mise à l'épreuve et utilisée dans différents cursus depuis une dizaine d'années. On en trouve des analyses détaillées dans Grenier et Payan (1998) et Grenier (2006). Chacun des problèmes correspond à des choix de variables et contient un paramètre laissé à la charge de l'élève (variable de recherche).

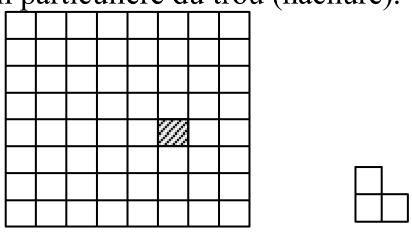
Problème P1. Etant donné un carré de taille quelconque avec un « trou » d'une case, pour quelles positions du trou est-il pavable par des dominos ? Le trou peut se situer n'importe où, y compris sur un bord ou un coin du polymino. Voici le dessin pour le polymino de taille 7 et un cas particulier de la position du trou.



Problème P2. A quelles conditions un trapèze de taille quelconque est-il pavable par des dominos ? Voici deux exemples de trapèzes.



Problème P3. Etant donné un carré de taille 2^n, n quelconque avec un « trou » d'une case, pour quelles positions du trou est-il pavable par des triminos coudés ? Ci-dessous, un cas particulier avec n=8 et une position particulière du trou (hachuré).



Ces problèmes sont décrits et étudiés en détail dans Grenier et Payan (1998) et Grenier (2006), nous reprenons seulement quelques éléments de cette étude ici. Nous situerons ensuite les trois problèmes en ce qu'ils ont de complémentaires et de spécifiques.

2. Eléments d'analyse didactique

L'analyse est basée sur de nombreuses données expérimentales, qui nous permettent d'avoir une analyse *a priori* fiable de ces problèmes.

Le problème P1

Le problème P1 remplit un rôle de mise en place d'un « milieu » (au sens de la théorie des situations didactiques), ce type de questions étant peu connu de la grande majorité des élèves et des enseignants. La résolution de P1 permet d'introduire des définitions de base (pavage, pavé, aire), des outils spécifiques (partition, coloration) et d'établir des propriétés de base sur le pavage des polyminos qui serviront ensuite pour les problèmes P2 et P3. L'étude des carrés de petites dimensions (taille $n \leq 7$) conduit à faire des constats, puis établir des propriétés ou des conjectures, qui doivent être exprimées en terme de condition nécessaire ou suffisante et pour lesquelles on peut établir des preuves, plus ou moins complexes (preuve par exhaustivité des cas, preuve par l'absurde et « forçage », preuve d'existence en exhibant un exemple).

On aboutit la plus part du temps à la ***conjecture pour n quelconque*** suivante :
Repérons les cases par deux coordonnées entières, à partir d'un coin du polymino (par exemple le coin en bas à gauche), et en commençant par (1,1)). Pour n quelconque, une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir paver avec des dominos est que le trou soit placé sur une case ayant une position paire-paire ou impaire-impaire dans le polymino.

La preuve de la condition suffisante peut se faire par induction ou partition du polymino. La preuve de la condition nécessaire nécessite un autre outil (la coloration en damier) qui en général n'émerge pas des travaux de groupes.

Il est étonnant de constater, à chaque fois, la profondeur du travail mathématique que l'on peut faire avec P1. Citons-en ici quelques aspects.

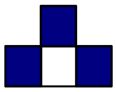
- Dans la preuve de la conjecture pour les premières valeurs de n, puis n quelconque, les outils (coloration et notion de « polymino équilibré ») pour établir la CN ne sont pas les mêmes que ceux qui servent à établir la CS (décomposition ou récurrence). Pour cela, P1 est un bon problème pour discuter de la différence entre une CS et une CN, alors qu'il s 'agit d'une CNS.
- La recherche des implications entre les trois propriétés relatives à des polyminos « aire paire », « équilibré[4] » et « pavable par des dominos » conduit dans le cas général à des implications strictes. Pour les carrés ou rectangles sans trou, tout est équivalent. Pour les carrés ou rectangles tronqués d'une case, une équivalence et une implication stricte.
- La notion topologique d'adjacence joue ici un rôle fondamental pour résoudre P1. Elle permet de transformer la coloration en un outil de preuve efficace. Dans nos expérimentations, nous avons constaté que la résolution de P1 permet de la faire émerger lors des essais successifs de pavage. En effet, pour un polymino non pavable, on peut observer qu'à chaque fois, les tentatives avortées de pavage s'arrêtent sur deux cases isolées de même couleur.
- Plusieurs prolongements du problème P1 émergent chez les élèves, ce qui est un de nos critères pour une SiRC : la résolution de la question de départ amène d'autres questions (par exemple, la question du pavage des rectangles sans trou par des dominos).

Pavage d'un trapèze par des dominos (problème P2)

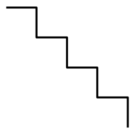
L'analyse de ce problème est détaillée dans Grenier (2006). Nous rappelons ici les résultats essentiels.

4 C'est-à-dire ayant le même nombre de case blanches que de cases noires dans une coloration en damier (Grenier 2006)

En réutilisant des propriétés et des outils établis lors de la résolution du problème P1, en particulier la propriété 4, on peut affirmer que « Une condition nécessaire pour qu'un trapèze soit pavable par des dominos est qu'il soit équilibré (il est donc d'aire paire) ». Mais existe t-il des trapèzes d'aire paire et non équilibrés ? La réponse est oui, il y a des exemples simples, dont celui-ci :



En étudiant des cas particuliers de trapèzes, d'aires petites, on peut établir facilement la propriété suivante : « Si un trapèze a tous ses paliers ou toutes ses colonnes paires, alors il est pavable ». La preuve est évidente. En conséquence, tout trapèze ayant uniquement des marches de 1 sur 1 de chaque côté est non pavable car non équilibré.



On peut donc conclure, après un temps de recherche, sur la ***conjecture*** suivante :
Tout trapèze équilibré est pavable par des dominos.

La preuve de cette conjecture est difficile. Souvent, des preuves fausses sont données, plus ou moins induites par un raisonnement inductif incomplet. Cependant, l'étude expérimentale induit la recherche d'un algorithme de pavage, seul moyen de se convaincre de la possibilité ou non de paver un trapèze donné. En fait, la preuve est basée sur un algorithme qui consiste à « déconstruire » le trapèze d'une manière précise qui conduit à une preuve par induction. Nos expérimentations montrent que l'intervention de l'enseignant ou de celui qui gère la situation est en général nécessaire dans cette dernière phase. Cette preuve est très intéressante pour comprendre ce qu'est un algorithme et aussi ce qu'est le raisonnement inductif. Il est détaillé dans Grenier 2006.

Problème P3. Pavage d'un carré de taille 2^n avec des triminos en L

Ce problème a été décrit dans Grenier et Payan (1998). Nous n'en donnerons ici que quelques éléments. On peut établir très facilement que la condition «pour un polymino quelconque, l'aire est un multiple de 3 » est nécessaire. La preuve est évidente. En revanche, il est difficile de savoir si cette condition est suffisante ici (elle ne l'est pas sur le carré 3x3, mais 3 n'est pas une puissance de 2) . L'étude de petits cas (2^2, 2^3) conduit à la ***conjecture*** suivante :
Tout polymino carré de taille 2n est pavable, quelle que soit la position du trou.

L'étude des cas où n=2, puis 3, puis 4, conduit souvent à une preuve par induction, plus ou moins formelle selon les niveaux. Mais elle conduit aussi à une preuve accessible sans la récurrence, basée sur une partition du polymino en polyminos plus petits pavables.

Ce problème met en jeu des aspects de la récurrence non usuels dans l'enseignement et qui se révèlent souvent déstabilisant, même au niveau L3. En particulier :
- P(n) est une propriété d'une « classe d'objets de taille n » et non une fonction analytique de n
- La valeur initiale de la récurrence se déduit naturellement de l'étude de l'hérédité (elle ne sort pas d'un chapeau !)
- La preuve fournit un algorithme de pavage (comme dans le problème P2), qui se révèle nécessaire, car si on pave au hasard, on a très peu de chance d'arriver au bout.

Les apprentissages « transversaux » en jeu dans la situation

La séquence des trois problèmes permet de travailler progressivement les aspects suivants.

Existence ou non de solutions. En classe, tout problème a une solution, souvent unique. Ici, dans P1, l'existence de solutions dépend de la position de la case manquante (qui est une des variables de recherche), tandis que dans P2, des solutions existent dès que le polymino vérifie une condition (trapèze équilibré) et que P3, lui, admet des solutions dans tous les cas (quelle que soit la position de la case manquante).

Distinction entre « condition nécessaire » et « condition suffisante ». Dans ces problèmes, les CN ne sont pas toujours suffisantes et vice-versa. De plus, si une condition est une CNS, alors la preuve de sa nécessité peut être très différente de celle de sa suffisance (exemple typique dans le problème 1).

Types et outils de preuve non usuels. Cette situation permet d'aborder des types de preuve non classiques, telles que la preuve « par exhaustivité des cas », ou la preuve par « exhibition d'un exemple » (en réponse à une question d'existence). Ce type de preuve n'est pas si fréquent, puisqu'elle ne peut s'appliquer que si le nombre des objets sur lesquels on vérifie la propriété est fini (ce qui n'est le cas ni en algèbre, ni en géométrie).

Des outils nouveaux sont utilisés, tels la décomposition et structuration d'une figure, ou la coloration. Au delà de leur intérêt pour eux-mêmes, ils obligent à changer de conception sur ce qu'est une preuve en mathématique (et son formalisme).

Les notions mathématiques. Elles concernent essentiellement les propriétés de N, l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls, avec des niveaux d'approche différents selon les problèmes : calcul d'aires, divisibilité de deux nombres, preuve par récurrence.

Une situation fondamentale pour les savoirs transversaux

La situation composée des trois problèmes P1, P2 et P3 est pertinente à différents niveaux scolaires, mais aussi pour la formation d'enseignants. Les résultats obtenus seront bien sûr différents selon ces niveaux, c'est-à-dire que l'on pourra aller plus ou moins loin dans les conjectures et les preuves. Cependant, le problème P1 peut être résolu et prouvé de manière non formelle même avec des enfants de l'école primaire.

Deux contraintes sont quasi incontournables pour que la situation « marche »:
- celle du temps, nécessaire (même pour un chercheur !) pour s'emparer des problèmes et commencer à mettre en place des solutions ;
- celle de l' « ouverture » qui consiste à autoriser le développement de stratégies différentes, sans en imposer une particulière, voire la résolution d'une question nouvelle liée à celle de départ.

Nos nombreuses expérimentations de cette situation nous amène à la déclarer situation fondamentale (au sens de Brousseau) pour l'ensemble des savoir-faire transversaux. En effet, elle permet de manière fiable :
- la dévolution de la question, P1 jouant le rôle de mise en place d'un milieu pour reconnaître la tâche mathématique à faire,
- la résolution, en situation addidactique, de cas particuliers, et la construction par la manipulation de conjectures non évidentes et qui restent à prouver,
- la construction, par les élèves eux-mêmes, d'exemples et de contre-exemples,
- la mise en oeuvre de différents types d'argumentations et de preuves : exhaustivité des cas, absurde, exemple (cas des propriétés d'existence), contre-exemple, partition, coloration, récurrence.

III Un autre type de SiRC. Polyèdres réguliers

Nos situations sont plus ou moins proches du modèle SiRC. Ainsi, les questions qui suivent sont résolues depuis longtemps en mathématiques. Cependant, la situation que nous décrivons ci-dessous est étonnante du point de vue de l'activité mathématique qu'elle provoque, à tous les niveaux et même chez les étudiants en mathématiques, parce qu'elle oblige à une (re)découverte expérimentale des polyèdres réguliers de l'espace et, lorsque ceux-ci sont connus (polyèdres de Platon), elle provoque une confrontation entre les résultats expérimentaux et les connaissances théoriques.

La situation a été proposée à différents niveaux, mais étudiée plus précisément avec des élèves de 2nde en France, de 3e secondaire (14-15 ans) au Québec, et des étudiants de 3ème année de formation des maîtres de l'UQAM, et de L3 de maths de l'UJF. Des résultats didactiques ont été publiés (Grenier & Tanguay, 2008).

1. Énoncé du problème

Question 1. Caractériser et définir les polyèdres réguliers.
Question 2. Les réaliser matériellement.
Question 3. Prouver que la liste établie précédemment est valide et complète.

La question 1 a pour objectif l'exploration des types d'objets de l'espace et une discussion sur la propriété de « régularité ».

Le matériel fourni pour la question 2 – boules et barres magnétisées ou pâte-à-fixer et cure-dents – joue un rôle essentiel, c'est une des variables de la situation. Il est choisi pour aborder la construction par les sommets et arêtes et non par les faces (qui ne sont pas données). La seule caractéristique de régularité imposée par ce matériel est que « toutes les arêtes sont de même longueur ». Le choix du nombre d'arêtes en un sommet, du type de faces et de leurs rapports avec la possibilité de construire un polyèdre et sa régularité sont à la charge des élèves.

La question 3 a pour objectif de discuter l'insuffisance de la construction matérielle et la nécessité d'une preuve pour attester qu'il n'y a que 5 polyèdres réguliers et les repérer parmi ceux qui ont été construits.

2. Éléments d'analyse didactique de la situation

Nous donnons brièvement ci-après l'essentiel des connaissances qui ont été régulièrement mises en jeu dans chacune des phases de la situation. Nous disposons, nous semble t il, d'une analyse a priori fiable. La propriété ci-dessous résume les caractéristiques qui sont en question pour la « régularité » d'un polyèdre, la régularité des faces et la convexité étant supposées.

Propriété. Pour un polyèdre convexe dont les faces sont congrues à un même polygone régulier, les quatre énoncés ci-dessous sont équivalents :

- *Les sommets sont de même degré*
- *Les angles dièdres sont tous congrus*
- *Le polyèdre est inscriptible dans une sphère*
- *Le groupe des symétries directes du polyèdre agit transitivement sur ses sommets.*

Phase de définition (question 1)

La recherche de la définition semble reliée à la possibilité de construire. Assez vite, à tous les niveaux , il y a un consensus pour affirmer que le solide est fermé et admet des symétries, et que ses faces sont des polygones réguliers identiques. Cependant, la définition de la régularité d'un polygone est parfois débattue, les types de symétrie sont imprécises, souvent exprimées « relativement à une base ». Le critère du « même nombre de faces en chaque sommet » n'est pas très présent, et souvent long à sortir. Le critère de « convexité » du polyèdre est absent des débats (et rien ne dit que c'est parce qu'il va de soi), même chez les étudiants de maths. Et, lorsqu'ils sont évoqués, ce qui est rare, les angles dièdres sont confondus avec les angles digones. Dans la gestion de la situation, il est donc nécessaire de prévoir un débat collectif sur les critères qui seront choisis pour la *régularité* et dont on a besoin pour les phases suivantes. Celle choisie par les mathématiciens remportent finalement une quasi unanimité.

Nous avons constaté que cette phase de définition conduit à une véritable exploration des polyèdres et plus généralement des solides et aussi à un retour sur la définition de régularité pour les polygones réguliers.

Phase de construction (question 2)

Le matériel (pâte-à-fixer et cure-dents ou boules et tiges magnétiques) a été choisi pour laisser à la charge des élèves le choix des faces et du nombres d'arêtes en un sommet. Dans un premier temps, beaucoup de tentatives de construction se font au hasard. Elles aboutissent à des solides très divers qui parfois conduisent à re-questionner la définition sur laquelle on s'est mis d'accord (en particulier, pourquoi certains polyèdres étoilés sont-ils rejetés ?). Cependant, assez vite, apparaît la nécessité d'anticiper à la fois le type de faces et leur nombre en chaque sommet. Plus surprenant, parce que les faces ne sont pas désignées par le matériel, la question de la régularité pour les polygones est à nouveau posée. Le nombre de sommets du polyèdre en construction se décide par la fermeture du solide.

Nous donnons ci-après des conjectures — toutes fausses — qui surgissent régulièrement lors de cette phase de construction. Nous leur donnons le statut de conjectures parce qu'elles sont résistantes dans de nombreux groupes, où elles servent d'appui ou de contrôle.

C1. Les seules faces qui « marchent » sont celles qui pavent le plan
C2. Il existe un polyèdre régulier pour chacun des polygones réguliers
C3. Plus on met de triangles en un sommet, plus on se rapproche de la sphère
*C4.On ne peut mettre plus de trois faces en un sommet car on est en dime*nsion 3
C5. L'angle entre les faces est déterminé par les angles du polygone-face

Les conjectures C1 et C2 sont incompatibles, elles sont donc présentes dans des groupes différents, mais l'une comme l'autre ont conduit beaucoup d'élèves, et pour certains pendant un temps assez long, sur des pistes erronées — par exemple, à la recherche d'un polyèdre avec des faces hexagonales. Comme ce polyèdre est difficile à construire (difficulté attribuée à l'inadaptation du matériel !), on assiste parfois à un arrêt de la construction et une tentative de calcul, pour anticiper le nombre de faces de ce polyèdre (le critère du calcul étant d'assurer la fermeture du solide). De plus, C2 conduit à affirmer qu'il y a une infinité de polyèdres réguliers, alors que C1 au contraire conduit à refuser de chercher un polyèdre régulier avec des faces pentagonales.

La conjecture C3 est très présente, peut-être due à ces faux polyèdres réguliers, géodes et dômes quasi sphériques, réalisés en architecture avec un grand nombre de polyèdres réguliers de plusieurs types. C4 est bien sûr incompatible avec C3 et réduit considérablement les possibilités. Un coup d'oeil aux réalisations des groupes voisins la remet assez vite en question.

Enfin, C5 très présente et exprimée parfois avec force, lorsque le gestionnaire de la situation demande avec insistance de considérer l'angle entre deux faces (« Il n'y a qu'un angle dans un polyèdre régulier, c'est celui des faces polygonales ». C5 est révélatrice de la difficulté générale à repérer l'angle dièdre, d'ailleurs inconnu de la majorité des étudiants.

A la fin du travail en groupes, même si, finalement, les polyèdres retenus globalement sont ceux que l'on attend, il reste des doutes et des questions qui justifient d'accorder une grande place à la synthèse et à l'institutionnalisation des objets construits. Il est important de mettre alors en évidence qu'il reste à prouver que :

– les polyèdres construits sont réguliers, ce qui ne vas pas de soi puisque certains critères ne sont pas matériellement vérifiables (certains ne sont pas rigides)
– il n'en existe pas d'autres vérifiant la définition que l'on a choisie.

Phase de preuve

La preuve qu'il y a *au plus* cinq polyèdres réguliers est accessible dès la fin de collège par des arguments simples de géométrie (on la trouve dans certains manuels de seconde, sauf qu'on en dite pas que c'est « au plus » que l'on démontre). Dès la fin du lycée, on peut faire une preuve originale par les diagrammes de Schlegel, qui s'appuie sur la représentation plane des polyèdres convexes quelconques par des graphes planaires, par projection stéréographique. Ce « nouveau problème » a un réel intérêt pour explorer les relations entre les objets de l'espace et leurs représentations planes. De plus, dans la preuve par les diagrammes de Schlegel, certaines des propriétés géométriques des polyèdres réguliers (arêtes et angles égaux) ne comptent plus : la représentation par des graphes ne respecte ni les angles ni les longueurs, ce qui induit un regard différent sur ces objets de l'espace.

La preuve que les cinq polyèdres construits sont valides (et qu'il y en a donc *exactement cinq*) est plus complexe, elle nécessite de s'appuyer sur la propriété donnée au début de ce paragraphe. Elle pose la question de la constructibilité des cinq polyèdres, question qui n'est jamais abordée dans l'enseignement. Dans cette phase de validation des polyèdres construits, nous avons repéré à plusieurs reprises une remise en cause de la régularité de l'octaèdre.

IV D'autres situations remarquables

Certaines de nos SiRC sont plus fondamentales que d'autres, au sens où elles sont susceptibles de remplir de manière fiable les objectifs d'apprentissage qui leur sont attribuées.

Deux d'entre elles peuvent être expérimentées à tous les niveaux et permettent à chacun de ces niveaux de faire une travail sur le raisonnement et la preuve. En voici quelques éléments.

1. Déplacements sur la grille

Le problème général est l'exploration de déplacements dans le plan discret (ensemble des points du plan à coordonnées entières). Il peut se décomposer en les questions suivantes :

> « Étant donné un point A sur le plan discret, et un ensemble de déplacements élémentaires (un déplacement élémentaire est un couple du type (1D, 2B), qui se lit « un à droite et deux en bas »)
> - quels sont les points du plan que l'on peut atteindre par des combinaisons entières positives de ces déplacements élementaires,
> - l'un de ces déplacement est-il « redondant » (si on l'enlève de l'ensemble, on atteint les mêms points)
> - quel déplacement faudrait-il rajouter à l'ensemble pour aller partour dans le plan discret ?

La situation s'appuie sur un matériel simple : des feuilles de papier pointé (les points du plan discret sont donnés), on précise la leture du couple donnatn le déplacement élémentaire et ce qu'est leur combinaison (n'utilisant que des additions et multiplications dans N).

Cette situation a été étudiée de manière approfondie par Cécile Ouvrier-Buffet dans sa thèse (Ouvrier Buffet 2003). Elle permet de rendre accessible *dès le primaire* les notions de vecteur, combinaison entière de vecteurs, ensemble générateur, ensemble minimal, vecteur redondant dans un ensemble, par des combinaison de déplacements élémentaires et des recherches de points dans le plan discret. Elle permet aussi de re-questionner, *aux niveaux lycée et université*, et *en formation d'enseignants*, les notions de base de l'algèbre linéaire, en relation avec les notions introduites dans le plan discret : dans le plan discret, les ensembles générateurs minimaux n'ont pas tous le même nombre d'éléments (il y a un très beau théorème à la clé), on peut distinguer les trois propriétés libre, générateur et minimal, pour un ensemble de vecteurs.

Cette situation permet également d'explorer le plan discret et le repérage dans un plan.

2. La chasse à la bête

Cette situation a été inventée et étudiée dans le cadre d'une thèse en mathématiques discrètes (Duchêne 2006). Elle a été expérimentée cette année dans le cadre d'un mémoire de master2 (Chassan 2009), dans des classes de primaire (CE2, CM1 et CM2) et dans un groupe de PE2.

Le problème général est le suivant :

> « On se donne un grille rectangulaire (un polymino) qui représente un champ, un ensemble de polyminos plus petits (dominos, ou triminos longs, ou triminos coudés) qui seront des types de bêtes et un ensemble d'uniminos qui seront des pièges. Les ensembles de bêtes et de pièges sont aussi grands que l'on veut. Sachant que les bêtes se posent le long des cases de la grille (et non en travers), pour chaque type de bêtes, quel est le plus petit nombre de pièges qui assure la protection du champ ? »

Le matériel fourni est le même que pour la situation des pavages, et le champ choisi dans cette situation est un carré 5x5.

L'objectif de la situation est d'introduire la notion d'optimisation dans le domaine des entiers, ce qui la sort des cadres habituels[5] de l'enseignement et simplifie son approche. Les trois problèmes de la situation sont accessibles dès le primaire et reste pertinents jusqu'à la fin de l'université. La situation est intégrée avec un grand succès (aussi bien du point de vue de la dévolution que du travail mathématique qu'elle provoque) chaque année dans un module optionnel en L1-L2 sciences de l'UJF et dans un module optionnel d'un cours doctoral à l'UCBL. A tous les niveaux, la manipulation matérielle s'avère nécessaire pour faire des conjectures. L'optimum (minimum) cherché est un entier que l'on obtient par des encadrements successifs de plus en plus serrés. Comme on travaille dans les entiers, le nombre d'étapes est fini.

G. Chassan a observé, enregistré et analysé la résolution du problème avec les trois types de bêtes, par des PE2. Il a noté en particulier les raisonnements faux débusqués lors des travaux de groupes, puis les apprentissages entre le début et la fin de la situation.

5 Essentiellement, pour les étudiants, minimiser revient avant tout à annuler la dérivée d'une fonction.

V Constats ou résultats généraux sur nos SiRC

1. Dévolution

Dans nos SiRC, l'intérêt pour la question posée et sa dévolution sont en général immédiats, d'autant plus si les connaissances mathématiques de base sont accessibles à tous. Nous avons pu vérifier le rôle quasi incontournable du matériel et de la phase expérimentale pour la dévolution d'une activité mathématique. Celle-ci est issue de la dialectique entre la manipulation et une réflexion théorique rendue nécessaire du fait que aucune solution n'est évidente et que plusieurs solutions non compatibles peuvent être soutenues.

2. Gestion

La gestion d'une SiRC est spécifique, en ce sens que l'enseignant n'est pas toujours dans des positions ou des rôles usuels. Cependant, il convient de moduler cette affirmation et de la préciser.

Dans un premier temps, l'enseignant doit pour l'essentiel être observateur, position qui ne lui est pas étrangère dans sa pratique de classe, lors des moments de travail en groupes de type « adidactique » : il doit alors vérifier la dévolution du problème, repérer les stratégies initiales, essais, erreurs des élèves, leurs questions, les pistes abandonnées, les raisonnements divers, les résultats partiels obtenus, qu'ils soient reconnus ou non comme tels etc. Bref, il s'agit de relever les éléments essentiels du débat collectif. Durant cette phase, il doit s'autoriser à répondre à des questions de compréhension du problème, ou intervenir en cas de blocage.

L'alternance de moments d'intervention et de moments « a-didactiques » est sous sa responsabilité.

Les phases collectives doivent porter non seulement sur la résolution du problème mais aussi sur les conjectures, exemples, contre-exemples, démarches, raisonnements qui ont été produits par les élèves. Et mener la discussion jusqu'au bout, ce qui peut prendre un temps assez long. Le sentiment de certains enseignants de ne pouvoir assurer cela tient peut-être à un manque d'habitude.

L'institutionnalisation n'a pas pour objectif de donner les solutions du problème, si celles-ci n'ont pas été produites, mais de mettre au clair le statut des raisonnements qui ont été faits (vrai, faux, CN, CS, CNS, etc), de préciser le stratégies menées, de différencier ce qui a été prouvé de ce qui reste à prouver, de préciser les types de preuve utilisés (absurde, exemple, contre-exemple, exhaustivité des cas, partition, coloration, récurrence, etc..).

3. Évaluation des apprentissages

A notre avis, l'évaluation de l'apprentissage des savoirs transversaux n'est pas plus difficile que celle des notions mathématiques strictes. Mais il est peut-être moins aisé de se leurrer ! Il n'est pas toujours évident de repérer une erreur dans un raisonnement ou une preuve complexes.

Comme pour toutes les situations expérimentales, on peut raisonnablement évaluer les effets des SiRC que si celles-ci font partie d'une organisation didactique non ponctuelle. C'est le cas depuis des années de certaines d'entre elles, intégrées dans différents cursus universitaires dans lesquels nous enseignons : en particulier, une UE d'ouverture en L1-L2 sciences (sur deux niveaux et toutes filières scientifiques)[6], une UE de didactique en L3 de mathématiques à

6 Cette année, nous avions 25 étudiants de 8 parcours différents sur les deux niveaux L1 et L2

l'UJF et un module optionnel d'un cours doctoral à l'UCBL[7]. L'évaluation en L1-L2 comprend l'écriture d'un rapport de recherche sur un problème de type SiRC, non traité en classe. Le contrat pour l'étudiant est celui qui donné en début de cet enseignement : c'est la qualité de l'activité mathématique qui est évaluée : statut clair des affirmations, exemples ou cas particuliers traités, conjectures différenciées des hypothèses ou des résultats prouvés, etc.

4. SiRC et concepts mathématiques

Nos situations ne sont pas conçues pour enseigner un concept mathématique précis, puisque leur objectif premier est l'apprentissage des savoirs constitutifs de l'activité mathématique , la tâche de l'élève étant de résoudre le problème posé.

Chacune de nos situations met en jeu et questionne des notions mathématiques. Mais il est important de ne jamais privilégier a priori un objectif notionnel, le risque étant de tuer l'activité de recherche. D'autre part, il nous semble que les notions ou concepts mathématiques en jeu ne doivent pas être complexes, en tout cas, ils doivent être stables pour les élèves.

En conséquence, nos situations de recherche ne peuvent remplacer une organisation mathématique notionnelle. Cependant, nous pensons que ces SiRC sont nécessaires pour l'apprentissage des savoirs transversaux, elles devraient être intégrées de manière rationnelle à l'enseignement usuel.

Bibliographie

1. Bibliographie générale

Grenier D. (2008), *Expérimentation et preuves en mathématiques*, in Didactique, épistémologie et histoire des Sciences, PUF, collection « Sciences, homme et société » (L. Viennot ed).

Grenier D. &Tanguay D. (2008), L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers, *petit x* n°78, ed IREM de Grenoble.

Grenier D. (2007), Des « situations recherche » pour la transition secondaire/université, actes du colloque EMF 2006 Sherbrooke.

Grenier D. (2006), Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. *Actes du colloque de l'Association Mathématique du Québec (AMQ)*, Sherbrooke, juin 2006.

Grenier D. & Payan, Ch. (2003), Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *cahiers du séminaire national de l'ARDM, Paris, 19 Octobre 2002.*

Grenier D. & Payan, Ch. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques,* Vol. 18, n°1, pp. 59-99.

Tanguay, D. & Grenier, D. (2009), A classroom situation confronting experimentation and proof in Solid geometry. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference*, vol. 2, pp.232-238, ISBN 978-986-01-8210-1.

7 Module optionnel « Situations de recherche » de l'Ecole doctorale EDIIS de l'université Claude Bernard à Lyon)

2. Thèses de « maths-à-modeler » intégrant l'étude de SiRC (ordre chronologique)[8]

Julien Rolland (1999), *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Cécile Ouvrier-Buffet (2003), *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Virginie Deloustal-Jorrand (2004), Etude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Karine Godot (2005), *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Caroline Poisard (2005), *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer,* Thèse de l'université d'Aix-Marseille 1.

Léa Cartier (2008), *Le graphe comme outil de preuve et de modélisation. Étude de l'introduction de la théorie des graphes dans l'enseignement de spécialité de Terminale ES (programmes 2003.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Michèle Gandit (2008), *Étude épistémologique et didactique des relations entre argumentation et preuve en mathématiques.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Nicolas Giroud (en cours), *Le rôle de la démarche expérimentale dans les SiRC.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

3. Mémoire de master2

Gérard Chassan (2009), *Apport des situations de recherche à l'apprentissage des « savoirs transversaux »*, mémoire de master2 didactique des sciences, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Annexe : exemples de SiRC étudiées dans l'ERTé « maths-à-modeler »

Nous donnons ci-dessous quelques-unes des situations de recherche étudiées dans le cadre de thèses, mémoires ou travaux plus personnels et pour lesquels nous avons une analyse a priori « fiable ». A la suite de l'intitulé, nous donnons la liste des apprentissages transversaux plus spécifiquement concernés par la situation, puis les notions mathématiques en jeu, enfin des références d'analyses didactiques.

Pavages de polyminos / *distinction CN/CS, contre-exemple, théorèmes d'existence* / aire, arithmétique de base, récurrence, algorithmes, coloration de graphes de grille / Grenier & Payan 1998, 2006, Deloustal-Jorrand 2004, Gandit 2008.

La chasse à la bête / *optimisation dans N, raisonnements duaux* / théorie des nombres, borne sup/borne inf, $\leq$, $\geq$, au plus/au moins / Chassan 2009.

Objets géométriques discrets / *représentation, définition* / géométrie euclidienne, géométrie non-euclidienne / Ouvrier-Buffet 2003.

8 Toutes les thèses de l'UJF ont été co-dirigées par Charles Payan ou Sylvain Gravier (tous les deux DR CNRS en maths discrètes) et par moi-même. La thèse de Caroline Poisard a été dirigée par Alain Mercier, PR en didactique des mathématiques.

Déplacements dans le plan discret / *définition* / systèmes générateurs, minimaux, algèbre linéaire / Ouvrier-Buffet 2003.

Les gardiens de musée / *optimisation* / triangulation d'un polygone, coloration / Grenier et al.

Polyèdres réguliers de l'espace / *définition, construction, modélisation et preuve* / géométrie du plan et de l'espace, graphes, graphes planaires / Grenier & Tanguay 2008, 2009.

Polygones réguliers à sommets entiers / *récurrence, absurde* / géométrie combinatoire, transformations géométriques / Grenier & Payan 1998.

Disques dans triangles ou carrés / *modélisation, optimisation* / géométrie combinatoire, graphe / Grenier & Payan 1998, Semri 2007.

Dénombrements de mots, chemins, pavages / *modélisation, bijection* / arithmétique, analyse combinatoire / Rolland 1999, Ouvrier-Buffet 2003.

Quadrilatères spécifiques / *construction, constructibilité, implication, preuve, définition* / figure générique, convexité / Deloustal-Jorrand 2004, Gandit 2008.

La roue aux couleurs / *heuristique, contre-exemple, modélisation (codage)* / dénombrement, décalage, relations dans N / Godot 2005.

Graphes, arbres / définition, *modélisation, optimisation, preuve* / Cartier 2008.

Présentation de thèse[1] : Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation

Léa Cartier

ERTé Maths à modeler

Institut Fourier, Université Joseph Fourier, Grenoble

Résumé

La raison initiale du sujet de cette thèse est l'introduction, pour la première fois en France, d'éléments de théorie des graphes dans le curriculum de l'enseignement secondaire, à savoir celui de la spécialité mathématique de la Terminale économique et sociale (ES) en 2002. Nous montrons dans cet exposé quelques aspects de notre travail de thèse articulés autour de trois problèmes de graphes, celui de la recherche de parcours eulériens dans un graphe, celui de la coloration des sommets d'un graphe et celui dit de Ramsey(3, 3).

En se basant sur des résultats d'expérimentations, nous montrons en quoi le problème eulérien est susceptible de permettre l'introduction de la notion de graphe auprès d'élèves et la manipulation de l'objet graphe, comment il suscite un travail de la modélisation avec l'apparition de deux graphes pour un même énoncé et, enfin, l'accès qu'il permet à un travail sur la preuve et le raisonnement. Dans un deuxième temps, nous décrivons la transposition du problème de coloration des sommets d'un graphe pour la Terminale ES en se basant sur un énoncé prototypique issu du baccalauréat de 2003. Enfin, nous présentons un problème de Ramsey dans le cas particulier (3, 3) qui nous permet de présenter une autre transposition permettant un réel travail mathématique aux élèves.

Ces différents problèmes nous permettent de présenter un ensemble de résultats issus de notre thèse incluant ceux mentionnés ci-dessus. Nous évoquons aussi rapidement le reste du travail effectué durant cette thèse.

Mots clefs

Théorie des graphes, modélisation, modèles eulérien et hamiltonien, situation recherche pour la classe (SiRC), parcours eulériens, théorème d'Euler, coloration des sommets d'un graphe, problème de Ramsey(3, 3)

I Introduction

Les graphes sont apparus dans les programmes français de l'enseignement secondaire en 2002, dans l'option de spécialité mathématique de la Terminale Économique et Sociale (ES). Cela constitue l'introduction d'un nouvel objet mathématique, le graphe, mais aussi, celle d'un nouveau domaine des mathématiques. En effet, même si l'on en trouve quelques traces dans des chapitres consacré au dénombrement, par exemple, les mathématiques discrètes sont un champ des mathématiques que l'on trouve peu dans l'enseignement secondaire français. Or ce champ est particulièrement intéressant pour l'enseignement et l'apprentissage dans la mesure où l'on peut y faire des mathématiques sans rencontrer d'obstacles notionnels (voir Rolland (1999) et Grenier Payan (1998)).

1 Thèse soutenue en octobre 2008, dirigée par Charles Payan et Denise Grenier à l'Institut Fourier et dans l'ERTé *Maths à modeler*, Grenoble

De premières questions naissent de cette brève introduction. Comment les graphes sont-ils apparus au programme ? Dans quel but ? Avec quelle transposition ? Les programmes stipulent que les éléments de théorie des graphes à enseigner doivent l'être uniquement par la résolution de problèmes. Quels problèmes sont donc proposés aux élèves ? Du point de vue pratique, quelle formation a été proposée aux enseignants ? On s'attend en effet à ce que la formation des enseignants prenne en compte la dimension mathématique (la plupart n'ont pas eu de formation initiale en théorie des graphes) et la dimension pédagogique liée à un enseignement « axé sur la seule résolution de problèmes »[2].

Notre recherche est une étude didactique ancrée dans la théorie des situations (Brousseau 2004). Voulant être accessible au plus grand nombre, nous chercherons à éviter les termes dont l'acception est spécifique à la didactique des mathématiques. Notre étude comprendra des éléments historiques et épistémologiques pour lesquelles nous nous baserons en particulier sur l'ouvrage *Graph theory 1736—1936 (*Biggs et al 1976)[3]. Pour mener cette recherche, nous avons émis quelques hypothèses :

- Le modèle de situation-recherche pour la classe (SiRC) (Grenier et Payan 2002) est particulièrement adapté à l'enseignement de la théorie des graphes en Terminale ES, de par la spécificité des mathématiques discrètes, et de par la mise en œuvre sous forme de résolution de problèmes qui dans son sens le plus large est compatible avec le modèle de SiRC.
- Les élèves sont capables de chercher en mathématiques et ainsi de « se retrouver dans la peau d'un chercheur en mathématiques et [tels que lui] s'interroger, essayer, tâtonner, observer, raisonner, émettre des conjectures, généraliser, prouver, s'accrocher, imaginer, trouver du plaisir, échanger avec autrui, partager ses découvertes, critiquer, argumenter » (Godot 2006).
- L'expérimentation va permettre de faire apparaître les connaissances qui sont accessibles aux élèves, les obstacles qu'ils rencontrent et les différentes stratégies qu'ils utilisent.
- Les manuels scolaires sont un reflet des pratiques enseignantes. Même si ce reflet est « déformé », on peut supposer que les manuels seront un support pour les enseignants, le graphe étant un nouvel objet mathématique pour la plupart d'entre eux.

- Pour donner un aperçu de notre travail de thèse, nous présenterons ici trois problèmes qui peuvent permettre de modéliser, de raisonner et de prouver :
- le problème des parcours eulériens que nous utiliserons pour illustrer la démarche utilisée dans cette thèse ;
- le problème de la coloration des sommets pour lequel nous regarderons la transposition[4] ;
- le problème de Ramsey pour lequel nous proposerons une transposition.

II Résultats autour du problème de parcours eulériens

Un graphe est un ensemble de points (appelés sommets) qui peuvent être reliés entre eux par des traits (appelés arêtes).

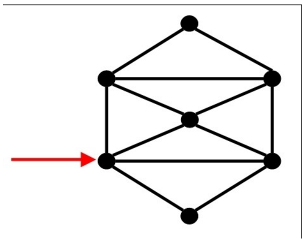
Un parcours eulérien dans un graphe est un parcours partant d'un sommet du graphe et passant une fois et une seule par chacune des arêtes du graphe. Si ce parcours est fermé (c'est-à-dire que le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont confondus) on parlera d'un circuit eulérien.

2 « Le travail proposé est axé sur la seule résolution de problèmes et aucunement sur un exposé magistral », Accompagnement de la mise en œuvre des programmes - Mathématiques - Classe terminale de la série ES.

3 Cet ouvrage regroupe les traductions anglaises des articles qui sont à l'origine de la théorie des graphes.

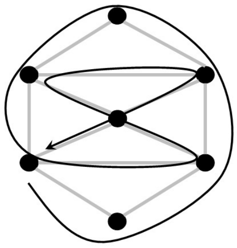
4 La transposition est la transformation du savoir « savant » ou savoir de référence en savoir à enseigner.

Pour illustrer ces définitions, prenons un graphe, et choisissons un sommet, qui sera le sommet de départ d'un parcours :



Partant de ce sommet, on choisit une arête non parcourue qui nous mène en un sommet et ainsi de suite jusqu'au moment où du sommet où l'on se trouve ne partent que des arêtes qui ont déjà été parcourues.

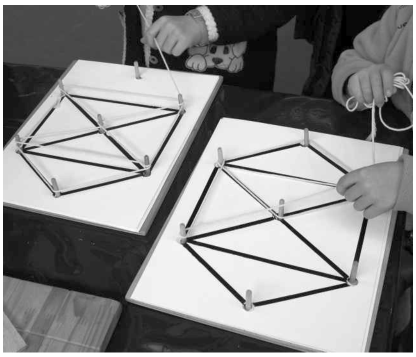
On pourra vérifier sur le graphe ci-contre que des parcours eulériens existent dans ce graphe, par exemple celui-ci :



Le problème de recherche de parcours eulériens dans un graphe, que nous qualifierons de problème eulérien, a été proposé sous différentes formes et à différents niveaux de classe pour étudier trois questions :

- Ce problème peut-il être utilisé pour introduire les graphes et qu'ils soient manipulés par les élèves ?
- Ce problème peut-il permettre de questionner la modélisation par un graphe ?
- Ce problème est-il une bonne entrée dans la preuve et le raisonnement ?

1. Introduction et manipulation des graphes

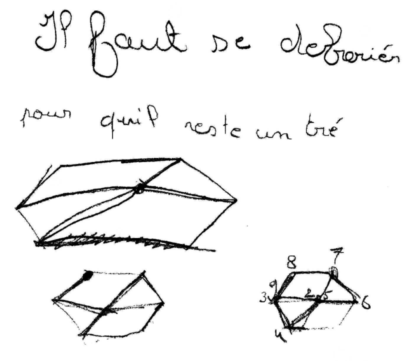


On entend souvent que le graphe est un objet simple et que les énoncés de problèmes en théorie des graphes, tel celui du problème eulérien, sont accessibles. Pour s'en assurer, nous avons proposé un problème eulérien en primaire. Nous avons créé du matériel manipulable, constitué de planches dans lesquelles sont fixées des chevilles. Sur ces supports se placent des feuilles sur lesquelles sont dessinés des graphes, les chevilles en constituant les sommets.

La question posée aux élèves est la suivante : « pouvez-vous refaire le dessin qui est sur vos feuilles avec une ficelle en repassant par chacun des traits, mais sans passer deux fois sur le même trait ? ».

L'expérimentation a eu lieu sur une durée courte (environ trois quarts d'heure pour chacun des groupes) avec une quinzaine d'élèves de CE1 à CM1 répartis en groupes de trois ou quatre. Chaque groupe avait une planche à sa disposition ainsi que des reproductions sur papier des graphes qui leur été proposés.

Voici une production d'élève de CE1 de cette classe :



On voit sur cette feuille que l'élève, ne trouvant pas de solution avec le matériel, a fait des tentatives sur papier pour expliciter la façon dont elle a cherché[5]. On remarque aussi des dessins de graphes qui attestent de la manipulation de l'objet au moins au niveau de sa représentation. Sur le dernier graphe dessiné sur le bas droite de sa feuille, l'élève a utilisé une numérotation des sommets en vue de pouvoir reproduire le parcours qu'elle avait établi.

De façon plus générale, cette expérimentation nous a permis d'établir que :

- les élèves sont capables de manipuler les graphes dès le primaire, ce qu'attestent les nombreuses représentations de graphes qu'ils ont faites ;
- l'énoncé du problème est accessible, la dévolution a été particulièrement efficace et rapide ;

Cette expérimentation a été plus loin que ce que nous avions prévu et a permis de constater en outre que les élèves sont aussi capables de :

- trouver des circuits eulériens dans un graphe très rapidement. Lorsque de tels circuits existaient les élèves mettaient moins d'une minute pour les établir ;
- reproduire des graphes. Même si pour un graphe particulier avec « beaucoup » d'arêtes ce travail était difficile (du fait de la nécessité d'un contrôle), les élèves ont reproduit les graphes sur leur feuille ;
- inventer des codages. Pour pouvoir montrer les chemins qu'ils avaient établis aux autres, les élèves ont inventé des codages en numérotant les sommets ou les arêtes des graphes dans l'ordre dans lequel ils les parcouraient.
- proposer des pistes de résolution. L'élève qui écrivait « il faut se débrouiller pour qu'il reste un trait » est d'ores et déjà dans une démarche de résolution, et son idée est, de fait, très proche de l'idée générale d'une preuve qui permet de résoudre le problème eulérien.

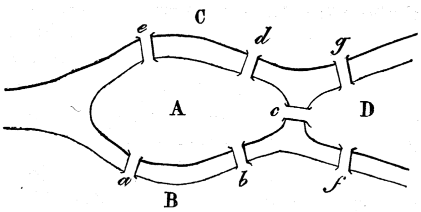
Le problème eulérien est donc un bon problème pour introduire et manipuler des graphes et il est accessible dès le deuxième cycle du primaire.

2. Travail sur la modélisation

Deux énoncés du problème eulérien ont été popularisés par Lucas dans les *récréations mathématiques* (Lucas 1883) à la fin du dix-neuvième siècle. Ces deux énoncés ont été repris dans le document d'accompagnement des programmes concernant les graphes. Il s'agit du problème des *ponts de Königsberg* et de celui des *dominos*. La question que nous nous poserons autour de ces deux énoncés sera celle de la modélisation par un graphe *a priori*.

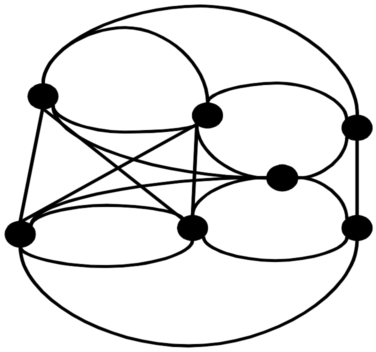
5 « Il faut se débrouiller pour qu'il reste un trait ». L'élève expliquait à l'oral qu'elle vérifiait à chaque étape ne pas laisser d'arête isolée.

Les ponts de Königsberg



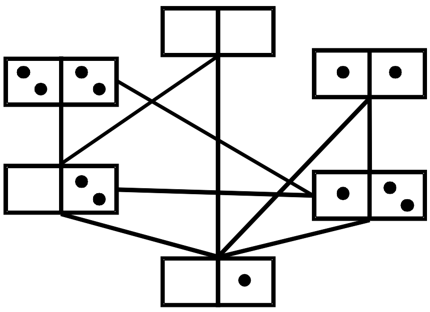
L'énoncé des ponts de Königsberg a été formulé par Euler en 1736 dans un article souvent considéré comme à l'origine de la théorie des graphes. Voici le plan de la ville de Königsberg traversé par une rivière formant une île et une presqu'île. La question d'Euler est la suivante : « une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement ? »

Lors d'une séance traitant explicitement de théorie des graphes, des élèves de Terminale ES traceront de fait un graphe pour représenter cette situation. Le graphe étant un ensemble de points reliés par des traits, on peut se demander quels objets tiendront le rôle des points et lesquels ceux des traits. On a ici 7 ponts et 4 berges, ce qui nous donne deux graphes possibles a priori. L'énoncé mettant en avant les ponts, choisissons-les pour sommets du graphe. Nous avons ici un modèle du problème dans lequel la question se transforme en : « peut-on passer une et une seule fois par chacun des sommets de ce graphe ? » Ce problème est connu en théorie des graphes sous le nom de problème hamiltonien, et nous qualifierons par extension le graphe obtenu par « graphe hamiltonien » .

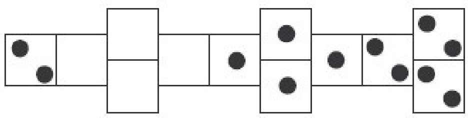


Les dominos

« Peut-on aligner tous les dominos comportant les chiffres de 0 à n en respectant les règles du jeu ? » De la même façon que précédemment, par un effet de contrat, les élèves vont tracer un graphe pour représenter cette situation, les sommets seront les dominos et une arête joindra deux dominos quand ceux-ci peuvent être alignés. Par exemple pour $n = 2$ on obtient le graphe suivant :



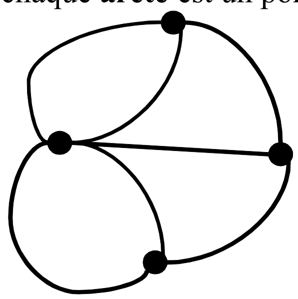
On cherche alors un chemin passant par chacun des sommets du graphe et on vérifie que ce chemin correspond à un alignement valide de dominos par exemple celui-ci :

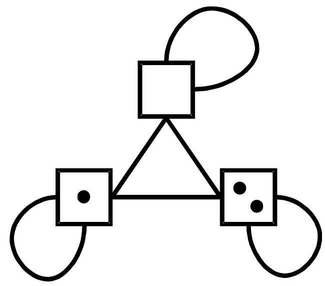


Le graphe que nous avons obtenu est lui aussi un « graphe hamiltonien ».

Modèles hamiltonien et eulérien pour ces deux énoncés

Plusieurs difficultés apparaissent avec ces modélisations. Les graphes obtenus sont vite illisibles à cause de leur grand nombre d'arêtes. Avec les dominos, tracer le graphe hamiltonien pour $n = 5$, par exemple, est déjà complexe. Une autre difficulté est liée au problème hamiltonien auquel on aboutit. En effet, ce problème est un problème « que l'on ne sait pas bien résoudre », c'est un problème difficile au sens de la complexité[6]. Mais ce qui reste vraiment problématique avec ces modélisations c'est que les chemins hamiltoniens que l'on peut trouver ne garantissent ni un chemin dans la ville de Königsberg[7], ni un alignement valide de dominos. Ce modèle n'est pas attendu en classe, le seul graphe attendu est le « graphe eulérien » pour lequel chaque **arête** est un pont ou un domino :





Un problème pour travailler la modélisation

Cette rapide étude montre que le problème eulérien est un « bon problème » pour travailler la modélisation. En effet, nous avons deux modélisations possibles *a priori* par un graphe et la modélisation qui est attendue n'est pas la modélisation généralement effectuée par les élèves. Pour illustrer ce qu'il se passe dans les classes, l'énoncé des ponts de Königsberg, proposé à environ 70 étudiants de PLC1[8] censés connaître le problème eulérien, a été traduit par plus de la moitié d'entre eux par un graphe hamiltonien.

D'autre part, l'adéquation entre le problème et le modèle peut ici être questionnée, avec un modèle « naturel » qui ne « fonctionne pas bien ».

Dans les manuels de Terminale ES

Les programmes de Terminale ES parlent de « la puissance de la théorie des graphes pour la modélisation ». Comment ce problème a-t-il été transposé dans les manuels ? Nous n'en donnerons qu'un exemple ici, mais il est symptomatique de ce que l'on retrouve dans les manuels dans leur ensemble. Nous sommes dans le chapitre consacré aux graphes, dans la partie des exercices dont le titre est « chaînes eulériennes ». Le problème d'alignement de dominos a été présenté, suit la première question : « *Représenter cette situation à l'aide d'un graphe G dans lequel chaque arête est un domino et les extrémités sont les chiffres figurant sur ce domino* » (Voir Transmath 2002).

6 Complexité des problèmes définie par Cook (problèmes NP-complets ou NP-difficiles). Voir par exemple **M. R. Garey, D. S. Johnson**, *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completness*, San Francisco,W. H. Freeman, 1979.

7 Il existe un grand nombre de chemins hamiltoniens avec le premier graphe représentant la ville de Königsberg. Aucun ne correspond à un chemin possible dans la ville.

8 Étudiants possédant une licence de mathématiques et préparant le concours de recrutement de professeurs en lycée et collège.

Le modèle est donné. De façon générale, la modélisation dans les manuels n'est jamais à la charge des élèves, et elle n'est pas non plus questionnée. On a là une occasion manquée de proposer aux élèves un questionnement sur la modélisation, questionnement qui n'est pas si simple à introduire dans un enseignement de mathématiques.

3. Raisonnement et preuve

Dans l'article sur les ponts de Königsberg susmentionné, Euler énonce un théorème que nous donnons ici dans une version adaptée pour les graphes, après avoir donné quelques définitions.

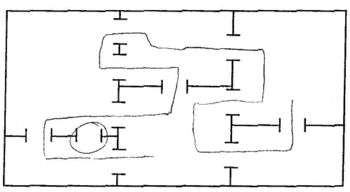
Un graphe est **connexe** s'il est en un seul « morceau », ou plus mathématiquement, s'il est tel qu'entre deux sommets quelconques il existe un chemin. Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est une extrémité.

Théorème d'Euler : dans un graphe connexe un circuit eulérien existe, si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair. Dans un graphe connexe, un chemin eulérien ouvert existe si, et seulement si, exactement deux de ses sommets sont de degré impair.

Pour montrer que la condition de parité des degrés des sommets est nécessaire on peut utiliser un argument d'entrée/sortie, pour montrer qu'elle est suffisante, on peut montrer qu'un chemin maximal dans le graphe sera nécessairement un chemin eulérien. Pour se donner une idée des difficultés qui peuvent être rencontrées par les élèves rencontrant le problème eulérien, revenons sur l'article d'Euler. Dans cet article, il énonce le théorème sans mentionner la connexité (implicite dans la situation), il montre que la condition de parité est nécessaire, mais, pour la condition suffisante, il ne donne pas de preuve et ne cherche pas à construire de solution générale considérant que la construction de tels chemins est « aisé[e] avec un peu de réflexion ». On s'attend donc en présentant le problème à des élèves de lycée que la preuve de la condition suffisante (CS) du théorème sera difficile.

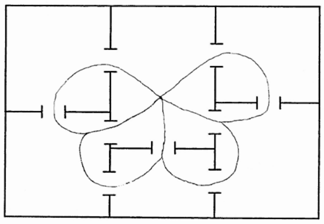
Étude expérimentale au lycée

Nous avons proposé le problème eulérien à 20 élèves de seconde, sur deux séances d'une heure trente, l'objectif principal étant l'étude des raisonnements et des preuves que les élèves sont capables de construire. Nous avons aussi cherché à problématiser la question de la CS.

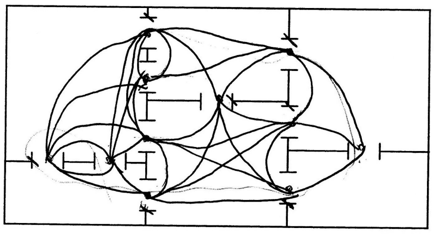


L'énoncé du problème de la première séance était composé de plans de musées et de la question « peut-on se promener dans le musée en passant une et une seule fois par chaque porte ». De même que pour les élèves de primaire, les chemins ou circuits eulériens quand ils existent sont trouvés rapidement. Nous nous intéresserons donc plutôt aux musées sans chemin eulérien, c'est-à-dire aux musées qui ont plus de deux salles ayant un nombre impair de portes, tels celui ci-contre où un essai infructueux a été entrepris.

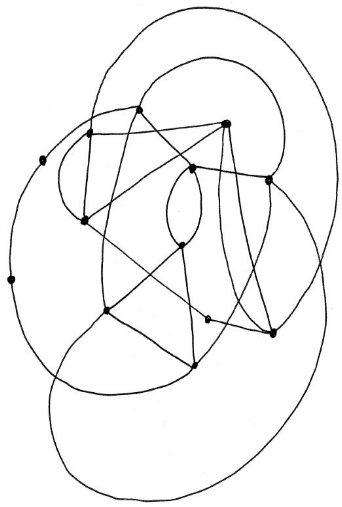
Après de tels essais, les élèves ont commencé à organiser leur recherche de chemin, et on a vu apparaître des représentations des chemins proches de celles d'un graphe. En voici un pour lequel, en ajoutant un sommet en chacune des pièces on aurait un graphe « eulérien » :



Une seule représentation qui est celle d'un graphe est apparue. L'idée des élèves du groupe était de tracer tous les chemins possibles allant d'une porte à une autre en chacune des pièces, le problème se transformant en la recherche d'un chemin passant une et une seule fois par chacun des sommets du graphe. Ce travail aboutit à la modélisation du problème par un modèle hamiltonien :



Pour résumer les résultats obtenus lors de cette séance, on voit l'apparition d'un graphe, de conjectures autour du théorème d'Euler avec l'argument d'entrée/sortie pour montrer la CN. Par contre, la question de la CS n'est pas posée par les élèves. Nous avons donc cherché dans une seconde séance à proposer un énoncé similaire mais basé sur les graphes pour tenter d'amener les élèves à s'interroger sur cette CS. Nous avons entre autres proposé ce « grand » graphe dont tous les sommets sont de degré pair mais qui n'est pas connexe. La réaction des élèves devant la contradiction entre leur conjecture et l'absence de circuit eulérien dans le graphe a été de modifier leur conjecture en ajoutant que le graphe doit être « en un seul morceau ».



Résumons les résultats obtenus lors de cette séance avec les graphes. Les élèves ont tous dessiné un grand nombre de graphes pour confirmer ou chercher à infirmer leurs conjectures, ce qui montre que le graphe est un objet appropriable par les élèves. Les conjectures établies pour les musées ainsi que les raisonnements en justifiant certaines ont été réinvestis et « traduits » pour les graphes. La question de la CS quant à elle est restée absente après plusieurs heures de recherche.

Nous en concluons que ce problème est pertinent pour questionner condition nécessaire et condition suffisante et qu'il serait particulièrement approprié à être proposé après un travail préalable sur ces notions.

Les parcours eulériens en Terminale ES

Le théorème d'Euler est un théorème admis dans les programmes de Terminale ES. Dans les manuels le problème est transformé en une série d'exercices résolus grâce à l'application de techniques. Le travail des élèves se résume à éventuellement tracer un graphe dont les sommets et arêtes sont décrits, puis compter le nombre d'arêtes en chaque sommet puis de trouver le chemin lorsqu'il existe ou de citer le théorème lorsque ce n'est pas le cas. Toute la richesse du problème permettant un travail de la modélisation, de la manipulation de l'objet graphe et de son exploration, de l'argumentation et de la construction de preuves et finalement de la construction même du concept de graphe est perdue pour les élèves à qui le modèle est fourni ainsi que le théorème. Leur travail se résume en l'application de techniques et il se fait jour une pauvreté conceptuelle autour de l'objet mathématique qui leur est présenté.

III Exemple d'une transposition : la coloration d'un graphe

La **coloration** d'un graphe est le choix d'une couleur pour chacun de ses sommets de telle façon que deux sommets voisins soient de couleurs différentes. Il est toujours possible de colorer un graphe, il suffit pour cela de choisir autant de couleurs que le graphe comporte de sommets. L'enjeu du problème va donc être de minimiser le nombre de couleurs employées, ce nombre minimum de couleurs pour un graphe étant nommé **nombre chromatique du graphe** et noté χ. Prenons un graphe, une liste ordonnée de ses sommets L et un ensemble de couleurs numérotées. Un **algorithme glouton de coloration** consiste à colorer chacun des sommets dans l'ordre de la liste L en attribuant la plus petite couleur disponible. Cet algorithme donne une borne supérieure au nombre chromatique égale au plus haut degré des sommets (noté Δ) auquel on ajoute 1. En effet, en une étape quelconque de l'algorithme, le sommet à colorer est au plus de degré Δ et ses voisins sont au pire colorés avec Δ couleurs différentes. Cette borne, $\boldsymbol{\chi \leq \Delta + 1}$, est admise dans le programme de Terminale ES.

Si l'on choisit comme ordre des sommets l'ordre basé sur les degrés décroissants des sommets, on obtient un algorithme glouton de coloration nommé algorithme de Welsh et Powell. Cet algorithme ne fait pas vraiment partie des programmes de la Terminale ES[9], mais le document d'accompagnement des programmes propose cet algorithme qui, de fait, a été repris par l'ensemble des manuels de Terminale ES. Nous vous présentons ici un exemple prototypique des problèmes de coloration tels qu'ils sont proposés aux élèves de Terminale. Il s'agit ici du sujet du problème de spécialité du baccalauréat de 2003, première année où les graphes sont apparus au programme.

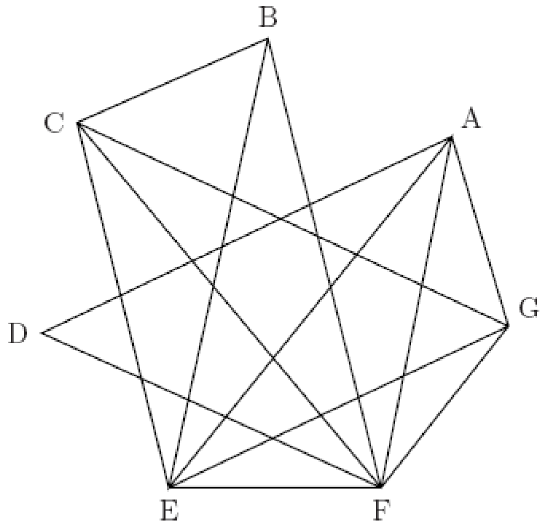
Exercice 2 (5 points) Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. À ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G). Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.

9 Le programme mentionne : « on présentera un algorithme simple de coloriage des graphes ».

1) *Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).*

Cette question est de l'ordre des questions de cours. Il s'agit ici de donner une matrice 7 par 7 dont les coefficients sont nuls à l'intersection *i j* s'il n'y a pas d'arêtes entre *i* et *j* et égaux à 1 sinon.

2) *Quelle est la nature du sous-graphe de Γ constitué des sommets A, E, F et G ? Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique χ(Γ) du graphe Γ?*



Graphe Γ

Le sous-graphe demandé est un sous-graphe complet ou **clique**, c'est-à-dire un graphe tels que chacun de ses sommets est voisin de tous les autres. Cette propriété nous donne une borne inférieure au nombre chromatique : chaque sommet d'un graphe complet étant voisin de tous les autres, sa coloration nécessitera au moins autant de couleurs qu'il n'a de sommets.

3) *Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ? En déduire un encadrement de χ(Γ).*

Le sommet de plus haut degré est le sommet F de degré 6. Le nombre chromatique est donc compris entre 4 et 7. Notons tout de même que la borne supérieure est évidente dans la mesure où le graphe est composé de 7 sommets.

4) *Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe Γ figurant en annexe.*

Cette question demande implicitement l'application de l'algorithme de Welsh et Powell. L'appliquer permet de trouver une coloration en 4 couleurs. La question n'est pas posée, mais on peut en déduire que le nombre chromatique de ce graphe est 4.

5) *Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ? Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.*

On doit donc prévoir une répartition en au moins 4 parties. Mais il est à remarquer ici que tout enjeu de minimalité a disparu de la question.

On constate ici de façon manifeste comment un problème est transformé en exercice : les questions sont guidées, l'application de techniques élémentaires suffit à les résoudre. Le baccalauréat visant à l'évaluation, on pourrait penser que cette transformation est anecdotique. Le « problème de coloration » présenté est prototypique dans la mesure où, comme l'ensemble des exercices du manuel Déclic (Déclic 2002), et ce n'est qu'un exemple, il mène aussi à deux conceptions erronées de la coloration :

- *Le nombre chromatique χ est égal à la taille de la plus grande clique du graphe.* Ceci est erroné. La famille des graphes de Mycielski par exemple est une famille de graphes sans triangle (ou clique à 3 sommets) dont les nombres chromatiques peuvent être arbitrairement grands.
- *L'algorithme de Welsh et Powell donne une coloration en χ couleurs.* Cet algorithme peut donner des *colorations en n couleurs* pour des graphes dont le nombre chromatique est égal à 2.

Pourtant la coloration des graphes est un problème riche. La détermination du nombre chro - matique dans le cas général, de la taille de la plus grande clique, ou de la famille des graphes dont le nombre chromatique est 3 sont des problèmes ouverts dans la recherche actuelle. Ce sont tous des problèmes difficiles (au sens de la complexité). De nombreuses questions pour - raient à ce sujet être posées aux élèves, certaines simples d'autres demandant plus de réflexion :

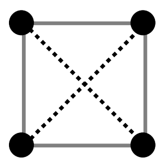
- Quels sont les graphes dont le nombre chromatique est 1 ? Et 2 ?
- Combien de couleurs sont nécessaires pour colorer les chaînes ? Les cycles ? Les arbres ?...
- Quel ordre sur les sommets choisir pour ces graphes pour que l'algorithme glouton soit opti - mal ?...

IV Une transposition possible : le problème de Ramsey - Vers une situation recherche en classe (SiRC)

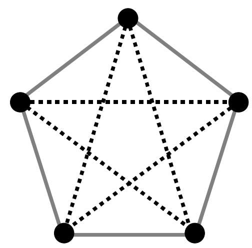
Comment transposer un problème de recherche actuel en classe ? Nous vous proposons ici un tel problème et l'argumentation permettant d'y répondre.

Un enfant colore toutes les arêtes d'un graphe complet K_n avec deux couleurs. Peut-il éviter d'obtenir un triangle monochrome ?

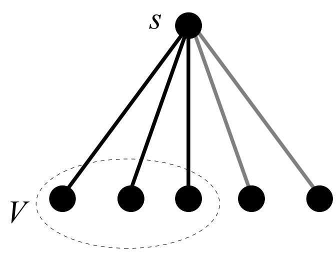
- Pour $n = 3$, la réponse est évidente.
- Pour $n = 4$, on trouve rapidement une telle coloration :



- La valeur $n = 5$ est plus difficile mais on peut trouver une coloration qui convient :



- Pour $n = 6$ on ne trouve pas réponse par tâtonnement, il y a alors nécessité de s'engager dans une démarche de preuve. Plaçons-nous en une sommet du graphe complet à 6 sommets. De ce sommet partent 5 arêtes colorés de deux couleurs. Quelle que soit la disposition de ces couleurs, on a nécessairement 3 arêtes colorés de la même cou - leur, disons noir. On s'intéresse à la couleur des arêtes entre les trois sommets de l'ensemble V. Si l'une de ces arêtes est noire, alors avec les deux arêtes partant de s elles forment un triangle noir. Sinon les trois arêtes sont grises et forment un triangle gris.



Pour $n = 6$ on ne peut donc pas éviter d'obtenir un triangle monochrome.

Ce problème est généralisable (en augmentant le nombre de couleurs ou la taille des graphes que l'on cherche à exclure), c'est un problème ouvert dans la recherche actuelle. Son domaine conceptuel est facile d'accès. Les méthodes de résolution ne sont pas désignées. Les connais - sances scolaires nécessaires sont restreintes. La question est facilement compréhensible. Toutes ces caractéristiques sont celles d'une SiRC.

V Conclusion et perspectives

Un partie du travail de thèse n'a pas été abordée ici. Nous avons effectué une analyse des énoncés des manuels de Terminale ES et analysé les techniques de résolution proposées aux élèves. Pour résumer rapidement les résultats de cette analyse, il ressort que la transformation des problèmes en exercices ne se cantonne pas aux problèmes eulérien et de coloration mais qu'elle est générale à toute cette partie du programme. Les techniques proposées sont de deux ordres, des techniques élémentaires de comptage ou de détermination de parité d'une part, des techniques à appliquer sans contrôle d'autre part[10]. Au niveau expérimental, outre les expérimentations évoquées ici, nous avons proposé une étude argumentée de l'article d'Euler à des élèves ingénieurs, pour questionner leurs représentations de la preuve et du raisonnement. Nous avons aussi participé à deux sessions de formation continue d'enseignants du secondaire en théorie des graphes. La troisième grande partie de notre travail est la proposition d'un corpus organisé de problèmes résolus à destination des enseignants de Terminale ES qui comprend, outre les problème cités précédemment, un problème de poignées de mains, la recherche de plus courts chemins dans un graphe, la construction de graphes planaires réguliers mise en parallèle avec la recherche des polyèdres de Platon, etc. Cet ensemble couvre largement le programme de la spécialité de Terminale ES.

Pour conclure la présentation de cette thèse, nous en résumerons les principaux résultats. La théorie des graphes a une richesse potentielle pour l'enseignement des mathématiques dans la mesure où il est possible d'y travailler la modélisation, la preuve, le raisonnement et l'argumentation mais aussi 'algorithmique. Pourtant à la lecture des programmes et plus encore des manuels, la pauvreté de la construction du concept de graphe est telle que l'occasion semble avoir été manquée. Nous nuancerons tout de même cela en n'oubliant pas tous les professeurs qui dans leurs classes ne se satisfont pas nécessairement des manuels.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses. Nous pensons que la caractérisation de la gestion des SiRC reste à développer, en particulier autour de la phase d'institutionnalisation cruciale avec ce type de gestion. L'ensemble des problèmes du corpus a été expérimenté lors des sessions de formation d'enseignants, mais il reste à en adapter certains pour la classe. Il nous semble aussi que des situations pourraient être développées pour le primaire, des expériences ont eu lieu en 1968 (voir Papy et Incolle 1968) et il pourrait être intéressant de poursuivre ce travail.

VI Bibliographie

Biggs N. L., Lloyd E. K., Wilson R. J. (1976), *Graph theory 1736-1936*, Oxford University Press.

Brousseau Guy (2004), *Théorie des situations didactiques*, Deuxième édition (première édition en 1998), Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Déclic Maths Terminale ES obligatoire et spécialité (2002), Édition Hachette Education.

Euler Leonhard (1736) Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8*, pp 128-140. Traduction en français par Coupy E. (1851) Solution d'un problème appartenant à la géométrie de situation par Euler, *Nouvelles annales de mathématiques*, tome 10, 1851, pp 106-119.

Godot Karine (2006) La roue aux couleurs : une situation-recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3, *Grand N n°78*, IREM de Grenoble.

10 En particulier autour de l'algorithme de Dijkstra.

Grenier Denise, Payan Charles (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18.2, pp. 59–100, Éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Grenier Denise, Payan Charles (2002) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation en mathématiques discrètes, *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Édité par l'ARDM, Paris.

Lucas Édouard (1883) *Récréations mathématiques - Tome 2 -* Qui perd gagne. Les dominos. Les marelles. Le parquet. Le casse-tête. Le jeu des demoiselles. Le jeu icosien d'Hamilton, Gauthier-Villars, Paris.

Papy et Frédérique avec la participation de Incolle D. (1968) *L'enfant et les graphes*, Marcel Bruxelles-Montréal-Paris, Didier, 189p.

Rolland Julien (1999) *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentis-sage de la modélisation et de l'implication*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Transmath Term ES obligatoire et spécialité (2002), Édition Nathan.

Interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire en France : cas des équations différentielles du premier ordre

Fernand Malonga Moungabio

Laboratoire André Revuz

Équipe DIDIREM – Université Paris Diderot

Résumé

Le programme actuel de mathématiques de la classe de terminale scientifique incite les professeurs de mathématiques et de physique à mener un travail conjoint sur les équations différentielles. Cela nous a conduit à nous intéresser à l'articulation des enseignements de ce sujet dans les deux disciplines. Pour ce faire, nous avons choisi de caractériser la viabilité de la synergie entre les mathématiques et la physique en termes de continuité didactique.

En nous appuyant sur les travaux antérieurs mettant en jeu des interactions entre les mathématiques et la physique, nous avons choisi d'organiser notre recherche autour d'un certain nombre de questions : Comment apparaissent les équations différentielles dans les manuels scolaires de mathématiques et de physique ? Une continuité didactique entre ces deux disciplines existe-t-elle, et si oui, sous quelle forme ? La méthode d'Euler constitue-t-elle un champ propice ? Comment les enseignants perçoivent-ils et mettent-ils en œuvre cette continuité didactique ?

Notre recherche a montré que la continuité didactique est loin d'être assurée dans les faits et se heurte à de nombreuses difficultés, comme l'analyse des manuels scolaires le met particulièrement en évidence. De plus, la façon dont est traitée la méthode d'Euler permet de constater que les deux enseignements s'ignorent, et vont même jusqu'à donner l'impression qu'il y a en réalité deux méthodes d'Euler différentes, selon la discipline. Enfin, l'analyse des réponses d'enseignants des deux disciplines à un questionnaire confirme les difficultés de mise en œuvre d'une continuité didactique entre les deux disciplines et permet d'en identifier certaines causes.

Mots clefs

Mathématiques, Physique, Didactique, équations différentielles, méthode d'Euler, continuité didactique

I Introduction

Nous rapportons dans ce texte quelques éléments marquants d'une étude que nous avons menée dans le cadre d'une thèse[1] en didactique des mathématiques. L'origine de ce travail vient de deux constats, en relation avec l'enseignement des équations différentielles en classe de terminale scientifique en France (élèves de 17-18 ans) :

- L'évolution des contenus des programmes de mathématiques du cycle terminal : le programme actuel, mis en application en 2002, réserve une part plus réduite aux équations différentielles que les précédents ; les équations différentielles du second ordre ne sont plus au programme ; le seul type d'équation retenu est celui du premier ordre, de la forme $y' = ay$ (a étant un réel non nul).

1 La thèse a été soutenue en 2008 et co-encadrée par deux enseignants-chercheurs de disciplines différentes : B. Parzysz (mathématiques) et D. Beaufils (physique).

- Le lien très fort entre les nouveaux programmes de mathématiques et de physique (2002) : en mathématiques l'enseignement des équations différentielles, mais aussi d'autres domaines (fonction exponentielle, probabilité …) s'accompagne d'une étude des situations s'appuyant sur des phénomènes physiques sous des modèles soit continus, soit discrets. La notion de "modélisation" prend alors une place majeure dans ce programme et doit permettre une mise en relation avec le programme de physique, qui est très novateur[2], dont le thème central est « l'étude des phénomènes continus en fonction du temps ».

Par ailleurs, le thème des équations différentielles a fait l'objet d'une réflexion par le Groupe d'Experts des Programmes Scolaires (GEPS). Le document d'accompagnement des programmes rédigé par les membres de ce groupe incite très fortement les enseignants des deux disciplines à mener un travail conjoint autour de la notion d'équation différentielle. Il nous paraît intéressant d'examiner la manière dont une telle intention didactique se concrétise dans les faits notamment au niveau des manuels scolaires, éléments du curriculum réel (Perrenoud, 1993), et de recueillir le point de vue des enseignants eux-mêmes sur la manière dont ils perçoivent la continuité didactique, prônée par les programmes des deux disciplines au sujet des équations différentielles.

De plus, depuis plusieurs années, la littérature sur les relations entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire et universitaire abonde. Diverses réflexions sont menées aussi bien en mathématiques qu'en physique (Munier et *al*. 2007, Ba 2007, Mizony 2006, Rogalski 2006, Malafosse 1999, Noirfalise 2004, Saglam 2004, Rodriguez 2007, Kuntz 2002, etc.). Cependant, de toutes ces recherches, aucune ne met en cause un enseignement des équations différentielles en mathématiques qui s'appuie sur des situations de modélisation (issues des sciences expérimentales). On peut donc s'interroger sur les choix didactiques de la noosphère, sur la viabilité de la synergie mathématiques-physique et sur les contraintes qui pèsent actuellement sur l'enseignement des équations différentielles, à la fois en mathématiques et en physique.

Dans ce qui suit, nous présentons dans un premier temps la problématique de notre étude ainsi que les différents cadres théoriques convoqués. Ensuite, nous présentons à partir de quelques exemples, une analyse des manuels montrant la place, mais aussi les limites, de la continuité didactique entre les mathématiques et la physique. Enfin, nous présentons des résultats sur les observations de classes afin de relever les écarts entre les réalités institutionnelles (dans les programmes et les manuels) et les réalités dans les classes.

II Problématique et cadres théoriques

1. Problématique

A la lumière des textes des nouveaux programmes et des documents d'accompagnement desdits programmes de mathématiques et de physique, il en résulte une volonté de mise en relation forte entre l'enseignement des deux disciplines autour des équations différentielles. Dans chacune de ces deux disciplines, les défis sont alors multiples.

2 Les équations différentielles du premier ordre sont introduites pour la première fois dans la classe de terminale en physique. Une autre nouveauté est l'introduction de la méthode d'Euler dans les deux disciplines.

Changement radical par rapport aux anciens programmes

En mathématiques, avant 2002, les équations différentielles (du premier et du second ordre) étaient introduites comme objet mathématique, leur caractère d'outil apparaissait ensuite dans la partie "application". Dans le programme actuel, les équations différentielles du second ordre ne sont plus étudiées. Par contre, celles du premier ordre prennent une place de premier plan au regard de la part qui est consacrée à l'introduction de la fonction exponentielle et au traitement des situations de modélisation issues d'autres disciplines.

En physique, l'expression "équation différentielle" n'était introduite qu'au moment de l'étude des oscillations, expression qui, dans ces conditions, ne prenait guère de sens (en raison de l'absence des équations différentielles du premier ordre dans ces programmes). Par ailleurs, dans l'étude du condensateur qui était au programme, la charge était évoquée comme un simple régime transitoire, et était à ce titre peu digne d'intérêt. Dans le programme actuel, le centrage sur le régime transitoire et sur sa modélisation par une équation spéciale – l'équation différentielle du premier ordre – permet à l'évidence de jouer sur les deux tableaux : l'étude complète du phénomène et l'introduction d'une situation tout à fait nouvelle, mais cette fois intelligible, qui est l'interdépendance d'une grandeur et de sa vitesse de variation.

Renforcement des liens entre les deux disciplines dans les nouveaux programmes

Le défi est alors, du côté des mathématiques, d'introduire tôt dans l'année la fonction exponentielle, la méthode d'Euler et les équations différentielles, mais aussi d'assurer de bons exemples de modélisation (réalistes, bien posés et adaptés au programme). Alors que de son côté la physique doit pouvoir s'appuyer sur des notions, propriétés et théorèmes mathématiques pour présenter les solutions analytiques des équations différentielles déduites des lois de la physique.

Nous considérons que le jeu d'aller-retour entre les deux disciplines que sont les mathématiques et la physique à propos de la notion d'équations différentielles, est censé non seulement contribuer à l'acquisition des connaissances et des méthodes par les élèves, mais aussi aider à la compréhension de cette notion et mettre en valeur l'interaction entre mathématiques et physique. Cependant, la concrétisation d'un tel projet, tant dans l'élaboration des manuels scolaires que dans les pratiques des enseignants, toutes deux soumises à des contraintes fortes, n'est pas immédiate et est source de questions, telles que :

- Quelle est la place de l'enseignement des mathématiques dans le cours de physique, et inversement ?
- Comment la relation mathématiques-physique est-elle mise en œuvre dans les manuels de chacune des disciplines ?
- En quoi l'utilisation des environnements informatisés contribue-t-elle à l'amélioration des interactions entre mathématiques et physique ?

Notre hypothèse est que la mise en relation entre les deux disciplines ne relève ni d'une transdisciplinarité, ni d'une pluridisciplinarité (dont on sait la difficile mise en pratique) mais de ce que nous appelons *continuité didactique*. Ce point de vue, à la fois plus modeste et plus clair, nous semble mieux à même de caractériser l'objectif de mise en relation, au niveau scolaire, des disciplines scientifiques. Chacune garde sa spécificité, mais des liens concrets sont établis. Pour ce qui concerne la relation mathématiques – physique, la continuité que nous étudions porte donc sur la modélisation de systèmes, et plus spécifiquement sur la modélisation par une équation différentielle du premier ordre.

2. Cadres théoriques

Cadres de rationalité

Dans sa thèse, Lerouge (1992) a introduit la notion de cadre de rationalité pour analyser la dialectique entre le familier de l'élève (de collège) et le culturel mathématique – qui lui est enseigné – à propos de la droite. Le modèle du cadre de rationalité prend appui sur la notion d'objets au sens de Bunge (1983) qui distingue trois catégories :

> (...) les objets matériels qui ont une existence propre, les objets mentaux qui ont une existence psychique, et les objets conceptuels qui ne sont ni matériels ni mentaux et qui n'existent que dans la mesure où ils appartiennent à un certain contexte (les théories par exemple). (Lerouge 2000, p.175).

Lerouge considère deux types de rationalités :

> (i) La rationalité personnelle apparaît comme le système global de structuration des connaissances d'un sujet particulier à un moment de son histoire. C'est une notion dynamique qui ne peut être définie qu'en référence à un sujet particulier et à la chronologie de son développement et de ses apprentissages. Dans cette perspective, la conceptualisation vise à construire des objets mentaux à partir d'objets matériels, d'objets mentaux déjà construits, et d'objets conceptuels.
> (ii) La rationalité culturelle d'une discipline scientifique apparaît comme le système global de structuration des savoirs dans cette discipline, stabilisé par la culture humaine en un lieu et à une époque donnés. C'est une entité culturelle, instanciée à la chronogenèse et à la topogenèse de la discipline, et de ce fait en permanente évolution. (ibid., p.176)

Il en résulte alors une définition du cadre de rationalité :

> […] un ensemble cohérent de fonctionnements de la pensée culturelle ou personnelle, caractérisé par quatre composantes : l'ensemble des objets conceptuels sur lequel porte la conceptualisation, le type de processus de validation, les éléments de rationalité (règles de traitement et de validation) et enfin, les registres sémiotiques qui servent de support à la conceptualisation et à la communication. (Malafosse, Lerouge et Dusseau 2001a, p.121).

Plusieurs cadres de rationalité peuvent être considérés selon les cas. Par exemple, dans le cas de notre étude sur l'enseignement des équations différentielles en terminale S, à la fois en mathématiques et en physique, on peut envisager plusieurs cadres qui interviennent dans le processus de mise en œuvre de la continuité didactique entre les deux disciplines : cadres culturels (des mathématiques, de la physique, de l'informatique) et cadre personnel. La question qui se pose est alors celle de la manière dont les jeux de cadres de rationalité sont pris en charge et mis en œuvre dans les manuels scolaires des deux disciplines. Nous nous plaçons ainsi dans des cadres culturels particuliers, à savoir des cadres didactiques construits dans un but de transposition des savoirs entre une communauté scientifique et l'élève en situation d'apprentissage scolaire. Nous avons qualifié ces cadres didactiques de 'cadres d'intelligibilité' car c'est dans ces cadres que se situent le sens et donc la compréhension des équations différentielles et/ou des systèmes qu'elles modélisent. Il nous a donc paru intéressant d'identifier, dans le traitement des situations de modélisation, non seulement les règles de validation mais aussi les tâches de transition qui permettent de passer d'une discipline à une autre, c'est-à-dire d'une rationalité à une autre.

Pour mieux caractériser les jeux de cadres de rationalité qui fonctionnent entre les mathématiques et la physique dans les manuels, nous avons eu besoin de compléter notre étude par une analyse des savoirs et savoir-faire relatifs aux équations différentielles. D'où le recours à la notion de praxéologie.

Praxéologie et organisation mathématiques

Dans sa théorie anthropologique du didactique, Chevallard (1999) considère que l'analyse de l'activité humaine conduit à dégager des entités minimales, les praxéologies, qu'il désigne par l'organisation (ou la formule) [T/τ /θ /Θ] où T représente un type de tâches, τ une technique (manière d'accomplir les tâches du type *T)*, θ une technologie (discours qui justifie et rend intelligible la technique τ) et Θ une théorie, (qui justifie et éclaire la technologie θ).

Le bloc [T/τ] y représente la praxis (ce qu'il y a à faire et comment le faire), ou la pratique (si l'on regarde plutôt du côté de *T*), ou le savoir-faire (si l'on regarde plutôt du côté de τ), tandis que [θ/Θ] y figure le logos (comment penser le faire et comment penser cette pensée du faire), qu'on nomme encore le savoir (si l'on regarde plutôt du côté de θ) ou la théorie (si l'on regarde plutôt du côté de Θ), ces quasi-synonymies concrétisant une partie du problème traité ici.

Dans notre étude, nous empruntons également à Chevallard et Wozniak (2003) le concept d'organisation mathématique mixte (OMM) qui désigne une praxéologie dont les objets articulés sont des savoirs mathématiques et un domaine extramathématique. Pour ce type d'organisation de savoirs, « son enseignement doit se construire dans un commerce constant avec un certain domaine de réalité extramathématique » (Op. cité, p.2).

Les situations de modélisation que nous avons analysées, issues des manuels de mathématiques et de physique, portent en particulier sur deux domaines extramathématiques : électricité et mécanique. Des types de tâches identiques apparaissent dans les deux disciplines. Il nous paraît intéressant d'analyser leur structure praxéologique dans une perspective de continuité didactique.

En nous appuyant sur ce cadre théorique (cadres de rationalité et praxéologie), nous précisons notre questionnement :

- Quelle part de la modélisation revient aux mathématiques dans le traitement des situations extra-mathématiques, notamment celles issues de la physique ? Autrement dit, quelle articulation entre le champ de référence (physique) et le champ de traitement (mathématique) ? Quelle place pour les tâches de transition ?
- L'équation différentielle est-elle simplement un objet des mathématiques et un outil pour la physique, ou bien la praxéologie se joue-t-elle de façon subtile entre les deux disciplines ?
- Y a-t-il continuité didactique dans les concepts, méthodes et représentations entre les mathématiques et la physique ?

L'introduction des méthodes numériques (et informatiques) engage bien évidemment un questionnement de même type que ci-dessus, mais nous focaliserons notre attention sur deux aspects plus globaux qui nous semblent essentiels au vu de la dimension "innovation" de cette évolution :

- Quel est le rôle/statut/place des méthodes numériques (dans les ouvrages, tant du point de vue cours que du point de vue exercices) ?
- Comment est-ce traité/vécu par les enseignants ?

III Analyse des manuels

Nous avons analysé 8 manuels de mathématiques parus chez 5 éditeurs différents[3] : 45 exercices portant sur les équations différentielles appliquées à des systèmes physiques ont été examinés.

3 Bordas (Indice 2002, Fractale 2002), Nathan (Hyperbole 2006, Transmath 2006), Hachette (Déclic 2005, Repère 2006), Bréal (IREM de Poitiers 2002), Didier (Math'x 2006).

De même, nous avons analysé 7 manuels de physique chez 5 éditeurs [4]. Nous y avons relevé 55 exercices qui comportent des équations différentielles du premier ordre.

Notre premier travail a été de faire une analyse descriptive des manuels de façon à situer la place accordée par les auteurs de manuels scolaires. L'analyse descriptive (quantitative) des manuels scolaires, que nous n'allons pas présenter ici, comporte donc tout naturellement des informations quant aux champs et modes d'introduction des équations différentielles dans les manuels de physique et aux champs disciplinaires invoqués dans les manuels de mathématiques, des informations sur les nombres d'exercices correspondants, etc.

1. *Continuité didactique du point de vue de la modélisation et des jeux des cadres de rationalité*

Cet axe d'analyse vise donc à caractériser la place et la nature de la **modélisation** telle qu'elle apparaît dans les manuels, aussi bien de mathématiques que de physique, et ce à propos du cœur de notre problématique : les équations différentielles du premier ordre.

Par caractériser la place, nous entendons :
- identifier les champs (domaines disciplinaires) dans lesquels apparaissent et sont traitées les équations différentielles,
- quantifier le volume qui y est consacré.

Caractériser la nature, c'est dégager les caractéristiques de l'interaction des deux disciplines dans des activités relevant de la modélisation par équation différentielle. En particulier, il s'agit de voir les articulations qui se jouent entre les considérations et les tâches qui relèvent de la physique et celles qui sont de l'ordre des mathématiques.

Plusieurs schémas ont été proposés pour traduire le processus de modélisation. Au regard des contenus du programme actuel de mathématiques (2002), des documents d'accompagnement desdits programmes et de la lecture de quelques situations extra-mathématiques, nous nous sommes servi du schéma simplifié ci-dessous qui représente les étapes classiques de traitement d'une situation de modélisation conduisant à une équation différentielle.

$$\begin{tikzcd}
\text{1) Physique} \arrow[d, "PM"'] & \text{4) Physique} \arrow[l] \\
\text{2) Maths} \arrow[r] & \text{3) Maths} \arrow[u, "MP"']
\end{tikzcd}$$

Figure 1 : Schéma simplifié qui traduit le processus de modélisation des situations « physiques ».

Ainsi, dans les manuels de mathématiques de terminale S, les situations de modélisation de situations sont données généralement sous forme de modèle physique (domaine pseudo-concret), et leur traitement passe par une traduction mathématique (modèle mathématique). C'est à ce niveau que l'on doit examiner la manière dont la transition physique-mathématiques (PM) se fait. Une deuxième transition apparaît lorsqu'il s'agit d'interpréter le résultat mathématique. C'est la transition mathématiques-physique (MP) qui doit permettre de répondre normalement à la question de départ posée dans le cadre de la physique.

4 Hatier (Micromega 2002), Nathan (Tomasino 2002, Sirius 2006), Hachette (Hélios 2002, Durandeau/Mauhourat 2006), Belin (Parisi 2002), Bordas (Galiléo 2002)

Exemples d'analyse des manuels

Premier exemple (mathématiques)

101 Circuit électrique

Un circuit est constitué d'un condensateur de capacité $C = 75 \cdot 10^{-6}$ farads, d'une résistance $R = 2 \cdot 10^4$ ohms, d'un générateur g et d'un interrupteur.

On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension V.

La tension U aux bornes du condensateur est alors solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (1) :

$$U(t) + RCU'(t) = V(t).$$

On suppose que $V(t) = 6\,e^{-\frac{2}{3}t}$ où t est exprimé en secondes.

De plus la charge initiale du condensateur impose la condition :

$$(2):\; U(0) = \frac{1}{3}V(0).$$

a. Démontrer que la fonction U définie sur $[0\,;+\infty[$ par $U(t) = (4t+2)\,e^{-\frac{2}{3}t}$ vérifie la condition (2).

b. Montrer que la fonction U est solution de l'équation différentielle (1).

c. Étudier le sens de variation de U et calculer la limite de U en $+\infty$.

d. Démontrer que l'équation $U(t) = 10^{-3}$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;20[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 1 seconde.

e. L'appareil mesurant $U(t)$ ne détecte pas les tensions inférieures à 10^{-3} volts.

Pour quelles valeurs de t ne détecte-t-il plus la tension $U(t)$?

Encadré 1 : Extrait du manuel Collection Indice, Exercice 101, p. 98

Cet exercice a comme champ de départ l'électricité, et plus précisément l'étude de la charge d'un condensateur.

On remarque tout d'abord que le texte fournit l'équation différentielle qui régit le phénomène ; la situation est donc déjà modélisée.

- **Champ de départ**

Le positionnement de ce départ du point de vue du cadre de rationalité de la physique, présente d'emblée quelques difficultés :

- la phrase d'introduction "…le générateur délivre alors une tension *V*", laisse penser, comme c'est souvent le cas et par la notation, que *V* est une constante, alors que l'équation différentielle qui suit fait intervenir *V*(*t*).
- Il est par ailleurs étonnant de voir un générateur délivrer une tension en exponentielle décroissante. Une telle situation ne se rencontre jamais et peut laisser supposer que ce générateur est défectueux !.
- Au niveau du vocabulaire, la phrase "la charge initiale du condensateur impose la condition…" est certes mathématiquement correcte mais, outre le fait que l'on ne comprend pas pourquoi le condensateur (qui est un récepteur) imposerait sa tension initiale au générateur, la condition est donnée sous forme purement mathématique (et non par une spécificité physique).

S'agissant du passage du champ de départ au champ de traitement, nous constatons que l'équation différentielle proposée (second membre non constant) n'est pas au programme de mathématiques de la classe. L'exercice doit donc contenir, comme on le constate effectivement ensuite, un élément ou une étape supplémentaire qui en permette la résolution.

- **Traitement**

La première question demande de « démontrer ». Mais en réalisé, il s'agit seulement de vérifier, la conformité de l'expression de $U(t)$[5] à la relation $U(0) = 1/3.V(0)$. La démarche attendue consiste à calculer les valeurs numériques des fonctions U et V en 0 puis de comparer $U(0)$ et $V(0)/3$. C'est donc une tâche mathématique – au demeurant triviale – qui est demandée.

De même, les questions b, c et d relèvent d'un traitement purement mathématique.

Ce sont là des questions que l'on rencontre souvent, elles sont presque rituelles, dans le cas de l'étude d'une fonction.

Signalons aussi que rien ne permet de penser que la fonction U donnée est **la** solution du problème physique en $t = 0$, faute d'invoquer un argument mathématique d'unicité des solutions de l'équation différentielle $U + RCU' = V$ (ou même un argument physique à l'appui de cette unicité).

- **Retour au champ de départ**

La dernière question qui demande d'interpréter le résultat obtenu à la question précédente, propose un retour à la situation physique. Ce type de question est souvent inexistant dans la plupart des situations de modélisation rencontrées dans les manuels de mathématiques. Mais ce retour, ambigu du point de vue de la physique, est "symbolique" car on ne sait pas ce que peut être un appareil qui mesure $U(t)$. D'ailleurs, $U(t)$ au sens strict, est la valeur numérique de la fonction "tension" U. Cet appareil n'existe pas. Nous signalons au passage, l'ambiguïté sur le statut des symboles U ou V qui tantôt désigne une valeur numérique, tantôt une fonction (confusion assez courante entre fonction et image).

Par ailleurs, en considérant $U(t)$ comme étant l'image de la fonction U en t, la représentation symbolique souhaitée ici pour l'équation différentielle est $U + RC\,U' = V$ en précisant que les tensions U et V sont fonction du temps. Ceci serait en accord avec les notations adoptées par l'auteur du manuel, d'autant plus qu'en classe, l'écriture standard d'une équation différentielle du premier ordre est $y' = ay + b$.

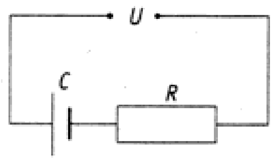
5 Dans les manuel de physique, la tension aux bornes d'un générateur est désignée par le symbole u tandis que U (on note souvent Um) est utilisé pour représenter la tension maximale.

Deuxième exemple (mathématique)

Nous retrouvons bien d'autres situations dont les jeux entre le cadre de rationalité des mathé - matiques et celui de la physique peuvent être interprétés en termes de "fausse continuité didactique". On peut citer par exemple le cas de l'exercice 121 p. 113 (Fractale).

121 On considère le circuit électrique ci-contre où C est la capacité du condensateur et R, la valeur de la résistance. U désigne la tension aux bornes du circuit.

En physique, on montre que : $R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q = U$ où q, la charge du condensateur, est une fonction du temps qui prend la valeur 0 pour $t = 0$.



1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par q.

2) Montrer que $q(t) = CU - CUe^{-\frac{t}{RC}}$.

3) Sachant que l'intensité $i(t)$ vérifie $i(t) = \frac{dq}{dt}$, exprimer $i(t)$.

On peut remarquer qu'ici l'équation différentielle est déjà donnée, mais avec les notations des physiciens cette fois, contrairement aux deux premières situations que nous avons analysées. On peut aussi constater que le schéma donné en accompagnement du texte n'est pas correct : la représentation du générateur (implicite) n'est pas bonne et celle du condensateur est fausse (c'est le symbole d'une pile). La tension U aux bornes du circuit [6]est une constante, ce qui n'est ni dit ni expliqué (le mot « générateur » est absent).

La relation $R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{c}q= U$ donnée dans le texte est une équation différentielle. On peut donc s'interroger sur le sens de la première question. Le traitement de toutes les questions relève du seul domaine des mathématiques. Le retour à la situation de départ n'est pas envisagé.

Il nous semble que l'objectif de l'exercice peut être la manipulation d'expressions mathéma - tiques comportant des symboles de "physique". La phrase « en physique, on montre que … » semble marquer l'intention de développer un travail mathématique. Aucune tâche de transi - tion n'est demandée. Tel que formulé, cet exercice présente très peu d'intérêt didactique rela - tivement à la mise en valeur de la continuité didactique.

Troisième exemple (physique)

Cet exemple, tiré d'un ouvrage de physique, correspond, non pas à un exercice, mais à un extrait de la partie relative à la modélisation par équation différentielle de la charge d'un condensateur et au traitement analytique demandé, conformément au texte du programme de terminale S.

6 L'auteur, ne veut il pas parler de la tension au borne du "générateur" au lieu de "circuit".

L'étape précédente – application des lois de l'électrocinétique au circuit modélisé – a permis d'aboutir à une première relation $U = RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C$ (désignée par (1)) dans le texte qui suit ;

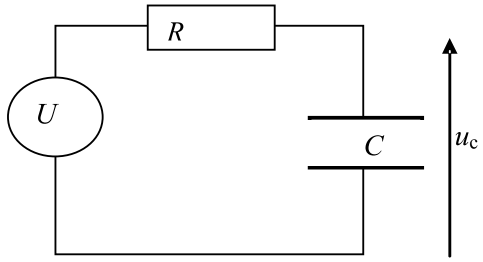
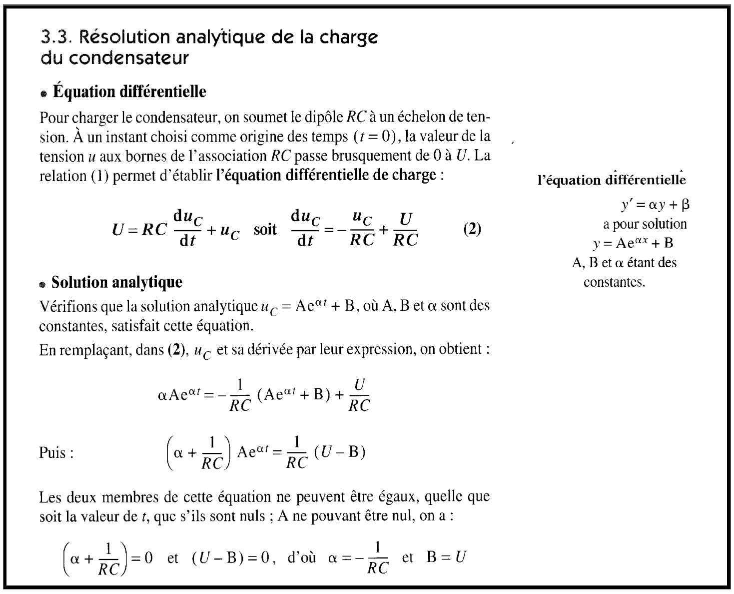


Figure 2 – Schéma du circuit de charge du condensateur



3.3. Résolution analytique de la charge du condensateur

• Équation différentielle

Pour charger le condensateur, on soumet le dipôle RC à un échelon de tension. À un instant choisi comme origine des temps $(t = 0)$, la valeur de la tension u aux bornes de l'association RC passe brusquement de 0 à U. La relation (1) permet d'établir **l'équation différentielle de charge** :

$$U = RC\frac{du_C}{dt} + u_C \quad \text{soit} \quad \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{RC} + \frac{U}{RC} \qquad \textbf{(2)}$$

l'équation différentielle $y' = \alpha y + \beta$ a pour solution $y = Ae^{\alpha x} + B$ A, B et α étant des constantes.

• Solution analytique

Vérifions que la solution analytique $u_C = Ae^{\alpha t} + B$, où A, B et α sont des constantes, satisfait cette équation.

En remplaçant, dans **(2)**, u_C et sa dérivée par leur expression, on obtient :

$$\alpha Ae^{\alpha t} = -\frac{1}{RC}(Ae^{\alpha t} + B) + \frac{U}{RC}$$

Puis : $$\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right)Ae^{\alpha t} = \frac{1}{RC}(U - B)$$

Les deux membres de cette équation ne peuvent être égaux, quelle que soit la valeur de t, que s'ils sont nuls ; A ne pouvant être nul, on a :

$$\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right) = 0 \quad \text{et} \quad (U - B) = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha = -\frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad B = U$$

Encadré 2 – Extrait de manuel Microméga (exemple du circuit RC)

- **Étape 1 :** À propos de l'introduction de l'objet équation différentielle

La première étape relève clairement d'une modélisation dans le champ de la physique, on peut même dire de la physique théorique. Le circuit est modélisé par un schéma faisant apparaître les composants idéaux et il s'agit, moyennant la prise en compte d'orientations figurant sur le schéma, d'appliquer les lois de l'électrocinétique pour établir l'équation reliant la tension à sa dérivée.

- **Étape 2 :** Résolution de l'équation différentielle (transition entre mathématiques et physique).

Il y a clairement ici un changement de référence et on passe de la physique à une résolution purement mathématique. Cependant l'approche est quelque peu problématique. En effet, la phrase « Vérifions que la solution … satisfait cette équation » est problématique. Ce qui est en jeu en fait c'est la détermination des paramètres dans l'expression de la solution. Cette démarche s'appuie sur le résultat rappelé dans la marge, qui est toutefois exprimé de façon ambiguë, voire incorrecte du point de vue mathématique. En effet l'équation différentielle $y' = \alpha y + \beta$ n'a pas pour solution $y = Ae^{\alpha x} + B$ (où A et B sont des constantes) mais toutes les fonctions $y(x) = Ae^{\alpha x} - \beta/\alpha$ pour tout A.

Ce résultat qui fait partie du cours de mathématiques n'est donc pas ici clairement exploité. Outre le jonglage nécessaire entre les x et les t, il y a confusion entre deux sortes de valeurs dites constantes, d'une part B et α qui sont des paramètres de l'équation (ici exprimés en fonction de R, C et U) et A qui est une constante qui peut être déterminée par la donnée des conditions initiales qui ne sont pas explicitées dans cet exercice. Dans la formulation de l'exercice, les auteurs font comme si il y avait une solution unique, mais reste indéterminé.

Toute la tâche consiste donc à déterminer la valeur des deux constante B et α, à partir d'une assertion douteuse qui cache en fait un vrai théorème mathématique qui donne du même coup la valeur de ces constantes.

Par ailleurs, la technique mathématique justifiant le passage de l'égalité $(\alpha+\frac{1}{RC})Ae^{\alpha t}=\frac{1}{RC}(U-B)$ à $(\alpha+\frac{1}{RC})=0$ et $(U-B)=0$, n'est pas triviale.

En effet, si on pose [$P=(\alpha+\frac{1}{RC})A$] et [$Q=\frac{1}{RC}(U-B)$], qui sont deux constantes, pour démontrer la proposition $Pe^{\alpha t} = Q$ implique que $P = Q = 0$, on peut par exemple faire $t = 0$ (ce qui fournit $P = Q$) puis faire tendre t vers - ∞ (ce qui fournit Q = 0), ce qui représente une justification assez complexe.

En outre, la condition indispensable pour conclure « A étant non nul » sort du cadre mathématique puisqu'elle repose sur une référence à l'expérience (qui montre que la tension est bien une fonction du temps) ; mais ce lien n'est pas explicité, de sorte que le passage au cadre de référence du physicien est occulté. En résumé, cette technique fournit bien la solution cherchée, mais c'est au prix de multiples contorsions. C'est un exemple flagrant du manque de continuité didactique dans les enseignements des deux disciplines.

Résultats

Du point de vue de la modélisation, les situations proposées dans les manuels de mathématiques s'avèrent déjà modélisées. En effet, dans la quasi-totalité des cas traités, aussi bien en activité introductive, en travaux dirigés qu'en exercices, la mise en équation différentielle est prise en charge par l'énoncé et l'équation différentielle qui régit le phénomène à étudier est déjà donnée ; des indications pour le traitement de la tâche sont également souvent données.

L'étude dans le champ de traitement des équations différentielles relève du seul cadre des mathématiques : elle consiste à procéder par des manipulations (en général des substitutions) pour retrouver l'équation différentielle (connue d'avance) ou alors à vérifier qu'une fonction proposée dans la situation est solution de l'équation différentielle donnée. Quant au traitement proprement dit de l'équation différentielle, c'est-à-dire sa résolution, la tâche de l'élève se réduit à reconnaître le type d'équation et à appliquer la procédure (méthode) vue en cours.

Le contexte choisi (sciences expérimentales) pour la mise en œuvre de la continuité mathéma - tiques-physique, est peu exploité. Ce constat montre que le jeu de cadres de rationalité attendu, dans le but d'une continuité didactique, est réduit, voire inexistant. Ainsi on peut schématiser le traitement habituel, dans les manuels de mathématiques, des situations de modélisation conduisant à une équation différentielle selon le schéma simplifié suivant :

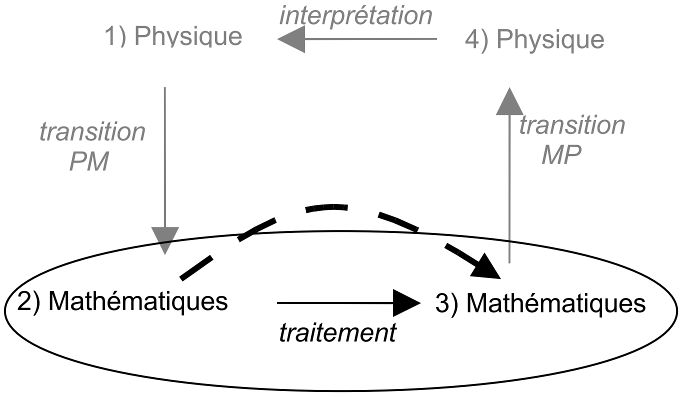


Figure 3 : Schéma simplifié du processus de modélisation des situations de physique dans les manuels de mathématiques

La transition PM est assurée très souvent par l'énoncé. La tâche qui revient à l'élève (flèche en pointillé) est le traitement mathématique du problème (passage 2 -3). De même, dans la plupart des situations analysées, il y a très peu de tâches relatives à la transition MP. De plus, même quand le retour au champ de départ (physique) est envisagé, la manière dont les ques - tions sont formulées n'indique pas toujours de façon explicite le recours au passage 4-1 (phy - sique – physique), c'est-à-dire l'apport d'une réponse physique à la question posée dans ce cadre là.

Dans les manuels de physique, c'est la situation inverse qui apparaît, que l'on peut schématiser par :

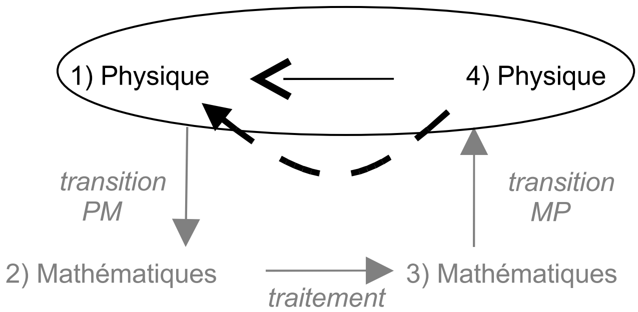


Figure 4 – Schéma simplifié de la modélisation dans les manuels de physique.

Il apparaît clairement que le jeu de cadres de rationalité ne se fait pas sans difficultés. Le cadre mathématique ainsi sollicité ne renvoie pas directement aux connaissances de l'élève en mathématiques, ce qui non seulement ne favorise pas sa compréhension, mais est en rupture avec ce que préconisent les commentaires des programmes sur la relation entre les deux disci - plines.

2. Continuité didactique du point de vue de la praxéologie

Dans cet axe, l'étude des manuels consiste à :

identifier les types des tâches les plus utilisés (types de tâches dominants) dans le cas des situations de modélisation, tout en précisant le domaine de la physique dont ils sont issus (électricité, radioactivité ou mécanique).

caractériser l'organisation mathématique qui émerge dans l'accomplissement des quatre types de tâches de modélisation que nous avons répertoriés et présentés plus haut. Il s'agit d'examiner la ou les technique(s) et technologie(s) utilisée(s) dans ce cas.

Nous ne donnons ci-dessous, compte tenu du volume limité de cet article, qu'une indication du type d'approche utilisée

Types de tâches et présence dans les manuels de physique et de mathématiques

Nous avons dans un premier temps identifié différents types de tâche que l'on trouve dans le programme officiel, les exercices corrigés / exercices-types des manuels scolaires, les sujets de bac, etc. des deux disciplines :

(T1) : déterminer/établir une équation différentielle.
(T2) : résoudre "algébriquement" une équation différentielle.
(T3) : vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
(T4) : résoudre (numériquement) une équation différentielle
(T5) : déterminer analytiquement une propriété de la solution (temps caractéristique, valeur limite quand t tend vers l'infini, etc.).
(T6) : travailler sur une représentation graphique.
(T7) : calculer une autre grandeur par dérivation.

Ce sont les quatre premiers types de tâches qui apparaissent le plus souvent et, ce dans les manuels des deux disciplines. Dans les manuels de physique, les types de tâches (T2) et (T3) se confondent en un même type. D'autres tâches connexes apparaissent aussi.

Des praxéologies différentes pour un même type de question

Si les types de tâches sont globalement voisins entre physique et mathématiques, nous avons relevé des cas où, sans indications particulières, les praxéologies diffèrent selon qu'on est dans le cadre de rationalité de la physique ou dans celui des mathématiques.

À titre d'exemple, nous détaillons ci-dessous le cas du type de tâches (T5), plus précisément la tâche qui consiste à « déterminer la valeur limite d'une grandeur quand le temps *t* tend vers l'infini ». En effet, en physique, ce type de tâches apparaît à différents endroits. Lors de l'étude de l'évolution des systèmes mécaniques (chute verticale), dans la partie « activités » du chapitre[7], on fait intervenir souvent la valeur limite de la grandeur vitesse (soit donnée, soit à calculer) en utilisant des données numériques obtenues expérimentalement ou la courbe expérimentale obtenue à partir de ces données. Dans la partie « TD/TP » ou dans les exercices, on demande souvent de calculer la valeur théorique de la vitesse limite (à partir de l'expression d'une équation différentielle) que l'on compare avec la valeur expérimentale. Pourtant, comme nous allons le montrer, les praxéologies relatives au type de tâche (T5) dans les deux disciplines présentent des différences et peuvent être source de difficultés pour les élèves.

7 Dans les manuels de physique, les chapitres sont souvent constitués de quatre principales parties : « activités » qui est une partie à caractère expérimental, « cours », « Travaux dirigées/travaux pratiques », « exercices ».

Voici un extrait du sujet de mathématiques du Baccalauréat 2004 de la série S.

1. On note *v(t)* la vitesse du chariot au temps […] équation différentielle (F) $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$

Résoudre l'équation différentielle (F).

[…]

3. Calculer $V = \lim_{t \to +\infty} v(t)$ (*V* est la valeur limite de la vitesse)

Extrait sujet BAC TS juin 2004 (mathématiques)

Pour répondre à la troisième question, la technique mathématique consiste à utiliser l'expression de la fonction *v* solution de l'équation différentielle obtenue à la question 1), puis à calculer la limite de *v(t)* quand *t* tend vers l'infini. Les calculs des limites ont été introduits en classe de première et complétés en classe de terminale pour certaines fonctions comme l'exponentielle ou le logarithme.

Or, on retrouve des tâches analogues dans des exercices proposés en physique, comme le montre cet extrait de manuel.

4b. La vitesse *v* vérifie l'équation différentielle: $\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{m}v + g$

…

6b. En exploitant l'équation différentielle donnée en 4, déterminer l'expression de la vitesse limite puis la calculer.

Extrait d'un exercice ; manuel de physique Microméga 2002 p. 230

Pour déterminer la valeur de la vitesse limite (question 6b), la technique attendue en physique consiste à considérer que l'accélération est nulle : $\frac{dv}{dt} = 0$.

En effet, cela vient (technologie) du fait que, quand la vitesse limite est théoriquement atteinte, le régime de la bille est permanent, c'est-à-dire que son mouvement peut être considéré comme uniforme. La résultante des forces extérieures s'annule.

Ce duo technique/technologie est encore plus exploité dans le domaine de l'électricité. Par exemple, dans le cas de l'étude de l'évolution de l'intensité dans une bobine d'inductance *L* et de résistance *R* (soumise à un échelon de tension), l'équation différentielle qui régit le phénomène est donnée par $\frac{E}{R} = \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i$. Pour trouver la valeur limite de l'intensité du courant en régime permanent, on peut s'appuyer sur le fait qu'en régime permanent, la bobine se comporte comme un conducteur ohmique ; l'intensité du courant qui le traverse étant constant alors $\frac{di}{dt} = 0$.

Les résultats concernant l'étude praxéologique comparée

On voit donc que pour un même type de tâches (T5), il existe dans chaque discipline un duo technique/technologie différents, pour déterminer la valeur limite d'une grandeur dont l'évolution est décrite par une équation différentielle. Les deux disciplines utilisent donc deux organisations praxéologiques différentes pour un même type de tâches et ceci ne fait l'objet d'aucun commentaire, ni dans les programmes ni dans les manuels. Ce vide didactique est symptomatique du cloisonnement disciplinaire. Bien sûr, on ne peut s'empêcher de se demander l'effet sur les difficultés des élèves. De plus, pour un tel type de tâche, que fera le professeur d'une discipline si son élève utilise la technique apprise et validée dans l'autre ? Le pire étant que vraisemblablement le cloisonnement disciplinaire est tel, que ce genre de comportement n'arrive jamais !

Par ailleurs, nous avons constaté dans notre étude des praxéologies, à propos des situations de modélisation, qu'il n'y avait pas nécessairement une mise en relation des techniques ou technologies associant les connaissances mathématiques et les connaissances de physique. Par exemple, dans le cas des types de tâches (T2), (T3) et (T4), leur réalisation relève d'une organisation essentiellement « mathématique » : l'élève doit reconnaitre le type de tâches puis appliquer une technique mathématique. Les praxéologies mixtes ne vivent donc pas dans la réalité de l'enseignement.

3. Place et rôle de la méthode d'Euler dans les manuels

L'introduction de la méthode d'Euler dans les programmes de mathématiques et de physique [8] permet de considérer une nouvelle approche dans le traitement des équations différentielles dans les deux disciplines. Elle permet en mathématiques la construction de courbes approchées de la fonction exponentielle (à partir d'une équation différentielle) et, en physique, d'aborder des cas d'équations différentielles non linéaires. Cette méthode numérique itérative, qui peut être exécutée sur ordinateur ou calculette, prend donc une place importante dans la relation mathématiques/physique, la continuité didactique apparaissant potentiellement à la fois au niveau des fondements de la méthode (discrétisation et approximation affine) et au niveau des outils informatiques utilisés.

Nous rappelons dans le tableau ci-dessous quelques résultats de l'analyse des manuels [9] sur la place et le rôle de la méthode d'Euler.

	Mathématiques	**Physique**
Lieu d'apparition	fonction exponentielle dans la plupart des cas et rarement dans l'étude des équations différentielles	Étude de la chute verticale avec frottements (souvent dans le cas des forces en kv^n)
Place	Très importante pour introduire la fonction exponentielle (activité et cours), mais quasiment nulle dans les exercices	Très importante pour le traitement numérique des équations différentielles de type : $dv/dt = A - Bv^n$
Statut	- méthode de construction de courbes approchées	- méthode numérique de résolution d'une équation différentielle et de construction graphique - outil de validation du modèle (kv^n)
Lien avec l'autre discipline	Aucun (sauf dans 1 manuel sur 7)	Aucun sauf dans un manuel
Outils	papier/crayon, tableur-grapheur, (rarement papier millimétré)	Papier/crayon (rarement), tableur-grapheur
Importance du pas de calcul	souvent explicitée (variation de la valeur du pas et construction dans un même graphique de plusieurs courbes obtenues avec des pas différents)	souvent implicite ; rarement mis en relation avec le temps caractéristique.
Connaissances mathématiques	Approximation affine, suite, dérivée, fonction exponentielle, équation différentielle du premier ordre (rarement)	dérivée (associée à la notion de vitesse ou d'accélération), dérivée symétrique, équation différentielle (linéaires et) non-linéaires.

Tableau comparatif sur la méthode d'Euler en mathématiques et en physique.

8 BO hors-série n°4, 30 août 2001.

9 Il s'agit des mêmes manuels signalés à la page 197

Les manuels scolaires de mathématiques et de physique ont suivi à la lettre les instructions des programmes respectifs de leur discipline. Le tableau comparatif ci-dessus résume les éléments issus de notre analyse.

S'agissant du lien entre le cours de mathématiques et de physique autour de la méthode d'Euler, nous avons constaté que l'introduction de la méthode d'Euler en physique (principe) et sa mise en œuvre ne s'appuient pas sur le cours de mathématiques qui met essentiellement en avant la notion d'approximation affine. Aussi, la présentation du principe de cette méthode dans les deux disciplines en fait ressortir le caractère algorithmique. Mais dans les faits, en physique on donne (dans la plupart des cas) la formule qui doit permettre de réaliser les itérations alors qu'on pourrait la laisser à la charge de l'élève qui sera obligé d'utiliser ses connaissances sur l'approximation affine vue en mathématiques.

S'agissant du statut de la méthode d'Euler, cette méthode est introduite en mathématiques pour permettre la construction de courbes approchées de l'exponentielle. En physique, cependant, nous avons pu constater que cette méthode revêt en fait deux statuts : méthode de résolution numérique d'une équation différentielle et outil de validation de modèle (en l'occurrence des frottements). Les manuels tentent de justifier le recours à la résolution numérique par le fait que la résolution analytique ne permet pas de résoudre certains types d'équations différentielles. À ce sujet, on peut constater un écart sur le vocabulaire : on ne parle de « résolution numérique » qu'en physique et presque jamais en mathématiques [10].

À ce niveau de l'analyse, on est amené à constater que ces enseignements, non seulement s'ignorent, mais conduisent à l'impression *qu'il y a deux méthodes d'Euler différentes !* On s'interroge alors sur la tâche de mise en relation implicitement dévolue à l'élève.

IV Observation des classes

Le traitement numérique des équations différentielles par la méthode d'Euler est l'une des entrées choisies par le GEPS pour la mise en œuvre de la synergie entre les deux disciplines. De plus, des travaux pratiques (TP) sur cette méthode sont prévus dans les deux disciplines. Il nous a donc paru important d'examiner des séquences de travaux pratiques (TP) réalisées dans les deux disciplines sur cette méthode.

Nous avons suivi six enseignants (3 par disciplines) de trois lycées différents. Selon la discipline, nous n'avons pas relevé de différence significative dans la pratique des classes de ces enseignants (relativement au TP sur la méthode d'Euler). Ainsi, nous avons choisi de rapporter ici quelques éléments d'analyse sur les séances de deux enseignants intervenant dans une même classe.

Notre but est de tenter de cerner la place accordée par l'enseignant à l'articulation des deux disciplines, c'est-à-dire à l'évocation de l'autre discipline du point de vue :

- de la praxéologie : analyser les principaux types de tâches apparaissent, avec quel(s) bloc(s) technologico-théorique(s).
- des tâches de transition et d'éléments de rationalité

Analyse des séances de travaux pratiques [11]

10 Où on utilise plutôt « résolution approchée ».

11 Le texte en italique représente une intervention (écrite ou orale) de l'enseignant.

Séance de mathématiques

Cette séance de TP a pour objectif *« construire point par point une fonction f dérivable sur R telle que f'(x) = f(x) et f(0) = 1 »*. Elle s'est déroulée au mois de novembre et a duré 50 minutes. Ce TP s'est fait tôt dans l'année pour des raisons institutionnelles (conformément à la progression suggérée par le programme scolaire) mais aussi, selon l'enseignant, pour répondre à une demande du professeur de physique qui lui a fait part de son besoin de parler à ses élèves de la fonction exponentielle et de la méthode d'Euler pour la résolution numérique des équations différentielles. Le souhait de son collègue était que ces notions soient introduites dans le cours de mathématiques avant qu'elles ne soient abordées en physique.

La séance commence par un rappel d'une notion mathématique servant de pré-requis est fait ; il s'agit de la notion d'approximation affine, déjà vue par les élèves normalement en classe de première :

Rappel :
$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x0) + h\,\varepsilon(h)$ *avec* $\varepsilon(h) \to 0$ *quand* $h \to 0$.
L'expression $f(x_0) + hf'(x_0)$ *représente l'approximation affine de f.*
d'où :
$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$
$f(x_0 - h) \approx f(x_0) - hf'(x_0)$ *pour h proche de 0*

Après avoir précisé que *h* sera appelé « pas de calcul », l'enseignant fixe une valeur de *h* et demande aux élèves de compléter des calculs ci-dessous (d'abord dans l'environnement papier/crayon ensuite sur un tableur).

Mise en œuvre : $h = 0,5$
Complète par le calcul
$f(0) = 1$
$f(0+0,5) = f(0) + 0,5f'(0) = \ldots$
$f(0,5 + 0,5) = \ldots$
$f(0 - 0,5) = \ldots$
$f(- 0,5 + 0,5) = \ldots$

La seule valeur exacte de *f* est celle prise en 0 c'est-à-dire 1 ($f(0) = 1$).

L'intervalle d'étude étant [-2 ; 2], les formules donnant $f(x_0 + h)$ et $f(x_0 - h)$ sont traduites en langage du tableur. L'enseignant reproduit au tableau une partie de la feuille Excel en indiquant les formules à utiliser :
« h est dans la cellule A5, $x_0 = 0$ *dans la cellule B5 et f(0) dans la cellule C5. Pour obtenir les valeurs successives des xi on utilise la formule B5 - A5 et B5 + A5 et pour les valeurs approchées* $f(x_i)$*, on utilise les formule C5 - A5*C5 et C5 + A5*C5 ».*

Une explication du lien entre ces deux dernières formules et la formule de l'approximation affine est faite. Ensuite pour obtenir toutes les valeurs (souhaitées), l'enseignant invite ces élèves à utiliser l'outil "recopie de formule" : « *… il suffit alors de "tirer" avec la souris* ». Les valeurs obtenues sont représentées dans un graphique.

L'enseignant demande de recommencer cette fois avec un nouveau pas $h = 0,1$ mais en gardant l'intervalle d'étude [-2 ; 2]. Il fait construire sur la même feuille Excel la table des valeurs et la courbe de la fonction "EXP" intégré dans le logiciel. Il fait remarquer que les deux courbes obtenues (courbe exponentielle et courbe approchée) sont très "proches" (voisines). Dans les commentaires, l'enseignant explique que la fonction dont on vient d'obtenir des valeurs numériques et des courbes approchées est la fonction exponentielle de base e, et sera notée « exp ».

Ce travail peut se résumer en trois grandes étapes :

- une première étape conduisant à construction de la table des valeurs numériques, d'abord sur papier/crayon puis sur un tableur.
- une deuxième étape conduisant à la construction des courbes approchées en faisant varier le pas de calcul. La courbe "EXP" est celle de la fonction exponentielle intégrée dans le logiciel.
- enfin une troisième étape qui consiste à montrer que toutes les courbes construites sont voisines (très proches) et renvoient à une même notion à savoir « la fonction exponentielle ».

Mais on peut toujours se demander en quoi ce travail prépare à une utilisation de la méthode d'Euler en physique.

- Le choix des pas est à la charge de l'enseignant. La deuxième valeur, $h = 0,1$, est un affinement du pas ; le principe sous-jacent est que « plus le pas est petit, meilleure est la précision ». mais on ne dit pas jusqu'où on peut aller dans le raffinement.
- Il n'y a pas de travail sur l'erreur commise en approximant la fonction exponentielle par une suite de valeurs numériques.
- L'utilisation de la méthode d'Euler n'est pas explicitement liée à la résolution numérique d'une équation différentielle (ce qui sera le cas en physique).
- Aucune référence à la physique n'a été faite. Tout le travail se situe dans un contexte intra-mathématique.

Séance de physique

Cette séance a eu lieu en mars 2006 et a duré une heure. Le thème principal est : « Étude d'une chute verticale avec frottements ».

Les objectifs assignés à ce TP par l'enseignant sont :

- Déterminer les paramètres qui influent sur la chute d'un objet dans un fluide.
- Modéliser une force de frottements
- Résoudre une équation différentielle par la méthode d'Euler et utiliser un tableur ».

La première partie de ce TP est une étude qualitative de la chute verticale d'un ensemble de quatre ballons lestés dans le référentiel terrestre « la salle » considéré comme Galiléen. Cette étude doit permettre de caractériser les paramètres dont dépendent l'évolution de la vitesse de la chute, les forces extérieures appliquées au système. La principale notion mathématique qui apparait à ce niveau est la dérivée de la vitesse (pour exprimer l'accélération a) avec la notation différentielle, c'est-à-dire $a=\frac{dv}{dt}$. Cependant aucun lien n'est fait avec le cours de mathématiques.

La deuxième partie (analyse informatique d'un mouvement de chute) correspond à un recueil des données expérimentales en utilisant un enregistrement vidéo. Cette étape conduit à la détermination des positions successives prises par l'objet en mouvement à partir du traitement informatique. Deux logiciels sont utilisés : Aviméca et Excel.

Le logiciel Aviméca permet d'enregistrer, image après image, les coordonnées cartésiennes planes de points d'un objet en mouvement. Pour leur traitement, une exportation de ces données (positions de l'objet en mouvement) se fait vers un tableur-grapheur (Excel, Regressi, …). Le logiciel Excel (choisi ici) permet d'obtenir une valeur de la vitesse v_i correspondant à la position y_i à l'instant t_i en utilisant la formule :

$$V_i=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\Delta t} \quad \text{avec } \Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$$

L'enseignant demande à ses élèves d'exécuter les consignes du protocole et à partir de l'ensemble des données (t_i ; v_i) obtenues, en déduire une valeur de la vitesse limite est estimée avant de construire la courbe.

Les éléments caractéristiques du mouvement (graphique, vitesse limite …) obtenus dans cette deuxième partie – expérimentale – doivent être confrontés aux résultats théoriques obtenus dans la troisième partie sur la modélisation de la force de frottement. (Quelques difficultés liées à l'utilisation des logiciels sont apparues chez certains élèves au début, notamment sur le choix du repère et sur le pointage).

Concernant la troisième partie (modélisation de la force de frottement), l'objectif est double. Il s'agit de résoudre numériquement une équation différentielle (méthode d'Euler) en utilisant Excel et de modéliser la force de frottement.

L'enseignant propose d'abord de trouver l'expression de l'équation différentielle relative au premier modèle de la force de frottement, en appliquant la deuxième loi de Newton au système :

> *« Vous cherchez l'équation différentielle sous forme* $\frac{dv}{dt}+Av=B$ *tel que* $\frac{dv}{dt}=a$ *; a c'est l'accélération … . Je veux que vous me disiez quelle est la valeur de A et quelle est son unité ; de même pour B ».*

Il rappelle la valeur de B : « *elle est de 6,92 m/s² pour tout le monde* » précise t-il ; ensuite, il fait chercher la valeur de A, en considérant la relation entre la vitesse et l'accélération pour ce système et la vitesse limite V_L obtenue expérimentalement (voir partie 2) :

> *« en considérant l'équation différentielle a + Av = B, si t tend vers l'infini la vitesse augmente et atteint une valeur limite (V_L), mais l'accélération s'annule ».*
>
> Ce qui donne $AV_L = B$ et $A=\frac{B}{V_L}$.

Pour résoudre numériquement l'équation différentielle qui vient d'être obtenue obtenue à l'aide de la méthode d'Euler, l'enseignant rappelle l'importance de la relation dv/dt $\approx$ Δv/Δt :

> *« Lorsque Δt est suffisamment "petit" on peut écrire*
> *$v(t + \Delta t) = v(t) + (dv/dt)*\Delta t \approx v(t) + (\Delta v/\Delta t)*\Delta t$ (...) »*

À partir des valeurs numériques obtenues par Euler, une courbe approchée est construite sur Excel.

Par ailleurs, pour le cas des vitesses qui ne sont pas suffisamment faibles, on considère que le modèle des forces de résistance sont de type $k'v^n$ [12]. Les élèves sont invités à refaire le même travail : recherche de l'équation différentielle associée ($dv/dt = B - Av^n$), construction de la courbe représentative de la solution obtenue par Euler. Le modèle « diverge » si la courbe obtenue (Euler) n'est « proche » de la courbe expérimentale.

- Complexité de la modélisation

L'un des objectifs de ce TP est de trouver le modèle des forces de frottement le plus pertinent. On considère que le modèle choisi est conforme lorsque l'approximation de la courbe théorique obtenue à l'aide de la méthode d'Euler est « proche » de la courbe expérimentale, c'est-à-dire de la représentation graphique (nuage de points) des valeurs expérimentales. On voit là un élargissement du rôle de la méthode d'Euler, si on compare à ce qui se fait dans la classe de mathématiques. La méthode doit, non seulement permettre la construction d'une courbe approchée, mais aussi permettre de décider du choix du modèle des forces de frottement. Cette extension n'est pas sans conséquence ; en effet, la difficulté vient de la superposition de

12 C'est le cas n= 2 qui a été étudié dans les trois classes de physique observées

considérations sur la confrontation mesures-modèle avec la question de la convergence de la méthode de calcul, voire avec une confusion entre le modèle théorique et l'exécution des calculs. L'adéquation du modèle aux mesures suppose que le calcul basé sur le modèle est satisfaisant et que l'ajustement ne porte que sur la valeur des paramètres du modèle et, par ailleurs, lors du test de convergence des calculs (qui doit se faire hors données expérimentales !) il est incorrect de dire que le « modèle diverge » alors que ce ne sont que les approximations de calcul qui sont en cause.

Un autre facteur important qui influence la fiabilité du modèle est le *pas* de résolution de l'équation différentielle. Il aurait fallu laisser les élèves travailler sur la variation du pas de résolution ; sur ce point, l'enseignant nous a affirmé (à la fin de la séance) que, pour des raisons d'économie de temps, il avait déjà testé ce pas de résolution chez lui et pouvait donc se permettre de le proposer à ces élèves.

- Les principales notions mathématiques et le lien avec le cours de mathématiques

– Dérivée numérique

La notion de dérivée numérique n'est pas étudiée dans le programme des mathématiques de terminale S. Elle est souvent utilisée pour fournir une approximation de la dérivée d'une fonction à partir d'un ensemble discret de valeurs. On fait l'hypothèse que l'on obtient de bons résultats sur des données initiales souvent expérimentales (valeurs discrètes) lorsqu'elles sont peu dispersées (peu "bruitées"), à condition qu'elles soient régulièrement espacées et "suffisamment" rapprochées.

On peut déjà constater qu'au cours de ce TP, la formule donnant les valeurs de la vitesse V_i correspondant aux positions y_i à l'instant t_i c'est-à-dire : $V_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t}$ avec $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$

correspond à la formule $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

qui permet d'obtenir une meilleure approximation du nombre dérivé $f'(x_0)$ par rapport à la formule habituellement utilisée dans les classes de première et terminale, à savoir :

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

– Équation différentielle

Deux types d'équations différentielles sont traités au cours de ce TP. Le premier est l'équation linéaire $dv/dt + Av = B$, connue des élèves puisqu'à ce moment de l'année ils l'ont déjà vue en classe de mathématique sous la forme $y' = ay + b$. Le deuxième est l'équation différentielle non linéaire $dv/dt + Cv^2 = B$, obtenue avec le modèle de force de frottement en kv^2. Ce type d'équation n'est pas traité dans le programme de mathématiques de terminale S. Mais le traitement de ces deux types d'équations différentielles ne semblait pas poser de problèmes *a priori*, ni à l'enseignant (qui ne fait pas allusion au programme de mathématiques) ni aux élèves (qui ne posent pas de questions sur ces nouveaux objets).

– Approximation affine

De même, en abordant la résolution numérique des équations différentielles, un certain nombre de formules sont utilisées sans les mettre explicitement en lien avec le cours de mathématiques et sans non plus les justifier.

Par exemple, l'enseignant annonce que « la méthode d'Euler s'appuie sur l'approximation dv/dt ≈ $\Delta v/\Delta t$ ». Les seules explications données sont intra-physique : « le rapport dv/dt représente l'accélération » en indiquant que c'est la « dérivée » de la vitesse.

En plus, l'enseignant n'a pas précisé comment on obtient la relation :

$$v(t + \Delta t) = v(t) + (\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)^*\Delta t \quad (2).$$

Ce serait pourtant une occasion pour les élèves de voir appliquer l'approximation affine déjà rencontrée en mathématique sous la forme $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$ (3), où a est un réel d'un intervalle I, h un réel non nul contenu dans un intervalle centré sur 0 et f une fonction dérivable sur I.

Cela pouvait aussi permettre à certains élèves de s'interroger sur le signe « = » dans la relation (1) et à l'enseignant de préciser le sens attribué au caractère « approché » des valeurs numériques obtenues. La relation (1) peut être difficile à comprendre en considérant toute la relation (complète) proposée par l'enseignant :

$$v(t + \Delta t) = v(t) + (\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)^*\Delta t = v_t + a_n\,\Delta t \approx v_t + (\Delta v/\Delta t)^*\Delta t \quad (4)$$

Si au lieu de dv/dt on avait $\Delta v/\Delta t$, la première égalité aurait bien un sens. En effet, la fonction étant continue et strictement monotone entre t et $t + \Delta t$ (Δt est non nul et considéré comme très petit), on a $\Delta v(t) = v(t+\Delta t) - v(t)$. On peut par la suite arriver à la relation approximative sans nécessairement et explicitement passer par l'approximation affine.

On a : $$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta v(t) = v(t) + \Delta v(t) * (\Delta t/\Delta t) = v(t) + (\Delta v(t)/\Delta t)^*\Delta t$$

La relation $(dv/dt)_t \approx \Delta v(t)/\Delta t$ aidant (souvent écrite $dv/dt \approx \Delta v/\Delta t$, pour tout réel t du l'intervalle considéré), on arrive à la formule d'approximation attendue, qui correspond bien à la formule (2) de l'approximation affine :$v(t + \Delta t) \approx v(t) + (dv/dt)_t{}^*\Delta t$ (5)

V Conclusion

Notre étude a porté sur le rôle et la place des équations différentielles dans les programmes de mathématiques et de physique en Terminale S. Le choix résulte de la mise en application de nouveaux programmes en 2002, où mathématiques et physique sont mis en relation forte au niveau de la modélisation de phénomènes par des équations différentielles du premier ordre (qui constituent une nouveauté dans l'enseignement de la physique[13]). Dans le même temps, une autre innovation est mise en place dans les deux disciplines : le traitement numérique approché par la méthode d'Euler, lié pour partie à la volonté d'intégration des technologies dans l'enseignement.

Un tel changement conduit traditionnellement à des difficultés de mise en place, tant par la nouveauté du contenu que par l'intention didactique d'interdisciplinarité qui est affichée. Le jeu des contraintes institutionnelles et celui des habitudes (voire des traditions) des enseignants, imposent une gestion en grande partie indépendante des disciplines, de sorte que les intentions des programmes, confortées par les documents d'accompagnement, ne peuvent conduire à une réelle interdisciplinarité. Nous estimons cependant possible (si ce n'est nécessaire) de mettre en place ce que nous avons appelé une "continuité didactique" entre les mathématiques et la physique.

La modélisation, explicitement mentionnée dans le programme de mathématiques, est par nature l'une des activités principales du physicien. Dans les manuels scolaires, l'activité "modélisation" est effectivement centrale dans les chapitres concernés par les équations différentielles.

13 Paradoxalement, les équations du second ordre ne figurent plus dans les programmes de mathématiques.

Pour la plupart des situations de modélisation traitées en mathématiques, le champ de départ est un domaine de la physique. Cependant l'analyse des transitions entre le champ de départ et le champ de traitement qui correspond donc à des changements de cadre de rationalité, révèle des difficultés tant du point de vue de la formulation des énoncés que de celui de la traduction mathématique de ces énoncés. Le passage du champ de départ au champ de traitement est souvent pris en charge par l'énoncé. Nous avons qualifié de *fausse continuité* l'absence des tâches de transitions, mais aussi le manque de cohérence, du point de vue de la physique, de certaines situations qui apparaissent dans les manuels de mathématiques. Ces résultats viennent confirmer plusieurs études menées auparavant dans ce domaine (Noirfalise 2004, Rogalski 2006, Rodriguez 2007, etc.). Ce sont aussi les problèmes "classiques" liés à l'habillage des problèmes en mathématiques (Dumont, 1980).

De même, dans les manuels de physique, il apparaît clairement que le jeu des cadres de rationalité (mathématiques-physique) ne se fait pas sans difficultés. On y relève aussi parfois une absence de tâche de transition physique-mathématiques ou mathématiques-physique; ce qui laisse augurer l'existence de nombreux implicites, difficilement exploitables par l'enseignant et plus encore par les élèves. Il y a très peu de retours à la confrontation expérimentale et à l'analyse "physique" de la solution de l'équation différentielle, ce qui est dommageable à la compréhension véritable de cette étude. On peut aussi signaler ce manque de cohérence entre les manuels de physique et ceux des mathématiques pour ce qui concerne le cas de la radioactivité : aucun exercice n'est proposé à leur sujet en physique alors que ce domaine a été précisément pris comme exemple par le GEPS de mathématiques.

Du point de vue de l'analyse praxéologique, nous avons pu identifier un certain nombre de tâches qui peuvent se ramener à quelques types. Pour un même type de tâches (par exemple, déterminer la vitesse limite …), on a pu observer différentes techniques : une technique "mathématique" (respectivement "physique") dont les éléments du bloc technologico-théorique sont issus des mathématiques (respectivement de la physique). Cependant l'existence de techniques différentes, mais qui se rapportent à un même type de tâche, ne fait l'objet d'aucun commentaire dans les manuels.

Les observations des classes que nous avons réalisées ainsi que les résultats des entretiens que nous avons eus avec les enseignants, laisser penser que les deux disciplines s'ignorent complètement à ce sujet ; ce qui peut accroître les difficultés des élèves.

Les résultats du questionnaire que nous avons collectés auprès des enseignants des deux disciplines afin de recueillir leur point de vue sur la continuité didactique entre les mathématiques et la physique, nous a permis de constater une réticence des enseignants de mathématiques pour deux principales raisons :

- c'est une approche légitimée en fait par l'autre discipline (on doit le faire parce que les physiciens en ont besoin !)
- difficulté supplémentaire apportée par l'outil informatique, encore peu répandu dans les classes (en particulier dans le domaine de l'analyse)

En physique, ce questionnaire montre que le "succès" de la méthode d'Euler repose sur des arguments essentiellement techniques (intérêt de l'outil informatique, par ailleurs déjà bien implanté dans les activités en physique-chimie[14]).

D'une manière générale, les résultats de cette partie de notre étude confirment les difficultés de « dialogue » entre les enseignants des deux disciplines autour de certains objets de savoirs qui sont étudiés dans une même classe (méthode d'Euler, équation différentielle, approximation, tangente).

14 Cf. *Outils informatiques d'investigation scientifique* , UdP-INRP, 1995

Ainsi, sur la base de notre travail, on peut envisager des prolongements d'ores et déjà sous forme de propositions plus institutionnelles : proposition en direction du ministère d'ajustement des programmes de mathématiques (sur le traitement des équations différentielles et l'introduction de la dérivée symétrique par exemple) et de physique (notamment sur les compétences exigibles en physique) et constitution de documents didactiques à l'attention des enseignants (sur un site internet). L'analyse praxéologique comparative que nous avons faite conduit en effet à des propositions d'exercices "prototypiques" qui explicitent la complémentarité des tâches et techniques dans des situations de modélisation.

Du côté de la formation des enseignants, notre travail montre qu'il y a matière à des formations didactiques "mixtes" mathématiques-physique [15] sur le seul domaine des équations différentielles.

VI Bibliographie

BÂ, C. (2007) : *Etude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique – lien entre mouvement de translation et translation mathématique*. Thèse de doctorat (co-tutelle). Université Lyon 1 et Université Cheikh Anta Diop.

BUNGE, M. (1983) : épistémologie. Edition Maloine. (Coll.) Recherches interdisciplinaires. Paris.

CHEVALLARD Y. (1999) : L'analyse des pratiques des enseignants en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Édition la pensée sauvage Grenoble

CHEVALLARD, Y. & WOZNIAK, F. (2003) : Enseigner la statistique au secondaire. Entre genre prochain et différence spécifique. In Mercier A., Margolinas C. (Eds) Balises pour la didactique des mathématiques – Cours de la XIIème École d'été de didactique des mathématiques (pp.195-218). Grenoble : La Pensée Sauvage.

KUNTZ, G. (2002) : Equations différentielles : la perte de sens n'est pas sans risque. *Repère n°46* pp.107-114.

LEROUGE, A. (1992) : *Représentation cartésienne, rationalité mathématique et rationalité du quotidien chez des élèves de collège*. Thèse de doctorat. Montpellier : université de Montpellier II

LEROUGE, A. (2000) : la notion de cadre de rationalité à propos de la droite au collège, *Recherches en didactique des mathématiques, vol. 20 n°2,* pp. 171- 208

MALAFOSSE, D. (1999) : *Contribution à la modélisation et à l'analyse des processus de conceptualisation en inter-didactique des mathématiques et de la physique : exemple de la loi d'Ohm*. Thèse de doctorat. Montpellier : université de Montpellier II

MALAFOSSE, D., LEROUGE, A. & & DUSSEAU JC. (2001) : Étude en interdisciplinarité des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège: changement de cadre de rationalité. *Didaskalia n°18*, pages 61 à 98

MALONGA F., BEAUFILS D. & PARZYSZ B. (2008a). Les équations différentielles du premier ordre en physique en terminale S : le lien avec les mathématiques en question. *Le Bup, vol 102, n° 904*, pp. 647 – 666.

MALONGA F., BEAUFILS D. & PARZYSZ B. (2008b) La méthode d'Euler dans l'enseignement de mathématiques et de physique en terminale S. *Le Bup, vol. 102, n°907*, pp. 1133 – 1152

15 À l'image de la journée de formation continue, organisée par l'équipe de didactique d'Orsay (Université Paris-Sud), à laquelle nous avons participés.

MALONGA F. (2008). *Interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire en France. Cas des équations différentielles du premier ordre.* Thèse de didactique des mathématiques, Université Paris Diderot - Paris 7.

MUNIER, V. & MERLE, H (2007) : Une approche interdisciplinaire mathématique-physique. Du concept d'angle à l'école élémentaire. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 27. n°. 3. p. 349-388.

MIZONY, M. (2006) : Relations entre physique et mathématique : un problème épistémologique. Sous-titre : L'héritage de Poincaré : de l'éther à la modélisation. *Repères, n° 64.* p. 89-111.

NOIREFALISE, R. (2004) : Modélisation et équation différentielle en TS : Utilisation d'un modèle praxéologique pour poser des questions didactiques. Petit x 66, p. 6-17.

PERRENOUD P. (1993) Curriculum : le formel, le réel, le caché. In Houssaye J. (Ed) La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui (pp. 61-76). Paris : ESF.

RODRIGUEZ, R. (2007) : Les équations différentielles comme outils de modélisation mathématique en classe de physique et de mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en terminale S. Thèse : Université Joseph Fourrier.

ROGALSKI, M (2006) : Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs. Un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique. *Repères. Num. 64*. p. 27-48.

SAGLAM, A. (2004) *: Les Équations Différentielles en Mathématiques et en Physique*. Thèse de l'Université Joseph Fourier.

VII Annexes

Annexe 1 : Tableau synoptique sur l'évolution des équations différentielles en mathématiques

Période	**Type d'équations différentielles.**	**Habitat**	**Lien avec la physique**
1960 – 1970	$y' = ay$ $y' = p(x)$ $y'' = p(x)$ $y''+ \omega^2 y = 0$	Equations et inéquations	Quasi- absent
1970 – 1980	$y' = ay$ $y' = p(x)$ $y'' = p(x)$ $y''+ \omega^2 y = 0$ $y'' + ay' + by= f(x)$	Espace vectoriel ; Calcul différentiel et intégral	- Mécanique - Electricité
1980 – 1998	Idem	Calcul différentiel et intégral	- Mécanique - Electricité
1998 – 2002	$y' = ay$ $y''- \omega^2 y = 0$ $y''+ \omega^2 y = 0$	Calcul différentiel et intégral ; fonctions trigonométriques	Modélisation - électricité - mécanique
Depuis 2002	$y'= ay +b$	-Fonction exponentielle -Suites numériques	Modélisation - radioactivité - électricité - mécanique

Annexe 2 : éléments d'une enquête (extrait du questionnaire) auprès d'enseignants de mathématiques et de physique[16]

Enseignants de mathématiques

- Combien de temps (en heures) consacrez-vous à la méthode d'Euler ?

Pour cette question, 44 enseignants (sur 50) répondent qu'ils traitent la méthode d'Euler, 2 enseignants ne la traitent pas et 6 enseignants n'ont pas répondu à cette question.

Le temps consacré à la méthode d'Euler varie considérablement selon les enseignants. On trouve une durée minimale de 0,5h réalisée par 4 enseignants et un maximum de 6 heures (1 enseignant). Cette disparité semble traduire l'importance accordée à la méthode d'Euler pour introduire la fonction exponentielle ; il y a 25 enseignants (plus de la moitié) qui y passent moins de 2 heures alors qu'il y en a 19 qui y consacrent entre 2 heures et 6 heures. Pour ce qui est des 6 non réponses, on peut supposer que ces enseignants ne traitent pas la méthode d'Euler.

Il apparaît donc que l'enseignement de la méthode d'Euler suscite peu d'enthousiasme chez les professeurs de mathématiques, et ceux qui l'enseignent la considère comme une méthode difficile pour l'élève car elle repose sur une problématique de "l'approché" qui n'est pas enseignée en Terminale : les élèves ont du mal à maîtriser la notion d'approximation affine, sans laquelle la compréhension de la méthode, telle qu'elle s'enseigne, s'avère impossible.

De plus, les remarques des professeurs portent sur la formation aux outils informatiques, sur le peu d'accompagnement (documentations, formation continue, …) et sur l'articulation mathématiques-physique.

- Utilisez-vous des moyens informatiques lorsque vous traitez des équations différentielles ?

La plupart des enseignants interrogés (39) utilisent l'ordinateur. Parmi eux, 13 utilisent en plus la calculatrice. Les exemples d'utilisation des moyens informatisés le plus cité, relativement à l'enseignement des équations différentielles, est la construction d'une courbe approchée pour la fonction exponentielle, ainsi que la visualisation des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ en utilisant la méthode d'Euler. Onze enseignants n'ont pas répondu à cette question.

- Les moyens informatisés permettent a priori une nouvelle approche et/ou un nouveau regard sur les équations différentielles. Pensez-vous que ceci constitue plutôt une aide ou plutôt une difficulté supplémentaire : Pour l'enseignant / pour l'élève ?

Trente cinq enseignants répondent que c'est une aide pour les élèves, mais seulement vingt pensent que ces outils constituent une aide pour les enseignants, les raisons étant alors de nature technique (rapidité de traitement qui permet de multiplier des exemples) et didactiques (la superposition des courbes-solutions, représentation de la courbe approchée de la fonction exponentielle). Pour ceux qui considèrent qu'ils constituent une difficulté : 15 réponses pour les enseignants (problème de maîtrise de ces outils, perte de temps) et 5 réponses pour les élèves (pas de pratique courante de ces outils) sachant que par ailleurs 10 enseignants n'ont pas répondu et que 16 réponses relativisent le bénéfice de l'utilisation de ces outils.

Enseignants de physique

- Combien de temps (en heures) consacrez-vous à la méthode d'Euler ?

16 Les questions sont notées en italique.

La plupart des enseignants abordent la méthode d'Euler en cours et/ou en travaux dirigés ou en travaux pratiques, avec une disparité sur le temps consacré. En effet, nous comptons 11 enseignants (sur 50) qui y consacrent moins d'une heure et demi, 19 entre 2 et 4 h, et 6 qui lui accordent plus de 6 heures. Par ailleurs, c'est sous forme de TP ou d'exercices que la majorité d'enseignants consacrent du temps à ce sujet.

- Utilisez-vous des moyens informatiques lorsque vous traitez des équations différentielles ?

Les enseignants interrogés utilisent tous (sauf 1) les outils informatisés. Tous ont accès à l'ordinateur et l'utilisent pour le traitement des équations différentielles. 14 utilisent en plus la calculatrice.

- Les moyens informatisés permettent a priori une nouvelle approche et/ou un nouveau regard sur les équations différentielles. Pensez-vous que ceci constitue plutôt une aide ou plutôt une difficulté supplémentaire : Pour l'enseignant / pour l'élève ?

Pour ce qui concerne l'enseignant, les réponses donnent un résultat "mitigé", les avis étant partagés et 29 réponses disant même que ces outils peuvent être soit une aide, soit une difficulté… Les arguments positifs sont techniques (rapidité sur le traitement des données, multiplication des exemples) et didactiques (superposition des courbes, choix du pas de calcul et validation de modèle), les difficultés signalées étant liées à la maîtrise des outils.

Pour ce qui concerne les élèves, les avis sont plutôt positifs, et les arguments sont du même type que ceux évoqués ci-dessus. Les difficultés évoquées sont là aussi celles liées à une absence de "maîtrise informatique". On peut ici s'étonner de l'absence de considérations quant aux difficultés liées au "traitement numérique" proprement dit.

Technologies, enseignement et apprentissage des mathématiques : revue de questions

Ghislaine Gueudet (CREAD, IUFM Bretagne UBO)

Fabrice Vandebrouck (LDAR, Université Paris Diderot)

Résumé

Nous répondons dans cette présentation à une demande des organisateurs du séminaire national de didactique des mathématiques : proposer une revue de questions sur le thème des technologies. Nous avons tenté d'éviter de faire de cette revue de questions une liste fastidieuse de problématiques largement connues ou d'enjeux pointus accessibles aux seuls spécialistes des technologies. Dans cet objectif nous avons fait certains choix, en particulier :

– nous nous intéressons plus particulièrement aux évolutions les plus récentes de la recherche en didactique des mathématiques concernant ce thème des technologies, à l'échelle internationale ;

– après un panorama général esquissé en partie 1, nous approfondissons certaines questions qui nous ont semblé spécialement sensibles, et dont la portée dépasse celle de la seule technologie. Nous considérons en effet les technologies comme susceptibles de révéler des phénomènes plus larges d'enseignement et d'apprentissage.

Mots clefs

Approche documentaire, Approche instrumentale, Collectifs, Démarche expérimentale, Double approche, Médiation sémiotique, Orchestration instrumentale, Pratiques enseignantes, Ressources, Technologies

I Quelles recherches ? Quelles technologies ?

Pour ébaucher le paysage d'où émergeront les questions de recherche que nous tenterons d'approfondir, nous avons tout d'abord considéré un large ensemble d'articles, d'ouvrages d'actes de conférences en didactique des mathématiques qui déclarent s'intéresser aux technologies. Ces recherches visent en particulier à élucider ce que ces technologies modifient, ou pourraient modifier dans la classe en termes d'apprentissage et d'enseignement. Les questions étudiées dépendent en partie du type de technologie considéré ; il est donc nécessaire de préciser d'emblée quelles sont ces technologies.

Les travaux sur les calculatrices, graphiques ou formelles (Guin & Trouche 2002), sur les logiciels de géométrie dynamique (Laborde 1999) sont bien connus. Ils se poursuivent encore actuellement, s'intéressant à des évolutions technologiques, comme dans le cas des calculatrices formelles qui intègrent et articulent désormais différents logiciels (Artigue & Bardini à paraître), ou à des usages émergents, notamment pour les logiciels de géométrie dynamique dans le contexte du premier degré (Assude *et al.* 2007). Les recherches considèrent aussi des technologies qui ne sont pas *a priori* développées dans un but d'enseignement, comme le tableur (Haspekian 2005, Lagrange & Erdogan 2009). Dans le même temps, la recherche se penche désormais sur de nouveaux types de technologies. Il ne s'agit pas pour nous d'en dresser un inventaire, mais d'indiquer des tendances qui nous semblent significatives.

L'intérêt pour les innovations de pointe est une constante dans ces recherches. Nous avons évoqué ci-dessus de nouveaux modèles de calculatrices, articulant différents types de logiciels. D'autres calculatrices, comme certains logiciels, offrent la possibilité d'un travail en réseau dans la classe, de l'affichage simultané pour tous de plusieurs productions d'élèves qui peuvent être confrontées, débattues (Hivon *et al.* 2008, Hegedus *et al.* to appear). On peut également évoquer les technologies visant à créer les conditions de l'apprentissage pour des élèves en situations de handicap : par exemple, certains équipements permettent désormais une traduction automatique du LaTeX en Braille, ainsi qu'une oralisation simultanée des formules mathématiques. Ainsi les élèves ou étudiants déficients visuels peuvent accéder aux textes mathématiques (Archambault & Fitzpatrick 2008). Une telle technologie, introduisant des possibilités totalement nouvelles, bouleverse clairement l'enseignement et l'apprentissage pour ces élèves. Ceci soulève de manière évidente des questions portant sur la nature de ces modifications.

Cependant la recherche en didactique sur les technologies ne se limite pas à suivre et analyser les nouvelles possibilités suscitées par les innovations de pointe. Elle considère aussi des ressources qui semblent technologiquement moins sophistiquées, mais qui sont associées à des changements profonds : c'est le cas des ressources en ligne (Cazes *et al.* 2007, Artigue & Gueudet 2008). Ainsi les manuels Sésamath[1], qui couvrent tous les niveaux du collège, semblent peu différents des manuels traditionnels (Kuntz *et al.* 2008). Certes, ils existent en version numérique, en plus de la version papier ; certes, cette version numérique inclut des compléments, fiches au format pdf, exercices en ligne, supports logiciels pour les séances tableur ou géométrie dynamique... Mais les principaux changements liés à ces manuels concernent leur mode de conception, et le modèle économique associé. Ils ont en effet été composés par une large équipe d'enseignants de collège bénévoles, dont le travail coopératif à distance était permis par une plate-forme, et régulé par des membres de l'association Sésamath[2] ; et ils sont distribués sous licence libre. Alors que les logiciels à la pointe de l'innovation peinent à être acceptés dans les classes (Kynigos *et al.* 2007), en France le manuel Sésamath et les ressources associées sont largement utilisés. Le site Sésaprof permet aux utilisateurs d'exposer leurs critiques ou leurs demandes ; ainsi au-delà de l'équipe de conception initiale, les utilisateurs participent aux évolutions des ressources. Il s'agit donc pour la recherche d'interroger ces nouveaux modes de conception et leurs conséquences.

Ainsi la question des technologies prises en compte par la recherche est loin d'être anodine, car les réponses à cette question peuvent induire des problématiques spécifiques ; nous resterons donc attentifs à cette dimension. Nous allons maintenant considérer de plus près des recherches récentes. Nous nous appuyons dans un premier temps sur l'étude ICMI 17 (Hoyles & Lagrange to appear), qui a effectué à la fin de l'année 2006 une synthèse des travaux existants. Elle a notamment pointé certaines évolutions, en comparant les thèmes abordés par l'étude ICMI et ceux qu'identifiait une méta-étude menée à la fin des années 90 (Lagrange *et al.* 2003).

- À propos des élèves : de nouvelles dimensions sont interrogées, avec en particulier des questions sur le travail collaboratif permis par les technologies, sur l'intervention des technologies pour l'évaluation.
- À propos des professeurs : les recherches semblent se développer, notamment sur la formation pour soutenir l'intégration des technologies. Les études portant sur des « professeurs ordinaires » sont toujours rares.
- À propos du design : un intérêt nouveau apparaît pour les questions de type accessibilité, équité. L'étude des articulations entre design et curriculum est désormais centrale.
- À propos des approches théoriques : les auteurs relèvent une évolution sensible, d'une fragmentation initiale à des articulations réfléchies et à l'élaboration d'approches intégrant différentes perspectives. Ceci est dû en particulier au travail effectué par certains projets européens, comme TELMA ou ReMath (Artigue 2007).

1 http://manuel.sesamath.net/
2 Association de professeurs de mathématiques de collège, http://www.sesamath.net

- Ces observations ont été retenues comme point de départ du travail commun du groupe *« Technologies and ressources in mathematics education »* (*Working Group 7*) à la conférence CERME 6 qui s'est tenue à Lyon en janvier 2009 (Gueudet *et al.* à paraître). Les recherches présentées à CERME 6 suivaient-elles les mêmes tendances ou pouvait-on observer des évolutions nouvelles, deux années après l'étude ICMI ?

Sur certains points, les constats sont les mêmes. Ainsi on relève bien l'évolution des approches théoriques, surtout pour l'étude des enseignants qui paraît elle aussi toujours en essor. Sur d'autres points on note des différences sensibles : ainsi sur l'apprentissage, plusieurs travaux sont consacrés au thème des démarches d'investigation, ou démarches expérimentales ; dans le même temps, le travail collectif des élèves est peu pris en compte. En revanche, certains auteurs s'intéressent au collectif formé du professeur et de ses élèves, soulevant en particulier des questions d'orchestration instrumentale (Trouche 2004). Le design est naturellement une des entrées étudiées, et le lien entre design et curriculum pris en compte. Mais de nouvelles questions, portant sur la qualité des ressources, et sur le lien entre qualité et interactions entre concepteurs et utilisateurs (*design loops)* semblent désormais centrales dans ce champ du design.

Le groupe était ouvert à des contributions portant sur des « ressources » au sens large (Adler 2000) ; les travaux qui ont été présentés correspondaient à ce choix. Ainsi, au côté de technologies nouvelles ont été considérés des outils plus anciens, comme le pantographe ; et des ressources que l'on ne qualifierait naturellement pas de technologies, comme le manuel scolaire. On retient surtout que les travaux considèrent le plus souvent des ensembles de ressources variées : dans le cas des calculatrices par exemple, nous avons déjà souligné que celles-ci associent plusieurs types de logiciels ; de plus elles sont utilisées avec des fiches papier préparées pour les élèves, voire des scénarios d'usage complets.

Les conclusions de l'étude ICMI 17, complétées par celles du WG7 de CERME 6 soulèvent de nombreuses questions, parmi lesquelles nous avons fait des choix, visant à approfondir certains points tout en couvrant différentes dimensions. En ce qui concerne l'apprentissage, nous nous centrons sur le thème de la démarche expérimentale (§ 2). A propos des études sur les enseignants, nous examinons les évolutions théoriques et méthodologiques en cours (§ 3). Nous consacrons enfin une partie spécifique à l'étude des collectifs : collectifs d'élèves, de professeurs, collectifs formés des élèves et du professeur (§ 4). Nous revenons en conclusion sur les questions de design et de qualité des ressources (§ 5).

II Apprendre avec les technologies : zoom sur la démarche expérimentale

1. La démarche expérimentale, généralités

Les apports potentiels et effectifs de la technologie pour la mise en œuvre par les élèves en classe de ce qui peut être nommé, selon les contextes : démarche expérimentale, démarche scientifique, démarche d'investigation (au singulier ou au pluriel) ont donné lieu à de nombreux travaux en didactique des sciences, que nous allons brièvement examiner comme point de départ de notre réflexion. Dasn les travaux anglo-saxons, on parle de *« inquiry-based science education »* ; cette démarche fait l'objet d'importantes incitations institutionnelles (NSTA 2004, Rocard *et al.* 2007). Elle est définie comme :

> « Un processus intentionnel de diagnostic des problèmes, de critique des expériences réalisées, de distinction entre les alternatives possibles, de planification des recherches, de recherche d'hypothèses, de recherche d'informations, de construction de modèles, de débat avec des pairs et de formulation d'arguments cohérents » (Linn et al. 2003)

Il s'agit de se rapprocher du mode de travail des scientifiques, tout en respectant les contraintes du contexte de la classe : contraintes de temps, et objectifs d'apprentissage précis. Dans cette perspective les technologies peuvent jouer plusieurs rôles : elles peuvent fournir aux élèves des outils de simulation, de visualisation, de modélisation. Les recherches actuelles (van Joolingen *et al.* 2007) soulignent surtout qu'elles permettent de proposer des tâches d'investigation que les étudiants peuvent traiter, en proposant différentes formes d'aides et en réduisant la complexité des vrais problèmes de recherche. C'est en particulier le cas de ressources en ligne conçues spécifiquement dans ce but, comme celles du projet WISE (*Web-based Inquiry Science Environment*, Linn *et al.* 2003). Ces ressources, élaborées et testées en classe par des professeurs, avec la contribution de chercheurs en sciences et en didactique des sciences, proposent des parcours pour l'étude d'une question donnée (les antibiotiques vont-ils être efficaces ? Comment recycler les pneus usés ?) Une succession d'étapes guide les élèves, et des liens associés les aident à répondre : emploi d'un site web externe, d'un outil de simulation etc. De nombreuses recherches ont considéré l'emploi en classe de ressources WISE, et montré que celles-ci favorisaient la mise en œuvre par les professeurs d'un enseignement « inquiry-based », et qu'elles favorisaient les apprentissages et l'intérêt des élèves pour les sciences. Certains travaux cependant pointent la nécessité de précautions, lors de l'emploi de telles ressources. En particulier, Wecker *et al.* (2007), soucieux de détecter un éventuel avantage d'élèves familiers des ordinateurs, lors d'un travail basé sur des ressources WISE, ont en fait identifié un effet inverse. Les élèves trop à l'aise avec la navigation sur Internet parcourent rapidement les étapes sans lecture approfondie des informations apportées. Ainsi lors du test final, ils ont de moins bons résultats que les élèves qui ont rencontré des difficultés dans le même parcours en ligne ! On retrouve ici un danger connu, mais rarement étudié aussi précisément par la recherche : le danger du survol, lors de l'emploi de ressources en ligne. Celui-ci est d'ailleurs associé, côté professeur, à un danger d'ostension (Mercier *et al.* 2001), ces ressources fournissant souvent des animations qu'il est confortable de projeter en classe, même si une telle démarche semble aller à l'encontre de ce qui peut être une démarche scientifique.

Dans le cas spécifique des mathématiques, nous allons utiliser le terme de « démarche expérimentale », pour souligner la question à laquelle nous nous attachons : quelle expérimentation, en classe de mathématiques ? Cette démarche fait l'objet d'une forte incitation institutionnelle, jusqu'à la création en juin 2007 d'une épreuve pratique au baccalauréat scientifique. Lombard (2008) explique qu'expérimenter, c'est vérifier des hypothèses, qu'aucun scientifique ne saurait sérieusement assimiler observation et expérience et que les expérimentations sont le plus souvent faites pour vérifier des hypothèses. Pour lui, en réalité, le travail du scientifique, et donc sans doute du mathématicien, se résume plutôt à « avoir une idée » et « vérifier expérimentalement si elle marche ». Cependant, Perrin (2007) décrit démarche expérimentale par « expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuves, production éventuelle de contre exemples etc … ». Autrement dit, expérimenter, ce peut-être commencer par des cas particuliers, sans avoir d'hypothèse ou de conjecture en tête, ce qui ne correspond pas à la démarche expérimentale dans les autres sciences. Quant à Delahaye (2005), qui prend en compte explicitement les technologies dans son discours, il explique que la démarche expérimentale avec des technologies, cela peut-être aussi « trouver des contre exemples qui falsifient les conjectures ». Autrement dit, selon lui, confirmer ou infirmer des conjectures avec des technologies est possible, tout comme valider des démonstrations, et « la plus grande certitude mathématique n'est pas forcément atteinte par les démonstrations habituelles ». Cela peut choquer mais n'y a-t-il pas un paradoxe à accepter de certaines technologies qu'elle nous donnent effectivement des résultats mathématiques – pensons à une calculatrice bas de gamme qui nous donne le résultat d'une multiplication – et à refuser dans l'enseignement certains résultats de nouvelles technologies plus sophistiquées – un lieu de points donné par un logiciel de géométrie dynamique, une limite de suite donnée par un logiciel de calcul formel ?

La question de savoir si les mathématiques comportent une dimension expérimentale reste ouverte et d'actualité ; elle doit être étudiée par la recherche en didactique, qui peut notamment éclairer le rôle des technologies, en lien avec cette démarche.

Nous allons nous intéresser à deux moments clefs de la démarche expérimentale : celui de la conjecture et celui de la validation de cette conjecture.

2. Le moment de la conjecture

Les technologies semblent permettre aux élèves des activités de conjecture, qu'il ne leur serait pas possible de développer dans l'environnement traditionnel. Cependant les nouvelles représentations véhiculées par les technologies, qui ont des limites, affectent l'activité mathématique des élèves et notamment la manière dont ils conceptualisent les notions, pouvant amener à des conjectures erronées. Dans l'exemple ci-dessous, la représentation graphique proposée par la calculatrice de l'élève affecte la conjecture qu'il émet sur l'ensemble des solutions à l'inéquation proposée. Plus précisément, pour l'élève la borne supérieure de l'ensemble des solutions est 5, ce qui correspond en fait à la limitation donnée par défaut par son écran.

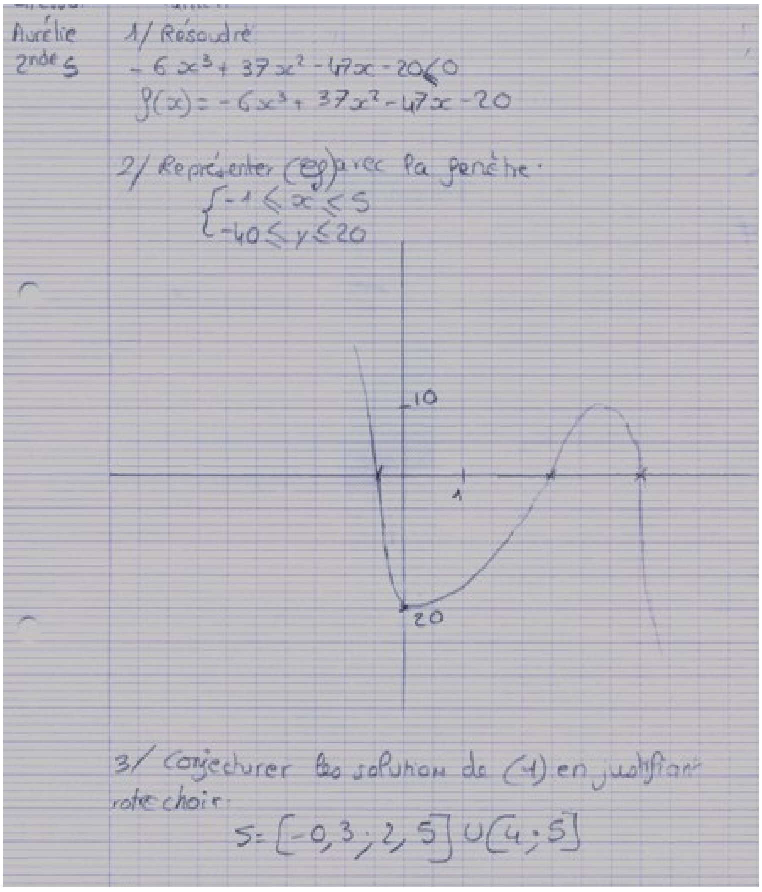


Figure 1 : copie d'un élève de seconde sur la résolution d'inéquations

Dans leur travaux sur les calculatrices symboliques, Artigue et Lagrange (Artigue 1995) ont aussi pointé la « double référence » dans laquelle sont placés les élèves et qui complexifie leur activité : d'un côté la référence papier-crayon habituelle pour la simplification des expressions algébriques par exemple, de l'autre la référence machine, différente de la première. Dans un exemple ci dessous où l'enseignant demande aux élèves de conjecturer à l'aide de leur calculatrice la forme générale de la factorisation du polynôme $x^n - 1$, la calculatrice ne permet pas d'émettre cette conjecture puisqu'elle factorise selon ses propres critères qui ne sont pas ceux utilisés habituellement. Cette double référence peut donc se poser en obstacle à l'activité des élèves en classe.

#1:	$\text{FACTOR}(x^2 - 1, x)$	
#2:		$(x + 1)\cdot(x - 1)$
#3:	$\text{FACTOR}(x^3 - 1, x)$	
#4:		$(x - 1)\cdot(x^2 + x + 1)$
#5:	$\text{FACTOR}(x^4 - 1, x)$	
#6:		$(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 + 1)$
#7:	$\text{FACTOR}(x^5 - 1, x)$	
#8:		$(x - 1)\cdot(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
#9:	$\text{FACTOR}(x^6 - 1, x)$	
#10:		$(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 + x + 1)\cdot(x^2 - x + 1)$
#11:	$\text{FACTOR}(x^7 - 1, x)$	
#12:		$(x - 1)\cdot(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
#13:	$\text{FACTOR}(x^8 - 1, x)$	
#14:		$(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 + 1)\cdot(x^4 + 1)$

Figure 2 : copie d'écran d'une calculatrice formelle utilisée pour factoriser les $x^n - 1$

Pour toute technologie que l'on étudie ou que l'on introduit dans la classe, en vue notamment de faire entrer les élèves dans une démarche expérimentale, il semble nécessaire de circonscrire ses potentialités et les contraintes qu'elle induit pour l'enseignement et l'apprentissage, mais est-ce réellement réalisable ?

3. Le moment de test de la conjecture

Le deuxième moment de la démarche expérimentale sur lequel nous avons choisi de nous pencher est celui du test de la conjecture. Citons cette fois Duvernay[3], s'exprimant sur le site Educmath à propos de l'épreuve pratique au baccalauréat : « le deuxième inconvénient de la démarche expérimentale avec des technologies (le premier étant que ça prend du temps, forcément sur quelque chose d'autre) c'est que l'insistance sur l'aspect expérimental des mathématiques et l'usage de l'ordinateur pour « voir » ne conduise une grande partie des élèves à une conception faussée de ce que sont les mathématiques et des conditions de leur efficacité (que certains trouvent déraisonnables, on ne sait pourquoi). Ce danger n'est pas illusoire : le bulletin officiel n'affirme-t-il pas que les mathématiques se rapprochent des sciences expérimentales grâce à l'expérimentation numérique, à la simulation, à ce que l'on peut appeler la démonstration empirique ? ». La démarche expérimentale soulève ainsi des questions qui tournent autour de la nécessité de preuve mathématique des conjectures émises. Comment construire des outils ou même des situations d'enseignement qui suscitent chez les élèves une nécessité de preuve ?

Les constructions « molles », qui avaient été introduites par Healy (2000), semblent pouvoir constituer un tel outil, nous l'illustrons sur l'exemple ci-dessous. Nous considérons une situation en géométrie dynamique en classe de quatrième, où le professeur demande le lieu des

3 http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/epreuve-pratique/d-duverney

points d’où l’on voit un segment [AB] sous un angle droit. Les élèves peuvent créer le segment [AB] et un point M quelconque. Ils demandent au logiciel l’affichage de l’angle (AMB) puis déplacent le point M grossièrement pour amener à la valeur attendue de l’angle. En laissant ensuite la trace de M apparente, ils continuent le déplacement grossier de M en essayant de garder la contrainte de l’angle droit. La trace semble circulaire et la construction peut leur permettre de conjecturer la nature et les caractéristiques du lieu. C’est là une construction molle par opposition à une construction dure où le professeur aurait demandé aux élèves de tracer le cercle, de faire afficher la valeur de l’angle et d’émettre une conjecture par déplacement du point M sur le cercle.

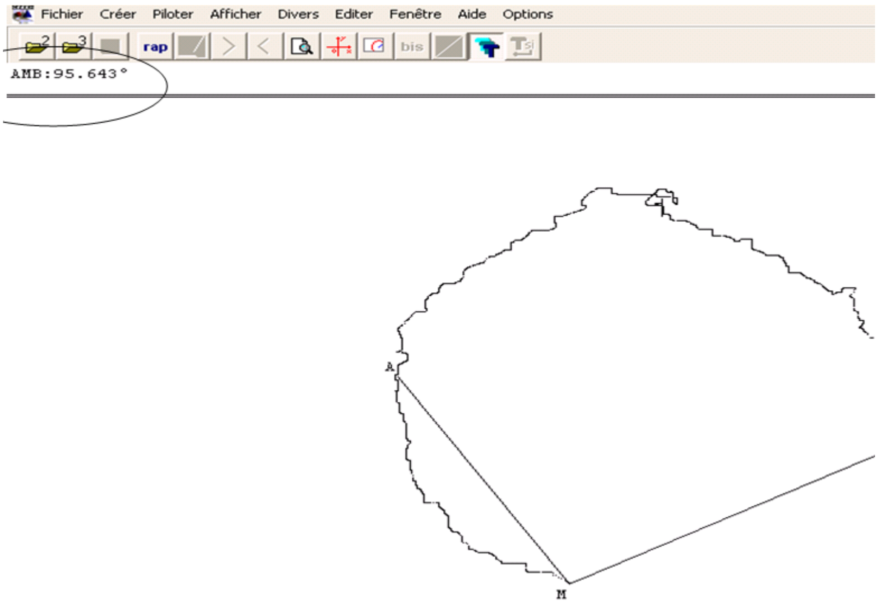


Figure 3 : illustration d’une construction molle

Dans la construction molle, le déplacement du point M en gardant la contrainte de l’angle droit peut induire un questionnement de l’élève sur la nature et les caractéristiques du lieu. L’élève ne cherche pas uniquement à déplacer M sous la contrainte mais cherche à identifier le lieu des points, dès que possible, sans s’obliger à le parcourir en entier. On peut penser que dans la construction molle, l’élève retrouve le besoin, plus que dans la construction dure où elle s’impose d’emblée, de démontrer sa conjecture. Il est cependant possible, une fois la conjecture établie, de la valider expérimentalement par une construction dure. C’est justement une vérification avec l’ordinateur de la conjecture, ce qui peut conforter les élèves en ce que la preuve mathématique n’est qu’un artifice imposé par le professeur. Cette remarque n’est pas anodine, comme le montre l’exemple suivant.

Dans ce deuxième exemple, questionnant la nécessité de preuve ressentie par les élèves, 4 suites numériques, (a_n), (b_n), (U_n) et (V_n) sont définies respectivement par les formules récurrentes ci-dessous.

$$a_{n+1}=(2a_n+b_n)/4 \quad b_n=(a_n+2b_n)/4$$
$$u_n=a_n+b_n \quad v_n=b_n-a_n$$

-

Les valeurs de ces 4 suites en fonction de leurs premiers termes sont données par un tableur dans les colonnes A, B, C, D respectivement. Les élèves doivent ainsi conjecturer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0, puis que les suites (U_n) et (V_n) sont géométriques de raisons respectives ¾ et ¼. Comme plus haut, le travail sur le tableur affecte à plus ou moins bon escient l’activité des élèves : par exemple, selon le nombre de décimales affichées par défaut, les suites (a_n) et (b_n) peuvent apparaître nulles à partir d’un certain rang, ce qui amène certains élèves à cette conjecture fausse.

	A	B	C	D
1	20	60	80	40
2	25	35	60	10
3	21,25	23,75	45	2,5
4	16,563	17,188	33,75	0,625
5	12,578	12,734	25,313	0,1563
6	9,4727	9,5117	18,984	0,0391
7	7,1143	7,124	14,238	0,0098
8	5,3381	5,3406	10,679	0,0024
9	4,0042	4,0048	8,009	0,0006
10	3,0033	3,0035	6,0068	0,0002
11	2,2525	2,2526	4,5051	4E-05
12	1,6894	1,6894	3,3788	1E-05
13	1,2671	1,2671	2,5341	2E-06
14	0,9503	0,9503	1,9006	6E-07
15	0,7127	0,7127	1,4254	1E-07
16	0,5345	0,5345	1,0691	4E-08
17	0,4009	0,4009	0,8018	9E-09
18	0,3007	0,3007	0,6014	2E-09

Figure 4 : copie d’écran tableur d’un élève

Cependant, ce que nous souhaitons illustrer ici est que les échanges avec l’enseignante, au moment où les élèves doivent s’engager dans la preuve du fait que les suites (U_n) et (V_n) sont géométriques, montrent bien combien cette étape importante de la preuve est problématique à gérer, à la fois pour les élèves et pour le professeur. D’une part, les élèves ne semblent pas comprendre les statuts différents d’une preuve et d’une conjecture réalisée grâce à l’ordinateur :

> *« E : ça il faut le faire sur l’ordi, le fait qu’elles sont convergentes ou pas ? »*
>
> *(...)*

D’autre part, le professeur, qui n’arrive pas à faire émerger chez les élèves cette nécessité d’une preuve mathématique des faits observés, contraint ceux-ci par sa vision très personnelle de l’exploitation des données du tableur :

> *« P : ... vous pouvez prouver en utilisant l’ordinateur…*
>
> *(...)*
>
> *P : Trouve quelque chose qui soit plus percutant…*
>
> *(...)*
>
> *E : Faut l’écrire en gras ? (l’élève ne comprend pas ce qu’attend de lui le professeur)*
>
> *P : je calculerais Un+1 sur Un*
>
> *(...) »*

En fait, le professeur souhaite que les élèves introduisent deux nouvelles colonnes pour faire apparaître les rapports constants U_{n+1}/U_n et V_{n+1}/V_n ce qui, d’une part, peut ici aussi enfermer les élèves dans l’idée que l’ordinateur apporte une preuve de la conjecture émise, et d’autre part ne correspond pas à une étape nécessaire pour passer de la conjecture à la preuve papier. D'ailleurs, plusieurs élèves observés lors de cette séance, qui ont déjà à ce moment réalisé leur conjecture au vu des quatre colonnes tableur passent directement à la démonstration papier sans chercher à faire apparaître des colonnes supplémentaires, et artificielles à leurs yeux. En outre, faire afficher les rapports U_{n+1}/U_n et V_{n+1}/V_n n'est possible sur la machine si les valeurs U_n et V_n sont non nulles, ce qui se vérifie pragmatiquement sur l'ordinateur mais doit se prouver rigoureusement en papier-crayon. Par rapport à ce que souhaiterait le professeur, il y a donc une double rupture : d'une part avec ce que veulent faire les élèves et d'autre part avec la démonstration en papier-crayon.

4. Quelle articulation entre le travail expérimental et le travail de conjecture et de preuve ?

Ce que nous avons vu ci-dessus nous montre qu'il est délicat d'élucider comment les technologies peuvent permettre aux élèves d'effectuer de bonnes conjectures, difficiles, ou impossibles en papier-crayon. Quelles connaissances doivent être disponibles pour cela ? Notamment, quelles connaissances préalables sur les technologies elles-mêmes sont nécessaires et suffisantes pour émettre des conjectures raisonnables ? Comment comprendre par exemple les simplifications des calculatrices symboliques sans comprendre en même temps ce système de double référence pointé plus haut ? Comment, ensuite, le travail avec les technologies peut-il susciter l'entrée dans la preuve, éventuellement la faciliter parce que, par exemple, elle n'aurait pas été accessible aux élèves en environnement papier-crayon ? Quelles connaissances mathématiques (nouvelles, anciennes) sont alors mises en fonctionnement et comment ? Quelles connaissances nouvelles peuvent s'installer et comment ?

Plus généralement, toutes les notions sont-elles intéressantes à introduire ou même à travailler avec les technologies ? Cette question, qui dépasse la dimension expérimentale des mathématiques, reste toujours importante tant sa réponse semble complexe. Les technologies peuvent-elles par exemple aider à faire s'installer chez des élèves d'un niveau donné des notions formalisatrices, unificatrices, généralisatrices (FUG), comme les a introduites Robert (1998) ; notions pour lesquelles les situations d'introduction, et les situations fondamentales notamment, sont par la nature même de ces notions très difficiles à concevoir ? Les recherches sur certaines technologies (géométrie dynamique et tableur notamment) amènent à penser que la réponse est positive. La figure géométrique au niveau sixième ou la formule algébrique au niveau cinquième ne sont-elles pas de telles notions FUG à ces niveaux ? La géométrie dynamique s'est justement développée sur la distinction dessin / figure et sur l'idée que la fonctionnalité de déplacement devait permettre un nouveau rapport des élèves à cette distinction. Le tableur, même s'il n'est pas à l'origine développé à des fins d'enseignement, semble également être un bon outil à la transition arithmétique algèbre comme l'a montré Haspekian dans sa thèse (Haspekian 2005).

Nous allons étudier de plus près un exemple qui montre la possibilité de pertinence des outils technologiques pour introduire des notions difficiles auprès des élèves, concernant la notion de paramètre au lycée et la fonctionnalité de curseur du logiciel GeoGebra. Dans l'exemple suivant, inspiré d'un sujet de l'épreuve pratique au Baccalauréat S, les élèves qui, travaillent sur GeoGebra, doivent conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = k\,x^2$ en fonction du paramètre k.

TP type BAC sur logiciel de géométrie

On donne un paramètre réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

1) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer suivant les valeurs du paramètre k le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler le professeur pour vérifier vos conjectures selon les différentes valeurs de k.

2) Justifier sur votre feuille ces conjectures.

Figure 5 : énoncé de l'exercice ln(x)=kx²

La disponibilité et l'utilisation à bon escient de la notion mathématique de paramètre peut être favorisée par la disponibilité de la fonctionnalité de curseur de GeoGebra. Dans cet exemple, les élèves ayant repéré le rôle important du paramètre k doivent donc introduire d'eux-mêmes un curseur dans GeoGebra pour tracer par exemple les deux courbes $y=\ln(x)$ et $y=kx^2$. Ils doivent ainsi transformer le problème de résolution d'une équation fonctionnelle en problème d'intersection de courbes, ce qui correspond à un changement de cadre de travail qui participe de la complexité du sujet. L'exploration sur le logiciel permet donc d'approcher la valeur de k pour laquelle le nombre de solutions à l'équation change (0, 1 ou 2) mais elle ne permet pas aux élèves de donner la valeur exacte qui est irrationnelle. Ils doivent donc nécessairement travailler dans l'environnement papier-crayon pour trouver cette valeur exacte de k.

Dans cet exemple, il semble que l'introduction du paramètre puisse être possible avec l'introduction du curseur, que le changement de cadre puisse être accompagné par l'utilisation de GeoGebra, que l'entrée dans la preuve puisse être favorisée par le fait d'obtenir partiellement la conjecture grâce au logiciel et enfin qu'un maintien en activité des élèves puisse être possible par les allers-retours entre machine et papier-crayon que permet ce problème.

Ainsi la question qui se pose, illustrée par ce dernier exemple, est celle de savoir s'il est toujours possible d'articuler un travail expérimental et un travail mathématique de conjecture et de preuve, articulation signifiant que certaines mises en fonctionnement difficiles, liées aux activités de conjecture et de preuve (choix, initiatives, introductions… des adaptations de connaissances comme les introduit Robert 1998) peuvent être réalisées par les élèves, grâce au recours aux technologies.

III Enseigner avec les technologies : questions théoriques et méthodologiques

Dans ce paragraphe, les questions de caractérisation d'une démarche expérimentale avec des technologies se transforment en des questions de compatibilité possibles entre les exigences de cette démarche, la qualité de l'activité mathématique des élèves et la réalité des pratiques enseignantes. Nous reprenons l'exemple précédent avant de dégager des questions aux niveaux théorique et méthodologique.

1. Les technologies et la pratique des enseignants, le cas de la démarche expérimentale

Le sujet évoqué ci-dessus, à propos de ln(x)=kx^2, transformé et proposé par une enseignante à ses élèves de terminale S pour les préparer vers la fin d'année à l'épreuve pratique, conduit à l'énoncé suivant :

TP sur logiciel de géométrie

On donne un réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

1. Lancer le logiciel Geogebra.
2. Dans le champ de saisie en bas, entrer f(x)= ln(x) puis valider. Entrer ensuite x^2, valider. Faire de même avec 0.5*x^2 puis 0.1*x^2 et enfin −x^2. Compléter le tableau :

Valeur de k				
Nombre de solutions d'après le graphique				

3. On veut désormais déterminer de manière plus précise le nombre de solutions. Cliquer sur Fenêtre puis Nouvelle fenêtre et faire apparaître la courbe de la fonction ln dans ce nouveau repère.
4. Entrer $k = 1$ dans la zone de saisie puis valider. Ce nombre apparaît dans la fenêtre Algèbre. Dans le champ de saisie, définir maintenant $g(x) = kx^2$.
5. Pour faire varier le nombre k, cliquer avec le bouton droit sur ce nombre et cocher Afficher l'objet.

Figure 6 : énoncé de l'exercice ln(x)=kx² transformé par un professeur

Dans cette version réalisée en classe, la démarche expérimentale est malmenée par la fragmentation de la tâche en sous-tâches (questions 3, 4, 5 et 6). Par exemple, la mobilisation autonome du curseur associé à l'idée que le problème comporte un paramètre, le changement de cadre de l'énoncé initial, sont pris en charge par l'énoncé. En outre, l'activité expérimentale est initiée par le test de cas particuliers, ce qui pourrait rester du seul ressort des élèves (question 2). Ceci semble favoriser le fait que les élèves restent, plus facilement qu'avec l'énoncé brut, en activité. Cependant, comme le relate l'enseignante a posteriori, le TP sous cette forme est rapide, 45 minutes. En outre, l'enseignante explique que l'activité demandée de tester différentes valeurs de k, de tracer les courbes correspondantes et de remplir le tableau, n'est pas du tout connectée par les élèves au problème général. En reprenant avec prudence la dialectique introduite par Samurçay et Rabardel (2004) pour des professionnels en situation de travail, dialectique entre activité productive et activité constructive, il est possible de dire que cet énoncé entretien effectivement l'activité productive des élèves sur leur machine mais génère peu l'activité constructive bénéfique à la compréhension et à la résolution du problème dans sa généralité.

Quoi qu'il en soit, certains autres enseignants choisissent de proposer le sujet brut ln(x)=kx^2 à leurs élèves, et semblent parvenir à mettre en place dans la classe une démarche expérimentale à partir de ce sujet. Comment expliquer ces différences d'un enseignant à l'autre ?

2. L'enseignant et les technologies, questions théoriques

Quel est plus précisément le rôle de l'enseignant travaillant en classe avec les technologies ? Quels facteurs vont déterminer les stabilités, et les évolutions, de la pratique des enseignants travaillant avec des technologies ? Ici nous allons nous pencher, non pas sur ces facteurs, mais sur les théories susceptibles d'être mobilisées pour répondre à de telles questions, et sur les interrogations suscitées par la confrontation de différentes théories.

Médiation sémiotique et approche instrumentale

Le projet Remath évoqué plus haut (§ 1) a conduit à mettre en regard deux théories spécialement dédiées à l'étude du recours aux technologies et de son impact pour l'enseignement et l'apprentissage: la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti 2008) et l'approche instrumentale (Rabardel 1995, Guin & Trouche 2002). La première postule la nécessité de cycles didactiques dans le processus d'enseignement apprentissage, cycle où les élèves sont en activité sur des tâches et sur des artefacts, produisent des signes qui sont plus ou moins axés sur l'artefact – les signes artefacts – ou plus ou moins axés sur les mathématiques – les signes mathématiques. Mais ce sont des signes individuels aux élèves. L'évolution des signes artefacts des élèves vers des signes mathématiques est promue par le professeur dans une discussion collective. Il s'agit donc d'exploiter le potentiel sémiotique de l'artefact. Dans l'approche instrumentale, le rôle du professeur est théorisé en termes d'orchestration instrumentale (Trouche 2004). L'attention est centrée sur l'accompagnement par le professeur des genèses instrumentales des élèves.En effet, l'apprentissage est modélisé parle développement d'un instrument à partir de l'artefact, c'est-à-dire par la construction de schèmes d'actions instrumentées par l'artefact, dans un double processus d'instrumentalisation (l'élève prend en main l'artefact) et d'instrumentation (l'artefact façonne les connaissances des élèves).

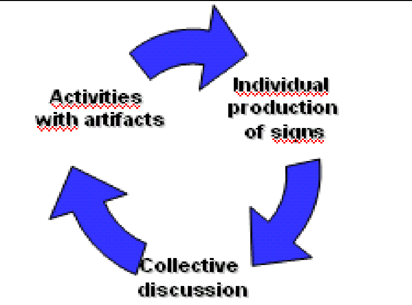
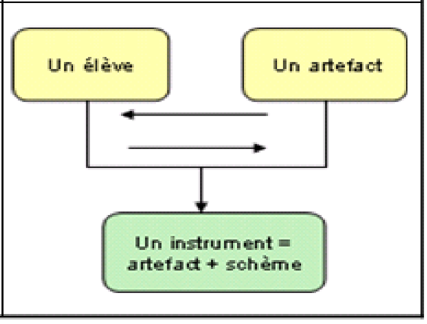
Théorie de la médiation sémiotique (Mariotti)	Approche instrumentale (du côté de l'élève)
	

Figure 7 : schématisations associées à la théorie de la médiation sémiotique et à l'approche instrumentale

La question de la « décontextualisation instrumentale » se pose alors lorsqu'on étudie la façon dont peut se passer la discussion dans la théorie Italienne. En effet, le professeur y mène la discussion pour dissocier les connaissances mathématiques des connaissances instrumentales. Ceci contraste donc avec l'approche instrumentale où les connaissances mathématiques sont construites entremêlées avec des connaissances instrumentales et où la décontextualisation n'est pas prise en charge. Quelle nécessité de décontextualisation, dans le travail en classe avec les technologies ? Est-ce que celle-ci doit s'insérer dans les orchestrations instrumentales mises en place par le professeur ?

Double approche et approche documentaire

Le rôle du professeur, son appropriation des technologies, étaient au centre du projet GUPTEn (Lagrange *et al.* 2009). Ce projet a amené à étendre l'approche instrumentale au cas du sujet enseignant (Bueno-Ravel & Gueudet 2009) ; il a aussi suscité une première mise en regard de cette approche instrumentale généralisée avec la double approche, didactique et ergonomique, des pratiques enseignantes (Robert & Rogalski 2002). Par ailleurs, et notamment à la suite du projet GUPTEn a été développée l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2009a) ; nous allons interroger ici l'articulation entre double approche et approche documentaire.

Ces deux théories empruntent à l'ergonomie cognitive. La double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes est un cadre d'analyse de l'activité des enseignants en situations de classes ordinaires. Dans cette théorie, Robert et Rogalski postulent que la pratique d'un enseignant (terme qui désigne : « tout ce qui se rapporte à ce que l'enseignant pense, dit ou ne dit pas, fait ou ne fait pas, sur un temps long » Robert 2008, p. 59) est stable à une certaine échelle, plus large que celle des seules situations d'enseignement avec des technologies. Elles introduisent cinq composantes de la pratique d'un enseignant :

- une composante cognitive caractéristique des choix récurrents de l'enseignant au niveau de ses scénarios et des contenus qu'il propose à ses élèves ;
- une composante médiative caractéristique de la façon qu'il a d'aider ses élèves, par la forme de ses énoncés ou par son discours pendant les déroulements, indépendamment de situations spécifiques d'enseignement;
- les composantes sociales et institutionnelles, externes à l'enseignant ;
- la composante personnelle liée aux conceptions du savoir qu'à l'enseignant, à sa représentation des modes d'apprentissage des élèves et à son histoire propre d'exercice du métier.

La pratique d'un enseignant est non seulement stable mais aussi cohérente et complexe, c'est-à-dire non réductible à la juxtaposition des cinq composantes. Cohérence, complexité et stabilité de la pratique d'un enseignant se conjuguent à l'évolution de son activité au fil des situations d'enseignement avec des technologies. Elles ne signifient pas invariance de l'activité enseignante mais adaptations des formes d'organisation de son activité aux situations d'enseignement (Vergnaud 2002) .

L'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2009a), qui s'inspire de l'approche instrumentale (Guin & Trouche 2002), est également ancrée dans l'ergonomie cognitive. Elle s'appuie, de plus, sur d'autres recherches, relevant de l'ingénierie documentaire (Pédauque 2006), qui a mis en lumière les bouleversements liés au numérique, et de l'étude du curriculum material (Remillard 2005), qui considère les interactions entre les professeurs et la documentation scolaire. L'approche documentaire se centre d'emblée sur les ressources du professeur, en conférant au terme ressource un sens très large, désignant tout ce qui est susceptible de re-sourcer la pratique du professeur (Adler 2000). Cette approche s'intéresse au travail documentaire du professeur : collecter des ressources, les associer, concevoir une séance, la mettre en œuvre, la réviser etc. Ce travail, qui se déroule dans des lieux, des temps, et des collectifs très divers, est au centre de l'activité professionnelle des professeurs. Au cours de son interaction avec un ensemble de ressources, pour une classe de situations donnée, à travers différents contextes, le professeur développe un document, entité mixte composée de ressources recombinées et d'un schème d'utilisation de ces ressources. Ce processus est nommé genèse documentaire. L'ensemble des documents d'un professeur constitue un système documentaire dont la structure évolutive est étroitement liée à celle du système d'activités professionnelles du professeur. Ainsi les évolutions et les stabilités sont liées aux genèses, porteuses de changement comme d'invariance. L'intégration, en particulier, d'une nouvelle technologie dépend de la possibilité pour celle-ci d'être associée à certaines ressources appartenant au système de ressources du professeur (la partie « ressources » de son système documentaire). Elle dépend aussi du système des connaissances professionnelles du professeurs.

La double approche, comme l'approche documentaire, reconnaissent la délicate articulation entre évolutions et stabilités dans la pratique des enseignants. La double approche précise celles-ci en distinguant différentes composantes dans l'activité de professeurs. L'approche documentaire recherche les déterminants des évolutions en considérant des ressources, les classes de situations pour lesquelles celles-ci sont mobilisées, et les connaissances professionnelles associées. L'articulation de ces deux théories reste à préciser : quelle place pour les composantes dans l'approche documentaire ? Peuvent-elles contribuer à classifier les connaissances professionnelles ? Quelle prise en compte du travail hors classe des professeurs, dans la double approche ?

Les théories évoquées ci-dessus se penchent essentiellement sur des déterminants individuels. Un tel regard peut certes contribuer à élaborer des actions de formation continue destinées à des groupes d'enseignants, nous y reviendrons dans ce qui suit (§ 4). Mais est-ce une échelle suffisante pour traiter des questions d'intégration des technologies ? Le décalage entre les attentes institutionnelles et les usages réels n'a-t-il pas de déterminants plus larges, à un niveau systémique ?

Ruthven (2009) propose un cadre interprétatif qui prend appui sur des recherches concernant les caractéristiques structurantes de la pratique scolaire d'une part et sur des études concernant l'intégration des technologies d'autre part. Il identifie cinq caractéristiques structurantes de la pratique de classe : l'environnement de travail, le système de ressources, le format d'activité, le script curriculaire et l'économie temporelle. Le concept de format d'activité concerne les modes d'action et d'interaction qui conditionnent les contributions de l'enseignant et des élèves ; le concept de script curriculaire désigne le modèle de buts et d'actions qui sert à guider l'enseignement d'un thème particulier. Ainsi le cadre proposé par Ruthven accorde au final une place importante au script curriculaire, forgé par l'enseignant au fil de sa pratique professionnelle, et même les autres caractéristiques, pour être précisées, devront se situer au niveau d'un individu.

Etudiant également les questions d'intégration, Assude (2007) propose de considérer de manière articulée les changements et les résistances des professeurs. Elle distingue en particulier cinq indicateurs de changement : facteurs, acteurs, degré, effet, valeur ; et cinq types de résistances : personnelles, institutionnelles, symboliques, éthiques et temporelles. Dans ce cadre, même si la nécessité de prise en compte de résistances personnelles est soulignée, les concepts proposés semblent pouvoir permettre des études plus globales. Reste alors à mettre en œuvre de telles études, notamment en construisant des méthodologies appropriées.

3. L'enseignant et les technologies, questions méthodologiques

Les approches qui demandent un suivi détaillé de la pratique (double approche, approche documentaire, caractéristiques structurantes de la pratique enseignante) renvoient à la question du professeur « ordinaire », évoquée plus haut (§ 1) : les études associées devront analyser précisément la pratique de quelques individus, ainsi le choix de ceux-ci sera déterminant. Comment accéder de cette manière à des résultats significatifs, au-delà du sujet étudié ?

Cette question méthodologique (qui n'est ni nouvelle, ni spécifique à l'enseignant travaillant avec les technologies) est encore plus sensible avec les approches qui supposent un suivi dans la durée. Les questions d'évolution de pratique nécessitent un tel suivi, se déployant dans des lieux divers. Ceci suscite d'autres difficultés méthodologiques au sujet desquelles Gueudet & Trouche (2009b) proposent des solutions fondées sur une investigation réflexive de la pratique du professeur, recourant en particulier à des outils de type journal de bord, et articulant suivi hors classe et en classe.

Ces outils sont évidemment difficilement compatibles avec la prise en compte d'échantillons larges de professeurs. A propos des professeurs, cette question d'échelle est toujours posée. En France, certaines études portent sur des groupes de professeurs stagiaires en formation initiale ; en dehors de ce cas particulier, quelques études par questionnaires soutiennent des démarches quantitatives mais celles-ci sont rares. De plus, une prise en compte fine de la technologie semble nécessiter l'observation directe des interactions du professeur avec les ressources concernées. Le problème du passage à une échelle large semble tout aussi délicat pour l'étude de la pratique que pour la diffusion des travaux expérimentaux (questions de up-scaling, largement étudiées dans des travaux anglo-saxons, voir par exemple Hegedus & Lesh 2008). Ainsi l'une des pistes qui semblent actuellement particulièrement prometteuses est l'intérêt porté à certains collectifs de professeurs. Des collectifs réduits (équipe de professeurs de mathématiques dans un collège par exemple) permettent de dépasser le niveau individuel ; des collectifs plus larges (association d'enseignants) pourraient donner au chercheur l'occasion d'études quantitatives approfondies. De plus les technologies actuelles entraînent d'importantes mutations de ces collectifs, ce qui justifie l'intérêt spécifique que nous leur portons ici.

IV Technologies et collectifs

Les technologies ouvrent des possibilités de mise en réseau, et donc de travail collectif. Quelles sont, plus précisément, ces possibilités ? Qu'est-ce que modifient ces mises en réseau pour l'enseignement et l'apprentissage ?

1. Collectifs d'élèves

Il peut s'agir, tout d'abord, de susciter des collectifs d'élèves. A propos de l'emploi des technologies pour la démarche expérimentale, la possibilité de travaux collectifs est signalée comme un des apports majeurs (Kim *et al.* 2007). En sciences expérimentales, les technologies portables (téléphones portables bluetooth équipés de systèmes vidéo ; GPS...) permettent la communication entre des élèves sur le terrain et d'autres, restés en classe pour interpréter les données reçues. Certains rallyes mathématiques utilisent également ces technologies portables (Dunleavy & Dede 2008). Plus classiquement, les recherches se penchent sur l'utilisation d'ordinateurs en réseau, ou de tableaux blancs interactifs partagés, pour la résolution collaborative de problèmes (Hwang *et al.* 2006). Ces travaux relèvent du courant de recherche désigné par l'acronyme CSCL: Computer Supported Collaborative Learning (Dillenbourg & Fischer 2007). Celui-ci a donné lieu à de nombreuses publications, une revue spécialisée y est consacrée (ijCSCL, International Journal of Computer Supported Collaborative Learning, publié par Springer). Les travaux relevant du CSCL sont souvent centrés sur l'analyse des interactions entre élèves ; ils étudient à partir de ces interactions l'impact de la technologie sur la construction collective de connaissances par les élèves, dans une perspective se réclamant du socio-constructivisme et de la cognition située. Ces travaux restent pour l'essentiel peu didactiques ; de même peu de travaux en didactique des mathématiques ont jusqu'à présent cherché à élucider les conséquences spécifiques de l'apprentissage collectif utilisant les technologies. Il en existe cependant certains, comme ceux que nous avons évoqués ci-dessus (§ 1), portant sur les calculatrices en réseau (Hivon *et al.* 2008) ou sur le logiciel SimCalc® (Hegedus *et al.* to appear) associé à des dispositifs de projection de différentes productions d'élèves sur un même écran. Comment prendre en compte des dimensions didactiques dans le CSCL ? Répondre à cette question, montrer la pertinence d'une telle prise en compte, reste une tâche à accomplir par les didacticiens.

2. Collectifs formés des élèves et du professeur

Curieusement, comme les recherches en didactique des mathématiques sur les technologies, le CSCL a récemment évolué vers un plus grand intérêt accordé au rôle du professeur, qui était jusqu'alors plutôt négligé (le CSCL est issu de travaux concernant le e-learning ; de même, ces travaux ont été longs à identifier l'importance du rôle du professeur, comme si la distance tendait à faire oublier l'existence de celui-ci). Plus curieusement encore, cette prise en compte se fait à travers la notion d'orchestration, récemment introduite dans le champ du CSCL (Dillenbourg *et al.* 2009). On retrouve ainsi l'une des évolutions majeures des recherches (sur les technologies, mais pas uniquement, Sensevy & Mercier 2007) en didactique des mathématiques : l'intérêt pour des collectifs formés du professeur et de ses élèves, et pour le rôle du professeur au sein de ces collectifs. La notion d'orchestration instrumentale, qui fournit une conceptualisation de ce rôle, a donné lieu à des travaux récents. Elle est définie comme « l'organisation systématique des artefacts disponibles dans un environnement donné, pour la mise en œuvre d'une activité mathématique donnée » (Trouche 2009). Ainsi l'orchestration comporte une dimension d'apprêt d'un problème mathématique, autant que d'apprêt des artefacts qui seront utilisés. Elle ne concerne pas que la préparation de ce qui sera fait en classe, mais aussi la mise en œuvre elle-même. C'est pourquoi Drijvers *et al.* (to appear) proposent de distinguer, parmi les composantes de l'orchestration, ce qu'ils nomment *la performance didactique* : l'ensemble des décisions prises par le professeur dans le cours de sa mise en œuvre d'un problème mathématique. Pour ces décisions, les réactions des élèves, leurs productions, jouent un rôle fondamental. La performance didactique est une performance conjointe du professeur et des élèves ; on retrouve ici des constats qui dépassent largement le cadre de la recherche sur les technologies, voire sur les ressources en général.

3. Collectifs de professeurs

Dernier type de collectif, pour lequel la recherche considère les évolutions engendrées par les technologies : les collectifs de professeurs. Ce questionnement est détaillé dans Gueudet et Trouche (2009b) ; ici nous l'évoquons brièvement. Les possibilités de communication distantes, le développement de l'Internet en particulier ont engendré, selon un rapport récent (Pochard 2008), « une dynamique du collectif ». Ce rapport ne considère que la situation en France ; nous ne faisons pas ici d'hypothèses sur la situation dans d'autres pays, car ces dimensions collectives dépendent largement de facteurs institutionnels et culturels. Ainsi en Angleterre, les professeurs du secondaire travaillent au sein de départements disciplinaires dans leurs établissements. Ces départements fournissent des ressources, offrent un lieu, un cadre pour le travail commun (Ruthven 2009). Au Japon, les professeurs travaillent également ensemble à la préparation de séances de classe, qui donneront lieu à une mise en œuvre observée collectivement, dans le cadre de la formation continue qui prend cette forme de *lesson studies* (Myiakawa & Winsløw 2009). Dans ces pays où le travail collectif est institutionnellement organisé en présence, l'arrivée d'Internet n'a sans doute pas entraîné les mêmes modifications qu'en France. Les professeurs téléchargent des ressources en ligne, échangent par courrier électronique, s'abonnent à des listes de diffusion... Un phénomène particulièrement significatif est l'essor de l'association Sésamath (Kuntz *et al.* 2008), et le succès de ses ressources : le site web Sésamath enregistre plus de 1,3 millions de connexions mensuelles. Nous avons évoqué ci-dessus (§ 1) les manuels Sésamath, conçus collaborativement par des équipes nombreuses d'enseignants de collège, dont la plupart ne sont pas membres de l'association mais souhaitent s'impliquer dans ce projet. Sésamath propose également une base d'exercices en ligne, Mathenpoche ; un logiciel de géométrie dynamique, Tracenpoche, différentes fiches de cours et d'exercices (les cahiers Mathenpoche, Mathadoc) ... Ce développement étonnant a débuté par la mutualisation de ressources en ligne conçues par quelques professeurs (Gueudet

& Trouche 2009c), qui a débouché sur la conception coopérative de Mathenpoche par une équipe d'une vingtaine de professeurs. Cette équipe s'est ensuite constituée en une communauté de pratique (Wenger 1998) qui s'est étendue pour donner l'association actuelle. Le succès de Mathenpoche a été immédiat ; aujourd'hui encore, aucune ressource comparable n'est disponible. Il ne s'agit pas d'affirmer que le contenu mathématique de Mathenpoche est sans faille, mais simplement de constater que c'est la seule base d'exercices en ligne à couvrir l'intégralité du programme de collège, et à permettre aux professeurs de programmer leurs propres séances d'exercices en puisant dans cette vaste bibliothèque. Le passage à la composition de manuels sous licence libre a été un autre virage déterminant dans la vie de l'association, notamment en amenant l'implication active de nombreux enseignants qui n'étaient encore qu'utilisateurs de ressources Sésamath. Les questions liées à l'avenir de Sésamath sont nombreuses. Les chantiers que représentaient Mathenpoche et le manuel sont achevés, pour le niveau collège. Est-ce que ceci va marquer la fin de l'association, qui se contenterait de maintenances techniques, ou de mises à jour en fonction des évolutions de programmes ? Est-ce qu'elle va trouver un prolongement, au moins temporaire, dans la réalisation de supports similaires pour d'autres niveaux scolaires : lycée, premier degré ? Ou bien est-ce que les réalisations actuelles ne sont qu'une première étape, et qu'un travail va s'engager sur la qualité des ressources disponibles ? Dans tous les cas ceci doit être suivi par la recherche, dont le rôle est aussi de participer activement à ces changements en cours.

L'élaboration collective de ressources pour la classe apparaît également comme un mode potentiellement riche de formation continue des enseignants ; de nombreuses recherches ont mis à jour des résultats qui vont en ce sens (Krainer 2003, Jaworski 2006). Les technologies facilitent la mise en place de ce type de dispositifs, en offrant de nouvelles possibilités de travail distant (Lachance & Confrey 2003). En France, le projet SFoDEM (Guin *et al.* 2008) organisé par l'IREM de Montpellier a développé un dispositif de ce type pour la formation continue de professeurs de mathématiques du second degré, visant l'intégration des technologies. Des équipes de professeurs élaboraient collectivement des ressources pour la classe, en utilisant une plate-forme distante. Actuellement, le programme Pairform@nce du ministère de l'éducation nationale (Gueudet *et al.* 2009) qui poursuit des objectifs semblables adopte des principes comparables, pour tous les niveaux scolaires et toutes les disciplines. Comment accompagner l'élaboration collective de séquences de classe ? Il s'agit d'un questionnement relevant du méta-design (Fischer & Ostwald 2003). Le SFoDEM a montré que le travail documentaire collectif produisait en particulier des *modèles de ressources* : caractéristiques communes à des ensembles de ressources, qui sont issus du travail commun, mais sont également essentiels pour permettre ce travail commun. Ainsi, les manières de décrire une séance de classe sont nombreuses ; l'élaboration d'une telle séance par une équipe de professeurs nécessite le choix d'une forme de description commune. Lorsqu'un modèle, ou une partie de celui-ci, est fourni par un formateur on parle d'*assistance méthodologique* (Guin & Trouche 2008), ce qui rejoint la notion de *seeds* introduite dans le champ du méta-design. Ainsi l'accompagnement de l'élaboration collective de séquences de classe passe par la proposition d'une assistance méthodologique, contribuant à l'émergence de modèles qui vont permettre le travail documentaire collectif et l'émergence de communautés de pratique. Dans chaque contexte de formation, il s'agit alors de déterminer quelle peut-être cette assistance méthodologique : c'est le rôle du formateur, mais aussi celui du chercheur.

V Conclusion

Pour cette revue de questions, nous avons fait le choix d'approfondir certaines directions dans le champ foisonnant des recherches en didactique des mathématiques sur les technologies. Ces recherches sont souvent réparties selon les trois catégories articulées de l'apprentissage, de l'enseignement, et du design. Ici nous n'avons pas consacré une partie spécifique au design, préférant examiner de plus près les questions liées aux collectifs, qui nous semblent constituer un thème de recherche encore peu exploré, et en cours de développement. Nous avons cependant abordé dans chaque partie des points liés au design : élaboration de ressources, de scénarios d'usage, accompagnement de cette élaboration, formation. Dans le domaine des technologies, la recherche est en prise directe avec l'action didactique, et donc le design est toujours présent. Les chercheurs doivent contribuer au design de ressources de qualité (qui incluent les scénarios d'usage). Dans la situation actuelle où de nombreuses ressources sont disponibles, la recherche doit aussi pouvoir fournir aux enseignants des outils de choix de ces ressources, outils d'évaluation de leur qualité en particulier. Qu'est-ce que la qualité d'une ressource, d'un point de vue didactique ? Quels critères retenir ? La participation des utilisateurs au processus de conception est un moyen essentiel pour garantir certaines formes de qualité : adaptation au programme, réalisabilité en classe (Trgalova *et al.* to appear). Cependant la qualité d'une ressource scolaire, du scénario d'utilisation associé, ne peut être séparée de la question de l'efficacité de l'enseignement utilisant cette ressource et ce scénario. Comment évaluer cette efficacité ? La recherche doit se saisir de cette question centrale, et des difficultés méthodologiques associées.

VI Références

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education, *Journal of Mathematics Teacher Education,* 3, 205–224.

Archambault, D., Fitzpatrick, D. (2008). Impact of ICT on the Teaching of Maths to VIP (Visually Impaired People), *JEM Workshop 5*, Paris, http://www.jem-thematic.net/en/node/1205.

Artigue, M (1995). Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques, *Repères IREM*, 19, 77-100.

Artigue, M. (2007). Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education Plenary 4. Pitta-Pantazi D. & Philippou G. (eds.) *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME,* 68-82.

Artigue, M., Bardini, C. (to appear). New didactical phenomena prompted by TI-Nspire specificities – the mathematical component of the instrumentation process, *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France.

Artigue, M., Gueudet, G. (2008). Ressources en ligne et enseignement des mathématiques, Université d'été de mathématiques, Saint-Flour.

Assude, T. (2007). Changements et résistances à propos de l'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques au primaire, Colloque TICE Méditerrannée.

Assude T., Bonnet J.-F., Rabatel J.-P., Gelis J.-M. (2007). La géométrie dynamique dans des classes de cycles 2 et 3. *Actes du XXXIIIème colloque sur la formation des maîtres*, 1-13, CRDP de Versailles, CDDP de l'Essonne Evry.

Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English et al. (eds.) Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition. Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ.

Bueno-Ravel, L. Gueudet, G. (2009). Online resources in mathematics : teachers' geneses and didactical techniques. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 14(1), 1-20.

Cazes, C., Gueudet, G., Hersant, M., Vandebrouck, F. (2007). Using E-Exercise Bases in mathematics: case studies at university, *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 11(3), 327-350.

Delahaye, J-P. (2005). Mathématiques expérimentales, *Pour la science*, 331, 88-93

Dillenbourg, P., Fischer, F. (2007). Basics of Computer-Supported Collaborative Learning, *Zeitschrift für Berufs- und Wirtschaftspädagogik*. 21, 111-130.

Dillenbourg, P., Järvelä, S., Fischer, F. (2009). The evolution of research on computer-supported collaborative learning: from design to orchestration, in N. Balacheff, S. Ludvigsen, T. de Jong, T., A. Lazonder & S. Barnes (eds.) *Technology-Enhanced Learning. Principles and products* (pp. 3-19). Berlin : Springer.

Dunleavy, M., Dede, C., Mitchell, R. (2008). Affordances and limitations of immersive participatory augmented reality simulations for teaching and learning, *Journal of Science Education and Technology*, 18 (1), 7-22.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P.,Van Gisbergen, S. (to appear). Instrumental orchestration: Theory and practice. *Proceedings of CERME 6,* Lyon, France.

Fischer G., Ostwald J. (2003). Knowledge Communication in Design Communities, in R. Bromme, F. Hesse, H. Spada (eds.), *Barriers and Biases in Computer-Mediated Knowledge Communication* (pp. 1-32). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gueudet, G., Bottino, R.M., Chiappini, G., Hegedus, S., Weigand, H.-G. (to appear). Technologies and resources in mathematics education, *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France.

Gueudet, G., Soury-Lavergne, S., Trouche, L. (2009). Soutenir l'intégration des TICE : quels assistants méthodologiques pour le développement de la documentation collective des professeurs ? Exemples du SFoDEM et du dispositif Pairform@nce, in C. Ouvrier-Buffet, M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Approches plurielles en didactique des mathématiques,* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot, Paris, pp. 161-173.

Gueudet G., Trouche L. (2009a). Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218.

Gueudet G., Trouche L. (2009b). La documentation des professeurs de mathématiques, in L.Coulange et C. Hache (dir.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques 2008*, 249-269, IREM, Université Paris 7.

Gueudet G., Trouche L. (2009c). Conceptions et usages de ressources pour et par les professeurs, développement associatif et développement professionnel, *Les dossiers de l'ingénierie éducative* 65, 76-80.

Guin D., Joab M., Trouche L. (dir.) (2008). *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM*, INRP et IREM (Université Montpellier 2).

Guin, D., Trouche, L. (dir.) (2002). *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Guin, D., Trouche, L. (2008). Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom SFoDEM 2008. *Repères IREM,* 72, 5-24.

Haspekian, M. (2005). An instrumental approach to integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets, *International Journal of Computer for Mathematics Learning*, 10, 109-141

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. Dans T Nakahara et M Koyama (eds.), *Proceeding of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. pp 103-117. Hiroshima. Hiroshima University

Hegedus, S., Lesh, R. (2008). *Democratizing Access to Mathematics through Technology: Issues of Design, Theory and Implementation- In memory of Jim Kaput's work*. Special issue of *Educational Studies in Mathematics,* 68(2).

Hegedus, S., Moreno, L., Dalton, S., Brookstein, A. (to appear). Establishing a longitudinal efficacy study using SimCalc MathWorlds®, *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France.

Hivon, L., Péan, M., Trouche, L. (2008). D'un réseau de calculatrices à la construction collaborative du savoir dans la classe, *Repères-IREM 72,* 79-102.

Hoyles, C., Lagrange, J.-B. (to appear). *Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain*, ICMI 17 study, Springer.

Hwang, W.-Y., Chen, N.-S., Hsu R.-L. (2006). Development and evaluation of multimedia whiteboard system for improving mathematical problem solving. *Computers & Education*, 46(2) 105-121.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education* 9, 187-211.

Kim, M.C., Hannafin, M.J., Ryan, L.A. (2007). Technology-Enhanced Inquiry Tools in Science Education : An Emerging Pedagogical Framework for Classroom Practice, *Science Education,* 91 (6), 1010-1030.

Krainer, K. (2003). Editorial. Teams, communities and networks. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 6, 93-105.

Kuntz, G., Hache, S., Clerc, B. (2009). Sésamath : un modèle pour créer, éditer et apprendre des mathématiques, dans un nouveau cadre économique. *Repères IREM 75*, 46-66.

Kynigos, C., Bardini, C., Barzel, B., Maschietto, M. (2007). Tools and technologies in mathematical didactics, in D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1332-1338). Larnaca, Cyprus.

Laborde, C. (1999). Vers un usage banalisé de Cabri-Géomètre avec le TI-92 en classe de seconde : analyse des facteurs de l'intégration, in D. Guin (ed.) *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques. Actes du colloque francophone européen* (pp.79-94). Montpellier : IREM, Université de Montpellier 2.

Lachance, A., Confrey, J. (2003). Interconnecting content and community: a qualitative study of secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* 6, 107-137.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education : A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation, in A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F.K.S. Leung (eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239-271). Dordrecht : Kluwer.

Lagrange, J.-B., Blanchard, M., Loisy, C., Vandebrouck, F. (dir.) (2009). *Genèses d'usages professionnels des technologies chez les enseignants,* rapport final de l'ACI GUPTEn, http://gupten.free.fr (consulté le 15 octobre 2009).

Lagrange, J.-B., Erdogan, E.O. (2009). Teachers' emergent goals in spreadsheet-based lessons: analyzing the complexity of technology integration. *Educational Studies in Mathematics* 71(1), 65-84.

Linn, M. C., Clark, D., Slotta, J. D. (2003). WISE design for knowledge integration. *Science education* 87, 517-538.

Lombard, P. (2008). Les méthodes expérimentales en géométrie, *Repère IREM*, 73, 21-47

Mercier, A., Rouchier, A., Lemoyne, G. (2001). Des outils et techniques d'enseignement aux théories didactiques, in A. Mercier, A. Rouchier, G. Lemoyne, *Le génie didactique, Usages et mésusages des théories de l'enseignement*, (pp. 233-250), Bruxelles : De Boeck Université.

Miyakawa, T., Winsløw, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : étude collective d'une leçon, *Education et Didactique 3(1)*

National Science Teacher's Association (2004). Position Statement on Scientific Inquiry, http://www.nsta.org/about/positions/inquiry.aspx

Pédauque, R. T. (coll.) (2006). *Le document à la lumière du numérique*. Caen : C & F éditions.

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques, *Petit x*, 73, 6-34

Pochard, M. (2008). *Livre vert sur l'évolution du métier d'enseignant*. Ministère de l'éducation nationale, en ligne à l'adresse
http://lesrapports.ladocumentationfrancaise.fr/BRP/084000061/0000.pdf

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,18 (2) pp 139-190.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques, in La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants, F. Vandebrouck (Ed) (partie 1, chapitre 3) Toulouse : Octarès

Robert A., Rogalski J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*. Vol 2 (4) pp 505-528.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., Hemmo, V. (2007). Science Education Now : a Renewed Pedagogy for the Future of Europe, rapport d'experts pour la commission européenne.
http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf

Ruthven, K. (2009). Towards a Naturalistic Conceptualisation of Technology Integration in Classroom Practice: the example of school mathematics, *Education et Didactique* 3(1), 131-149.

Samurcay R., Rabardel P. (2004). Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences: propositions. Dans *Recherches en Didactique Professionnelle,* R. Samurcay et P. Pastré (Eds). Toulouse : Octarès.

Sensevy, G., Mercier A. (2007). *Agir ensemble, l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Trgalova, J., Jahn, A.P., Soury-Lavergne, S. (to appear). Quality process for dynamic geometry resources: the Intergeo project. *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9, 281-307.

Trouche L. (2009). Penser la gestion didactique des artefacts pour faire et faire faire des mathématiques : histoire d'un cheminement intellectuel, *L'Educateur* 0309, 35-38.

Van Joolingen W. R., de Jong, T., Dimitrakopoulou A. (2007). Issues in computer supported inquiry learning in science *Journal of Computers Assisted Learning 23(2)***,** 111-119**.**

Vergnaud, G. (2002). La conceptualisation, clef de voûte des rapports entre pratique et théorie, *Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants, Actes de la DESCO de l'Université d'Automne,* CRDP de l'académie de Versailles.

Wecker, C C. Kohnlet, C., Fisher, F. (2007). Computer literacy and inquiry learning: when geeks learn less. *Journal of Computer Assisted Learning* 23 (2), 133-144.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, identity*. New York: Cambridge University Press.

Séminaire d'octobre 2009
16 et 17 octobre 2009

COLLOQUIUM DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES 2009
La démonstration : une logique en situation ?

Gilbert Arsac

Université Claude Bernard Lyon, IREM et LIRDHIST

Mots clefs

Démonstration, logique, raisonnement déductif, nécessité, généralité, élément générique, déduction naturelle, donnée, quantification

I Introduction

Le but de cet exposé est d'examiner quelles questions, et éventuellement quelles conjectures, diverses modélisations logiques peuvent amener dans le domaine de la didactique. Il ne s'agit donc pas de présenter une théorie générale originale de la démonstration, ni de la réduire à sa structure logique : d'autres points de vue, d'autres modélisations sont possibles.

Il s'agit d'un exposé élémentaire en ce sens que je souhaiterais qu'il soit utile aussi bien en formation des maîtres de mathématiques qu'en recherche didactique, fournissant un cadre théorique de base, cadre de base, c'est-à-dire pouvant ou devant être complété par des théories plus élaborées auxquelles je ne me référerai pas.

L'exposé part de l'expérience de la pratique mathématique dans la tradition occidentale. Depuis Euclide, celle-ci cherche à établir une vérité mathématique par une méthode de validation, la démonstration, reconnue par tous, et cette recherche reste un trait commun avec les mathématiciens contemporains (Arsac 1992), même si au cours de l'histoire, les nécessités de la résolution de problèmes ont amené à laisser de côté au cours d'épisodes historiques importants, comme par exemple l'invention du calcul infinitésimal, la rigueur du raisonnement (Hemily 2006). Cette unanimité sur la validité des mathématiques ne suppose aucune philosophie partagée, aucune épistémologie commune : le silence d'Euclide sur cette question est impressionnant. En ce qui concerne les mathématiciens contemporains, si Alain Connes par exemple proclame son platonisme (Changeux Connes 1989), il n'est pas nécessaire de partager cette philosophie pour approuver ses résultats.

II Problématique

Les mathématiques de référence

Compte tenu du but didactique, la référence à la pratique mathématique se précise de la façon suivante :

- J'entends par « démonstration » ce que l'on baptise de ce nom dans les cours, manuels et ceci à tous les niveaux : il s'agit de s'intéresser aussi bien à la démonstration en quatrième, et pas seulement en géométrie, qu'à celles que l'on étudie à l'université.
- En revanche, et compte tenu que le but de cet exposé est didactique et non épistémologique, vous n'entendrez pas parler ici du théorème de Gödel ou de l'intervention de l'informatique dans la démonstration du théorème des quatre couleurs. Les références resteront tout à fait classiques.

Une question, tout à fait centrale du point de vue didactique, est l'une des motivations de cette étude : tenant pour acquis, de manière un peu brutale, que jusqu'à présent les tentatives d'utiliser un enseignement de la logique pour améliorer les performances des étudiants en matière de raisonnement mathématique conduisent à l'échec, nous nous posons la question : peut-on expliquer précisément cet échec ? L'adverbe « précisément » signifie qu'il semble assez évident que l'échec est dû à la trop grande imbrication entre la logique et les mathématiques, mais que nous souhaitons mettre en évidence de façon très précise cette imbrication. Faut-il d'ailleurs conclure de cet échec que la logique est inutile, ou les choses sont-elles plus subtiles ? On peut aussi interroger le fait que beaucoup de recherches portent principalement sur la démonstration en géométrie et que beaucoup d'enseignants et d'élèves pensent qu'il n'y a de démonstration qu'en géométrie.

Récemment un article de Thurston (1994) a traité en partie de la question qui nous intéresse de manière assez radicale. Il déclare que « Nous disposons de plusieurs façons innées de raisonner et d'assembler les choses qui sont liées à la façon dont on fait des déductions logiques : cause et effet (reliés à l'implication logique), contradiction ou négation, etc. » puis : « En fait, on rencontre souvent d'excellents mathématiciens qui ne connaissent même pas l'usage standard et formel des quantificateurs ("quel que soit" et "il existe"), bien que tous les mathématiciens effectuent certainement les raisonnements que ces écritures formelles codent. » Au XVIIème siècle déjà, Pascal déclare à propos de la géométrie « …elle seule sait les véritables règles du raisonnement, et sans s'arrêter aux règles du syllogisme qui sont tellement naturelles qu'on ne peut les ignorer… » (Pascal 1985). De même, la vérification d'une démonstration (que l'on pense aux tentatives successives de démonstration du théorème de Fermat) ne se fait pas à l'aide d'une modélisation dans une théorie logique.

Apparemment donc, les règles de la logique seraient innées. Elles sont d'ailleurs utilisées dans les dialogues de Platon, et le raisonnement par l'absurde apparaît même antérieurement à l'époque de Platon, chez Parménide. Quant à Euclide, (Gardies 1997) après avoir étudié le raisonnement dans les Eléments écrit : : « Ainsi la chronologie rend-elle plus vraisemblable une influence des mathématiques contenues dans les Eléments sur les découvertes logiques […] que l'influence inverse […]il est évident que les géomètres grecs ont pu pratiquer par exemple le *calcul propositionnel*, comme M. Jourdain pratiquait la prose, bien avant que quiconque ait su en formaliser la moindre inférence ». Mais il souligne par ailleurs que certaines opérations comme la contraposition, sont ignorées des mathématiciens grecs. De même, en ce qui concerne les quantificateurs, l'étude des textes des premiers mathématiciens qui se sont affrontés au phénomène de la convergence uniforme montre que ce maniement n'est pas encore maîtrisé ; il serait d'ailleurs étonnant que la négation d'une proposition quantifiée un peu complexe, nécessaire en cas de raisonnement par l'absurde, relève entièrement d'une connaissance simplement sous-jacente au langage (pour des exemples de cette difficulté, cf Seidel 1847 ou Stokes 1847). Ce petit panorama historique conduit donc à estimer qu'en matière de raisonnement, tout n'est pas naturel, il y a quelque chose à apprendre, ce qui ne surprendra pas les enseignants, mais apparemment cet apprentissage ne passe pas par une étude de la logique autonome par rapport aux mathématiques, puisque d'ailleurs, les mathématiciens ont en général employé les règles logiques avant qu'elles soient formalisées.

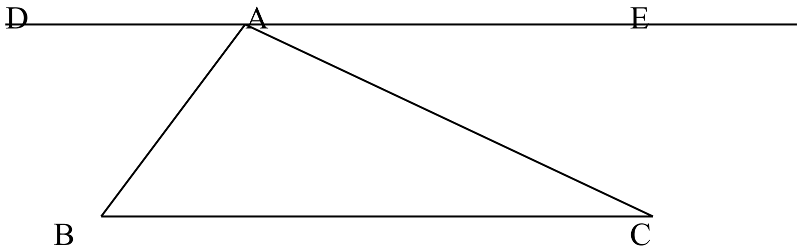
Notre étude mettra également en évidence le rôle primordial joué dans le raisonnement mathématique par « l'outillage » du mathématicien, composé non seulement de concepts, mais de notations, de routines de nature diverse, ceci à l'encontre d'un mentalisme à la Brouwer qui ferait de l'écrit la simple traduction d'une pensée entièrement autonome. Le présent article partage là-dessus la position de Bosch et Chevallard (1999) et aussi l'idée que c'est souvent en scrutant la mathématique elle-même, y compris son histoire, qu'on comprend le mieux les difficultés d'apprentissage.

III Modélisation par le calcul des énoncés

Dans ce paragraphe, je regroupe un grand nombre de modélisations ou analyses, didactiques ou non, qui voient la démonstration comme un enchaînement de syllogismes, ou, si l'on préfère, comme l'application des règles du modus ponens à des énoncés, c'est-à-dire à des phrases susceptibles d'être déclarées vraies ou fausses. Le rôle central dans le raisonnement est alors attribué à l'implication. Comme il s'agit en général de travaux bien connus, je n'insisterai pas sur les détails, par exemple sur la nécessité d'envisager le cas du raisonnement par l'absurde. Dans cette catégorie je regroupe donc aussi bien les analyses épistémologiques de Lakatos (1976) que les travaux de Duval (1991) qui portent sur la dimension cognitive du raisonnement, mais uniquement dans le cas du raisonnement déductif. Ces auteurs ne font pas de référence explicite au calcul des énoncés, mais c'est bien ce point de vue logique qui est en arrière plan de leurs travaux, c'est-à-dire que leur caractéristique commune essentielle est de s'intéresser à l'enchaînement syntaxique des énoncés en fonction de leur « statut opératoire » (Duval, loc cit) mais sans s'intéresser à leur structure interne. La notion de variable référant à un objet mathématique est absente.

En écartant ainsi de l'exposé le point de vue qui est le plus classique, je n'oublie pas qu'il apporte déjà beaucoup à l'étude de la démonstration. Pour le montrer et mettre déjà en évidence un certain nombre de questions, il suffira de traiter l'exemple d'une démonstration classique et très courte, celle du théorème sur la somme des angles d'un triangle traditionnellement attribuée à Pythagore.

> « Etant donné un triangle ABC, traçons la parallèle DE à BC passant par A. Les angles alternes internes sont égaux : d'une part celui sous DAB et celui sous ABC ; d'autre part, celui sous EAC et celui sous ACB. Ajoutons celui sous BAC aux deux autres. Les angles DAB, BAC, CAE, c'est-à-dire DAB, BAE, autrement dit deux droits, sont donc égaux aux trois angles du triangle. Donc les trois angles du triangle sont égaux à deux droits ».



Examinons dans quelle mesure cette démonstration peut être réécrite comme un enchaînement de déductions justifiées. Une remarque préliminaire s'impose : une suite de déductions valides schématisée par « Si H, alors H_1 », « si H_1, alors H_2 », … « si H_k, alors K » aura comme résultat final « Si H, alors K ». On reconnaît dans H « l'hypothèse » et dans K la « conclusion » de la démonstration. Viviane Durand-Guerrier (2005) fait remarquer qu'il est pourtant très rare en milieu scolaire que le résultat final soit énoncé sous forme d'une implication : on démontre, mais on n'explicite pas complètement ce qu'on a démontré. Souvent, seule la conclusion K est mise en valeur. Ceci pose une première question didactique.

Dans la démonstration de Pythagore, on part d'une donnée, celle d'un triangle, qui remplace manifestement l'hypothèse ; celle-ci implicite, consiste dans les propriétés qui définissent un triangle : les trois points A, B, C ne sont pas alignés. La frontière entre donnée et hypothèse peut être déplacée ; ici on pourrait partir de :

Donnée : trois points. *Hypothèse*: ils ne sont pas alignés.

On met ainsi en évidence qu'une démonstration part de la donnée d'objets mathématiques d'une part, et de propriétés supposées vraies de ces objets d'autre part, qui constituent les hypothèses. Dans l'exemple que nous étudions, les hypothèses ne sont pas absentes mais implicites.

On peut remarquer ensuite, et c'est particulièrement évident sous la forme que nous avons donnée à l'hypothèse, que celle-ci n'est pas utilisée dans la démonstration, contrairement à ce qu'explique traditionnellement l'enseignant à ses élèves. Il est facile de voir que cela provient du fait que l'existence de la parallèle en A à (BC) n'est pas justifiée. Voici alors un schéma d'enchaînement logique tentant de suivre au plus près la démonstration :

1) Comme A, B, C ne sont pas alignés, il existe une parallèle (DE) en A à (BC).

2) Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{BAD}$ d'une part, $\widehat{C}$ et $\widehat{CAE}$ d'autre part, sont alternes internes par rapport aux deux droites parallèles (BC) et (DE) et aux sécantes (AB) et (AC).

3) Ces angles sont égaux (propriétés des angles alternes-internes).

4) On a donc $\widehat{B}+\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{BAD}+\widehat{BAC}+\widehat{CAE}=\widehat{DAE}$ cqfd.

On remarque que l'introduction de la parallèle, que nous venons de justifier, est évidemment la clé de la démonstration car elle permet d'appliquer les théorèmes classiques sur les angles alternes-internes. Pour un mathématicien c'est « l'idée » fondamentale de la démonstration. D'une manière générale, dans une démonstration, l'introduction d'objets apparaît souvent comme la clé qui permet de mener à bout le processus déductif.

Ce rôle fondamental des introductions d'objets permet de comprendre que pour un mathématicien, la démonstration ne se réduit certainement pas à une déduction, et justifie des recherches qui portent sur le lien entre découverte et démonstration (« unité cognitive », cf Garuti et al, 1998 ou Pedemonte 2005). D'ailleurs dans de nombreux cas, on peut constater que le lien entre l'énoncé à démontrer et les hypothèses choisies n'est pas évident : on trouvera dans Aigner et Ziegler (1998), au premier chapitre, six preuves de l'infinité des nombres premiers : à chaque fois les hypothèses sont différentes, et proviennent du choix antérieur d'une stratégie de démonstration, qui consiste en général à démontrer un énoncé dont l'énoncé initial est conséquence, par exemple que la somme des inverses des nombres premiers constitue une série divergente. Il y a ici à la fois introduction d'un objet (la série) et utilisation de la logique qui permet de voir le lien entre l'énoncé à démontrer et la stratégie choisie. Et bien sûr, on peut aussi choisir de raisonner par l'absurde.

L'analyse de la démonstration de Pythagore pourrait sembler terminée, mais en fait, on découvre, à la réflexion, un « lemme caché » suivant l'expression de Lakatos (loc cit). Pour se rendre compte de l'existence d'un point obscur dans l'enchaînement logique proposé ci-dessus, il suffit de remarquer qu'il est fort difficile à suivre sans utiliser la figure, essentiellement parce que les points D et E ne peuvent être placés au hasard sur la parallèle en A à BC : il faut que les angles ABC et BAD d'une part, BCA et CAE d'autre part soient des angles alternes internes, ce qui veut dire par définition que les demi-droites [AD) et [BC) sont de part et d'autre de (AB) et que de même, [AE) et [CB) sont de part et d'autre de (AC). Mais pour pouvoir conclure, il faut être sûr que [AD) et [AE) qui sont deux demi-droites de même origine portées par une même droite, sont opposées et non pas confondues. Ceci suppose le lemme suivant :

« Dans tout triangle ABC, la demi-droite d'origine A parallèle à (BC) et située de l'autre côté de (AB) par rapport à C et la demi-droite parallèle à (BC) et située de l'autre côté de (AC) par rapport à B sont deux demi-droites opposées »

Ce lemme est bien sûr évident sur le dessin. Contrairement à l'existence de la parallèle en A qui peut être facilement démontrée, il fait appel à des raisonnement d'un type inconnu d'Euclide, et qui supposent une axiomatique adaptée (cf Arsac 1998, p. 75). C'est pourquoi sans doute on n'en parle jamais.

IV Un contre-exemple

Reprenons maintenant un exemple déjà publié dans Durand-Guerrier et Arsac (2003) montrant comment l'analyse en termes de logique propositionnelle, c'est-à-dire de façon élémentaire comme ci-dessus, sans tenir compte des variables qui figurent dans les énoncés, échoue à analyser certaines erreurs. Cet exemple consiste en une démonstration erronée du théorème des accroissements finis généralisés. Nous rappelons ci-dessous l'énoncé de ce théorème, ainsi que celui du théorème usuel des accroissements finis.

Théorème des accroissements finis :

Etant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction numérique f définie sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$, si f est continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$, et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a\,;b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Théorème des accroissement finis généralisé :

Étant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions numériques f et g définies et continues sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a\,;b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a\,;b[$, tel que : $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Une démonstration, fréquemment rencontrée chez les étudiants en licence scientifique première année, consiste à déduire le deuxième théorème du premier, de la façon suivante :

La fonction f vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a\,;b[$, tel que $f'(c)(b-a)=f(b)-f(a)$. De même g vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a\,;b[$, tel que $g'(c)(b-a)=g(b)-g(a)$. Comme g' ne s'annule pas sur $]a\,;b[$, $g'(c)\neq 0$ et donc $g(b)-g(a)\neq 0$. On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient alors l'égalité cherchée.

Cette démonstration est fausse ; on peut le montrer sur un exemple en considérant deux fonctions pour lesquelles on ne peut pas *choisir le même point c,* ce qui n'est pas si facile d'ailleurs puisque, pour exhiber un contre-exemple, on ne peut pas considérer deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ; on peut par exemple prendre les fonctions qui à x associent respectivement x^2 et x^3 ou encore x^2 et $\sin x$. Si l'on analyse cette démonstration, on ne trouve pas d'erreur dans l'enchaînement logique : les théorèmes sont appliqués correctement ; la non-validité ne dépend pas d'une mauvaise application de la règle du Modus Ponens. L'erreur peut être analysée de deux points de vue.

– Dans le premier point de vue, on considère que la démonstration est, comme en géométrie une démonstration sur un exemple générique, constitué ici du couple des deux fonctions f et g (dans la démonstration du théorème usuel, on travaille sur une seule fonction f), mais que du fait qu'on va utiliser deux fois le même énoncé, il faut tenir compte d'une règle de manipulation des variables : quand on applique un énoncé du type « quel que soit a, il existe *b*… », il faut ajouter que *b* « dépend » de *a*. Dans ce premier point de vue *on étudie empiriquement les règles de fonctionnement des démonstrations concrètement mises en œuvre en mathématiques.*

– Dans le deuxième point de vue, on interprète la démonstration non plus dans le cadre du calcul des propositions, mais dans celui du calcul des prédicats. Autrement dit, *on utilise un modèle théorique pour rendre compte de la pratique précédente.*

De ce point de vue, l'erreur consiste à utiliser une lettre de « variable liée », c'est-à-dire qui est dans le champ d'un quantificateur, à savoir ici la lettre *c*, comme s'il s'agissait d'un nom d'objet (ici un nombre réel) et du coup, à ne pas respecter les restrictions correspondantes sur les noms d'objets : à savoir, qu'une lettre déjà utilisée pour une instance d'un énoncé existentiel ne peut pas être utilisée pour désigner un autre objet. L'utilisation de cette règle permet de rectifier la démonstration précédente : on déduit une instance pour *f* avec par exemple la lettre *r*, puis une instance pour *g* avec par exemple la lettre *s*. On peut bien alors obtenir l'égalité des deux quotients, mais ceci ne prouve pas le résultat cherché.

Une manière d'éviter l'erreur, fréquemment rencontrée dans la classe de mathématiques, consiste à utiliser une lettre différente pour la variable liée dans chacune des deux instances de l'énoncé existentiel. Sur le plan logique, ceci n'a pas de statut théorique ; sur le plan mathématique non plus d'ailleurs, les règles de manipulation des lettres muettes en mathématiques étant analogues aux règles de manipulation de lettres de variables liées en logique. Il s'agit d'une pratique permettant, par l'utilisation d'un formalisme intermédiaire, d'attirer l'attention sur le fait que l'on ne peut pas considérer a priori qu'il s'agit du même élément pour les deux fonctions.

V Le calcul des prédicats et la démonstration naturelle

Le calcul des prédicats auquel nous venons de faire appel permet de donner toute sa place à la quantification et à la notion de variable. Il permet donc de modéliser les démonstrations mathématiques devant lesquelles échouait le calcul des propositions. Malheureusement, il y a unanimité pour souligner à la fois la complexité du calcul des prédicats et l'éloignement des démonstrations rédigées dans ce modèle des démonstrations mathématiques correspondantes, au point qu'on puisse bien imaginer que l'on possède une démonstration mathématique fausse d'un théorème exact sans que la présentation de la démonstration exacte dans le cadre du calcul des prédicats permette de déceler l'erreur. Ainsi, alors que le calcul des propositions était considéré comme superflu car trop évident, celui des prédicats se trouve écarté car trop compliqué!

Un modèle intermédiaire est fourni par les modèles de « déduction naturelle » en calcul des prédicats qui étend la « déduction naturelle » dans le calcul des énoncés. Comme il n'est pas question ici de se lancer dans l'exposé d'une théorie logique, nous nous contenterons d'indiquer les buts poursuivis par la déduction naturelle et comment elle peut nous guider dans notre recherche. Dans le calcul des énoncés, la déduction naturelle a pour but d'obtenir les démonstrations les plus « naturelles » possibles et la déduction naturelle dans le calcul des prédicats ajoute à la déduction naturelle dans le calcul des énoncés, des règles de manipulation des variables, dites règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs, qui sont destinées à modéliser au plus près les pratiques des mathématiciens. Nous pouvons donc exploiter la réflexion des logiciens sous la forme suivante : ces règles concernant les quantificateurs sont candidates à la description de la spécificité des raisonnements mathématiques. A la suite de Viviane Durand-Guerrier (Durand-Guerrier Arsac 2003) qui a été la première à faire appel à la déduction naturelle pour étudier dans un but didactique la démonstration mathématique, nous donnons ci-dessous la formulation de Copi pour ces règles (Gochet Gribomond 1990, Hottois 1989)

1) I.U. Instantiation Universelle

$$\frac{\forall\, xfx}{fa}$$ *Avec a constante individuelle quelconque substituée à x*

(notre commentaire : ce qui vaut pour tous vaut pour n'importe qui)

2) G.U. Généralisation Universelle

$$\frac{fa}{\forall\, xfx}$$ *Avec a constante d'objet absolument quelconque choisie dans le domaine (de x), c'est-à-dire considérée uniquement du point de vue de son appartenance à ce domaine*

(notre commentaire : on reconnaît ici la démonstration par élément générique)

3) G.E.Généralisation Existentielle

$$\frac{fa}{\exists\, xfx}$$ *Avec a constante quelconque*

(notre commentaire : exhiber un élément qui vérifie la propriété permet d'affirmer l'existence d'au moins un tel élément)

4) I.E. Instantiation existentielle

$$\frac{\exists\, xfx}{fw}$$ *Attention à l'interprétation de w : il s'agit d'une constante d'objet, mais dont on retient seulement qu'elle est le nom de l'un des objets qui, par hypothèse, doivent, (ou doit s'il n'y a qu'un objet de ce type) vérifier $\exists xfx$. Le plus souvent, on ne sait rien de plus, c'est-à-dire qu'on ignore l'identité précise de cet objet. c'est pour cela qu'il faut veiller à ce que le signe introduit (ici w) soit sans occurrences antérieures qui précisément le détermineraient (l'identifieraient) de façon abusive.*

(notre commentaire : affirmer l'existence d'au moins un élément qui vérifie une propriété donnée permet de considérer un tel élément)

N.B. Parmi les règles de restriction, se trouvent naturellement le respect de l'ordre d'introduction des lettres : si une instantiation existentielle se fait après une instantiation universelle, la généralisation existentielle devra se faire avant la généralisation universelle correspondante.

VI Étude de la règle GU (généralisation universelle)

1. Quelques remarques générales

Cette règle, suivant laquelle il suffit de démontrer une propriété pour un élément quelconque d'un ensemble pour pouvoir affirmer qu'elle est vraie pour tout élément apparaît comme tellement évidente et banale qu'il faut bien la modélisation par la déduction naturelle pour que nous la prenions en considération ! Du point de vue du vocabulaire, on parlera aussi bien d'élément « quelconque », « arbitraire », « générique », voire même « donné »[1]. On sait que le principe du raisonnement par « exemple générique » apparaît spontanément chez les élèves comme l'a montré Balacheff (1987).

1 Lorsque la géométrie descriptive était enseignée, et que l'on se posait le problème de la construction de l'intersection de deux surfaces, on vérifiait toujours que l'on était capable de construire un « point courant » de l'intersection, ce qui signifiait un point absolument quelconque, sans aucune particularité facilitant sa construction.

La preuve par exemple générique concerne donc les assertions portant sur tous les éléments d'une classe, c'est-à-dire en mathématiques des propositions universellement quantifiées. On peut y distinguer deux aspects : la *nécessité* et la *généralité*. La nécessité fait référence au caractère contraignant du raisonnement : « est nécessaire ce qui ne peut être autrement » (Aristote, Lalande, 1926). Elle est assurée par l'enchaînement sans faille du raisonnement, ce que Duval (loc. cit.) étudie d'un point de vue cognitif dans le mécanisme du « pas de déduction», et est facilement modélisée par le calcul des énoncés. La généralité vise à garantir le caractère générique de l'exemple étudié. Elle peut être assurée de différentes manières, relativement indépendantes de la nécessité, et dépendantes du domaine mathématique envisagé. Elle peut résulter simplement d'une argumentation, c'est-à-dire ne pas faire référence, en tout cas pas explicitement, au raisonnement. C'est la qualité de cette argumentation qui permettra de reconnaître une démonstration, c'est-à-dire une preuve intellectuelle, et non une simple preuve empirique, suivant les classifications de Balacheff (1987). Remarquons que parallèlement, l'enseignement utilise systématiquement des exemples « pour faire comprendre ». Un tel exemple est évidemment supposé avoir un caractère suffisamment générique, sinon il ne serait qu'une vérification dans un cas particulier, mais ce caractère générique n'a pas à être argumenté car le but n'est pas de démontrer, et le caractère générique est à admettre par les élèves sur la base de l'autorité de l'enseignant.

2. Le cas de la géométrie

Au témoignage de Proclus, conforté par les travaux d'historiens comme Mueller (1981) ou Netz (1999), il est clair que pour Euclide, la démonstration géométrique consiste dans l'étude d'un exemple générique (pour plus de détails, cf Netz, loc.cit. et Arsac 1999). D'après Netz, le caractère générique de la démonstration menée sur une figure était assuré par la possibilité de la répéter à volonté pour toute autre figure proposée. Herbrand énonce la même idée de façon tout à fait générale : « …quand nous disons qu'un théorème est vrai pour tout *x*, nous voulons dire que pour chaque *x* individuellement il est possible de répéter sa démonstration, qui peut être considérée seulement comme un prototype de chaque preuve individuelle » (cité par Longo 2009). Ceci rend bien compte du plan des démonstrations d'Euclide : Tout d'abord, Euclide énonce le théorème à démontrer, dans toute sa généralité, sans introduire de lettres, c'est ce que Proclus appelle *« protasis »*, par exemple :

« Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés qui sous-tendent les angles égaux seront aussi égaux entre eux. »

Vient ensuite l'*« esthesis »* ; on se donne un triangle générique et on affirme que l'on va démontrer le résultat dans ce cas particulier :

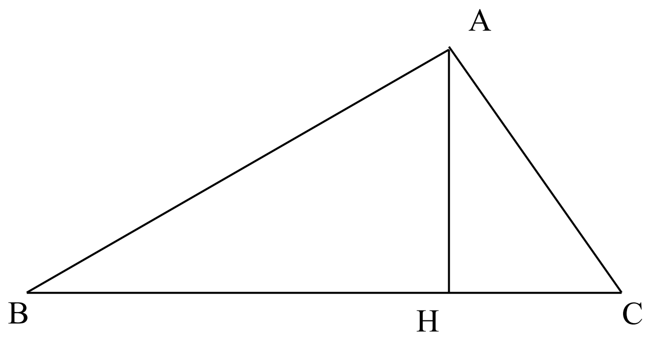
« Soit le triangle ABC ayant l'angle sous ABC égal à l'angle sous ACB. Je dis que le côté AB est égal au côté AC. »

Ensuite seulement vient la démonstration.

Cette question de la généralité dans les démonstrations géométriques est réglée depuis longtemps qu'elle n'est plus abordée explicitement par les mathématiciens. Mais revenons à la classe du vingt-et-unième siècle. Lorsque l'enseignant insiste auprès des élèves pour qu'ils dessinent précisément un triangle quelconque, c'est-à-dire ni isocèle, ni rectangle, il essaie d'obtenir qu'ils tracent une figure générique en ce sens qu'on ne risque pas d'y lire d'autres propriétés que celles postulées dans les hypothèses du problème étudié. Cette précaution a-t-elle un statut théorique ? A priori non : on peut parfaitement démontrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes en s'appuyant sur une figure qui perceptivement représente un triangle isocèle, pourvu qu'on n'utilise pas le fait que deux côtés ou deux angles du triangle sont égaux. Ceci justifierait que l'on affirme, comme parfois, que la figure n'a aucun rôle dans le caractère de nécessité de la démonstration : elle aurait seulement l'utilité d'un changement de registre permettant de mettre en valeur visuellement les hypothèses, de déceler, par un travail propre à son registre, les énoncés à faire intervenir dans la démonstration. Quant à l'insistance de l'enseignant sur les figures génériques, elle n'aurait qu'un rôle pédagogique : éviter de lire sur le dessin des propriétés parasites, montrer que la démonstration doit être dans une certaine mesure indépendante du dessin.

En fait, cette position est illusoire car, comme nous l'avons vérifié sur l'exemple très simple de la somme des angles d'un triangle, la très grande majorité des démonstrations géométriques font appel à des propriétés lues sur la figure et qu'on ne saurait démontrer sans sortir du cadre de la géométrie traditionnelle (Arsac 1998). Voici un autre exemple plus simple et plus général : considérons un triangle ABC rectangle en A et la hauteur issue de A qui coupe (BC) en H. Plusieurs démonstrations élémentaires du théorème de Pythagore, ainsi que la démonstration d'Euclide elle-même, utilisent le fait que H est entre B et C, qui permet par exemple d'écrire que :

aire (ABC)=aire(ABH)+aire(ACH), ou bien que BC=BH+HC.



Si l'on veut que le résultat de ces démonstrations ait un caractère de nécessité, il faut donc en particulier que H soit *nécessairement* entre B et C. Si l'on renonce à se placer dans un cadre de géométrie affine, où le problème, moyennant le choix d'un système d'axes devient un problème algébrique, ce caractère de nécessité peut être établi de deux manières.

- On peut se placer dans un cadre axiomatique « complet », comme celui défini par Hilbert (1899), on disposera alors d'un cadre théorique dans lequel on pourra démontrer que H est entre B et C par un raisonnement déductif ne renvoyant en aucune manière à la lecture de la figure (Arsac 1998).
- Mais en général, comme le faisait Euclide lui-même, on utilise cette propriété sans l'énoncer. Comme le dit Netz (1999) dans son commentaire des démonstrations d'Euclide : « Les propriétés que la perception extrait du diagramme forment un sous-ensemble vrai des propriétés réelles de l'objet mathématique. ». Dans ce cas, si l'on pose explicitement la question de la vérité de cette affirmation, la réponse spontanée est que c'est évident. Il s'agit maintenant d'analyser cette évidence.

Afin d'écarter toute équivoque dans l'étude de cette question, rappelons qu'il est classique depuis Platon de distinguer la figure tracée sur le papier (ou l'écran) qu'il est naturel de désigner comme un dessin, de l'objet géométrique « abstrait » sur lequel porte en fait la démonstration. Alors, le problème porte bien sur le dessin : comme personne n'a jamais vraiment contemplé l'objet idéal platonicien, c'est bien sur le dessin, qui en est son représentant, tout imparfait soit-il, que se fait la constatation du fait que H est entre B et C. *C'est donc le dessin qui doit avoir un caractère générique* et attester de la nécessité du fait que H est entre B et C.

Autrement dit, il faut que dans tout dessin H soit entre B et C, et même qu'on puisse affirmer que tout dessin contradictoire est faux. Mais comment s'en assurer ? Nous emprunterons à Rouche (1989) la formule suivante, concernant ce qu'il appelle la « pensée mathématique immédiate » ou les jugements « d'une seule venue » et qui recouvre en particulier ce que nous caractérisé comme des évidences lues sur le dessin.

> « Une double condition semble nécessaire et suffisante pour qu'une proposition soit vécue comme évidente, à savoir
> a) Qu'on en discerne à vue la réalisation sur un cas particulier ;
> b) que la pensée s'engage sans accroc dans l'imagination de tous les cas particuliers. » (Rouche, 1989, p. 14).

Bien sûr, les remarques de Rouche constituent plus une description d'un phénomène qu'une explication, et nous laissons la question ouverte sans savoir de quel domaine de la pensée et de la recherche elle relève.

La démonstration géométrique usuelle utilise donc des constatations sur le dessin qui ne peuvent être incorporées dans le déroulement du raisonnement que parce qu'elles présentent un caractère de nécessité et ce caractère de nécessité renvoie à une certitude sur le caractère générique de ces constats graphiques. Serfati (1999) avance l'hypothèse que c'est l'expérience du caractère invariant de ces constatations sur le dessin qui a amené chez les mathématiciens grecs l'idée d'un objet abstrait dont les différents dessins ne seraient que des « représentations concrètes contingentes » et donc finalement une « conception platonicienne forte des mathématiques ». Ces constatations sur le dessin, fondées sur la familiarité avec le dessin géométrique, constituent un stock d'évidences qui sont **une partie implicite** de ce que l'on appelle souvent dans l'enseignement **la boîte à outils**.

La démonstration géométrique classique ne peut donc être considérée comme un enchaînement d'inférences qu'à condition que certaines de ces inférences soient du type « On voit sur le dessin que D et E sont de part et d'autre de A ». Bien sûr, ce type d'inférences où « l'énoncé tiers » est lu sur le dessin n'est pas explicité en général.

La conviction du caractère générique des constatations sur le dessin peut être renforcée par l'emploi d'un logiciel de géométrie dynamique, mais il reste toujours le problème de la séparation entre ce qu'il est légitime de lire sur le dessin et ce qu'il n'est pas légitime d'y lire, la conclusion en particulier (pour une étude plus détaillée, cf Arsac 1999). Ce problème relève à la fois de la transposition et du contrat didactique.

Par ces dernières remarques, liées à la prise en compte du problème de la généralité, l'analyse ci-dessus diffère de celle de Duval. Mais cette différence porte sur la dimension épistémologique de l'analyse sans remettre nécessairement en cause son aspect didactique, ceci pour deux raisons :

- Tout d'abord, l'analyse de Duval se situe à un niveau où l'on peut supposer que l'apprentissage des évidences graphiques ou des « jugements d'une seule venue », est déjà réalisé. Nos remarques soulignent simplement que cet apprentissage préalable doit être acquis pour que l'analyse cognitive de Duval s'applique.

- D'autre part, personne ne songe (ou ne songe plus ?) à enseigner une géométrie sur une base axiomatique rigoureuse, à la Hilbert, ce qui n'était d'ailleurs pas le projet de Hilbert lui-même, lequel s'attache à « l'analyse de notre intuition de l'espace ». Cette analyse consiste pour lui à découvrir, en particulier, les relations logiques entre les divers énoncés géométriques vrais, y compris ceux considérés alors comme évidents, mais le but n'est pas d'inventer une nouvelle façon de faire ou d'enseigner la géométrie plane (Arsac 1998)

Nous avons mentionné le fait que l'on distingue parfois dans une démonstration géométrique différents cas de figure. On peut remarquer que cette distinction entre deux ou trois cas et son caractère exhaustif ne sont en général fondés que sur des évidences graphiques. Lorsqu'on admet, souvent implicitement et toujours sans argumentation explicite, qu'il n'y a qu'un seul cas de figure, ce qui précède montre que l'on admet en fait que le dessin que l'on a tracé a un caractère générique !

Ce genre de question n'est pas abordé en didactique, sans doute parce qu'effectivement, on sait depuis longtemps que la démonstration géométrique classique assure la généralité de ce qu'elle démontre, ce qui revient à la réduire au seul aspect de la nécessité. Cet escamotage du problème de la généralité est nécessaire si l'on veut éviter les redoutables problèmes dus à la lecture sur le dessin de certaines informations nécessaires à la démonstration. Cependant la prise de conscience du fait que c'est le dessin, et non l'objet géométrique abstrait, qui doit avoir un caractère générique a les avantages suivants :

– Elle montre que l'on peut faire de la géométrie, sans résoudre le problème philosophique du statut de l'objet géométrique (Arsac 1999), que chacun peut résoudre à sa manière sans que cela influe sur la pratique de la démonstration géométrique.

– Elle rappelle l'enracinement de la géométrie dans la perception, et souligne, du point de vue pédagogique la continuité entre la familiarisation avec le dessin géométrique qui remonte à l'école primaire et la démonstration géométrique. Elle fait le lien entre le point de vue de Rouche et celui de Duval.

En ce qui concerne la démonstration elle-même, nous pouvons tirer les conclusions suivantes de cette brève étude : en géométrie, le problème de la généralité n'est pas soulevé, la démonstration utilise des prémisses lues sur le dessin, mais pratiquement toujours de façon implicite. Ainsi ce qui reste visible, c'est un raisonnement déductif, essentiellement en langue naturelle, ce qui explique que l'exemple de la démonstration géométrique soit privilégié pour son apparente transparence logique.

Une dernière remarque concerne ce que l'on peut appeler la « figure complétée », c'est-à-dire dans laquelle ont été ajoutées à la figure initiale toutes les constructions nécessaires à la démonstration ; autrement dit, c'est la figure complétée par les introductions d'objets nécessaires à la démonstration. Aussi bien pour les Grecs que pour Hilbert, cette figure complétée peut être considérée à elle seule comme la démonstration. Ceci souligne à nouveau le rôle fondamental des introductions d'objets et le fait que la démonstration ne se réduit pas d'abord, pour les mathématiciens, à un enchaînement logique.

3. Le cas du calcul littéral : « il n'y a pas de démonstration en algèbre ».

Cette phrase, prononcée par un historien des mathématiques, est reproduite ici à titre de provocation…

Précisons ici que nous entendons le mot algèbre en son sens élémentaire traditionnel, pratiquement synonyme de calcul littéral. Afin d'illustrer le double aspect de nécessité et de généralité, voici deux démonstrations d'un énoncé d'arithmétique (Garuti et al. 1998).

Enoncé : *la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4.*

Première démonstration, par un élève de cinquième :

> « Je fais quelques essais : 3+5=8, 1+3=4, 5+7=12 ; je vois que je peux écrire ces additions de la manière suivante : 3+5=3+1+5-1=4+4=8 (de même pour les autres). C'est la même chose que d'additionner le nombre pair intermédiaire à lui-même, et le double d'un nombre pair est toujours un multiple de 4. »

Deuxième démonstration, par un élève de seconde :

> « Je peux écrire deux nombres impairs consécutifs sous la forme $2k+1$ et $2k+3$ ainsi je trouve :
>
> $$(2k+1)+(2k+3)=2k+1+2k+3=4k+4=4(k+1)$$
>
> Le nombre obtenu est un multiple de 4. »

Examinons ces deux démonstrations : dans la première, l'élève, après une vérification sur trois exemples, montre en se concentrant sur le premier, 3+5=8, que l'on peut présenter le calcul de manière à ce qu'il ait une valeur générale en introduisant le nombre pair « intermédiaire » entre deux impairs consécutifs. Remarquons que cette argumentation de généralité est tout à fait explicite et particulière au problème considéré. Elle correspond tout à fait à la définition de Balacheff de l'exemple générique :

> « L'exemple générique consiste en l'explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent, non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe. » (Balacheff 1987)

Dans la deuxième, l'élève traite directement un « cas général » grâce à la notation littérale, c'est l'emploi de cette notation, dont l'origine remonte à Viète, au seizième siècle, qui assure la généralité : la lettre *k* représente un nombre entier quelconque, donc le calcul est général, mais comme cette argumentation, contrairement à la première, n'est pas liée à un problème particulier, et qu'elle est connue comme classique, elle n'est pas reproduite, il n'y a donc pas d'argumentation explicite de généralité. Cette question de la généralité n'apparaît explicitement dans la classe qu'aux débuts de l'apprentissage du calcul littéral, quand l'enseignant y fait allusion en rappelant « traitez un cas général, calculez avec des lettres ! »

Quant à la nécessité, elle n'apparaît pas à première vue dans aucune des deux démonstrations. La deuxième par exemple se réduit apparemment à un calcul. C'est que le calcul n'est autre qu'un raisonnement automatisé. Si l'on voulait mettre en évidence ce raisonnement, il faudrait revenir aux justifications du calcul, en commençant par écrire en détail :

$$(2k+1)+(2k+3)=(2k+1)+(3+2k)=2k+\big(1+(3+2k)\big)=2k+\big((1+3)+2k\big)=2k+(4+2k)=$$
$$2k+(2k+4)=(2k+2k)+4=(2+2)k+4=4k+4=4k+4\times 1=4(k+1)\,.$$

On pourrait ensuite justifier chaque égalité en citant les propriétés (associativité, distributivité, commutativité) auxquelles on a fait appel. Celles-ci jouent le rôle d'énoncés tiers et permettent de retrouver, à condition de détailler assez, la structure habituelle d'un raisonnement par enchaînement de pas de déduction. Bien sûr, personne ne fait cela, car le but des règles de calcul est précisément d'éviter d'avoir à le faire. Ceci peut aboutir à une « perte de sens » c'est-à-dire qu'à force de faire des calculs on finit par oublier qu'ils représentent en fait des raisonnements.

En résumé, dans ces deux démonstrations, la nécessité est assurée par l'usage des règles de calcul, la généralité est assurée dans le premier cas par une argumentation explicite particulière, dans le deuxième par le recours à une méthode, la notation littérale, universellement admise en mathématiques, et qui n'est donc plus argumentée. Ainsi s'explique que dans la deuxième démonstration, qui a la forme la plus courante, **aussi bien la nécessité que la généralité soient apparemment absentes**. De là provient l'idée « **qu'il n'y a pas de démonstration en algèbre** ». Effectivement, les routines de la notation littérale et du calcul algébrique font disparaître toute intervention explicite de la logique, contrairement à la géométrie. Plus généralement, dans une démonstration complexe, les parties qui comportent du calcul sont celles où toute mention explicite de la logique disparaît.

Revenons sur cet exemple : nous avons dit un peu rapidement que dans la démonstration classique de calcul littéral, toute allusion explicite aux énoncés tiers qui justifient le calcul est supprimée. En réalité, il n'en est pas ainsi lorsque ces règles sont encore en cours d'apprentissage : alors le professeur en exigera la mention explicite. Il pourra par exemple trouver un peu « rapide » l'égalité $(2k+1)+(2k+3)=4k+4$ et exiger un commentaire. On reconnaît là le fonctionnement du contrat didactique et la transformation progressive du « nouveau » en « ancien » qui n'est plus objet d'apprentissage. La disparition apparente du raisonnement est dans ce cas un signe d'un bon apprentissage…

Une remarque essentielle est la suivante : le fait de savoir choisir un élément quelconque en géométrie n'apprend pas pour autant à savoir le faire en « algèbre ». Plus savamment, l'utilisation de GU en algèbre et en géométrie est fondamentalement différente, et fait appel à des symbolismes, figure dans un cas, notation littérale dans l'autre, bien distincts, le deuxième, découvert des siècles après le premier, est bien une invention mathématique. D'autre part, une étude historique montrerait sans doute que les lois de l'algèbre ont été « découvertes » en quelque sorte expérimentalement et non pas comme application de règles de la logique.

4. Donnée ou hypothèse (à nouveau) ?

Du fait que la démonstration d'un énoncé universel se fait en considérant un élément générique, elle commence par la « donnée » d'un tel élément. Ainsi, pour démontrer que dans tout triangle les médianes sont concourantes, on commence par la « donnée » d'un triangle quelconque, ce qui explique qu'il soit plus naturel de parler de *donnée* que d'hypothèse. Parfois, l'énoncé du théorème préfigure et met déjà en place cette méthode de démonstration : « soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, alors f est minorée et majorée sur $[a,b]$ ». La démonstration commencera par « soit donnée une fonction f continue sur un segment $[a,b]$ » ; la donnée de cette fonction continue tient lieu d'hypothèse, la conclusion restant « alors f est majorée et minorée sur $[a,b]$ ». Quant à l'énoncé complet quantifié, il serait « quels que soient les nombres réels a et b, et la fonction f, si $a<b$ et si f est continue sur $[a,b]$, elle est majorée et minorée sur $[a,b]$ ». Cette forme lourde, dans laquelle on distingue et quantifie les données a, b, f et l'hypothèse (la fonction f est continue), est rarement explicitée. De même, l'énoncé classique du théorème des accroissements finis dissimule également une quantification universelle implicite. En algèbre, comme on vient de le voir, c'est la notation littérale qui permet de travailler sur un nombre quelconque ; par exemple, pour démontrer que « pour tous réels a et b, on a $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ », on commencera par « soit deux réels a et b », en ajoutant éventuellement « quelconques ». La donnée est ici celle de a et b.

Ainsi, la démonstration d'un énoncé universel commence par une introduction d'objet, mais qui est en quelque sorte automatique pour le mathématicien suffisamment expérimenté, et donc distincte de l'introduction d'objets qui, comme la parallèle à la base dans le cas de la preuve relative à la somme des angles représentent « les idées » qui font tout marcher. Mais bien entendu, comme les élèves ne sont pas en général des mathématiciens expérimentés, il y a ici matière à apprentissage, tout au moins à partir du moment où une part suffisante d'initiative leur est laissée. De plus, dans certains cas, cette introduction d'objet générique est moins évidente. Considérons par exemple l'énoncé « l'ensemble des nombres premiers est infini ». Du point de vue d'un mathématicien contemporain, on peut introduire la donnée « ensemble des nombres naturels premiers », ce qui n'était pas concevable pour un mathématicien grec car il s'agit d'un ensemble dont on va montrer qu'il est « actuellement » infini. Pratiquement, on revient à l'équivalence « infini=non fini » et on démontre en fait : quel que soit l'ensemble fini de nombres naturels que l'on considère, il ne contient pas tous les nombres premiers. Alors la donnée est celle d'un ensemble fini de naturels $n_{1,}n_2,\ldots,n_p$. Après l'introduction de cet objet vient celle de l'objet qui représente l'idée de la démonstration, le nombre $n_{1,}n_2,\ldots,n_p+1$. Cette démonstration « simple » a donc une structure logique assez complexe si on ne se limite pas à l'analyse en termes d'énoncés. En revanche, partons de l'énoncé d'Euclide (livre IX, prop 20) qui évite l'infini :

« Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée. »

Ici, l'introduction de la multitude « proposée » $n_{1,}n_2,\ldots,n_p$ s'impose comme la donnée de départ. Mais on pourra trouver au chapitre 1 de Aigner et Zigler (1998) six démonstrations différentes du fait que l'ensemble des nombres premiers est infini : pour chacune de ces démonstrations les données changent suivant les stratégies adoptées pour résoudre le problème. Ce lien entre le choix des hypothèses et des données et celui de la stratégie de démonstration renvoie à nouveau au concept d'unité cognitive (cf par exemple, Pedemonte 2005) : la rédaction de la démonstration finale n'est pas indépendante du processus de recherche qui l'a précédée.

5. *Le cas de l'analyse : limite et continuité. Le cas de l'algèbre linéaire*

Bien que l'esprit de cet exposé soit de montrer à partir d'exemples précis comment fonctionne le raisonnement dans chaque domaine particulier des mathématiques, nous regroupons analyse et algèbre linéaire à la fois pour gagner du temps et parce qu'on y rencontre dans les deux cas des énoncés, d'utilisation fréquente, où la quantification universelle est explicite, ce qui n'est que rarement le cas en géométrie et même en algèbre au sens élémentaire où nous l'avons entendu. Ce sont par exemple la définition de la limite ou de la continuité et celle de l'indépendance linéaire :

$$\forall\varepsilon\exists\eta \text{ etc. ou : } \forall\lambda_1\lambda_{2,}\ldots,\lambda_n\sum_1^n\lambda_i v_i=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$$

Lorsqu'on veut démontrer un énoncé du type précédent, on doit, comme nous venons de le voir, « se donner » un exemplaire quelconque de l'objet universellement quantifié (règle GU). Et l'expérience prouve là aussi que cette donnée d'un objet quelconque ne va pas de soi, même si c'est une pratique déjà expérimentée en géométrie et en calcul littéral : le contexte change tout. Mais laissons la parole à un expert : il s'agit d'un étudiant marocain en deuxième année d'université interviewé par Hamid Behaj (1999) lors d'une recherche sur l'enseignement et l'apprentissage à long terme de l'algèbre linéaire. A une question sur les démonstrations importantes à donner dans un cours d'algèbre linéaire, il répond :

> « Surtout en ce qui concerne la famille libre et la base. La famille libre, est comme une petite démarche pour la famille génératrice, c'est-à-dire écrire un élément sous forme d'une combinaison linéaire de cette famille génératrice. Ce n'est pas forcément une écriture unique. Par exemple, l'étudiant qui voit « quel que soit l'élément appartenant à E », pour la famille qui est considérée, il va croire qu'on peut prendre une autre famille. Il faut chercher à le convaincre, que la notion "on prend quelque chose de quelconque" c'est en même temps quelque chose de fixé. Comme par exemple, en analyse, on dit, "pour un certain *x* fixé", il y a ceux qui comprennent que *x* fixé est un *x* donné et bien défini, ils ne mettent pas en relation *x* fixé et *x* quelconque ».

Ici l’étudiant fait le rapport entre des raisonnements en analyse et en algèbre et la fin de son intervention montre qu’il a bien compris la démonstration par élément générique qui utilise un « x fixé » qui pour beaucoup d’étudiants ne peut pas être « quelconque » puisqu’il est fixé. Il y a ici une difficulté liée au fait que le raisonnement mathématique amène à mettre en relation « quelconque », « étant donné » « quel que soit » etc…, ce qui n’est pas évident dans le langage courant : il n’y a pas congruence entre le vocabulaire et la pratique du raisonnement.

En analyse, la difficulté de compréhension et de mise en œuvre du caractère générique de ε est bien perçue par les auteurs de manuels, ce qui donne lieu à une grande créativité didactique à l’occasion de laquelle on voit surgir une mise en scène analogue à celle de la logique dialogique : celui qui propose la démonstration (le proposant) affronte un opposant qui fixe ε. Le fait que, que vu la forme du résultat final à obtenir, $|f(x)-l|<\varepsilon$, le défi consiste en somme à réaliser cette inégalité même si ε est très petit, donnait lieu auparavant à la formule traditionnelle « ε aussi petit qu’on veut » qui fait penser au raisonnement par « expérience cruciale » de Balacheff (1987).

L’idée de l’appel à un interlocuteur imaginaire pour justifier des règles de manipulation des variables dans un contexte analogue n’est pas nouvelle. Voici l’article exhaustion dû à d’Alembert, dans la grande Encyclopédie.

> **EXHAUSTION**, s. f. *terme de Mathématiques*. La méthode d'exhaustion est une manière de prouver l'égalité de deux grandeurs, en faisant voir que leur différence est plus petite qu'aucune grandeur assignable ; & en employant, pour le démontrer, la réduction à l'absurde.
> Ce n'est pourtant pas parce que l'on y réduit à l'absurde, que l'on a donné à cette méthode le nom de méthode d'exhaustion : mais comme l'on s'en sert pour démontrer qu'il existe un rapport d'égalité entre deux grandeurs, lorsqu'on ne peut pas le prouver directement, on se restraint à faire voir qu'en supposant l'une plus grande ou plus petite que l'autre, on tombe dans une absurdité évidente : afin d'y parvenir, on permet à ceux qui nient l'égalité supposée, de déterminer une différence à volonté ; & on leur démontre que la différence qui existeroit entre ces grandeurs (en cas qu'il y en eût) seroit plus petite que la différence assignée. (Encyclopédie, article exhaustion).

Au début du vingtième siècle, on retrouve la même idée chez Hardy (1908) :

> **Définition 4 :**
> If, when any positive number δ, however small, is assigned, we can choose $y_0(\delta)$ so that, for all values of y different from zero but numerically less than or equal to $y_0(\delta)$, $\phi(y)$ differs from l by less than δ, then we can say that $\phi(y)$ tends to the limit l as y tends to 0, and write $\lim_{y\to 0}\phi(y)=l$. (Hardy, 1908, p. 175).

En voici une version contemporaine :

> **Définition.** Soit u une suite réelle. Soit l un réel. On dit que u admet l pour limite si, pour tout ε de $\mathbb{R}^{+*}$,il existe un naturel N tel que,quel que soit le naturel n, si $n>N$, alors $|l-u_n|<\varepsilon$.
> […] De façon imagée, il faut considérer « qu’on » nous impose un certain ε, sans bienveillance particulière, et que nous n’avons aucun droit sur cet ε ; il faut nous en accommoder et trouver un entier N qui lui convienne. (Haug, 2000, p. 79).

Un autre type de commentaire est le suivant :

> La démonstration du fait que $f(x)$ a pour limite un nombre connu l quand x tend vers a pose un problème d’existence comportant une donnée ε (nombre positif) et une inconnue α (nombre positif). (Cagnac, 1963, p. 69).

Dans la suite de cet ouvrage, l'auteur insiste beaucoup sur le changement de statut des lettres quand l'énoncé en $\forall \varepsilon, \exists \eta$ est une hypothèse, c'est-à-dire est considéré comme vrai. Dans ce cas en effet, on peut « choisir » ε : ce n'est plus une donnée, et η n'est plus une inconnue. Cette insistance est assez exceptionnelle : en dehors de cette référence nous n'avons pas rencontré d'autre manuel soulignant ce fait. Or comme dans beaucoup de démonstrations sur les limites, l'hypothèse et la conclusion présentent une grande similitude formelle, il y a là une difficulté d'apprentissage évidente liée à la confusion entre la forme d'un énoncé et son statut logique, que Duval (1991) a bien identifiée en géométrie. Toutefois, en géométrie, l'étude de Duval montre que le problème se pose au niveau des énoncés, mais pas spécialement à celui des variables.

Conclusions sur l'analyse : le caractère générique de ε semble présenter une difficulté particulière, dont témoigne l'insistance de nombreuses définitions sur cet aspect. L'appel au dialogue avec un adversaire incrédule, qui est fréquent, fait songer aux logiques dialogiques. Le fait que, dans un énoncé en $\forall \varepsilon, \exists \eta$, η « dépend » de ε est souligné dans de nombreuses définitions. Nous y revenons au paragraphe suivant.

En revanche, le changement de statut des lettres suivant que la définition de la limite (ou de l'indépendance linéaire) figure en hypothèse ou en conclusion est peu abordé. Cette grosse difficulté fait de façon surprenante l'objet de beaucoup moins de commentaires que la précédente.

VII La « règle de dépendance ». Quelques faits de la confrontation des mathématiciens aux raisonnements en (ε, η) à l'occasion du phénomène de convergence uniforme.

Nous appelons « règle de dépendance » le fait que, dans un énoncé en $\forall \varepsilon, \exists \eta$, η « dépend » de ε. Cette règle qui est soulignée dans de nombreuses définitions relatives aux limites joue un grand rôle en analyse depuis le dix-neuvième siècle où son oubli a été à la source de nombreuses erreurs.

1. Remarques préliminaires.

Plusieurs remarques s'imposent :

- Tout d'abord, le fait que dans un énoncé du type « quel que soit X, il existe Y », affirmé comme vrai, « Y dépend de X », en un sens d'ailleurs courant du mot « dépendre », est une évidence en dehors du contexte mathématique : si chaque homme a un nom, le nom dépend de l'homme.
- Du point de vue de la modélisation logique, cette règle se réduit à des règles purement syntaxiques sur les noms à attribuer aux variables ; Nous avons déjà étudié (Durand-Guerrier et Arsac, 2003 et 2005) les réactions des enseignants universitaires à une erreur due à l'oubli de la règle de dépendance commise par un étudiant en topologie générale : seule une minorité des enseignants universitaires interrogés adopte ce point de vue syntaxique pour prévenir ce type d'erreur chez les étudiants.
- Le titre de notre article de 2005, « An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule » pourrait conduire à penser que cette règle intervient seulement en analyse. Or, avec un peu de réflexion, on constate que, par exemple, elle intervient sans cesse en géométrie. Mais elle est complètement cachée, et il y a à cela deux raisons : la pratique de la quantification implicite et le recours au dessin. La quantification implicite

masque le fait que l'énoncé « tout segment a un milieu » devient, une fois restituée la quantification : « Quels que soient A et B, distincts, il existe un point I de la droite (AB) tel que IA=IB » et qu'il y a plus généralement en géométrie, tout comme en analyse, des quantités d'énoncés du type « quel que soit X, il existe Y ». Le recours au dessin fait que personne ne doute que le milieu dépende du segment considéré car c'est graphiquement évident.

- Les erreurs auxquelles a donné lieu l'application de cette règle, ont suffisamment frappé les mathématiciens pour qu'ils inventent une notation indiciée comme par exemple η_ε pour exprimer cette dépendance. On en a vu ci-dessus un exemple avec la définition de la limite par Hardy. L'affaire semble donc assez importante pour qu'on lui consacre une notation spéciale d'ailleurs abusive en ce sens qu'il ne s'agit pas d'une dépendance fonctionnelle. La plupart des universitaires pensent que cette notation est importante pour éviter les erreurs mais ceci est contestable (Durand-Guerrier et Arsac, loc citati)
- Dès qu'une démonstration est un peu complexe, ce qui n'était pas le cas de l'exemple choisi avec le théorème des accroissements finis généralisés, toutes nos observations, ainsi que l'étude historique montrent que ce n'est pas en général l'analyse du raisonnement qui conduit à déceler une erreur mais un soupçon global sur le résultat démontré, essentiellement l'existence d'un contre-exemple.

Afin d'approfondir cette question, remarquons qu'on peut trouver en géométrie des situations dans lesquelles, comme pour le théorème des accroissements finis généralisés, on a à appliquer deux fois de suite un même énoncé en « quel que soit X, il existe Y », comme celui affirmant l'existence du milieu d'un segment. Supposons par exemple que nous voulions démontrer quelque propriété de la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle. La donnée sera celle d'un triangle ABC et du point de vue de la structure logique du raisonnement, nous sommes devant la même situation que pour la démonstration fausse du théorème des accroissements finis généralisé étudiée au §4 puisqu'il s'agit d'appliquer deux fois le théorème relatif à l'existence du milieu. L'erreur analogue consisterait ici à appeler I à la fois le milieu de [AB] et celui de [AC], et bien sûr, personne ne la commet ! Mais pourquoi ? Tout simplement parce qu'on peut constater l'usage implicite et universel de la règle suivante en géométrie : si deux points sont distincts sur la figure, on doit leur attribuer des noms différents. Ici on les appellera par exemple, suivant l'usage courant, C' et B'. Cette règle suffit en général à assurer le respect des règles syntaxiques sur l'usage des variables, elle élimine donc complètement de la géométrie les problèmes de manipulation des variables si importants en analyse. Elle est tellement évidente qu'on peut l'utiliser en toute innocence en n'ayant absolument pas conscience qu'on fait un appel au dessin.

Ainsi, le contexte géométrique, et plus précisément la présence du dessin rend la règle de dépendance si évidente qu'elle n'est même pas explicitée. Bien qu'elle intervienne autant qu'en analyse, elle disparaît tout comme le modus ponens dans le calcul algébrique. Il y a bien une manipulation des variables en géométrie comme en analyse, mais le contexte la rend évidente, invisible. La géométrie est une cachottière qui, à l'aide du recours au dessin, ne laisse paraître que le raisonnement déductif ! Nous pouvons synthétiser ce qui précède sous la forme suivante :

a) la figure est un registre dans lequel sont traduites les étapes de la démonstration et dans lequel le fait que quand on change X, Y change aussi, est en général une évidence graphique

b) en géométrie, Y est en général fonction de X, et plus précisément constructible au sens géométrique à partir de X, ce qui montre bien la dépendance.

c) Très souvent, cette dépendance fonctionnelle se traduit par des notations systématiques, de façon fort variée : si ABC et A'B'C' sont deux triangles, leurs orthocentres seront notées H et H'. Dans un même triangle ABC, les milieux des côtés pourront être notés A' (milieu de BC), B’, C’ ou I, J, K, et avant de considérer la droite (B’C’), personne n’introduit l’énoncé tiers « par deux points distincts il passe une droite et une seule », qui imposerait de vérifier que B’ et C’ sont distincts : tout ceci est lu sur le dessin.

A contrario, le problème de la dépendance se posera plus probablement dans des contextes où une ou plusieurs des conditions suivantes sont réunies :
a’) L’absence d’un registre dans lequel on peut lire la dépendance.
b’) une dépendance non fonctionnelle de Y par rapport à X.
c’) L’absence d’une notation rappelant la dépendance, qu’elle soit fonctionnelle ou non.
d’) Une manipulation des variables ne tenant pas compte des règles d’instanciation.

Ces conditions constituent seulement une première tentative de caractérisation des contextes où l’application de la dépendance peut être problématique. Dans l’état actuel de notre travail, nous ne pouvons pas dire si elles sont exhaustives. On trouvera dans Durand-Guerrier et Arsac, (2005) un exemple en algèbre linéaire, où ces conditions sont remplies et où effectivement l’erreur apparaît presqu’à coup sûr.

Une fois de plus, c’est la nature du contexte mathématique, y compris le registre symbolique qu’il utilise, figures pour la géométrie, notations en analyse, caractère fonctionnel ou non, qui modifie complètement les conditions de fonctionnement de la logique.

2. Le problème historique de la convergence uniforme.

La question de la convergence uniforme apparaît historiquement sous la forme suivante : étant donné une série de fonctions continues simplement convergente sur un intervalle de R, la somme de cette série est-elle également continue ? Au début du dix-neuvième siècle, la réponse apparaît a priori positive compte tenu du « principe de continuité » dû à Leibniz. Ce principe, à vrai dire très large puisqu’il s’applique également à la philosophie et aux mathématiques est traduit par exemple par l’épistémologue anglais Whewell de la façon suivante : « ce qui est vrai jusqu’à la limite est vrai à la limite. » (Lakatos, 1976, p. 128, ou p. 166 dans la traduction française). Conformément à cela, Cauchy affirme d’abord dans son cours de l’Ecole polytechnique que la réponse est positive (Cauchy, 1821, p. 131-132). Et, comme le remarque Seidel (1847), le premier découvreur du phénomène de convergence uniforme, la démonstration ne semble pas très difficile en décomposant la somme de la série en somme partielle et reste. Voici son exposé de la démonstration fausse de Cauchy :

> « La preuve, sur laquelle repose cette Proposition à l’endroit où elle apparaît, consiste essentiellement en la remarque que l’on peut séparer la somme de la série totale en la somme d’un nombre n de ses premiers termes et en celle complémentaire de tous les suivants. D’après l’hypothèse de convergence de la série, quel que soit x cette dernière somme peut être rendue aussi petite que l’on veut en augmentant n. ; il en est de même de la variation qu’elle subira, lorsque x est faiblement changé ; l’incrément de la somme des n premiers termes diminue sans fin en même temps que la variation de x, de toutes façons, puisqu’elle est constituée d’un nombre fini de fonctions continues de x : il semble donc que l’on puisse choisir n suffisamment grand et l’incrément de x suffisamment petit pour que les variations des 2 parties, donc aussi de la série totale, puissent être rendues inférieures à une grandeur aussi petite que l’on veut, et donc la continuité de la somme de la série serait démontrée […] »

Cette démonstration est nécessairement fausse car, remarque Seidel, les séries de Fourier fournissent des exemples de séries de fonctions continues (trigonométriques) dont la somme est discontinue en certains points. Notons que, étant donné que l’article de Seidel est publié dans une revue scientifique, il pense qu’un mathématicien contemporain serait susceptible de produire une telle démonstration. Il ne s’agit donc pas là d’une mise en garde envers des débutants. On remarquera que dans cette rédaction ne figurent ni ε, ni N ni aucune inégalité, ce qui est conforme à la pratique de Cauchy. Seidel va reprendre la question en prenant l'option contraire, donc de la manière très contemporaine que nous rappelons ci-dessous, sans souci de respecter les notations de Seidel et sans préciser les ensembles de définition pour nous concentrer sur les problèmes de majoration.

Soit $f(x)=\sum_{0}^{+\infty} u_n(x)$, il s'agit de démontrer la continuité de f en un point x_0. Pour cela, on écrit, en notant S_n et R_n la somme partielle et le reste de la série :

$f(x)-f(x_0)=S_n(x)-S_n(x_0)+R_n(x)-R_n(x_0)$, d'où

$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|S_n(x)-S_n(x_0)|+|R_n(x)|+|R_n(x_0)|$.

La convergence de la série entraîne en particulier que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout x, il existe N tel que, pour tout x, $n>N \Rightarrow |R_n(x)|\leq\frac{\varepsilon}{3}$. La remarque essentielle de Seidel est que *N dépend de x* (mais Seidel n'introduit pas de notation du type N_x ou $N_{\varepsilon,x}$) et qu'il peut arriver que quand x décrit l'ensemble des valeurs permises, l'ensemble des valeurs de N ne soit pas majoré, ce qu'il appelle la convergence infiniment lente. Au contraire, si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble de ces valeurs est majoré, alors on peut trouver un nombre N valable pour tous les x, autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe *N indépendant de x,* tel que, pour tout x, $n>N \Rightarrow |R_n(x)|\leq\frac{\varepsilon}{3}$. On dit dans ce cas qu'il y a *convergence uniforme* et on achève alors la démonstration e fixant tout d'abord une telle valeur de n et en utilisant ensuite la continuité de la somme partielle, ce qui permet d'obtenir $|S_n(x)-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ pour tous les x d'un voisinage de x_0, d'où la continuité de f en ce point. La convergence uniforme est donc une condition suffisante pour que la somme de la série soit continue.

C'est bien la question de la dépendance qui est centrale ici, et il est évident que dans une démonstration fausse comme celle que Seidel propose à la critique où ne sont explicités ni ε ni N, il est bien difficile de percevoir que N dépend de x ! Nous allons examiner maintenant comment Abel échoue aussi devant ce problème ; nous avons choisi Abel car :

- C'est un mathématicien de première envergure.
- Il écrit en français, ses œuvres sont facilement accessibles sur Gallica.fr, ce qui permet au lecteur de s'y référer et de se faire éventuellement une opinion personnelle.
- C'est un admirateur de Cauchy.

Or Abel (1826) constate comme Seidel que le théorème de Cauchy est erroné : il fournit un contre-exemple :

> « la série $\sin x-\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{3}\sin(3x)-...$ est discontinue pour toute valeur $(2m+1)p$ de x, m étant un nombre entier. Il y a, comme on sait, beaucoup de séries de cette espèce. » (Abel, 1826, note p.224)

Ce contre-exemple est apparemment classique à l'époque, car Cauchy (1853) l'envisagera également par la suite en rectifiant son théorème, mais, contrairement à Seidel, Abel ne voit pas où est l'erreur. Toutefois, il entreprend de démontrer la continuité de la somme pour une série entière, ce qui est exact, mais à partir d'une démonstration dont nous allons voir qu'elle est fausse. Il généralise ensuite ce résultat, au moyen de la même démonstration et obtient cette fois-ci un théorème faux.

Notons pour commencer que la démonstration d'Abel apparaît déjà comme difficile à lire pour un mathématicien comme Liouville qui déclare « qu'il trouvait assez difficile à exposer (et même à comprendre) la démonstration qu'Abel a donnée de ce théorème important » (Liouville cité par Dugac, 2003, p. 108). Ceci soulève un problème : vu les imprécisions de rédaction communes aux mathématiciens de l'époque, se comprenaient-ils entre eux ? Nous laisserons cette question ouverte même si la remarque de Liouville incite à répondre « pas toujours ».

Revenons à Abel ; quelques précisions préliminaires faciliteront sa lecture. Tout d'abord, il utilise une définition d'une fonction continue qui lui est particulière, ce qui souligne le fait que cette notion n'est pas encore unifiée à l'époque. Abel écrit :

> « *Définition*. Une fonction *fx* sera dite *fonction continue* de x entre les limites $x=a$ et $x=b$, si pour une valeur quelconque de x comprise entre ces limites, la quantité $f(x-\beta)$, pour des valeurs toujours décroissantes de β, s'approche indéfiniment de la limite *fx*. »

Le choix de cette définition est peut-être motivé par le fait qu'Abel désire montrer qu'une série entière réelle est continue y compris à l'extrémité positive de l'intervalle de convergence où il s'agit donc de continuité à gauche, donc β est certainement supposé positif. Ceci dit, la continuité aux autres points de l'intervalle ouvert de définition suppose d'envisager des valeurs négatives de β, et l'on ne peut que conclure comme Liouville que la démonstration n'est pas facile à suivre.

Comme les mathématiciens de son temps, Abel n'utilise pas de notation pour la valeur absolue et n'en parle même pas, alors que Cauchy l'appelle « valeur numérique ». Ses notations sont les suivantes : il désigne par $\varphi\alpha=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+...+v_{m-1}\alpha^{m-1}$ et $\psi\alpha=v_m\alpha^m+v_{m+1}\alpha^{m+1}+...$ la somme partielle et le reste de rang m d'une série entière, sans mentionner l'indice m, là où nous écririons : $\varphi_m\alpha$ et $\psi_m\alpha$. En vu démontrer que la somme $f\alpha=\varphi_m\alpha+\psi_m\alpha$ est continue, il remarque :

> « On pourra donc pour toute valeur de α, égale ou inférieure à δ, prendre m assez grand pour qu'on ait $\psi\alpha=\omega$. » Il a précisé auparavant que : « pour abréger, on représentera dans ce mémoire par ω une quantité qui peut être plus petite que toute quantité donnée ».

Ainsi, il exprime que le reste peut être pris aussi petit qu'on veut, et la phrase, quantifiée en α, indique pour nous que la majoration dépend de α mais l'absence de N et de ε ne permet pas de voir la dépendance. Abel achève alors la démonstration ainsi :

> « Or $f\alpha=\varphi\alpha+\psi\alpha$, donc $f\alpha-f(\alpha-\beta)=\varphi\alpha-\varphi(\alpha-\beta)+\omega$. De plus, $\varphi\alpha$ étant une fonction entière de α, on peut prendre β assez petit pour que $\varphi\alpha-\varphi(\alpha-\beta)=\omega$; donc on a de même $f\alpha-f(\alpha-\beta)=\omega$, ce qu'il fallait démontrer. »

La notation ω joue un peu le rôle de notre o, mais sans explicitation des variables : nous écririons successivement $\omega(n,\alpha)$ puis $\omega(\beta)$. La notation ω occulte ces dépendances et Abel ne relève pas du tout que le premier ω ne dépend pas en fait de x. Le principe de charité qui irait jusqu'à supposer qu'Abel s'en soit aperçu mais n'en ait pas fait mention ne s'applique pas ici car :

- d'une part, dans ce cas, Abel aurait certainement trouvé pourquoi l'énoncé de Cauchy était faux.
- D'autre part, Abel démontre ensuite une généralisation du théorème précédent dans laquelle les coefficients v_k de la série deviennent des fonctions de la variable maintenant nommée x.

  Il recopie la démonstration antérieure et obtient cette fois-ci une majoration $\psi x<\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m\theta x$

(le lecteur pourra ajouter des valeurs absolues). Ici, il a précisé la présence de x. Mais la démonstration se poursuit de la même manière : « Il s'ensuit qu'on peut prendre m assez grand pour qu'on ait $\psi x = \omega$ ». La conclusion est cette fois-ci fausse (pour un contre-exemple explicite, cf Dugac, 2003)

La difficulté à laquelle se heurte ici Abel est due à la notion de variable en analyse telle qu'elle est utilisée à cette époque : il y a des variables qui tendent vers zéro de façon autonome, en ce sens qu'elles ne sont pas fonction d'une autre variable. Il y a sous-jacente une représentation cinématique, mais sans que le temps soit jamais explicité, ce qui explique la définition de ω. Le fait de désigner par une seule notation tout ce qui tend vers zéro accentue encore la confusion qui est dans le concept de variable lui-même et bien sûr, Abel admet implicitement qu'une somme de variables qui tendent vers zéro tend elle-même vers zéro, alors que la simple explicitation des variables montrerait que l'on a affaire à une somme $\bar{\omega}(n,\alpha)+\omega(\beta)$! La position d'Abel introduisant une notation qui renforce les ambiguïtés est un peu extrême, mais cette difficulté concerne tous les mathématiciens de l'époque. Pour eux, comme pour les étudiants qui en restent à un modèle cinématique de la limite, les limites sont toujours monotones : une variable qui tend vers zéro est une variable qui *décroît* vers zéro.

Synthèse : les démonstrations d'Abel montrent bien les problèmes engendrés par la non-explicitation systématique des variables due au fait qu'à l'époque la notion de fonction existe mais est une notion seconde par rapport à la notion première de variable propre à l'analyse. Dans le cas d'Abel, les problèmes soulevés par la notation ω montrent comment peuvent se cumuler et s'imbriquer un problème conceptuel avec un choix de symbolisme. Contrairement à ce que nous avons vu antérieurement où un symbolisme bien choisi facilitait le raisonnement, ici le symbolisme accroît la difficulté déjà inhérente au concept de variable en analyse de l'époque.

VIII Conclusions.

On peut rendre compte des raisonnements mathématiques par les théories logiques, à condition de ne pas se limiter à la logique des énoncés.

Commentaire: il en résulte qu'on peut en général analyser une erreur de raisonnement grâce à un modèle logique. Mais il n'en résulte pas qu'un apprentissage de la logique soit une remédiation. En revanche la logique présente l'avantage d'une théorie unifiée du raisonnement mathématique.

L'expérience historique montre que les mathématiciens ont dû apprendre certains types de raisonnement modélisables par la logique.

Commentaire : mais on peut conjecturer que le raisonnement est apparu en mathématique avant sa modélisation par une théorie logique.

Dans chaque domaine des mathématiques on peut identifier des règles de raisonnement, des méthodes, des symbolismes, qui permettent de raisonner et qui sont des créations mathématiques.

Commentaire. Cette conclusion, la principale de notre travail, peut aussi être présentée sous la forme suivante : suivant les domaines mathématiques considérés ce sont différents aspects de la logique qui apparaissent. Typiquement la démonstration en géométrie plane exhibe presque uniquement le raisonnement déductif, ce qui explique qu'elle soit le lieu privilégié de son apprentissage, alors que le calcul littéral fait disparaître toute trace explicite de la logique. Chaque domaine mathématique rend plus ou moins visibles certains aspects logiques du raisonnement en leur donnant de plus une forme très liée au contexte mathématique. Tout travail didactique sur l'apprentissage du raisonnement dans un domaine mathématique donné soit donc s'appuyer d'abord sur une description très précise des règles de raisonnement propres au domaine. Les exemples que nous avons donnés constituent des analyses encore assez grossières dont le seul but est d'étayer la conclusion ci-dessus. Celle-ci souligne la dimension de savoir-faire de l'activité mathématique, ce qui n'est pas contradictoire avec le fait que les mathématiques constituent évidemment un savoir.

On n'apprend pas à raisonner en mathématiques, ni historiquement ni personnellement par l'étude de la théorie logique indépendamment des mathématiques.

Commentaire : ceci tire la leçon, d'une part de l'antériorité historique du raisonnement mathématique par rapport aux théories logiques correspondantes, d'autre part des échecs de l'enseignement de la logique en vue d'améliorer le raisonnement mathématique. Mais ceci n'exclut pas a priori toute efficacité d'une réflexion logique dans un contexte mathématique donné.

Les règles de la logique utilisées dans le raisonnement mathématiques sont pour la plupart évidentes en dehors de leur contexte mathématique, mais cette connaissance ne permet pas de les appliquer dans un domaine donné des mathématiques.

IX Bibliographie

Abel NH (1826), Recherches sur la série $1+\frac{mx}{1}+\frac{m(m-1)x^2}{1\times 2}+\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{1\times 2\times 3}+...$ *Journal reine angew. Math. 1*, 311-339, reproduit dans les *Œuvres complètes, Kristiana (Grondhal)*, 1881, p. 219-250. Accessible par le site gallica-math.

Aigner M., Ziegler GM. (1998), *Proofs of the book*, Springer, Berlin. Traduction française par N. Puech et JM Morvan, *Raisonnements divins*, Springer-Verlag France, 2002.

Aristote, *Organon, III, Les premiers analytiques,* trad J Tricot, Vrin Paris, 1995.

Arsac G. (1992), L'universalité des mathématiques, *bulletin de l'APMEP* n°385, p. 401-418

Arsac G (1998), *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*. Aléas, Lyon, 125 pages.

Arsac G (1999), Variations et variables de la démonstration géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 19/3, p. 357-390.

Balacheff N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics,* vol. 18, n° 2, Mai 1977, p. 147-176.

Behaj H. (1999), *Thèse : Elements de structurations à propos de l'enseignement et l'apprentissage à long terme de l'algèbre linéaire*, Université de Fès, Maroc.

Bosch M., Chevallard Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 19/1, La Pensée Sauvage, Grenoble. p. 77-123.

Cagnac G., Ramis E., Commeau J. (1963*), Nouveau cours de mathématiques spéciales, tome 2, Analyse*. Paris : Masson.

Cauchy A-L (1821), Cours d'analyse de l'école polytechnique, 1ère partie, *Analyse algébrique*, Debure, Paris.

Cauchy A-L. (1853), «Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Tome XXXVI, p. 454-9, 14 Mars 1853*). Ce texte est reproduit dans les *œuvres complètes de Cauchy (Première Série, tome XII, p. 30-36).*

Changeux J-P., Connes A. (1989), *Matière à pensée*, Odile Jacob, Paris.

Dugac (2003), *Histoire de l'analyse*, Vuibert, Paris

Durand-Guerrier V. et Arsac G. (2003), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spéficités de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 23/3, La Pensée Sauvage, Grenoble. p. 295-342.

Durand-Guerrier V. et Arsac G (2005), An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule, *Educ stud in maths*, 60, 149-172.

Durand-Guerrier V. (2005), *Recherches sur l?articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l?interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, Habilitation à diriger des recherches, IREM de Lyon.

Duval R. (1991), *Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration.* Ed stud in mathematics, 22, 233-261.

Gardies J-L. (1997), *L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède*, Vrin, Paris.

Garuti, R.; Boero,P. & Lemut, E.: 1998, Cognitive Unity of Theorems and Difficulties of Proof', *Proceedings of PME-XXII,* vol. 2, pp. 345-352

Gochet P., Gribomont P. (1990), *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale*. Vol. 1. Hermès,

Hardy (1908), *A course of pure mathematics*, Cambridge University Press, dixième édition, 1952.

Haug P-J. (2000), *Mathématiques pour l'étudiant scientifique*, tome 1. Paris : EDP Sciences.

Hemily (2006), *Textes fondateurs du calcul infinitésimal*, Ellipses, Paris.

Hilbert (1899), *Les fondements de la géométrie*, traduction de la dixième édition, Paul Rossier éditeur, Dunod, Paris, 1971, 311 pages.

Hottois G. (1989), *Penser la logique.* De Boeck Université.

Lakatos 1 (1976), *Proofs and refutations*, Cambridge. Trad française *Preuves et Réfutations,* Actualités scientifiques et industrielles n°1412, Hermann (1984) Paris.

Lalande A (1902), *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Presses Universitaires de France, Paris, tome 2.

Longo (2009), Theorems as constructive vision, in Fou-Lai Lin, Feng-Jui Hsieh, Gila Hanna, Michael de Villiers, (eds) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education,* The Department of Mathematics, National Taiwan UniversityTaipei, Taiwan

Mueller I. (1981), *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid''s Elements*, Cambridge (Massachussets).

Netz R. (1999), *The Shaping of deduction in greek mathematics*, a study in cognitive history, Cambridge, 327 pages.

Pascal (1985), *De l'esprit géométrique*, Flammarion.

Pedemonte B., 2005, Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration, ? *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 25/3, La Pensée Sauvage, Grenoble. p. 313-348.

Rouche N. (1989), Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Lyon. 496 pages, p.9-38.

Seidel (1847), Note über eine Eigenschaft der Reihen welche discontinuirliche Functionen darstellen » (Note sur une propriété des séries qui représentent des fonctions discontinues) *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*. (pages 381-393).

Serfati M. (1999), La dialectique de l'indéterminé, de Viète et Frege à Russell, *Actes du séminaire d'histoire et épistémologie des mathématiques*, IREM de Paris Sud, p. 145-174.

Stokes GG. (1847), On critical values of the sums of periodic series, *Trans. Cambridge Philos. S*oc., 8, p. 533-583, reproduit in *Stokes, Math and phys. Papers*, Cambridge University Press, 1880, vol I, p. 236-313.

Thurston W P. (1994), On proof and progress in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc*. 30 (1994) p. 161-177 ; trad française : 1995, Preuve et progrès en mathématiques, *Repères IREM*,n°21, p. 7-26.

De la circulation des savoirs mathématiques dans la classe aux activités des élèves et à leurs productions en contrôle : questionner les relations, questionner les différences

Chesnais A., Dumail A., Horoks J., Pariès M., Robert A.

Laboratoire de Didactique André Revuz

Universités : Paris 7 – Denis Diderot, Paris 12, Cergy Pontoise, Arras

Résumé

Les travaux que nous présentons abordent la question des relations entre les pratiques des enseignants de mathématiques, notamment en classe (collège, lycée), et les activités des élèves, prises comme intermédiaires de leur conceptualisation potentielle (et donc de leurs apprentissages) et éventuellement « évaluées » à partir de contrôles proposés en classe.

Compte tenu de l'inscription de ces travaux en théorie de l'activité, les variables que nous retenons pour les analyses sont, pour une séance, les tâches proposées (au sein d'un itinéraire cognitif global précisant aussi les déroulements a priori) et les déroulements effectifs, incluant la circulation du savoir mathématique que l'enseignant organise dans la classe. Le premier exposé permettra de préciser ces caractéristiques et d'indiquer notre orientation méthodologique commune, y compris dans une perspective « différentielle » (Aline Robert, Monique Pariès).

La mise en relation des pratiques, des activités et des productions des élèves sera questionnée plus précisément dans le deuxième exposé où l'analyse des contrôles que les élèves produisent est présentée comme une méthode pour détecter certains effets, éventuellement différentiels, des séances étudiées. Des résultats seront donnés (Julie Horoks, Anne Dumail).

Dans cette perspective, on peut être amené en particulier à introduire explicitement la composition des classes comme variable externe (pas indépendante !). Le troisième exposé (Aurélie Chesnais) donnera à voir les résultats de la mise en relation précédente à partir d'un même scénario (sur la symétrie axiale) dans deux classes de sixième différentes, dont l'une dans un établissement très défavorisé.

En conclusion, nous reviendrons sur la portée et les limites de ce type de travaux, en dégageant des perspectives.

Mots clefs

Pratiques des enseignants de mathématiques, différenciation, circulation du savoir, activités des élèves

I Introduction générale

Le symposium de Rennes autour du thème « Equité/efficacité » (Chesnais 2008) nous a permis une première présentation, avec Lalina Coulange, d'une lecture de nos recherches orientée par un questionnement particulier : il s'agissait de traquer des aspects différentiels des relations entre les pratiques des professeurs de mathématiques et les activités mathématiques correspondantes des élèves, notamment en regard de la composition (sociale) des classes.

Dans le présent exposé, nous élargissons le propos à des différences qu'on peut mettre en évidence, sans privilégier pour l'instant celles qui seraient spécifiquement liées aux classes, même si, souvent, c'est en contrastant des classes ordinaires et des classes faibles ou ZEP que nous les avons repérées. Il va sans dire que, par delà la mise en évidence de ces différences, c'est une certaine compréhension que nous en recherchons, sachant que trop de données diverses et éventuellement inaccessibles, comme par exemple l'appréciation des effets du temps long, interviennent pour autoriser quelque jugement que ce soit.

Nous mettons l'accent dans cet exposé à plusieurs voix sur des recherches à partir de données recueillies pendant les séances en classe (en mathématiques, au lycée et au collège). Ce niveau, local, peut sembler isolé mais il n'en est rien : tout travail de ce type s'appuie sur, ou permet de remonter à, des questionnements plus larges, sur les mathématiques en jeu, les programmes, les élèves, l'établissement, etc. Nous ne les montrons pas aujourd'hui, ce qui indique seulement que nous considérons ce niveau, local, comme aussi important dans l'effort de recherche que le niveau global (et pas plus important) !

Pourquoi un tel effort de recherche, une telle sensibilité diraient certains ? Qu'est-ce qu'on gagne ? C'est ce que nous allons essayer d'illustrer devant vous – en indiquant aussi quelques orientations méthodologiques, des perspectives et aussi des limites de nos travaux.

Si dans chaque recherche des adaptations méthodologiques sont indispensables, tous les travaux présentés ici partagent un certain nombre d'options théoriques, dont voici un résumé.

1. A quoi s'intéresse-t-on pendant une séance de classe ? Pourquoi ? Retour sur les activités mathématiques des élèves, intermédiaires vers les apprentissages

Les activités mathématiques des élèves désignent un processus associé à ce qu'ils pensent, disent, font, ne font pas… dans leur mise en fonctionnement des connaissances mathématiques – elles sont donc en partie inaccessibles. Elles sont cependant à nos yeux un élément constitutif, une source essentielle, certes partielle, des apprentissages visés que nous étudions (Robert 2008). De plus ce sont les productions des élèves (orales et surtout écrites) qui nous renseignent sur ces apprentissages, sorte de critère, là encore partiel, plus ou moins adapté.

Le mot apprentissage reste vague, on peut parler d'acquisition, de construction des connaissances – en fait notre référence est la conceptualisation des notions du programmes – ou plus exactement un niveau de cette conceptualisation, même si cette référence peut être plus ou moins éloignée des objectifs sur certaines notions, plus pratiques que conceptuels. Conceptualisations éventuellement partielles, comprenant l'organisation des concepts en réseaux (cf. champs conceptuels) et leur disponibilité (à la fois comme objets et comme outils, pouvant être utilisés à bon escient).

Les évolutions actuelles (injonctions institutionnelles notamment, idée de socle) et certaines contraintes d'autre part, liées aux élèves, ne sont pas toujours cohérentes avec cette conception de l'apprentissage ; l'usage massif des TICE tel qu'il est préconisé peut aussi questionner sur cette définition des acquisitions mais ce n'est pas l'objet de cet exposé.

Or, pour un même chapitre, voire pour une même séance, ces activités mathématiques des élèves sont variables selon l'enseignant, la classe, les élèves.

Par exemple on peut constater que certains élèves réagissent très vite, répondent à toutes les questions (voire les anticipent), pendant que d'autres ont l'air de s'y mettre plus lentement, semblent avoir besoin de davantage d'éclaircissements pour travailler – on a évoqué des activités a minima ou a maxima au sein des activités possibles, sachant que ce n'est pas nécessairement une indication de qualité de ces activités mais bien un indice de variabilité possible dont le lien avec les apprentissages n'est pas transparent.

Enfin les productions des élèves sont elles aussi variées et leur mise en relation avec les activités développées par les élèves en amont peut contribuer à éclairer le lien des activités et des apprentissages.

2. *Comment aborder la diversité des activités mathématiques possibles ?*

Dans ces conditions il y a plusieurs postures de recherche. On peut essayer de définir des conditions essentielles, par delà la conjoncture et la contingence, pour garantir ou étudier l'avancée du savoir dans la classe ; les milieux et contrats sont des outils privilégiés pour ces travaux. Les sujets cognitifs n'ont pas directement leur place dans ces recherches, dans la mesure où ils jouent seulement leur rôle, remplissent leur fonction d'élèves (ou d'enseignants) dans des jeux d'apprentissage qui modélisent en termes de savoirs ce qui se passe.

On peut aussi interroger davantage (et de manière imbriquée), à travers le déroulement en classe, le contexte, la conjoncture, ce qui est imprévisible avant la classe mais pas nécessairement aléatoire et son influence sur l'avancée du savoir. Là encore il y a plusieurs manières de mener cette interrogation. On peut travailler à retrouver au niveau micro des éléments des modèles organisant la lecture de l'avancée du savoir au niveau méso ou macro, en se donnant les moyens de reconstituer les différentes genèses y intervenant (avancée du temps, répartition des rôles, changements de milieux successifs).

D'autres chercheurs, introduisant les sujets dans leur variété cognitive, travaillent à mieux comprendre les relations entre les activités mathématiques des élèves et les choix, y compris liés à la conjoncture de la classe, qu'on peut détecter chez les enseignants. Ils travaillent à saisir, par delà les différences, les variabilités, en repérant aussi les contraintes. Et, peut-être, arrivent-ils à aborder les questions des alternatives, y compris locales, à l'échelle du déroulement de la classe. C'est notre point de vue, on l'aura compris.

3. *Quelles variables retenons-nous pour caractériser les activités des élèves en relation avec les pratiques des enseignants ?*

Les activités des élèves dépendent des élèves mais aussi de ce qui est proposé par l'enseignant en classe. Cette prise en compte des déroulements en classe, et donc de la conjoncture se justifie ainsi par le fait que c'est une source importante des activités mathématiques des élèves. Elles dépendent, de notre point de vue, certes des tâches proposées, dans leur ensemble, avec leur organisation, mais aussi de « choses » très locales[1] que nous retenons dans la mesure où, du fait même que c'est sur les activités que nous travaillons, le point de vue du travail de l'élève « acteur ou sujet singulier » - et pas seulement celui de la fonction, du rôle d'élève – doit être pris en compte.

Revenons sur les différentes variables qui interviennent.

La plus globale est constituée par le scénario sur un chapitre donné – avec l'ordre adopté pour présenter le cours et les exercices et leurs contenus précis, le choix de l'introduction, la gestion imaginée *a priori*, qui permettent d'y associer des objectifs globaux des enseignants. Au sein de cet itinéraire cognitif que définit ce scénario, la variété des tâches et des mises en fonctionnement mathématiques correspondantes est retenue. Ces analyses *a priori* sont complétées par leur mise en regard avec l'étude des séances en classe. Nous retenons les formes

1 D'une part l'organisation globale de la fréquentation des mathématiques qui leur est proposée, d'autre part la variété des tâches qu'ils ont à travailler (y compris en contrôles) et enfin le travail effectif sur chaque tâche avec l'accompagnement qui en est fait – c'est ce que nous appelons « choses » très locales.

de travail des élèves et la nature de ce travail, au sein d'un découpage inspiré des différentes tâches mises en évidence dans l'analyse *a priori* et précisé par un repérage chronologique. Enfin les activités possibles ainsi détectées sont encore précisées par l'analyse des accompagnements fins de l'enseignant, son discours, pour apprécier l'enrôlement des élèves, leur maintien dans le travail, les aides apportées, le repérage et l'exploitation de ce travail. Par exemple l'aide d'un enseignant sur un exercice peut débloquer l'élève et entraîner une activité de résolution réduite, sans qu'aucun apprentissage n'en résulte peut-être, ou au contraire, entraîner une construction de connaissance de l'élève, notamment si cette aide vient après un certain travail de cet élève, même sans succès.

Nous avons ainsi choisi pour analyser les activités des élèves des variables liées aux hypothèses que nous admettons sur les apprentissages, liées à ce qui peut influencer les apprentissages – en termes de scénarios, tâches et de gestion fine. D'autres variables pourraient intervenir, en termes de prérequis des élèves par exemple – nous y reviendrons dans les questions.

C'est bien entendu le cadre théorique choisi, adapté aux mathématiques scolaires, qui est à la source de ces variables. Ce cadre résulte d'une adaptation didactique des théories de Piaget articulées avec celles de Vygotski (Rogalski 2008). Ces théories ne fournissent pas un modèle des apprentissages mais indiquent des dimensions pouvant influencer les apprentissages – cela nécessite d'aller voir !

Enfin, ces variables qui influencent les activités des élèves ne sont pas indépendantes – en particulier le déroulement d'hier conditionne le choix des tâches d'aujourd'hui et réciproquement c'est ce choix des tâches qui détermine le déroulement, nous y reviendrons dans les questions présentées ci-dessous…

Ces variables sont aussi liées en grande partie à des activités des enseignants, il en y a une double lecture. C'est d'ailleurs pour qualifier la gestion fine de la classe par l'enseignant que nous utilisons le mot « circulation du savoir » : cela correspond à la vie dans la classe de l'ensemble des couples {énoncés/déroulement} prévus initialement par l'enseignant, à la mise en actes (ou « en musique ») de l'itinéraire cognitif déterminé a priori – même si ce qu'on voit est très différent de ce qui était prévu.

Dans l'exposé présenté ici, on développe plus particulièrement les aspects locaux, et les variables correspondantes des pratiques des enseignants, ce qui ne veut pas dire qu'on ignore les interdépendances avec le reste.

4. Retour à notre problème de la relation entre pratiques et activités

Finalement nous interrogeons la mise en regard

- des pratiques à l'origine des activités des élèves – notamment en classe, ici
- des activités observées (possibles) des élèves
- et de leurs productions

pour nous renseigner sur les relations entre ces pratiques enseignantes et les « apprentissages » et sur des différences éventuelles - avec grande prudence !

Nous faisons intervenir des interprétations de ces variabilités – enseignants et élèves - qui mettent en jeu autre chose que ce qui se passe en classe (par exemple différentes contraintes, institutionnelles, sociales, personnelles) et qui permettent de réfléchir à des alternatives – mais ce n'est pas l'objet de cet exposé.

5. Plan

1. Un zoom sur les déroulements et la circulation du savoir en classe (déroulements « fins ») – relations avec les activités des élèves et premières différences (exemples et méthodologie) (Pariès, Robert)

Dans le premier exposé nous développons la démarche adoptée pour étudier cette circulation du savoir en classe (Chappet Pariès et al 2009, Chappet Pariès 2009). Nous illustrons à partir d'exemples contrastés, morceaux choisis tout exprès, des relations et des différences entre cette circulation du savoir en classe et les activités possibles d'élèves. On contraste à cet effet deux séances de deux classes de sixième du même enseignant, et deux classes de troisième de deux enseignants différents dans des établissements très contrastés.

Mais dans quelle mesure ces activités diverses sont bien en relation avec les apprentissages ?

2. Liens entre les activités possibles des élèves, détectées à partir des pratiques enseignantes, et les productions des élèves en contrôle (éléments méthodologiques et premiers résultats différentiels) (Horoks, Dumail)

Dans le deuxième exposé Julie Horoks et Anne Dumail donneront des éléments d'une méthodologie mettant justement en regard productions d'élèves (en contrôles), circulation du savoir et activités des élèves : cela permet d'avancer, au moins partiellement sur cette question. Elles indiqueront certains résultats qui ne nous font pas changer d'avis (Horoks 2008 ; Dumail 2007) !

De plus, dans quelle mesure les différences constatées sont-elles liées aux classes ou aux enseignants (ou aux deux) ?

3. Le cas de la symétrie axiale dans deux sixièmes contrastées : déroulements et circulation du savoir, activités et liens avec les productions des élèves en contrôle (Chesnais)

L'exposé d'Aurélie Chesnais permet de préciser ce point, en présentant la mise en acte du même scénario sur la symétrie axiale en sixième, l'une ZEP et l'autre pas. Les circulations du savoir qui sont organisées sont différentes, adaptées aux enseignants et aux classes et les relations avec les activités des élèves, mises en regard des productions aux contrôles dans les deux classes, révèlent des différences très informatives sur les élèves et l'adaptation correspondante des enseignants.

Restent des questions : comment se combinent dans les pratiques, les différences

- de scénarios (et de la préparation à la construction du sens des notions compte tenu de nos analyses épistémologiques),
- de la variété des adaptations proposées dans les exercices (et du travail sens/technique)
- et de circulation du savoir

Y a-t-il des seuils ?

Dans quelle mesure interviennent les différences entre les élèves, les différences de posture vis-à-vis du savoir, l'hétérogénéité ?

Dans le cas des ZEP, quel positionnement par rapport aux différentes logiques déjà mises en évidence dans le premier degré (cf. travaux de Glorian, Butlen, Pezard, Masselot, Peltier) ou ailleurs (Bautier) – par exemple en termes de socialisation/réussite/apprentissage

Enfin, en lien avec ce qui précède, y a-t-il vraiment le choix dans les mises en circulation du savoir (et les deux autres niveaux), y a-t-il des alternatives, et même si les pratiques en classe sont variables, sont-elles pour autant modifiables pour un enseignant donné, compte tenu des contraintes et de son mode de fonctionnement ?

Ce qu'on en voit en classe ne correspond qu'à la partie émergée de l'iceberg et on sait bien que de nombreuses contraintes pèsent sur les activités des enseignants en classe. Des recherches antérieures ont montré par exemple certaines régularités inter-enseignantes ainsi que la stabilité des choix de gestion intra-individuel (pour des types de classe donnés). L'importance des anticipations et des représentations des enseignants sur les élèves n'est plus à démontrer (Perrin 1997 ; Butlen et al. 2007).

II Circulation du savoir en classe : relations avec les activités des élèves et premières différences

M. Pariès et A. Robert

Pour préciser et justifier notre propos nous présentons quelques exemples assortis de morceaux choisis.

Les fragments de discours du professeur sont extraits de nos transcriptions.

Ces exemples donnent à voir la circulation du savoir dans deux classes de sixième du même enseignant sur la même tâche puis dans deux classes de troisième l'une ZEP et l'autre non, sur des tâches voisines. Ils permettent une première illustration des activités des élèves correspondantes et de leurs différences éventuelles. Nous donnons quelques précisions sur notre méthodologie systématique et terminons par une série de questions.

1. *Premier exemple : Deux classes de sixième, un même enseignant.*

C'est le même enseignant qui intervient dans deux classes de sixième dont l'une est faible. Il propose les mêmes tâches à ses élèves, ici la correction du même exercice portant sur la divisibilité d'un nombre par 2, 3, 5, 9.

Enoncé
Voici une liste de dix nombres : 207 ; 815 ; 79 ; 116 ; 48 ; 135 ; 950 ; 29 ; 5 208 ; 360.
Faire un tableau comme ci-dessous et le remplir.

Divisibles	Nombres de la liste
Par 2	
Par 3	207
Par 5	
Par 9	207

La présentation des exercices est à peu près identique, les élèves travaillent à leur place et certains sont interrogés au tableau, la succession des sous tâches présentée par l'enseignant est exactement la même sauf en ce qui concerne les durées de chaque phase. Pourtant à y regarder de plus près, en comparant phrase à phrase les discours de l'enseignant c'est-à-dire en introduisant ce qu'on a appelé la circulation du savoir, on constate des différences en ce qui concerne les activités possibles des élèves.

Enrôler tout le monde et structurer le travail, récapituler de manière détaillée prend du temps dans la classe faible

– La mise au travail est plus consistante, plus détaillée dans la classe faible.

« Alors vous sortez vos cahiers d'exercices. On corrige l'exercice n° 12 heu n° 39... » (classe forte)

« Alors vous sortez votre cahier d'exercice…Alors l'exercice qui était à faire pour aujourd'hui c'était donc un exercice qui utilisait les critères de divisibilité. » (classe faible)

On voit ici que l'exercice n'est recadré que dans la classe faible.

– La synthèse reprend la plupart des résultats trouvés dans la classe faible.

Voici le tableau complété et les commentaires de l'enseignant dans les deux classes :

Divisibles	Nombres de la liste
Par 2	116, 48, 360, 950, 5208
Par 3	207, 48, 135, 360, 5208
Par 5	135, 360, 815, 950
Par 9	207, 135, 360

« Alors on remarque dans ce tableau qu'il y a des nombres qui n'ont leur place nulle part : 79 et 29. 79 et 29 ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 9. Il y a des nombres qui ont leur place partout comme quoi par exemple ? » (classe forte)

« Alors parmi les nombres qui sont là, qu'est ce qu'on constate ? On constate qu'il y en a deux qu'on a laissé en plan qui sont 79 et 29. 79 et 29 qui sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 9, d'accord. Et puis on constate qu'il y en a un par exemple comme 360 qu'on retrouve à toutes les lignes. Et puis il y en a, comme 48 qu'on retrouve seulement sur deux lignes mais pas sur les deux autres ou qu'y en a un comme 950 qu'on retrouve seulement sur une ligne et puis qu'il y en a un comme 207 sur deux lignes mais la 3 et la 9. » (classe faible)

L'enseignant reprend le détail du tableau, dans la classe faible alors qu'il ne s'intéresse qu'aux nombres qui vont faire le lien avec l'exercice suivant dans l'autre classe.

On retrouve tout au long du déroulement, de manière constante que l'enseignant dit plus de choses dans la classe faible. Il répète, redit la tâche à résoudre, il donne tous les exemples, multiplie les questions/réponses, questionne tous les élèves. Au fur et à mesure de la séance, il restitue systématiquement une histoire du travail fait en classe plus ou moins en relation avec les mathématiques abordées pour enrôler les élèves. Cette circulation du savoir différente peut engendrer des activités possibles éventuellement différentes : tout est dit aux élèves. De plus enrôler tout le monde et structurer le travail, récapituler de manière détaillée prend du temps dans la classe faible. Certaines phases du déroulement sont allongées et, par suite, d'autres abrégées.

On revient maintenant à la tâche précédente, le remplissage du tableau

Un déplacement de la tâche qui peut la réduire, une banalisation du vocabulaire utilisé

– Un déplacement de la tâche dans la classe faible peut la réduire

Ben S qui a envie de parler va venir s'occuper des 4 premiers… alors des 5 premiers, voilà, vous mettez le son aussi, d'accord ? »» (classe forte)

Donc vous nous remplissez le tableau et vous nous expliquez pourquoi. Pendant ce temps là je vérifie comment c'est fait. Bon alors quelqu'un va venir me remplir le tableau pour les uns 2, 3, 4, 5 premiers nombres, jusqu'à 48. Et quand vous avez mis un nombre quelque part dans le tableau ou à plusieurs endroits, vous le barrez, d'accord ? Alors en revanche pendant que K va nous remplir ça et bien je circule pour voir comment l'exercice est fait dans vos cahiers d'exercices. » » (classe faible)

Dans cet extrait on constate que l'enseignant introduit une tâche matérielle sans rapport avec la résolution de la tâche mathématique. Ce peut être dans un souci de simplifier la tâche des élèves mais ça peut aussi brouiller leur travail, ce qui a été le cas dans la séance analysée.

– Le vocabulaire est quelquefois peu mathématique

Un bilan de l'exercice plus général, plus mathématisé et plus partagé avec les élèves est fait dans l'une des classes alors que dans l'autre l'enseignant utilise un vocabulaire peu mathématique

> *« Bref on se rend compte que quand on donne un nombre on peut pas savoir, savoir avant d'essayer, ce qui va se passer. Y en a pour lesquels ça va marcher, y en a pour lesquels ça va pas marcher et c'est pas parce que ça marche pour 2 que ça marche pour 3. » (classe faible).*

On ne retrouve rien de tel dans l'autre classe.

L'enseignant modifie souvent les tâches qu'il propose aux élèves (déplacement, découpage dans la classe faible ou au contraire ajout dans l'autre) et simplifie le vocabulaire qu'il met en oeuvre avec des commentaires plus ou moins mathématisés dans la classe faible. Cette circulation du savoir peut être renforcée par une certaine anticipation des difficultés des élèves qui semble justifiée par les erreurs effectives commises. Cependant les sociologues soulignent les dangers d'une simplification systématique qui limiterait les élèves à l'exécution d'une tâche matérielle au lieu de la résolution d'une tâche mathématique.

Un appui sur le travail des élèves différent selon leurs réactions

Des réactions d'élèves différentes « nécessitent» par exemple une correction plus ou moins longue et détaillée. Dans la classe faible, pour la tâche précédente, l'enseignant doit expliciter une correction complète avec justification détaillée du remplissage du tableau, pour le premier exercice car il n'a pas été réussi. La correction prend donc beaucoup de temps.

Donnons un deuxième exemple sur un exercice proposé plus tard dans la séance. Il s'agit d'effectuer des divisions et de les poursuivre après la virgule jusqu'à ce que la division s'arrête ou jusqu'à ce que vous deviniez la suite.

Dans la classe forte le professeur peut s'appuyer sur une élève Marjorie pour exposer la procédure de division d'un nombre à trois chiffres ici 118 par un nombre à deux chiffres, 66.

> *« Alors l'idée de Marjorie c'est de dire en 118 combien de fois 66 ou alors en 11 combien de fois 6 : ça va nous aider pour nous donner un ordre de grandeur du chiffre du quotient. »*

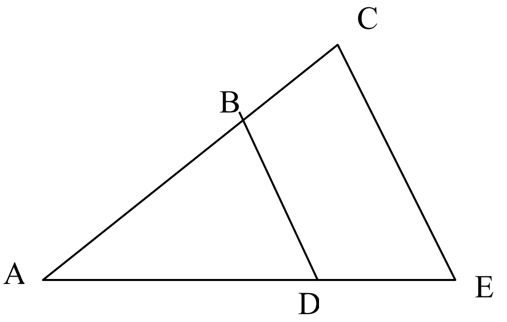
Il n'y a pas de Marjorie dans la classe faible et c'est l'enseignant qui expose cette procédure.

Nous avons comparé dans un premier temps un même enseignant dans deux classes différentes sur des contenus identiques et des déroulements analogues et non avons pu mettre en évidence que la circulation du savoir n'était pas la même. Nous allons maintenant comparer deux enseignants de troisième.

2. Deuxième exemple : deux classes de troisième, deux enseignants l'un en ZEP, l'autre en non ZEP

Les deux enseignants proposent aux élèves un exercice de géométrie demandant l'utilisation du théorème de Thalès et mélangeant les cadres algébrique et géométrique (introduction de x pour une longueur), dans un cotexte global analogue.

Énoncé de l’exercice proposé par l’enseignant de ZEP

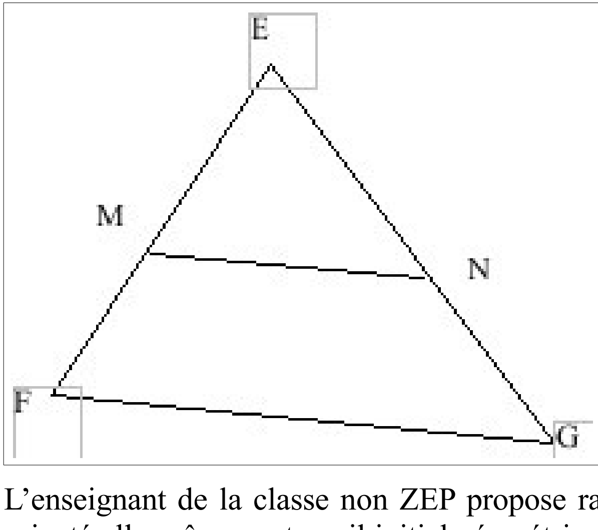
	Le point B appartient au segment [AC], le point D au segment [AE] et les droites (BD) et (CE) sont parallèles. Les longueurs sont exprimées en centimètres. On donne AB=x ; BC=4,5 ; CE=8 et BD=5 Calculer x.

Le premier enseignant en classe de ZEP pour enrôler et motiver les élèves ponctue leur travail initial, en autonomie, qui dure 12 min, de différentes remarques avant de donner une aide à fonction procédurale (utiliser le théorème de Thalès). On se rend compte qu’il ne s’agit que d’engager tous les élèves dans un travail d’abord géométrique puis algébrique, choix qui n’est pas immédiat pour tous. La possibilité d’émergence et d’interprétation des difficultés des élèves est favorisée.

Voilà quelques phrases de son discours :

> *Vous avez le droit à tout ce que vous voulez du moment que ça marche …*
> *Par élimination vous aurez pas tant de choix que ça …*
> *Qu’est ce que ça ça vous donne, comme point de départ ? Dites vous si j’avais pas x, qu’est ce que je ferais ?*
> *….*
> *Pour le moment y deux points de départ différents y ceux qui sont partis sur une équation directement et y a ceux qui sont partis sur la géométrie …*
> *….*
> *Au niveau géométrique, vous êtes partis sur quel théorème ? …*
> *Voilà parce qu’il y a des droites parallèles, donc on part sur Thalès ça paraît naturel hein. Et après vous faites ce que vous pouvez mais en attendant y a Thalès*

Énoncé proposé par l’enseignant de la classe non ZEP

	EFG est un triangle tel que EF = 5, EG = 7, FG = 9 (l’unité est le cm). On prend un point M sur le segment [EF] et on pose EM = x. Un point N est sur le segment [EG] et tel que les droites (MN) et (FG) sont parallèles. Exprimer EN et MN en fonction de x.

L’enseignant de la classe non ZEP propose rapidement la recherche de la stratégie en ayant orienté elle-même un travail initial géométrique (figure). Il les familiarise, par des questions à l’intrusion du cadre algébrique dans un exercice de géométrie. Il donne de plus une place à l’oral collectif. Ainsi certains d’élèves peuvent démarrer au bout de 5 min 30 même s’ils n’ont pas été associés à la recherche de la stratégie.

Voici quelques phrases prononcées par l'enseignant :

Bon alors ceci dit vous faites une figure, donc je répète que vous pouvez la faire à main levée, enfin à main levée ou avec votre règle…,
Donc la situation est assez banale, hein, vu tout ce que l'on a fait, quelle est la seule nouveauté Bertrand ?
…
Alors avant de démarrer, qui est-ce qui me dit comment on va procéder ?
Le début me semble sans tellement de surprise..
…
Attends tu me dis la grande idée, tu vas rédiger convenablement sur le cahier.
…
Voilà on va appliquer le théorème de Thalès parce qu'on évidemment on a des droites ?... Des droites parallèles. Alors la seule chose qui va être un petit peu différente de d'habitude, c'est que…
Y aura x. Bon alors vous démarrez, allez-y

Quelles différences dans la circulation du savoir avons-nous relevées dans ces deux séances ?

Des aides différentes amenant des activités diversifiées

On vient de voir que l'enseignant fournit une aide à fonction procédurale qui intervient au bout de 5 min 30 dans la classe non ZEP et après 12 min en ZEP.

Plus généralement, dans la classe ZEP (celle-ci et d'autres), le professeur attend longtemps avant de donner des aides permettant de démarrer. Tout se passe comme si il voulait que ces aides s'adressent à tous les élèves ayant tous travaillé. De ce fait, le temps qui reste pour un travail productif est minoré d'autant pour beaucoup. Les corrections sont données très rapidement. Peut-on faire autrement ?

Dans l'autre classe, les aides à fonction procédurale sont données rapidement laissant du temps avant la correction. Elles concernent des élèves qui de ce fait développerons des activités peut être *a minima* mais leur permettant de s'intégrer assez vite dans le travail.

La circulation du savoir organisée en ZEP par l'enseignant ménage beaucoup de temps pour un travail non aidé et peu de temps au travail entre la donnée de l'aide et la correction.

Dans l'autre cas, certains élèves ne sont pas associés à la recherche de la stratégie mais tous bénéficient d'un vrai temps de travail une fois l'aide donnée.

3. En guise de conclusion

On constate que dans les deux classes faibles l'adaptation de l'enseignant n'est pas la même, et qu'elle diffère de ce qui est proposé aux élèves des deux autres classes, notamment au niveau de choix fins (circulation du savoir) ; les activités mathématiques des élèves diffèrent en conséquence.

Retour sur la méthodologie

Ces exemples étant donnés, revenons rapidement sur la méthodologie correspondante (Chappet- Pariès et al. 2009, Chappet-Pariès 2009).

A partir des transcriptions et de l'analyse *a priori* des tâches nous faisons une première analyse des activités possibles des élèves grâce à la chronologie et au repérage du travail des élèves sur chaque tâche. Puis, pour caractériser systématiquement la circulation du savoir dans la classe, nous avons déterminé un certain nombre d'indicateurs s'appliquant au discours de l'enseignant (transcrit) en relation avec ce qui peut influencer les activités des élèves (enrôlement, maintien dans le travail, repérage, aides et exploitation du travail, cohérence et suivi du projet…).

Par exemple, nous identifions dans le discours de l'enseignant ce qui peut aider les élèves soit à démarrer la résolution d'un exercice (fonction procédurale de l'aide) soit ce qui peut transformer leur travail en connaissance (fonction constructive de l'aide). Nous notons les phrases qui mutualisent, les phrases où l'enseignant donne des éléments de structuration, ou se place au niveau méta, les interprétations.

Il peut manquer certains indicateurs, liés au vocabulaire, à la logique élémentaire.

Comme à chaque fois qu'il y a codage, certaines décisions sont prises par le chercheur dans des cas où plusieurs interprétations se présentent, d'autant plus qu'il peut y avoir une incertitude. Car, bien entendu, cela dépend aussi des élèves. L'indication d'utiliser le théorème de Thalès dans la classe non ZEP peut avoir une portée constructive pour les élèves ayant déjà trouvé la stratégie ; les indications qui servent aux autres élèves pour appliquer le théorème leur permettent d'envisager la généralisation. Pour les autres élèves, on ne peut pas savoir si la portée de cette aide est seulement procédurale. Ainsi il reste à apprécier davantage les relations entre les activités a minima, a maxima, les aides de l'enseignant, peut-être en précisant ce qui est dans les têtes au moment où tout cela a lieu, en se référant au modèle de la Zone Proximale de Développement…

Quoi qu'il en soit, on vérifie que ces analyses ne peuvent être faites sans des analyses préalables de la tâche et des caractéristiques plus globales du déroulement (chronologie, découpage des tâches…).

III Quelques exemples d'analyse des relations entre pratiques enseignantes et apprentissages des élèves à partir de leurs productions. Méthodologie et résultats

Anne Dumail et Julie Horoks

L'étude présentée ici propose l'analyse de trois séries d'observations réalisées dans des classes de 3ème et 2nde, avec pour objectif de mesurer la portée de certains choix de l'enseignant en classe sur les apprentissages de ses élèves. En particulier, nous nous demandons si certains modes de travail (magistral ou individuel, en classe ou à la maison, avec ou sans intervention de l'enseignant), compte tenu des tâches proposées, sont bénéfiques pour tous les élèves de la même façon. Cependant, nous n'essayons pas de déterminer ici des pratiques "idéales" en terme d'efficacité par rapport aux apprentissages : nous essayons de tenir compte en effet des contraintes du métier pour interpréter les choix faits par les enseignants et leur portée sur les apprentissages des élèves, y compris de manière différenciée suivant leur niveau.

1. Méthodologie particulière

Partant de l'hypothèse que les apprentissages des élèves se font, au moins en partie, par leurs activités en classe, nous essayons de déterminer quelles ont pu être les activités des élèves sur une notion donnée (la racine carrée en classe de 3ème, les triangles semblables et la trigonométrie en classe de 2nde), et pour cela nous nous intéressons aux tâches proposées par l'enseignant et aux déroulements associés à la résolution de ces tâches.

Reconstitution des activités possibles des élèves sur une notion donnée

Nous avons choisi d'analyser l'ensemble de ce qui a été proposé en classe au cours d'un chapitre de mathématiques, et d'évaluer par la suite des apprentissages des élèves qui pourraient en découler, à l'issue du chapitre, par l'intermédiaire des contrôles posés en classe sur cette notion. Nous considérons qu'une réussite au contrôle est un témoin des apprentissages des élèves, mais nous savons que ce n'est qu'un témoin partiel, en particulier en ce qui concerne la pérennité des apprentissages observés [2].

Dans les trois études la démarche est la même : nous observons l'intégralité des séances portant sur la notion choisie, et en analysons l'ensemble des tâches au sein desquelles cette notion est travaillée pendant le chapitre. Cette analyse dépend des contenus, mais aussi des déroulements associés (et en particulier du travail des élèves et du discours de l'enseignant) qui nous permettent de déterminer toutes les activités possibles des élèves mettant en jeu cette notion – a minima et a maxima suivant l'implication des élèves.

En effet, une analyse des contenus des tâches mathématiques à elle seule ne nous permet pas de reconstituer ce qui est resté réellement à la charge des élèves lors de la résolution de chacune des tâches en classe compte tenu des interventions de l'enseignant. Dans le tableau 1 par exemple, nous pouvons voir à quel point les tâches sur lesquelles ont travaillé les élèves sont modifiées voire réduites par les diverses interventions de l'enseignant.

0'30	Introduction d'intermédiaires (angles égaux), Mélange avec autres connaissances (angles inscrits)
0'30	Indication: associer les angles homologues
0'30	Reconnaissance des hypothèses (homologues) Mélange avec une autre connaissance
0'30	Indication : Mélange avec une autre connaissance
1'30	Un élève donne une paire d'angles homologues, et l'enseignant en donne une deuxième
0'30	Un élève donne le rappel de cours
1'30	Travail prescrit par l'enseignant sur la connaissance ancienne
4'	Un élève donne la réponse exacte, commentée par l'enseignant

Interventions de l'enseignant

Complexité de ce qui reste à faire par les élèves

clair = simple, isolée
foncé = complexe

Tableau 1 : reconstitution des activités possibles des élèves (triangles semblables)

Par exemple, on peut se demander si, lorsque l'enseignant fournit aux élèves une aide avant ou au début de la réalisation d'une tâche, cela ne va pas empêcher certaines élèves par la suite de réussir à résoudre seuls cette même tâche. Nous pouvons supposer aussi que ces choix n'auront pas le même impact sur les apprentissages, en fonction du niveau des élèves.

2 Nous ne nous sommes pas toujours donné ici les moyens de traiter la question de la durée dans les apprentissages : nous avons tenu compte de la durée uniquement dans le cas de la racine carrée, pour évaluer les apprentissages au fur et à mesure des séances et à plus long terme.

Analyse des résultats des élèves aux contrôles pour approcher leurs apprentissages

A la suite de l'analyse de l'ensemble des séances, une comparaison des tâches données lors du contrôle avec le travail précédemment effectué en classe, ainsi qu'une analyse statistique des résultats des élèves à ces contrôles, nous permettent de questionner l'influence de certains choix de l'enseignant sur la réussite des élèves. Cette comparaison, et l'interprétation des résultats des élèves, peut cependant s'avérer problématique, d'une part en fonction du niveau général de la classe, et d'autre part, étant donné l'écart plus ou moins grand entre la complexité de ce qui a été fait en classe et celle des tâches du contrôle (l'énoncé de celui-ci ayant été composé par l'enseignant, et non pas le chercheur). Comme on peut le voir dans le Tableau 2, dans lequel nous avons comparé la complexité des tâches réalisées en classe et en contrôle chez trois enseignants. Comment interpréter les résultats moins bons de la classe de Mme B, qui est de niveau plus faible que les deux autres classes, et dans laquelle les exercices du contrôles sont relativement complexes par rapport aux exercices traités en classe ? De même, les résultats de la classe de Mme F doivent être rapportés aussi à la simplicité des tâches posées lors du contrôle.

	Mme B	**Mme P**	**Mme F**
niveau de la classe	faible	moyen	fort
tâches à la charge des élèves en classe	simples	complexes	simples
tâche du contrôle	complexes	complexes	simples
résultats	mauvais	bons	bons

Tableau 2 : complexité des tâches en classe et en contrôle (triangles semblables)

Aussi il nous a fallu trouver des points d'appui, pour réaliser cette comparaison malgré ces différences. Nous avons choisi de regarder dans chaque cas les exercices les mieux (ou moins bien réussis) par les élèves lors du contrôle, et de les mettre en regard des activités préalables en classe. Nous nous sommes aussi posé la question de la différenciation suivant le niveau des élèves, en considérant lorsque cela était possible leur réussite suivant leur niveau en mathématiques, et la stabilité de ce niveau au cours du temps.

Les données recueillies dans chaque cas

Dans les trois analyses, des vidéos ont été réalisées pour chacune des séances du chapitre, chez des enseignants différents, qui nous ont fourni le texte des cours et des exercices proposés ainsi que des informations sur le niveau des élèves.

– La taille de ce qui est regardé

Le nombre d'enseignants filmés n'est pas le même dans chacune des études :

- Dans l'étude sur l'enseignement des triangles semblables en 2nde, nous avons comparé trois classes[3] dans des établissements différents et avec des élèves de niveaux différents. Un seul contrôle a été proposé dans chacune des classes.
- Dans le cas de la racine carrée en 3ème, nous n'avons filmé qu'un seul enseignant, mais avons relevé trois évaluations des élèves, au fur et à mesure du chapitre.
- Enfin, pour la trigonométrie, nous avons filmé un enseignant, et avons relevé le seul contrôle proposé en fin de chapitre.

En dépit de ces disparités (ou grâce à elles) nous avons pu mettre en lumière des influences comparables de certains choix des enseignants sur les résultats des élèves.

3 Deux autres enseignants ont été observés par la suite, et les résultats de ces deux dernières analyses sont venus confirmer nos premières constatations.

– Des éléments propres aux mathématiques observées

L'analyse de la notion mathématique, mais aussi des programmes scolaires s'y rapportant, nous permet de réfléchir à ce qui peut être proposé en classe par les enseignants, et de quelle façon. Cela nous permet en particulier de remarquer des différences entre les choix faits par les enseignants observés, en terme de contenus, mais aussi des "manques" dans ce qui est proposé, par rapport au possible.

Certains éléments sont communs aux trois notions choisies, en particulier le mélange avec des connaissances plus anciennes.

- Le chapitre des triangles semblables présente l'occasion de réviser la géométrie du collège (les propriétés des configurations de base, les théorèmes de Thalès et Pythagore, les isométries), d'où un mélange, dans les exercices proposés, de la notion nouvelle avec d'autres plus anciennes.
- Dans le cas de la racine carrée, on trouve un mélange avec le travail sur les écritures littérales, déjà abordé précédemment au collège.
- En ce qui concerne la trigonométrie, des connaissances sur les nombres sont aussi en jeu, de même que des connaissances plus anciennes sur la trigonométrie du triangle rectangle.

Nous tiendrons compte de ces mélanges pour expliquer les erreurs des élèves, lorsqu'elles sont dues à l'ancien plus qu'au nouveau, et pour analyser la prise en compte de ce mélange par les enseignants.

– Des éléments spécifiques à chaque notion

- Une analyse des tâches des manuels sur les triangles semblables nous montre que le repérage des sommets homologues de ces triangles est une étape incontournable dans la plupart des exercices, pourtant rien n'est écrit à ce sujet dans les programmes, et pour cause : les mathématiques nécessaires pour justifier ou automatiser ce repérage ne sont pas disponibles[4] en classe de 2nde. Nous regarderons donc particulièrement comment la gestion de cette difficulté par l'enseignant est faite en classe. Cela nous amène aussi à prendre en compte la configuration géométrique dans nos analyses de tâches, puisqu'elle peut rendre plus complexe ce repérage, en particulier lorsque les deux triangles sont emboîtés l'un dans l'autre, et non, par exemple, en configuration de Thalès.

- Dans le cas de la racine carrée en troisième, les nombres s'écrivant avec des radicaux n'ont pas de statut précis : on fait travailler les élèves avec ces nombres alors même que rien ne permet à ce niveau de justifier ni leur existence, ni *a fortiori* les opérations sur eux. Certes, le chapitre intitulé « calcul avec les radicaux » prévoit de faire travailler les élèves dans la continuité, en prolongeant les règles de calcul connues jusqu'alors à ces « nouveaux nombres », mais ces derniers manquent de statut, on ne peut pas les situer parmi les nombres déjà connus puisqu'aucune formalisation sur les ensembles de nombres n'est prévue au collège. Nous verrons, qu'en pratique, les élèves calculent avec les radicaux « presque comme avec les x », dans un jeu permanent mais implicite entre cadre numérique et cadre algébrique. La question légitime que peut alors se poser un enseignant concerne la part à accorder au travail du sens par rapport au travail de la technique. Est-ce préjudiciable à la construction des connaissances mathématiques que les élèves calculent avec les racines carrées sans avoir vraiment compris qui elles sont ? Compte tenu du temps imparti, des orientations différentes envisagées par les élèves d'une même classe, des sujets proposés au brevet des collèges, quel « niveau de conceptualisation » sur la notion « racine carrée » est-il raisonnable et souhaitable d'atteindre en fin de collège ? Le peu de réponses apportées par les textes officiels laissent au professeur une liberté très grande dans l'organisation de

4 Conformément aux programmes de 2002.

son enseignement sur ce thème (Bronner 1997). Or, dans le cadre théorique choisi, les variables « tâches/déroulements » retenues pour reconstituer les activités mathématiques des élèves dépendent justement des choix de l'enseignant.

- L'enseignement de la trigonométrie en 2nde nous paraît comporter une difficulté dans la gestion des différents registres impliqués : la géométrie du triangle rectangle, le cercle trigonométrique, les courbes de fonctions trigonométriques. Il nous semble que le passage d'un registre à l'autre n'est pas évident, et nous nous demandons donc comment ce passage est pris en charge par l'enseignant en classe, et combien de ces registres sont mobilisés par les élèves lors de la réalisation d'une tâche lors du contrôle.

Nous allons illustrer par trois exemples comment nos outils nous permettent de rapprocher les apprentissages des élèves de ce qui a été proposé par l'enseignant en classe.

2. Trois exemples d'application de la méthodologie et premiers résultats

Le cas des triangles semblables : les élèves apprennent... ce qu'on leur apprend

Nous analysons un exercice tiré de l'un des contrôles relevés dans les classes, et faisons la comparaison avec l'ensemble de ce qui a été proposé en classe auparavant. Nous nous intéressons ici à l'énoncé de l'exercice de contrôle suivant, donné dans l'une des trois classes observées :

> On considère un cercle (C) et MNP un triangle inscrit dans ce cercle. La bissectrice de l'angle NMP coupe [NP] en D et (C) en E.
> 1) Démontrer que le triangle MNE et le triangle END sont semblables.
> 2) En déduire que $EN^2 = EM \times ED$

Pour résoudre cet exercice, il faut tout d'abord démontrer que les deux triangles ont deux angles égaux, à l'aide des angles opposés par le sommet d'une part, et du théorème de l'angle inscrit d'autre part. D'après la propriété D (deux triangles ayant deux angles respectivement égaux sont semblables), les deux triangles sont donc semblables. Par la propriété P (deux triangles semblables ont des côtés proportionnels), on déduit que les côtés des triangles sont proportionnels, et après repérage des sommets homologues, on obtient MP / BP = PA / PN, et l'égalité recherchée.

Ce n'est pas une tâche simple, puisqu'elle implique plusieurs connaissances mathématiques et nécessite l'introduction d'intermédiaires. L'exercice fait appel aux propriétés D et P, et ce sont donc parmi les tâches mettant en jeu ces deux propriétés que nous allons chercher celles qui ressemblent le plus à l'exercice posé lors du contrôle.

Grâce à la comparaison de cet exercice de contrôle avec tous les exercices donnés au cours de ce chapitre, mettant en jeu successivement les connaissances nouvelles D et P, nous pouvons voir (cf. *Tableau 3*) que trois exercices ont été proposés mettant en jeu ces deux propriétés, et que parmi eux, un exercice semble se rapprocher plus que les autres de l'exercice du contrôle, en regard des variables d'analyse des tâches que nous avons retenues. L'exercice 9 porte en effet sur les mêmes connaissances mathématiques, associées aux mêmes connaissances anciennes. Dans les deux cas, la configuration travaillée est un cercle, mais pour l'exercice fait en classe, la configuration est un peu moins complexe, car les triangles semblables ne sont pas emboités. Cet exercice a donc pu préparer les élèves à cette question, mais bien entendu, tout ce qui a été donné auparavant a pu préparer les élèves au contrôle.

	Configuration	Connaissances		NMF	Type de travail en classe	Types d'aides
		anciennes	nouvelle			
Ex. du contrôle	Cercle, triangles emboîtés	Angle inscrit	D	Calcul d'intermédiaires		
		Algèbre sans x	P	Reconnaissance des modalités d'application		
Ex. 7	2 triangles	Égalité d'angles	D	Reconnaissance des modalités d'application	Pas de temps de recherche	Sur méthode et ancien
		Algèbre sans x	P	Reconnaissance des modalités d'application		
Ex. 9	Cercle	Angle inscrit	D	Reconnaissance des modalités d'application	Module Long temps de recherche	Individuelles
		Algèbre sans x	P	Calcul d'intermédiaires		
Ex. 11	Cercle	Triangle rectangle	D	Introduction d'étapes	Module Long temps de recherche	Individuelles
		Algèbre	P	Reconnaissance des modalités d'application		

Tableau 3 : comparaison des tâches en classe et en contrôle (triangles semblables)

D'après les résultats des élèves pour cet exercice, nous pouvons voir que la seconde question (l'application de P) a été beaucoup mieux réussie que la première. Cette deuxième question avait été préparée par une adaptation[5] plus difficile que celle attendue au contrôle, dans le cadre de l'exercice 9. Il semblerait ici que la plupart des élèves ne réussissent pas une application plus complexe lors du contrôle, s'ils n'ont pas été amenés à travailler auparavant en classe cette adaptation de leurs connaissances avec un niveau de fonctionnement égal ou supérieur. Dans le cas de ces deux questions tirées du contrôle, les élèves avaient bénéficié d'un long temps de recherche individuelle en classe, ce qui, pour réussir la première question, semble globalement n'avoir été bénéfique qu'à une minorité des élèves[6].

D'autre part, si on regarde les procédures des élèves pour résoudre la deuxième question sans avoir traité la première, on constate que beaucoup n'ont pas su repérer les sommets homologues des triangles semblables, et qu'ils sont alors souvent partis du résultat à obtenir (le rapport des longueurs) pour réaliser cette association.

contrôle	question 1	question 2
exercices similaires en classe	3 exercices	3 exercices
configuration	la même qu'en classe	la même qu'en classe
notions anciennes	les mêmes qu'en classe	les mêmes qu'en classe
notion nouvelle	identique application de D	identique application de P
NMF contrôle / classe	**plus difficile**	**plus facile**
type de travail	long temps de recherche	long temps de recherche
application correcte / abordé	10 / 25	23 / 25

Tableau 4 : résultats des élèves à l'exercice 3 du contrôle (triangles semblables)

5 Nous parlons d'adaptation lorsque la connaissance du cours à appliquer nécessite au préalable une reconnaissance des modalités d'application, voire un calcul d'intermédiaires, l'introduction d'étapes dans la démarche, ou encore la nécessité de faire des choix ou de changer de registre. Nous considérons différents niveaux de mise en fonctionnement de cette connaissance (notés NMF dans les tableaux), classés ainsi suivant un ordre de difficulté croissant selon nous, et qui nous permettent de décrire la complexité de la tâche considérée.

6 Ici un partage de la classe en deux groupes de niveau (à partir des informations données par l'enseignant) nous permet de constater que les seuls élèves ayant réussi cette première question se trouvent dans le groupe des meilleurs élèves.

Cette analyse et la mise en relation avec les activités en classe ont été réalisées pour chaque tâche de chacun des contrôles, et c'est la comparaison des résultats obtenus dans les trois classes, parallèlement à l'analyse des déroulements des exercices qui avaient pu préparer les élèves à ces contrôles, qui nous a permis de mettre en lumière des liens entre pratiques et apprentissages.

Le cas de la racine carrée : des pratiques plus ou moins différenciatrices

– Une classification des tâches pour faciliter l'analyse de ce qui s'est passé en classe.

Nous avons filmé un enseignant de 3ème dans sa classe, et relevé les trois évaluations des élèves portant (entre autre) sur la racine carrée : une interrogation en cours de chapitre, un contrôle de fin de chapitre, et un brevet blanc après la fin du chapitre. Le nombre total de tâches proposées dans le chapitre sur la racine est carrée est beaucoup plus important que dans l'étude précédente, d'où notre choix d'isoler 3 tâches particulières pour mettre en valeur leur fréquence en classe et en évaluation, regarder l'évolution des résultats des élèves sur ce type de tâches à plus ou moins long terme, en distinguant les caractères outil/objet de la notion dans chaque tâche.

Nous nous intéressons ici pour illustrer notre démarche à la *tâche 1* : *"mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible"*. Nous analysons la présence de cette tâche dans tous les énoncés proposés. La *tâche 1* est presque toujours prescrite uniquement dans le cadre numérique :

- en classe : la *tâche 1* est toujours objet de l'exercice dans lequel elle intervient. On la retrouve au total dans 11 exercices pour 85 écritures à transformer, dont 72 s'écrivent sous la forme $a\sqrt{b}$. Sur les 31 expressions du même type (somme algébrique de radicaux) transformées en classe, 25 donnent un résultat sous la forme ab, 2 donnent un résultat littéral qui s'écrit sans radical, 4 donnent des résultats de formes différentes : $a+bc$, $ab+cd$ ou $ab+cd+e$. L'enseignante renvoie systématiquement pour cette tâche à la méthode vue dans la leçon (avec une présentation en 2 colonnes pour décomposer le radicande en nombres premiers) mais jamais justifiée. A plusieurs reprises, elle encourage cette méthode car elle permet « à coup sur d'arriver au résultat » et déconseille de « tenter d'autres décompositions ».
- en évaluation : la *tâche 1* est parfois objet de l'exercice (dans l'exercice 2 de l'interrogation, dans l'exercice 1 du contrôle et dans l'exercice 1 du brevet blanc), parfois outil pour résoudre l'exercice (dans les exercices 1,3, 4 et 5 de l'interrogation).

En plus des variables des adaptations décrites dans le premier exemple, nous avons complété notre comparaison en prenant en compte les différentes formes de la consigne *(*« calculer », « transformer », « écrire le plus simplement possible », « écrire sans radical », « mettre sous la forme de… »), celles de l'expression donnée dans la consigne, les transformations à réaliser, et enfin la forme et la nature du résultat obtenu.

– Pour interpréter les résultats : prise en compte du niveau des élèves

Nous avons réalisé une classification ponctuelle des élèves, établie à partir d'une observation initiale : les réponses, dans nos 3 paquets de copies, aux 17 questions portant sur les racines carrées : 13 élèves ont donné entre 9 et 17 bonnes réponses (groupe B, les "bons élèves"), 13 élèves ont donné entre 0 et 8 bonnes réponses (groupe A, les "moins bons élèves"). Cette classification nous permet de relier les résultats des élèves aux pratiques de l'enseignant, suivant leur niveau, mais aussi de regarder la stabilité de ce niveau, sur chaque type de tâche, tout au long du chapitre.

– Un exemple d'analyse détaillée pour un exercice d'évaluation comportant la tâche 1

La *tâche 1* était un outil pour résoudre l'exercice 4 de l'interrogation. L’expression donnée dans la consigne est presque semblable à celles transformées en classe avec la consigne « simplifier » ou « mettre sous la forme ab ». Les résultats des élèves, suivant leur niveau, sont consignés dans le *Tableau 5*.

Prouver que A est un nombre entier sachant que $A = \sqrt{8} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$.

A= ...

		groupe A (13 présents)	groupe B (13 présents)
exercice non abordé		1	5
exercice réussi		8	2
exercice avec des erreurs	essais justes non aboutis	2	3
	transformations avec erreur(s)	2	3

Tableau 5 : résultats des élèves à un exercice de l'interrogation portant sur la tâche 1

Cette expression ressemble à celles travaillées en classe, à un détail près : son premier terme « $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ ». C’est donc ce calcul-là que nous allons regarder en priorité sur les copies des élèves. Nous avons distingué deux stratégies possibles pour transformer le produit :
- S1 : utilisation de la propriété du produit de racines carrées: $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$
- S2 : utilisation de la racine carrée d’un produit et du produit des racines
$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{(4\times 2)} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \times (\sqrt{2})^2 = 2 \times 2 = 4$

En regardant le lien entre la stratégie employée et la réussite à cette question de l'interrogation (*Tableau 6*), nous constatons que globalement, les élèves du groupe A choisissent plutôt la stratégie S1 et ils réussissent, et ceux du groupe B choisissent plutôt la stratégie S2 et ils échouent.

	stratégie	groupe A	groupe B	nombre total d'élèves
élèves ayant réussi	S1	7	2	9
	S2	1	0	1
élèves ayant fait des essais justes non aboutis	S1	2	0	2
	S2	0	2	2
	indéterminée	0	1	1
élèves ayant transformé A avec des erreurs	S1	1	0	1
	S2	1	1	2
	indéterminée	0	2	2

Tableau 6 : lien entre stratégie et réussite à un exercice de l'interrogation

Il semble que le choix de la stratégie conditionne ici la réussite, avec cependant une restriction : ce sont les élèves du groupe A qui choisissent S1 mais réussissent-ils parce qu’ils ont choisi cette stratégie ou pour d’autres raisons qui les font appartenir à ce groupe ? (ce sont des « bons » élèves, qui ont répondu correctement à plus de la moitié des questions). Nous pouvons ainsi nous demander si, en ayant imposé la stratégie S2 à ces mêmes élèves, ils n’auraient pas encore réussi. Le choix de S1 ne serait alors ici que le signe d’une capacité d’anticipation, d’une « vision » des calculs plus simples à effectuer, d’une possibilité de se dégager des effets de contrat : les élèves du groupe A se rendraient tout de suite compte que « $8x2=16=4^2$ » tandis que ceux du groupe B resteraient dépendants des méthodes de transformation du type *tâche 1* (répétées de nombreuses fois en classe, et fortement suggérées comme étant la bonne méthode pour arriver au résultat) et cherchent avant tout à décomposer le radicande 8 en nombres premiers, comme dans la leçon.

Ainsi, dans cet exercice, le bénéfice des nombreuses transformations effectuées en classe n'est plus si évident : au contraire, les élèves doivent être capables de se détacher de ce qui a été fait en classe, d'oublier les règles du contrat implicite construit entre eux et leur professeur (« on décompose en premier le radicande », « on va obtenir un résultat sous la forme ab ») pour réussir. Et pour cela, les répétitions importantes de la même tâche, avec les mêmes niveaux de mises en fonctionnement en classe, peuvent devenir des handicaps.

Le cas de la trigonométrie : l'importance des liens faits par l'enseignant

Dans ce dernier exemple, nous analysons la prise en compte de plusieurs registres convoqués lors d'un ensemble de séances sur la trigonométrie en 2nde :
- la géométrie du triangle rectangle, vue en 3ème, dans laquelle sont introduits le cosinus et le sinus d'un angle
- le cercle trigonométrique, sur lequel on lit la valeur du cosinus et du sinus d'un angle, représenté par un point sur le cercle
- et les courbes de fonctions cosinus et sinus, généralement tracées dans un même repère.

Il nous semble en effet que les objets en question ici (les angles, leur sinus et leur cosinus) ont des représentations qui varient en fonction du registre choisi (cf. *Tableau 7*), et que cela peut entraîner des confusions pour les élèves.

	dans le triangle	dans le cercle	dans le graphique
angle	géométrique	point du cercle	abscisse
cosinus	rapport de deux longueurs	abscisse	ordonnée
sinus	rapport de deux longueurs	ordonnée	ordonnée

Tableau 7 : objets étudiés dans les différents registres.

Nous avons regardé comment, en classe, l'enseignant reliait les différents registres et constaté chez l'enseignant observé que ces registres étaient juxtaposés, dans le discours de l'enseignant et dans les tâches proposées, sans que le passage de l'un à l'autre soit jamais pris en charge par les élèves tout au long du chapitre.

Par la suite, lors du contrôle posé en fin de chapitre, nous regardons comment les élèves maîtrisent ces différents registres, et s'ils sont capables d'en mobiliser plusieurs, en fonction de leur pertinence pour répondre aux questions posées[7]. Nous constatons que seuls 7 élèves sur 33 mobilisent à la fois le registre du cercle trigonométrique et celui des courbes des deux fonctions, dans les exercices du contrôle[8]. Parmi ces 7 élèves, 5 sont des élèves dont le niveau en mathématiques est bon (et qui réussissent le contrôle), et un autre prend des cours particuliers en mathématiques.

7 Par exemple, lorsqu'on recherche l'ensemble des réels pour lesquels le cosinus prend une valeur donnée, le registre du cercle trigonométrique peut paraître plus approprié que celui des courbes de fonctions trigonométriques (qui sont plus longues et plus difficiles à tracer).

8 Dans le contrôle, le registre graphique était imposé par le 1er exercice où une partie des courbes était représentée, mais dans les exercices suivants, c'était le registre du cercle qui semblait plus efficace pour résoudre les problèmes posés.

3. *Résultats et discussion*

Nous déclinons les résultats obtenus à l'issue de ces trois études en termes d'effets [9].

Des effets de certains choix de contenu et de déroulement sur les réussites des élèves au(x) contrôle(s)

– *La répétition des tâches semble avoir un effet positif sur les résultats des élèves*

En comparant les contrôles sur les triangles semblables dans les trois classes considérées, nous constatons que dans chacune des trois classes l'exercice de contrôle le mieux réussi est associé à une préparation préalable en classe, à travers des applications plus difficiles ou de même difficulté que celle du contrôle, et parfois même à travers une répétition d'applications similaires. Dans les trois cas, il s'agissait d'un exercice nécessitant l'application de D qui est la propriété qui a été travaillée le plus souvent dans les classes. C'est aussi celle que l'on retrouve le plus fréquemment dans les exercices des manuels. Enfin, dans les trois cas, l'exercice en classe qui se rapproche le plus de celui du contrôle a été réalisé dans des conditions où l'élève peut bénéficier d'un certain temps de travail individuel (travail en module ou à la maison).

Il semble donc que les élèves sont capables de réaliser seuls certaines tâches lorsqu'ils y ont été réellement confrontés au préalable, et qu'ils ont eu à les travailler par eux-mêmes, alors qu'elles étaient associées aux mêmes connaissances et dans des configurations similaires à celles du contrôle. Nous remarquons par ailleurs que lorsque le travail préalable en classe n'est pas aussi difficile que celui qui est attendu au contrôle, les élèves échouent au contrôle de manière significative, et ce quelle que soit la forme de travail adoptée en classe. Cela semblerait indiquer que les connaissances des élèves ne sont pas transférables à des niveaux de mise en fonctionnement plus élevés.

– *Mais dans certains cas, la répétition des tâches semble avoir un effet bloquant sur les procédures des élèves !*

Nous pouvons faire l’hypothèse dans le cas de la racine carrée, que la répétition d’une même tâche en classe accroit encore la réussite lors des évaluations, toujours à la condition que la tâche proposée nécessite les mêmes adaptations. Dans le cas contraire, si les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances varient, avoir répété la tâche à de nombreuses reprises n’est d’aucun recours pour surmonter les difficultés posées par les nouvelles adaptations nécessaires. Et il arrive même que l’effet inverse se produise et que les répétitions, en plus d’être inefficaces, soient nuisibles à la réussite de certains exercices. Ainsi, certaines productions d’élèves laissent penser que la répétition de la tâche 1 en classe a pu être un obstacle à la réussite en devoir. Les élèves, conditionnés par le contrat entre eux et l’enseignante, contrat implicite mais très fort qui demande d’écrire toute expression avec des radicaux sous la forme ab, sont désarçonnés quand cette transformation s’avère impossible. Ils ne parviennent pas à se détacher des habitudes prises et leurs tentatives de décomposition sous les radicaux (avec la présentation en deux colonnes vue dans la leçon associée) attestent de leur volonté de se ramener au cas qu’ils ont tant de fois traité.

– *Les interventions de l'enseignant "réduisent" souvent l'autonomie des élèves et donc les activités possibles*

9 Quitte à nous répéter ! Si l'étude des effets des répétitions fréquentes de tâches nous apporte des résultats en lien direct avec les apprentissages des élèves, une analyse plus poussée montre aussi des effets différenciateurs et sur le plus long terme.

Dans le cas de la racine carrée, les interventions automatisent systématiquement les procédures des élèves. Ainsi, pour la tâche 1, l'enseignant renvoie toujours à la « technique » vue dans la leçon (jamais justifiée) car elle « permet à coup sûr d'arriver au résultat » et déconseille de « tenter d'autres décompositions », et nous avons vu que cela entraînait un échec à certaines questions des évaluations.

Dans le cas des triangles semblables, les exercices de contrôle qui ont posé plus de difficultés aux élèves portent sur des applications de propriétés différentes. Mais il s'agissait dans les trois cas de questions qui nécessitaient un repérage non trivial des homologues de la figure. Cette difficulté avérée pour les élèves n'est pas liée uniquement à l'organisation du travail en classe par le professeur, mais il s'agit tout de même d'un élément important de ses choix : nous constatons que les trois professeurs n'ont pas proposé de travail spécifique sur ce repérage, et qu'ils ont laissé peu d'autonomie aux élèves sur cette tâche en classe, en prenant rapidement en charge cette étape, à travers les énoncés ou déroulement choisis [10]. Cela semble avoir une influence négative sur la réussite à cette tâche de repérage par la suite. Dans ce cas, le manque d'initiative qui est laissé aux élèves peut s'expliquer à travers les programmes et le manque de mathématiques à proposer aux élèves pour installer une automatisation et une justification du repérage.

Des effets différenciateurs des pratiques suivant le niveau des élèves

– *Répétition des tâches : un travail trop cadré qui désavantage particulièrement les moins bons élèves*

Notre étude sur la racine carrée semble montrer que la répétition des tâches est très différenciatrice suivant le niveau des élèves. La répétition semble en effet faire obstacle surtout pour les élèves plus faibles. Dans les cas d'exercices d'évaluation où le niveau de mise en fonctionnement est plus élevé, et où la méthode répétée en classe s'avère inefficace, seuls quelques élèves du groupe A, cependant, en minorité, surmontent alors le réflexe de la méthode habituelle et réussissent. La majorité d'entre eux laissent leur réponse inachevée, réalisant le caractère impossible de leur démarche mais n'arrivant pas, la plupart du temps, à en envisager une autre. Les élèves du groupe B, eux, sont souvent amenés à écrire des assertions fausses : ils font davantage confiance pour valider leur réponse aux habitudes prises qu'aux mathématiques et « s'arrangent » pour parvenir à un résultat qui leur convienne. Tout se passe ainsi comme si, pour appartenir au groupe A et mieux encore réussir à adapter les connaissances différemment de ce qui a été fait auparavant, il fallait paradoxalement pouvoir « oublier » les méthodes apprises en classe, garder l'esprit ouvert aux initiatives, faire preuve d'une capacité d'anticipation des calculs. Or, ces conditions paraissent difficilement compatibles avec l'application systématique d'une démarche dont les étapes sont à l'avance figées et n'ont pas ou peu été justifiées.

– *Autonomie laissée aux élèves : un travail moins cadré qui avantage les bons élèves*

En ce qui concerne les triangles semblables, nous avons cherché ce qui caractérisait l'exercice de chacun des trois contrôles pour lequel les élèves avaient obtenu les résultats les moins homogènes dans chaque classe, c'est à dire ceux pour lesquels il y avait une différence notable entre les réponses des "bons" et des "mauvais" élèves, tels que nous les avions classés, à partir des appréciations données par les enseignants. Dans chaque cas, il s'agit d'un exercice qui a été préparé uniquement à travers des activités laissant une plus grande autonomie aux élèves : lors d'un travail à la maison, ou en classe, mais surtout sans intervention du professeur pen-

10 Dans certaines des classes observées, les enseignants vont jusqu'à donner les sommets des deux triangles dans le "bon ordre", pour contourner la difficulté du repérage. Les élèves de ces classes ne sont pas capables de prendre en charge cette tâche lors du contrôle lorsque les sommets sont donnés dans le désordre.

dant, ou après l'activité. Cela semblerait indiquer que le travail autonome des élèves n'est pas bénéfique de la même façon pour tous les élèves, et cela rejoint les résultats obtenus par Félix (2004).

Des effets des pratiques à plus ou moins long terme

Nous nous étions demandé dans l'étude sur la racine carrée quel était le rôle du facteur temps dans l'acquisition des connaissances, et nous étions donné les moyens de prendre en compte ce facteur en considérant plusieurs évaluations au cours du temps. Au regard de nos analyses, il n'y a pas d'évolution majeure sur le court, moyen ou long terme : ceux qui réussissaient/échouaient à court terme réussissent/échouent encore à moyen et à long terme.

Cependant, nous avons observé au cours de notre étude quelques phénomènes particuliers intéressants. Si les erreurs persistent, leurs causes évoluent, elles, au cours du temps : d'erreurs identifiées spécifiques dans la mise en fonctionnement des connaissances nouvelles à court terme, on passe à moyen et surtout à long terme, à une grande proportion d'abstention (ou, dans une moindre proportion, à des erreurs plus difficilement identifiables). Certains élèves n'essaient même plus : soit ils savent « en automate », soit ils ne savent pas. Bien que nous n'ayons pas accès à leurs brouillons, il semblerait que la phase de recherche soit très réduite voire inexistante. Or les interventions découragent les démarches du type « essais/erreurs », les initiatives permettant d'arriver plus vite ou de façon plus astucieuse au même résultat. Il semble raisonnable de faire alors l'hypothèse d'un lien entre l'automatisation systématique recherchée des tâches, reposant au moins autant sur la mémoire que sur une réelle compréhension des étapes, et l'évolution constatée à long terme vers un nombre croissant d'erreurs et de questions non abordées. Ainsi, pour la tâche 1, les élèves du groupe B progressent entre l'interrogation et le contrôle, très proche dans le temps de ce qui a été fait en classe, mais obtiennent de moins bons résultats lors du brevet blanc, alors que les adaptations y sont clairement plus simples.

Cela nous amène à nous poser une nouvelle question : si une connaissance semblait acquise à un moment donnée mais ne l'est plus deux mois plus tard, qu'a-t-on approché grâce au contrôle : les apprentissages ou les qualités de mémorisation à court terme des élèves ? Nous pouvons peut-être parler ici de « connaissances fragiles », de « pré-connaissances » ou encore d'« apprentissages transitoires » qu'il faudrait « transformer », pour qu'elles trouvent leur place, consolidées, dans un réseau plus large de connaissances.

Des effets du discours de l'enseignant en classe : l'importance des liens

– *liens entre plusieurs registres*

Dans le cas de la trigonométrie, la juxtaposition de plusieurs registres par l'enseignant sans explication ne semble pas permettre aux élèves de passer de façon autonome d'un registre à l'autre en contrôle. Cela peut être mis en relation avec la difficulté connue des élèves pour mélanger leurs connaissances et l'adoption au moins transitoire d'un seul domaine de travail privilégié, mais s'il est moins économique. Non seulement les explications de l'enseignant sont nécessaires, mais aussi faut-il sans doute suffisamment d'exercices où l'expérience du mélange peut être faite.

– *liens entre connaissances anciennes et nouvelles*

Nous avons examiné le rôle des connaissances anciennes dans les réussites et échecs constatés des élèves, en en particulier en ce qui concerne la question des ensembles de nombres et celle du calcul algébrique.

Le symbole √, tel qu'il a été vu en classe de 4ème sur la calculatrice , privilégie l'aspect transformation (on prend la racine carrée d'un nombre). Et cette première approche peut inciter les élèves à considérer qu'un nombre s'écrivant avec un radical n'est pas un résultat mais plutôt une étape dans une suite de transformations d'écritures. Dans ce que nous avons observé, ceci ne semble pas faire obstacle à la réussite des exercices présentés dans le cadre numérique. Par contre, dans le cadre géométrique, des difficultés apparaissent : problème pour donner une longueur de segment avec un radical, questions liées aux valeurs exactes ou approchées à utiliser dans les calculs intermédiaires pour avoir un résultat final exact, attestent des difficultés à considérer $\sqrt{2}$, par exemple, comme un nombre « comme les autres ». Et rien dans les programmes n'est véritablement proposé pour remédier à cela. De plus, dans la gestion des calculs, les élèves travaillent avec les racines carrées presque comme ils avaient l'habitude de le faire jusque là avec les « x » : on peut faire l'hypothèse que ceci n'aide pas les à considérer comme des nombres. Nous en venons alors à la question du jeu implicite entre cadre numérique et cadre algébrique : ce sont les connaissances anciennes apprises dans un cadre algébrique, souvent dans les chapitres traitant du calcul littéral, qu'il faut utiliser ici pour calculer correctement avec les racines carrées. Nous avons qualifié dans notre étude le cadre associé de « pseudo-algébrique » (pas de lettres mais une gestion des calculs comme s'il y en avait).

Cependant, ce ne sont pas strictement des connaissances anciennes puisqu'elles ont été vues pour des nombres autres que les racines carrées : il faut donc prolonger à cette nouvelle catégorie de nombres s'écrivant avec des radicaux, non identifiée précisément, les conventions, le formalisme algébrique, la distributivité de l'addition sur la multiplication, la commutativité et l'associativité de ces opérations, les identités remarquables… C'est en effet quand il faut faire face à cette adaptation que les erreurs sont les plus nombreuses : en particulier, la ré-explicitation du signe « fois » supprimé est source de nombreuses difficultés. Les copies attestent, dans les calculs avec les radicaux, de confusions fréquentes entre addition et multiplication. Cependant, même si elles sont moins nombreuses, ces difficultés persistent si on demande dans le même exercice à ces élèves de travailler avec des nombres sans radical. Ce sont ces observations qui nous poussent à qualifier la notion « racine carrée » davantage de « révélatrice de difficultés » que de « créatrice de difficultés ». Le problème se situerait à une échelle plus grande, dans le jeu permanent mais implicite entre cadre numérique et algébrique au sein duquel on fait travailler les élèves au collège.

4. Conclusion partielle

Nous avons exposé ici la mise au point de moyens de recherche, dans le cadrage théorique partagé, permettant d'analyser les relations entre les activités possibles des élèves, déduites de ce que propose le professeur en classe (choix de contenu et de déroulement, plus ou moins fin) et leurs réussites à un ou plusieurs contrôles, pour approcher leurs apprentissages mathématiques. Dans tous les cas et malgré des recueils de données légèrement différents, avec des enseignants différents, des notions différentes, des niveaux de classes et d'élèves différents, nous avons pu mettre en évidence des liens similaires entre les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves, et ce sans que le chercheur ait influé *a priori* sur les pratiques des enseignants observés. Les résultats trouvés s'inscrivent dans les hypothèses générales de notre étude globale, et peuvent contribuer à les préciser.

IV Le cas de la symétrie axiale dans deux sixièmes contrastées : déroulements et circulation du savoir, activités et liens avec les productions des élèves en contrôle

A. Chesnais

1. Introduction

Nous présentons ici la comparaison fine des déroulements dans deux classes de sixième très contrastées (une sixième ordinaire et une sixième d'établissement défavorisé) sur un même exercice et l'épisode de cours qui suit. Nous mettons aussi en parallèle ces analyses avec les productions des élèves en contrôles. Le but est à la fois d'illustrer l'utilisation du cadre et des outils d'analyse présentés précédemment, et d'exposer un certain nombre de résultats à propos des deux classes concernées. Les données et les analyses présentées ici ne sont qu'un extrait d'un travail qui a porté sur l'ensemble du chapitre dans les deux classes (Chesnais 2009), ce qui justifie d'évoquer des résultats malgré la taille très restreinte du corpus retenu ici.

L'étude concerne deux enseignants, dont l'une – Martine – exerce dans un établissement ordinaire et l'autre – Denis – dans un établissement classé ZEP/Ambition réussite. Les taux moyens de réussite en mathématiques pour les évaluations d'entrée en sixième constituent un indicateur[11] de la différence entre les deux établissements : la moyenne nationale est environ 65 % et le taux moyen de réussite pour les établissements classés ZEP au niveau national est environ 55 % quand la moyenne dans l'établissement de Martine est environ 74 % pour à peine 50 % dans celui de Denis. Les deux enseignants sont expérimentés (plus de 5 ans d'expérience tous les deux, Martine étant plus âgée) sans être experts (aucun des deux ne présente d'intérêt particulier pour des lectures ou des recherches sur l'enseignement, n'est conseiller pédagogique ou autre).

Notre étude a porté sur le chapitre concernant la symétrie axiale en sixième. Dans les deux classes, il s'est déroulé entre les mois de mars et mai. Une analyse épistémologique de la notion couplée à une analyse des programmes permet de mettre en évidence un certain nombre d'éléments susceptibles d'influer sur son enseignement et son apprentissage. Nous n'en retenons, pour l'étude du corpus qui va suivre, qu'un seul : cette notion est au cœur de l'enjeu en sixième de l'initiation du passage d'une géométrie perceptive et instrumentée à une géométrie s'appuyant sur les propriétés des configurations géométriques (cf. les paradigmes géométriques, Houdement et Kuzniak, 2000). Notons toutefois que cette initiation, notamment au raisonnement déductif, est l'affaire de toute l'année en sixième – voire au-delà.

Dans les deux classes, les enseignants ont suivi quasiment le même scénario pour l'ensemble du chapitre, c'est-à-dire que les exercices traités par les élèves, leur organisation ainsi que les énoncés de cours étaient identiques à quelques détails près. Cela résultait d'un dispositif particulier que nous n'évoquerons pas davantage ici (Chesnais 2009). Les analyses que nous présentons ci-dessous portent sur un exercice et l'épisode de cours qui a suivi, durant la deuxième séance consacrée à la symétrie axiale. Lors de la première séance a été traité un exercice permettant d'introduire[12] la symétrie axiale comme transformation (parmi d'autres, évoquées par le mouvement que l'on doit donner à un calque pour passer d'une figure à une autre) associée à un pliage et un retournement. A l'issue du travail sur cet exercice a été institutionnalisée la définition de deux figures symétriques par rapport à un axe comme étant

11 Aussi imparfait soit-il. Les taux de réussite aux évaluations d'entrée en sixième en français et le taux de réussite au brevet dans les deux établissements sont concordants avec cet indicateur.

12 Il s'agit en fait de réintroduire la symétrie axiale en sixième, puisqu'elle a déjà été étudiée par les élèves à l'école primaire.

superposables par pliage le long de cet axe. Enfin, deux exercices d'application ont été traités à la fin de la séance, consistant essentiellement à identifier de manière perceptive des figures symétriques ou non.

2. Analyse a priori

Nous présentons dans cette partie l'analyse *a priori* de l'exercice proposé aux élèves et de l'énoncé de cours qui doit être institutionnalisé à sa suite.

L'exercice[13] dont nous proposons l'énoncé en annexe 1 consiste à construire le symétrique A' d'un point A par pliage puis de constater que la droite (AA') est perpendiculaire à l'axe et que celui-ci coupe le segment [AA'] en son milieu ou de constater que les points A et A' sont confondus sur l'axe dans le cas où le point A appartient initialement à l'axe. Les tâches impliquées par l'énoncé sont :

- une manipulation (le pliage et le placement du point A') qui ne constitue pas une tâche mathématique ;
- la reconnaissance perceptive et/ou instrumentée de la perpendicularité et d'un milieu (dans le cas où le point A n'appartient pas à l'axe) ;
- la reconnaissance perceptive et/ou faisant intervenir la définition établie à la séance 1 de la symétrie des deux points ;
- la mobilisation du vocabulaire (milieu, perpendiculaire, symétrique).

Sur le plan des tâches et connaissances mathématiques impliquées, l'exercice est relativement pauvre. L'organisation du scénario permet d'affirmer que la fonction de cet exercice dans le scénario est de permettre l'introduction de la définition du symétrique d'un point.

La définition visée (qui est prévue pour être écrite dans le cahier de leçon des élèves à l'issue de l'exercice) est présentée en annexe 2. Une analyse *a priori* de cette définition, en lien avec l'exercice précédent, nous permet d'identifier *a priori* un certain nombre d'éléments susceptibles d'influer sur les activités des élèves et les apprentissages qui peuvent en résulter. En particulier, cette définition est non opératoire, dans le sens où elle suppose la figure terminée : elle ne peut être utilisée pour construire le symétrique d'un point et, réciproquement, ne peut être élaborée en suivant la logique de la construction du symétrique d'un point ; d'autre part, elle suppose une disjonction de cas. Quant au fait d'établir la définition en s'appuyant sur le travail réalisé dans l'exercice, cela suppose d'après nous d'expliciter le statut de la construction par rapport à celui de la définition (cas particulier / cas général, le caractère approximatif de la construction …) ainsi que le statut de ce que l'on observe sur la figure (la validité d'une reconnaissance perceptive, de l'utilisation des instruments …) par rapport à ce que l'on écrit dans la définition.

On peut noter que, si l'on s'en tient à l'énoncé de l'exercice, tous ces éléments sont complètement implicites, ce qui implique que la relation entre l'exercice et la définition n'est pas évidente *a priori*. Or le travail d'élaboration de définitions à partir de l'observation de cas particuliers, s'il est fréquent au collège, n'en est pas pour autant non problématique, notamment en sixième (cf. le passage d'un paradigme à l'autre). Nous nous attacherons donc particulièrement à cet aspect dans l'analyse des déroulements puisqu'ils nous semblent déterminants, étant donné notre cadre théorique, pour permettre aux élèves d'accéder à la conceptualisation visée.

13 L'énoncé est tiré du manuel Bréal 6ème, édition 2005.

3. Éléments de méthodologie pour l'analyse des déroulements

Nous ne revenons pas ici sur ce qui a déjà été largement évoqué dans les exemples précédents (découpage chronologique, repérage des formes et nature du travail, des aides de l'enseignant …), mais nous précisons certains éléments spécifiques à cette étude-ci. Le principe des analyses de déroulements reste identique aux études précédentes : analyser les pratiques de l'enseignant en lien avec les activités possibles des élèves, en les mettant en regard avec l'analyse *a priori*.

En particulier, pour les épisodes d'exercices, ceci nous amène à repérer, lors des déroulements, les modifications (diminutions ou enrichissements) de la tâche initialement prescrite ainsi que les traces des activités des élèves et de ce qui peut influer sur ces activités. Cela nécessite de reconstituer le repérage, l'interprétation et l'exploitation du travail des élèves que fait l'enseignant et nous permet de mettre en évidence des « apports » : enrichissements, liens, structuration des connaissances, identification[14], bilans, généralisations, … Ces « apports » nous semblent des éléments déterminants pour permettre une transformation du travail des élèves en connaissances.

Quant aux épisodes de cours, outre la répartition du temps en fonction de la nature du travail des élèves, nous nous intéressons essentiellement aux contenus sur lesquels portent les échanges : notamment, nous repérons si la *question initiale*[15] est posée, si le lien avec les productions des élèves est fait et si l'enseignant découpe ou simplifie[16] les questions. Nous tenons compte également de la répartition entre l'enseignant et les élèves sur le contenu (qui a la charge de la généralisation, la décontextualisation, la formulation des énoncés de cours ?), et des apports (cf. ci-dessus) supplémentaires des enseignants.

4. Analyse du déroulement de l'épisode d'exercice

Nous présentons en annexe 3 le découpage en phases[17] des épisodes d'exercices de Denis et Martine. L'analyse de ces tableaux nous permet d'établir un certain nombre de constats. La durée de l'épisode est similaire entre les deux classes (environ 20 minutes chez Denis et 19 minutes chez Martine), mais la répartition des formes de travail est très différente.

Chez Denis, on observe successivement près de 9 minutes de travail individuel sur la tâche (essentiellement la manipulation) puis plus de 11 minutes de travail collectif consistant à : la réalisation de la figure au tableau par l'enseignant ; le traitement collectif de la question d. de l'exercice (compléter les phrases) ; un bilan portant sur *« les deux conditions »* (cf. infra) ; un apport consistant à demander aux élèves de refaire la manipulation pour un autre point et pour un point appartenant à l'axe.

---

14 Nous désignons ainsi ce qui a trait à *l'identification* (ou encore le pointage) des objets de savoir en jeu dont notamment Crinon, Marin et Bautier (2008) rappellent l'impact a priori différenciateur par son insuffisance dans les milieux défavorisés.

15 Nous entendons par *question initiale* la question à laquelle l'énoncé de cours visé constitue une réponse. Par exemple, dans le cas présent, la question initiale est « comment peut-on définir deux points symétriques par rapport à un axe ? »

16 On parlera de *découpage* lorsque l'enseignant, à partir d'une question nécessitant plusieurs éléments de réponse, pose aux élèves des questions portant séparément sur ces éléments ; on parlera de *simplification* lorsque l'enseignant prend une partie de la réponse à sa charge (par exemple s'il induit la réponse en évoquant la question de l'exercice qui doit permettre de répondre, s'il commence la phrase que les élèves n'ont plus qu'à terminer…).

17 Le découpage en épisodes correspond à un découpage grossier en fonction de la nature du travail (cours, travail sur des exercices, corrections, rappels de cours …) ; le découpage des épisodes en phases correspond à un découpage plus fin des épisodes selon les formes et la nature du travail (travail individuel – autonome ou non –, en petits groupes ou collectif, portant sur telle question de l'exercice ou tel énoncé de cours …).

Dans la classe de Martine, on observe une alternance de travail individuel et de travail collectif. Les phases de travail individuel représentent en tout environ 5 minutes et sont consacrées à : la manipulation ; tracer (AA') et placer le point I ; réfléchir aux conditions auxquelles deux points sont symétriques. Le travail collectif dure 13 minutes et demie et consiste à : écrire le titre dans le cahier (« Symétrique d'un point ») ; réaliser la manipulation, l'enseignante montrant chaque étape ; faire un bilan de la manipulation (« Vous avez construit quoi ? ») ; une demande motivée d'observation de la figure ; une correction (les droites sont perpendiculaires et I est le milieu du segment [AA']) ; des apports concernant le cas d'un point de l'axe et le vocabulaire spécifique de la symétrie ; une demande de caractérisation de deux points symétriques ; une correction (la caractérisation de la figure).

L'analyse du découpage en phases nous permet donc d'identifier certaines différences : si le temps consacré à l'exercice est similaire entre les deux enseignants, il n'est pas exploité de la même manière. Le travail individuel, plus important en durée chez Denis, est consacré à des tâches très limitées en termes d'activités possibles, tandis que Martine prend rapidement en main collectivement ce qui présente le moins d'intérêt (la manipulation) pour consacrer une plus grande partie de l'épisode à la caractérisation de la figure, c'est-à-dire à la préparation de l'institutionnalisation prévue. Elle le fait en alternant phases collectives et individuelles, c'est-à-dire en dévoluant une partie de ce travail aux élèves. Nous avons en outre noté un certain nombre d'apports de la part des deux enseignants, mais plus riches par rapport aux enjeux de savoir visés chez Martine que chez Denis.

L'analyse des transcriptions nous permet de compléter ces résultats en approchant plus finement les activités des élèves telles que l'enseignant cherche à les provoquer. Nous ne présentons pas ici une étude exhaustive, mais pointons certains éléments qui, de nouveau, nous semblent susceptibles d'être différenciateurs en termes d'activités.

En particulier, nous avons repéré chez Martine un travail filé tout au long de l'épisode pour identifier explicitement le savoir en jeu (la caractérisation de deux points symétriques par rapport à un axe) ainsi que le statut des objets. En effet, une fois la manipulation réalisée, Martine fait identifier par les élèves qu'ils ont construit deux points symétriques :

> *Martine : j'ai construit le point A', et j'ouvre. C'est bon ? Donc par pliage, vous avez le point A et le point A' qui se superposent ?*
> *Es[18] : oui*
> *Martine : donc vous avez construit quoi, là ?*

A la fin de l'épisode, le bilan est l'occasion d'expliciter le lien entre l'exercice et l'institutionnalisation visée :

> *« Martine : Après ce que vous avez observé, on dira que deux points A et A' sont symétriques par rapport à une droite d dans quel type de situations ? [...] A quelles conditions, on pourra dire qu'un point A' est le symétrique de A ? ».*

D'autre part, à plusieurs reprises, Martine pointe aussi le statut de l'observation de la figure :

> *« essayez de me dire ce que vous observez, ce que vous remarquez, on pourra rien justifier, rien prouver, mais qu'est-ce que vous observez ? », « on peut dire qu'il semble qu'elles sont ? », « voilà, vous avez l'impression, vous pouvez vérifier avec votre équerre, votre double-décimètre [...] que ça a l'air de fonctionner ».*

Quant à Denis, l'analyse des transcriptions conforte l'analyse du découpage en phases en montrant qu'il se contente de faire l'exercice. En particulier, il ne s'agit à aucun moment d'observer ou de caractériser la figure obtenue, mais de *« compléter les phrases »* (en référence à la question d. de l'exercice). D'autre part, on ne trouve aucune trace d'identification du savoir en jeu ni du statut des objets.

18 Dans toutes les citations, E désigne un élève, Es désigne plusieurs élèves parlant en même temps.

A la fin de l'épisode, on peut toutefois noter une tentative de bilan :

> *« Denis : il y a combien de conditions, là ? On va essayer de regarder les deux conditions. Pour l'instant, on a remarque que la droite qui était là, que j'ai effacée, c'est que le segment, et la droite rouge, elles sont ? ».*

Cette intervention illustre bien la manière de procéder de Denis durant le travail collectif : il part d'une question qui représente manifestement une tentative pour établir un bilan permettant de préparer l'institutionnalisation (la mention des *« deux conditions »* est une référence aux conditions de perpendicularité et équidistance qui caractérisent deux points symétriques dans le cas où ils n'appartiennent pas à l'axe) ; mais cette tentative reste avortée non seulement parce qu'elle est incomplète (il n'est jamais précisé conditions *de quoi*), d'autre part parce qu'elle est entièrement prise en charge par Denis qui découpe directement, ramenant les élèves à la tâche précédente, à savoir identifier sur un exemple que deux droites sont perpendiculaires et qu'un point est le milieu d'un segment. L'épisode se clôt sur la réalisation de nouvelles manipulations, sans que Denis revienne sur ces questions.

L'analyse des transcriptions nous a ainsi permis de caractériser plus finement ce qui différencie les déroulements dans les deux classes : si l'enjeu du travail (la préparation de l'institutionnalisation de la définition de deux points symétriques par la caractérisation et la généralisation d'un cas particulier) est bien identifié et placé au cœur du travail proposé aux élèves dans la classe de Martine – même si tout n'est pas complètement explicité, notamment la généralisation –, celui-ci reste implicite et n'est surtout pas dévolu aux élèves dans la classe de Denis. Certains éléments nécessaires pour établir le lien entre l'exercice et la définition semblent même absents dans la classe de Denis, notamment la généralisation à partir du cas particulier et les considérations sur le statut de la figure et des observations réalisées.

5. Analyse du déroulement de l'épisode de cours

Nous nous limitons ici à la partie de l'épisode de cours qui porte sur le cas où le point n'appartient pas à l'axe, ceci nous semblant suffisant pour mettre en évidence des résultats intéressants concernant les deux enseignants. Nous résumons rapidement le déroulement de l'épisode du point de vue du contenu dans chacune des classes, avant de les comparer.

Dans la classe de Martine :

La question initiale est explicitement posée par Martine dès le début de l'épisode: *« on voudrait définir le fait qu'un point A' est le symétrique, on dit parfois image, est le symétrique d'un point A »* ; puis plus loin : *« alors, mathématiquement, qu'est-ce que ça signifie ? […] A quelles conditions, A et A' vont être symétriques par rapport à une droite d ? ».*

Les élèves ne parvenant pas à répondre à la question, Martine dessine deux contre-exemples au tableau : l'un où (AA') et l'axe supposé de la symétrie ne sont pas perpendiculaires et l'un où les droites sont perpendiculaires mais les points A et A' ne sont pas équidistants de l'axe. Ayant fait mettre en évidence les conditions qui n'étaient pas remplies dans chaque cas, Martine repose la question initiale : *« Ah donc, voilà, maintenant je reviens, à quelles conditions, qu'est-ce qu'il faut pour que A et A' soient symétriques par rapport à d ? ».* L'énoncé de la définition est ensuite élaboré par les élèves, même si l'enseignante reformule en partie les réponses.

L'élaboration de la définition est en outre complétée par de nombreux apports : dès le début, Martine évoque (suite à une question d'élève) le fait que si les points s'appellent A et A' dans le cas de l'exercice, ils peuvent porter d'autres noms par ailleurs ; d'autre part, la définition est complétée dans le cahier de leçons par un certain nombre de remarques : sur le vocabulaire (le fait qu'on peut parler d'un point symétrique d'un autre ou de deux points symétriques), la réciprocité de la symétrie et l'introduction d'une notation mathématique pour signifier que deux points sont symétriques par rapport à une droite (S_D : A# A')[19].

Dans la classe de Denis :

La question initiale n'est pas posée ; Denis débute l'épisode en refaisant une figure au tableau, constituée d'une droite et d'un point A n'appartenant pas à la droite puis pose la question suivante : *« comment je fais pour trouver où est le point A' ? [...] Comment on trouve le point A', c'était quoi les conditions pour trouver le point A' ? »*. On peut noter qu'il est peu probable que les élèves soient capables de produire la définition attendue en réponse à cette question puisque, comme nous l'avons précisé plus haut, la définition est précisément non opératoire : elle suppose la figure terminée.

Après un échange où une élève suggère d'utiliser le compas – option que Denis écarte rapidement –, l'enseignant change de tactique et refait une figure sur laquelle il place cette fois les deux points A et A'. La question initiale est évoquée rapidement, mais pas posée directement aux élèves ; Denis découpe immédiatement en demandant d'abord aux élèves d'identifier la perpendicularité puis l'équidistance :

> *Denis : s'il est là, le point A', c'est quoi les deux conditions à remarquer pour que ça soit symétrique, ça veut dire qu'il faut qu'ils soient comment, d'abord, ça, c'est comment ? [il trace un pointillé rejoignant les deux points et montre le croisement]*
> E : perpendiculaire

Si la première condition est facilement identifiée par les élèves, la deuxième leur pose davantage de problèmes (ce que les élèves évoque est que les deux points sont équidistants de la droite – en ayant du mal à l'exprimer puisqu'ils ne disposent pas de la notion de distance – mais l'énoncé doit être établi en faisant référence au point d'intersection – comme étant le milieu du segment – qui n'est pas figuré sur la figure au tableau). Denis simplifie alors la question en évoquant lui-même le milieu.

L'énoncé de cours est ensuite écrit au tableau et recopié par les élèves sur leur cahier et aucune mention n'est faite du statut des objets en jeu : notamment, la généralisation et l'élaboration d'une définition à partir de l'observation d'un exemple sont entièrement passées sous silence, cachées sous le fait que les noms des points sur l'exemple et dans la définition sont les mêmes.

Quant aux apports au cours de l'épisode, ils se limitent au début de l'épisode à une discussion sur du vocabulaire, mais pas mathématique (l'échange porte sur la fréquence d'emploi de l'expression « par rapport »). En fin d'épisode, on peut noter un apport plus riche : l'utilisation de deux contre-exemples (similaires à ceux utilisés par Martine) pour mettre chaque fois en évidence la condition qui n'est pas remplie.

Comparaison :

La durée de l'épisode est un peut plus importante chez Denis que chez Martine (près de 20 minutes pour un peu plus de 15 minutes), mais on a vu que cela n'est pas nécessairement corrélé avec une plus grande richesse de contenu. Durant l'ensemble de l'épisode, le travail est collectif dans les deux classes, et on peut noter que l'écriture de la définition dans le cahier par les élèves est réalisée au bout de 11 minutes environ chez Denis et au bout de 8 minutes environ chez Martine.

19 Cette notation n'est pas au programme de sixième, mais Martine a décidé de l'introduire quand même car elle la trouve utile (elle s'en sert notamment pour faire rédiger aux élèves des petits raisonnements déductifs).

Du point de vue du contenu, la question initiale est explicite chez Martine et elle n'est ni découpée ni simplifiée par l'enseignante. La réponse complète reste à la charge des élèves, exceptée la formulation, prise en charge par l'enseignante dans une certaine mesure. En revanche, nous avons noté que la généralisation et l'explicitation du statut des objets sont moins mis en évidence que dans l'épisode d'exercice. Martine ne redit pas, notamment, que rien n'a été prouvé. Toutefois, le fait de s'appuyer sur des contre-exemples (et non sur un exemple comme Denis) rend la généralisation plus valide.

Dans la classe de Denis, la caractérisation de deux points symétriques n'est pas réellement à la charge des élèves, ceux-ci n'ayant qu'à identifier sur un exemple deux droites perpendiculaires et un milieu (comme dans l'exercice).

Enfin, les apports réalisés par chacun des deux enseignants sont très différents. Si on peut noter un apport commun (l'utilisation de deux contre-exemples), on a vu qu'ils ne remplissaient pas la même fonction dans les deux cas : ils servent à élaborer l'énoncé chez Martine, tandis qu'ils servent uniquement à appliquer la définition dans le cas de Denis. Quant aux autres apports réalisés par chacun des enseignants, la différence en termes de connaissances mathématiques sous-jacentes est très nette.

6. Les résultats en contrôles

Tout comme dans les exemples précédents, nous nous servons ici des productions des élèves en contrôles pour évaluer les effets de l'enseignement reçu sur les apprentissages des élèves, compte tenu toutefois de toutes les précautions mentionnées précédemment et sur une partie desquelles nous reviendrons en conclusion.

Dans chacune des deux classes a été proposé quelques temps après la séance analysée ci-dessus un contrôle comportant des énoncés identiques. Nous présentons ici les résultats liés à une question en particulier : il s'agissait de redonner la partie de la définition du symétrique d'un point correspondant au cas où le point n'appartient pas à l'axe. L'énoncé précis en est : *« A et B étant deux points distincts n'appartenant pas à la droite (d), compléter la phrase suivante : dire que le point B est le symétrique du point A par rapport à la droite (d) signifie que : ... ».*

Une analyse *a priori* rapide met en évidence quelques points : la réalisation de la tâche suppose que l'élève identifie que ce qui est attendu est la définition et qu'il l'adapte aux noms des points de l'énoncé (il s'agit dans le contrôle de A et B, alors que le cours mentionnait A et A') ; l'élève doit également identifier que seule la partie de la définition concernant le cas où le point n'appartient pas à l'axe est attendu ; d'autres réponses correctes que la définition sont possibles comme « A et B se superposent par pliage », « A est le symétrique du point B par rapport à (d) » …

Nous avons analysé les productions des élèves en repérant d'une part si les élèves identifiaient que c'était la définition qui était attendue ou non (nous distinguons ainsi les autres réponses justes des réponses fausses et des réponses évoquant les conditions de la définition – perpendiculaire et milieu) ; d'autre part, nous avons repéré si l'élève mentionnait les deux conditions ou non (en distinguant les élèves qui citent la perpendiculaire et le milieu de ceux qui donnent une réponse partielle) ; enfin, s'il avait identifié que seule une partie de la définition était attendue (en distinguant ceux qui ont ajouté le cas où les points sont confondus des autres). Nous indiquons également les productions pour lesquelles la forme de la réponse n'était pas correcte. Les résultats sont consignés dans un tableau présenté en annexe 4 et nous les analysons ci-dessous.

On note essentiellement que les résultats semblent nettement meilleurs chez Martine : la réponse attendue (c'est-à-dire les deux conditions de la définition dans le seul cas où les points n'appartiennent pas à l'axe) est produite par 10 élèves sur 22 chez Martine contre 3 élèves sur 21 chez Denis. On atteint 15 élèves chez Martine si l'on comptabilise ceux qui ont ajouté la cas des points confondus (le résultat ne change pas chez Denis). On atteint 16 élèves chez Martine et 8 chez Denis si l'on comptabilise les élèves qui n'ont répondu que partiellement : ce résultat indique le nombre d'élèves qui ont identifié que c'était la définition qui était attendue. Enfin, 8 élèves produisent une réponse fausse chez Denis contre seulement 3 chez Martine.

Notons que l'écart s'accroît encore entre les élèves de Denis et Martine si l'on prend en compte la forme (correcte ou non) des réponses.

La mise en parallèle des déroulements avec les productions en contrôles est donc très frappante, mais elle doit néanmoins être nuancée.

En effet, tout d'abord, il n'y a pas que les épisodes analysés qui peuvent avoir eu une influence sur les productions des élèves en contrôles ; en outre, les épisodes présentés ont été choisis pour leur caractère particulièrement contrasté entre les deux enseignants, mais ils sont relativement représentatifs de l'ensemble des déroulements des ces deux enseignants sur l'ensemble du chapitre.

Un autre facteur qui limite peut-être la mise en rapport des déroulements avec les résultats sur cette tâche est le fait qu'il s'agit d'un test sur des connaissances décontextualisées, à formuler par des phrases. Or le fait que Denis est en ZEP joue probablement un rôle dans les résultats faibles de ses élèves sur ce type de tâche : on sait combien le travail sur des énoncés décontextualisés représente une difficulté pour ces élèves (Butlen 2007).

Une dernière nuance peut être apportée par les résultats concernant une autre tâche du même contrôle : après la question portant sur la définition, il s'agissait de construire le symétrique d'un point sur papier blanc avec un axe oblique. Cette tâche suppose notamment de faire intervenir explicitement les deux conditions de la définition. Or elle est réussie par 20 élèves sur 21 chez Denis et 20 élèves sur 22 chez Martine. Cela conforte l'idée que non seulement la mise en rapport des déroulements avec les résultats en contrôles n'est pas transparente, mais également que le facteur ZEP intervenait probablement de manière déterminante dans les résultats concernant la définition.

Toutefois, l'analyse à l'échelle de l'ensemble du chapitre permet de mettre en évidence la cohérence entre les résultats en contrôles et ce que l'on a pu observer des déroulements dans la classe de chacun des deux enseignants.

7. Conclusion

A partir d'une tâche identique et de son exploitation en cours, nous avons constaté des différences importantes dans les déroulements. On peut notamment supposer que les élèves de Martine ont eu accès à des activités plus « riches », c'est-à-dire davantage susceptibles de favoriser la conceptualisation de la notion visée. En particulier, l'objet de savoir a été explicitement identifié plusieurs fois ; ce qui a été admis est plus explicite (statut de l'observation et de la définition) ; la généralisation a été plus explicite et plus liée à l'activité qui a même été adaptée par Martine pour faciliter l'élaboration de la définition.

D'autre part, on constate des différences de résultats au contrôle que l'on peut mettre en cohérence avec les analyses de déroulements (à une échelle plus grande).

Des variations importantes apparaissent donc pour lesquelles un certains nombre de facteurs explicatifs peuvent être avancés : parmi les principaux, on peut citer la composante personnelle de chacun des professeurs qui intervient probablement de manière déterminante dans les différences de déroulements ; la composante sociale des pratiques à travers le facteur ZEP qui intervient probablement à la fois dans les déroulements (le professeur adaptant ses déroulements en fonction des caractéristiques – réelles ou supposées – des élèves) et dans les résultats en contrôles (comme on l'a mentionné à propos des énoncés décontextualisés) ; le poids du dispositif expérimental qui avait amené à ce que les deux enseignants appliquent chacun dans leur classe le même scénario mais sur lequel nous ne reviendrons pas ici (cf. Chesnais 2009).

8. Annexes

Annexe 1 : énoncé de l'exercice

Activité : symétrique d'un point :

a. Sur une feuille de papier blanc, trace une droite (d) et place un point A.

b. Plie le papier le long de la droite (d). Pique sur le point A avec le compas, et nomme A' le point que tu obtiens de l'autre côté de la droite (d).

c. Trace la droite (AA'). Tu nommeras I le point d'intersection des droites (AA') et (d).

d. Complète les phrases suivantes :

« La droite (AA') et la droite (d) sont ………………………………….. »

« Le point I est le …………………….. du segment [AA'] »

« Le point A' est le ……………………….. du point A par ………………………………… »

« La droite (d) est la …………………………… du segment [AA'] »

Annexe 2 : énoncé de cours

Définition :

Deux points A et A' sont symétriques par rapport à une droite (d) signifie que :

- Si A appartient à la droite (d), A et A' sont confondus sur (d)

- Si A n'appartient pas à la droite (d), la droite (d) est la perpendiculaire à la droite (AA') et (d) passe par le milieu du segment [AA'].

Annexe 3 : découpage en phases des épisodes d'exercices

Légende : les cases grisées correspondent aux phases de travail collectif ; les cases blanches correspondent aux phases de travail individuel

Martine

phases	1	2	3	4	5	6
durée	2 :06	2 :18	3 :30	1 :58	1 :14	1 :42
Descrip-tion rapide	titre	Travail autonome	Collectif : manipula-tion + Sarah : point sur la droite ; reprise avec Thomas	reprise + bilan : vous avez construit quoi ?	On va obser-ver la figure (motivation par la déf. et la construc-tion) ;Tracer (AA'), placer I	Autonomie élèves
phases	7	8	9	10	11	12
durée	1 :03	0 :42	0 :28	1 :03	0 :55	2 :39
Descrip-tion rapide	Que pensez-vous des droites d et AA' ? puis I	Le cas du point de l'axe	On dit que A' est l'image de A	Deux points A et A' sont symétriques dans quel type de situa-tions ? A quelles conditions ?	Autonomie : réfléchir aux questions (échange avec Tho-mas : droites symétriques)	Collectif : particulari-tés de la figure + synthèse (y compris cas particulier).

Denis

Phase	1	2	3	4
Durée	0 :56	7 :41	6 :49	4 :56
Descrip-tion rapide	Démarrage (calque, crayon)	Travail autonome + interventions Denis (d droite, trouver le point, matérielle, étapes, droite AA', autre point pour Nicolas , compléter les phrases, centre/ milieu…)	Correction / traite-ment de la question d. ; bilan : les deux conditions	Apport : un autre point et un point de l'axe

Annexe 4 : résultats en contrôles.

		Martine : 22 copies	Denis : 21 copies
Non traité		0	2
Autre ok		1	2
Perpendiculaire et milieu [dont mal dit]	Seul	10 [2]	3 [3]
	+ ou confondus	5	0
Partiel (que perp. ou que milieu) [dont mal dit]	Seul	1 [0]	5 [5]
	+ ou confondus	2	1
faux		3	8

V Conclusion générale

Comment interpréter ce type d'analyse ?

Nos analyses de la circulation du savoir précisent la fréquentation des mathématiques que les élèves peuvent développer et donnent accès, partiellement, aux jeux de connaissances qu'ils peuvent approcher. Dans le dernier exemple, ils connaissent le théorème de Thalès, ils doivent introduire une variable x dans les rapports bien connus, quel saut ont-ils à faire ? Dans quelle mesure cette adaptation est-elle proche du déjà là ? Cela est associé à une réflexion en termes de zone proximale de développement : reste à savoir dans quelle mesure le travail des élèves et les interventions du professeur sont « suffisamment proches » pour que l'adaptation puisse se faire, voire se refaire une autre fois. On a pu voir en ZEP, la grande difficulté à rapprocher élèves et savoirs et pas élèves et enseignants ou élèves et « sous savoirs ». Seulement tout cela reste vague, différent pour chaque élève, voire chaque contenu et l'enseignant doit optimiser ses interventions à partir d'indices quelquefois insuffisants. Nous pensons que nos analyses, à partir de nos indicateurs, éclairent la palette des possibles à ce niveau donnant des moyens d'interroger systématiquement et précisément des cheminements organisés par l'enseignant.

Y a-t-il un lien avec les apprentissages antérieurs ?

Peut-on (doit-on…) préciser davantage, à partir de ces premiers résultats ce qui intervient dans cette variabilité – par exemple en mobilisant d'autres indicateurs,

- côté enseignants : les implicites de vocabulaire ou de logique, même élémentaires (cf. sources de malentendus ?)

- côté élèves : les « connaissances » des élèves au sens large, déjà-là ou presque-là*, en termes de procédures, de cadres, de registres y compris langagiers, de formulations, d'accès aux raisonnements, voire de postures ?

Y a-t-il un lien avec les apprentissages ultérieurs ?

Cela demande à être testé même si la nature des différences retenues est théoriquement associée à la qualité des apprentissages. C'est d'autant plus vrai que la déclinaison fine du travail en autonomie laissé aux élèves, souvent préconisé, peut en fait être très différente d'une séance à l'autre. Par exemple on voit bien que le fait de laisser chercher les élèves ne peut pas être interprété dans l'absolu (cf. les deux classes de troisième) – le travail de Chopin (2007) est particulièrement éclairant à cet égard et non contradictoire avec nos résultats.

L'exposé suivant montre des travaux qui répondent en partie à cette question.

Notre analyse de la circulation du savoir peut permettre des mises en regard plus précises et plus fiables entre les activités des enseignants en classe, celles des élèves et les apprentis - sages.

Quelles contraintes déterminent les choix des enseignants en matière de circulation du savoir ? Y a-t-il des alternatives que ce soit dans les choix mathématiques qui précèdent la classe ou dans les choix de gestion ?

Dans nos deux exemples, le contraste a été fait entre une classe faible ou une ZEP et une classe standard. Des études déjà faites (en mathématiques, Glorian 1997 ; Butlen et al. 2007 ; et même plus générales, Bautier et Rayou 2009) indiquent des convergences avec ce que nous avons illustré. Il y aurait ainsi certaines régularités de gestion liées à la composition des classes. Cependant le dernier exposé va permettre de commencer à répondre à la question.

VI Bibliographie générale

Assude T. (1992) *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet « racine carrée » et analyse du curriculum*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

Bautier E., Rayou P. (2009) *Les inégalités d'apprentissage*. Paris : PUF.

Bronner A. (1997) Les rapports d'enseignants de troisième et seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée ». *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.17/3, 55-80.

Bucheton D. Dezutter O, Brunet L.M., Dupuy C. (2008) *Le développement des gestes profes-sionnels dans l'enseignement du français – un défi pour la recherche et la formation.* Bruxelles : De Boeck Université.

Butlen D. (2007) *Le calcul mental entre sens et technique*. Besançon : Presses Universitaires Franche-Comté.

Butlen D., Ngono B. (2007), Hétérogénéité et différenciation dans l'enseignement en ZEP, *Actes du XXXIIIème colloque sur la formation des maîtres*. CRDP de Versailles, CDDP de l'Essonne Evry, 2007.

Chappet Pariès M., Robert A., Rogalski J. (2008), Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses élèves sur le chemin des connaissances : un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques, *Travail et apprentissages* 3, 95- 123

Chappet Pariès M. (soumis 2009) *Circulation de savoir en classe de mathématiques : quelles variabilités dans les pratiques des enseignants ? Etudes de cas*, Annales de Strasbourg

Chesnais A. (2009) *L'enseignement de la symétrie axiale dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 – Denis Diderot.

Chesnais A., Coulange L., Dumail A., Horoks J., Pariès M., Robert A. (2008), Interroger des différences entre enseignements à partir du terrain (classes de mathématiques en collège et lycée) : travaux de didacticiens des mathématiques sur les liens en pratiques et apprentissages des élèves dans différents contextes –*Symposium Colloque Efficacité et Equité Rennes*, Novembre 2008.

Chopin M.P. (2007) *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques; Approche des phénomènes de régulation des hétérogénéités didactiques*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux.

Corlay M. et Cissé F. (2006) Déroulement des cours et apprentissages (sur le chapitre des triangles semblables) *Mémoire de master de didactique des mathématiques parcours recherche*, Université Paris 7 (non publié).

Crahay M. (2000) *L'école peut-elle être juste et efficace? De l'égalité des chances à l'égalité des acquis*. Bruxelles : De Boeck.

Crinon J., Marin B., Bautier É. (2008), Quelles situations de travail pour quel apprentissage ? Paroles des élèves, paroles de l'enseignant. In D. Bucheton (Ed), *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés* pp. 123-147. Toulouse : Octarès.

Douady R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* vol 7/2, .5-32.

Dumail A. (2007), La racine carrée en troisième, des enseignements aux apprentissages, *Cahier de Didirem* n°57, IREM, Université Paris7-Denis Diderot.

Felix C. (2004) Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens : une perspective comparatiste. *Spirale* 33, 89-100.

Glorian Perrin M.J. (1997) Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ? *Repères IREM* 29, 43-66.

Horoks J. (2008), Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28/3, 379-416.

Houdement C., Kuzniak A. (2000) des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 20/1, 89-116.

Robert A. (2008) Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement; Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe, in Vandebrouck, *la classe de mathématiques*, pp 33-58. Toulouse : Octarès.

Vandebrouck F. (2008) *La classe de mathématiques : activités d'élèves, pratiques d'enseignants,* Toulouse : Octarès.

Annexe
Annonces des séminaires 2009