ARDM

Association pour la recherche en didactique des mathématiques

Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques

IREM PARIS 7

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2011

Edité par
Maha Abboud-Blanchard
Laboratoire de Didactique André Revuz
Université Paris Diderot – Paris 7
et
Annick Flückiger
Dimage, Université de Genève

ARDM **IREM de paris 7**

TITRE :

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

AUTEURS :

M. ABBOUD-BLANCHARD et A. FLÜCKIGER

RESUME :

Actes de la session 2011 du séminaire national de didactique des mathématiques. Le séminaire national de didactique des mathématiques est organisé par l'ARDM. Il a pour but de permettre la diffusion régulière des recherches nouvelles ou en cours, et de favoriser les échanges et débats au sein de la communauté francophone de didactique des mathématiques. Se trouvent également des textes correspondant à la fête des 30 ans de la revue RDM (Recherche en Didactique des Mathématiques) et au colloquium organisé conjointement par l'ARDM et la CFEM (Commission Française pour l'enseignement des mathématiques).

MOTS CLES :

Didactique des mathématiques

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2011

Edité par
Maha Abboud-Blanchard
Laboratoire de Didactique André Revuz
Université Paris Diderot – Paris 7
et
Annick Flückiger
Dimage, Université de Genève

ARDM **IREM de paris 7**

Sommaire

Sommaire

Le séminaire national de didactique des mathématiques, organisé par l'association pour la recherche en didactique des mathématiques ARDM, est l'occasion d'échanges entre chercheurs ; c'est un moment fort auquel sont attachés les membres de la communauté didactique francophone.

Comme les années précédentes, les séminaires de 2011 ont été l'occasion de donner la parole à des chercheurs confirmés et à des jeunes chercheurs qui ont pu présenter leurs travaux dans le cadre des rubriques « usuelles » du séminaire.

La rubrique « Présentation de thèse » a ainsi permis à de jeunes chercheurs de faire connaitre leurs recherches ; ce fut le cas de Mirène Larguier, Joris Mithalal et Laurent Souchard en mai, Stéphane Clivaz et Eric Mounier en mars. De plus, une présentation collective, en mars, de l'équipe des jeunes chercheurs a permis de rendre compte des thèmes de travail débattus au sein de cette équipe.

La rubrique « Présentation d'HDR » fut l'occasion pour Hamid Chachoua en mai, Corine Castela et Magali Hersant en octobre, de présenter la synthèse de leurs travaux respectifs à l'ensemble de la communauté des didacticiens.

Les rubriques « Travaux en cours » et « Travaux d'équipe » ont été l'occasion pour des chercheurs confirmés de mettre en discussion leurs avancées, individuellement ou en équipe, avec l'ensemble de la communauté : l'équipe DiMaGe en mars, l'équipe EtOS , Jean-Philippe Drouhard et Caroline Poisard en mai, Isabelle Bloch et Patrick Gibel en octobre ont accepté ce défi.

Pour aller dans le sens d'un lieu d'échanges et de débats théoriques que nous souhaitons le plus ouvert possible, nous avions inauguré en 2010 la rubrique « Hors les murs » afin de donner la parole à des chercheurs confirmés usuellement plus éloignés de notre communauté ARDM. Merci à Dominique Lahanier et Paul Drijvers d'avoir accepté notre invitation au titre de cette rubrique qu'ils ont ainsi inaugurée.

Le séminaire 2011 fut de plus l'occasion pour l'ARDM d'organiser deux événements exceptionnels: d'une part la fête des vingt ans de la revue RDM en mars et d'autre part, le Colloquium organisé en collaboration avec la Commission Française sur l'Enseignement des Mathématiques (CFEM) avec pour invité d'honneur Yves Chevallard et ce, suite à l'attribution par *l'International Commission on Mathematical Instruction* du prix Hans Freudenthal.

La quasi totalité des présentations fait l'objet d'un texte dans ce volume, pour les autres il s'agit d'un résumé de leur présentation Merci aux différents intervenants, la qualité des présentations contribue à faire de ce séminaire un moment clé de notre activité de chercheur en didactique des mathématiques. Merci à tous ceux qui ont d'une façon ou d'une autre contribué au bon fonctionnement de ce séminaire. Merci tout spécialement à Christophe Hache, directeur de l'IREM de Paris 7, dont l'extrême disponibilité et la compétence nous ont permis d'organiser ces journées et de préparer cette publication dans de bonnes conditions.

Enfin merci aux responsables de l'association ARDM qui nous ont fait l'honneur de nous confier pendant ces deux dernières années la responsabilité du séminaire. Ce fut, pour nous, un moment très enrichissant.

M. Abboud-Blanchard et A. Flückiger

Séminaire national

des 18 et 19 mars 2011

Les textes sont dans l'ordre chronologique de présentation pendant le séminaire.

Les 30 ans de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM)

Introduction

Teresa **ASSUDE**

ADEF, Aix-Marseille Université

t.assude@aix-mrs.iufm.fr

En 2010, la revue RDM a eu trente ans puisqu'elle a été fondée en 1980. C'est un événement que nous avons voulu fêter. A travers cette fête, nous avons souhaité rompre avec le quotidien de la vie scientifique et nous réjouir de cette heureuse initiative que fut la création d'une revue pour la constitution de notre communauté de recherche en didactique des mathématiques. En nous plongeant dans le passé de la revue, ce n'est pas le retour en arrière qui nous intéresse mais ce qu'il nous permet de comprendre du présent, et les perspectives que cela peut nous ouvrir : la mémoire est un moyen de comprendre l'actualité et de créer des attentes futures, de bâtir un projet qui nous porte au-delà du court terme.

Dans la première partie, un regard est porté sur la genèse de cette revue, sur ses apports scientifiques pour les didacticiens des mathématiques mais aussi pour d'autres didacticiens. Nicolas Balacheff nous plonge dans la genèse de la revue lors des journées d'Artigues en 1976. Il s'agit bien de se doter d'un moyen de débat et de recherche qui soutienne un projet scientifique collectif : celui de bâtir une communauté scientifique qui étudie les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Il est clair que trente ans après, une communauté de recherche s'est constituée et que la revue RDM est une référence incontournable pour l'étude de problèmes et de problématiques mais aussi pour le développement de théories ou d'articulations théoriques qui permettent de mieux comprendre le réel didactique. C'est pour cerner l'impact de ces apports sur les pratiques des chercheurs qu'Annie Bessot, Florence Ligozat, Yves Matheron et Maggy Schneider ont choisi des articles publiés dans la revue pour montrer comment ils ont contribué à leurs propres travaux. Deux articles de Brousseau ont été choisis car ils présentent déjà les fondements de la théorie des situations didactiques et mettent l'accent sur l'importance de l'analyse des savoirs à enseigner pour comprendre les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage (Annie Bessot). Cette analyse des savoirs est encore mise en avant par Maggy Schneider qui choisit un article de Michèle Artigue parce qu'il indique explicitement l'importance des liens entre épistémologie et didactique. Selon elle, l'intérêt qu'on peut porter aux relations entre la didactique et les autres sciences humaines et sociales ne doit pas faire oublier que la dimension

épistémologique est essentielle dans les travaux en didactique car ils rapportent les enjeux de savoir dans les différentes institutions à leurs dimensions fondamentales. Ces liens sont aussi à analyser du point de vue des outils sémiotiques et de la « sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs » comme le met en évidence Yves Matheron. Quant aux relations entre la didactique des mathématiques et d'autres didactiques, elles ont été abordées par le choix de l'article de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000). Cet article est considéré comme fondateur d'une certaine évolution des approches didactiques dans le monde francophone, lesquelles s'intéressent de plus en plus au travail de l'enseignant. La théorie de l'action conjointe enseignant-élèves apparait ici comme une de ces évolutions, théorie qui est l'un des fondements de la didactique comparée (Florence Ligozat).

Dans la deuxième partie, un certain nombre de chercheurs (Michèle Artigue, Nicolas Balacheff, Jean-Luc Dorier, Claire Margolinas, Joris Mithalal, Aline Robert) présentent leurs réflexions sur le futur de la revue à partir d'un certain nombre de questions : quelle identité pour la revue ? Quels moyens de diffusion ? Quel rayonnement international ? Quels rapports avec les autres revues ? Ce débat et les échanges avec les participants à cette fête ont montré non seulement le dynamisme de la revue pour le développement de la recherche en didactique des mathématiques mais aussi les nouveaux défis qui doivent être pris en compte. Certains de ces défis sont l'adaptation de la revue aux nouveaux moyens de communication et de diffusion (le site, la relation entre tirage papier et revue en ligne), le référencement de la revue dans des bases de données (comme ERIH ou autres), l'archivage des anciens volumes pour garder la mémoire de la revue, l'importance des moyens de rayonnement international. Ces défis sont aussi ceux de garder le cap qui est celui du projet initial de la constitution et du développement d'une communauté de chercheurs qui ont comme objet d'étude ce réel didactique qui est de plus en plus élargi à d'autres territoires que l'école.

Les 30 ans de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM)

Brousseau 1980 et 1981 - Trente ans après

Annie **BESSOT**

Université Joseph Fourier Grenoble 1

annie.bessot@imag.fr

Résumé. J'ai choisi deux articles qui sont indissociables car ils représentent les deux volets d'une œuvre fondamentale pour le développement de la recherche en didactique des mathématiques : Brousseau G. (1980) et Brousseau G. (1981). Ils ont accompagné la naissance de la revue. Ils ont été parmi mes plus fidèles compagnons de recherche jusqu'à récemment pour nourrir le cours que j'ai donné à la 15ième école d'été.

Mots clés. Théorie des situations didactiques, transposition didactique.

Je laisse Guy Brousseau présenter ces deux articles qui sont pour lui deux parties d'une même étude didactique, celle de l'enseignement des décimaux.

> Nous avons commencé par l'analyse de curricula typiques des années 60 et 70 et de l'effet épistémologique de la réforme de 70 sur les conceptions des élèves et des maîtres relativement aux décimaux. […] Cet exemple introductif permettra donc d'attester des phénomènes dont certains seront étudiés expérimentalement dans la suite du texte. […] Mais il ne faut pas se tromper sur ce mode de présentation : une telle analyse n'a été possible que par l'existence du travail expérimental évoqué plus haut et qui sera présentée dans la deuxième partie de l'étude. (Brousseau 1980 pp. 12-13)

Ils sont donc indissociables et ils représentent les deux volets d'une œuvre fondamentale pour le développement de la recherche en didactique des mathématiques.
En particulier, selon les éditeurs (Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield) dans le prélude du livre « Théorie des situations didactiques » (Brousseau 1998) – *noté TSD* - pour justifier leur choix de reprise de ces deux articles (p. 160) :
- ils « montrent l'importance de l'analyse des contenus à enseigner pour la compréhension des problèmes d'enseignement. » (Les éditeurs, Brousseau 1998, p. 163)
- ils donnent le premier exemple d'analyse du processus de transposition didactique (Brousseau 1980), celui des nombres décimaux.
- Ils démontrent que « les difficultés d'enseignement rencontrées ne peuvent être réduites aux difficultés d'apprentissage des élèves. » (Les éditeurs, Brousseau 1998, p. 163)
- Ils sont « le berceau de la plupart des concepts de la théorie des situations didactiques. » (ibidem)
- Ils sont « le meilleur exemple de la puissance de cette théorie. » (ibidem).

1. Répercussions dans la revue ?

	Période 1 1980-1990	Période 2 1990-2000	Période 3 2000-2010	Total
Brousseau G. (1980)	11	2	0	13
Brousseau G. (1981)	16	9	2	27
Total	27	11	2	40

Tableau 1. Nombre de citations des articles Brousseau 1980 et 1981 selon 3 périodes

Le tableau 1 quantifie les répercussions dans la revue de ces deux articles par le nombre de fois que ces articles ont été cités dans la revue RDM elle-même. On note une décroissance continue : pourquoi ?

- De la première période à la deuxième : en 1986 paraît dans la revue l'article « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. » et en 1987, le document « Rationnels et Décimaux » .
- De la deuxième période à la troisième : en 1998 paraît l'ouvrage TSD, où les deux articles de Brousseau (1980, 1981) sont intégrés comme deux chapitres du livre (pp. 165-197 et pp. 201-289), respectivement les chapitres 3 et 4.

Le titre de chacun des chapitres est rigoureusement identique à celui de l'article dont ils sont issus, le contenu quasi identique. Nous répertorions ci-après les quelques différences qui ne sont pas de forme.

Brousseau G. (1980) et chapitre 3 de TSD (1998)

On peut noter trois suppressions par rapport à l'article original :

Suppression 1 : « La situation en France de l'enseignement des décimaux en 1979 » (pp. 46-50 de l'article original). Cette suppression est signalée et justifiée ainsi par les éditeurs :

> Nous ne reproduisons pas ici ce supplément dans la mesure où l'objectif essentiel de l'ouvrage est de présenter et illustrer la méthodologie et la problématique, et où il est hors de question de présenter une mise à jour significative pour le lecteur de la fin des années 90. (p. 163, Brousseau 1998)

Brousseau avait donc mené l'étude de l'enseignement des décimaux en France sous les trois programmes des périodes suivantes : années 60, 70 et 79.

Suppression 2 : Fin de l'introduction de la page 13 à 14, signalé par la notation […] dans le livre : elle n'est pas justifiée par les éditeurs. Je reproduis ci-après in extenso le contenu de cette partie, car le projet de Brousseau y est clairement exposé :

> Divers projets de genèse du concept pourront être envisagés. L'étude des possibilités de les réaliser mettra en évidence les problèmes théoriques ou pratiques ainsi soulevés. Nous aboutirons alors à formuler des choix au sujet de la mise en expérience d'un processus didactique réalisant ce projet d'enseignement. Nous analyserons ensuite les enseignements qu'elle fournit sur les différentes questions posées.
>
> Nous ne donnerons pas d'autre but à cette étude que de présenter l'enseignement des rationnels et des décimaux en tant qu'objet d'études et source de questions de didactique, mais nous discuterons en temps voulu des problèmes scientifiques ou méthodologiques qui s'imposent.

Suppression 3 : Fin de l'article (qui n'est pas une conclusion) des pages 50 à 58 :
« Problèmes d'enseignement et problèmes de mathématiques / Epistémologie et mathématiques / La détermination des conceptions et des situations / De l'ordre discret à l'ordre dense / De la structure aux représentations / Des conceptions aux situations ».
Cette dernière suppression n'est ni signalée, et en conséquence, ni justifiée
On peut penser que la réunion dans un même ouvrage des deux articles rend caduque cette partie. En effet Brousseau dans une note signale :

> Le paragraphe a été ajouté à cause de la séparation en deux parties de l'article, afin de

permettre au lecteur de placer les deux paragraphes précédents dans la perspective de l'étude. (Brousseau 1980, p. 50)

Brousseau G. (1981) et chapitre 4 de TSD (1998)

Une seule suppression, celle de l'introduction de l'article, pp. 39-40 : elle n'est ni signalée, ni justifiée. On peut penser que, comme pour la dernière suppression de Brousseau 1980, la réunion dans un même ouvrage des deux articles rend caduque cette partie.
Cette version de l'article est augmentée de 6 pages autour du « tableau 1 » dans lequel Brousseau recense les différents sens du produit de deux rationnels. Pour introduire ce supplément, les éditeurs écrivent :

> Le texte que nous reproduisons ci-dessous a été rédigé par Guy Brousseau à la suite de nos questions sur la construction du Tableau 1. En fait, avec la générosité qui lui est coutumière, Guy Brousseau nous a offert l'histoire de ce tableau et de son contenu, leur raison d'être. Nous reproduisons l'essentiel de cette note. (p. 210)

La conclusion de l'article de 1981 devient le « postlude aux chapitres 3 et 4 ». Les éditeurs justifient comme suit ce déplacement :

> C'est en fait une conclusion commune aux deux articles sur les décimaux publiés en 1980 et 1981, dans laquelle Guy Brousseau exprime en quoi l'étude qu'il a présentée montre l'utilité de la recherche en didactique des mathématiques. Une question qui sera au cœur du chapitre 6 de cet ouvrage. (p. 291, Brousseau 1998).

Les éditeurs ont ajouté aux notes des articles initiaux de nombreuses notes qui enrichissent ou précisent les textes originaux.

2. Présence des principaux concepts fondamentaux actuels de la TSD

Comme l'écrivent les éditeurs de Brousseau 1998 à propos du chapitre 4 (c'est-à-dire Brousseau 1981) :

> D'une certaine façon ce texte peut être lu comme une suite du chapitre 1 qui présente les fondements de la théorie des situations didactiques, bien que certains des concepts de la théorie ne soient pas explicitement mentionnés. […] Cependant le lecteur attentif reconnaîtra les germes de ces concepts, il pourra même tenter l'exercice de reformuler complètement le chapitre 4 dans les termes de la théorie telle que le chapitre 1 la présente. (p. 199)

Comme le montre le tableau 2, Marie-Jeanne Perrin –Glorian dans son article « Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives » (1994) se réfère constamment aux deux articles mentionnés[1].

	Partie 2[2]	Partie 3[3]	Partie 4[4]	Total
Brousseau 1980	4	0	0	4
Brousseau 1981	16	1	2	19
Total	20	1	2	23

Tableau 2. Nombre de citations des articles de Brousseau dans Perrin-Glorian 1994

Elle expose remarquablement dans son article l'évolution de l'articulation et de la cohérence de certains concepts de la TSD, tout particulièrement dans la partie 2 où elle s'appuie sur les

[1] sauf bien sûr dans la partie « 1. La naissance de la théorie : avant 1978 ».
[2] Le développement et la diffusion de la théorie (1978-1989), pp. 116 - 132
[3] Rapports avec le système d'enseignement et prise en compte progressive de l'enseignant dans le modèle, pp. 132 - 135
[4] La période actuelle (depuis 1989), pp. 135, 142

deux articles de Brousseau (1980, 1981). Je vous renvoie donc à cet article pour une analyse détaillée. Ici je me contenterai de répertorier les concepts présents ou absents de ces deux articles.

Principaux concepts présents de façon explicite

Dans l'ordre de l'article de Perrin-Glorian 1994 ce sont : conceptions, obstacles, variables didactiques, contrat didactique, institutionnalisation.
A propos d'institutionnalisation, Brousseau (1980, 1981) parle de situations d'institutionnalisation, d'institutionnalisations interne et externe mais aussi de processus sans toutefois relier ce processus à celui de dévolution, non encore théorisé.

> Les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir. L'institutionnalisation est interne si un groupe fixe librement ses conventions selon un processus quelconque qui en fait un système quasi isolé. Elle est externe si elle emprunte ses conventions à une culture : c'est la situation la plus fréquente dans la didactique classique. (Brousseau 1981, p. 113)
> Notre étude épistémologique permet de comprendre que, pour qu'une théorie puisse être institutionnalisée, il est nécessaire qu'au préalable, elle ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans des discussions entre élèves, comme moyen d'établir des preuves ou d'en rejeter. Ce processus correspond à la troisième étape de notre analyse, celle où la notion est maniée comme notion mathématique. Nous appelons situation de 'validation' et 'd'institutionnalisation' les situations didactiques qui permettent de simuler ce processus. (Brousseau 1981, pp. 51 – 52)

J'ajouterai à ces concepts pérennes la présence d'une question fondamentale toujours à l'ordre du jour, celle de la reproduction d'une ingénierie didactique et le phénomène d'obsolescence, qui a donné lieu au travail de thèse d'Artigue (1984). Artigue (1990) commente ainsi les propos de Brousseau (1981, p. 85)

> On voit là s'affronter en fait deux types de reproductibilité : une reproductibilité externe, dynamique, qui se situe au niveau des 'histoires' et une reproductibilité interne, sans aucun doute moins facile à identifier, qui elle se situe au niveau du sens. (Artigue 1990, p. 299)

Principaux concepts présents de façon implicite

La notion de situation fondamentale est implicite dans le troisième niveau des objets du discours de didactique.

> […] 3. le niveau de l'analyse du concept et de ses genèses. Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des situations qui sont susceptibles de faire fonctionner une notion, en lui conférant les différents sens qui déterminent le concept correspondant. Seules, les différences de situations qui affectent le concept sont dans le champ de la didactique, elles sont le fait de variables à déterminer dans chaque cas. (Brousseau, 1981, p. 109)

La notion de situation adidactique est partiellement présente dans la notion de situation – problème qui peut être calculable (« calcul de situations ») grâce à des études a priori et en relation avec la notion de variable didactique.

> Parmi les conditions qui confèrent à la situation – problème ses propriétés didactiques (voir paragraphe 5.2.2) figurent :
> - la possibilité pour chaque élève d'avoir un nombre suffisant d'occasions de changer de niveau de connaissances,
> - des pénalisations implicites des procédures les plus complexes, elles-mêmes dues à une connaissance plus simple, par l'intermédiaire de coûts d'exécution et de probabilités d'erreurs plus élevés.
>
> […]Il est possible dans certains cas de s'aider d'études a priori, de 'calcul de situations'.
> […] Nous appellerons variables didactiques les variables de commande dont on montrera

> qu'elles ont un effet important – qualitatif – sur les évolutions des procédures. (Brousseau 1981, pp. 67-68)

La mémoire et non encore mémoire didactique

Pour Perrin-Glorian (1994), la notion de mémoire est nécessaire pour opérationnaliser celle de contrat didactique :

> La notion de mémoire devient nécessaire dès que l'on veut opérationnaliser celle de contrat didactique parce qu'elle est un moyen d'action sur le contrat. » (Perrin-Glorian 1994, p. 136)

Elle appuie ce commentaire par la citation suivante de Brousseau 1981 :

> Le maître est la mémoire de référence de la classe. Il se souvient des conventions, des accords et des faits pertinents. Il les rappelle à bon escient. C'est par ce rôle qu'il commande et contrôle les apprentissages. (ibidem, . p. 102)

Les principaux concepts fondamentaux absents

Trois grand absents : les concepts de milieu et de dévolution et la séparation situation adidactique / situation didactique qui vont se théoriser ensemble et ouvrir tout un champ de nouvelles recherches.

En conclusion

Mais les apports les plus importants à la communauté et à mes propres recherches de ces deux articles sont :
- L'étude exemplaire de la transposition didactique des décimaux dans l'enseignement en France (années 60, 70 et 79) que représente l'article de 1980.
- La méthodologie de l'ingénierie didactique mise en œuvre dans l'ensemble des deux articles comme l'atteste l'article d'Artigue (1990) et plus récemment mon cours à la dernière école d'été.
- Et enfin ces deux articles sont la source et le support de nombreux travaux de didactiques des mathématiques sur l'étude du numérique.

Références bibliographiques

Artigue M. (1984) *Une contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques*. Thèse d'état. Paris : Université de Paris VII.

Artigue M. (1990) Ingénierie didactique. *RDM* vol. 9, n°3. 281-308.

Bessot A. (2011) L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In Margolinas C. (ed) *actes de la 15ième école d'été*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Brousseau G. (1980) Problèmes de l'enseignement des décimaux. *RDM* vol. 1, n°1. 11-58.

Brousseau G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. *RDM* vol. 2, n°1. 37-127.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *RDM* vol. 7, n°2. 33-115.

Brousseau G. et N. (1987) *Rationnels et décimaux.* Publication de l'IREM de Bordeaux.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée sauvage. (1991 : 2ème édition)

Perrin-Glorian M-J. (1994) Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot (eds) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* (pp. 97- 147). Grenoble : La Pensée sauvage.

Les 30 ans de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM)

Relecture d'un article programmatique pour le développement d'une didactique comparée : "*Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la Course 20*"

par Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M-L. *RDM 20*(3). 2000

Florence **Ligozat**
Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education, Université de Genève
Florence Ligozat@unige.ch

Je voudrais tout d'abord remercier Teresa Assude qui est à l'initiative de cette table ronde pour avoir sollicité le groupe de recherche en Didactique Comparée, à Genève. En 2010, l'article intitulé "*Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la Course 20*", co-écrit par Gérard Sensevy, Alain Mercier & Maria-Luisa Schubauer-Leoni dans le vol 20/3 de RDM, a eu 10 ans. Lorsque j'ai pris connaissance de la commande *("montrer en quoi certains articles publiés dans la revue RDM ont eu un rôle essentiel dans votre vie de chercheur, dans la vie de la communauté des didacticiens et le rôle de la revue là-dedans"*), je n'ai pas eu d'hésitation quant au choix de l'article à commenter.

1) Pourquoi choisir cet article?

D'un point de vue personnel, cet article est à l'origine de mon engagement dans divers projets de recherche en didactique et surtout, de la réalisation d'une thèse de doctorat qui (re)travaille les concepts fondateurs de la didactique des mathématiques pour comprendre la logique des pratiques ordinaires d'enseignement et apprentissage des mathématiques de l'école primaire (Ligozat, 2008). La relecture de cet article produit toujours sur moi un certain effet de sidération que j'attribue à une densité descriptive peu égalée, à la fois systématique et lucide, qui exclut toute forme de péjoration, condescendance ou idéalisation des formes d'action que le professeur mène dans le cadre de cette course à 20. On y traite de ce que fait vraiment le professeur, et non pas de ce qu'il ne fait pas ou de ce qu'il devrait faire. Dans sa capacité à mettre à distance le jugement de sens commun pour faire émerger *la logique des faits didactiques*, l'article illustre parfaitement le fonctionnement heuristique des modèles dans le champ des sciences humaines et sociales.

C'est à travers l'un des principes fondamentaux posés par les auteurs, à savoir une démarche ascendante de l'analyse du projet d'action du professeur à partir des conditions d'établissement et de maintien de la relation didactique *in situ* que j'ai pu envisager de caractériser des pratiques enseignantes ordinaires entre contexte éducatif Français et Suisse Romande en les articulant à une analyse transpositive du texte du savoir à disposition dans ces deux institutions scolaire. Si ma thèse peut être considérée à bien des égards comme une étude plutôt meso et macro-didactique de projets d'enseignements de mathématiques, mon questionnement et ses aboutissements n'auraient pas été possibles sans des travaux d'échelle microscopique qui ont révélé le *primat de l'analyse de la mesogenèse pour comprendre les effets de l'action professorale sur ce que les élèves apprennent.* Ce fut l'objet de ma première publication dans RDM, avec Francia Leutenegger (Construction de la référence et milieux différentiels dans l'action conjointe. Le cas d'un problème d'agrandissement de distance, Vol 28/3, 2008).

Mais venons-en à une partie beaucoup plus intéressante, à savoir la portée de cet article pour la communauté des chercheurs en didactique. Avec la parution de [Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la Course 20], RDM met à disposition *un article fondateur pour l'évolution des approches didactiques* dans le monde francophone (et potentiellement au-delà, car ses auteurs l'ont doté d'un "cousin" paru en langue anglaise dans la revue Educational Studies in Mathematics – cf. Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, Ligozat & Perrot, 2005).

2) Un déplacement des enjeux traités par la théorie des situations didactiques en mathématiques

Cet article contribue à nourrir le "virage" qui s'opère au milieu des années 90 en didactique des mathématiques avec *un nouveau regard porté sur l'enseignant*. On trouve des traces de ce déplacement dans RDM avec les travaux de C. Margolinas, M-J Perrin-Glorian, D. Grenier, C. Comiti à partir de la Théorie des Situations Didactiques; avec les travaux d'Y. Chevallard sur l'analyse des praxéologies didactiques, tandis qu'A. Robert et ses collaborateurs se saisissent également du sujet en développant une double approche discursive et ergonomique des pratiques effectives. La fin des années 90 coïncide aussi avec *un intérêt croissant pour les pratiques d'enseignement / apprentissage ordinaire,* hors du contrôle épistémologique du savoir par une démarche d'ingénierie. Les chercheurs se rendent à l'évidence que le principe même de l'ingénierie masque une partie des contraintes institutionnelles qui pèsent sur le fonctionnement des systèmes didactiques, par l'emprise de la logique du chercheur sur celle du professeur afin de révéler des phénomènes didactiques centrés sur l'apprentissage de l'élève.

> Dans la recherche sur laquelle cet article s'appuie, nous sous sommes attachés à déplacer l'analyse désormais classique de l'élève – des élèves – dans la course à 20 vers celle du professeur et des techniques qu'il produit pour faire vivre la situation, considérant alors la course à 20 comme une situation expérimentale pour l'étude du comportement du professeur. En tant que telle, cette situation expérimentale implique un certain réductionnisme dont on doit se demander en quoi il peut empêcher de généraliser les résultats obtenus : nous aborderons cette question en fin d'article.

Sensevy, Mercier & Schubauer-leoni, 2000, p276

Par rapport aux autres travaux de la même génération, le tour de force épistémologique opéré dans cet article consiste à détourner une ingénierie didactique reconnue comme un modèle de genèse artificielle de la connaissance mathématique pour en faire un prototype d'étude expérimentale de l'action professorale. L'enjeu n'est plus les conditions épistémologiques de production de la connaissance, les rapports de l'élève à un milieu sous contrat...etc. mais les techniques produites par le professeur pour faire vivre *une* situation, au risque que son issue ne soit pas celle attendue par le chercheur. La robustesse épistémologique des situations "Course à 20" n'est plus considérée pour les apprentissages qu'elle peut produire mais pour les gestes d'enseignement qu'elle convoque *ipso facto*, et dont les auteurs font l'hypothèse qu'ils existent dans l'ordinaire des classes à l'état "dispersé". Ce changement de perspective n'est pas anodin. Il signe *le début d'un travail de reconceptualisation de certains concepts forgés en didactique des mathématiques* (contrat, milieu, chronogenèse, topogenèse, dévolution, institutionnalisation) à des fins plus larges que la théorisation des conditions d'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Néanmoins, ce choix de la Course à 20 comporte le paradoxe de reconvoquer une situation emblématique de la construction de la Théorie des Situations et une certaine naturalisation de la situation d'enseignement observée comme étant *a priori* a-didactique (j'y reviendrai dans le pointage des limitations).

3) L'apport théorico-méthodologique du "modèle de l'action du professeur"

L'article propose une démarche centrée sur l'élucidation de l'action du professeur, selon une *approche clinique et expérimentale* réalisée en deux temps : la description de l'action dans la "sémantique familière de l'action" (suspension théorique), puis une redescription à l'aide du langage du modèle (réorganisation théorique de l'empirie). L'enjeu de ces deux étapes vise à *prendre en compte le sens de leur action par les acteurs pour éviter les phénomènes de "sur-attribution" par une application descendante du modèle.*

1.2. Quatre éléments structuraux au fondement de l'action professorale

Nous distinguons quatre éléments structuraux fondamentaux de la relation didactique : *définir*, *réguler*, *dévoluer*, *instituer*. En d'autres termes, lorsqu'on enseigne, il y a nécessairement et essentiellement de la définition, de la régulation, de la dévolution, de l'institution. Nous avons postulé trois « objets » qui orientent l'action du professeur et se construisent en retour grâce à elle : au sein du système didactique, le professeur doit agir (définir, réguler, dévoluer, instituer) pour :

– produire les lieux du professeur et de l'élève (effet de topogenèse) ;

– produire les temps de l'enseignement et de l'apprentissage (effet de chronogenèse) ;

– produire les objets des milieux des situations et l'organisation des rapports à ces objets (effet de mésogenèse).

Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni, 2000, p267

Le développement théorique fondamental réside dans une intégration des catégories descriptives du temps didactique (chronogenèse), des places des acteurs (topogenèse) et de la production de rapports aux objets dans un milieu sous contrat (mesogenèse) introduites dans le cadre de la théorie de la transposition didactique (Chevallard 1985/91) puis de l'approche anthropologique du didactique (Chevallard, 1992), pour décrire finement la dynamique du contrat didactique (Brousseau, 1986). De l'avis des auteurs, "*les moyens que mobilisent un* *professeur et des élèves pour produire ces effets ont été peu étudiés*" (p267). Au-delà de l'analyse du fonctionnement du contrat didactique, il y a une volonté de théoriser la pratique didactique selon plusieurs niveaux de description (structures fondamentales, types de tâches, classes de techniques) et de les articuler entre eux pour fournir des "patterns" de l'action professorale (p296-298). Un prolongement théorico-technologique de cette mise en réseau des techniques et types de tâches est d'ores et déjà annoncé en termes de *jeux,* comme modèle générique de la pratique didactique :

> En premier lieu, il faut poursuivre le travail entrepris par Guy Brousseau (1998) dans la modélisation du système didactique en termes de jeux, en l'étendant à l'action du professeur lui-même. Les structures fondamentales que nous proposons (définir, réguler, dévoluer, instituer) sont elles-mêmes fonction du jeu au second degré que joue le professeur: un jeu sur le jeu de l'élève. Il faut pouvoir identifier ce jeu au second degré, le décrire, le modéliser – sans pour cela emprunter sans plus de façon les modèles actuellement disponible en théorie des jeux, qui sont marqués le plus souvent par une épistémologie rationaliste et solipsiste. Les modèles à produire devraient en effet rendre compte de la complexité communicationnelle et coopérative, de la logique pratique et de la spécificité didactique du travail professoral. La production de modèles du jeu du professeur nécessiterait sans aucun doute un effort d'envergure de la communauté des didacticiens des mathématiques.
>
> Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni, 2000, p298-299

D'une façon plus générale, le lecteur ne peut qu'identifier le modèle de l'analyse praxéologique des savoirs développé dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1998) comme principe sous-jacente à la construction du modèle de l'action du professeur par les auteurs. Et partant, que ce modèle a l'ambition de *produire du savoir sur la pratique didactique*, et qu'il est d'emblée envisagé comme devant évoluer vers une théorie.

En déplaçant la focale sur l'action des sujets de l'institution didactique, les auteurs se donnent la possibilité d'élargir l'analyse des interactions didactiques *in situ*, à l'analyse des logiques d'action observées au plan des individus mais articulées à un programme d'action collective orientée par des finalités plus larges (Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat & Flückiger, 2007). Même si ce n'est pas encore traité explicitement dans cet article, le travail de reconceptualisation engagé s'ouvre sur l'analyse ascendante des *déterminants institutionnels et situationnels* de l'action professorale, incorporant nécessairement l'analyse transpositive des savoirs (depuis le savoir tel qu'il est mis en forme dans la classe vers ses formes préfigurées dans les textes institutionnels). Cette dernière dimension se révèle dans les développements ultérieurs, avec la proposition d'une *stratification ternaire de l'action didactique conjointe du professeur et des élèves.*

10. Une vue synoptique du système de description théorique

Ce que nous montrons dans ce qui suit constitue une sorte de pense-bête dont l'approfondissement théorique et l'étude empirique permettront de complexifier, au fur et à mesure de l'étude, les relations entre les diverses catégories.

La description du jeu didactique *in situ* fait considérer les transactions didactiques comme produites au sein de jeux d'apprentissage. Ces jeux d'apprentissage sont eux-mêmes caractérisés à l'aide de trois systèmes de descripteurs.

FAIRE JOUER LE JEU
Jeux d'apprentissage
Définition -Dévolution- Régulation -Institutionnalisation
Mésogénèse-Chronogénèse-Topogénèse
Contrat didactique-Milieu

S'intéresser à la construction du jeu, c'est concevoir l'activité du professeur *in situ* comme actualisée au sein de tâches particulières. Comprendre le jeu, c'est comprendre les déterminations que sa construction (en tâches : ce que les élèves vont avoir à faire, dans la prévision du professeur) produit sur le jeu lui-même.

Il s'agit ici de reconstituer comment le professeur « joue le jeu » de construction du jeu (*via* les tâches dans lesquelles le jeu va s'actualiser).

CONSTRUIRE LE JEU
La nature des tâches de préparation
Le rapport effectif au savoir contenu dans les tâches
L'analyse épistémique des tâches

Hors de l'activité directement intentionnelle, il existe des déterminants généraux de l'activité du professeur, qui borne son action par des ensembles de contraintes et de ressources (l'activité adressée), ou qui sont le fruit de la théorie générale de la connaissance, en grande partie implicite, que ses conduites semblent révéler, et qui semblent pouvoir mieux faire comprendre celles-ci.

LES DETERMINATIONS DU JEU
L'activité adressée
L'épistémologie pratique

Extrait de "Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique", Sensevy, 2007, p 44

Ainsi, l'article prépare un questionnement nouveau qui apparait au début des années 2000 au sein des didactiques des disciplines scolaires. Dans les mois qui suivent la parution du "modèle de l'action du professeur", ces mêmes auteurs (dans un ordre différent toutefois!) pointent la nécessité de (re)problématiser l'approche didactique des situations d'enseignement et apprentissage ordinaires, sous l'angle des *dimensions spécifiques et génériques* qui les caractérisent (Mercier, Schubauer-Leoni & Sensevy, 2002). Tout en soutenant que "*les savoirs enseignés spécifient les interactions observables dans le monde scolaire, de manière irréductible*" (2002, p7), ces tenants d'une didactique comparée proposent de développer des démarches d'excentration par rapport aux cadres d'études contraints par le découpage institutionnel des savoirs[1], afin de lever le voile sur des effets de naturalisation propres à une entrée disciplinaire exclusive.

Au-delà de l'analyse des pratiques ordinaires en mathématiques, la modélisation de l'action du professeur (incorporant celle des élèves dans ses développements ultérieurs) draine une problématique plus large qui peut s'énoncer de la manière suivante :

[1] Il y a là une parenté évidente avec la construction des enjeux d'étude de la TAD, pour laquelle les disciplines d'enseignement ne sont ni plus ni moins qu'un objet d'étude parmi d'autres, et donc sujets à déconstruction et reconstruction à l'aide d'outils conceptuels tels que les praxéologies. Le courant comparatiste en didactique rejoint certaines préoccupations de la TAD, dans la mise en cause de l'assujettissement d'un champ de questions scientifiques à l'arbitraire d'un découpage institutionnel dont les visées ne sont pas la recherche, mais la transmission d'une culture / diffusion systématique des savoirs.

Les concepts théoriques développés dans le cadre des didactiques disciplinaires et celui de la didactique des mathématiques en particulier n'adressent-ils que des dimensions spécifiques d'un type de savoir dans les processus d'enseignement et apprentissage, ou bien capturent-ils aussi des dimensions plus génériques propres aux fonctions psychologiques des sujets, aux interactions sociales et langagières et aux contraintes institutionnelles plus large que l'école et la société exerce sur les systèmes didactique?

La relecture de cet article montre que la réponse à cette question est déjà implicitement engagée dans la deuxième voie, avec la (re)mise au travail des principaux concepts de la théorie de la transposition et de la théorie des situations, retenus pour leur potentiel générique de description de des systèmes didactiques.

4) Obstacles et limitations à la généralisation du modèle ?

Comme les auteurs ont pu l'anticiper dans leur propre discussion du modèle (p299-301), le choix de la Course à 20 comme support pour la caractérisation de l'action professorale ne va pas de soi, à plusieurs titres.

(i) La modélisation de l'action professorale proposée repose sur une certaine *naturalisation du potentiel a-didactique* de la situation d'enseignement observée, par la modélisation du milieu comme un système antagoniste de l'action de l'élève. Avec ce choix, c'est le milieu de la théorie broussaldienne qui est convoqué et qui prédéfinit les rapports qui doivent être établis aux objets de la situation selon le principe de retroaction. Autrement dit, la situation observée est "naturellement" dense en pratiques mathématiques et tout se passe comme si la modélisation de l'action professorale pouvait se suffire des catégories mises au jour par les auteurs. Or, dans les situations d'enseignement ordinaires, une strate supplémentaire s'impose : *l'analyse des enjeux de savoir potentiels dans les types de tâches épistémiques choisies par le professeur*, afin de pouvoir identifier la co-construction des savoirs pertinents dans l'action conjointe du professeur et des élèves (avec le risque de ne pas en trouver). Il est important de garder en tête que la modélisation telle qu'elle est présentée ici ne prend pas en charge la problématique transpositive puisque celle-ci est contrôlée par l'ingénieur didacticien. Si l'on replace cette situation dans le processus de transposition didactique au sein duquel le professeur travaille, il n'est pas dit que ce qui a du sens pour le chercheur, en a forcement pour le professeur. La "Course à 20" reste une situation prototypique relativement externe à la logique des pratiques ordinaires d'enseignement des mathématiques et son introduction "expérimentale" dans une classe crée une rupture par rapport aux pratiques didactiques sédimentées dans l'expérience du professeur. La question du sens de cette situation pour le professeur au niveau de la progression mathématique reste entière et questionne les conditions d'application du modèle présenté.

(ii) D'autre part, la situation d'enseignement apprentissage "course à 20" se présente explicitement comme un jeu quasi-isolé (avec des règles d'action, des gains, des pertes, une stratégie à construire – une fois que la stratégie est établie, la notion même de jeu s'évanouit). Elle est naturellement consistante avec la modélisation des situations didactiques en termes de jeux, telle que proposée par Brousseau (1998). Dans cet article, les auteurs se proposent de re-investir le modèle des jeux pour l'étendre à l'action du professeur (p298). Deux questions peuvent être soulevées : peut-on modéliser tout type de situation d'enseignement / apprentissage en termes de jeu, sans exercer une forme de réductionnisme qui pourraient être fatale à la spécificité des conditions d'émergence de certains savoirs (je pense notamment aux savoirs des sciences naturelles et sociales, compte tenu de la visée comparatiste des auteurs, dont j'ai parlé précédemment)? Les jeux, en temps que systèmes clos qui élémentent les enjeux de savoir, sont-ils aptes à rendre compte des nécessaires connexités à construire entre ces enjeux, au niveau du projet d'enseignement plus global?

Du côté de la modélisation de l'action du professeur elle-même, la proposition de trois catégories de techniques (chonogenétique, topogenétique et mesogenétique) existant dans un même niveau s'avère difficile à manipuler. Dans les pages 296-298, les auteurs proposent trois exemples de "mixte techniques" dans lesquels s'articulent techniques chonogenétique et topogenétique mais aussi des effets chronogenétique et topogenétiques de ces techniques. Premièrement il est frappant de constater que la catégorie des techniques mesogenétiques n'est pas présente dans ces exemples, comme si elle vivait à l'état latent dans les deux premières. Deuexièmement, la distinction entre une technique et ses effets n'est pas évidente. Si la mesogenèse est la dynamique de production des milieux par l'instauration d'un rapport des participants aux objets d'une situation didactique (au sens de Chevallard 1992), comment parler de "technique" mise en œuvre par le professeur à cet égard sans drainer systématiquement des techniques chronogenétiques et topogenétiques liées à la posture épistémologique du professeur dans le système didactique? Dès lors que le professeur intervient sur les objets du milieu ou sur les rapports des à ces objets, il a des effets de redéfinition de la topogenèse et de la chonogenèse, alors que l'inverse (l'intervention de l'élève sur les objets du milieu) ne se répercute pas systématiquement au niveau de la topogenèse et de la chronogenèse. Les développements ultérieurs du modèle en termes d'action conjointe tendent à abandonner la notion de "technique" mésogenétique, pour développer d'abord une analyse des rapports aux objets établis par les participants dans les gestes et le langage. Les techniques topogenétiques et chonogenétiques exercées par le professeur interviennent dans un second niveau d'analyse pour décrire le contrôle social des rapports aux savoirs établis dans le collectif classe (Ligozat, Wickman & Hamza, 2011).

Enfin signalons que le niveau des types de tâches n'a jamais été vraiment exploité au-delà du cas de la Course à 20, cédant la priorité, dans les études de classes ordinaires, à l'analyse de la structure des *jeux d'apprentissages* en termes de règles d'action dans un milieu et de développement de stratégies gagnantes. Si l'on considère que les types de tâche dont il est question dans cet article, peuvent constituer les éléments du jeu didactique joué par le professeur sur le jeu d'apprentissage de l'éléve[2], il faut admettre qu'un modèle praxéologique du savoir didactique des professeurs peine encore à exister, même au sein de ce qui est devenu une théorie de l'action conjointe en didactique (Sensevy & Mercier, 2007).

[2] Si l'élève se confronte à des types de tâches épistémiques, le professeur, lui assume des types de tâches didactiques.

5) Et le rôle de la revue RDM dans tout ça?

La publication de cet article dans la revue RDM lui a assuré une audience spécifique auprès des didacticiens (y compris dans les disciplines autres que les mathématiques) de par la réputation de cette revue qui publie depuis toujours des articles de recherche fondamentale en didactique. Sans que cela soit encore perceptible au moment de la publication, RDM s'avère être le premier lieu de diffusion des outils du comparatisme en didactique, rétrospectivement. En retour, l'impact que cet article a eu sur le développement des recherches comparatistes contribue au rayonnement de la revue, au-delà de la communauté des didacticiens des mathématiques. En effet, 10 ans plus tard, cet article est encore régulièrement cité dans de nombreux articles et/ou ouvrages non spécifiques du champ, et visant un public large de didacticiens et de chercheurs en sciences de l'éducation.

Au-delà de mon propre cas, il a suscité bien d'autres *vocations et emprunts*. Dans les vocations, je pense tout particulièrement à la thèse de S. Quilio (2008) en mathématiques aussi, mais également d'autres thèses "courageuses", en ce que leurs auteurs se sont appropriés des catégories d'analyse proposées dans cet article et qu'ils ou elles ont tenté de les mettre à l'épreuve de corpus de pratiques d'enseignement / apprentissage ordinaires qui ne concernent pas les mathématiques.

A propos d'autres objets disciplinaires à l'école,

- **FOREST, Dominique** (2006). *Analyse proxémique d'interactions didactiques.* Université de Rennes 2.
- **GRUSON, Brigitte** (2006). *L'enseignement d'une langue étrangère à l'école et au collège : vers une meilleure compréhension des situations didactiques mises en œuvre : analyse comparative de l'action de deux professeurs de CM2 et de deux professeurs de sixième.* Université de Rennes 2 (FR).
- **DEVOS-PRIEUR, Odile** (2006). *Rapports aux savoirs des professeurs d'école et développement des contenus en éducation physique : étude comparée de quatre cycles de basket-ball au cours moyen.* Université Toulouse 3 (FR).
- **RILHAC, Patrice** (2008). *Etude didactique comparative de pratiques d'élèves au collège en Mathématiques et en Education Physique et Sportive : vers la notion de jeux alternatifs.* Université Rennes 2
- **MARLOT, Corinne** (2008). *Caractérisation des transactions didactiques : deux études de cas en Découverte Du Monde Vivant au cycle II de l'école élémentaire.* Université Rennes 2 (FR).
- **BOCCHI, Pier-Carlo** (2008). *Le fonctionnement didactique de l'entrée dans l'écrit. Contribution à l'élaboration d'une théorie didactique de l'enseignement et de l'apprentissage.* Université de Genève (CH).
- **SANTINI, Jérôme** (2009). *Caractérisation de l'élaboration conjointe de la compréhension conceptuelle et des performances associées. Volcans et séismes au Cours Moyen*. Université Rennes 2.

A propos des transitions / découpages institutionnels des pratiques didactiques ...

- **MUNCH, Anne-Marie** (2009) *L'éducation/enseignement préscolaire à la lumière de la didactique comparée. L'étude de deux tâches/activités comme éléments des attentes en Institution de la petite enfance et à l'école enfantine à Genève.* Université de Genève
- **MANGEANT, Eric** (2009). *Approche didactique de la gestion des risques en escalade. Etude comparative de plusieurs institutions*. Université de Provence
- **MONNIER, Nathalie.** (2009). *L'activité didactique empêchée, entre contraintes et ingéniosité : étude de cas en éducation physique et sportive en milieu difficile.* Université de Toulouse 3
- **KERNEIS, Jacques.** (2009). *Analyse didactique et communicationnelle de l'éducation aux medias : éléments d'une grammaire de l'incertitude.* Thèse de Sciences de l'Éducation, Université Rennes 2.

- **CROSS, David** (2010). *Les connaissances professionnelles de l'enseignant. Reconstruction à partir d'un corpus vidéo de situations de classe en chimie.* Université de Lyon 2

Je terminerai mon commentaire en saluant le choix politique de la revue de publier des articles faisant appel à des cadres théoriques divers (ce qui n'est pas toujours le cas dans d'autres revues) et amorçant des perspectives nouvelles à l'articulation des cadres théoriques existants. On ne peut que souhaiter à RDM, cette "jeune trentenaire", de poursuive sa route dans les meilleures conditions !

Références Bibliographiques

Brousseau, G., (1986). Fondement et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 7* (2), 33-115.

Chevallard, Y., (1985/1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Chevallard, Y., (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Chevallard, Y., (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 19* (2), 221-266.

Ligozat, F. (2008). *Un point de vue de didactique comparée sur la classe de mathématiques. Etude de l'action conjointe du professeur et des élèves à propos de l'enseignement / apprentissage de la mesure des grandeurs dans des classes françaises et suisse romandes.* Thèse de Doctorat en Sciences de l'Education. Université de Genève et Université de Provence

Ligozat, F. & Leutenegger, F., (2008). Construction de la référence et milieux différentiels dans l'action conjointe du professeur et des élèves. Le cas d'un problème d'agrandissement de distances. *Recherches en didactiques des mathématiques, 28(3),*

Ligozat, F., Wickman, P-O. & Hamza, K. (2011 / à paraître) Using practical epistemology analysis to study the teacher and students' joint action in the mathematics classroom. Paper presented at the 7th Congress of the European society for Research in Mathematics Education, W16, 9-13 Feb. 2011. Rzeszow university, Poland.

Quilio, Serge (2008). *Contribution à la pragmatique didactique. Une étude de cas dans l'enseignement des nombres rationnels et des décimaux à l'école élémentaire.* Thèse de Doctorat en Sciences de l'Education. Université de Provence

Schubauer-Leoni, M.-L., Leutenegger, F., Ligozat, F., Flückiger, A., (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes qu'il peut / doit traiter. In G. Sensevy & A. Mercier, [Eds], *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. (pp 51-91) Coll. Paideia, Rennes : PUR.

Mercier, A., Sensevy, G., & Schubauer-Leoni, M.-L. [Eds] (2002). Vers une didactique comparée. [Numéro spécial] *Revue Française de Pédagogie 141*, 135-171.

Sensevy, G., (2007a). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy & A. Mercier, [Eds], *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. (pp 13-49) Coll. Paideia, Rennes : PUR.

Sensevy, G., Mercier, A., Schubauer-Leoni, M.-L., Ligozat, F. & Perrot, G., (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class, [Special issue] *Educational Studies in Mathematics, 59* (1,2,3), 153-181.

Sensevy, G. & Mercier. A. (2007) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves.* Rennes : PUR.

Les 30 ans de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM)

A propos de l'article de Marianna Bosch, Yves Chevallard : *« La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique » (RDM 19/1)*

Yves **MATHERON**

IFE-ENS de Lyon & UMR P3 ADEF

yves.matheron@ens-lyon.fr

Résumé
Ce texte est la réponse à une commande adressée à certains d'entre nous à l'occasion de la célébration des 30 ans de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM). Il s'agissait d'exposer au séminaire national de l'ARDM quelques-uns des traits saillants d'une publication de la revue RDM que l'on considère personnellement comme marquante. De nombreux textes publiés par RDM méritent évidemment ce qualificatif ; il fallait faire un choix. Le mien s'est porté sur l'article cosigné par M. Bosch et Y. Chevallard relatif aux ostensifs. Il reprend en français certains des résultats du travail de thèse de M. Bosch (1994) qui ont nourri mon travail sur la mémoire didactique.

Mots clés
Ostensifs, non-ostensifs, mémoire didactique.

L'article « La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique » paraît dans RDM 19/1, en 1999. Cinq années se sont écoulées depuis que Marianna Bosch a soutenu à Barcelone sa thèse intitulée *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. L'article expose une partie des résultats théoriques contenus dans la thèse : ceux relatifs aux outils matériels et perceptibles du travail mathématique. Pour cette raison, ils sont nommés « ostensifs ». Il étend les résultats de la thèse à l'activité mathématique en général, au-delà du seul cas de la proportionnalité qui en fournissait le substrat mathématique et empirique.

1. Une rencontre personnelle avec la thématique développée dans l'article

Puisque cette contribution est la réponse à une commande adressée à plusieurs d'entre nous à l'occasion des 30 ans de la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques* (RDM), commande demandant d'évoquer un article jugé marquant et publié par la revue, on voudra bien me pardonner une entrée en première personne ; l'aspect « marquant » devant, en bonne logique, se rapporter à la ou les personnes qui ont été… marquées. Cette publication dans

RDM constitue en effet, pour moi, à la fois l'aboutissement et le commencement d'une petite histoire.
Marianna Bosch avait eu l'occasion de rendre compte de son travail de thèse lors d'un séminaire de l'ARDM en 1995. Présent dans la salle, ce que j'entendais de son exposé résonnait fortement avec ce que je recherchais, alors que j'étais engagé dans ma thèse sur la mémoire didactique. Les deux thèmes – ostensifs et mémoire – peuvent *a priori* paraître éloignés l'un de l'autre. Je retrouvais néanmoins, dans l'approche des mathématiques présentées comme activités accomplies grâce à des outils matériels, une dimension entrevue, mais non développée jusqu'alors, de l'abord de la mémoire didactique. Aussi, un petit groupe constitué majoritairement de non hispanophones, s'était formé en 1995 autour d'Alain Mercier qui dirigeait alors ma thèse, afin d'étudier de manière plus serrée le contenu de la thèse de Marianna Bosch.
L'orientation théorique que j'avais prise ne reposait en effet ni sur des soubassements psychologiques qu'on sait prédominants dans l'étude courante de la mémoire (Lieury parlait de « mémoire logique » pour caractériser l'activité mathématique, ce qui est de peu d'utilité pour qui voudrait aborder son étude à partir de ce domaine des sciences humaines), ni non plus sur le modèle des automates à pile de mémoire comme c'était le cas des travaux menés sur ce sujet quelques temps auparavant, en Théorie des Situations Didactiques (TSD), par Julia Centeno et Guy Brousseau. J'avais quant à moi opté pour un cadre théorique construit sur les résultats engrangés, au cours du XX^e^ siècle, en sociologie et anthropologie de la mémoire. Ils partaient tous du principe énonçant que les types de mémoire se spécifient selon les groupes sociaux qui les produisent (Halbwachs, Evans-Pritchard, Douglas, Namer). Ils indiquaient ainsi une voie originale pour l'étude de la mémoire didactique : non pas partir du sujet épistémique, mais plutôt des institutions sociales dédiées à l'étude des mathématiques. L'étude institutionnelle ayant été faite, les conséquences mémorielles s'en déduisent pour ce qui concerne leurs expressions propres aux sujets – professeur et élèves essentiellement –, selon les positions qu'ils y occupent.
Or, un pan de l'anthropologie de la mémoire, initiée par exemple par les travaux de Leroi-Gourhan, plaçait la recherche de ce qui fait le propre de la mémoire humaine, non pas exclusivement à l'intérieur – « dans les têtes » diraient certains –, mais à l'extérieur des personnes : dans les communautés, les outils et les gestes qui activent ces outils. Travailler ce thème, c'était accorder davantage d'importance à la question de la mémoire portée par les communautés qui s'adonnent à l'activité mathématique et à son étude, car c'était rechercher la mémoire dans les outils même de la pratique des mathématiques et dans les gestes qui permettent de les activer. Au-delà des lieux communs sur l'activité mathématique – raisonner logiquement, utiliser à bon escient les théorèmes et les techniques qu'ils fournissent, faire preuve d'imagination, d'intuition et d'extrapolation, posséder une « mémoire logique » selon l'approche psychologique, etc. – qui servent de viatique à beaucoup de ceux qui parlent sur les mathématiques, le travail de thèse de Marianna Bosch fournissait une étude matérialiste conséquente des outils pour ce type particulier des activités auxquelles se livrent les Hommes. C'était donc un moyen nouveau pour saisir la spécificité de la mémoire didactique en mathématiques.

2. La notion d'ostensif : une longue gestation

Le terme « d'ostension » a une longue histoire en didactique des mathématiques. C'est sans doute en 1977 avec le DEA d'Harrisson Ratsimba-Rajohn qu'il apparaît officiellement dans ce champ scientifique. Il sera ensuite repris et développé dans les travaux ultérieurs menés en TSD (Berthelot & Salin, 1992 ; Brousseau, 1996). Ce terme désigne une forme didactique

particulière et le contrat qui lui est associé.
Une autre acception se faisait néanmoins jour dès le DEA de Denise Pascal (1980) : celle de la perte ou de la conservation de l'information, qui est dite ostensive parce qu'elle se donne à voir. L'objet de ce DEA est l'étude des erreurs des élèves dans des calculs qui font intervenir zéro : par exemple des erreurs du type $0 \times 4 = 4$, ou encore l'affirmation que la solution de l'équation $2x = 0$ est 2 (ou -2, ou $\frac{1}{2}$). L'explication du phénomène est trouvée dans la perte d'information ostensive dans des écritures telles que $5 \times 0 = 6 \times 0$, tandis que les différences ostensives, donc perceptibles, sont généralement conservées, comme c'est le cas dans des écritures du type 2×4 et 2×5 qui les indiquent différentes. Dans le domaine du calcul algébrique, le travail demandé aux élèves aboutit en effet, le plus souvent, à une diminution de la complexité ostensive des expressions traitées, tout en conservant leurs différences ostensives. Par exemple, la factorisation d'expressions comme $9x^2 + 6x + 1$ et $25x^2 + 10x + 1$ réduit la complexité de leur écriture tout en préservant leur différence ; ce qu'attestent leurs écritures factorisées. Donner des réponses comme $0 \times 4 = 4$ et $0 \times 5 = 5$, permet de respecter cet *habitus* puisque la complexité ostensive est réduite tandis que la différence ostensive est conservée. Le fonctionnement de la dialectique *praxis – lexis* induit une prédominance de la lecture ostensive et des *habitus* conservatoires sur la pratique, et engendre ces erreurs d'élèves. Il n'y a pas à rechercher d'explication dans une « difficulté conceptuelle » ou une « mystique du zéro ».
En 1990, dans une intervention au séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble publiée dans les actes en 1991, Yves Chevallard expose la dialectique entre dimensions instrumentale et sémiotique de l'activité mathématique. Apparaît alors le terme de « praxème », repris de l'approche praxématique en linguistique développée par Lafont (1978). Est praxème un objet pris dans des pratiques au cours desquelles sont manipulés des objets matériels relevant de divers registres sémiotiques. La manipulation des praxèmes permet d'évoquer l'objet, de le rendre présent. Par métonymie, certains praxèmes deviennent emblèmes d'objets ; il en est ainsi, par exemple, de « la méthode du pivot de Gauss » ou de « la fonction logarithme ».
Ce n'est guère qu'en 1994, dans la thèse de Marianna Bosch, qu'est défini le terme « d'ostensif » en tant qu'outil du travail mathématique ayant une réalité matérielle, perceptible. Les autres outils du travail mathématique, que l'on désigne ordinairement sous les termes de « concepts », « idées », « intuitions », ne peuvent qu'être évoqués grâce à divers types d'ostensifs et sont désignés comme des « non-ostensifs ». L'article de 1999 expose en français une partie du travail de la thèse écrite en espagnol. L'arrivée à maturité d'un concept didactique, en germe dès les années 1980, aura nécessité une quinzaine d'années. Cinq années plus tard, soit à l'issue d'une vingtaine d'années de gestation, ce travail est enfin diffusé de manière plus large en direction de la communauté didactique à travers sa revue RDM.
L'article se décline en 7 paragraphes : 1. Un postulat fondamental 2. La modélisation anthropologique du mathématique 3. Un double questionnement et une dichotomie fondamentale 4. La dialectique de l'ostensif et du non-ostensif 5. Les registres ostensifs et la culture occidentale 6. La dimension ostensive de l'activité mathématique 7. Un modèle de l'activité mathématique.

3. Le positionnement épistémologique des auteurs (paragraphes 1 & 7)

Les auteurs définissent, dans le premier paragraphe, l'objet central de la didactique des mathématiques : ce n'est pas l'étude des sujets, les apprenants et les enseignants, mais le savoir mathématique qu'ils sont censés étudier ensemble. Selon ce point de vue, s'il y a un « mystère » didactique à dévoiler, celui-ci réside dans les mathématiques, et non dans les sujets qui ont à apprendre et à enseigner les mathématiques. Deux conséquences en résultent. Tout d'abord l'absence d'enfermement de l'objet de la didactique des mathématiques dans les seules institutions d'enseignement. Ensuite une rupture qu'a dû assumer la TSD, et derrière laquelle se rangent les auteurs, à travers la notion de « situation fondamentale » en tant que définition de la connaissance mathématique. La TSD postule encore que les connaissances mathématiques ne peuvent s'appréhender qu'à travers les activités qu'elles permettent de réaliser, les problèmes qu'elles permettent de résoudre. Les mathématiques doivent par conséquent être considérées comme une activité structurée, en situation, et qui se développe contre un milieu.

La transposition didactique montre que le savoir mathématique, qu'il soit savant, à enseigner ou enseigné, est à l'origine de toute problématicité didactique. Aussi le savoir ne peut-il être pris comme un donné non questionnable, et les recherches en didactique des mathématiques sont-elles conditionnées par la modélisation des mathématiques à laquelle on recourt. La modélisation proposée par les auteurs est développée dans le paragraphe 2, intitulé « modélisation anthropologique du mathématique ». Comme elle est désormais bien connue en didactique des mathématiques, ce court texte ne la développe pas mais se limite à la rappeler à travers la dénomination de ses diverses catégories : institutions, individus, positions, rapports, praxéologies.

Les auteurs précisent, dans le paragraphe 7, comment leur cadre théorique se démarque des autres modèles de l'activité mathématique qui ont rencontré, eux aussi, la dimension ostensive de l'activité mathématique ; il s'agit notamment de la notion de « registre de représentation sémiotique » proposée par Raymond Duval. Pour M. Bosch et Y. Chevallard, l'approche cognitive dans laquelle se situe cet auteur opère une distinction revendiquée entre tâche mathématique et tâche cognitive, d'où découle une implication de la tâche mathématique dans la tâche cognitive. Les tâches mathématiques sont prises alors comme un donné, sans que leur description soit problématisée. Il en résulte une appréhension des difficultés des élèves, par exemple sur l'articulation des registres sémiotiques, reposant avant tout sur ce qui relève du cognitif, c'est-à-dire du non mathématique. Les objets ostensifs sont alors considérés comme ingrédients mathématiquement contingents, même s'ils sont reconnus nécessaires au fonctionnement cognitif propre à cette activité. Or pour les auteurs de l'article, les erreurs d'élèves – s'il s'agit d'elles – sont à rapporter à une praxéologie mathématique en construction, devant être questionnée du point de vue des éléments qui la constituent, notamment du point de vue de la technique permettant d'accomplir la tâche.

L'article revendique une assez grande proximité avec la modélisation proposée par Gérard Vergnaud en Théorie des Champs Conceptuels. Néanmoins, ils reprochent à cette théorisation de n'intégrer l'activité symbolique et langagière à l'activité mathématique qu'à titre d'accompagnement, d'aide essentielle inévitablement externe. Ils citent, à l'appui de ce jugement, un passage de l'article de G. Vergnaud paru dans RDM 10/2-3 : « le symbolisme mathématique n'est à rigoureusement parler ni une condition nécessaire ni une condition suffisante de la conceptualisation ; mais il contribue utilement à cette conceptualisation […] »

Les auteurs se démarquent finalement des deux approches psychologiques de l'activité mathématique qu'ils ont évoquées, car elles promeuvent une conception des mathématiques vues comme constituées d'entités abstraites acquises mentalement. Ils y opposent la vision des mathématiques comme ensemble d'activités qui se mènent à bien grâce à des outils que « l'ouvrier-mathématicien » fait travailler ; il teste à la fois leur efficacité et la maîtrise qu'il en a acquise. La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) intègre alors ces outils comme constituants de base du savoir mathématique.

4. Ostensifs et non-ostensifs

Les paragraphes 3 et 4 constituent l'un des fondements de l'article dans la mesure où ils en reprennent des éléments du titre. Les paragraphes 5 et 6 en sont des prolongements et des approfondissements. Ils traitent de la pluralité des registres ostensifs, de la péjoration de l'écrit dans la culture occidentale, de la réduction de l'épaisseur ostensive au long du processus de mathématisation, de l'instrumentalité et de la sémioticité des ostensifs, ainsi que de la sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs.

Le paragraphe 3 débute par la reprise d'une problématique déjà présente dans l'article de 1991 sur les praxèmes : les « concepts » mathématiques sont de nouveau définis comme des émergents, non plus de pratiques mais de praxéologies, car la théorie a depuis avancé. Il se trouve que leur nature, si elle est engendrée par des pratiques institutionnelles, rencontre néanmoins la vision occidentale des activités humaines qui privilégie celles vues comme relevant de « l'esprit » au détriment de celles vues comme relevant de la « main ». Appliquée aux mathématiques, une telle vision minore, voire refoule, la prise en compte des outils matériels et valorise la fonction productrice de concepts des mathématiques. Les instruments matériels utilisés dans l'activité mathématique sont alors considérés comme des supports ou des aides, et les symboles mathématiques comme des signes d'objets « abstraits » qu'ils représenteraient ; ces concepts se situant forcément au-delà de la matérialité d'une simple écriture. A l'opposé d'une telle axiologie culturelle qui donne le primat aux activités de l'esprit, l'article s'attache à montrer comment l'activité mathématique est conditionnée par les instruments matériels, visuels, sonores, gestuels et tactiles mis en jeu et qui en sont les ingrédients premiers. De tels objets matériels sont nommés « objets ostensifs », parce qu'ils se « donnent à voir », qu'ils sont perceptibles à l'aide des sens. Leur manipulation adéquate permet d'évoquer ou d'invoquer d'autres types d'objets du travail mathématique, appelés non-ostensifs, qui existent institutionnellement mais n'ont pas de réalité matérielle en tant que telle : concepts, idées, intuitions, notions, etc.

La distinction ainsi opérée ne s'inscrit pas dans les distinctions courantes corps/esprit ou action/pensée. A cela plusieurs raisons. Si les non-ostensifs émergent de la manipulation des ostensifs, en retour et de manière dialectique sans qu'on puisse parfois décider de l'antériorité d'un type d'objets sur l'autre, ils guident et contrôlent cette manipulation. Ainsi on ne peut réaliser une activité mathématique sans évoquer ou invoquer, à l'aide d'ostensifs, des non-ostensifs ; il y a co-activation. Les auteurs donnent divers exemples : ainsi la résolution de l'équation $2^x = 10$, indiquée par les divers ostensifs qui constituent son écriture, appelle l'utilisation du non-ostensif « logarithme », de même d'ailleurs que le non-ostensif « équation ». On voit par là que la manipulation d'ostensifs est réglée par des non-ostensifs, et que le rapport établi avec eux est le produit d'une construction institutionnelle et le fruit d'un apprentissage. Par ailleurs, le rapport dialectique ostensifs/non-ostensifs se retrouve dans la double valence instrumentale et sémiotique attachée aux ostensifs. Enfin, le développement de l'activité mathématique voit disparaître la pluralité ostensive originelle ; une tendance à l'économie entraine une réduction chirographique, réduction des gestes de la main.

5. Développements : mémoire et activité mathématique

Comme indiqué, cet article rencontrait les préoccupations et les cadres théoriques, considérés ordinairement comme externes à la didactique des mathématiques, mais à l'aide desquels je travaillais dans ma thèse sur la mémoire didactique en mathématiques : l'anthropologie de la mémoire (Leroi-Gourhan, Candau), la sociologie de la mémoire et de la cognition (Halbwachs, Namer, Douglas, Bourdieu), la philosophie de la mémoire (Descartes, Ricœur), l'histoire des mathématiques (le rôle des écritures symboliques dans l'avancée des

mathématiques).
Au-delà de l'éclairage nouveau fourni par cet article, définissant plus précisément la nature des objets constitutifs des activités mathématiques, la pertinence de l'outillage théorique permettait d'aborder plus fermement les phénomènes mémoriels relevant des mathématiques et de leur étude ; notamment leurs manifestations les plus en vue, désignées par les termes d'oubli et de rappel. D'une part, la réduction chirographique conjuguée au principe d'économie de l'énergie cognitive spécifique des institutions, autorise l'oubli des manipulations ostensives antérieurement coûteuses. D'autre part, parce qu'ils évoquent des non-ostensifs, les ostensifs peuvent jouer un rôle de « détonateurs mémoriels » autorisant le rappel ; c'est-à-dire le replacement au sein d'un lieu mathématique (domaine, secteur ou thème). Enfin, si l'on veut bien temporairement oublier les cadres mathématiques dans lesquels évoluent les non-ostensifs qui règlent la manipulation des ostensifs, ces derniers autorisent alors les extensions d'usage nécessitées par la résolution de problèmes nouveaux. Il s'agit en ce point de l'ouverture d'une piste pour l'étude de la créativité mathématique. L'observation de tels phénomènes, par nature erratiques et labiles dans l'enseignement « ordinaire », devient plus aisée dans le cadre d'une genèse et d'une production artificielles de mathématiques telles qu'on les favorise chez des élèves auprès de qui sont passées des ingénieries didactiques conçues à cet effet.

Références bibliographiques

Berthelot, R. & Salin, M.–H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université de Bordeaux I.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Thèse de doctorat. Barcelona : Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/1, 77-124.

Brousseau, G. (1996). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In Noirfalise, R. & Perrin-Glorian, M-J. (éds), *Actes de la VIII^e^ École d'été de didactique des mathématiques*, (p. 3-46). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Brousseau, G. & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques,* 11/2&3, 167-210.

Candau, J. (1996). *Anthropologie de la mémoire*. Paris : PUF.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble* (pp. 103-117). Grenoble : Université Joseph-Fourier.

Douglas, M. (1986). *Ainsi pensent les institutions*. trad. franç. Paris : Usher (1989).

Halbwachs, M. (1925). *Les cadres sociaux de la mémoire*. Edition de 1994 avec postface de Namer, G. Paris : Albin Michel.

Halbwachs M. (1950). *La mémoire collective*. Edition de 1997 avec préface et postface de Namer, G. Paris : Albin Michel.

Leroi-Gourhan, A. (1964). *Le geste et la parole II, La mémoire et les rythmes*. Paris : Albin Michel

Lieury, A. (1996). *Méthodes pour la mémoire. Historique et évaluation*. Paris : Dunod.

Matheron, Y. (2009). *Mémoire et étude des mathématiques. Une approche didactique à caractère anthropologique*. Rennes : PUR.

Namer, G. (1987). *Mémoire et société*. Paris : Méridiens Klincksieck.

Pascal, D. (1980). *Le problème du zéro. L'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur*. Mémoire de DEA de l'Université d'Aix-Marseille II et de l'Université de Bordeaux I. Marseille : IREM d'Aix-Marseille

Ratsimba-Rajohn, H. (1977). *Étude de l'introduction ostensive d'un objet mathématique*. Mémoire de DEA de l'Université de Bordeaux I. Bordeaux.

Les 30 ans de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM)

« Epistémologie et didactique » (M. Artigue, 1990) : 30 ans après

Maggy **SCHNEIDER**
Université de Liège
mschneider@ulg.ac.be

Résumé
Pour célébrer les 30 ans de la revue « Recherches en Didactique des Mathématiques », j'ai choisi de commenter un article de Michèle Artigue sur les relations étroites entre l'épistémologie et le didactique. Je m'en explique ci-dessous avant de résumer ce que je retire de cet article. Je développe enfin en quoi il reste toujours d'actualité.

Mots-clés
Epistémologie, didactique, obstacle, conception

1. Motivation du choix

Ce choix est d'abord lié à mon histoire personnelle, mes travaux de thèse de 83 à 88 m'ayant amenée à «entrer en didactique » par la notion d'obstacle épistémologique. A l'époque, les cadres conceptuels français n'avaient pas forcément pignon sur rue en Belgique et la réflexion sur l'enseignement des mathématiques s'y appuyait essentiellement sur des recherches de nature épistémologique, à la manière des travaux de plusieurs IREM. Il ne m'était pas forcément permis de convoquer les cadres didactiques français et je pressentais la difficulté de mener une recherche digne de ce nom à mes yeux à partir du travail qui m'était demandé, à savoir construire un projet d'enseignement de l'analyse mathématique pour des élèves des deux dernières années de lycée. Fort heureusement, j'avais récolté dans ce contexte de nombreuses données, sous forme d'erreurs ou de réactions des élèves aux questions posées, qui me semblaient relever, étant donné ma formation antérieure en épistémologie, d'un schéma interprétatif unifiant lié à une conception des mathématiques relevant du positivisme empirique. J'avais alors argumenté que cette attitude épistémologique était, à mes yeux, un obstacle lui aussi de nature épistémologique tel que le décrivait Brousseau.

Une deuxième raison qui m'a poussée à choisir cet article de M. Artigue est qu'il s'agit d'un de ces textes qui mettent les théories didactiques à distance en retraçant leur histoire, comme a pu en écrire aussi M.-J. Perrin, et qui facilitent ainsi l'entrée dans une manière de penser à qui n'en est pas familier. C'est que cette manière est propre à un monde de chercheurs qui a ses codes propres, pas forcément explicités, et dont l'appropriation est entravée par un certain « monumentalisme » (au sens de Chevallard) dans l'enseignement … de la didactique.

Une troisième raison, last but not least, est que ce lien entre épistémologie et didactique semble s'être relâché et que, si ce qu'on appelle « didactique » entretient des relations étroites avec de nombreuses autres disciplines issues des sciences humaines, l'épistémologie est ce qui la relie le plus étroitement à ce qui fait l'essence de l'activité mathématique. J'y reviendrai.

2. Objet et plan de l'article

Dans « Epistémologie et didactique », Artigue questionne, au travers d'un traitement approfondi d'exemples, les relations entre l'épistémologie et le didactique ainsi que la fonction de l'analyse épistémologique en didactique. Les deux premières pages sont consacrées à une section intitulée « Epistémologie - Objets du savoir scientifique - Objets d'enseignement » et les deux suivantes abordent le lien entre « Epistémologie et Théorie des situations didactiques ». L'auteure s'étend ensuite sur les obstacles (« Epistémologie et obstacles », 17 pages) et enfin sur les conceptions (« Epistémologie et conceptions, 14 pages).

Dans la première section, Artigue illustre que non seulement les concepts mathématiques mais aussi des notions métamathématiques telle que la rigueur ont une historicité et souligne que « [...] l'analyse épistémologique aide la didactique à se déprendre de l'illusion de transparence des objets qu'elle manipule au niveau du savoir et aide le didacticien à se dégager des représentations épistémologiques erronées que tend à induire sa pratique d'enseignant ». Dans la deuxième, elle développe que la genèse historique est un « promontoire d'observation » pour analyser un enseignement donné ou une « base de travail » pour élaborer une genèse scolaire. Et ce, en raison du fait qu'elle éclaire sur ce qu'est la culture mathématique, même si de nombreuses questions se posent : entre autres, Que transposer de cette culture? Y-a-t-il des transpositions minimales pour ne pas en dénaturer le sens ? Est-ce possible ? Sous quelles conditions ? Quelles sont les contraintes et leurs effets ?

L'importance de la section intitulée « Epistémologie et obstacles » est justifiée par le fait que la visibilité de l'épistémologie en didactique se focalisait, à l'époque, sur la notion d'obstacle. Artigue y fait l'historique de la notion d'obstacle de Bachelard à Brousseau en soulignant, à l'instar de ce dernier, le changement sur le statut de l'erreur que cette notion a provoqué : non pas « effet de l'ignorance […] ou du hasard » mais plutôt « effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant se révèle fausse, ou simplement inadaptée » (Brousseau, 1976).

Dans cette section, Artigue fait une analyse fouillée d'exemples diversifiés relatifs aux obstacles identifiés par Brousseau sur les rationnels et décimaux, au travail de Duroux sur la valeur absolue, à l'épistémologie des nombres relatifs selon Glaeser, aux obstacles épistémologiques liés au concept de limite tels qu'étudiés par Cornu et Sierpinska, à la réduction monotone dans la perception des suites numériques mise en évidence par Robert, aux travaux de Viennot sur l'apprentissage des lois de la mécanique classique et à ceux de Closset sur le raisonnement séquentiel en électrocinétique. De cette analyse émergent des questions qui se posent et qui font débat lorsqu'on cherche à caractériser le concept d'obstacle épistémologique : Peut-on parler d'obstacles épistémologiques s'il n'y a pas identification d'erreurs et simplement celle de difficultés? Doit-on attester de leur apparition et de leur résistance dans l'histoire des mathématiques ? De leur caractère inévitable dans l'apprentissage des élèves ? En quoi consiste leur statut de connaissance qui a son domaine de validité ? Peut-on parler, dans certains cas, d'un renforcement des obstacles épistémologiques par des obstacles didactiques ? Artigue en conclut l'intérêt de considérer ce qu'elle appelle « processus générateurs d'obstacles » parmi lesquels la « généralisation abusive », productrice par ailleurs et illustrée par le traitement des fonctions au 18ème siècle comme des polynômes continués via les développements en série ou le calcul sur les quantités imaginaires basé sur l'application du principe de continuité ; la « régularisation formelle abusive » qui pousse, par exemple, les élèves aux abus de la linéarisation tels que « distribuer » un exposant sur les termes d'une somme ; la « fixation sur une contextualisation ou une modélisation familières » comme l'attachement excessif au modèle additif des pertes et des gains à propos des nombres relatifs et « l'amalgame de notions sur un support donné » à l'origine d'erreurs constatées dans le « traitement des longueurs et des aires, tenues de varier dans le même sens ». Elle termine par la question de l'intervention didactique, du niveau où elle doit se situer : obstacles particuliers ou processus générateurs, et du type de transposition didactique auquel conduit une conception de l'apprentissage en termes d'obstacles.

Parent du concept d'obstacle, celui de conception fait aussi l'objet d'une longue section « Epistémologie et conceptions ». Artigue montre que le mot « conception » est souvent utilisé sans qu'on se sente obligé de le définir, du moins dans un premier temps, et renvoie à d'autres notions connexes : les « modèles » chez Bessot et Richard, les « théorèmes en acte » de Vergnaud et les « misconceptions » dont parlent de nombreuses recherches anglo-saxonnes. Au-delà des origines et des définitions, le travail sur les conceptions met en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique et leur adaptation plus ou moins bonne à la résolution de telle ou telle classe de problèmes. Il aide aussi à lutter contre l'illusion de transparence de la communication didactique inspirée de modèles empiristes de l'apprentissage.

Comme à la section 3, Artigue mène son investigation sur base d'un traitement d'exemples diversifiés : modèles exprimés par des étudiants à propos de la convergence de suites numériques dans l'étude de Robert, conceptions du cercle chez les élèves de l'école élémentaire identifiées par Artigue et Robinet, conceptions des rationnels liées à deux méthodes de mesure, commensuration et fractionnement, et étudiées par Ratsimba-Rajohn, travaux de Vergnaud sur les volumes en tant que grandeurs physiques unidimensionnelles ou tridimensionnelles, ceux de Douady et Perrin sur la conception 'forme' de l'aire liée au cadre géométrique et sa conception 'nombre' liée au cadre numérique, la recherche de El Bouazzaoui sur les conceptions d'élèves et professeurs de l'enseignement secondaire sur la notion de continuité, conceptions de la notion de tangente mises en évidence par une analyse historique chez Artigue. L'analyse fait apparaître une tension entre un point de vue global et un autre plus local : il s'agit, d'une part, de comprendre une structure composée du concept lui-même et de ses propriétés, ainsi qu'un ensemble de signifiants associés, d'images mentales, de techniques, de problèmes associés et, d'autre part, d'identifier les conceptions locales qui se manifestent en situation et d'analyser les conditions de passage de telle conception locale à telle autre. C'est ce dernier point de vue qui serait à privilégier, d'après Artigue, étant donné l'étroite dépendance des conceptions et des situations qui les engendrent. En effet, l'élève ne peut être réduit au statut de sujet épistémologique ou de sujet cognitif. C'est aussi un sujet didactique dont le rapport à tel ou tel savoir est conditionné par la ou les institutions dans lesquelles il a eu à rencontrer ce savoir. D'où l'importance d'inférer les conceptions à partir de l'analyse du savoir en jeu et non uniquement à partir de l'observation de comportements d'élèves si l'on veut éviter un rabattement sur les observables. Et que l'approche soit plus psychologique ou plus épistémologique, il convient de questionner la pertinence d'une différenciation poussée des conceptions ou celle de tout regroupement autour de grandes tendances significatives par rapport à l'analyse didactique. La notion de conception ne peut donc pas être disqualifiée comme outil de l'analyse didactique, dans la mesure où c'est un objet local qui participe à l'analyse du savoir.

La conclusion de cette section est celle de l'article et je la cite telle quelle tant elle me semble encore d'actualité :

> « A ce niveau des conceptions comme aux niveaux précédemment abordés, l'analyse épistémologique aide donc le didacticien à contrôler les relations au savoir mathématique des objets qu'il manipule. Elle lui permet aussi de regarder d'un point extérieur le système d'enseignement qu'il étudie et duquel il est souvent presque trop proche. Mais,

en mettant en évidence la distance qui sépare le développement historique de la réalité des classes, elle ne manque pas de lui montrer par la même occasion tout ce qui sépare ces deux champs : l'épistémologie et le didactique ».

3. L'analyse d'obstacles est-elle devenue un créneau de recherche obsolète ?

Sans doute par certains aspects ... Et plus particulièrement, en ce qui concerne le systématisme qu'on pu observer ça et là dans la construction d'ingénieries organisées autour du franchissement de connaissances-obstacles, selon un modèle supposé normatif.

En 1976, Brousseau écrivait « La notion d'obstacle elle-même est en train de se diversifier : il n'est pas facile de dire des généralités pertinentes sur ce sujet, il vaut mieux faire des études cas par cas ». Depuis lors, le concept d'obstacle épistémologique a fait couler beaucoup d'encre et suscité des débats sensibles, en particulier sur leur caractère culturel (voir e.a. Radford, 1997). Mais il n'est pas sûr qu'on puisse se passer aujourd'hui du « cas par cas ». Je m'en réjouirais plutôt car le souci d'argumenter la nature, épistémologique, didactique ou autre, d'un obstacle donné a des vertus méthodologiques qu'on semble avoir perdues si j'en juge par le nombre de recherches où la notion un peu molle de difficulté semble conduire à lister des difficultés d'apprentissage sans qu'on cherche à en analyser l'origine. Je pense que la vigilance que l'on porte à étudier le caractère d'un prétendu obstacle participe de la mise à distance de transpositions, tant il est tentant de qualifier d'épistémologique un obstacle lié à une transposition naturalisée. Et, par ailleurs, certaines transpositions masquent l'existence de certains obstacles qui, tôt ou tard, refont surface et conduisent ainsi à un certain évitement d'un traitement didactique approprié alors que, dans ce cas seulement peut-être, il y aurait lieu d'organiser la rencontre des élèves avec ces obstacles et leur franchissement. C'est ainsi que, comme je l'ai montré (Schneider, 2011), ce que dit Bachelard de l'obstacle de l'expérience première qui caractérise la pensée pré-scientifique reste d'actualité au moins pour certains apprentissages mathématiques qui, s'inscrivant dans des praxéologies « modélisation », supposent une mise à distance par rapport aux faux objets empiriques nés de l'illusion que les faits et les observations sont des donnés et non des construits. Mais, pour le voir, il faut se déprendre des transpositions trop exclusivement calquées sur des praxéologies « déduction ». Dans cette perspective, le concept d'obstacle épistémologique s'adapte très bien aux mathématiques, en dépit de ce que Bachelard en pensait et, à sa suite, Brousseau.

Evidemment, le concept d'obstacle s'est dilué depuis dans de nouveaux cadres conceptuels qui prolongent la théorie des situations didactiques. Par exemple, les concepts de « rapports personnel et institutionnel » de la théorie anthropologique du didactique permettent de revisiter l'obstacle de l'expérience première tout autant à l'œuvre, presque dans les mêmes termes, lorsque celle-ci est faite de connaissances acquises lors d'une scolarité antérieure ou d'un contrat particulier qui leur est lié (Schneider, 2011). De même, la considération de certains niveaux de l'échelle de co-détermination didactique apporte un éclairage sur le caractère culturel de certains obstacles épistémologiques. Ainsi, pour revenir à l'obstacle déjà mentionné, on peut développer qu'une vision positiviste des sciences et des mathématiques est un produit de la modernité occidentale qui a développé une confiance dans les savoirs scientifiques au bénéfice de l'entreprise industrielle de la bourgeoisie. Quant au concept d'extension praxémique, il permet de comprendre l'efficacité du principe de continuité à la lumière des valences instrumentale et sémiotique des ostensifs engagés.

Il n'empêche que la réflexion sur les obstacles et les conceptions suppose d'articuler des échelles d'analyse fort différentes: de la relation entre telle situation didactique et telle conception à la considération d'une culture faisant obstacle aux apprentissages. Il s'agit moins de lister des difficultés d'apprentissage ou erreurs que de réfléchir à ce qui les provoque et, partant, d'analyser jusqu'à quel point elles relèvent d'une transposition didactique donnée ou, au contraire, résistent à une certaine variabilité de la transposition. Plus généralement, je pense que la dimension épistémologique d'une recherche en didactique, quel qu'en soit l'objet, favorise l'émergence d'hypothèses implicites liées à la transposition au sein de laquelle elle s'effectue, par choix ou non, et permet ainsi de détecter l'impact de certains paramètres qui, sinon, pourraient demeurer transparents. Cette dimension permet aussi de relativiser les résultats mêmes de la recherche, en rapportant les enjeux des apprentissages étudiés aux dimensions fondamentales du savoir concerné. J'estime donc que le lien étroit qui existait entre épistémologie et didactique il y a plus de 30 ans est toujours d'actualité même si, comme le dit Artigue, il faut prendre garde de ne pas rabattre cette 2ème discipline sur la 1ère.

Références bibliographiques

ARTIGUE M. (1991). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10/2.3, pp. 241-286.

BROUSSEAU G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes-rendus de la XXVIIIème rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, Louvain-la-Neuve, pp. 101-117.

RADFORD L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics : Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 17, 1, FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada.

SCHNEIDER, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? dans Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Les 30 ans de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM)

RDM est-elle la revue d'un paradigme et lequel ?

Claire Margolinas

Laboratoire ACTé, Université Blaise Pascal, Clermont-Université.

claire.margolinas@univ-bpclermont.fr

La revue *Recherches en didactique des mathématiques* repose sur de nombreux paradoxes, dont le suivant m'intéresse ici : *RDM* constitue, dans un certain paradigme (terme qui sera l'objet du développement ci-après) et en tout cas pour une communauté de chercheurs, la revue la plus importante du champ des recherches en didactique des mathématiques, voire même la seule revue de recherche qui permet de développer et de construire ce paradigme ; or, bien que les travaux majeurs issus de ce paradigme soient très bien reconnus au plan international (médailles ICMI pour Guy Brousseau et Yves Chevallard, notamment), ils restent mals connus et la revue *RDM* diffuse très peu.

Il existe sans doute de multiples raisons à cela, dont certaines seront sans doute développées par d'autres. L'une d'entre-elles me semble susceptible de pouvoir évoluer, si nous en avions la volonté. Dans le paragraphe précédent, j'ai utilisé deux termes : celui de « communauté », qui réfère à un groupe de personnes qui se reconnaissent, un peu comme dans un « club », celui de paradigme, qui réfère, lui, non pas à des personnes mais à un état de la science normale au sens de (Kuhn, 1970).

Vous avez dit paradigme ? Je défends depuis longtemps l'idée, qui paraît tout à fait évidente de « l'extérieur », que « nous » travaillons dans un paradigme, dont il serait sans doute possible de délimiter les contours (Margolinas, 2005). Or ce paradigme n'a pas de nom, ce qui constitue une difficulté plus importante qu'il n'y paraît. Certains l'appellent « francophone », ce qui ne correspond guère aux situations des chercheurs de nombreux pays francophones (tous les chercheurs en didactique des mathématiques du Québec ou de Belgique travaillent-ils dans le cadre de cette didactique « francophone » ?). De plus, cette distinction repose sur un paramètre linguistique et géographique et n'est pas fondé sur une distinction scientifique. Cette absence de caractérisation et l'absence de nom conduit, dans un contexte international anglophone, à une impossibilité de caractériser ce qui nous réunit. Pour preuve, voici un extrait d'un document de travail récent (octobre 2011), dans lequel sont listées par Anne Watson (U.K.), d'une façon non exhaustive, les théories qui pourrait être convoquées pour fonder ou discuter le *task design* :

Variation theory

Constructivism

RME (horizontal and vertical mathematisation)

Cognitive conflict

Distributed cognition

Theorie Didactique (Didactical situation, Didactical transposition)

Socio-cultural perspectives

On perçoit ici à la fois la reconnaissance internationale et la visibilité d'une certaine unité, déclinée en plusieurs sous-ensembles, mais également l'impossibilité de nommer, ou en tout cas de nommer en anglais, cette unité (ainsi que ses sous-ensembles, d'ailleurs), que Anne Watson réunit sous le terme « Théorie Didactique », quasiment en français dans le texte.

Je m'interroge ainsi sur la possibilité même de se reconnaître à l'intérieur d'un ensemble, possibilité toujours en tension avec celle de marquer « sa » différence d'approche. Par ailleurs, je pense que cette difficulté n'existe pas seulement au plan international, mais également au plan national, dans nos relations avec les autres didactiques des disciplines et avec le champ émergnt de la didactique comparée et plus généralement les sciences de l'éducation. L'existence d'un nom est, dans tous ces contextes, essentiel pour une possible reconnaissance. En effet, je pense que les recherches qu'ont initiées les didacticiens des mathématiques, notamment en France, qu'elles se réclament d'un cadre théorique ou d'un autre, diffèrent profondément des recherches menées notamment dans d'autres didactiques disciplinaires. En particulier, la relation que nous entretenons avec l'action et la recherche-action, qui a été l'objet d'un travail important (et de nombreux conflits…) dans les années 70-80, est une caractéristique dont nous ne percevons souvent pas l'importance en nous situant uniquement en « interne ». Mais comment le faire valoir ? S'appuyer sur les caractéristiques disciplinaires nous dessert, car ce ne sont pas les mathématiques elles-mêmes qui influencent notre rapport à l'innovation, mais bien notre histoire.

Je pense donc que nous avons besoin de mettre en avant ce qui nous réunit et de pouvoir caractériser et donner un nom à ce paradigme. En reprenant et en modifiant un peu les termes donnés ci-dessus, pourrait-on accepter *Théorie du Didactique en Mathématiques ?* Ce qui pourrait se traduire (pas vraiment exactement) par *Mathematics Didactic Theory ?* Je sens des grincements de dents dans l'assemblée, car accepter un nom (celui-ci ou un autre) revient de façon très tangible à considérer que nos démarches sont suffisamment partagées pour se reconnaître dans un ensemble, que les parties (TSD, TAD, etc.) n'empêchent pas de percevoir comme communauté, dont nous parlons souvent sans jamais la nommer…

Accepter nos ressemblances plutôt que nos différences permettrait ainsi, dans nos relations avec les chercheurs, de considérer quels sont les grands textes fondateurs, non plus d'une variation, d'une « tendance », mais bien d'un ensemble paradigmatique.

Je me vois bien, pour ma part, commencer un texte (en français comme en anglais) par

> *"Dans le cadre de la Théorie du Didactique en Mathématiques, développé principalement dans la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (Artigue, 1990; Brousseau, 1986; Chevallard, 1992; Robert, 1992; Vergnaud, 1990)… »*

Il me semble que la visibilité, cela passe déjà par cela : un renoncement aux différences et aux révolutions scientifiques toujours recommencées au profit d'un paradigme, d'une science normale

Références bibliographiques.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-111.

Kuhn, T. S. (1970). *La structure des révolution scientifiques* (Traduction française, 1983 ed.). Paris: Flammarion.

Margolinas, C. (2005). Essai de généalogie en didactique des mathématiques. *Revue suisse des sciences de l'éducation, 27*(3), 343-360.

Robert, A. (1992). Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 33-58.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2.3), 133-170.

Études des enseignements- apprentissages en statistique : Questions de disciplines

Dominique **Lahanier-Reuter**
Équipe Théodile-CIREL- Université Lille 3
dominique.reuter@numericable.fr

Résumé :
Des recherches empiriques menées depuis une dizaine d'années nous permettent aujourd'hui d'interroger les notions de discipline scolaire, universitaire et de recherche :

- L'analyse de discours de lycéens sur les enseignements et apprentissages qu'ils situent en statistique, si elle questionne les distinctions de matière/discipline/sous-discipline, renforce celles que nous avons pu avancer de discipline prescrite, recommandée, représentée et pratiquée.
- Celle de manuels ou syllabus d'enseignements de statistique dans les premières années de cursus universitaires en Sciences Humaines et Sociales en particulier, nous amène à poser la question de l'articulation entre les genres d'écrit (à produire), les contenus à enseigner et les genres d'écrits (à lire), ainsi que le lieu disciplinaire de cette articulation.

Enfin ces différentes analyses et surtout les cadres théoriques qui ont pu être sollicités, les méthodologies de recherche qui ont été requises ou inventées pour les mener, interrogent les définitions, les espaces, les frontières et les évolutions des disciplines de recherche dans lesquelles elles s'inscrivent

Mots clés : discipline scolaire; conscience disciplinaire; pratiques langagières; didactique de la statistique.

Je voudrais tout d'abord remercier Annick et Maha pour cette invitation à travailler avec vous dans ce séminaire. Je suis très heureuse et très honorée de le faire.

Mais cette invitation me concerne surtout en tant que membre de l'équipe de didactique Théodile-CIREL (Université Lille 3) qui me confère en quelque sorte une position d'extériorité à la communauté des didacticiens des mathématiques de l'ARDM. L'enjeu de cette présentation est donc de rendre compte de cette extériorité, en particulier en déclinant les principales problématiques sur lesquelles nous avons travaillé tout en essayant de les articuler à celles qui sont au cœur des études relayées par l'ARDM. Pour cela, je commencerai par décrire les modalités de cette déclinaison et expliquer l'organisation de cette intervention.

1 Extériorité

1.1 *Une extériorité explicable par celle de l'équipe : modes de travail, thèmes de recherche, sciences de l'éducation etc.*

Cette position s'explique peut-être par celle de l'équipe[1] à laquelle j'appartiens, puisqu'il

---

[1] Visible par le fait que c'est une équipe large, où le travail de coopération est privilégié ce dont les multiples projets de recherche menés attestent.
Mais aussi une équipe qui noue des liens, en particulier avec des chercheurs aux USA (ce sont les préoccupations autour des écrits à l'université et des écrits disciplinaires qui le veulent en particulier) avec des chercheurs ou des

s'agit d'une équipe pluridisciplinaire : didactiques disciplinaires (du Français, de la Littérature, de l'Histoire-Géographie, des Sciences, de l'EPS, de l'Informatique, de la Technologie, de la Lecture et Écriture, de l'Oral) et sciences de l'éducation, (psychologie, histoire, psychanalyse…). En conséquence, les problématiques s'y construisent dans un dialogue dont les références ne sont pas forcément les plus fréquentes en didactique des mathématiques. J'ajouterai aussi que la nécessité de maintenir ce dialogue oblige les chercheurs qui l'acceptent à travailler sans cesse les questions du partage du sens, de la communauté des références et des exemples, de la communication et de l'écriture à plusieurs voix : s'interdire tout implicite disciplinaire (je désigne ici aussi bien la discipline scolaire que les disciplines scientifiques) est un exercice délicat et malaisé, tant il met à mal les représentations immédiates de ce que sont des savoirs partagés et la façon/les façons de les partager.
Cette pluridisciplinarité ne suffit cependant pas à forger une position particulière. Il faut y ajouter le fait que le cadre de nos travaux se définit davantage par ses questions et ses objets de recherche que par un cadre théorique et méthodologique contraignant (par exemple les contenus disciplinaires, l'évaluation d'un mode d'enseignement de type Freinet, les écrits professionnels des enseignants, la description dans les différentes disciplines, les genres, les performances des élèves…). En revanche, les intérêts que nous portons aux constructions théoriques (voir le *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*) et aux méthodes de recherche (voir les Séminaires autour des méthodes de recherches en didactiques) est évident.

Je me suis demandé comment présenter ici, le plus largement possible, les questions qui nous intéressent vivement, et les façons dont nous les abordons, de manière à ce qu'elles puissent être entendues. C'est l'expérience dont je parlais plus haut de la difficulté à dialoguer lorsque certaines des références ne sont que peu ou pas partagées, qui m'a guidée dans mes choix.

1.2 *Rendre compte de cette extériorité : interrogations sur la notion de discipline scolaire, relations entre didactiques et disciplines connexes, la sociologie de l'enseignement, grammaire et statistique*

L'idée qui a été la mienne est de soutenir cette présentation en l'articulant autour d'un thème d'étude. Je présenterai en conséquence les grandes lignes d'une étude qui reste à faire, mais qui s'inspirerait de celles qui sont menées depuis quelques décennies en « didactique du français » et en histoire de l'éducation sur la grammaire scolaire (Chervel par exemple). La grammaire est en effet une matière d'enseignement dont certains ont pu avancer qu'elle était une production du système scolaire (même si cela est plus compliqué qu'il n'y parait) et c'est un objet qui permet par conséquent d'interroger le statut des contenus, leurs fonctions, leurs élaborations et leurs transformations (par exemple il semble bien que le statut de certains de ces savoirs, savoir faire ait migré, d'un statut « scolaire » à un statut culturel), de poser des questions sur les modes d'enseignement et sur ce qui peut les diriger, sur les pratiques disciplinaires, extra disciplinaires, extra scolaires....Pour le dire autrement, une étude sur certaines matières d'enseignement/lieux d'enseignement peut révéler des questions intéressantes pour les didactiques, en particulier concernant les disciplines, les contenus disciplinaires etc.

équipes au Chili et au Brésil sur des thèmes tels que les enseignements scolaires et extra scolaires... Bien sûr avec des équipes ou des associations plus francophones, telles l'AIRDF ou l'ARCD.

Ce qu'est la grammaire à la didactique du français, la statistique l'est peut être à la didactique des mathématiques. Mais peu importe au fond ici. L'intérêt d'une focalisation sur la statistique est qu'elle est aussi une matière d'enseignement ou un chapitre (pour reprendre l'expression des programmes officiels) ou un genre (Sur le site de l'Académie de Rouen, les mathématiques sont dites « matière », la statistique un « genre ») qui permet de mettre au jour certaines des interrogations qui sont les nôtres, et d'explorer les modes de recherche, les modes de travail qui sont ceux travaillés à Théodile.
Je ne dis pas ce faisant que la statistique, en tant que domaine de l'enseignement, est une production de l'école, mais en revanche, c'est une matière d'enseignement qui est un peu particulière. Si sa singularité n'est sans doute pas dans sa genèse, elle est peut être dans ses relations, ses positions souvent dominées aux autres domaines d'enseignement (ces autres domaines d'enseignement ne sont pas toujours les mathématiques justement à l'université ou dans les écoles post bac – de commerce particulièrement. Ceci est l'un des fondements de la distinction entre discipline académique et discipline scolaire sur laquelle je reviendrai).
Je propose d'organiser cette intervention tout d'abord autour de cet ensemble de questions : Comment cerner, définir le statut par rapport aux autres « matières », quelles questions surgissent ?
Ces questions seront autant d'entrées qui me permettront de développer des questionnements et des modes de questionnement que nous avons menés.
Ainsi, chacun des paragraphes de l'étude a une double thématique : la première est relative à une question portant sur la statistique, la seconde est une des problématiques que je cherche à développer.

2 Des interrogations sur les disciplines scolaires, universitaires, scientifiques…

Je propose dans ce paragraphe de préciser la logique de ma démarche d'étude/d'approche. La question principale est celle de l'étude de l'articulation, ou plutôt des articulations entre discipline scolaire, universitaire, scientifique et domaine d'enseignement : comment, selon ces espaces spécifiques, ceux de l'enseignement « obligatoire », de l'enseignement et de la formation académique, de la recherche… convoquent-ils la statistique, et comment ces modes de convocation disent quelque chose de ces disciplines.
Nous considérons en effet les disciplines comme « des constructions sociales qui sont aussi des espaces de mises en cohérence, de mises en réseaux (et des moyens, modes d'afficher ces cohérences ou ces réseaux, des moyens et des modes de les transgresser, des moyens et des modes de les rendre implicites…) » (Lahanier-Reuter, Reuter : 2004). Cette approche nous permet de prendre en compte les « insertions » du domaine statistique comme inextricablement liées à la construction de la discipline dans laquelle elles s'inscrivent : à l'école, il s'agit en priorité de la discipline « mathématiques[2] », tandis que ce n'est pas le cas à l'Université et dans les formations post-bac.
Comment explorer les modes de convocation de la statistique par les disciplines ? Deux caractéristiques des disciplines retiennent ici mon attention : ce sont des *constructions sociales* et ce sont des espaces *structurés*. A la fois issues de découpages revendiqués comme étant rationnels, argumentés du point de vue politique, économique, scientifique, historique etc. les disciplines apparaissent aussi comme des espaces organisés, structurés. Il est légitime d'interroger les principes de ces rationalités, qu'il s'agisse de celles qui président à ces découpages ou de celles qui sont supposées présider à leur cohérence interne. Par conséquent

[2] En priorité, mais pas exclusivement. L'étude des convocations dans les autres disciplines scolaires, en France et ailleurs, reste à faire.

il me semble nécessaire d'interroger les espaces où ces disciplines vont convoquer des contenus statistiques, où des enseignements et des apprentissages relevant de ce domaine vont être organisés, prévus ou non. Il me semble aussi qu'il est nécessaire de confronter différentes structures qui relèvent de la/les disciplines.

2.1 Nécessité de la diversité des espaces pour étudier des disciplines

Une première différenciation est à effectuer, entre discipline scientifique et discipline d'enseignement, parce que les statuts des connaissances, ceux des acteurs, ceux des acteurs vis-à-vis de ces connaissances ne sont pas identiques. La/les discipline(s) scientifique(s)est donc à différencier de façon très claire. J'ai été amenée à distinguer discipline scolaire et discipline universitaire tout d'abord pour des raisons de faisabilité : autant j'avais déjà esquissé des réflexions sur les différentes façons d'organiser des enseignements et des apprentissages statistiques à l'Université, autant je ne dispose, à l'heure actuelle, de pratiquement aucune recherche sur les convocations de ce domaine dans d'autres disciplines scolaires que celle des mathématiques. Cependant, ces raisons pratiques ne sont pas les seules à peser sur cette distinction : les organisations, les fonctions des enseignements scolaires et universitaires diffèrent suffisamment pour l'expliquer.

2.2 Se focaliser sur les délimitations des matières d'enseignements

Pour étudier les façons dont les enseignements et les apprentissages qui relèvent du domaine statistique sont organisés à l'École et à l'Université, je m'intéresse plus particulièrement aux délimitations et modes de délimitations de la convocation de ce dernier : les désignations (et les manières de désigner) mais aussi les modes d'apparition - importance relative (évaluations, horaires, places réservées dans les manuels, sites internet proposant de l'aide ou des exercices en ligne), intérêt relatif (documents d'accompagnements, arguments développés…)- et les soulignements – évaluations et performances particulières par exemple. Comme nous le verrons plus loin, la déclinaison des délimitations abordées ici n'est pas systématisée. J'ai volontairement choisi celles dont l'étude me permet de développer les réflexions que nous avons menées au sein de l'équipe.

2.3 Des études menées sur des lieux et des objets particuliers : les manuels, les exercices, les évaluations…

L'étude de ces délimitations pose la question du corpus à constituer. Les documents étudiés doivent permettre d'approcher ces délimitations : Les Instructions Officielles, en France en particulier, participent de ces délimitations. Nous y ajoutons les manuels scolaires et les polycopiés universitaires, en suivant par exemple les considérations de P. Bourdieu : « pour transmettre ce programme de pensée nommée culture, elle [l' école] doit faire subir à la culture qu'elle transmet une programmation capable d'en faciliter la transmission méthodique|…] ayant à préparer leurs élèves à répondre à des problèmes d'école les professeurs sont portés à organiser d'avance leur propos selon l'organisation que leurs élèves devront retrouver pour répondre à ces problèmes : à la limite ce sont ces manuels de dissertation où l'on trouve des discours tout organisés en fonction de sujets de dissertation donnés [qui disent cette organisation]» (Bourdieu : 2007). Les évaluations – au sens large du terme- sont des lieux où les performances (Daunay : 2008, Lahanier-Reuter : 2008) attendues et effectives permettent aussi d'approcher ces organisations. Enfin, les « discours sur » des acteurs constituent un lieu privilégié d'étude des représentations.

3 Divers modes de délimitation, problématiques et questions

3.1 Délimitation par les désignations : différencier des espaces

Dans les I.O., les programmes de formation, les manuels, les ressources en ligne… une délimitation de ce domaine d'enseignement transparait par la désignation de « statistique » ou « statistiques ». C'est la diversité de ces usages qui nous intéresse ici. En effet, cette diversité est liée à celles des espaces : salle des enseignants, cours… *vs* espace des I.O et des manuels espace des ressources en ligne, des livrets d'accompagnement….*vs* les usages extra scolaires.
Ceci nous permet de poser la distinction entre l'espace de la discipline pratiquée et celui des prescriptions, celui des espace des aides et recommandations et celui, extra scolaire, des représentations et des diffusions. Mais aussi de l'interroger : s'agit-il de différence(s) d'usages ou de distinction(s) entre ceux-ci? Certains de ces usages sont-ils des marques de positions supérieures, peuvent-ils être la source de légitimités ? J'aurais souhaité pouvoir montrer comment des emplois du pluriel « les statistiques » peuvent être dénoncés et comment ces dénonciations peuvent s'appuyer sur des arguments d'autorité : mais les corpus me font défaut.
Cependant, de ces conflits, je retiendrai qu'ils illustrent les organisations que les disciplines scolaires confèrent aux domaines d'enseignement et qui sont à penser de manière spécifique selon différents espaces : espaces des prescriptions (textes officiels), des encadrements des pratiques (inspection, formation, militantisme, manuels…), des pratiques, des représentations des acteurs…[3]

3.2 Délimitations par les exercices : genres et activités

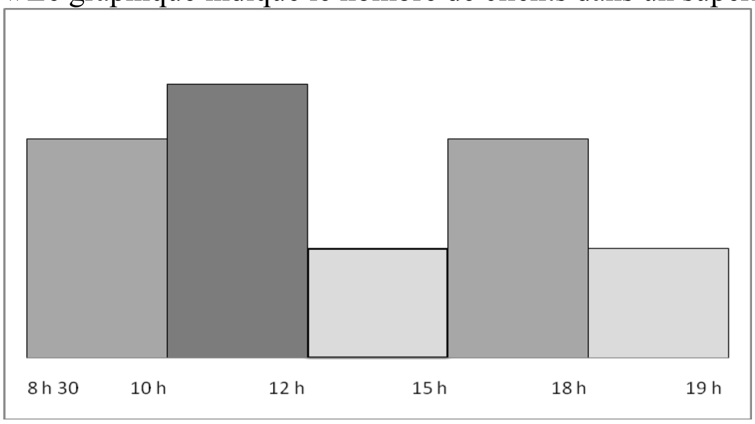
A l'école primaire, la désignation « statistique » n'apparait pas à l'heure actuelle dans les programmes officiels alors qu'elle apparait par exemple au Québec[4], dès le cycle primaire[5].
Cette absence de désignation, de séparation explicite signifie-t-il qu'il n'y a pas de contenus « statistiques » enseignés ? Que nous ne pouvons pas qualifier de « statistique » des démarches, des activités… à l'école primaire en France, alors qu'elles ressemblent très fortement à celles qui sont présentées aux petits québécois?
Il me semble que nous ne pouvons pas faire abstraction de l'organisation des enseignements pour décrire les contenus d'enseignement et les contenus appris. Les contenus d'enseignement et d'apprentissages en jeu peuvent sans doute –c'est du moins l'hypothèse que j'envisage- différer selon leur « environnement ». Ainsi, comme nous allons le voir, travailler un exercice dont la résolution exige une lecture d'un histogramme, ne sous-tend pas le même contenu – *i.e.* la même lecture – selon que l'exercice est inséré dans un « cours de statistique », selon qu'il est inséré dans une séance « mesure du temps». Dans le premier cas, on peut imaginer que cette lecture pourra se construire en rapport avec des lectures de tableaux, avec des séries statistiques diverses (chronologiques ou non par exemple)…Dans le second, on peut en revanche supposer qu'elle se construit en opposition à la lecture de l'heure sur un cadran, pour le dire très vite.
Mais dire que l'organisation (qui peut être lue au niveau des prescriptions et des pratiques) des enseignements participe des contenus ne suffit pas. Il est une question en suspens, qui est celle justement de la prise en compte de cette influence.

[3] Voir Reuter : 2010.
[4] http://recitmst.qc.ca/pdfeq-math-primaire/rubrique.php3?id_rubrique=7
[5] Ce qui correspond grosso modo à notre école primaire et à la 6ème

Cette interrogation, qui à mon sens est décisive en didactique, prend toute sa dimension dans ce cas puisque cette différence de regroupements officiels, d'organisations des contenus, s'accompagne d'une similarité d'exercices. Pour le dire autrement, des rapprochements « statistiques » sont envisageables entre des exercices, rapprochement qui ne sont pas ceux qui président à l'organisation de l'enseignement. J'ai mis statistiques entre guillemets, par ce que ce qualificatif revêt ici de multiples significations. En particulier, je fonde ce regroupement d'exercices et ce qualificatif à ce regroupement, parce que ces exercices ont été regroupés dans des institutions scolaires sous ce titre, dans d'autres niveaux, dans d'autres écoles ou dans d'autres temps.
Je propose, dans le cadre de cette intervention, d'aborder cette question fondamentale de la description des contenus d'enseignement, au travers ici de celle qui interroge les moyens de rendre compte de la proximité de ces exercices malgré les différences d'organisation.

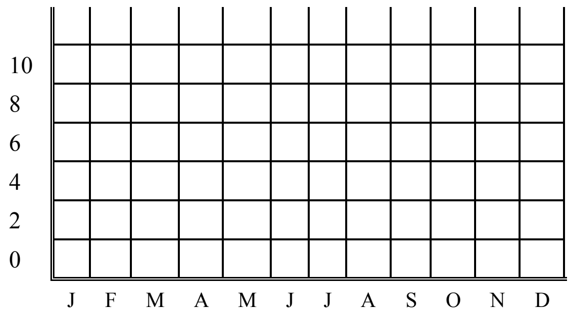
3.2.1 Rendre compte de la similarité d'exercices classés dans des rubriques différentes

Voici deux exercices, relevés dans des manuels français. Ils ont de fortes ressemblances bien que placés dans des chapitres différents.
« Le graphique indique le nombre de clients dans un supermarché le samedi.



La couleur la moins foncée :
« moins de 200 personnes »
Intermédiaire
« entre 200 et 500 personnes »
La plus foncée
« plus de 500 personnes »

A quel moment y a-t-il le moins de monde ?
Les parents de Marie veulent faire leurs courses vers 13h30.
Est-ce un bon choix ?
Pourquoi ?
Le nouvel Objectif Calcul, CE1, 1998, Chapitre « Mesure du temps », Hatier, p.125.
« Prépare, sur une feuille quadrillée des droites graduées comme ceci.



Relève les mois de naissance de tes camarades.
Reporte ces renseignements sur le graphique.

Quel est le mois où il y a le plus d'anniversaires ? Le mois où il y en a le moins ?
Quels sont les élèves qui ont leur anniversaire pendant les vacances ?
L'heure des maths, CE2, 1999, Chapitre « Atelier de résolution de problèmes », Hatier, p. 132

Reprenons la question que nous posions plus haut :
Une première hypothèse est d'avancer que les changements d'organisations des contenus, les nouvelles formes d'identification de ces derniers (d'étudier les organisations de données à travailler telle compétence) ne s'accompagnent pas d'une construction de nouveaux exercices, mais d'une réorganisation des anciens. L'ensemble des exercices est, pour partie, conservé, mémorisé, les auteurs des manuels disposent d'un ensemble de ressources : ces ressources (anciens manuels, échanges entre collègues, énoncés de concours, d'examens ou d'évaluations, stages de formation…) certes ne sont pas exactement les mêmes pour tous les auteurs (pensons aux différentes maisons d'édition tout simplement) mais l'augmentation de ces ressources est une donnée actuelle de l'école et doit nous faire envisager la *tradition* comme source possible des choix effectués. Il n'est pas invraisemblable de supposer que les nouveaux manuels scolaires français, dont la parution est supposée suivre les changements accélérés des programmes, recyclent d'anciens énoncés. Il n'est pas invraisemblable aussi de supposer que les auteurs des manuels décident de privilégier la pérennisation de certains énoncés, tant les retours des enseignants ont été bons. Enfin, il n'est pas invraisemblable de supposer que les nouvelles organisations que recommandent les programmes amènent ces auteurs à choisir des exercices « emblématiques » de certaines techniques, de certains savoirs, de certains contenus, pour maintenir la diversité et l'offre que les enseignants - ou que les maisons d'édition- réclament : entre pérennité et changement, entre nouveautés prescrites par l'institution et savoirs pratiques des enseignants, la tension peut se résoudre par un choix d'énoncés que les auteurs posent comme emblématiques. Cela pourrait expliquer la « ressemblance » de ces exercices.
Une deuxième hypothèse est d'envisager au contraire une volonté des auteurs de manuels de présenter de nouveaux exercices aux enseignants. Sur les deux exemples cités, il n'est pas non plus invraisemblable de supposer que cette nouveauté peut provenir, elle aussi, d'une transposition d'exercices d'autres niveaux d'enseignement. Dans ce cas encore, ceci pourrait expliquer cette proximité.
Mais j'ai bien conscience de parler d'énoncés, d'exercices emblématiques, de proximités de ces exercices sans pour autant avoir défini ce que j'entends par là. C'est pour cela que j'avance la notion de genres de discours[6], (voir en particulier Bakthine) ici de genres

---

[6] J'insère ici une longue citation pour expliciter notre position : « Pour préciser encore cette notion de genre, fondamentale dans notre démarche, il convient de signaler que nous nous plaçons à la croisée de trois types de travaux qui nous ont paru convergents : ceux de Bakhtine (1979), ceux de l'analyse du discours et notamment de Maingueneau (par exemple 1997 et 2004) et ceux de notre équipe sur les genres scolaires. Les genres sont ainsi pour nous des unités discursives, propres à telle ou telle sphère socio-institutionnelle, qui détermine et contraint les formes prises par ses principales composantes, soit :

- sa matérialité (par exemple, à l'écrit, support, taille, présentation…) ;
- ses indications peritextuelles (au sens de Genette, 1982 et 1987, par exemple, indications de l'auteur, des destinataires, date(s)…) ;
- son actualisation langagière (lexique, syntaxique, rhétorique….) ;
- son marquage énonciatif (prise en charge explicite ou non du discours, affichage ou non de la subjectivité…) et son organisation des contenus (modes d'enchaînement, de hiérarchisation…) ;
- les domaines thématiques et les contenus traitables au sein de ces domaines, cela dans des conditions spécifiques de production et de réception (catégories d'auteurs, relations entre ceux-ci, temporalité impliquée, espace, fonctions, enjeux, et types d'évaluation à l'œuvre…).

En ce sens, les genres formatent le dicible et ses formes au sein d'un espace social déterminé. » (Lahanier-Reuter, Reuter, « Présentation of a few concepts for the analysis of writing », Colloque international *WAC from an international Perspective*, Saint Louis, Missouri, 20-22 mai 2004)

disciplinaires (Schneuwly par exemple), pour rendre compte de cette organisation concurrente, de cette similarité, de ces proximités.
Cela signifie tout d'abord que cette proximité est à concevoir en termes de discours. Avancer que ces exercices relèvent du même genre suppose la représentation d'une matrice commune des « énoncés d'exercices ayant pour étude une série de données » (j'évite le terme « statistique ») à partir de laquelle les énoncés auraient été composés et qui, après avoir été écrits, viendraient, en un deuxième temps, l'enrichir. Mais ce ne sont pas seulement les énoncés qui sont proches, du fait de caractéristiques linguistiques communes. Cette proximité est aussi celle des positions respectives des auteurs et des lecteurs (supposés/construits) de ces énoncés. Elle est aussi celle des fonctions premières, données à ces textes par leurs auteurs (faire faire, consigne) et attribuées par les lecteurs construits (se mettre au travail). Ici, très rapidement, l'adresse au lecteur, les injonctions qui lui sont faites…construisent un lecteur élève. Les lectures des modalités dont les effectifs sont les plus élevés/les plus bas est aussi une caractéristique de ce genre, tout autant que la gestion délicate de la tension entre histogramme et diagramme, de celle entre présence et absence d'un axe « vertical »[7].

Envisager ces énoncés comme relevant d'un même genre de discours dit leur proximité. Celle-ci dit-elle aussi quelque chose d'une proximité – je n'ai pas dit identité - des activités des élèves lorsqu'ils effectuent les exercices ? C'est là une des questions qui nous a longtemps intéressés, au point d'en faire le thème d'un séminaire de deux ans sur « Genres et activités ». J'évoque simplement ici l'intérêt que nous avons cru trouvé à l'étude des tensions entre les constructions des genres et des activités (Bazerman : 2003, Bernié : 2001, Daunay : 2005, Lahanier-Reuter : 2004, Reuter : 2007a) qui semblent varier selon les disciplines, et celles entre les genres construits par les enseignants et par les élèves.

3.2.2 Les connaissances nécessaires de la matière sont-elles toujours à construire ?

Explorons toujours l'ensemble des énoncés de problèmes et d'exercices proposés dans des manuels ou des ressources autres ou dans des classes, et qui nous paraissent engager des contenus « statistiques » alors que le classement de cet exercice ne l'indique pas. C'est le cas d'un énoncé de R. Polle, CM2, classé dans le chapitre « Situations problèmes », alors que la désignation « statistique » n'apparait pas dans le programme de ce niveau ces années là.
« Au cours d'une classe promenade, des enfants examinent un champ de blé. Ils comptent le nombre d'épis se trouvant sur 1m². Ils renouvellent l'opération en plusieurs endroits du champ et trouvent les nombres suivants :

204. 206. 190. 210. 215. 193. 182

Calcule le nombre moyen d'épis au m².
Un épi contient environ 50 grains de blé et il faut 20 grains pour faire 1g. Essaie d'évaluer le rendement de ce champ en quintaux à l'hectare. »
Une analyse rapide (La suite des nombres/ série statistique n'est pas donnée au hasard, et ne doit pas être réorganisée, donc n'est pas vraiment à considérer comme série, puisque les nombres peuvent s'additionner rapidement ; la somme est 1400, la moyenne de 200 épis ; la simplicité des calculs est un indicateur pour l'élève de la validité de son résultat) laisse supposer que le contenu visé est le changement d'unités et le calcul de tête. Ceci montre que l'un des contenus nécessaires pour résoudre le problème (la moyenne d'un échantillon pris au hasard est proche de la moyenne de la population et peut servir d'estimation de la moyenne) est un contenu minoré *a priori*, même s'il n'en demeure pas moins que les *circonstances* de ce récit sont celles d'autres exercices, cette fois classés comme statistiques. Deux

---
[7] Voir Lahanier-Reuter, 2005, « L'histogramme : un objet peu enseigné ».

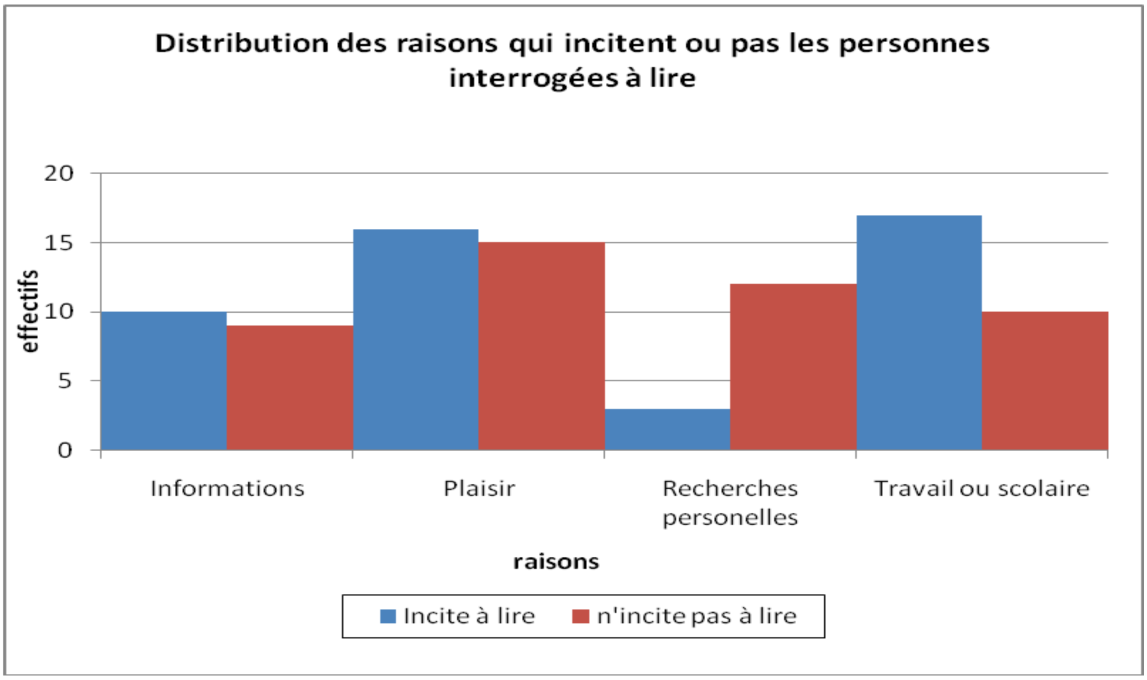
conséquences peuvent en être tirées.
La première est celle d'une possibilité de recherche, celle des proximités génériques de cet énoncé. Ce genre - dont nous pouvons considérer l'exercice comme « un cas limite » - est celui des énoncés d'exercices ou de problèmes décrivant un mode d'échantillonnage et demandant une estimation d'un des paramètres -ici la moyenne- de la population globale. Les proximités reposent sur le choix de la population évoquée -des grains de blé- ce qui est emblématique[8] de ce genre, sur le quadrillage du terrain en carrés d'aire identique, sur des termes qui dévoilent l'incertitude du résultat obtenu (« essaie d'évaluer ») même si le terme « évaluer » remplace il est vrai celui d'estimer. En conséquence, on pourrait avancer que cet énoncé est « une première » acculturation à ce genre, c'est-à-dire que nous envisageons pour le coup des actualisations « futures », « à venir » de ce genre pour en rendre compte.
La seconde est l'interrogation didactique qui dépasse ce cas : détourner l'élève d'un vrai problème (comment estimer le rendement d'un champ ?), du récit méthodologique (comment faire pour répondre à la question si on choisit de ne pas en révéler le pourquoi), demander à l'élève d'accepter un récit tronqué, fictif et lui fournir l'occasion d'être un exécutant…pourraient être des caractéristiques de la situation d'enseignement. Mais qui pourra dire celles de la situation d'apprentissage ou d'appropriation ? Ne peut-on pas supposer que des élèves prennent au sérieux le récit et ses circonstances ?

3.3 Délimitations par les attentes des enseignants : Conduites descriptives dysfonctionnements, images du scripteur

Les délimitations disciplinaires sont également constituées par les particularités des situations d'évaluation. Je m'attarderai ici sur celles des attentes, sans distinguer attentes effectives, reconstruites. En effet, l'apprentissage de la statistique descriptive sous-entend l'apprentissage de conduites langagières spécifiques, même si « décrire » n'est pas une tâche prescrite par l'école explicitement (les sous tâches décrites dans les I.O. sont uniquement celles de calcul[9] et de tracés de graphiques).

Ceci ne doit pas induire le fait que décrire à partir de statistiques, ou décrire en statistique… est une conduite discursive non spécifique.
Voici un exemple de copie d'étudiant, qui peut montrer que les descriptions à mener sont particulières, comment leur recevabilité peut être construite, et enfin comment nous avons essayé de rendre compte de la singularité de cet écrit par le concept d'image du scripteur.
«

[8] Emblématique, car les ouvrages de « large » diffusion, les Que sais-je ? par exemple consacrés à la statistique, reprennent cet exemple.
[9] Paradoxalement, les indicateurs « servent à décrire » ou « à résumer » mais cette fonction n'est jamais mise en œuvre, comme si les indicateurs constituaient en eux-mêmes une description.



Nous pouvons noter que près de 40% des personnes que nous avons interrogées lisent pour leur travail ou pour des raisons scolaires, le Plaisir de lire représente quant à lui un tiers de cette population. Tandis que ce qui n'incite pas du tout ces lecteurs à lire est beaucoup plus varié puisque pour ces quatre raisons il y a toujours entre 20 et 25% des personnes interrogées dans chaque rubrique, avec cependant, un très léger avantage pour le plaisir (1/3 des personnes) qui serait donc la raison principale qui n'inciterait pas les gens à lire. »

Dans ce contexte universitaire, des attentes pèsent sur cet écrit:

- Dont le lecteur réel est un évaluateur qu'il s'agit de convaincre de la maîtrise par le scripteur/élève de certains concepts, de certains modes de calcul, etc. ;
- Dont le lecteur construit, fictif est un lecteur que l'on accompagne dans sa double ou triple lecture (graphique, linéaire, symbolique) ;
- Qui doit être une description et qui plus est une description statistique.

Convenons de nous arrêter là dans la reconstruction des attentes. Ces précisions, déclinées, nous fournissent des analyses en termes de dysfonctionnements mais aussi de recevabilité :
Est-ce bien un écrit, ou plutôt, les formes de l'écrit sont-elles respectées ? Ici, l'étudiant s'autorise des formes oralisées. Par exemple, l'enchaînement de la première phrase des différentes propositions est non recevable à l'écrit, alors qu'il pourrait l'être à l'oral, car la référence du sujet de la seconde période de la première phrase « l'autre moitié lit » n'est pas celle attendue. Ce type de dysfonctionnement se retrouve dans la description des distributions des raisons qui incitent les gens à lire…Il est sans doute explicable par la transcription de formes autorisées à l'oral, mais aussi par la confusion des objets décrits : est-ce que ce sont les romans, les gens interrogés, les lectures des gens interrogés, leurs réponses à un questionnaire qui sont décrits ?
En revanche, la conduite descriptive est recevable, puisqu'elle repose sur

- une différenciation des deux critères (les raisons qui incitent/qui n'incitent pas)
- la mise en évidence d'une caractéristique majeure de la distribution (la valeur modale/ l'équirépartition)
- des remarques qui viennent tempérer l'importance de la caractéristique énoncée en premier (une autre valeur importante/le léger déséquilibre de la répartition).

Ce que je veux souligner ici est le fait que ce n'est pas en termes d'erreur que nous allons analyser ces performances (didactiques, disciplinaires), mais en termes de *dysfonctionnements qui sont aussi attribuables au genre que les étudiants reconstruisent* (Reuter : 2005). Un

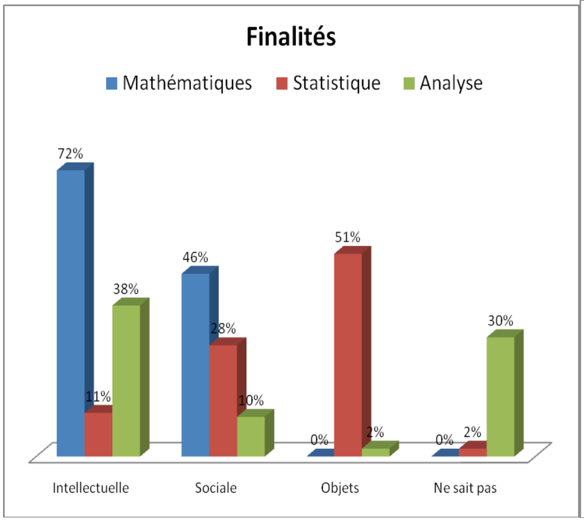
genre dont l'évaluation telle que la reconstruisent les étudiants (c'est un genre scolaire au sens propre du terme) repose sur l'usage contextualisé des indications numériques[10], de l'usage de ces nombres pour hiérarchiser les informations etc. Un genre qui repose aussi sur des schémas, des graphiques « professionnels », réalisés avec des logiciels et non pas à la main, et dont le dysfonctionnement/les erreurs, sont imputables - peut être - à cette *délégation*. Enfin, un genre qui est enseigné – la conduite descriptive reprend l'une des conduites possibles étudiées -.
Il s'agit donc d'une analyse de l'écrit qui repose sur des reconstructions d'un genre. Elle étudie les adéquations (variables selon les auteurs) de cette reconstruction, les aptitudes/volontés/désirs… de s'y conformer (tout aussi variables selon les auteurs). Ce type d'analyse s'apparente certes à celles qui s'appuient sur la notion de position d'écriture, ou position du scripteur. Mais, nous lui avons préféré celle d'image du scripteur (voir *Pratiques* 113-114*,* Delcambre, Reuter : 2002), qui rend mieux compte, selon nous, de la dépendance étroite des conduites discursives, des choix et des décisions du scripteur etc. aux contextes génériques dans lesquels ces écrits, ces écritures s'insèrent.

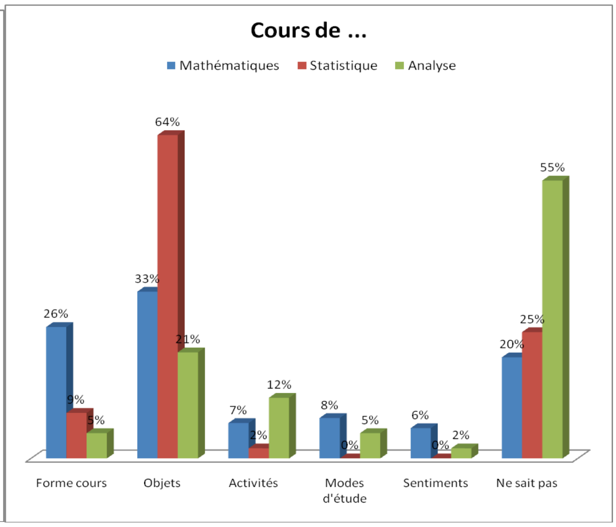
3.4 Délimitations par les discours des élèves sur leurs pratiques : Conscience disciplinaire

L'étude de discours sur les pratiques, les ressentis, les expériences… se rapportant à un domaine particulier d'enseignement et d'apprentissage a été entrepris depuis de nombreuses années au sein de notre équipe[11]. Dans le cadre de cette intervention, ce sont des discours à partir desquels il nous est possible de reconstruire les délimitations que les élèves (les étudiants) élaborent qui nous intéresse, tout autant que les délimitations que les pratiques qu'ils rapportent laissent apparaître. Les tensions entre les organisations prévues, prescrites, actualisées dans les pratiques sont dénoncées depuis longtemps. Ce n'est pas tout à fait, malgré l'intérêt évident de ces travaux, la perspective que je vais développer ici. Je me suis en effet centrée davantage sur les comparaisons entre des organisations parallèles, en élaborant un questionnaire destiné à des élèves des classes scientifiques (1^e^ et Te S) qui décline systématiquement des questions identiques selon trois domaines de l'enseignement : mathématiques, analyse, statistique. Cette forme particulière du questionnement est celle que nous avons reconduite dans diverses études qui s'inscrivaient dans l'élaboration du concept de conscience disciplinaire. Ce concept nous est apparu central dans les différentes didactiques disciplinaires, puisqu'il désigne la manière dont les acteurs sociaux et, plus particulièrement les élèves (re)construisent les disciplines scolaires (Reuter : 2007b).
Les discours des élèves interrogés laissent transparaître des délimitations précises et spécifiques au domaine statistique. Parmi ces délimitations, celle par les « objets enseignés » nous semble particulièrement intéressante, car elle apparait dans plusieurs questions. Ainsi, les finalités d'apprentissages qui sont reconnues à ce domaine portent sur des objets précis (« cela sert à connaître les pourcentages, les moyennes etc. ») au contraire des mathématiques par exemple, qui seraient enseignées pour satisfaire des exigences plus globales (« apprendre à raisonner »). Les élèves interrogés disent aussi reconnaître les cours de statistiques davantage par les objets qui y circulent que par des formes particulières d'organisation du cours par exemple…
Au-delà de l'intérêt à enregistrer un mode de construction légèrement différent de celui des

[10] Les pourcentages sont arrondis dans le texte linéaire, ils sont donnés en nombres entiers, ce qui est légitime au vu de la population étudiée.
[11] Au travers de recueils de textes, de questionnaires et d'entretiens, depuis les recueils de « meilleurs et pires souvenirs d'écriture et de lecture » (Daunay et Reuter, :2005) jusqu'aux questionnaires sur les littéracies universitaires.

mathématiques et un mode de délimitation singulier, il nous reste des interrogations dont les premières sont d'ordre méthodologique.





Répartitions des réponses aux deux séries de questions : « D'après vous, pourquoi les mathématiques/la statistique/l'analyse sont-elles enseignées ? » et « A quoi reconnaissez-vous que vous êtes en cours de mathématiques/de statistique/d'analyse ? »

Il est possible que ce soient la situation du questionnaire, ces déclinaisons de questions identiques qui induisent ces spécificités. Mais si nous nous considérons ceci comme un « résultat », cela permet d'interroger la place particulière de la statistique dans la discipline scolaire mathématiques dans les dernières classes du lycée au regard de celles des deux disciplines scientifiques. Peut-on considérer la statistique comme une sous-discipline des mathématiques ? Peut-on considérer la statistique comme une sous-discipline des mathématiques appliquées[12] ? Y a-t-il effectivement un enseignement, un mode d'enseignement à l'école de cette distinction[13] entre mathématiques « abstraites » et statistique ?

Ces questions intéressent les didactiques. En effet, si nous admettons cette délimitation, elle évoque alors celle qui permet de désigner la « simplicité » de la matière au collège, au LP. L'usage a été longtemps de ne pas évaluer des compétences, savoirs, savoirs faire statistiques aux examens traditionnels, si ce n'est dans certains parcours de formation (CAP), les enseignants de mathématiques ont longtemps eu l'habitude de programmer l'enseignement de la statistique durant le mois de juin. Elle évoque aussi les changements actuels pour la considérer comme « complexe » depuis peu en 2^e^, 1 et Te Scientifique, changements qui s'accompagnent d'apparitions de préparations des questions statistiques (et non plus purement probabilistes) aux épreuves du Baccalauréat. Par conséquent, à l'école, un contenu deviendrait un contenu de *valeur, en devenant complexe, théorique…*

*3.5 **Délimitations de la/les discipline (s)universitaire(s) : Littéracies universitaires***

Les formations statistiques (ou en statistique) sont extrêmement multiples à l'université. Là encore, je me contenterai d'une analyse très succincte et limitée, toujours afin de présenter des questions qui s'y relient. Le document pour penser quelques unes des délimitations de ce

---

[12] Je n'ai pas mentionné à dessein les termes de « scolaires » et « scientifiques » pour montrer le parallèle entre les deux questions.

[13] Celle-ci, dans le monde scientifique, se lit au travers des tensions en statistique par exemple entre « purs mathématiciens modélistes etc. » et les « extérieurs de l'analyse de données ».

domaine d'enseignement à l'université est constitué de plusieurs présentations d'un contenu enseigné, le test du khi² : la première s'inscrit dans la préparation à l'agrégation de Mathématiques, la seconde dans une licence de Psychologie, la dernière dans une licence de Sciences de l'éducation. Ces documents sont soit des polycopiés, soit des ouvrages recommandés par les enseignants en charge des U.E. correspondantes. La comparaison des documents, pour qu'elle ait un sens en didactiques, les envisage en tant que documents didactiques, soit ici en tant qu'expression du cours : les mises en mots, en texte des contenus à enseigner, les constructions du lecteur, étudiant/apprenant, au travers de l'accompagnement de la lecture de l'autre, sont des points essentiels qui retiennent notre attention. Ici par exemple, la mise en forme des documents (graphie, disposition des paragraphes, espaces, importance et/ou encadrement des écrits symboliques) est un premier critère de différenciation, ce dont nous ne nous étonnerons pas tant il était attendu. En revanche, l'accompagnement au travers des descriptions des actions, des explications qui sont données constituent des points moins convenus peut-être.
Nous relevons que dans le polycopié de mathématiques, le discours est une description d'actions, où le scripteur est celui qui agit. Dans celui de psychologie en revanche, le scripteur s'efface complètement, le texte est descriptif ; pour le dire autrement, « on dit le monde tel qu'il est ». Enfin, dans celui de Sciences de l'éducation, les caractéristiques sont partagées ; le discours relève parfois de la description d'actions, parfois de l'argumentation, le scripteur apparait de temps à autre. Les intertitres, qui disent aussi l'organisation du discours, marquent des différences : les polycopiés de Psychologie et de Mathématiques sont organisés en paragraphes indexés par des annonces très générales et non contextualisées (démonstration, théorème, méthode…) tandis qu'en Sciences de l'éducation, les titres de ces paragraphes sont au contraire relatifs au contenu spécifique et contextualisés[14]. Ajoutons encore que le discours en mathématiques s'ancre autour de définitions des objets qui sont définitives, séparées, et annoncées, tandis qu'en Sciences de l'éducation, les objets sont approchés à des lieux différents, successifs du discours : le recours à des reformulations est caractéristique de ce texte.
Inventorier ainsi des critères de différenciation, selon les disciplines universitaires des cours écrits dans les formations en statistique qu'elles encadrent, a pour premier objectif de corroborer des travaux nombreux autour de ce thème de l'écriture dans les disciplines universitaires (Bazerman *et alii* :2004, Monroe : 2002 par exemple). Le second objectif, qui est plus ou moins soumis au premier, est d'étudier les littéracies universitaires, entendues plutôt au sens d'univers de l'écrit/écriture qu'au sens de capacités à écrire (Delcambre, Lahanier-Reuter : 2010). Les caractéristiques que j'ai brièvement listées ici des différents documents seraient à comparer à d'autres écrits universitaires: les cours complets des auteurs des polycopiés et manuels (variation des contenus, variation des positions didactiques), les cours d'autres enseignants (variation des sujets scripteurs), les productions des étudiants (variations des acteurs didactiques)… et d'autres écrits scientifiques, tels que les articles.

3.6 Comment penser des délimitations à la discipline scientifique : l'ASI, des questions de méthodes

Une seule chose nous intéresse ici sans doute, ce sont les liens entre statistique et didactiques. Certes, nous avons comparé les traitements que privilégiaient les didacticiens des mathématiques/français (Lahanier-Reuter, Delcambre : 2010). Mais je voudrais surtout rendre hommage ici à Régis Gras, au travail, à l'œuvre qu'il a accomplie dans l'élaboration de ce

[14] Caractéristiques que nous retrouvons d'ailleurs dans les formes de l'écriture scientifique dans ces disciplines scientifiques et dans les formes de l'écriture académique

champ qu'est l'Analyse Statistique Implicative (en particulier Gras :2009) , en maintenant justement les frontières du travail statistique en les nourrissant sans cesse de problématiques d'autres disciplines. L'intérêt de cette théorie pour les didactiques a été depuis longtemps reconnu, je souhaiterais très vivement qu'elle continue à nourrir les recherches en cours.

4 En guise de conclusion : configuration disciplinaire

L'étude que je viens d'esquisser ne prend pas en compte la question de la façon dont la convocation de la statistique par les disciplines contribue à les définir, en retour. Je soulignerai seulement que les différentes analyses nous indiquent des variations, selon les temps, selon les lieux de ces modes d'insertion, les contenus changent selon les filières, les niveaux d'enseignement, les pays, les temps…. Nous nous devons en conséquence prendre en compte ces variations. Ainsi, en fonction des analyses précédentes, nous tentons, au sein de Théodile de préciser la notion de discipline scolaire en partant de deux principes :
« -les disciplines sont l'objet de constructions, au travers de luttes, de compromis et d'adaptations ;
- ces constructions prennent des formes différentes selon l'espace au sein duquel elles se situent. » (Reuter et Lahanier-Reuter: 2006)
Cela nous a donc amené à préférer la notion de *configurations disciplinaires* à celles de disciplines. Reprenant ce que nous avancions (Lahanier-Reuter et Reuter : 2004), il me semble encore que les « disciplines, loin d'être des entités monolithiques et figées, s'actualisent différemment, sous forme de configurations disciplinaires, variables selon les époques, les espaces (prescription, formation, pratiques…), les niveaux, les filières, les modalités du travail pédagogique etc.. ». J'ajouterai, en me déplaçant cette fois vers les Mathématiques, que cette discipline pourra être actualisée en une configuration qui délimitera le domaine statistique en un ensemble de contenus, d'objets spécifiques etc. alors que dans d'autres cas, la configuration disciplinaire des Mathématiques préférera peut-être s'attacher majoritairement aux conduites descriptives particulières à ce domaine d'enseignement, aux situations d'exploration de données etc. alors que dans d'autres cas encore, cette configuration tendra à minorer les contenus statistiques ou à les confronter à d'autres modes de mise en forme mathématiques du monde.

Références bibliographiques

Adam J.M., 1999, *Linguistique textuelle. Des genres de discours aux textes,* Paris, Nathan.

Bakhtine M., 1952/53, 1979, *Esthétique de la création verbale,* Paris, Gallimard.

Bazerman C. *et alii*, 2004, *Reference guide to Writing Across the Curriculum*, http://wac.colostate.edu/books/bazerman_wac/wac.pdf

Bazerman C., 2003, "What Activity Systems are Literary Genres Part of?", *Journal of the Interdisciplinary Crossroads* 1:3 http://www.education.ucsb.edu/bazerman/articles/documents/5.Bazerman2003ArtActivitySystems.pdf

Bernié J.P., 2001, « Genres discursifs scolaires, genres de l'activité et conceptualisation », dans J-P Bernié, ed., *Apprentissages, développement et signification,* Pessac, Presses Universitaires de Bordeaux, 155-171.

Bourdieu P., 2007, Systèmes d'enseignement et systèmes de pensée, in *Les sociologues, l'école et la transmission des savoirs*, *présentation et choix de textes par Jérôme Deauviau et Jean-Pierre Terrail*, La Dispute, Paris p. 28-29, Revue internationale des sciences sociales

Chervel A.,1977, *Et il fallut apprendre à écrire à tous les petits Français, Histoire de la grammaire scolaire*, Paris, Payot, réédition, 1981, sous le titre *Histoire de la grammaire scolaire*, Petite Bibliothèque Payot, Paris.

Daunay B., 2005, « Le commentaire : exercice, genre, activité ? », *Les cahiers THEODILE, n° 5,* Université Charles-de-Gaulle – Lille III, 49-61.

Daunay B., 2008, « Performances et apprentissages disciplinaires », *Les Cahiers Théodile,*n° 8, Villeneuve d'Ascq, Université Charles de Gaulle – Lille 3

Daunay B., Reuter Y., 2005, « Souvenirs de lecture–écriture d'étudiants en formation », *Repères*, n°30, *Les pratiques langagières en formation des enseignants*, p.167-186.

Delcambre I., Lahanier-Reuter D., 2010, « Écrits et disciplines dans l'université française : le cas des sciences humaines », dans Defays J-M, Englebert et alii, *Les discours universitaires : formes, pratiques, mutations*, Paris, L'Harmattan.

Delcambre I., Reuter Y., 2002, « Images du scripteur et rapports à l'écriture », *Pratiques,* n°113-114, *Images du scripteur et rapports à l'écriture,* Metz, CRESEF, 7-28.

Genette G., 1987, *Seuils*, Collection Poétiques, Éditions du Seuil, Paris.

Genette G. 1982,*Palimspestes : la littérature au second degré*,Éditions du Seuil, Paris,

Gras R. (Dir), 2009, *Analyse Statistique Implicative, une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités,* Cépuadès éditions, Toulouse,

Lahanier-Reuter D., 2004, « Genres dans une classe de mathématiques : première approche », *Les Cahiers Theodile*, n°5, 33-48.

Lahanier-Reuter D., 2005, « L'histogramme : un objet peu enseigné », site de la SFDS. http://www.sfds.asso.fr/groupes/statvotre/StatVotre6/Histo_Lahanier.pdf

Lahanier-Reuter D., 2008, « Performances et apprentissages en didactique des mathématiques », *Les Cahiers Theodile* n°9, 45-60.

Lahanier-Reuter D., Delcambre I., (2010) "Usages comparés des traitements statistiques dans deux didactiques disciplinaires », *Revue d'anthropologie des connaissances*, Vol 4, n°3, 551-569.

Lahanier-Reuter D., Reuter Y., 2004, « Présentation of a few concepts for the analysis of writing », Colloque international *WAC from an international Perspective*, Saint Louis, Missouri, 20-22 mai 2004).

Maingueneau D., 2004, « Retour sur une catégorie : le genre », dans J.-M. Adam, J.-B. Grize et Magid Ali Bouacha, *Texte et discours : catégories pour l'analyse*, Editions Universitaires de Dijon, 2004, 107-118.

Maingueneau D., 1997, *L'analyse du discours. Introduction aux lectures de l'archive,* Hachette, Paris.

Monroe J., 2002, *Writing and revising the Disciplines,* Cornell University Press, Ithaca.

Pratiques, 2002, n° 113-114, *Images du scripteur,* Metz, CRESEF, juin.

Reuter Y. *dir.*, 2010*, Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*, Bruxelles, De Boeck.

Reuter Y., 2010, « Didactique », dans Reuter Y. (dir.), *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*, Bruxelles, De Boeck.

Reuter Y., 2007a, « Statut et usages de la notion de genres en didactique(s) », *Le Français aujourd'hui*, n°159, *Les genres : corpus, usages, pratiques*, Paris, Armand Colin, décembre 2007, 11-18.

Reuter Y., 2007b, « La conscience disciplinaire, présentation d'un concept », *Éducation et didactique*, Volume 1, n°2, Presses Universitaires de Rennes, p.54-70.

Reuter Y., 2005, « Définition, statut et valeurs des dysfonctionnements en didactique », *Repères,* n° 31, *L'évaluation en didactique du français,* Paris, INRP.

Reuter Y., Lahanier-Reuter D., 2006, « L'analyse de la discipline : quelques problèmes pour la recherche en didactique » in Falardeau, É., Fisher, C., Simard, C. et Sorin, N. (2006).

Les voies actuelles de la recherche en didactique du français, Québec, Presses de l'Université Laval.

Schneuwly B., 1994, « Genres et types de discours : considérations psychologiques et ontogénétiques », dans Reuter Y., ed : *Les interactions lecture-écriture,* Berne, P. Lang, 155-173.

Expérimentation et position du chercheur en didactique des mathématiques

Réflexions autour du thème du IVème séminaire des jeunes chercheurs de l'ARDM[1].

Audrey Daina
Université de Genève, Audrey.Daina@unige.ch
Anne-Cécile Mathé
Laboratoire de Mathématiques de Lens, Université d'Artois, acecile.mathe@lille.iufm.fr
Nicolas Pelay
Laboratoire de Didactique André Revuz, npelay@gmail.com
Hussein Sabra
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, hussein.sabra@univ-montp2.fr

Résumé
L'équipe des jeunes chercheurs de l'ARDM vise à favoriser l'insertion des doctorants et jeunes thésards dans la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques de France. Dans ce but, chaque année depuis 2007, l'équipe organise un séminaire autour d'un thème commun. L'objectif est à la fois de rendre visible le travail des jeunes chercheurs et de réfléchir collectivement sur le thème choisi, accompagné par un chercheur « expert ».
Le séminaire de 2010 avait pour thème : « L'expérimentation dans nos recherches en didactique des mathématiques : méthodologie et position du chercheur ». L'étude de ce thème questionne les rapports entre chercheurs et acteurs sur le terrain expérimental (élèves, enseignants, groupe d'enseignants). Le chercheur fait explicitement ou implicitement des choix sur sa place dans le dispositif expérimental, les modalités d'interactions ou d'intervention avec les personnes, ou même les modes de recueil de données. Qu'est ce qui oriente ces choix, et sont-ils toujours pertinents ?
Les premières réflexions ramènent à l'idée que la problématique, la méthodologie, le terrain expérimental et la position du chercheur sont liés. Nous présenterons dans cette communication les questions issues de ce séminaire permettant de croiser les regards autour des différents dispositifs de recherche mis en oeuvre par les jeunes chercheurs.

Mots clés
Position du chercheur, expérimentation, méthodologie, contrat de recherche

1.Introduction

Depuis sa naissance à la fin des années 1970, la didactique des mathématiques s'est considérablement développée en France, en Europe et dans le monde entier, si bien que les questions de recherche, les cadres théoriques et les méthodologies se multiplient et se diversifient de plus en plus dans ce qui est appelé aujourd'hui « research in mathematics education ». En tant que jeunes chercheurs en didactiques des mathématiques, nous souhaitons nous questionner sur les savoirs à partager pour se comprendre, sur notre façon de travailler ensemble et de collaborer. C'est dans cette optique que le groupe des jeunes chercheurs de l'ARDM a été initié et se développe aujourd'hui.

[1] Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques

Le groupe des jeunes chercheurs de l'ARDM vise à favoriser l'insertion des doctorants et jeunes thésards dans la communauté française des chercheurs en didactique des mathématiques, ainsi que l'échange et la réflexion entre les jeunes chercheurs. Dans ce but, chaque année depuis 2007, l'équipe organise un séminaire autour d'un thème choisi. L'objectif est à la fois de rendre visible le travail des jeunes chercheurs et de réfléchir collectivement sur un thème, accompagnés par un chercheur « expert ». Cette rencontre donne l'occasion à chaque participant de se confronter à d'autres points de vue et d'enrichir son propre questionnement par des échanges, des références bibliographiques, des questions, etc. La dimension formative du séminaire est donc importante, mais n'a pour autant aucune visée « normative » ou « prescriptive ».

Le séminaire de 2010 avait pour thème : « L'expérimentation dans nos recherches en didactique des mathématiques : méthodologie et position du chercheur ». Le choix de ce thème part du constat que, quelle que soit la méthodologie utilisée ou les problématiques traitées, le chercheur fait partie intégrante de ses recherches : « *Ce qui me paraît premier, en effet, ce sont les interactions que le chercheur entretient avec son objet d'étude* » (Chevallard, in Blanchard-Laville et *al.* 1996, p.42). Nous avons donc voulu questionner les rapports entre le chercheur et ses expérimentations. Ce dernier fait explicitement ou implicitement des choix sur sa place dans le dispositif expérimental, les modalités d'interactions ou d'intervention avec les acteurs du terrain expérimental (élèves, enseignants, groupe d'enseignants, etc.), ou même les modes de recueil de données. Qu'est-ce qui oriente ces choix ? Comment en tient-il compte au moment de tirer des conclusions de ses travaux de recherche ? Ces questions ont guidé notre réflexion durant les deux jours de séminaire, à travers des échanges autour de six présentations de travaux et un atelier collectif animé par Annie Bessot. Le travail s'est ensuite poursuivi, pour chaque doctorant dans son travail personnel, et particulièrement pour nous dans la préparation de cette communication.

Pour les organisateurs du séminaire de 2010, cette communication au séminaire national constitue une opportunité à la fois de rendre visible et soumettre à la réflexion de tous le travail réalisé par les jeunes chercheurs qui ont exprimé un intérêt important pour la problématique. Nous rendrons compte, dans une première partie, des questions soulevées lors du séminaire puis, dans une seconde partie, nous proposerons une mise en perspective de ce travail, en prenant appui sur quelques éléments de réflexion théorique plus généraux.

2. Le séminaire des jeunes chercheurs 2010

2.1 Organisation du travail

Chaque année depuis 2007, l'organisation du séminaire des jeunes chercheurs de l'ARDM est prise en charge par une équipe qui investit cette mission avec une grande liberté. Des évolutions importantes ont caractérisé l'organisation du séminaire 2010 :

- le séminaire a été organisé sur deux jours afin d'avoir davantage de plages de présentations et d'ateliers et de favoriser les échanges entre jeunes chercheurs ;
- un texte de 5 pages centré sur le thème a été rédigé par chaque communicant et diffusé auprès de tous les participants avant le séminaire afin de favoriser une dynamique d'échange autour des présentations. Des échanges ont ensuite eu lieu autour de la présentation croisée de ces textes ;

- un atelier « partageons nos outils » a été mis en place. Durant cet atelier le logiciel de transcription et d'analyse de données vidéo « Transana » a été présenté aux jeunes chercheurs[2].

Le séminaire, qui s'est déroulé dans la région lyonnaise, a réuni 22 participants, en provenance de différents laboratoires de recherche de France et de Suisse. Annie Bessot nous a accompagnés tout au long du week-end, en tant que « chercheur-expert » du séminaire. Grâce à sa participation aux échanges, la présentation de travaux antérieurs sur le sujet et l'organisation d'ateliers de travail collectif[3], elle nous a permis une prise de recul et un enrichissement de notre réflexion.

2.2. Choix du thème

L'une des caractéristiques de la didactique des mathématiques est de s'inscrire dans le champ des sciences expérimentales. Le rapport au terrain est donc un élément essentiel de notre travail. Mais ce rapport au terrain est également délicat à objectiver dans la perspective d'une démarche de recherche scientifique, car nos objets d'études sont de l'ordre d'interactions humaines complexes. D'une part, nous faisons tous plus ou moins partie du champ éducatif, que nous soyons ou ayons été enseignants, formateurs d'enseignants. D'autre part, nous sommes amenés à établir des interactions avec les acteurs du terrain expérimental avec lesquels nous avons plus ou moins de liens institutionnels, hiérarchiques ou même parfois amicaux ou familiaux. Il faut donc nous « intégrer » au terrain expérimental, trouver une place et nous « positionner » de façon adéquate, selon une certaine éthique bien sûr nécessaire. Avant même d'être amenés à interpréter les données, et tout au long du processus d'expérimentation, nous sommes confrontés à la nécessité de définir nos objectifs et de faire des choix qui pourront conditionner par la suite la validité ou la généralité des résultats produits.

Pour la plupart d'entre nous, le travail de thèse constitue une des premières confrontations à un terrain expérimental et beaucoup de questions se posent aussi bien au moment de récolter les données qu'au moment de l'analyse. Au regard des préoccupations exprimées lors des réunions « jeunes chercheurs » du séminaire précédent et lors de la quinzième école d'été, le thème « L'expérimentation dans les recherches en DDM : méthodologie et position du chercheur » a été choisi. En appui sur une réflexion quant à la façon dont, chacun, nous investissions notre démarche expérimentale, les relations que nous entretenions avec le terrain et ses acteurs, notre objectif était d'engager un questionnement collectif autour de l'origine de nos choix méthodologiques et sur les conséquences de ces choix sur nos résultats de recherche. Tous ces choix, résultants des contraintes du terrain mais aussi de processus

[2] Cet atelier a été animé par Stéphane Clivaz (HEP Vaud et Université de Genève) et Audey Daina (Université de Genève.)

[3] Le travail de l'après-midi a été mené par Annie Bessot qui a dans un premier temps donné des repères bibliographiques et fait des liens entre les présentations de la matinée et les éléments qu'elle avait dégagé dans son exposé. Dans un deuxième temps, nous avons été amené à travailler en petits groupes à propos du thème rationnels et décimaux, à l'école primaire, sur les points suivants : « formuler une question accessible à la recherche en vous appuyant sur vos propres travaux, préciser le cadre théorique, le projet de constitution d'un document de recherche ; caractériser les positions du chercheur par rapport à la constitution du document de recherche ; faire émerger 1 ou 2 questions en rapport avec la présentation du thème du séminaire ». Ce travail en petits groupes a là aussi permis de confronter les positionnements de chacun.

conscients ou inconscients, caractérisent d'une certaine façon la « position » du chercheur dans son expérimentation.

2.3. Les communicants

Nous avons souhaité que le séminaire soit l'occasion pour chacun d'approfondir et d'expliciter ses choix sur le terrain expérimental et d'essayer de déterminer en quoi ils étaient liés à la question de la position du chercheur. Dans un premier temps, six jeunes chercheurs ont présenté leurs travaux, en centrant leurs interventions sur leur méthodologie de recherche et les éventuelles questions qui se posaient à eux quant à leur position de chercheur dans leurs expérimentations :

- Nathalie Andwandter-Cuellar, doctorante à LIRDEF, Université de Montpellier II, sous la direction d'Alain Bronner, travaille sur l'observation et l'analyse des pratiques d'enseignement de grandeurs au secondaire, du point de vue de l'approche anthropologique ;
- Jean-Philippe Georget, a soutenu sa thèse dirigée par Michèle Artigue, en 2009. Son travail porte sur l'aptitude d'une communauté de pratiques d'enseignants (CoP), supportée notamment par les nouvelles technologies, à favoriser la pratique d'activités de recherche et de preuve entre pairs (RPP) dans les classes ;
- Hussein Sabra, doctorant au S2HEP, Université Lyon 1 sous la direction de Luc Trouche, travaille sur l'articulation entre documentations individuelle et collective des enseignants de mathématiques et les effets de cette articulation sur les connaissances pour l'enseignement des mathématiques ;
- Samuel Voisin est enseignant en poste au collège et doctorant à l'université de Bordeaux 2 sous la direction d'Isabelle Bloch et de Pascale Masselot. Son travail porte sur l'enseignement de la proportionnalité dans le contexte de l'Adaptation Scolaire Handicap (ASH), et plus précisément des SEGPA (Section Général et Professionnel Adapté) ;
- Marie-Line Gardes est doctorante monitrice à l'université de Lyon 1. Sa thèse est co-dirigée par Vivianne Durand-Guerrier et Laurent Habsieger. Son travail de thèse porte sur l'étude de processus de recherche d'élèves, d'étudiants et de chercheurs confrontés à la résolution d'un même problème ouvert en arithmétique ;
- Charlotte Osel-Tabarant est professeure des écoles et doctorante à l'université Bordeaux 2, sous la direction d'Isabelle Bloch. Son travail porte sur l'élaboration et la mise en situation d'une progression en géométrie à l'école primaire sur la constitution des références spatiales.

Les textes et les communications ont été rédigés non pas dans l'optique d'une présentation de résultats de recherche, mais comme des supports de réflexion pour le groupe. Ils comportent une dimension personnelle et réflexive sur un travail de recherche en cours. Il ne s'agit en aucun cas de juger de la validité de la méthodologie mais de créer en quelque sorte un « milieu » commun de réflexion autour de ce thème.

Élaborer une synthèse du travail réalisé sur ce thème, dans les textes et lors des présentations, n'est pas chose aisée tant la question des liens entre le chercheur et son terrain expérimental est complexe et tant il est difficile de caractériser la démarche expérimentale de chacun et les raisons des choix méthodologiques qui en découlent. La préparation de ce document nous a placé face au défi d'organiser de façon structurée et objective les questions et discussions principales qui ont eu lieu durant le séminaire, tout en faisant émerger des questionnements communs.

Nous structurons notre bilan en deux parties : nous commençons tout d'abord par montrer les différentes questions qui ont émergé, en appui sur les présentations et textes des communicants, puis nous mettrons en perspective ces questions avec quelques éléments théoriques qui permettent d'envisager une réflexion méthodologique plus générale sur la position du chercheur.

3.Questionnement autour des textes

3.1. Différentes positions selon les objectifs de la recherche

De façon immédiate, deux types de positionnement distincts émergent de la mise en regard des travaux présentés lors du séminaire : pour certains, la compréhension des phénomènes didactiques passe par l'introduction d'un dispositif expérimental dont ils souhaitent mesurer les effets, d'autres cherchent en revanche à observer le système didactique tel qu'il existe, en le perturbant le moins possible.

Par exemple, l'objectif du travail de Anwandter-Cuellar est d'interroger la place et le rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques et dans leurs interrelations dans l'enseignement au collège en France. Anwandter-Cuellar dit donc vouloir « *obtenir des informations sur l'activité de l'enseignant en perturbant le moins possible son fonctionnement usuel*. ».

Sabra étudie l'articulation entre travail documentaire individuel et collectif. Il se veut observateur extérieur d'un dispositif de travail collectif déjà existant (Sésamath).

Voisin prévoit quant à lui deux phases distinctes dans son travail : une première phase d'observation des pratiques existantes, durant laquelle il dit s'astreindre « *à jouer le rôle d'observateur extérieur* » et une deuxième phase de mise en place d'une ingénierie durant laquelle il décrit sa position comme « *différente de celle du premier temps d'observation* » se situant entre « *observation et observation participante*». L'enjeu est de réussir à mettre en place une ingénierie « *efficace* » sur la base de ses observations lors de la première phase mais de ne pas s'impliquer dans la réalisation : « *je m'interdis toute intervention ».*

Osel-Tabarant élabore et expérimente une ingénierie autour de l'enseignement de la géométrie et la structuration de l'espace. Sa position est clairement dans l'introduction d'un dispositif dont elle souhaite mesurer les effets.

Marie-Line Gardes expérimente elle aussi un dispositif. Elle propose à des élèves de lycée un problème ouvert et cherche à observer et analyser les connaissances mathématiques mobilisées par les élèves et la dimension expérimentale en jeu.

Georget, quant à lui, a mené une étude sur les activités de recherche et de preuve entre pairs (RPP) en classe de mathématiques et sur les moyens de favoriser leur mise en œuvre à la fin de l'école primaire. Ce travail l'a conduit à interroger dans quelle mesure un travail avec les enseignants sur le modèle offert par la théorie des Communautés de Pratique[4] de Wenger (1998) peut permettre une évolution des pratiques d'enseignants vers la mise en œuvre

4 CoP : ensemble de personnes regroupées autour d'une entreprise commune considérée comme objet et comme processus (négociée entre elles et relative à leur pratique).

d'activités nouvelles dans leur classe. L'objectif général de sa thèse consiste à expérimenter des potentialités de mise en œuvre de dispositifs de travail collectif proposé par le cadre théorique des CoP de Wenger pour une évolution des pratiques d'enseignant relatives aux activités de Recherche entre Pairs.

Sabra, Anwandter-Cuellar et Voisin (pour la première phase de son projet) travaillent sur des terrains expérimentaux déjà existants, dans l'objectif de décrire ce qui se passe dans les pratiques effectives. Osel-Tabarant, Gardes et Georget élaborent pour leur part des dispositifs de travail particuliers qu'ils veulent tester.

Bien que nous soyons tous conscients de ces différences de positionnement, une première difficulté est venue des différentes significations que chacun assignait aux termes utilisés pour les désigner (« observateur », « expérimentation », « clinique », etc.). La méthodologie d'ingénierie didactique était parfois opposée à la méthodologie clinique, il y avait parfois une opposition des termes expérimentateur et clinicien ou encore expérimentateur et observateur.[5] La question de la possibilité d'envisager une expérimentation dans laquelle le chercheur serait totalement extérieur et n'influencerait pas les acteurs du terrain a alors tenu une place particulièrement importante dans les débats.

Anwandter-Cuellar questionne elle-même dans son texte l'illusion d'un observateur extérieur qui n'aurait aucune influence sur les pratiques qu'il observe : *« Il est vrai que sa présence [celle du chercheur] même peut avoir une influence sur les pratiques, en tant qu'élément non-familier dans la classe. (...) [Mais] nous voulons ainsi réduire au maximum l'impact intrusif que peut avoir un observateur sur les observables».* Confrontée à cette question, directement en lien avec celle du domaine de validité des résultats de sa recherche, Anwandter-Cuellar dit, d'une part, de manière classique, se refuser autant que possible à toute intervention. D'autre part, elle décide de ne pas dévoiler, au moins dans un premier temps, l'objectif de la recherche au professeur, c'est-à-dire que l'objet mathématique « grandeur » est son objet d'étude principal. Elle éprouve elle-même le caractère fragile d'une position de chercheur « extérieur » : *« Comme observateur le chercheur veut examiner l'environnement habituel de la classe, mais sa présence, en tant qu'élément étranger à la classe, modifie le fonctionnement quotidien. Par exemple, pour nos prises de données, nous nous situons au fond de la salle, mais les professeurs viennent fréquemment nous faire des commentaires ou nous regardent pendant la séance. Ce paradoxe nous conduit à nous demander si le fait que l'enseignant soit au courant de nos intentions ou ne le soit pas a une véritable importance, car on sait que la seule présence du chercheur change son comportement ».*

Ce questionnement nous a conduit à prendre conscience de la nécessité d'une clarification de la façon dont nous caractérisions ces deux positionnements, spontanément perçus comme distincts, et du vocabulaire utilisé pour les désigner (nous reviendrons sur cette question au paragraphe 4.2). D'ores et déjà, les débats lors du séminaire font clairement apparaître que, quel que soit le positionnement adopté, le chercheur constitue un élément perturbateur de son terrain expérimental. Ce constat induit les questions qui suivent. Cela impacte-t-il sur ses résultats ? Comment le chercheur prend-il en compte la perturbation qu'il a sur les événements ? Une question centrale et commune semble donc bien celle de se donner des moyens de contrôler notre propre influence sur le dispositif de recherche, et donc d'en tenir compte dans l'élaboration de la méthodologie.

---

[5] On trouve une trace de cette confusion dès notre définition du thème où nous opposions observateur et expérimentateur.

3.2. La position du chercheur dans la constitution du corpus de données

Dans le débat sur la recherche d'objectivité, de nombreux échanges ont eu lieu sur le corpus de données. Là encore, nous avons noté combien la constitution du corpus était liée à des questions sur la position du chercheur. A quoi est lié le choix des outils méthodologiques ? Comment met-on en œuvre ces choix ? Quels sont les effets sur les observés ?

D'une façon très générale tout d'abord, le terrain expérimental en didactique des mathématiques peut-être constitué d'au moins deux systèmes (Margolinas, Bessot et Coulange 2005) :

– le système de classe, formé par la classe, les fiches de préparation, et l'ensemble des membres qui intervient dans ce cadre ;

– le système des institutions d'enseignement constitué par les textes officiels, les programmes, manuels, revues destinées au professeur : recueil des informations sur le présent, le passé et l'évolution des institutions ; pour caractériser des états possibles de connaissances d'un enseignant donné, relativement à un projet d'enseignement, ou à un savoir mathématique à enseigner.

Si les travaux de thèse présentés lors du séminaire articulent sans aucun doute des recherches portant sur le système de classe et des recherches portant plus spécifiquement sur le système des institutions d'enseignement, on constate que la plupart d'entre eux aborde la question de leur position dans leur terrain expérimental par un retour réflexif sur les liens qu'ils entretiennent avec le système de classe, omettant ainsi d'évoquer les travaux développés dans le système des institutions d'enseignement.

Notre volonté d'interroger les liens entre position du chercheur et nature du terrain expérimental nous a conduits à aller un peu plus loin dans la caractérisation des terrains expérimentaux de chacun. Pour ce faire, nous avons essayé de mettre en regard la nature des données en distinguant, à l'instar de Margolinas, Bessot et Coulange (2005), les données dites « internes » et les données dites « externes » au système de classe. De plus, au sein même du système de classe, les acteurs peuvent bien sûr être de différents types : les élèves, un enseignant, plusieurs enseignants suivis individuellement ou des collectifs d'enseignant plus ou moins organisés. Nous recensons dans le tableau suivant quelques exemples de terrains expérimentaux, acteurs et types de données présentés par les communicants. Nous insistons sur le fait que le tableau ci-dessous ne fait figurer que les éléments du terrain expérimental explicitement évoqués par les jeunes chercheurs concernés, lors de leur présentation ou à travers leurs textes. Il ne s'agit donc pas d'une caractérisation exhaustive des terrains expérimentaux de chacun, mais d'un recensement de la façon dont les chercheurs présentent eux-mêmes ces terrains lorsqu'ils interrogent le questionnement de leur positionnement.

	Système de classes			
	Données internes (Observations de classe : enregistrements audio ou vidéo, notes d'observation, etc.)		**Données externes à la classe** (Fiches de préparation de l'enseignant, entretiens avec le professeur à propos de ses projets d'enseignement ou de leur déroulement)	
	Élèves	Enseignant(s)	Enseignant(s)	Collectifs d'enseignants
Andwandter-Cuellar Suivi de 3 professeurs et trois classes (6°, 5°, 4°).	Observation de séances, parfois filmées, à différents moments de l'année scolaire.		Travail sur la programmation annuelle du professeur. Interviews des professeurs et de quelques élèves, Traces écrites des professeurs (cahiers du professeur, cahier de la classe), si cela est possible.	
	Recueil de toutes les productions écrites de quelques élèves (cahier de cours, cahier d'exercice, les devoirs),	Observation du contenu et de la mise en œuvre de toutes les séances correspondant au chapitre « Grandeurs et mesures » ou son analogue s'il existe et observation ponctuelle d'autres domaines que celui de grandeurs, pour y repérer leur présence éventuelle		
Sabra Suivi du travail documentaire d'un collectif et du travail documentaire d'un enseignant (membre de ce collectif)		Observations en classe (suivi d'une séance de classe, observation d'une mise en œuvre d'une ressource conçue par l'enseignant)	Suivi individuel : Suivi hors classe (journal de bord, entretiens à domicile, questionnaires, recueil de ressource)	Suivi de collectifs : les messages échangés sur la liste de discussion propre au collectif, de Représentation Schématique d'interactions collectives, un agenda de suivi d'incidents dans la documentation collective.
Georget Suivi de l'émergence d'une CoP		Observations de classe (mise en œuvre des activités RPP dans leurs classes).	Retour sur les pratiques des enseignants autour des activités RPP dans leurs classes	Suivi d'une Communauté de pratique

Tableau 1 : *Vers une caractérisation des terrains expérimentaux*

3.3 L'élargissement spatial et temporel des terrains expérimentaux?

Cette tentative de caractérisation des terrains expérimentaux et de la nature des données considérées dans les travaux présentés nous laisse à penser que le questionnement de la pratique de l'enseignant dans la classe prend de plus en plus en compte de l'analyse des pratiques hors-la-classe de l'enseignant, comme par exemple celles liées au développement du travail collaboratif dans des communautés de différents types. Les échanges lors du séminaire nous ont conduit à noter que ces nouveaux champs de recherche appellent à la mise en place de nouveaux outils méthodologiques questionnant la position du chercheur.

Le travail de Sabra est basé sur la méthodologie d'*investigation réflexive* (Gueudet et Trouche 2010), fondée sur l'idée d'un suivi de l'activité de l'enseignant sur une durée significative et sur le principe de réflexivité qu'induit le recueil de données, quand l'enseignant en est l'acteur central. Cette méthodologie suppose un suivi de l'activité de l'enseignant, en classe ainsi que hors classe. Dans le prolongement de cette méthodologie au cas de collectif d'enseignants, Sabra met en œuvre dans ses travaux une méthodologie de recueil de données originale, convoquant des outils qui veulent inciter à une certaine réflexivité des enseignants sur ses propres pratiques. Il s'agit de l'analyse de listes de discussions, de représentation schématique de système de relations dans des collectifs et d'un agenda de suivi de certains aspects de la documentation collective.

Le travail de Georget le conduit quant à lui à concevoir et mettre en œuvre un dispositif expérimental lui aussi original, au plus près du cadre théorique des CoP. Son terrain expérimental est ainsi essentiellement constitué d'une CoP qu'il a lui-même initiée. Celle-ci est composée d'enseignants volontaires ayant répondu positivement à une proposition de projet de travail présenté « *non pas comme une formation au sens stricte* » mais évoquant sa « *nature collaborative* » et la négociabilité du projet.

Ces questions de recherche cherchent aussi à prendre en compte des facteurs de temps longs. Les travaux de Sabra comme ceux de Georget, par exemple, portent sur l'analyse des impacts de travaux collectifs d'enseignants sur leurs pratiques. Le suivi de ce type de dispositif s'étale sur des périodes relativement longues, nécessaires à la conception de dispositifs et de ressources (Aldon et *al.* 2008). L'originalité de ces travaux réside également dans le fait qu'ils donnent souvent une large place à l'étude des potentialités de l'usage de divers environnements numériques. Sabra articule ses outils méthodologiques avec ceux du travail des acteurs sur le terrain expérimental. Par exemple, dans son terrain expérimental, la réalisation du projet collectif et la conception de ressources s'effectuent à distance via des plates-formes et des listes de discussions. Le temps nécessaire à l'appropriation de l'outil et à sa mobilisation au service de l'activité mathématique induit également la mise en place de dispositifs expérimentaux à long terme.

Cet élargissement spatial et temporel des dispositifs mis en place et analysés entraîne sans aucun doute une modification des rapports du chercheur à son terrain expérimental. Dans les deux cas cités ci-dessus, les choix méthodologiques de suivi dans le temps sont liés à des choix théoriques : l'approche documentaire dans le cas de Sabra qui est un prolongement de l'approche instrumentale (Rabardel 1995) importée de l'ergonomie cognitive vers la didactique des mathématiques dans la deuxième moitié des années 90 ; la théorie des CoP (Wenger 1998) dans le cas de Georget, importée du domaine de la sociologie des entreprises, suivant laquelle on a intérêt à observer le processus d'émergence de cette CoP.

3.4. Les interactions entre le chercheur et les acteurs du terrain expérimental

Les récits d'expériences de jeunes chercheurs nous amènent à mesurer à quel point nous sommes amenés à entretenir des interactions complexes avec les acteurs du terrain expérimental. Celles-ci relèvent de la façon dont nous tissons des liens humains avec les acteurs du terrain, de la place que nous prenons, souvent de façon non consciente, dans le dispositif expérimental, du fait de nos histoires personnelles. Elles sont aussi le fruit de contraintes du terrain auxquelles nous ne pouvons nous soustraire. La question du rapport du chercheur aux acteurs du terrain expérimental semble donc déterminante lorsque l'on interroge la position du chercheur en didactique des mathématiques. Comment le chercheur contrôle-t-il sa position par rapport aux autres acteurs intervenant d'une manière ou d'une autre explicitement ou implicitement dans la recherche ? (Perrin-Glorian, in Perrin-Glorian & Reuter, 2006)

Le témoignage de Voisin par exemple met en évidence la difficulté rencontrée par le chercheur dans son rapport aux différents acteurs lors de l'expérimentation (les principaux de collège, les enseignants, les élèves) et la façon dont chacun l'a « accepté » sur le terrain. Il note particulièrement que le rapport avec les enseignants était difficile à mettre en place et pourtant crucial par rapport à sa problématique : *« Dans quelles positions seront les enseignants qui accepteront de tester mon ingénierie ? Est-ce que l'appropriation de mon ingénierie ne la dénaturera pas ? ».* Selon lui, même après s'être entretenu avec eux sur le but de sa recherche*, « ils restent intéressés par une ingénierie sous forme de séquence clef en mains […] ».* Il ajoute : *« à leurs yeux mon statut de chercheur s'efface et ils voient plutôt en moi un expert, un conseiller pédagogique ou encore un formateur».*

Nous remarquons ici qu'il y a une difficulté à établir un rapport optimal vis-à-vis des objectifs de la recherche avec les enseignants, et cette tension qui en résulte entre une position de chercheur et une position d'expert ou de formateur vis-à-vis des enseignants observés.

La question du contrôle par rapport à la position du chercheur a été particulièrement vive lors de la présentation de travaux s'appuyant sur des expérimentations dans lesquelles le chercheur était aussi acteur du terrain expérimental.

Georget, par exemple, est initiateur et coordinateur de la CoP qu'il veut étudier. Au plus près possible du cadre livré par le cadre théorique de Wenger, il investit ce rôle en « catalysant » le développement de la CoP, et en favorisant son émergence et son activité. Il questionne lui-même la possibilité de se positionner à la fois comme acteur et chercheur : *« Le chercheur qui initie la CoP est dans une sorte de paradoxe puisqu'il attend de celle-ci qu'elle travaille sur un objet qu'il souhaite étudier avec les moyens qu'il a choisi. Il peut donc y avoir des interférences entre les rôles de coordinateur et de chercheur dans une CoP ».*

Osel-Tabarant elle aussi est à la fois chercheur et acteur de son terrain expérimental puisqu'elle filme et analyse des séances qu'elle met elle-même en œuvre dans sa classe. Elle témoigne de difficultés rencontrées à créer un dispositif qui permettrait à la fois de montrer ce qu'elle observe, en tant qu'enseignante, et un regard plus extérieur pour un point de vue plus objectif. Plus encore, comme pour Georget, l'influence de ses propres pratiques sur les situations observées et la façon dont cela devrait être pris en compte pour les résultats de la recherche ont fortement questionné les jeunes chercheurs lors du séminaire. Osel-Tabrant soulève elle-même ces questions dans son texte : « *Le chercheur acteur peut-il filmer ses* *expérimentations ? Quels aspects considérer ? Que regarder ? Y-a-t-il une perte d'information ou d'objectivité ? »*

Les résultats de la recherche de Gardes nous permettent d'affiner la question et de montrer que les tensions se situent non seulement au niveau du rapport entre le chercheur et les enseignants mais également au niveau d'une dynamique globale entre le vécu que le chercheur partage avec la classe, la qualité des interactions entre les élèves, le niveau mathématique de la classe. Nous retrouvons bien ici la complexité de l'objet d'étude. Gardes a réalisé une observation des processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème ouvert deux années de suite avec le même enseignant. Ce dernier est un de ses proches parents ce qui implique une intégration facilitée et une communication optimale du fait que l'enseignant était déjà sensibilisé aux problématiques de la recherche. La recherche montre que l'expérience s'est déroulée dans des conditions totalement différentes d'une année à l'autre. D'abord parce que lors de la première expérimentation, la chercheuse connaissait très bien la classe puisqu'elle y était assistante pédagogique et les élèves « *avaient l'habitude d'aborder l'activité mathématique par des recherches de problèmes* ». Elle a participé à l'enseignement lors de l'observation en donnant la consigne et en répondant aux questions. Le fait que les élèves la connaissent personnellement a favorisé leur implication : « *ma double position de chercheur et d'assistante pédagogique lors de l'expérimentation m'a permis de faciliter la dévolution de ce problème* ». Lors de la deuxième expérimentation, le chercheur n'était plus connu des élèves. Il n'a pas participé à l'enseignement : *« je suis intervenue plus comme chercheur extérieur et comme observateur »*. Le chercheur constate que *« les élèves se sont moins intéressés au problème »* et que les observations étaient moins riches.

3.5 Bilan sur les textes : position du chercheur et méthodologie de recherche

L'analyse comparative des textes nous a permis de mettre en évidence que la position du chercheur se manifeste dans un ensemble de choix liés aux problématiques, aux objectifs de recherche, aux cadres théoriques mobilisés, aux liens avec les acteurs sur le terrain expérimental, à la nature et aux modalités de recueil des données.

La question de la position du chercheur est très intimement liée à la méthodologie de recherche mise en place. Or, bien que sous-jacent à tout travail de recherche, ce questionnement n'a fait jusque là que l'objet de peu de recherche ou de publication spécifique : « *J'avancerais volontiers que, dans le domaine des didactiques, ce questionnement est encore récent, peu thématisé et consensuel.* » (Reuter, in Perrin-Glorian & Reuter, 2006, p.15). C'est d'ailleurs dans le but de faire avancer ces questions qu'ont été organisés entre 2005 et 2007 trois colloques internationaux spécifiquement consacrés aux méthodes de recherche[6] en didactique(s) : ils ont donnés lieu à trois publications associées sur les « méthodes de recherche en didactiques »[7].

[6] « une méthode de recherche peut se définir comme la forme prise par la démarche de travail mise en place pour tenter de répondre à une question dans une discipline de recherche déterminée. » (Reuter , in Perrin-Glorian & Reuter, 2007, p.17) . Robert (1992) annonce que la méthodologie « caractérise les moyens qu'on prévoit de se donner (a priori) pour prouver ce qu'on avance, ou au moins pour inscrire ce qu'on propose dans la réalité, qu'elle soit ou non construite» (p.43).

[7] (Perrin-Glorian & Reuter, 2006), (Lahanier-Reuter & Roditi, 2007), (Cohen-Azria & Saysac, 2009)

D'après ce traitement croisé des textes, nous avons remarqué l'émergence de questionnements communs qui reflètent des besoins de :

- clarifier le vocabulaire que nous utilisons pour expliquer notre position de chercheur : positionnement naturaliste, positionnement expérimentaliste, méthodologie clinique et questionnement sur l' « observation », articulation clinique-expérimental ;
- justifier la constitution de notre corpus : des données aux construits ;
- clarifier les liens avec les acteurs du terrain expérimental : notion de contrat de recherche.

Nous proposons dans la suite de ce texte une mise en perspective de ces questions avec des textes existants.

4.Mise en perspective théorique sur la thématique

Pour le traitement des questionnements émergents, nous nous sommes appuyés sur un ensemble de textes abordant les questions méthodologiques : Les méthodes de recherches en didactique (Perrin-Glorian et Reuter 2006, Lahanier-Reuter et Roditi 2007, Cohen-Azria et Sayac 2009); Regards croisés sur le didactique (Blanchard-Laville et *al.* 1996); et des articles publiés dans des revues (Robert 1992), (Chevallard 1992), (Johsua 1996), (Brousseau 1986), (Artigue 1990), etc.

4.1 Positionnement « expérimentaliste » - Positionnement « naturaliste »

La mise en regard des travaux lors du séminaire nous a permis de retrouver deux positionnements distincts dans une expérimentation en didactique des mathématiques : le positionnement « expérimentaliste » pour lequel la compréhension des phénomènes didactiques va passer par l'introduction par le chercheur d'un dispositif expérimental dans un système didactique, le positionnement « naturaliste » qui cherche en revanche à observer le système didactique tel qu'il existe sans le modifier. Nous avons donc cherché à clarifier ces termes en revenant aux sources des débats qui ont eu lieu au moment de l'apparition de la « méthodologie clinique ». L'ouvrage « Regards croisés sur le didactique » (Blanchard-Laville & *al.* 1996) témoigne d'ailleurs de débats importants qui ont eu lieu à la fin des années 1980 sur ce sujet, et dont on a trouvé un écho dans les discussions que nous avons eues.

Ces deux positionnements ont une source historique et ont été l'objet de débats sur lesquels il semble important de revenir. Lorsque la recherche en didactique des mathématiques s'est développée dans les années 1970, elle a pu s'appuyer sur le dispositif original du COREM mis en place par Brousseau, ce qui a permis de concevoir et de réaliser des dispositifs expérimentaux satisfaisant à la fois les contraintes de la recherche et de l'enseignement. Ce dispositif a permis de développer la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1986, 1989) et la méthodologie d'ingénierie didactique (Artigue 1988) qui cherche explicitement à penser la recherche dans son articulation avec l'action : « *la didactique des mathématiques s'est largement construite, jusqu'ici, dans la perspective omniprésente de la constitution d'une ingénierie didactique, perspective qui lui a inspiré ses objets, ses concepts, son questionnement, et lui a fourni sa méthodologie fondamentale – celle dite des « séquences didactiques* ». » (Chevallard, in Blanchard-Laville & *al.* 1996, p.24).

Le positionnement « naturaliste » s'est développé plus tard, dans les années 1980, et dans une certaine mesure en réaction au premier positionnement, sous l'impulsion de Chevallard : selon lui, « l*'étude du monde-tel-qu'il-est a vite, trop vite à mon avis, cédé la place à la volonté de définir le monde-tel-qu'il-devrait-être*. » (ibid., p.25). Pour ce dernier, la didactique devait à ce moment « *entrer en crise » et donner une place plus importante à l'observation des pratiques dans les classes ordinaires à un moment où on ne savait pas grand-chose sur ce qui se passait réellement dans les classes*. » (ibid., p.25).

Pour autant, cette position n'assure pas au chercheur une plus grande neutralité, et l'observation de classes ordinaires questionne tout autant la question de la propre subjectivité du chercheur: « *pour observer, il suffirait d'aller dans la classe : postulat impensé que je révoquerai en doute dans un instant*. » (Chevallard, 1992, p.6).

La perspective « naturaliste » a amené Chevallard à développer une méthodologie dite « méthodologie clinique » dans le but de donner au chercheur les moyens d'assumer une position d'observateur dans un système didactique sans modifier la séquence d'enseignement.

Nous nous sommes rendus compte que « *la notion d'abord clinique ne s'oppose pas à la notion d'approche (ou de « méthode ») expérimentale. On ne définira pas même l'abord expérimental comme un abord clinique particulier, mais comme un contenu particulier possible en tout abord clinique. Inversement, tout épisode expérimental, provoqué ou invoqué, devra d'abord être située dans l'abord clinique, s'il existe* »[8] (ibid., p.45).

Si les deux approches « naturaliste » et « expérimentaliste » semblent constituer deux facettes complémentaires de l'étude des phénomènes didactiques qui coexistent aujourd'hui, on peut constater que ces approches reflètent toutefois deux conceptions spécifiques du rôle ou la « position » du chercheur dans la société : interventionniste ou non interventionniste sur le système d'enseignement.

En précisant cela, il ne s'agit en aucun cas d'opposer ces deux conceptions de recherche, mais de souligner comment ces positions, souvent implicites dans les recherches, jouent sur les choix méthodologiques. La persistance de ce débat laisse penser que trouver une articulation entre ces deux positions est une question difficile et probablement dialectique pour la recherche en didactique des mathématiques.

« Naturaliste » ou « expérimentateur », nous avons constaté que nous étions en réalité face à un problème commun. Que nous le voulions ou non, c'est un fait : nous constituons un élément perturbateur du terrain expérimental qu'il va nous falloir prendre en compte et chercher à contrôler. *« la subjectivité du chercheur se combine de manière implicite et plus ou moins avouée à la démarche scientifique qu'il a choisie. »* (Carnus, in Cohen-Azria & Saysac 2009, p.55). Le chercheur est mis face à une sorte de paradoxe, puisqu'il doit étudier un système dont il fait lui-même partie.

Dans ces conditions, nous sommes donc amenés à questionner notre propre subjectivité et à « questionner l'implicite » (Chevallard in Blanchard-Laville et *al.* 1996) pour prendre en compte les effets de notre présence sur le terrain de recherche. *« La conscience et l'analyse de cette posture permet de contrôler davantage l'inférence dans le recueil et le traitement des*

[8]Cette remarque permet à Chevallard de dire que « toute expérience ne peut être décontexualisée, du point de vue de sa signification, du système d'interaction, et donc du système de questionnement, dans lequel elle est produite. », ce qui permet de pointer à nouveau les questions de la position du chercheur.

informations, et ainsi de relativiser la portée des résultats produits » (ibid., p.56). C'est bien cette démarche que nous avons chacun cherché à expliciter au cours du séminaire.

4.2 Les interactions entre le chercheur et le terrain expérimental

La prise de conscience commune de ce qui peut être appelé un « effet chercheur » (ibid., p.65) dans les expérimentations a inévitablement des conséquences au niveau méthodologique, puisque le chercheur doit questionner les interactions qu'il entretient avec le dispositif expérimental. L'interférence du chercheur se situe à au moins deux niveaux : le recueil et le traitement des données, les interactions avec les acteurs du terrain expérimental.

4.2.1 Le processus d'« observation » en recherche : des « données » aux « construits »

La prise en compte de la subjectivité du chercheur a conduit Chevallard, dans la constitution de la « méthodologie clinique », à affirmer qu'il ne peut pas y avoir d'observation pure, et que *« les "données" que nous devons recueillir en observant un système sont en fait des construits »* (Chevallard, 1992, p.13).

Cela signifie en particulier que lorsqu'un chercheur observe, il le fait déjà en lien avec une certaine position de recherche (dont il est plus ou moins conscient) qui est liée à ses questions de recherche, ses cadres théoriques, etc. Le recours à des enregistrements audio ou vidéo n'empêche nullement cette réduction du réel, et les choix de positionnement du matériel traduisent déjà des options plus ou moins explicites. Ainsi, il semble qu'on puisse, selon Reuter (Reuter, in Perrin-Glorian & Reuter 2006, p.17), distinguer deux éléments dans la méthodologie :

- *« la constitution du document, souvent confondue avec la constitution des données [...] : il s'agit de la sélection et de la collecte de documents (écrits, sonores, visuels,...), à l'aide d'outils déterminés, mettant souvent le chercheur en interaction avec d'autres acteurs sociaux. Ces documents sont unifiés pour constituer un document de recherche spécifique.»*
- *« la construction des données [...]. Il consiste principalement en la sélection (et donc l'exclusion) et la catégorisation de certains éléments»*. Reuter justifie l'emploi du terme « construction » car il « *renvoie à un processus d'élaboration à penser et à contrôler* » (contrairement à recueil, collecte, ou même cueillette)

Ainsi, en observant des enseignants et des élèves au travail, le chercheur va essayer de repérer les « événements » qui vont former le domaine de la réalité du chercheur. Il va sélectionner ces événements dans un terrain expérimental choisi, en fonction des objectifs de sa recherche.

Le chercheur est alors amené à constituer des méthodologies qui vont lui permettre de croiser des données de différentes natures, en particulier les données dites « internes », avec des données « externes » aux systèmes de classe. Il apparaît que les problématiques actuelles de recherche, notamment liées à l'étude du professeur sur la durée, nécessitent de construire des méthodologies complexes qui combinent la prise en compte d'un grand nombre de données internes et externes à la classe : la méthodologie clinique développée dans les recherches de Leutenegger (2000), les méthodologies liées à la double approche (Robert, 1992), la méthodologie d'investigation réflexive (Gueudet et Trouche, 2010) (§2.2) témoignent de cette évolution des méthodologies. L'élargissement temporel et spatial des terrains expérimentaux incite aussi à des questions autour d'un contrat, que nous appelons *contrat de recherche*, qui s'établit entre le chercheur et les acteurs sur le terrain expérimental. Nous développons ce point dans ce qui suit.

4.2.2 Interactions avec les acteurs du terrain expérimental : le contrat de recherche

Dans les recherches en didactique des mathématiques, plus les acteurs sont nombreux et diversifiés, plus les rapports et le contrôle du terrain se complexifient. Quelle que soit la méthodologie utilisée, il existe des implicites liant le chercheur aux acteurs du terrain expérimental, et en particulier dans les relations qu'entretiennent le chercheur et l'enseignant. Chevallard (1992) évoque notamment le fait que même le chercheur en position d'observateur est placé malgré lui dans une position de surveillance ou de contrôle, du fait même du rôle que l'observation a joué dans notre histoire et notre civilisation.

L'établissement d'un contrat de recherche permet d'expliciter et de formaliser une partie de la relation liant le chercheur et le(s) enseignant(s). Il tente de définir les rôles, les responsabilités et les objectifs de chacun, les décisions et actions possibles, de manière à limiter les implicites. Mais, selon la même idée que le *contrat didactique*, la négociation d'un contrat de recherche n'enlève pas les implicites, même si elle permet d'en clarifier certains.

L'établissement d'un contrat de recherche satisfaisant à la fois l'enseignant et le chercheur est donc extrêmement complexe et délicat, comme en témoignent Salin et Greslard (2006) par rapport au dispositif du COREM : *« Le rôle des observateurs est de recueillir de l'information tout en se faisant oublier. Cela a l'air tout simple, ce ne l'est pas. L'enseignant devrait lui aussi pouvoir oublier qu'il est sous le regard du chercheur et ses décisions ne pas être assujetties aux attentes du chercheur (ou à ce qu'il croit qu'elles sont) mais au projet d'enseignement. C'est encore plus difficile ! »* (ibid., p.9)

Dans ces conditions, les questions d'ordre éthique et de confiance dans la relation enseignant/chercheur jouent un rôle fondamental dans l'établissement d'un contrat de recherche viable : *« Pour qu'un enseignant puisse travailler avec un chercheur, il faut qu'il puisse le faire sereinement. »* (ibid, p.11). Chercheurs et enseignants doivent négocier : *« il ne faut pas croire que la négociation […] soit toujours facile».*

Le contrat de recherche peut même conditionner la réussite des recherches. Ainsi, Berthelot conclut ainsi un travail de recherche qu'il a conduit : *« Les résultats de l'année 1996-1997 confirment que cette recherche ne peut se maintenir sur le terrain de la recherche appliquée, comme je l'avais cru à tort. Le dispositif de recherche devra probablement comprendre l'observation et l'analyse des interactions entre l'équipe des enseignants et le chercheur. Mais il a mis aussi en évidence selon moi des différences de rapport à la géométrie et à l'espace entre le chercheur et l'équipe d'enseignants, qui ne peuvent être ni ignorées, ni traitées par les mêmes modalités que celles du rapport des élèves. »* (Berthelot in Salin et Greslard, 2006, p.16). Ce point montre l'enjeu essentiel pour le chercheur de questionner la nature même du contrat de recherche qu'il a lui-même mis en place, sa pertinence et sa viabilité. Cette notion doit être développée et mise en relation avec des travaux existants sur ce thème, comme ceux par exemple de Schubauer-Leoni (1986).

4.3 La position de chercheur-acteur dans le dispositif expérimental

Comme nous venons de le voir, l'établissement d'un dispositif de recherche peut être complexe, aussi bien dans les possibilités de constituer le recueil des données, que dans l'établissement du contrat de recherche. Aussi, pour comprendre certains phénomènes didactiques, ou pour traiter de nouvelles problématiques, le chercheur est amené à prendre une position centrale au sein même du dispositif expérimental. Nous avons qualifié cette position de « chercheur-acteur » dans le sens où le chercheur entreprend lui-même des actions dans un but déterminé de recherche et dans une relation directe avec des enseignants ou des élèves.

Ce type de positionnement est de plus en plus présent dans les recherches, sans que ces positions ne soient pour l'instant réellement catégorisées. Sans chercher à être exhaustif, on peut constater par exemple deux cas parmi les présentations des communicants :

- Le chercheur est aussi enseignant dans la classe, il assume une double position chercheur et enseignant (cas de Voisin et Osel-Tabarant, §3.1).
- Le chercheur mène ses expérimentations en collaboration avec un enseignant. Il y a donc deux personnes dans la classe. (cas de Gardes, §3.1)

L'élargissement du terrain de recherche au-delà de la classe amène aussi à celui des rapports entre le chercheur et d'autres acteurs comme formateur, accompagnateur, tuteur, etc… D'une certaine façon, le chercheur est impliqué dans un dispositif d'enseignement et de recherche, ce qui l'amène nécessairement à devoir clarifier ses rôles qui peuvent être multiples.

4.4 Synthèse des réflexions théoriques

4.4.1. Des problématiques communes

Cette prise de recul théorique permet maintenant de mettre en perspective les textes théoriques et les textes des jeunes chercheurs. Nous avons dégagé trois éléments qui nous paraissent importants :

- la nécessité de formaliser un vocabulaire précis sur les aspects méthodologiques ;
- la présence d'un contrat de recherche dans toutes les recherches ;
- la constitution des observables.

En premier lieu, on peut constater la nécessité d'utiliser un vocabulaire précis et approprié pour décrire nos travaux et mieux se comprendre. L'utilisation des deux termes expérimentaliste et naturaliste permet d'abord de clarifier le positionnement de chaque travail de recherche. Ensuite, cela pose la question commune de l'observation et de la construction de données. Sous cette perspective, les termes « expérimental » et « clinique » ne s'opposent plus : au contraire, tout chercheur doit se constituer un terrain de recherche (existant ou à construire) et ensuite se donner les moyens d'obtenir des observables. On peut donc faire l'hypothèse que tout travail de recherche en didactique des mathématiques comporte une dimension « expérimentale » et une dimension « clinique », et la phrase de Chevallard prend alors tout son sens : « *la notion d'abord clinique ne s'oppose pas à la notion d'approche (ou de « méthode ») expérimentale. On ne définira pas même l'abord expérimental comme un abord clinique particulier, mais comme un contenu particulier possible en tout abord clinique. Inversement, tout épisode expérimental, provoqué ou invoqué, devra d'abord être situé dans l'abord clinique, s'il existe* » (Chevallard 1996).

Nous expliquons cette possible prise de conscience commune par le fait que nous sommes tous confrontés, en tant que jeunes chercheurs, à l'enjeu (souvent difficile) de constituer un terrain de recherche, ce qui était moins le cas lors de la naissance de la didactique où les chercheurs étaient déjà « positionnés » dans le système institutionnel, que ce soit comme chercheurs, enseignant-chercheurs, ou formateurs.

Constituer un terrain de recherche, c'est pour nous trouver un espace où les recherches vont pouvoir avoir lieu, c'est-à-dire où un contrat de recherche va pouvoir être passé entre un chercheur et un ou des acteurs de ce terrain de recherche lui permettant de se donner les moyens d'assumer à un moment donné une position de chercheur, c'est-à-dire une position réflexive. Il y a donc bien trois moments incontournables :

- Le moment de la négociation d'un contrat de recherche (jamais achevé) : cela peut être avec le proviseur d'une école, le(s) enseignant(s) d'une classe, les élèves. Dans les six travaux présentés, on trouve une trace de l'établissement de ce contrat, et des problèmes rencontrés : Voisin ou Georget ressentent une demande des acteurs de leur terrains de recherche d'assumer une position d'expertise ou de conseil ; Osel-Tabarant est enseignante dans sa classe et doit gérer en quelque sorte un contrat de recherche avec elle-même ; Gardes intègre un terrain favorable en assumant des positions d'auxiliaire dans la classe et en établissant un contrat de recherche avec son père. Antwander-Cuellar ou Sabra, en position de chercheur naturaliste, doivent négocier un contrat de recherche avec le(s) enseignant(s) en même temps qu'ils doivent se donner les moyens du contrôle de leur « intrusion », ce qui atténue l'aspect naturaliste de leur positionnement.

- Le moment de la construction d'un corpus qui va permettre de construire des observables et de se positionner en tant qu'observateur. Nous voyons donc que cette position d'observateur ne coïncide plus forcément avec une présence physique du chercheur en tant qu'observateur. Le chercheur peut assumer une position d'acteur dans le dispositif d'enseignement : assumer une position d'enseignant (Osel-Tabarant), de coordinateur de CoP (Georget), d'auxiliaire dans la classe (Gardes). Mais il peut aussi ne pas être présent dans la classe : dans la méthodologie clinique mise en place par Leutenegger (2000), c'est l'enseignant qui active la caméra et le chercheur n'est pas dans la classe.

- La prise de recul avec le terrain de recherche : C'est le moment où le chercheur interprète ses données, mais aussi questionne ses choix, sa méthodologie et sa propre position dans le dispositif. Ce moment réflexif a généralement lieu à un autre moment que le moment de l'action ou de l'expérimentation elle-même. La citation de Chevallard est éclairante : *« je dirai, sous la forme d'un apparent paradoxe, que le chercheur n'est uniquement chercheur que pendant ces phases où il n'est pas directement en contact avec son objet d'étude, en ces moments où il substitue au contact direct, en première personne, des traces écrites, sonores, visuelles, etc.* » (Chevallard, in Blanchard-Laville, p.44). Cette phrase souligne qu'une partie essentielle du travail de recherche se situe dans la prise de distance du chercheur vis-à-vis de son expérimentation via les données construites. La mise en place de matériel vidéo ou audio peut aider le chercheur dans cette prise de recul.

Il semble que la reconnaissance et l'acceptation par le chercheur de sa propre subjectivité soient des conditions nécessaires pour contrôler et interroger sa place dans le dispositif expérimental. Nous rejoignons à nouveau Carnus : « *la reconnaissance et la prise en compte d'un « effet chercheur » implique préalablement une conscience aigue du chercheur de la part de subjectivité constitutive de son objet de recherche.* » (Carnus, in Cohen-Azria & Saysac, p.65). Dans les travaux de recherche évoqués lors du séminaire, les choix de positionnement du chercheur lié aux choix méthodologiques étaient plus ou moins implicites, et le séminaire se donnait pour but de les expliciter et de les questionner. C'est à chaque jeune chercheur de déterminer si cette prise de recul peut être bénéfique pour ses recherches, et d'en faire mention lors de la présentation de ses recherches à la communauté.

4.4.2. La constitution de critères d'analyse

Lors du séminaire des jeunes chercheurs et lors de la lecture croisée des textes, nous nous sommes questionnés sur les moyens d'appréhender objectivement la question de la position du chercheur.

Partant de notre hypothèse initiale (§2.1) nous avons construit une liste de critères (voir tableau 1) pour repérer ce qui est explicité ou non dans les textes par rapport à la position du chercheur. Cette caractérisation a été initialement conçue dans le but de nous donner les moyens de repérer des éléments sur la position du chercheur, et nous l'avons affinée au fur et à mesure de notre travail théorique et de commentaire des textes. Parvenu au terme de notre travail, et constatant l'utilité de cette liste, nous nous demandons si elle ne pourrait pas jouer un rôle d'outil d'explicitation pour le chercheur en didactique.

Bien entendu, cette liste de critères n'est qu'une première ébauche et reste largement à améliorer, mais elle n'en constitue pas moins une première piste qui pourrait être approfondie.

1. histoire et identité du chercheur
2. Problématique
3. objectifs de la recherche
4. cadre théorique
5. terrain expérimental
6. nature de la relation du chercheur avec le terrain
7. contraintes du terrain
8. modalités de recueil de données
9. types d'interactions et d'intervention du chercheur
10. contrat de recherche avec les acteurs du terrain
11. prise de recul critique du déroulement expérimental

Tableau 2. *Une liste de critères pour questionner la position du chercheur en didactique*

5.Conclusion et perspectives

Cette présentation avait un objectif double. D'une part, nous souhaitions rendre compte du travail effectué à l'occasion du séminaire des jeunes chercheurs de l'ARDM 2010. D'autre part, nous voulions soumettre notre réflexion collective à l'ensemble de la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques et, en particulier, partager la nécessité ressentie d'un questionnement commun et constructif sur les choix méthodologiques et leur mise en œuvre sur le terrain expérimental. L'explicitation de la position du chercheur semble intéressante aux regards de l'évolution des terrains expérimentaux dans les recherches. L'élargissement temporel et spatial de domaines d'expérimentations suppose un accompagnement par des nouvelles conceptions méthodologiques de recherche. Mais aussi, il est source de contraintes du fait des interactions qu'il crée avec des acteurs divers et variés.

D'après ce que nous avons avancé, nous pouvons dire que plusieurs facteurs interagissant systématiquement orientent les choix du chercheur sur le terrain expérimental : les objectifs de recherche, la nature des données qu'il pense construire, le rapport aux acteurs sur le terrain expérimental, les choix théoriques effectués par le chercheur ayant des effets sur les choix méthodologiques. La conscience de l'interaction existante entre ces différents facteurs permet au chercheur de réaliser un travail de contrôle permanent de sa position sur le terrain expérimental aussi que de ces choix.

Le présent texte porte plus particulièrement sur les recherches francophones. Il est nécessaire d'élargir la réflexion autour de cette thématique en prospectant les recherches dans les pays anglo-saxons. La mise en perspective de la question de position de chercheur avec les textes francophones antérieurs montre que ce questionnement dépasse une problématique propre aux jeunes chercheurs. Nous rejoignons dans cette idée la citation de Reuter (2006) : *« J'avancerais volontiers que, dans le domaine des didactiques, ce questionnement est encore* *récent, peu thématisé et consensuel».* Il s'agit donc bien pour notre discipline d'un enjeu de recherche important dont il s'agit de poursuivre le développement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Aldon G., Artigue M., Bardini C., Baroux-Raymond D., Bonnafet J.-L., Combes M.-C., Guichard Y., Hérault F., Nowak M., Salles J., Trouche L., Xavier L., Zuchi I. (2008), Nouvel environnement technologique, nouvelles ressources, nouveaux modes de travail : le projet e-CoLab (expérimentation Collaborative de Laboratoires mathématiques), *Repères-IREM, 72*, Nancy : Topiques éditions, en ligne

http://educmath.inrp.fr/Educmath/lectures/dossier_mutualisation/

Artigue M. (1990), Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9/3,* 283-307. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Artigue M. (1988), Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9/3, 281-308. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Blanchard-Laville, C., Chevallard, Y., & Schubauer-Léoni, M.L. (1996), *Regards croisés sur le didactique, un colloque épistolaire.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cohen- Azria C. & Sayac N. (2009), *Questionner l'implicite, Les méthodes de recherche en didactiques (3)*. Lille : Presses universitaires Septentrion.

Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 33-115. Grenoble : Pensée Sauvage.

Brousseau G. (1989), La tour de Babel, *Etude en didactique des mathématiques*. Université de Bordeaux II : IREM, 17 p.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des Mathématiques*, 12/1, 73-112. Grenoble : Pensée Sauvage.

Gueudet, G., & Trouche, L. (dir.) (2010), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Johsua S. (1996), Qu'est-ce qu'un « résultat » en didactique des mathématiques ?, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16/2. Grenoble : Pensée Sauvage.

Lahanier-Reuter D. & Roditi E. (2007), *Questions de temporalité, les méthodes de recherche en didactiques (2)*. Lille : Presses universitaires Septentrion.

Leutenegger F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique, Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement, *Recherche en didactique des mathématiques*, 20/2, 209-250. Grenoble : Pensée Sauvage.

Margolinas C., Coulange L., Bessot A. (2005), Tearcher's Knowledge in the class, *Numéro spécial d'Educational Studies of Mathematic*.

Perrin-Glorian M.J., Reuter Y. (2006), *Les méthodes de recherche en didactiques,* Lille : Presses universitaires du Septentrion,

Rabardel (1995), *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Robert A. (1992). Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 12/1, 33-58. Grenoble : Pensée Sauvage.

Sabra, H., & Trouche, L. (dir.) (2009), *Enseignement des mathématiques et TICE, Revue de la littérature de recherche francophone (2002-2008),* 153 p., Lyon : Institut National de recherche Pédagogique. http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/enseignement-des-mathematiques-et-tice

Salin M.H., & Greslard D. (1999), La collaboration entre chercheurs et enseignants dans un dispositif original d'observation de classes: LE COREM. In Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM) (Ed.), *Les liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques. Actes de la CIEAEM 50. Neuchâtel Suisse 2-7 août 1998*, 24-37. Neuchâtel, Suisse.

Schubauer Leoni, M. (1986). *Maître élève savoir : analyse psychosociale du jeu et des enjeux de la relation didactique*. Genève : Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation. Thèse de doctorat.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice, Learning, Meaning and Identity*. Cambridge University Press.

Quand un prof rencontre un autre prof…

Audrey **DAINA**; Pierre-Alain **CHERIX**; François **CONNE**;
Jean-Luc **DORIER**; Annick **FLUCKIGER**
DiMaGE Université de Genève
audrey.daina@unige.ch
pierre-alain.cherix@unige.ch
francois.conne@unige.ch
jean-luc.dorier@unige.ch
annick.fluckiger@unige.ch

Résumé
A l'origine de notre projet, se trouve la question, liée à la désaffection des jeunes pour les études scientifiques, du rôle important que les enseignants jouent dans l'image que la société peut se faire des mathématiques. Or, le problème se pose de façon assez nettement différente pour les enseignants du primaire, généralistes, et les enseignants du secondaire et a fortiori du supérieur ayant une formation disciplinaire spécialisée. L'équipe de Didactique des mathématiques de Genève (DiMaGe) travaille depuis 2006 sur la question du rapport au savoir mathématique des enseignants avec en arrière plan la question de la formation, voire de la co-formation entre enseignants généralistes et spécialisés en mathématiques.

Après avoir fait passer un questionnaire relatif à la fois à l'enseignement et aux mathématiques à des étudiants en première année des sciences de l'éducation de Genève (dont beaucoup se destinent à devenir instituteurs), nous avons dans un deuxième temps mis en place un dispositif dans lequel, sur la base d'un questionnaire individuel écrit portant sur différentes questions mathématiques, nous organisons une confrontation entre un enseignant généraliste de l'école primaire et un enseignant de mathématiques du secondaire. A travers ce dispositif, nous visons à faire émerger des différences significatives dans les rapports aux mathématiques des deux populations.

Nous présenterons ce dispositif original, et les premiers résultats que nous avons obtenus d'abord par une analyse question par question (c'est-à-dire spécifiques à certains thèmes mathématiques) puis en termes de postures des protagonistes lors de l'entretien. Nous conclurons sur une analyse de l'intérêt mais aussi des limites de notre dispositif et sur les perspectives que nous entrevoyons.

Cherix, P.-A., Conne, F., Daina, A., Dorier, J.-L., Fluckiger, A. (2011). Quand un prof rencontre un autre prof …pour faire des mathématiques. *Recherches en Didactique Les cahiers Théodile,* vol.12, 7-45.

Séminaire national

des 13 et 14 mai 2011

Les textes sont dans l'ordre chronologique de présentation pendant le séminaire.

La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves.

Hamid Chaachoua

Equipe MeTAH, LIG. Université Joseph Fourier

Hamid.Chaachoua@imag.fr

Résumé

Notre recherche porte sur la modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves et les usages des environnements informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Elle se place ainsi dans la problématique des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH). Nous avons présenté dans la note de synthèse d'HDR (Chaachoua, 2010) un modèle basé sur des concepts de la théorie anthropologique du didactique, en particulier sur l'approche praxéologique, pour la modélisation de l'apprenant dans un EIAH. Cette modélisation a été faite dans différents domaines d'algèbre : la résolution des équations, la factorisation, la réduction. Dans ce document, nous présentons ce modèle en montrant comment le modèle praxéologique a été adapté pour décrire le rapport personnel des élèves et implémenté dans un environnement informatique (Croset, 2009).

Mots clés

Algèbre, apprenant, connaissance, diagnostic, EIAH, praxéologie personnelle, trace

I. INTRODUCTION

Mon HDR porte sur la modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves où j'ai élaboré un modèle basé sur des concepts de la théorie anthropologique du didactique (TAD), en particulier sur l'approche praxéologique, pour la modélisation de l'apprenant dans un EIAH. L'élaboration de ce modèle est l'aboutissement de deux types de travaux : modélisation des connaissances d'un sujet au sein de la TAD et la modélisation de l'apprenant, par des praxéologies, dans un EIAH.

Trois raisons m'ont motivé à se placer dans la TAD.

- La première est de disposer d'un même modèle pour décrire les attentes d'une institution I et les activités de l'élève en tant que sujet de I. Or, la TAD nous propose le modèle praxéologique pour décrire l'organisation du savoir au sein d'une institution, les activités des sujets attendues par l'institution. Notre travail a consisté à intégrer dans cette approche les comportements non attendues par l'institution, en particulier les erreurs des élèves.
- La deuxième est que le modèle praxéologique me semble adéquat pour une implémentation informatique et donc à une modélisation informatique des connaissances.
- La troisième est que ce modèle, peut servir à d'autres problématiques EIAH comme les scénarios (perspectives de mes recherches).

Nous ne présentons pas ici la théorie anthropologique compte tenu de l'abondante littérature la concernant : pour ne citer que les principales, nous renvoyons le lecteur à (Chevallard, 1992), (Bosch & Chevallard, 1999) et (Chevallard, 1999). Cependant, nous préciserons la modélisation de la connaissance dans cette théorie (paragraphe II). En particulier, nous présenterons notre utilisation du modèle praxéologique pour décrire les praxéologies ponctuelles, institutionnelles et personnelles pour décrire les connaissances de l'apprenant. Enfin, nous présenterons sa mise en œuvre dans un EIAH (paragraphe III).

II. LA MODELISATION DE LA CONNAISSANCE DANS LA TAD

La prise en compte de la connaissance d'un élève dans la TAD, a été faite dès le début à l'aide de la notion de rapport au savoir. Une personne X connait un objet O si cet objet existe pour X, c'est-à-dire s'il existe un rapport personnel R(X, O) de X à O (Chevallard 1992, pp. 86-87). Ce rapport désigne le système de toutes les interactions possibles de X avec O interactions constituant la connaissance qu'a X de O (Chevallard, 2003). Il en est de même pour une institution (Bosch & Chevallard, 1999) avec, cette fois, un rapport institutionnel RI(O) d'une institution I à un objet O.

Au cours des années 90, plusieurs travaux[1] se sont intéressés à étudier la conformité des rapports personnels des élèves avec le rapport institutionnel : (Assude, 1992) (Grugeon, 1995) ou des enseignants (Bronner, 1997) (Chaachoua, 1997).

Dans sa thèse, Assude (Assude, 1992) étudie l'écart entre ce que l'élève est censé apprendre et ce qu'il a effectivement appris. Dans les termes de la TAD, il s'agit d'évaluer l'écart du rapport personnel au rapport institutionnel pour l'élève relativement à l'objet étudié, ici la racine carrée. Pour l'auteur les notions de conception ou de représentation, candidats à modéliser la connaissance, ne recouvrent que partiellement le rapport personnel d'un sujet.

> « Le terme de conception (ou de représentation) renvoie en effet à une réalité supposée qui tout à la fois, excède le rapport personnel et s'inscrit en lui sans l'épuiser. Car l'étude des conceptions, en vérité, ne s'intéresse qu'à une partie du rapport personnel des sujets. » (Assude, 1992, p.4).

Pour Chevallard, la notion de rapport personnel est à la fois un concept englobant mais aussi unificateur des aspects fragmentaires sous lesquels on décrit communément la connaissance.

> « Un individu X ne peut avoir, à un objet de savoir donné, Os, qu'un rapport personnel, lequel est émergent d'un système de relations institutionnelles (telle la relation didactique), relations ternaires où l'individu X entre avec l'objet de savoir Os et un ou des agents de l'institution I.
>
> De ce rapport personnel relève notamment tout ce qu'on croit ordinairement pouvoir dire - en termes de "savoir", de "savoir-faire", de "conceptions", de "compétences", de "maîtrise", d' "images mentales", de "représentations", d' "attitudes", de "fantasmes", etc…- de X à propos de Os. Tout ce qui peut être énoncé - à tort ou à raison, pertinemment ou non - doit être tenu (au mieux) pour un aspect du rapport personnel de X à Os. Le concept de rapport (personnel) apparaît comme englobant les aspects fragmentaires en lesquels on le dissocie ordinairement. » (Chevallard, 1989).

1 On ne citera que quelques travaux car la liste est bien longue.

Comme le soulignent Bosch et Chevallard (Bosch & Chevallard, 1999), la notion du rapport au savoir inscrit la didactique dans le terrain de l'anthropologie de la connaissance (ou anthropologie cognitive). Ainsi :

> « La *connaissance* – et le *savoir* comme une certaine *forme d'organisation de connaissances* – entre alors en scène avec la notion de *rapport* : un objet existe s'il existe un rapport à cet objet, c'est-à-dire si un sujet ou une institution le " (re)connaît " en tant qu'objet. Étant donné un objet (par exemple un objet de savoir) et une institution, la notion de rapport renvoie aux *pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu l'objet* en question, soit donc à " ce qui se fait dans l'institution avec cet objet ". *Connaître* un objet c'est *avoir à faire avec* – et souvent *avoir affaire à* – cet objet.
>
> Le *savoir mathématique*, en tant que forme particulière de connaissance, est donc le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement, se transpose dans des institutions. Mais le mathématique reste encore un terme primitif, *hypostase* de certaines pratiques institutionnelles – les *pratiques sociales à mathématiques*. Ce qui fait défaut, c'est l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permette la description et l'étude des conditions de réalisation. Les derniers développements de la théorisation viennent combler ce manque. La notion clé qui apparaît alors est celle d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie*. » (Bosch & Chevallard, 1999, p.85).

Ainsi, pour décrire le rapport institutionnel qui contraint le rapport personnel d'un sujet à un objet de savoir, la théorie propose le modèle de praxéologie :

> « le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position. C'est ainsi l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduite à réaliser tout au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément qui conduira à faire émerger son rapport personnel à l'objet considéré. » (Bosch & Chevallard, 1999).

La théorie anthropologique du didactique considère que, *en dernière instance*, toute activité humaine consiste à *accomplir une tâche* t d'un certain *type* T, *au moyen* d'une *technique* τ, justifié par une *technologie* θ qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui à son tour est *justifiable* par une *théorie* Θ. En bref, elle part du postulat que toute activité humaine *met en œuvre* une organisation que Chevallard (1998) note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'il nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*. $[T / \tau]$ étant *la pratique* – ou encore le *savoir-faire* ; $[\theta / \Theta]$ le *logos* – ou encore le *savoir*. On parle de *praxéologie mathématique* – ou d'organisation mathématique – lorsque les types de tâches *T* relèvent des mathématiques, de *praxéologie didactique* – ou d'organisation didactique – lorsque les types de tâches *T* sont des types de tâches d'étude.

Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de plusieurs technologies θ_j, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} correspondant à autant de types de tâches T_{ij}. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisation locales, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations régionales, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ. Au-delà, Chevallard (Chevallard, 1999) nomme organisation globale le complexe praxéologique $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$

obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k.

Dans notre recherche nous avons utilisé le modèle praxéologique pour analyser les productions des élèves. Ce modèle nous a permis de caractériser le rapport institutionnel en position d'élève à partir de l'analyse des erreurs qu'ils commettent, analyse effectuée en relation avec les techniques qu'ils mettent en œuvre pour résoudre algébriquement les équations du second degré (Nguyen, Chaachoua, & Comiti, 2007). Dans sa thèse Croset (Croset, 2009) prolonge ce travail en introduisant la notion de *praxéologie-en-acte* pour analyser et décrire les connaissances des élèves. C'est ce que nous proposons de reprendre dans cet article en l'inscrivant dans un cadre plus général.

II.1. Description des praxéologies ponctuelles institutionnelles

Comme le précise (Bosch & Gascon, 2004) l'organisation mathématique à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum mathématiques qui est obtenu à partir des programmes et les manuels. L'identification de ces OM à enseigner passe par la caractérisation du type de tâches institutionnel qui est une « re »construction du chercheur à partir de l'analyse des manuels et des programmes. Notons que le chercheur peut procéder à un autre découpage que celui de l'institution voire le compléter pour des raisons liées à sa problématique. Il s'agit de construire une OM de référence (Bosch & Gascon, 2004). Dans notre étude, la construction d'une telle OM de référence doit prendre en compte les praxéologies institutionnelles.

Caractérisation des types de tâches

Pour caractériser un type de tâches nous considérons comme premier principe : « le type de tâches T regroupe *les tâches qui peuvent être accomplies par une même technique* τ, justifiée par une technologie θ qui elle même justifiée par une théorie Θ. Le quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie ponctuelle, « ce dernier qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches » (Chevallard, 1999). Soulignons que pour un même type de tâche, il peut exister plusieurs techniques dont certaines peuvent être plus efficaces que d'autres selon le type de tâches proposé. Par exemple, le type de problème « montrer l'alignement de trois points » possède plusieurs techniques : angles, colinéarités, transformations …

Ainsi, à chaque type de tâches est associé plusieurs organisations mathématiques ponctuelles $(OMP_k(T))_k = ((T,\tau_k,\theta_k,\Theta_k))_k$. Ces différentes organisations ponctuelles ne sont pas mises en place en même temps. D'une manière générale l'institution de l'enseignement I organise l'étude des $(OMP_k(T))_k$ tout le long de la scolarité. Mais à un niveau scolaire donné on se limite à un petit nombre d'organisations ponctuelles comme le précise Chevallard : « en une institution *I* donnée, à propos d'un type de tâches *T* donné, il existe en général *une seule* technique, ou du moins *un petit nombre* de techniques *institutionnellement reconnues*, à l'exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en *d'autres* institutions. » [2] (Chevallard, 1999).

Castella (Castela, 2008, p.168) précise que « l'organisation de l'enseignement mathématiques étant ce qu'elle est c'est-à-dire structurée par les savoirs théoriques (autrement dit l'étude de secteurs correspondant à une théorie, subdivisés en thèmes plus restreints

---

2 I correspond à un niveau scolaire.

correspondant à des éléments particuliers de la théorie – Chevallard, 2002), n'est généralement sensible à un moment donné de la chronogenèse qu'une seule technique pour un type de tâches donné, technique générée par les éléments de savoir théoriques en cours d'enseignement. Or, le rapprochement des techniques connues et des éléments technologico-théoriques associés suppose une vision transversale, trans-thèmes, trans-secteurs ». Ce rapprochement entre les organisations ponctuelles associées à un même type de tâches T étant peu assumé par I. Il nécessite une réorganisation des $(OMP_k(T))_k$, qui permet à l'élève de mettre en œuvre une $OMP_k(T)$ pour résoudre une tâche de T. Pour représenter l'organisation des $(OMP_k(T))_k$, Castella (Castela, 2008) a introduit la notion de *praxéologie ou organisation mathématique ponctuelle complexe relative à un type T* définit par $[T, (\tau_k, \theta_k, \Theta_k)_k, \theta^T]$[3] où θ^T est la technologie associée à *T* qui intègre les technologies θ_k dans un ensemble plus large situant les techniques les unes par rapport aux autres, cernant leurs domaines respectifs d'efficacité.

En dehors de certains types de tâches, qui sont essentiellement étudiées en fin de l'enseignement secondaire, I organise un travail progressif sur les $OMP_k(T)$. Le choix de la technique ne se pose pas : soit on donne à l'élève la possibilité de reconnaître la spécificité de l'énoncé de la tâche prescrite soit par le contexte associé à la tâche que la technique est induite.

Exemple

Entre la classe de quatrième et la classe de première on étudie un type de tâches T_{ra_eq2} : « résoudre une équation de second degré ». Plusieurs techniques sont mises en place selon la forme de l'équation à résoudre. Par exemple, la résolution de l'équation de la forme[4] $P_1(x)\times Q_1(x)=0$ est résolue par une technique dite du produit nul et celle de l'équation de la forme $P_1^2(x)=k$ (k>0) est résolue par la technique basée sur l'utilisation de la racine carrée. Sur cet exemple de type de tâches le travail sur le couple « forme de l'équation » et « technique » est assumé par l'institution tout au long de la scolarité. Faut-il les considérer comme des types de tâches ou des sous-types de tâches de T_{ra_eq2} ? Nous reviendrons sur cette question dans ce paragraphe. Chacun de ces types de tâches admet une seule technique institutionnelle τ_i. Pour l'institution, l'apprentissage de ces types de tâche, qui se fait selon une certaine progression, assure la réussite du type de tâche : T_{ra_eq2}. Ainsi, en classe de première, face à une tâche t de T_{ra_eq2} l'élève est censé utiliser une des techniques τ_i selon le type d'équation. Pour cela, il doit reconnaître à quel type de tâches appartient t.

Ainsi, plutôt que de confronter l'élève à un type de tâches pour lequel il existe plusieurs techniques, l'institution organise l'étude à travers plusieurs types de tâche pour lesquels il y a une seule technique. Nous appelons le premier, type de tâches visé qu'on notera $T_{visé}$.

Proposition

Soit T un type de tâches visé. Son apprentissage se fait dans le temps à travers l'étude des organisations mathématiques ponctuelles associées $(OMP_k(T))_k$. Si pour une $OMP_k(T)$ il y a une spécification pour caractériser les énoncés des tâches de $OMP_k(T)$, alors on parle de T_k *sous-type de tâches* de T. C'est-à-dire que l'institution s'est donnée des moyens pour caractériser les tâches de T où on attend la mise en œuvre de τ_k.

---

3 Castella distingue dans la technologie deux composantes : « la *composante théorique* » notée θ^{th} et la « *composante pratique* » de la technologie notée θ^p (Castella, 2009, p.143). Nous ne souhaitons pas introduire cette distinction dans notre modèle.

4 Nous adoptons la notation : $P_i(x)$ désigne un polynôme de degré i.

Nous introduisons la notion de portée institutionnelle d'une technique relative à un type de tâche, qu'on note $P_I(\tau/T)$: $P_I(\tau/T) = \{t \in T$ / I attend à ce qu'on mobilise τ pour accomplir t$\}$. Dans le cas où on peut caractériser $P_I(\tau/T)$ on la considère comme un sous-type de tâches de T.

Si le type de tâches T admet une unique technique dans I, on lui associe l'*organisation mathématique ponctuelle simple* définie par $OMP(T) = (T, \tau, \theta, \Theta)$. Sinon, on lui associe une *organisation mathématique ponctuelle complexe* définie par $OMPC(T) = [(OMP_k(T))_k, \theta^T]$ où :

- $OMP_k(T) = (T_k, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$ dans le cas où on peut caractériser la portée institutionnelle $P_I(\tau/T)$ de la technique τ_k dans I. T_k est alors un sous-type de tâche de T.
- $OMP_k(T) = (T, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$ sinon.
- θ^T est la technologie associée à T qui intègre les technologies θ_k dans un ensemble plus large situant les techniques les unes par rapport aux autres, cernant leurs domaines respectifs d'efficacité.

Soulignons que ce découpage est relatif à une institution et qu'il est possible de prendre en compte la dimension temporelle des OM au sein de chaque institution. En particulier, un type de tâches T peut avoir une organisation mathématique simple dans une institution I et une organisation mathématique complexe dans une autre institution I'.

Description des techniques

Le problème de description des techniques a été soulevé dans (Bosch & Chevallard, 1999) « … de quoi est faite une technique donnée ? De quels "ingrédients" se compose-t-elle ? Et encore : en quoi consiste la "mise en œuvre" d'une technique ? ». Si ce problème n'est pas posé explicitement dans les différents travaux qui font usage de l'analyse praxéologique, ces travaux en proposent des descriptions. Certains les décrivent sous forme d'actions plus ou moins structurées, d'autres les décrivent par des sous-tâches. Par exemple, dans (Cirade & Matheron, 1998) les auteurs décrivent la technique utilisée pour le type de tâches T : « résoudre une équation du premier degré », par des sous-tâches : développer une expression algébrique, effectuer les produits, transposer les termes, réduire chacun des membres, résoudre une équation de la forme ax=b. Puis, les auteurs ajoutent que ce découpage est arbitraire, et qu'il s'agit d'un modèle dont l'objectif est de mettre en évidence l'organisation mathématique et de l'évaluer. Nous voyons un intérêt dans ce découpage : il renvoie à des tâches reconnues institutionnellement et pour chacune d'elles il existe une praxéologie mathématique qui a été mise en place avant et il permet ainsi de mieux situer les difficultés des élèves dans la mise en œuvre d'une technique au niveau des sous-tâches qui composent la technique.

En partant de ce choix de description d'une technique, nous l'avons adopté dans notre recherche en distinguant plusieurs niveaux de description. La technique peut être décrite de façon *générique* quand on se place au niveau de type de tâches soit de façon *instancié* quand on se place au niveau d'une tâche. De plus, dans chaque cas on peut distinguer plusieurs niveaux de granularité de description.

Soit T un type de tâches d'organisations mathématiques ponctuelles $(OMP_k(T))_k$ au sein d'une institution I. Pour ne pas alourdir la notation avec l'indice k, on notera $(T, \tau, \theta, \Theta)$ une organisation ponctuelle associé à T.

Au niveau générique 1, la technique τ est décrite par une suite de type de tâches $(T_i)_i$. Nous distinguons deux types de tâches. D'une part, les types de tâches qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre de techniques de certains types de tâches qu'on appelle type de tâches *intrinsèques*. D'autre part, les types de tâches qui peuvent être prescrites aux élèves qu'on appelle type de tâches *extrinsèque*. Nous reviendrons sur les motivations d'introduire cette distinction intrinsèque/extrinsèque dans l'étude de cas du paragraphe II.2.

Au niveau instancié 1, la technique est décrite par une suite de tâches $(t_i)_i$ qui sont des instanciations des types de tâche $(T_i)_i$ du niveau générique

A chaque T_i (de la description générique de la technique τ) est associé un ensemble d'organisations ponctuelles $(OMP_k(T_i))_k$ dans I. La mise en œuvre de T_i dans la technique τ repose sur la mobilisation d'une organisation ponctuelle de T_i. Notons que c'est la technologie θ^{Ti} de l'organisation mathématique complexe de T_i qui permet de faire le choix de l'organisation ponctuelle à mobiliser. Mais, au niveau générique on ne peut pas identifier l'organisation ponctuelle de T_i à mobiliser, sauf dans le cas où T_i n'admet qu'une seule technique, c'est-à-dire que l'OM de T_i est simple. Dans les autres cas, nous avons plusieurs techniques possibles et donc plusieurs praxis possibles. Au niveau générique 2, on peut associer à τ plusieurs descriptions à partir de ces praxis.

En revanche, au niveau instancié, on peut identifier les organisations ponctuelles qu'on peut mobiliser (dans le cas de l'analyse a priori) ou qui est mobilisée (dans le cas de l'analyse d'une production) pour chaque T_i. Dans ce cas on peut décrire la technique par une succession de praxis ce qui correspond au niveau instancié 2 : $\tau = ((t_i,\tau_i))_i$. Chaque technique τ_i peut être décrite à l'aide d'une suite de praxis jusqu'à un niveau qu'on considère comme élémentaire c'est-à-dire *des praxis élémentaires*.

Description des technologies

Soit T un type de tâches d'OM ponctuelle : $(T, \tau, \theta, \Theta)$. Au niveau 1, la technique τ est décrite par une suite de (T_i). La technologie θ a pour fonction de justifier en quoi la mise en œuvre de types de tâches T_i permet d'accomplir le type de tâches T. Elle ne comporte pas nécessairement les technologies des techniques de T_i sauf dans certains cas où un type de tâches T_i joue un rôle clé dans la technique τ. Dans ce cas, la technologie θ_i peut intervenir, éventuellement avec une adaptation, dans la description de la technologie θ.

II.2. Etude d'un cas : résolution des équations de degré 2

Ce paragraphe porte sur l'étude du type de tâches$T_{r\text{-}eq2}$ « résoudre une équation du second degré » et plus précisément $T_{ra\text{-}eq2}$ « résoudre algébriquement une équation du second degré ».

Dans un premier temps nous avons construit l'OM à enseigner pour le type de tâches $T_{r\text{-}eq2}$. Cette étude a été faite à partir de l'analyse des programmes où nous avons mis en évidence 8 OMP[5].

Or, ce type de tâches prolonge d'autres types de tâches (comme la résolution des équations de degré 1) et se prolonge en d'autres types de tâches (comme la résolution des équations degré 3). Ainsi, on peut considérer que l'étude de ce type de tâches contribue à l'étude d'un type de tâches visé $T_{r\text{-}eq.}$: « résoudre une équation ». Dans (Chaachoua, 2010) nous avons décrit l'OM de référence de ce type de tâches visé $T_{r\text{-}eq}$ en prenant en compte la diversité des

5 cf. la note de synthèse (H. Chaachoua, 2010) pour le détail de l'analyse

OM à enseigner dégagées dans l'analyse des manuels afin de disposer d'une carte praxéologique la plus complète pour analyser le système d'enseignement (cf. annexe, fig.1).

A chaque type de tâches T est associé une organisation ponctuelle simple ou complexe. Pour les décrire nous avons adapté et complété le découpage des organisations mathématiques ponctuelles à enseigner dégagées dans l'analyse des programmes et des manuels en fonction de notre problématique de recherche. Pour les organisations mathématiques complexes nous présentons les praxéologies ponctuelles qui peuvent être potentiellement associées au type de tâches T. De plus, nous ne sommes pas restreints seulement aux types de tâche enseignés actuellement. Nous avons élargi à des types de tâches qui ont existé ou qui pourront exister dans l'enseignement. Une fois cette carte complétée, on peut en extraire des parties qui correspondent à ce qui est en vigueur dans l'enseignement à un moment donné et/ou un niveau donné. Les techniques sont décrites au niveau générique. Dans le cas où le type de tâches qui intervient dans la description de la technique a une organisation mathématique simple, nous présenterons la praxis associée. Les praxis élémentaires sont indiquées en italiques. Dans la description des technologies on se limitera essentiellement à donner les éléments importants de la composante théorique de la technologie.

Dans cet article nous présenterons quelques éléments[6] de l'organisation mathématique ponctuelle complexe du type de tâche $T_{ra\text{-}eq2}$. Nous en avons dégagé 6 OMP, on a :

$OMPC(T_{ra\text{-}eq2}) = [T_{ra\text{-}eq2} ; \{OMP_1(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_2(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_3(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_4(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_5(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_6(T_{ra\text{-}eq2})\} ; \theta^T]$

Chaque $OMP_i(T_{ra\text{-}eq2})$ est décrite à son tour selon le même modèle. Par exemple, pour $OMP_1(T_{ra\text{-}eqn})$ on a :

$OMP_1(T_{ra\text{-}eq2}) = (T_{ra\text{-}eq2.pn}, \tau_{ra\text{-}eq2.pn}, \theta_{ra\text{-}eq2.pn}, \Theta_{alg})$	
$T_{ra\text{-}eq2.pn}$	résoudre les équations de la forme $P_1(x)\times Q_1(x)=0$ ou $P_1^2(x)=0$ Exemple : $(x-1)(x+3)=0$
$\tau_{ra\text{-}eq2.pn}$	$\tau_{r\text{-}eq2.pn} = (T_{pn} ; T_{r\text{-}eq1})$ où : T_{pn} : appliquer la règle du produit : un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. C'est un type de tâches intrinsèque. $T_{r\text{-}eq1}$: résoudre deux équations de degré 1.
$\theta_{ra\text{-}eq2.pn}$	La règle du produit nul est valable pour les expressions algébriques ce qui permet d'avoir une équivalence des équations.
Θ_{alg}	Algèbre

La technique $\tau_{ra\text{-}eq2.pn}$ est décrite par une suite de deux types de tâches : le type de tâches T_{pn} est intrinsèque et on le considère comme élémentaire, et le type de tâches $T_{r\text{-}eq1}$ qui a sa propre organisation mathématique ponctuelle complexe $OMPC(T_{r\text{-}eq1})$ qui est décrite par :

$OMP(T_{ra\text{-}eq1}) = (T_{ra\text{-}eq1}, \tau_{r\text{-}aeq1}, \theta_{r\text{-}aeq1}, \Theta_{alg})$	
$T_{ra\text{-}eq1}$	Résoudre les équations de la forme $P_1(x)=Q_1(x)$ où $P_1(x)$ et $Q_1(x)$ sont des polynômes de degré 1.

6 Pour une description complète cf. (Chaachoua, 2010)

$\tau_{ra\text{-}eq1}$	$\tau_{r\text{-}eq1} = (T_{dev}, T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}, T_{red}, T_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}, T_{test.eg})$ où : T_{dev} : développer les deux membres (si nécessaire) $T_{mvt\text{-}adt}$: transposer les termes en x dans un membre et les termes constants dans un autre membre (si nécessaire) T_{red} : réduire les deux membres (si nécessaire) $T_{mvt\text{-}mult}$: transposer le facteur de x dans l'autre membre. $T_{test.eg}$: tester l'égalité avec la valeur trouvée.
$\theta_{r\text{-}aeq1}$	$\theta_{eq\text{-}eq}$: Equivalence des équations par transposition additive des termes ou multiplicative des facteurs (pour les types de tâche $T_{mvt\text{-}adt}$ et $T_{mvt\text{-}mult}$). $\theta_{eg\text{-}exp}$: Une expression algébrique égale à une autre expression algébrique obtenue par l'une des transformations : factorisation, développement et réduction (pour les types de tâches T_{dev} et T_{red}).
Θ_{alg}	Algèbre (élémentaire)

Les types de tâches T_{dev} et T_{red} ont leurs propres organisations mathématiques complexes que nous ne présentons pas ici.

Dans la description de la technique $\tau_{ra\text{-}eq1}$ nous avons introduits deux types de tâche $T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$ et $T_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$. Ces deux types de tâches sont intrinsèques dans la mesure où ce ne sont pas des types de tâches pouvant être prescrits aux élèves. Ce sont des constituants essentiels de la technique ayant une technologie et une théorie. En les considérant comme des types de tâches ayant leur propres praxéologies nous avons pu décrire les techniques selon le même modèle avec possibilité d'itération jusqu'à un niveau élémentaire (cf. annexe, fig.2).

Leurs organisations mathématiques sont définies par :

OMP($T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$) = ($T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$, $\tau_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$, $\theta_{cons\text{-}eg\text{-}ad}$, Θ_{alg})	
$T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$	Transposer un terme d'un membre d'une égalité à l'autre.
$\tau_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$	Ajouter l'opposé d'un terme aux deux membres de l'égalité. Souvent, quand la technique devient routinière elle s'exprime par : si a+b=c alors a=c-b.
$\theta_{cons\text{-}eg\text{-}ad}$	On ne change pas une égalité en ajoutant ou en soustrayant le même nombre à chacun de ces membres.
Θ_{alg}	Algèbre (élémentaire)

OMP($T_{mvt\text{-}mult}$) = ($T_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$, $\tau_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$, $\theta_{cons\text{-}eg\text{-}ad}$, Θ_{alg})	
$T_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$	Transposer un facteur d'un membre d'une égalité à l'autre.
$\tau_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$	Multiplier par l'inverse d'un facteur les deux membres de l'égalité. Souvent, quand la technique devient routinière elle s'exprime par : si ab=c alors a=c/b (b non nul) ou si a/b=c alors a=bc (b non nul)
$\theta_{cons\text{-}eg\text{-}mult}$	On ne change pas une égalité en multipliant ou en divisant chacun de ces membres par un même nombre non nul.
Θ_{alg}	Algèbre (élémentaire)

Dans la technologie $\theta_{r\text{-}aeq1}$ nous n'avons pas présenté les technologies spécifiques aux types de tâche qui interviennent dans la description au niveau 1 de la technique $\tau_{ra\text{-}eq1}$ car celles-ci interviennent au niveau 2 dans la mise en œuvre des techniques de ces types de tâches. Ainsi, il n'est pas pertinent d'évoquer la[7] technologie du type de tâches de développement T_{dev}. En revanche, nous présentons des éléments de la technologie qui sont plus spécifiques au type de tâches $T_{ra\text{-}eq1}$. Pa exemple, l'équivalence des équations suite aux transpositions des termes ou des facteurs est un élément important car il nous garantit que les solutions de l'équation transformée sont les solutions de l'équation de départ, qu'il ne convient pas de confondre avec les technologies $\theta_{cons\text{-}eg\text{-}ad}$ et $\theta_{cons\text{-}eg\text{-}mult}$ qui sont spécifiques à la notion d'égalité.

II.3. Description des praxéologies ponctuelles personnelles

Nous proposons d'élargir le modèle précédent pour décrire les connaissances des élèves par des praxéologies. Ce modèle de praxéologie a l'originalité d'interpréter et de décrire les connaissances de l'élève par le même modèle que celui qu'on utilise pour décrire les attentes et les pratiques institutionnelles.

Nous avons présenté dans le paragraphe précédent les principes qui guident la description des praxéologies d'une organisation mathématique de référence. Le découpage en type de tâches et en sous-type de tâches n'et pas suffisant pour décrire les praxéologies d'un élève. En effet, pour une tâche donnée, relevant d'un type de tâche institutionnel, les élèves peuvent mettre en œuvre des techniques non attendues par I valides ou non mathématiquement. Nous proposons d'inscrire ces techniques dans des praxéologies qui sont à construire par le chercheur.

Dans sa thèse Nguyen (Nguyen, 2006) a rattaché l'analyse de l'erreur à des praxéologies en mettant en évidence les phénomènes suivants :

- L'utilisation d'une technique scientifiquement valide peut conduire à des erreurs.

- Certaines erreurs peuvent être dues à une non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches rencontrées lors de la mise en œuvre d'une technique valide.

- Les erreurs peuvent aussi provenir de l'utilisation de techniques valides sur un champ plus restreint, étendues "abusivement", ou de la mise en œuvre d'une technique scientifiquement valide, mais non adéquate institutionnellement.

Cette catégorisation a été faite pour hiérarchiser les erreurs en relation avec la non-maîtrise de la technique. Ainsi, la première catégorie regroupe les erreurs considérées comme moins importantes pour la maîtrise de la technique. Par exemple, les erreurs de calculs numériques qui interviennent dans une technique de résolution des équations du second degré relèvent de la première catégorie et sont considérées moins importantes que les erreurs relatives à la factorisation qui est une étape importante de la technique de résolution des équations du second degré.

Dans l'étude de Nguyen (Nguyen, 2006) l'erreur est considérée comme un dysfonctionnement d'une technique institutionnelle. A la suite de cette thèse, nous avons cherché à interpréter l'erreur comme élément constituant d'une technique personnelle de l'élève (Croset & Chaachoua, 2010). Celle-ci peut être valide ou non mathématiquement, conforme ou non aux attentes institutionnelles. Ce point de vue a été développé dans le

[7] ou "les" s'il y a plusieurs techniques

travail de thèse de Croset (Croset, 2009) en introduisant la notion de praxéologie en acte que nous présentons dans le paragraphe suivant.

Praxéologie personnelle

Dans sa thèse Croset (Croset, 2009, p.177) a définit la notion de praxéologie-en-acte comme suit :

> **Définition.** Nous appelons *praxéologie-en-acte*, le modèle triptyque, d'organisation praxéologique, de l'activité d'un sujet institutionnel constitué des trois composantes :
>
> – Un type de tâche-en-acte qui est un objet [1] que connaît ou *reconnaît* le sujet, dans le sens où le sujet a un rapport à cet objet [Chevallard, 1992, p87]. Le type de tâche-en-acte est l'ensemble des situations que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une même technique. Deux types de tâche-en-acte se distinguent par l'induction possible de deux techniques différentes par le sujet modélisé. Le découpage en types de tâche-en-acte ne correspond pas nécessairement à celui de l'institution.
> – Une technique-en-acte utilisée par l'élève pour résoudre le type de tâche-en-acte. Elle peut être erronée, correcte, légitimée par l'institution de référence ou non. Elle doit présenter une certaine stabilité dans son utilisation pour être considérée comme technique de résolution. La technique n'acquière sa légitimité chez l'élève que si elle est régulièrement utilisée. Nous évitons ainsi de considérer comme une technique-en-acte, des erreurs d'étourderie ou de dérapage ponctuel.
> – Une technologie-en-acte qui, explicite ou non, gouverne et légitime l'utilisation de la technique-en-acte.
>
> 1. « un objet existe s'il est connu d'au moins une personne ou une institution (il pourra d'ailleurs n'exister -cas limite- que pour cette personne ou pour cette institution). » [Chevallard, 1992, p87].

Cette définition est une extension de la notion de praxéologie comme modélisation de pratiques institutionnelles à la modélisation des pratiques d'un élève en tant que sujet d'une institution.

Nous reprenons cette définition, mais nous préférons utiliser le terme de *praxéologie personnelle* à la place de *praxéologie-en-acte* par analogie à la notion du rapport personnel.

Ainsi, le rapport institutionnel $R_I(e,O)$ du sujet en position élève à l'objet O au sein d'une institition I est décrit par les praxéologies institutionnelles. Et le rapport personnel $R_p(e^*/I,O)$ d'un élève e*, assujetti à une institution I, à l'objet O est décrit par des praxéologies personnelles.

Nous rejoignons l'hypothèse de recherche validée dans (Croset, 2009) selon laquelle le découpage en type de tâches institutionnels ne correspond pas toujours à celui de l'élève.

La détermination des types de tâches personnelles est liée à la détermination des techniques personnelles. En effet des tâches sont considérées comme du même type de tâches personnelles pour un élève si celui-ci mobilise une même technique personnelle pour les accomplir.

Soit t une tâche prescrite à un élève au sein d'une institution I. Cette tâche relève d'un type de tâches institutionnel T_i ou éventuellement un sous-type de tâches de T_i. Il existe donc une technique institutionnelle τ_i pour accomplir t. On a donc une organisation mathématique ponctuelle, simple ou complexe, relative au type de tâches T_i et qui relève d'une organisation mathématique locale OML_i et éventuellement d'une organisation régionale.

Soit τ_e la technique mobilisée par l'élève pour accomplir la tâche t. Même si τ_e est la même que la technique attendue τ_i, on ne peut pas conclure que le type de tâches de l'élève est le même que le type de tâches institutionnel T_i. En effet, il se peut que pour d'autres tâches qui relèvent du même type de tâche institutionnel T_i, l'élève mobilise une autre technique différente de τ_i.

Nous cherchons la stabilité de la mobilisation de la technique pour les tâches qui relèvent de T_i et éventuellement d'autres types de tâches qui sont proches de T_i et donc qui relèvent de l'organisation mathématique locale OML_i. L'ensemble de ces tâches constitue le type de tâches personnel de l'élève et on a ainsi une praxis personnelle $[T_e/\tau_e]$. Ce diagnostic peut se faire à partir des réponses de l'élève à un ensemble de tâches qui lui sont proposés. La qualité du diagnostic des praxis personnelles dépend de la variété des tâches proposées.

A ce niveau nous obtenons des praxéologies ponctuelles de l'élève. La détermination des technologies de l'élève peut se faire en regroupant ces praxéologies ponctuelles autour d'une organisation locale de l'élève. Cette caractérisation des technologies de l'élève à partir du regroupement des praxéologies ponctuelles doit être appuyée et validée par une méthodologie spécifique comme des interviews des élèves. Voir à ce propos le travail de thèse de Croset (Croset, 2009).

Pour décrire les techniques de l'élève nous reprenons le même modèle utilisé pour décrire les techniques institutionnelles.

III. LA MODELISATION DES CONNAISSANCES DES ELEVES DANS UN EIAH

Dans cette partie nous montrerons comment le modèle praxéologique décrit ci-dessus peut être utilisé en EIAH pour diagnostiquer les connaissances des élèves. On s'appuiera sur des résultats de recherche conduits autour de l'EIAH d'algèbre : Aplusix.

L'environnement Aplusix (Nicaud, Bouhineau, & Chaachoua, 2004) est un EIAH pour pratiquer l'algèbre élémentaire, les transformations d'expressions algébriques, les résolutions d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations, ou encore les résolutions de problèmes par la mise en équation, au lycée et au collège. L'objectif de l'élève dans Aplusix consiste à résoudre, comme sur le papier, des exercices d'algèbre en produisant, ligne de calcul après ligne de calcul, les différents pas de calcul de son raisonnement algébrique. Le cadre mathématique offert pour ce travail est la résolution par équivalence : l'élève doit, à chaque étape, donner une expression algébrique équivalente à l'expression précédente ; il a toute liberté, comme sur le papier, pour le choix de l'expression algébrique de chaque étape et de la forme de son raisonnement (linéaire ou avec des retours en arrière). Au cours de la conception d'Aplusix, les auteurs se sont efforcés de proposer une représentation des expressions algébriques utilisées à l'écran aussi fidèle que possible à la représentation usuelle de ces expressions, telle que chacun peut la donner sur le papier ou au tableau (cf. Figure 1).

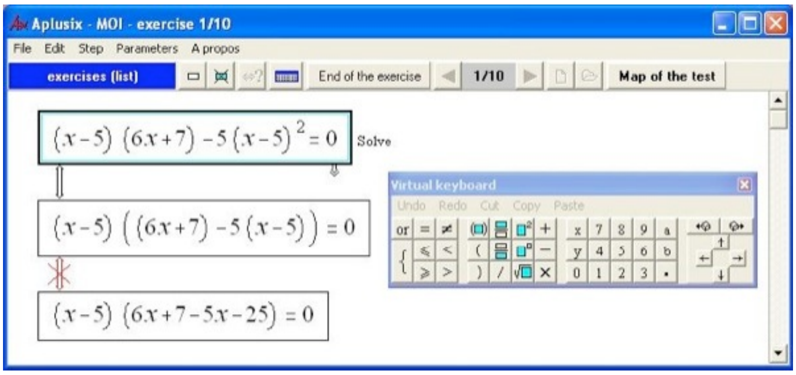


Figure 1. Résolution d'un exercice par un élève.

III.1. Nature des traces

Dans la problématique de la modélisation des connaissances de l'apprenant le travail du chercheur commence par le recueil de données expérimentales issues d'un milieu écologique d'apprentissage, ayant la forme de productions écrites ou orales d'élèves, données que nous appelons traces ou traces brutes (Chaachoua, Croset, Bouhineau, Bittar, & Nicaud, 2007). Ce recueil peut se faire automatiquement lorsque le logiciel utilisé dispose de fonctionnalités élémentaires d'enregistrement de journaux d'activités (fichiers « log »), ce qui est le cas du logiciel Aplusix. Le découpage et la réorganisation des traces brutes obtenues à l'étape précédente peuvent se faire automatiquement dans Aplusix grâce à un algorithme de diagnostic local. Le résultat de cette étape, réorganisé linéairement en fonction du temps, peut être vu comme une trace enrichie de l'activité de l'élève. C'est à l'issue de ces étapes qu'on peut produire une modélisation des connaissances des élèves. La qualité didactique de cette modélisation est étroitement liée à la qualité de la trace enrichie. En fait, la trace est enrichie en fonction du modèle utilisé pour la modélisation des connaissances.

Trace brute dans Aplusix

La trace brute est obtenue par enregistrement des événements logiciels provoqués par un élève dans son travail de résolution de problèmes. L'ensemble de ces événements logiciels est conservé sous la forme d'une liste de n-uplets. Chaque n-uplet comporte principalement un marqueur temporel, une information symbolique sur l'action réalisée et l'état du document. La trace brute ainsi obtenue comporte toutes les expressions algébriques produites par l'élève. Elle comporte les essais fructueux, ceux qui apparaîtront dans la solution finale, et les essais infructueux, qui seront effacés après avoir été visualisés, explorés puis abandonnés. Cependant, cette trace comporte aussi beaucoup d'informations qui ne ressortent pas du travail mathématique ou du travail au niveau stratégique de résolution d'un problème algébrique.

Travail de segmentation des traces brutes

Un premier travail de segmentation de la trace est opéré pour ne conserver que des éléments significatifs de la trace brute. Des critères sont utilisés, permettant de filtrer l'ensemble des états intermédiaires d'éditions. Ces critères reposent sur certains événements logiciels considérés comme des indicateurs de validation par l'élève d'un état intermédiaire, cohérent de son travail : introduction, ou suppression, d'une étape algébrique dans le raisonnement de l'élève (équivalent de l'écriture d'une nouvelle ligne de calcul), demande de validation du travail, passage à l'exercice suivant.

À l'issue du travail de segmentation des traces brutes, les expressions algébriques significatives de l'élève obtenues sont associées par deux pour former des *pas de calcul* : à chaque expression significative est associée l'expression significative qui lui précède (dans le raisonnement algébrique de l'élève). Un pas de calcul d'élève comporte donc une étape initiale et une étape finale. Ce travail de segmentation s'effectue en vue des traitements automatiques complexes ultérieurs : analyses statistiques, diagnostic local du travail des élèves ou élaboration d'un modèle de l'élève.

Traces enrichies

A partir de la segmentation précédente, une trace dérivée, importante dans notre système, est obtenue que nous appelons la trace enrichie ou trace complétée. Elle comporte, à la base, les pas de calcul d'élèves issus de la segmentation. Elle est enrichie d'un diagnostic constitué d'une proposition de règles de transformation expliquant le passage de l'expression initiale du pas de calcul à l'expression finale du même pas. Un algorithme utilisant une bibliothèque de règles correctes et incorrectes, mettant en œuvre une recherche heuristique, est utilisé pour effectuer ce diagnostic. Il s'agit d'un diagnostic local qui consiste à associer à un pas d'élève une suite de règles. Un travail fondamental de notre recherche réside dans la construction de cette bibliothèque de règles.

III.2. Modélisation locale

Nous présentons dans ce paragraphe la modélisation locale pour le diagnostic permettant l'obtention d'une trace enrichie. La modélisation consiste à découper chaque pas de calcul d'élève en une suite de pas de calculs élémentaires et d'associer une règle algébrique à chaque pas de calcul élémentaire. Un pas de calcul d'élève peut ainsi être interprété comme la succession d'applications de règles algébriques, cf. Figure 2.

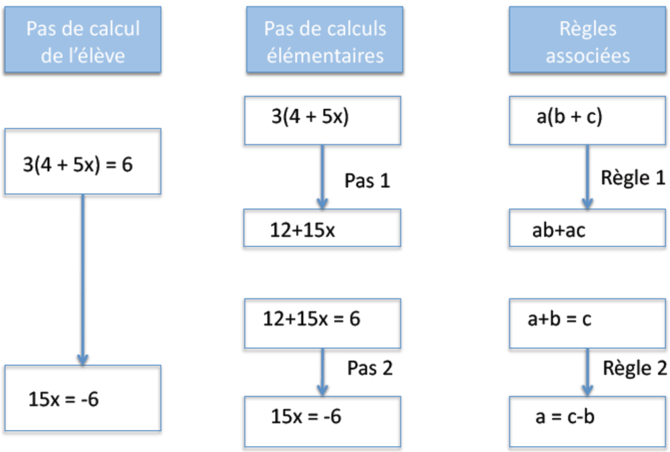


Figure 2 : Exemple d'association d'une séquence de règles à un pas de calcul

Dans cet exemple, le pas de calcul de l'élève est obtenu à partir de la segmentation de la trace brute. Rappelons que la trace brute peut contenir d'autres informations comme des transformations qui ont été supprimées par l 'élève au sein d'une étape. A partir de ce pas de calcul de l'élève, on associe deux pas de calcul élémentaires et à chacun une règle expliquant le calcul élémentaire. Ainsi, le diagnostic local permet d'associer au pas de calcul de l'élève les deux règles. La trace enrichie est constituée du pas de calcul de l'élève et des deux règles obtenues par le diagnostic local.

Pour obtenir la trace enrichie on a besoin de construire une bibliothèque de règles et un processus de diagnostic local. La détermination de cette bibliothèque des règles s'appuie de façon complémentaire sur les travaux de recherches en didactique et sur des expérimentations[8].

III.3. Vers le modèle praxéologique : détermination des praxis personnelles élémentaires

Dans ce paragraphe nous proposons d'illustrer l'utilisation du modèle praxéologique pour la modélisation des connaissances des élèves dans l'EIAH Aplusix. Nous présentons comment on peut passer des règles diagnostiquées au niveau local aux praxis personnelles de l'élève.

Association des règles aux types de tâches élémentaires

Un pas de calcul de l'élève est découpé en plusieurs pas de calcul élémentaire[9]. Le choix a été fait de sorte qu'à chaque pas élémentaire est associé un seul type de tâches. Le découpage en types de tâches est celui de l'organisation mathématique de référence construite par le chercheur. Le chercheur doit donc rattacher les règles[10], correctes et erronées, aux types de tâches élémentaires de l'organisation mathématiques de référence. *A chaque type de tâches élémentaire T on associe donc, par construction manuelle, des règles correctes ou erronées : l'ensemble de ces règles est noté R(T).*

Association des variables de contextes aux types de tâches

Un pas de calcul élémentaire est décrit par une règle détaillée qui est une instanciation de la règle abstraite.

Pour considérer cette règle comme élément constituant d'une technique, nous devons chercher une stabilité dans sa mise en œuvre dans un contexte à caractériser. Pour cela nous introduisons la notion de *variables de contexte* comme éléments d'une expression algébrique pouvant avoir une influence sur le comportement de l'élève. Par exemple, la nature des nombres qui interviennent dans une expression, le signe syntaxique du terme à transposer d'une égalité à une autre, le nombre de termes dans une somme.

Ces variables de contexte sont relatives à un type de tâches dans la mesure où certaines variables ont une influence sur le comportement de l'élève pour un type de tâches et pas sur un autre. *Donc à chaque type de tâches, le chercheur associe un ensemble de variables de contexte associées à T noté G(T).* (Croset, 2009) nomme cet ensemble : groupe de variables de contexte associées *à* T.

La détermination de cet ensemble repose en partie sur une analyse épistémique et sur les résultats des travaux en didactique des mathématiques complétés éventuellement par des expérimentations spécifiques. La difficulté est de trouver un niveau de granularité pertinent

[8] La description de la méthodologie est décrite dans (Croset, 2009) et (Chaachoua, 2010)

[9] A partir d'un logiciel de diagnostic : Anaïs.

[10] issues de la bibliothèque des règles.

pour les interprétations. En effet, plus il est fin plus il permet de mieux rendre compte du contexte mais il risque de ne pas mettre en évidence les régularités entre le contexte et les comportements des élèves. A contrario, s'il n'a pas beaucoup de traits les régulations constatées risquent de ne pas être discriminantes pour les élèves. Le niveau de granularité est déterminé par un aller-retour entre le modèle et les résultats des diagnostics. *Le choix des variables de contexte doit être fait de sorte qu'on puisse retrouver tous les sous types de tâches de l'OM de référence et d'autres types de tâches non institutionnels qui peuvent être des types de tâches personnels.*

Mise en œuvre

A chaque type de tâches institutionnel T, on associe un ensemble de variables de contexte G(T). On construit le vecteur $T_e = (T\ ;\ V_1, V_2, V_3\ldots)$ où les $V_i \in G(T)$. Un *type de tâches personnel a priori* est obtenu lorsque les variables V_i sont instanciées.

On fait la même chose pour les types de tâches intrinsèques : associer un ensemble de variables de contexte et construire les types de tâches personnels intrinsèques a priori.

Ensuite, pour chaque type de tâches élémentaire *T* on associe, par construction manuelle, des règles correctes ou erronées : R(*T*).

Pour déterminer les praxis personnelles élémentaires nous devrions chercher une corrélation entre le contexte et la règle diagnostiquée et plus précisément entre le type de tâches personnel a priori et la technique mobilisée :

> Si une règle R_i de R(*T*) est mobilisée de façon stable par un élève e pour un type de tâches personnel a priori $T_{e,i}$, on dit que $\tau_{ei}=R_i$ est une *technique personnelle élémentaire*, $T_{e,i}$ un *type de tâches personnel élémentaire* et que le couple $(T_{e,i}, \tau_{ei})$ est une *praxis personnelle élémentaire* de l'élève e.

De même,

> Si l'élève mobilise de façon stable une technique τ_e (décrite par une suite de type de tâches personnelles) pour un type de tâches personnel a priori $T_{e,}$, on dit que τ_e est une *technique personnelle*, $T_{e,}$ un *type de tâches personnel*, et que le couple $(T_{e,}, \tau_e)$ est une *praxis personnelle de l'élève e*.

Exemple de mise en œuvre

Dans ce paragraphe nous allons illustrer la mise en œuvre de notre modèle pour illustrer la construction d'une praxis personnelle.

Précisons que ce que nous présentons ci-dessous n'a pas fait l'objet d'une implémentation informatique mais il n'y a aucune contrainte informatique pour le réaliser. Cependant, les études menées dans (Chaachoua, 2010) et (Croset, 2009) ont validé la mise en œuvre didactique et informatique de notre modèle praxéologique dans Anaïs qui à partir des traces brutes permet de déterminer les praxis personnelles élémentaires des élèves.

Considérons la tâche t « résoudre l'équation $(-2x+6)(x-1) = 0$ » proposée à des élèves de Première S.

a) Analyse a priori de la tâche t

La tâche t relève du type de tâches institutionnel $T_{ra\text{-}eq2}$ dont l'OM de référence a été présentée ci-dessus. Deux techniques peuvent être mis en œuvre et qui relèvent respectivement de trois organisations mathématiques ponctuelles $OMP_1(T_{ra\text{-}eq2})$ et $OMP_6(T_{ra\text{-}eq2})$:

$\tau_{r\text{-}eq2.pn} = (T_{pn}\ ;\ T_{r\text{-}eq1})$: présentée dans II.2.

$\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc} = (T_{dev},\ T_{red},\ T_{ra\text{-}eq.trin})$

La technique $\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc}$ (on développe, on réduit et on applique le discriminant) n'est pas attendue par I_s mais elle peut être mise en œuvre par les élèves. En revanche, la technique $\tau_{r\text{-}eq2.pn}$ est attendue par l'institution I_s.

b) Analyse d'une production d'élève relative à t

Considérons une production d'élève pris dans la thèse de Nguyen (Nguyen, 2006) :

$(-2x+6)(x-1) = 0$

$-2x^2 + 8x - 6 = 0$

$-2x^2 + 8x = 6$

$-2x(x-4) = 6$

$-2x = 6$ ou $x - 4 = 6$

$x = -3$ ou $x = 10$

Ici, l'élève a développé, puis il a isolé les termes en x à gauche (à l'image de ce qu'on fait dans les équations de degré 1), puis il factorise le membre de gauche pour se ramener à l'équation $P_1(x)\ Q_1(x)=k$.

Nous allons illustrer sur cet exemple le mécanisme qui permet de construire une praxis personnelle[11].

<u>Types de tâches personnels a priori</u>

Au type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$ on associe des variables de contexte. Rappelons que le choix des variables de contexte doit être fait de sorte qu'on puisse retrouver tous les sous types de tâches de l'OM de référence et d'autres types de tâches non institutionnels qui peuvent être des types de tâches personnels. Pour ne pas alourdir notre illustration on va considérer le même ensemble de variables de contexte simple pour le type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$ et le type de tâches intrinsèque T_{pn} « appliquer la règle du produit »[12]. Les variables de contextes sont :

V_1 : membre de gauche est une

- $v_{1.1}$ = somme
- $v_{1.2}$ = produit de facteurs

V_2 : second membre est :

- $v_{2.1}$ = nul
- $v_{2.2}$ = constante non nulle
- $v_{2.3}$ = polynôme

On a donc $G(T_{pn}) = G(T_{ra\text{-}eq2}) = \{V_1\ ;\ V_2\}$.

* Les types de tâches personnels intrinsèques a priori (relatifs au type de tâches T_{pn}) sont définis par le vecteur : $T_e = (T_{pn}\ ;\ V_1,\ V_2)$. Ce qui donne 6 types de tâches personnels

11 Il serait intéressant de reprendre l'étude faite par Nguyen avec notre modèle.

12 Il est évident que nous devions avoir plus de variables de contexte pour $T_{ra\text{-}eq2}$ que T_p pour prendre en compte le degré des polynômes qui interviennent par exemple.

intrinsèques a priori. Par exemple : (T_{pn} ; $v_{1.2}$, $v_{2.1}$) correspond au type de tâches intrinsèque de l'OM de référence T_{pn}.

* Les types de tâches personnels a priori (relatifs au type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$) sont définis par le vecteur : T_e= ($T_{ra\text{-}eq2}$; V_1, V_2). Ce qui donne 6 types de tâches personnels a priori. Par exemple : ($T_{ra\text{-}eq2}$; $v_{1.2}$, $v_{2.1}$) correspond au sous-type de tâches de l'OM de référence noté $T_{ra\text{-}eq2.pn}$.

Construction des règles

A ce type de tâches intrinsèque T_{pn} : « appliquer la règle du produit » on associe un ensemble de règles R(T_{pn}). Nous en proposons certaines sans chercher d'exhaustivité :

- τ_{pk} : si AB=k alors A=k ou B=k où A et B peuvent être des nombres ou des polynômes et k un réel non nul.
- τ_{pn} : si AB=0 alors A=0 ou B=0 où A et B peuvent être des nombres ou des polynômes.
- τ_{pk1} : si AB=k alors A=k et B=1 où A et B peuvent être des nombres ou des polynômes et k un réel.
- ...

Construction des praxis personnelles élémentaires

Supposons que pour cet élève on a pu diagnostiqué par ailleurs, qu'il mobilise la règle τ_{pk} de façon stable sur un type de tâches personnel élémentaire a priori T_{pk} = (T_{pk} ; $v_{1.2}$, $v_{2.2}$) ie. $P(x)Q(x)$=k. Dans ce cas, on peut dire que τ_{pk} est une technique personnelle élémentaire, T_{pk} un type de tâches personnel élémentaire et que le couple (T_{pk}, τ_{pk}) est une *praxis personnelle élémentaire* de l'élève e.

Construction des praxis personnelle

La technique mise en œuvre par l'élève pour résoudre l'équation « $-2x(x-4) = 6$ » peut être décrite dans notre modèle comme suit $\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$ = (T_{pk} ; $T_{r\text{-}eq1}$) où

T_{pk} : appliquer la règle : un produit de facteur égal à une constante si et seulement si l'un des facteurs est égal à une constante. C'est un type de tâches intrinsèque.

La technique τ_{pk} est : si AB=k alors A=k ou B=k.

$T_{r\text{-}eq1}$: résoudre deux équations de degré 1.

Ensuite, on étudie la mise en œuvre de cette technique sur les types de tâches personnels T_e= ($T_{ra\text{-}eq2}$; V_1, V_2). Supposons que le diagnostic montre que l'élève mobilise de façon stable $\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$ sur un type de taches personnel a priori ($T_{ra\text{-}eq2}$; $v_{1.2}$, $v_{2.2}$) qu'on notera $T_{ra\text{-}eq2.pk}$, alors on peut dire que : $\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$ est une technique personnelle, $T_{ra\text{-}eq2.pk}$ un type de tâches personnel et que le couple ($T_{ra\text{-}eq2.pk}$, $\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$) est une *praxis personnelle* de l'élève e.

IV. CONCLUSION

Le travail présenté dans cet article a montré comment nous avons adapté le modèle praxéologique à une problématique EIAH : celle de la modélisation des connaissances. Notre recherche porte sur la construction d'un module de l'apprenant dans un EIAH constitué de trois composantes : des données d'entrée, un diagnostic et des sorties (Self, 1999). Nous avons montré la pertinence du modèle praxéologique pour la modélisation des connaissances des élèves dans un EIAH et en particulier pour la fonction diagnostic. Ce modèle, permet d'avoir différents niveaux de diagnostic et peut donc nous fournir des informations pertinentes au niveau didactique. C'est cette dimension que nous souhaitons poursuivre : exploiter le diagnostic pour construire des parcours d'apprentissage adaptés à chaque élève, fournir à un enseignant ou à un tuteur intelligent un bilan sur les élèves pour l'aider aux prises de décisions didactiques…

Au delà de la problématique EIAH, notre travail sur le modèle praxéologique a permis, d'apporter un cadre générale et méthodologique pour définir les éléments de la praxéologie, en particulier pour la praxis. Le modèle de description proposé permet de mieux articuler les organisations praxéologiques entre elles à travers l'idée de cartes praxéologiques afin d'analyser les pratiques institutionnelles.

Enfin, le fait d'élargir le modèle praxéologique pour décrire le rapport personnel constitue pour nous un apport fondamental dans l'approche anthropologique.

BIBLIOGRAPHIE

Assude, T. (1992). Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique, écologie de l'objet "racine carré" et analyse du curriculum. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. Recherches en Didactique des Mathématiques , 19, pp. 77-124.

Bosch, M., & Gascon, J. (2004). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Balises pour la didactique des mathématiques (pp. 1-15). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bronner, A. (1997). Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée. Thèse. Grenoble: Université Joseph Fourier .

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignor´es par les institutions d'enseignement. Recherche en Didactique des Mathématiques , 28 (2), pp. 135-182.

Chaachoua, H. (1997). Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes. Thèse. Grenoble: Université Joseph Fourier .

Chaachoua, H. (2010). La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves. Noter d esynthèse HDR. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Chaachoua, H., Croset, M., Bouhineau, D., Bittar, M., & Nicaud, J. (2007). Description et exploitations des traces du logiciel d'algèbre Aplusix. . Revue Sciences et Techniques de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation, revue Sticef , 14.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique , pp. 211-235.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques , 12/1, 73 - 112.

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221-266.

Chevallard Y. (2002), Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. Organiser l'étude 3. Ecologie et régulation. In J-L. Dorier & Al. (Eds) Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques –Corps, 21-30 Août 2001- (pp. 3-22 et pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury, & M. Caillot, Rapport au savoir et didactiques (pp. 81-104,). Paris: Fabert.

Cirade, G., & Matheron, Y. (1998). Equations du premier degré et modélisation algébrique. Actes de l'université d'été de la Rochelle : Analyse des pratiques enseignantes et didactque des mathématiques. IREM de Clermont-Ferrand.

Croset, M. (2009). Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte. grenoble: Thèse d'université. Univ.

Croset, M., & Chaachoua, H. (2010). Modélisation des connaissances des élèves en termes de Praxis-en-Acte. Actes du 3e congrès pour la Théorie Anthrophogique du didactique. Sant Hilari Sacalm, Espagne.

Grugeon, B. (1995). Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à lalgèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G. Thèse. Paris: IREM Paris VII.

Nguyen, A. (2006). Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Vietnam et en France. Thèse de Doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Nguyen, A., Chaachoua, H., & Comiti, C. (2007). De l'usage de la TAD pour l'analyse des erreurs. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Garcia (Ed.), Sociedad, Escuela y matematicas. Aportaciones de la teoria Antropologica de lo Didactico (pp. 621-640). Universidad de Jaen.

Nicaud, J., Bouhineau, D., & Chaachoua, H. (2004). Mixing microworld and CAS features in building computer systems that help students learn algebra. International Journal of Computers for Mathematical Learning , 9(2).

Self, J. (1999). The defining characteristics of intelligent tutoring systems research: itss care, precisely. International Journal of Artificial Intelligence in Education , 10, 350-364.

ANNEXE

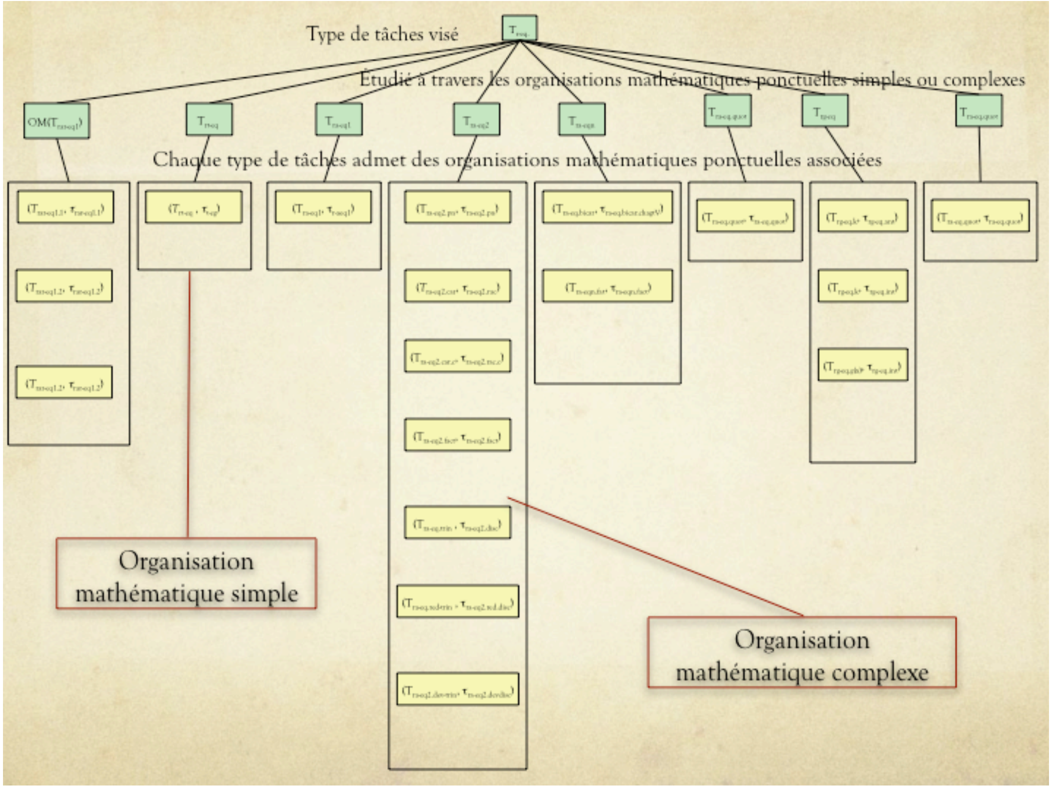


Fig.1 Représentation partielle d'une carte praxéologique autour d'un type de tâche visé

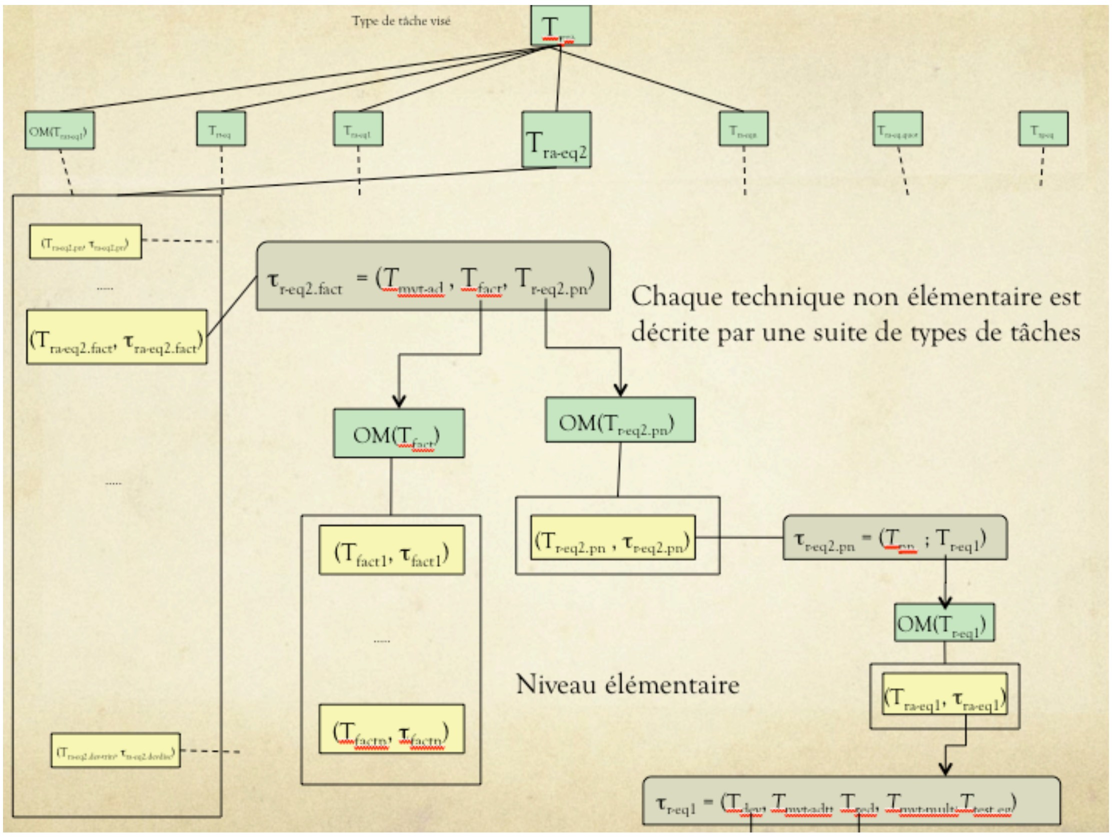


Fig2. Représentation de la carte praxéologique avec différents niveaux de description.

Intégration de ressources technologiques en mathématiques à l'école. L'exemple du boulier chinois.

Caroline **Poisard**

IUFM de Bretagne / UBO et laboratoire du CREAD

caroline.poisard@bretagne.iufm.fr

Résumé

Cette présentation porte sur un travail de recherche qui a fait l'objet d'un article paru dans la revue RDM (Poisard, Bueno-Ravel, Gueudet, 2011). Dans cet article, nous étudions la question de l'intégration des technologies pour l'enseignement des mathématiques au premier degré, en nous référant au cadre théorique de l'approche documentaire. Nous présentons deux études de cas, portant sur l'intégration du boulier virtuel, au cycle 2 et au cycle 3. Dans ces études, nous interrogeons l'appropriation des ressources par des professeurs des écoles et les usages qu'ils développent. Nous identifions des connaissances des professeurs, relatives aux contenus mathématiques à enseigner, et qui jouent un rôle essentiel dans l'appropriation, les usages, et l'intégration des ressources. Nous mettons en évidence le lien entre l'intégration de ressources, les connaissances des professeurs et les évolutions de celles-ci.

Mots clés

Connaissances des professeurs, documents, genèses documentaires, intégration des technologies, premier degré, ressources, numération entière.

Introduction

Notre travail étudie l'intégration de ressources technologiques en mathématiques à l'école. Nous montrons comment l'intégration d'une nouvelle ressources : le « boulier chinois virtuel » s'est déroulée dans le cas de deux enseignants : pour Carlos en classe de CE2 puis Noémie en CE1. En particulier, nous décrivons les connaissances professionnelles en jeu et leur organisation dans le temps. Pour cette présentation, nous avons replacé cette étude par rapport à nos travaux antérieurs (Poisard 2005) qui portent sur l'analyse didactique d'instruments à calculer à l'école primaire. Nous apportons également un éclairage sur la suite du travail sur le boulier virtuel après de nouvelles observations récentes (2010/11).

1. Pourquoi le boulier chinois ?

Notre travail doctoral a porté sur l'analyse d'ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, avec le cas des instruments à calculer. Les questions auxquelles nous nous sommes intéressées sont principalement :

- Sous quelles conditions peut-on construire un partenariat entre l'école et un centre d'animation (en mathématiques) ?
- En quoi consiste alors l'activité mathématique ? Comment peut-on la définir ?

Notre propos ne vise pas ici à développer pleinement les résultats (qui sont détaillés dans Poisard 2005). Toutefois, il est important de noter que ce partenariat entre l'école et un centre d'animation en mathématiques a pu être mis en place et pérennisé. Outre les observations de quatre classes de CM2 et les données recueillies, les principaux éléments théoriques qui nous ont permis de développer notre analyse portent sur la définition de l'animation socioculturelle, la notion d'œuvre culturelle (Sousa Do Nascimento 1999) et la notion d'oeuvre matérielle (Deforge 1990). En didactique des mathématiques, le travail mené avec l'équipe grenobloise (ERTé Maths à modeler) sur les situations de recherche (Grenier & Payan 2003) nous a permis de mettre en place des ingénieries didactiques au cycle 3 ; nous nous référons aussi à la notion d'œuvre du savoir (Chevallard 2003) et d'ostensifs pour qualifier ces instruments (Bosch & Chevallard 1999). Nous avons montré que l'étude d'instruments à calculer (dont le boulier chinois, figures 1 et 2) est bien sous certaines conditions une activité qui permet un apprentissage en mathématiques.

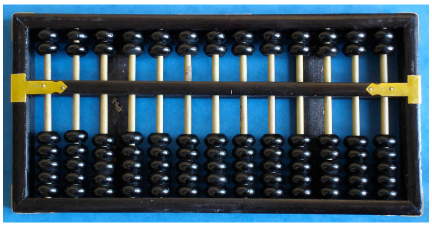


Figure 1 : Un boulier chinois de commerce sur lequel est inscrit zéro

Figure 2 : Un boulier chinois construit et manipulé par un élève de CM2

La suite de nos travaux nous a amenée à nous questionner sur l'intégration du boulier virtuel dans le système de ressources de professeurs des écoles pour enseigner les mathématiques. Avant de développer cet aspect au point suivant, nous présentons brièvement le mode de fonctionnement du boulier chinois pour l'inscription et la lecture des nombres (pour les opérations, voir Poisard 2006, 2009).

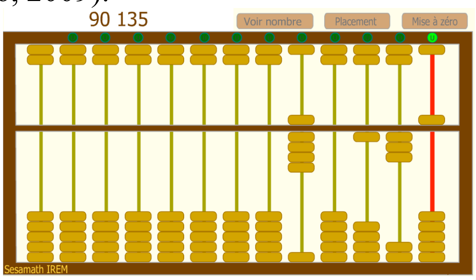


Figure 3 : Le boulier chinois virtuel Sésamath et IREM de Lille avec l'inscription 90 135 [1]

La tige la plus à droite marque les unités, puis les dizaines immédiatement à gauche, centaines, unités de mille, etc. Le boulier chinois comporte deux parties : une partie haute avec deux boules par tige où chaque boule vaut « cinq » par tige (donc 5, 50, 500, etc.) et une partie basse où chaque boule vaut « un » par tige (donc 1, 10, 100, etc.). Chaque tige correspond à un rang du système de numération positionnel en base 10, ainsi pour inscrire le nombre 90 135 :

- pour inscrire « 5 unités », on active une quinaire sur la tige unité ;
- pour inscrire « 3 dizaines », on active trois unaires dans la tige des dizaines ;
- pour inscrire « 1 centaine », on active une unaire dans la tige des centaines ;
- la tige des unités de mille reste à zéro ;

1 http://cii.sesamath.net/lille/exos_boulier/

- pour inscrire « 9 dizaines de mille », on active une quinaire et quatre unaires dans la tige des dizaines de mille.

On a inscrit le nombre 90 135 = $9\times10^4+10^2+3\times10+5$ que l'on peut lire figure 3.
Nous nous intéressons maintenant à comprendre l'intégration de ressources technologiques[2] en mathématiques par des professeurs des écoles. Nous présentons notre questionnement, puis le cadre théorique et enfin deux études de cas : Carlos en CE2 et Noémie en CE1.

2. Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles

Ce paragraphe constitue la présentation d'un article co-écrit et paru dans la revue Recherches en didactique des mathématiques (Poisard, Bueno-Ravel & Gueudet 2011). Nous présentons ici les points essentiels de notre analyse, le travail plus détaillé est fourni dans cet article.

2.1 Questionnement, cadre théorique et choix méthodologiques

Cette étude a été réalisée au sein du groupe de recherche TREMA-1 (TICE et ressources en mathématiques au premier degré, IUFM de Bretagne-INRP) composé d'enseignants-chercheurs et de professeurs des écoles. Nos questions de recherche portent sur comment l'intégration des ressources s'effectue (plutôt que sur le pourquoi de l'intégration) :

- Quels éléments influencent ou guident les choix des professeurs pour retenir et pour choisir une mise en œuvre en classe? En particulier, comment s'articulent ces choix et les connaissances des professeurs?
- Comment les professeurs s'approprient-ils une ressource retenue en l'adaptant, la transformant, l'associant à d'autres?

Le cadre théorique qui soutient notre propos est celui de l'approche documentaire (Gueudet et Trouche 2010) inspirée de l'approche instrumentale (Rabardel 1995). Le travail documentaire du professeur est ainsi analysé c'est-à-dire l'activité du professeur -dans et hors classe- dans son ensemble, rassembler des ressources, en retenir certaines, les modifier, les articuler, etc. Au cœur de ce processus, la genèse documentaire (figure 4) identifie des ressources qui vont devenir le document du professeur dans un double mouvement d'instrumentation et d'instrumentalisation.

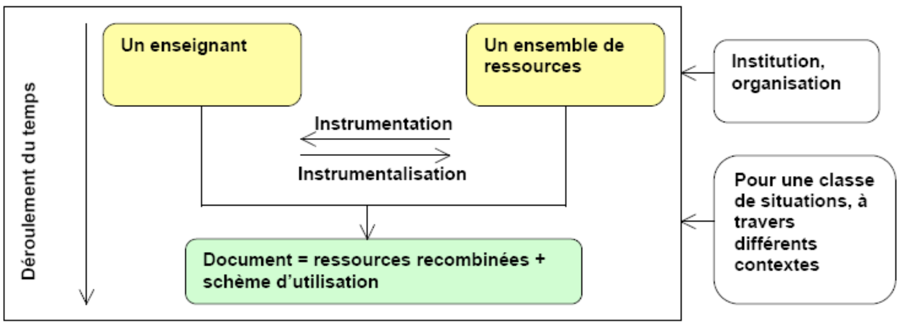


Figure 4 : Représentation schématique de la genèse documentaire

L'instrumentalisation constitue l'appropriation de l'ensemble de ressources par le professeur et l'instrumentation est relative aux modifications de l'activité du professeur et des connaissances professionnelles relativement aux ressources. L'identification d'une genèse documentaire permet de distinguer les régularités concernant les choix du professeur pour son

2 Pour une analyse a priori comparative entre le boulier matériel et virtuel, voir (Poisard, Bueno-Ravel & Gueudet 2011).

enseignement. Le document ainsi produit est constitué des ressources et de schèmes d'utilisation. Le schème est une organisation invariante de l'activité qui comporte des règles d'action et est structuré par des invariants opératoires. Parmi ces invariants, il faut noter l'importance des connaissances professionnelles concernant l'enseignement des mathématiques. Les schèmes sont sous-tendus par les connaissances professionnelles.
Concernant nos choix méthodologiques, les ressources technologiques ont été proposées aux professeurs des écoles maîtres-formateurs (PEMF) par les chercheurs du groupe. Certaines ont été retenues, d'autres non. Parmi celles retenues, il y a entre autres le boulier chinois virtuel de Sésamath/IREM de Lille que nous avons présenté ci-dessus.
Les données recueillies sont relatives à la méthodologie d'investigation réflexive avec un questionnaire sur le système de ressources complété par les professeurs, un entretien (selon la méthode du sosie), une représentation schématique du système de ressources, des journaux de bords des ressources utilisées sur certaines périodes, de travaux élèves, d'observations de classe et de vidéos des séances. Nous avons également utilisé des grilles de description de séances (remplies par le professeur), des extraits de manuels scolaires, et les notes des réunions du groupe TREMA-1.
Les deux paragraphes suivants présentent deux études relativement à nos choix théoriques et méthodologiques. À travers le cas de Carlos (CE2) et de Noémie (CE1), nous présentons comment le boulier virtuel est choisi et intégré pour l'enseignement de la numération à l'école.

2.2 Carlos : découverte du boulier et numération en CE2

Séquence et travail documentaire de Carlos

Le manuel de classe de Carlos est le *Nouvel objectif calcul CE2* qu'il utilisait depuis plusieurs années. Ce manuel comporte quelques séances sur l'étude du boulier matériel qu'il n'avait pas pu mettre en place jusque-là, faute de matériel. Le boulier virtuel a donc permis à Carlos de mettre en place des séances de classe sur la découverte et le mode de fonctionnement du boulier chinois. La séquence[3] construite par Carlos possède huit séances dont l'objectif est de « mieux comprendre le système d'échanges dans le cadre de la numération ». Les différentes séances portent sur la recherche du mode d'emploi du boulier et les différentes écritures d'un même nombre. Les élèves ont travaillé en salle informatique (deux élèves par ordinateur) et ont produit des affiches sur papier en complément du travail sur ordinateur.

Boulier et genèse pour Carlos

Carlos a choisi d'utiliser le manuel de classe pour travailler l'inscription des nombres sur le boulier, alors qu'il utilise le boulier virtuel plutôt pour la lecture des nombres. On note aussi l'importance du travail en autonomie de certains élèves et de remédiation avec Carlos pour d'autres élèves. Nous décrivons ici le processus d'instrumentalisation relatif au système de ressources de Carlos. On peut identifier une règle d'action pour Carlos : « Demander aux élèves de rédiger un mode de fonctionnement pour l'étude d'un nouvel artefact » dont l'invariant opératoire[4] associé est : « Les élèves apprennent en jouant un rôle actif et en élaborant des affiches ». Une caractéristique de cette genèse documentaire réside dans un détournement par les élèves de la ressource et donc de l'objectif d'apprentissage lors des premières séances. En effet, les élèves ont utilisé une méthode d'essai/erreur pour inscrire des nombres sur le boulier, sans mobiliser des connaissances relatives à la numération. Carlos a ensuite choisi d'introduire l'usage du papier/crayon pour éviter ce détournement. Les

3 Pour les scénarios des séances, voir l'article intégral (Poisard, Bueno-Ravel & Gueudet 2011).

4 Notons que pour Carlos, comme pour Noémie, nous proposons des hypothèses d'invariant opératoire dont il faudrait vérifier la stabilité au cours du temps.

connaissances professionnelles de Carlos ont donc évolué lors de cette intégration (instrumentation). Enfin, notons que la séquence mise en place par Carlos est assez proche du fonctionnement des « laboratoires de mathématiques » (Maschietto & Trouche 2010).

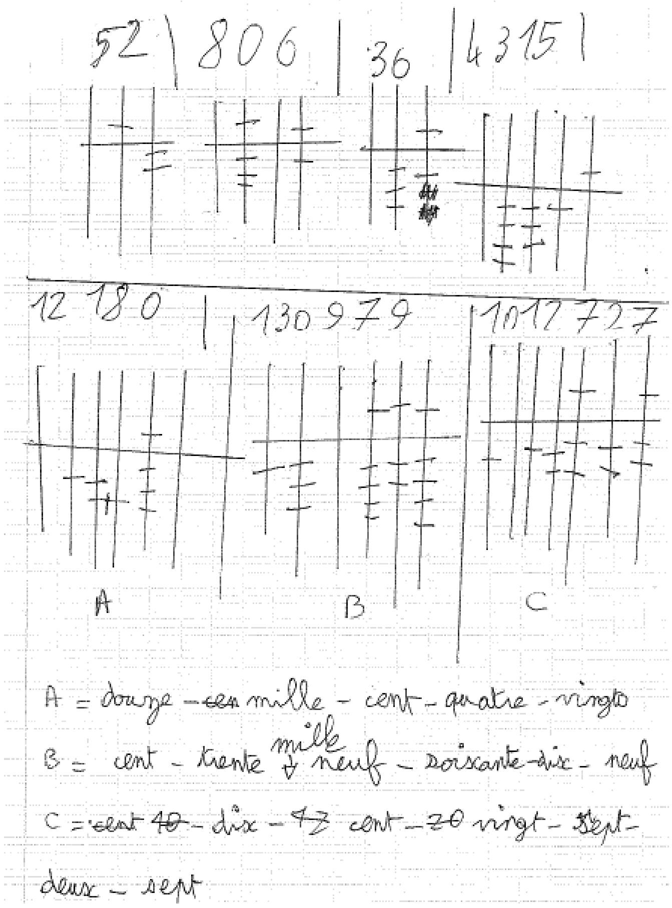


Figure 5 :Une affiche produite par les élèves de Carlos (CE2)

Intégration du boulier virtuel dans le système de ressources de Carlos

Concernant les facteurs d'intégration de la ressource, l'appartenance au groupe TREMA-1 qui a proposé la ressource est une explication, mais d'autres facteurs ont aussi joué un rôle important. Cette nouvelle ressource pour Carlos est en adéquation avec les ressources déjà en usage dans la classe, ensuite l'incitation institutionnelle est à prendre en compte avec l'importance pour Carlos de préparer ses élèves au brevet informatique B2i. Les connaissances professionnelles de Carlos constituent aussi un vecteur d'intégration : ses connaissances en didactique sur la numération et ses difficultés d'apprentissage, et l'importance que Carlos accorde pour les élèves au travail en groupe et à la rédaction du mode de fonctionnement du boulier. La citation ci-dessous issue d'un entretien avec Carlos permet de mieux comprendre ses motivations :

« L’intérêt du boulier virtuel est très net. Les nombreux essais sont auto-validés par le résultat affiché. Tous les élèves sont en situation de réussite. Le fait d’écrire sur une affiche permet de fixer les connaissances. Les élèves ayant beaucoup manipulé, découvrent beaucoup de choses mais ne mémorisent pas obligatoirement. L’excitation liée au support informatique les pousse à agir énormément mais pas à analyser. L’activité informatique prenant le pas sur la réflexion, un temps sans ordinateur est primordial pour fixer par écrit ce qui a été découvert. » (Carlos)

2.2 Noémie : inscription économique et numération au CE1

Séquence et travail documentaire de Noémie

La séquence de Noémie a été mise en place après le travail de Carlos, l’année scolaire suivante. Noémie a donc pris en compte l’expérience de Carlos pour construire son scénario, elle pensait « adapter le travail pour une classe de CE1 ». Comme nous le décrivons ci-après, en réalité cette seconde intégration comporte des caractéristiques assez différentes de la première. Noémie utilise le manuel scolaire *J’apprends les maths* complété en particulier par : la comptine à la chinoise mise en place au CP (deux-dix-et-cinq pour vingt-cinq) et encore régulièrement utilisée en classe, et le matériel de numération (boîtes, jetons et valises Picbille). Le manuel ERMEL est aussi en usage pour la résolution de problèmes et la géométrie. Les séances en salle informatique (équipée d’un tableau blanc interactif ou TBI) sont des séances courtes de 20 minutes une fois par semaine en demi-classe. Lors de ces séances dont l’objectif est de « représenter un nombre sur le boulier, comprendre les échanges et utiliser l’outil pour calculer », Noémie suit la progression de classe en mathématiques. Pour cette première année d’utilisation en classe, Noémie a assez peu demandé de traces écrites aux élèves, sauf une séance d’évaluation en cours d’année.

Boulier et genèse pour Noémie

Pour cette séquence, les élèves travaillent individuellement sur l’ordinateur. Noémie a choisi d’institutionnaliser rapidement le vocabulaire relatif au boulier : unaire, quinaire, axe de lecture (processus d’instrumentation). La règle d’action sous-jacente est : « Présenter très tôt le mode de fonctionnement aux élèves et le rappeler régulièrement » et l’invariant opératoire associé : « Les élèves peuvent confondre les tiges et les valeurs des boules ». Noémie a aussi introduit rapidement une règle d’inscription concernant l’écriture économique c’est-à-dire qu’on doit déplacer le nombre minimal de boules pour inscrire un nombre et donc utiliser des échanges si besoin (entre tiges ou au sein d’un même tige). Noémie retrouve des erreurs classiques des élèves que le boulier permet de travailler, par exemple l’inscription de 154 au lieu de 190. Ainsi, le boulier apporte un intérêt particulier pour les élèves en difficulté.

Intégration du boulier virtuel dans le système de ressources de Noémie

De même pour Noémie, l’appartenance au groupe TREMA-1 ainsi que le travail réalisé par Carlos sont des facteurs d’intégration. D’autres facteurs permettent de comprendre l’appropriation de cette nouvelle ressource : l’usage du boulier virtuel pour Noémie s’est combiné avec la volonté de travailler en salle informatique avec le TBI avec ses élèves, ce qu’elle ne faisait pas auparavant. Aussi, l’articulation avec le manuel et le matériel de classe est adéquate avec une progression commune pour l’usage des différents artefacts. La représentation schématique de son système de ressources (Poisard, Bueno-Ravel & Gueudet 2011) nous permet aussi de comprendre l’importance de la cohésion entre l’intégration du boulier et les notions mathématiques à enseigner au CE1 ici la numération. Pour Noémie, les notions mathématiques à enseigner constituent le cœur de son système de ressources donc conditionnent son enseignement et sa production de documents. Du côté des connaissances professionnelles, Noémie soulève « l’importance de coder les nombres des différentes manières pour comprendre la numération ». Le boulier fournit donc une nouvelle manière de coder les nombres pour les élèves en complément du manuel, du matériel associé et de la comptine à la chinoise en particulier. Enfin, il faut noter le rôle essentiel du TBI pour l'organisation des séances. En effet, le TBI est utilisé à chaque séance par les élèves qui viennent montrer leur manière de coder un nombre, le professeur organise donc des synthèses où les élèves montrent et discutent leurs propositions dans un esprit de démarche d'investigation (Poisard & Gueudet 2010).

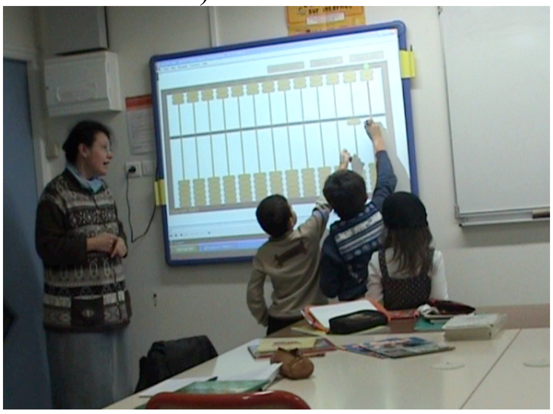


Figure 6 : Usage du TBI en salle informatique pour la classe de Noémie (CE1)

Conclusions et prolongements

Notre conclusion développe trois points essentiels : les choix d'intégration et les connaissances professionnelles des professeurs, le processus d'appropriation de la ressource et les prolongements envisagés pour ce travail.

Concernant les choix d'intégration et les connaissances professionnelles, nous avons vu que les connaissances sur le contenu mathématique en jeu mais aussi sur l'apprentissage des mathématiques sont mises en avant par les professeurs pour justifier leurs choix. L'importance de ces connaissances professionnelles aussi bien notionnelles que didactiques est donc fondamentale pour comprendre des choix d'intégration. Ces deux exemples montrent aussi que des connaissances différentes impliquent des usages différents. En effet, même si Noémie s'est inspirée du scénario de Carlos mis en place en CE2 pour l'adapter au CE1, finalement ce second scénario est assez différent avec des choix et des objectifs d'apprentissage en adéquation avec les connaissances professionnelles du professeur. D'autre part, nous considérons que les productions des élèves sont des ressources à disposition du professeur qui participent à l'évolution des connaissances de celui-ci. D'autre part, pour Noémie et Carlos, nous avons montré que la nouvelle ressource a pu s'intégrer dans un système de ressources déjà construit. La compatibilité d'une nouvelle ressource dans un système existant est une donnée primordiale pour que l'intégration puisse s'effectuer.

Les professeurs sont concepteurs de leur enseignement, ils combinent, modifient, réarrangent des ressources pour former un document. Le processus d'appropriation d'une nouvelle ressource est donc un travail personnel mais en interaction avec les élèves et d'autres professeurs, etc. Pour que ce processus puisse se développer pour l'enseignement des mathématiques avec des TICE à l'école, il apparaît nécessaire de mettre en place des formations pour accompagner l'usage de ressources, où les collectifs de professeurs peuvent jouer un rôle essentiel.

Notre travail d'observation s'est prolongé pour Noémie l'année scolaire suivante, toujours pour une classe de CE1. Les séances se déroulaient à nouveau une fois par semaine en salle informatique avec le TBI (20 minutes en demi-classe). Les modifications apportées au scénario portent sur la mise en place d'un cahier boulier pour les élèves où des fiches d'exercices sont régulièrement insérées pour garder une trace du travail, ceci est intervenu après des échanges avec Carlos sur cette question de la trace écrite pour les élèves. Carlos, lui, utilise des traces écrites régulièrement, mais ne fait pas usage du TBI ce qui ne lui permet pas de voir et de montrer à la classe le travail de chacun à chaque séance. Ensuite, Noémie a travaillé en numération et aussi -comme elle aurait souhaité le faire dès la première année- sur les techniques opératoires de calcul. En particulier, les séances à partir du mois d'avril portent sur la soustraction « à l'anglaise » avec le boulier. Dans la classe, Noémie propose deux techniques pour la soustraction : la soustraction traditionnelle française et la soustraction « à l'anglaise » ou « par emprunts », les élèves pouvant choisir leur technique. Avec le boulier chinois, la technique « à l'anglaise » peut être faite en effectuant les échanges entre les tiges. Par exemple, pour emprunter une centaine, on désactive une unaire de la tige des centaines et on active dix (par exemple deux quinaires) dans les dizaines, c'est-à-dire qu'on utilise l'équivalence « 1centaine = 10 dizaines ». Nous souhaitons poursuivre nos observations pour Noémie ce qui nous permettrait de voir sur la durée la stabilisation ou non de certains usages. Notre objectif est aussi de travailler avec d'autres professeurs, plus ou moins expérimentés, pour observer les modifications d'usage susceptibles de se mettre en place.

Références bibliographiques

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 77-124.

Chevallard, Y. (2001). Les TPE comme problème didactique. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris : IREM Paris 7 & ARDM.

Deforge, Y. (1990). *L'œuvre et le produit*. Seyssel : Champ Vallon.

Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* Paris : IREM Paris 7 & ARDM. 189-203.

Gueudet G., & Trouche L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.57-74). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Maschietto M., Trouche L. (2010) Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM – The international Journal on Mathematics education* 42(1) 33-47.

Poisard, C., Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G. (2011). Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31-2, 151-189.

Poisard, C. (2010, sept.). Intégration et usages de ressources technologiques au premier degré : l'exemple du boulier virtuel en mathématiques, *Colloque AREF*, Genève, Suisse.

Poisard, C., & Gueudet, G. (2010, juin). Démarches d'investigation : exemples avec le boulier virtuel, la calculatrice et le TBI. *Journées mathématiques de l'INRP*, Lyon, France. http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/apprendre-enseigner-se-former-en-mathematiques

Poisard, C. (2009). Boulier chinois et algorithmes de calcul. *Plot 27, 22-25.* Fiche d'exercices disponible sur www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/FichesExosBoulier.pdf

Poisard, C. (2006). Dossier : la fabrication et l'étude d'instruments à calculer. Site Internet *CultureMath,* Rubrique *Matériaux pour la classe*. http://www.dma.ens.fr/culturemath/

Poisard, C. (2005). *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer.* Thèse de Doctorat de l'Université de Provence, Aix-Marseille I. http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00011850

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments*

contemporains. Paris : Armand Colin.
Sousa Do Nascimento, S. (1999). L'animation scientifique : essai d'objectivation de la pratique des associations de culture scientifique et technique françaises. Thèse de doctorat, Paris 6.

Manuels scolaires

Brissiaud R. (dir.). (2009) *J'apprends les maths.* Paris : Retz.
Brissiaud R. (dir.). (2009) *J'apprends les maths avec Tchou CP*. Paris : Retz.
Ermel (2001) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CP.* Paris : Hatier.
Ermel (2001) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CE1.* Paris : Hatier.
Peltier M.-L., Clavié C., Gauch A.-M. (1996) *Nouvel objectif calcul CE2.* Paris : Hatier.

Vers la mobilisation d'une géométrie axiomatique et de la déconstruction dimensionnelle : intérêt de la géométrie dynamique tridimensionnelle

Joris **MITHALAL**

Laboratoire de Didactique André Revuz,

I.U.F.M. de Paris

joris.mithalal@paris.iufm.fr

Résumé

Faire de la démonstration une source de certitude, et non l'exercice attendu par l'enseignant, se heurte fortement au problème du « passage dessin-figure ». Nous proposons ici de réinterroger cette difficulté à la lumière d'un point de vue épistémologique et d'un point de vue cognitiviste.

Il apparaît alors que l'évidence visuelle constitue un obstacle fort à la mobilisation d'une géométrie axiomatisée, ce qui nous conduit à étudier les potentialités d'un environnement de géométrie dynamique tridimensionnelle (Cabri 3D) pour bâtir des situations favorables au passage vers la déconstruction dimensionnelle, consubstantielle de cette géométrie.

Nous montrons, en nous appuyant sur une ingénierie didactique, que la spécificité des représentations et la richesse de l'environnement offrent des conditions efficaces pour provoquer la transition de l'étude du dessin vers celle de la figure.

Dans ce processus, nous portons une attention particulière à la déconstruction instrumentale, qui peut prendre diverses formes, et qui joue un rôle central dans l'évolution observée.

Mots clés

Géométrie dans l'espace – géométrie dynamique – figure – preuve – paradigmes géométriques – visualisation – déconstruction instrumentale – déconstruction dimensionnelle

Introduction

Motiver la démonstration, en ce qu'elle est une preuve intellectuelle, face à l'évidence visuelle et à la possibilité de réaliser des preuves pragmatiques, constitue un enjeu fort de l'enseignement secondaire. Faute de considérer l'étude du dessin insuffisante pour obtenir des résultats de géométrie, cette démonstration est parfois réduite à un exercice rhétorique destiné à présenter à l'institution une forme attendue, et n'est – aux yeux des élèves – alors pas source de validité.

Deux dimensions de l'activité géométrique nous semblent fondamentales pour mieux cerner cette difficulté, d'une part la signification accordée par les élèves aux problèmes posés, d'autre part les moyens qu'ils peuvent mobiliser pour les résoudre.

Pour cette raison, nous appuierons notre étude sur deux cadres théoriques complémentaires en articulant la notion de *paradigme géométrique* (Houdement & Kuzniak, 2006) aux travaux de Duval (2005), afin d'en préciser l'objet. Ceci nous permettra de montrer en quoi la géométrie dynamique tridimensionnelle présente un intérêt dans cette perspective, à la fois au regard de la nature des représentations qu'elle propose et du fait de la multiplicité des *déconstructions instrumentales* qu'elle propose.

Il nous faudra de fait préciser cette notion et expliciter les hypothèses d'apprentissage que nous aurons formulé.

Deux points de vue sur l'activité géométrique

Les travaux présentés ici reposent essentiellement sur deux cadres théoriques représentant deux points de vue différents sur l'activité géométrique. La dimension épistémologique, portée par la notion de *paradigme géométrique* (Houdement & Kuzniak, 2006), permet d'expliciter les différences de signification des problèmes aux yeux des élèves. Les travaux de Duval (2005; 1994) font pour leur part porter l'accent sur la dimension cognitive, et donc sur l'activité de l'élève en situation de résoudre un problème de géométrie.

Paradigmes géométriques

D'un point de vue épistémologique, Houdement et Kuzniak considèrent qu'une activité géométrique se réfère à un *paradigme géométrique*, dont ils distinguent trois formes principales[1] :

- GI, la géométrie naturelle, est tournée vers l'étude des objets matériels. La résolution et la validation reposent exclusivement sur l'action du sujet sur ces objets dont il s'agit d'étudier les caractéristiques.
- GII, géométrie axiomatique naturelle, repose pour sa part sur une construction axiomatique. La résolution et la validation sont soumises à des règles hypothético-déductives, mais cependant la référence au monde sensible persiste et l'axiomatique doit impérativement modéliser *correctement* le réel. Une géométrie non-euclidienne y est par exemple à proscrire.
- GIII est une géométrie purement axiomatique, absente de l'enseignement secondaire.

Il est important de souligner que ces références pour l'activité géométrique ne s'excluent pas mutuellement pour l'élève : une seule résolution peut faire référence de manière privilégiée à GI, mais employer ponctuellement une géométrie plus formalisée de type GII[2].

Cet éclairage nous permet de caractériser notre problème d'une manière plus précise :

- d'une part, l'institution attend que les problèmes soient résolus dans GII, et que GI puisse intervenir pour guider une phase heuristique ;
- à l'inverse, beaucoup d'élèves résolvent le problème dans GI, et tentent d'utiliser GII (ou son vocabulaire) pour plaire à l'institution.

Si éclairante qu'elle soit, cette approche ne dit en revanche rien sur le sujet en situation de résolution. Les travaux de Duval (2005) proposent pour leur part de détailler les mécanismes cognitifs potentiellement à l'œuvre lors de l'étude d'un dessin, et s'avèrent ainsi très complémentaires.

Visualisations, déconstructions.

Dans cette étude, Duval distingue deux manières d'appréhender le dessin, ce que désigne le terme « visualisation ».

Visualisation iconique

Dans le cas de la visualisation iconique[3], l'objet est identifié à son contour extérieur. Le sujet n'a accès qu'à la forme générale, et ne peut opérer dessus sous peine de le dénaturer.

---

[11] Pour plus de précisions, on se reportera à Houdement & Kuzniak (2006) et Kuzniak (2009).

[2] Signalons que l'inverse est vrai, même pour des mathématiciens. On peut à ce titre rappeler que, historiquement, les hypothèses concernant la connexité de l'ensemble de Mandelbrot ont été très dépendantes de ses représentations obtenues informatiquement.

[3] *Iconique* est à prendre dans le sens d'une « *présence de l'objet dans le signe* ».

Ainsi, un cube est assimilé à une *forme cubique* (tout comme un dé), et il est impossible d'en prolonger les arêtes par le tracé. En effet, sa forme générale changerait, et sa nature même en serait affectée.
On le voit, cette limite est rédhibitoire en géométrie puisqu'elle interdit de modifier le dessin pour faire apparaître des propriétés.

Visualisation non-iconique

Pour la visualisation non-iconique, le dessin est *représentant* de l'objet géométrique, c'est-à-dire assemblage d'objets de dimensions inférieures (droites, points...) que l'on peut isoler. Ces objets sont désignés par le terme d'*unités figurales.*
Le cube devient alors un assemblage de segments de même mesure selon certaines propriétés, ou de sommets, ou encore de faces, etc.
Il est ainsi possible d'opérer sur le dessin sans en changer la nature, procédé qui fait partie intégrante de la résolution des problèmes.
Des trois opérations possibles que distingue Duval (2005), seules deux feront l'objet de notre étude, la déconstruction instrumentale et la déconstruction dimensionnelle[4].

La déconstruction instrumentale permet de répondre à la question « Comment construire un objet à l'aide d'instruments donnés? », et possède une forte dimension procédurale. Elle conduit ainsi à voir l'objet comme le résultat d'un procédé constructif et, si elle ne s'appuie pas nécessairement sur des propriétés géométriques, elle suppose déjà d'isoler les unités figurales de plus petite dimension.
Ainsi le carré peut être vu comme le résultat du tracé d'un segment [AB], puis de C par l'intersection d'un cercle et d'une perpendiculaire bien choisis, etc.

La déconstruction dimensionnelle consiste à regarder l'objet comme assemblage d'unités figurales par des propriétés géométriques. Ce dernier point est fondamental car il désigne le rôle de ces propriétés dans ce processus : il ne suffit pas d'isoler les unités figurales, il faut aussi les organiser géométriquement.
Ainsi, un carré est formé de quatre segments de même mesure, orthogonaux […], ou encore de quatre sommets A, B, C, D tels que AB=BC=CD=DA… Ces formulations sont deux déconstructions dimensionnelles distinctes du carré.

Précisions

Il nous faut préciser à ce stade deux points relatifs à ce cadre théorique.

D'une part, il faut bien souligner le renversement qui doit s'opérer pour passer de la visualisation iconique à la visualisation non-iconique. En effet, cette dernière suppose que le regard, à l'encontre de son fonctionnement naturel, s'attache en premier lieu aux unités figurales de petite dimension et non aux formes générales. Cette opposition, que Duval désigne par le terme de *hiatus dimensionnel*, nous permettra de préciser certaines difficultés.

D'autre part, Duval s'intéresse avant tout aux processus cognitifs, et de fait nous devrons adjoindre des considérations qui sont absentes de ses travaux.
La distinction entre *dessin* et *figure* (Laborde & Capponi, 1994) sera convoquée pour caractériser notre questionnement de recherche.
En outre, dès lors que des *instruments* sont mobilisés dans la déconstruction instrumentale, l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) permet d'en étudier plus finement la complexité.

[4] La troisième est la division méréologique mais, selon nous, elle a un rôle et un fonctionnement très différent, aussi nous la délaisserons volontairement.

Nous montrerons ainsi que cette déconstruction n'est en rien monolithique, ce qui en fera un nœud de notre travail.

Motiver une géométrie déductive

Nous avons initialement énoncé que l'enjeu de cette étude porterait sur la légitimation d'une géométrie déductive dans l'enseignement secondaire. Les approches théoriques précédentes nous permettent dans un premier temps de préciser, en le reformulant, cet objectif. Dans un second temps, cela nous permettra en outre d'émettre des hypothèses de recherche portant sur des moyens potentiellement favorables à un tel apprentissage.

Réinterprétation : déstabiliser la visualisation iconique

Le problème que nous avions mentionné revient tout d'abord à ancrer l'activité de l'élève dans GII et la déconstruction dimensionnelle, cette dernière s'appuyant sur les objets et propriétés géométriques, et GII offrant un référentiel théorique pour les concevoir et les manipuler.
Dans cette perspective, l'évidence visuelle est un obstacle fort puisqu'elle rend opératoire la visualisation iconique, et alors GI est légitime.

Nous sommes ainsi conduits à formuler une première hypothèse de recherche selon laquelle limiter l'information visuelle rend la visualisation iconique inopérante et conduit GI à ne plus être le référentiel légitime pour l'activité géométrique. Dans ce cas, il faut pallier ces défaillances, ce qui motive un recours à de nouveaux outils – GII et la visualisation non-iconique.

Géométrie dans l'espace

Géométrie dans l'espace en papier-crayon

La géométrie dans l'espace présente ce défaut de visualisation, et il semble relativement naturel d'envisager qu'elle pourrait constituer un contexte favorable. Ceci doit néanmoins être nuancé, en ce qui concerne les représentations en projection plane. En effet, il est nécessaire pour lire ces dessins de lire les différentes informations qu'il comporte – et notamment le codage – pour reconstruire l'objet géométrique.
Ce mécanisme est très proche de la déconstruction dimensionnelle, ce qui explique la difficulté à *voir dans l'espace*, et la nécessité de s'appuyer sur de tels dessins constitue une impasse pour notre étude.

Géométrie dynamique

La géométrie dynamique propose des caractéristiques qui nous semblent plus favorables.

En premier lieu, il faut signaler que de tels environnements offrent des représentations bidimensionnelles, mais avec la possibilité de changer de point de vue (ou de « faire tourner les objets »). Ainsi, l'objet présenté dans la figure 1 pourrait être vu comme un pavé droit en l'absence de la seconde image. De fait l'examen visuel est beaucoup moins complexe, et de nombreuses aberrations ou indéterminations liées à la projection plane sont évitées.

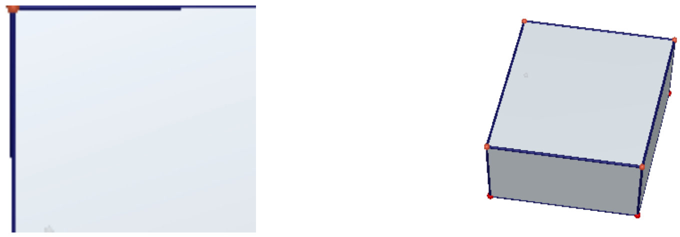


Figure 1 : un non-pavé droit

En outre, Chaachoua (1997) a montré combien la possibilité d'expérimenter sur le dessin (ajouter des tracés, mesurer, isoler des sous-figures, etc.) est primordiale en géométrie, et contrariée pour les représentations d'objets tridimensionnels en perspective cavalière[5].
Des environnements tels que Cabri 3D, en offrant de nombreuses primitives de construction ou d'étude du dessin, restaurent cette fonction d'expérimentation et rendent ainsi le dessin utilisable.

Pour autant, l'appréhension visuelle ne fonctionne qu'imparfaitement sur ce type de représentation, ce qui est nécessaire à notre étude. Les informations visuelles sont parfois insuffisantes pour étudier les objets, et elles le sont presque systématiquement pour contrôler leur construction. En particulier, il s'avère particulièrement difficile de contrôler la position du pointeur de la souris – qui sert à construire et déplacer les objets dans l'interface du logiciel.
Par exemple, étant donné une droite et un point de l'espace, il est presque impossible de déplacer le point sur la droite. La figure 2 montre trois étapes d'une telle tentative : une droite et un point sont donnés dans l'espace (premier dessin), et les tentatives de déplacer le point sur cette droite (deuxième dessin) échouent, ce que révèle le changement de point de vue (troisième dessin).

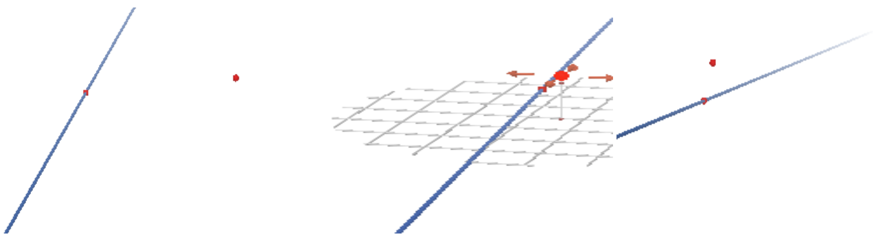


Figure 2 : tentative de déplacer un point sur une droite.

Ainsi, ces représentations permettent de limiter la complexité d'appréhension visuelle des représentations, sans toutefois rendre la vision opératoire pour la résolution de problèmes de géométrie.

Intérêts de la géométrie dynamique

Ces environnements proposent des *primitives géométriques* permettant des constructions à l'aide de contraintes géométriques (intersection, orthogonalité, transformations…). Dans notre cas, les outils disponibles permettent de pallier les déficiences visuelles, ce qui sera essentiel pour l'évolution de l'activité géométrique des sujets.

Le déplacement joue ainsi un rôle fort puisqu'il offre une des rares sensations visuelles incontestables – car ne mettant pas en jeu la position dans l'espace d'un objet donné –, le

[5] Elle l'est aussi, pour d'autres raisons que nous ne pouvons détailler ici, pour les maquettes.

mouvement coordonné d'objets : « *quand A bouge, je vois B bouger ».* Identifier, et chercher à reproduire, de tels phénomènes renvoie aux invariants du déplacement, classiquement interprétés en géométrie dynamique comme réification des propriétés géométriques[6], et conduisant à la figure.

En outre, les primitives proposées par Cabri3D offrent des possibilités d'action bien plus grandes, s'appuyant éventuellement sur les propriétés ou transformations.

Il en résulte une intrication entre problématique pratique – contrôler les constructions – et théorique – maîtriser les outils – qui nous semble favorable à l'émergence d'une géométrie axiomatisée et nous conduit finalement à interroger la genèse instrumentale, et les éventuelles formes et fonctions de la déconstruction instrumentale.

Hypothèses

En particulier, nous sommes conduits à formuler l'hypothèse de recherche suivante, qui s'inscrit dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) :

Un environnement tel que Cabri 3D permet d'élaborer des situations dans lesquelles la visualisation iconique peut s'exercer, mais où seule la déconstruction dimensionnelle peut assurer la stabilité du système [sujet<>milieu]. De telles situations favorisent l'émergence de la déconstruction dimensionnelle.

Cette hypothèse permet de définir un horizon et est en cela, d'une certaine manière, une hypothèse asymptotique. Il nous reste ensuite à dégager, outre des conditions de stabilité, des conditions favorables à l'évolution attendue.

L'ingénierie didactique que nous présentons vise à mettre à l'épreuve cette hypothèse, et à éclairer certains rouages du passage vers GII et la déconstruction dimensionnelle. Nous montrerons en particulier le rôle central des déconstructions instrumentales dans ce processus.

Ingénierie

L'expérimentation a été menée dans quatre classes de seconde, avant tout cours de géométrie dans l'espace. Les élèves travaillaient par binômes, pendant une heure de prise en main, puis trois séances d'une heure consacrée chacune à une situation différente. Les données recueillies consistent en des captures d'écran vidéo – à l'aide de Camstudio 2.0 – restituant l'activité de chaque binôme dans le logiciel, et l'enregistrement audio des binômes à l'aide de dictaphones. Ces données ont été ensuite retranscrites avec le logiciel ELAN.

La méthodologie de l'*ingénierie didactique pour la recherche* (Perrin-Glorian, 2010) est ici enrichie par une analyse *a priori* et *a posteriori* s'appuyant sur le modèle cK¢ (Balacheff & Margolinas, 2005), que nous n'avons pas la possibilité de détailler ici.

Trois situations

Première situation : cube tronqué

Dans la première situation, il s'agit de donner autant de méthodes que possible pour compléter

[6] On pourra à ce propos se référer aux travaux de Jahn (1998).

un cube dont on a coupé un sommet. (Figure 3)

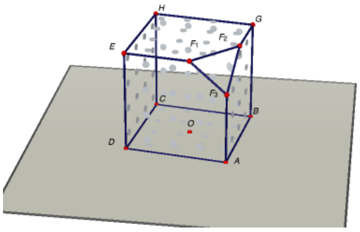


Figure 3 : cube tronqué

Il est possible de ne s'appuyer que sur la perception pour reconstruire la forme – la consigne est volontairement floue sur ce point – mais, comme pour déplacer un point de l'espace vers une droite, ces stratégies sont peu efficaces. L'analyse *a priori* montre ainsi que la visualisation iconique est peu opératoire, même pour reproduire une forme, et est ainsi déstabilisée.

Deuxième situation : coplanarité

Dans la deuxième situation, quinze configurations de deux droites construites dans Cabri 3D sont données, et il faut déterminer si elles ont un point d'intersection. (Figure 4)

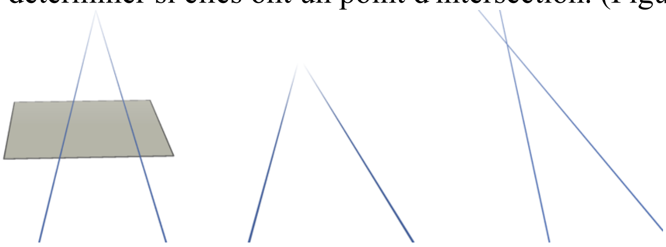


Figure 4 : trois configurations de droites données à l'étude

Cette situation s'inscrit hors de la géométrie du solide, en exploitant les indéterminations visuelles, et outre la notion de coplanarité elle vise à étudier l'apparition de la déconstruction instrumentale. En effet, cette dernière permet de résoudre les cas où « on ne voit pas », nombreux quand aucun solide ne donne d'indication visuelle.

Troisième situation : reconstruction d'un prisme rhombique

Dans la troisième situation, des prismes rhombiques sont donnés aux élèves qui doivent les reconstruire. (Figure 5)

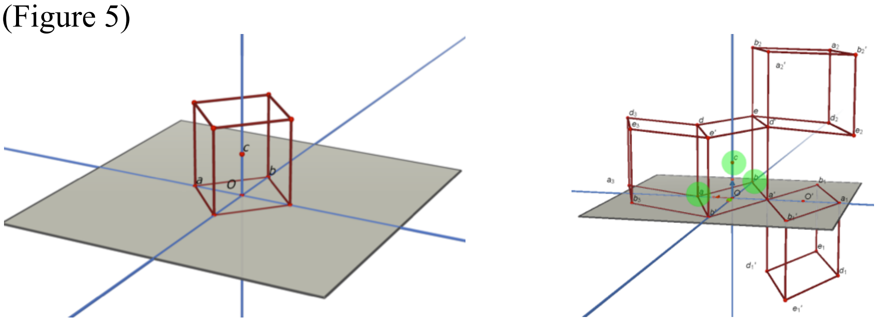


Figure 5 : un prisme rhombique et ses images par symétries successives

Ils sont construits à partir de trois points, a, b, c, par symétries successives. Ces points sont donnés dans le fichier de reconstruction, et on demande que le reconstruit se comporte comme l'original quand on déplace les points a, b et c, ce qui introduit des contraintes dynamiques. L'analyse *a priori* montre que des reconstructions « au juger » ne le permettent pas. S'appuyer sur une routine instrumentale peut fonctionner, mais elle n'offre pas une assez bonne anticipation, et sera rapidement coûteuse. Ainsi, la déconstruction dimensionnelle est nécessaire, à la fois pour interpréter les phénomènes observés et pour anticiper les procédures de reconstruction.

L'expérimentation basée sur ces situations nous permettra ensuite d'étudier et d'enrichir le schéma d'apprentissage précédemment esquissé.

Passage vers une géométrie déductive : quelques détails

Déstabilisation de la visualisation iconique

Afin de fixer les idées, et en référence à notre hypothèse initiale, il est en premier lieu nécessaire de montrer comment la déconstruction instrumentale peut émerger lorsque la visualisation iconique et GI deviennent inaptes à permettre la résolution.

La condition que nous avions fixée, et qui est primordiale ici, est que les rétroactions émanant du milieu soient intelligibles pour la visualisation iconique : une forme à reproduire, qui reste « identique à elle-même » quand sont modifiés des paramètres tels que le point de vue, la position de points, etc.

Pour reconstruire le cube tronqué (première situation), la première stratégie généralement employée est l'ajustement : placer un point dans l'espace, ajuster sa position. Nous avons déjà expliqué combien cette stratégie a peu de chances d'être concluante.

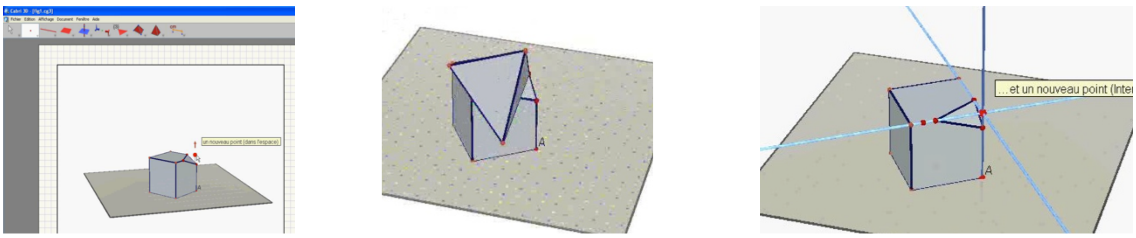


Figure 6 : deux tentatives par ajustement et une par incidence

Il en est ainsi du groupe dont nous proposons ici l'observation, qui a consacré les trente premières minutes de son travail à tenter des ajustements pour reproduire la forme. Les constructions successives de ce binôme ont été invalidées par le changement de point de vue – rétroaction perceptible pour la visualisation iconique.
Pour autant, il ne s'agissait pas d'une impasse puisque ces élèves ont pu ensuite mobiliser d'autres stratégies. Ce temps a été nécessaire pour les convaincre que l'ajustement était voué à l'échec, et que les outils disponibles seraient plus efficaces, comme en témoignent les échanges suivants :

> *E2 (15'37) : Regarde, regarde! – E1 : Quoi? – E2 : Ca a marché, regarde. – E1 : T'as fait quoi? Tu sais ce que t'as fait, au moins? – E2 : Pas trop, mais... Ah si, j'utilise ça... [change de point de vue] De toute façon on ne voit rien... – E1 : non en fait...*

Peu à peu apparaissent des usages plus ou moins contrôlés des outils de Cabri 3D (E2, 30'43 : *Ahh attends, somme des vecteurs, tiens tiens! Si tu fais ça...* ; E1, 34'23 : *Mais non, ce serait mieux une perpendiculaire, là, non?*). On notera qu'il s'agit essentiellement de primitives « simples » – droite, perpendiculaire, parallèle… – qui permettent simultanément un contrôle instrumenté pour assurer l'opérationnalité, et un contrôle visuel pour valider les constructions. En d'autres termes, les primitives géométriques permettent de construire facilement, mais c'est la forme générale qui assure la validation.

Il s'agit d'une déconstruction instrumentale, dont la visée est toujours l'objet matériel présenté. Ainsi, la dernière tentative s'appuie sur des parallèles, mais la validation se fait par superposition de l'objet construit avec un modèle.
Ce mécanisme est apparenté à la visualisation non-iconique, dans la mesure où il est nécessaire de décomposer la forme en unités figurales, mais la finalité demeure du côté de GI. En cela, cette déconstruction instrumentale est peut-être moins ancrée dans la visualisation non-iconique que nous aurions pu l'anticiper.

Deux déconstructions instrumentales

Comme nous l'avions précédemment annoncé, nous pouvons montrer que la déconstruction instrumentale n'est pas monolithique. Il faut, en réalité, en distinguer deux types, selon leurs objectifs et modalités. Nous appuierons nos distinctions sur l'observation de deux binômes travaillant sur la 3e situation, de reconstruction d'un prisme.

Déconstruction instrumentale à visée iconique

Cette forme de la déconstruction instrumentale est celle dont nous avons esquissé les contours pour la reconstruction du cube.
Il s'agit bien d'une déconstruction instrumentale car elle caractérise les objets comme résultats de procédés constructifs. Il faut pour cela isoler des unités figurales, et s'appuyer sur des instruments permettant de les organiser entre elles.
Nous considérons qu'elle est *à visée iconique* car dans ce cas, l'enjeu reste porté par la reconstruction d'une forme. Le contrôle – notamment de validité – reste visuel, s'appuie sur les formes, et renvoie à une géométrie de type GI. C'est notamment ce qui avait conduit le binôme précédent à construire le tétraèdre manquant au cube pour valider leur construction.

Nous observons ce type de déconstruction instrumentale, mais aussi des étapes de son émergence, dans le binôme suivant.
Ces élèves cherchent dans le cas présent à relier le mouvement de sommets entre eux. Il est possible de distinguer trois étapes principales dans leurs tentatives.

i. En premier lieu, une droite parallèle à l'axe des abscisses est construire, *a posteriori*, pour relier physiquement les sommets entre eux. Cette stratégie ne peut aboutir, du fait de l'impossibilité d'attacher les points déjà construits sur la droite, mais cela matérialise la relation entre ces sommets. (Figure 7)
ii. En revanche, il est alors possible d'observer que les points d'intersection de cette droite avec d'autres droites qui lui sont orthogonales bougent simultanément.
iii. Ces points deviennent privilégiés, ce qui provoque un renversement de l'ordre de la construction : les points ne sont plus attachés *a posteriori*, mais sont définis comme des intersections, ce qui permet de coordonner leur mouvement. La procédure est finalement généralisée, et la résolution est mieux contrôlée et anticipée.

Ici, en raison d'une capacité relativement limitée des élèves à mobiliser une géométrie élaborée, on retrouve les caractéristiques que nous avions proposées : contrôle de validité essentiellement visuel – qui s'appuie néanmoins peu à peu sur la reproduction d'une procédure permettant d'anticiper – et utilisation de primitives géométriques pour assurer les constructions.

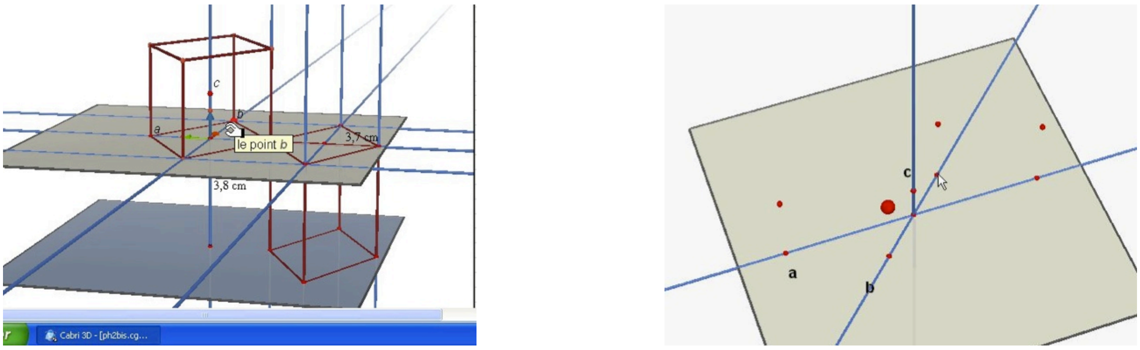


Figure 7 : les informations visuelles dans deux constructions (groupes 2 et 3)

Déconstruction instrumentale à visée non-iconique

La seconde forme identifiée de la déconstruction instrumentale diffère tant par sa finalité que par ses relations avec une géométrie de type GII.
Il s'agit de construire des représentants d'objets géométriques, caractérisés par leurs propriétés, et l'objet graphique est alors secondaire. En cela, nous considérons qu'elle est *à visée non-iconique*.
GII et la déconstruction dimensionnelle sont alors cohérents avec ce type de déconstruction instrumentale, servant de points d'appui théoriques pour un processus qui les rend opérationnels.

Le troisième groupe que nous citerons en exemple donne une illustration de cette déconstruction en s'appuyant sur la stratégie optimale : construire les sommets par symétries successives, puis relier les sommets.
Du point de vue du nombre d'opérations réalisées, cette stratégie est très avantageuse, en revanche elle exclut tout contrôle visuel fiable (voir Figure 7) – il est difficile de repérer la position des sommets dans l'espace. Ici, c'est donc la déconstruction dimensionnelle qui permet d'anticiper et de s'affranchir du contrôle visuel.

D'une déconstruction instrumentale à l'autre

Il apparaît finalement que deux déconstructions instrumentales doivent être distinguées, la première émergeant lorsque la visualisation iconique est déstabilisée.
En conséquence, le passage à la seconde déconstruction instrumentale est un aspect crucial relativement au rôle de GII dans l'activité géométrique des élèves. Pour mener à bien son étude nous nous appuierons tout particulièrement, en arrière-plan, sur l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) et le modèle cK¢ (Balacheff & Margolinas, 2005)[7].

Le distinguo que nous avons proposé porte essentiellement sur le rôle des objets d'une géométrie de type GII : les problèmes doivent porter sur des objets géométriques et non plus sur des dessins – on retrouve le passage du dessin à la figure –, et un travail dans GII permet à la fois d'anticiper et de contrôler les constructions réalisées.
Il est alors raisonnable de considérer que ce second point peut émerger comme une conséquence des interactions du sujet avec le milieu – comme résultat d'une problématique pratique –, tandis que le premier serait une conséquence à plus longue échéance de ce changement de statut des objets géométrique.

[7] Cet arrière-plan ne sera pas toujours transparent dans le présent texte, pour plus de précisions nous renvoyons à la méthodologie décrite dans le manuscrit de thèse (Mithalal, 2010).

La quatrième observation que nous proposons ici est tirée de la situation portant sur la coplanarité.
Dans un premier temps, l'interprétation de la consigne et la résolution de ce binôme sont purement perceptifs : il s’agit de regarder si les droites se coupent, et l’information visuelle est pleinement satisfaisante (Figure 8).
Dans un second temps, face à des indéterminations (voir Figure 8), l'étude instrumentée à l’aide de l’outil « point d’intersection » – et donc la déconstruction instrumentale – apparaît, mais reste exclusivement conditionné par l'action matérielle : il est possible, ou non, de créer un point d’intersection.

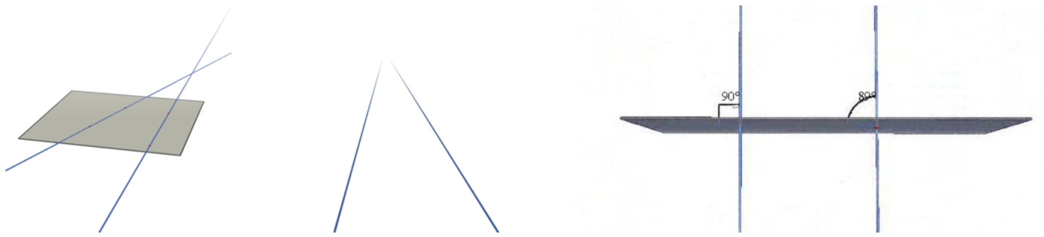


Figure 8 : résolution visuelle, visualisation insuffisante, étude instrumentée

La difficulté est alors apportée par l’environnement lui-même qui s’appuie sur de la géométrie projective, et « accepte » de créer le point d’intersection de deux droites parallèles, ou encore distingue une « orthogonalité géométrique » d’un « angle de 90° » (Figure 8). Des interrogations théoriques apparaissent ainsi peu à peu, pour contrôler les outils, mais aussi les procédures employées, et donc les interpréter.
Il faut noter que le contrôle théorique, qui apparaît localement, devient rapidement générique. Les élèves remettent ainsi en cause les résultats obtenus sur la base de la seule observation, et étudient de nouveau toutes les configurations.

Ce passage est crucial car il permet et justifie la mobilisation d’outils théoriques, et a référence à une géométrie de type GII. Les conditions réunies ici permettent son émergence pour pallier les déficiences – locales – de la première déconstruction instrumentale, ce qui change la valeur épistémique affectée aux informations visuelles, puis conduit à s’appuyer d’une manière plus générale sur GII et la déconstruction dimensionnelle. L’enjeu et la nature de la résolution changent alors radicalement, et deviennent plus conforme aux attentes institutionnelles à l’orée du lycée.

Émergence de la déconstruction dimensionnelle

Il nous faut enfin détailler l’émergence de la déconstruction dimensionnelle.

Dans les évolutions que nous avons décrites jusqu’alors, une appréhension des représentations, un type de résolution ou d’interprétation du problème, supplante systématiquement le précédent.
En revanche, dans le cas présent la déconstruction dimensionnelle ne va pas supplanter la déconstruction instrumentale, puisque chacune répondent à des problématiques distinctes. Nous l’avons esquissé dans le paragraphe précédent, une dialectique s'installe entre ces deux déconstructions, l’une permettant d'agir, l’autre d'interpréter et d'anticiper.

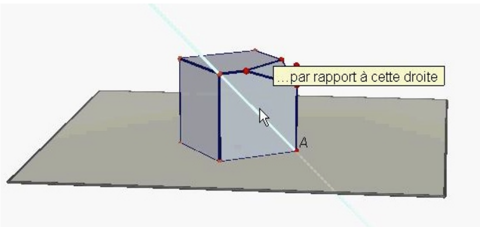
Cette dialectique est riche de conséquences, puisque c’est elle qui permet réellement d’ancrer l’activité dans une géométrie reposant sur une construction axiomatique et déductive.
Un dernier trinôme, travaillant sur la reconstruction du cube, nous en offre ici encore une bonne illustration, et il faut notamment souligner un basculement fort : dans un premier temps cantonnés au contrôle local des constructions, la déconstruction dimensionnelle et GII

deviennent peu à peu des critères génériques permettant de juger la validité, et donc déterminent l'interprétation de l'activité géométrique.

i. Dans un premier temps, ces élèves cherchent à construire une forme, et les procédures sont dominées par une géométrie de type GI et la visualisation iconique, parfaitement assumées. (16'12 : *En plus tu l'as fait au hasard! – Oui je l'ai fait au hasard. – Ben tu marques "je l'ai placé au hasard", "On place un point au hasard".*)

ii. Ces élèves s'appuient ensuite sur une déconstruction dimensionnelle du cube qui leur permet des constructions – par exemple une symétrie autour d'une diagonale d'une face. (Figure 9)

iii. Dans un troisième temps, la déconstruction dimensionnelle permet non seulement de contrôler l'usage des primitives de Cabri 3D, mais elle devient aussi critère de validité. On peut ainsi observer une construction tout à fait différente du point de vue instrumental – symétrique du cube par rapport à une face tronquée, puis construction en prenant appui sur ces deux cubes. (Figure 9) Pourtant, la méthode n'est pas jugée « nouvelle » : *Attends attends, parce que je viens d'y penser: le cube ne sert absolument à rien. – Oui j'avoue... On pourrait faire... Mais si, parce que ça passe par ce point là! Ah oui, j'avoue... […] Oui ben en fait tu viens de faire la même chose! – C'est ça, c'est juste que t'as rajouté un cube des deux côtés.* (31'50)Cette considération n'est bien entendu pas liée au processus de construction, mais à la déconstruction dimensionnelle des objets ainsi construits: le cube supplémentaire ne change en rien une construction par incidence, déjà employée.



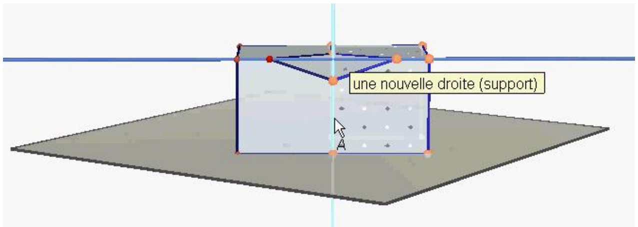


Figure 9 : construction par symétrie d'un point (ii) et symétrie du cube puis incidence (iii)

Dans le cas présent, la déconstruction dimensionnelle ne supplante donc pas la déconstruction instrumentale, mais elle lui offre un contrôle théorique qui permet de la guider, et ancre *de facto* l'activité géométrique dans une géométrie de type GII.

Conclusion

Il apparaît dans cette étude que la possibilité de lire les résultats sur le dessin rend opérantes la visualisation iconique et la référence à une géométrie naturelle, et fonctionne en géométrie comme un obstacle épistémologique. Pour les déstabiliser, la géométrie dans l'espace offre des conditions productives, mais alors la complexité augmente généralement de manière trop brutale, ce qui aboutit à des situations de blocage.

La géométrie dynamique permet de conserver certaines indéterminations visuelles requérant une moindre complexité. Il est alors possible de concevoir des situations pour lesquelles la visualisation iconique peut s'exercer – ce qui s'avère être essentiel – mais seule la déconstruction dimensionnelle permet, s'appuyant sur GII, de proposer des stratégies efficaces.

Duval (2005, p. 4) interrogeait les liens possibles entre les différents mécanismes qu'il décrivait, et posait explicitement la question suivante : *La manière de voir qu'un type d'activité favorise aide-t-elle à rentrer dans les autres manières de voir requises pour les*

autres types d'activité ?
Nous avons finalement apporté une réponse positive en montrant que les situations proposées permettent l'émergence de la déconstruction dimensionnelle selon le schéma de la figure 10.

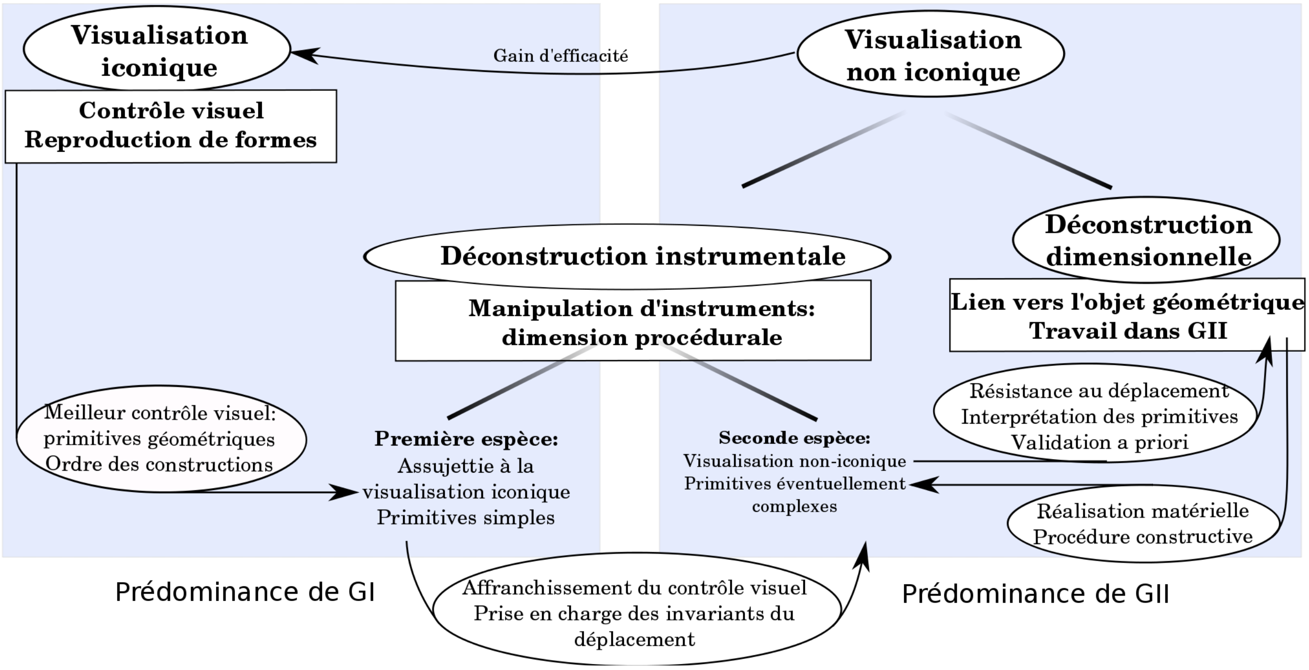


Figure 10 : interactions entre visualisations et rôle des paradigmes

L'environnement informatique joue ici un rôle fondamental dans cette émergence de la déconstruction dimensionnelle, du fait de la variété et de la complexité des instruments dont il permet l'élaboration.
La déconstruction instrumentale s'avère être en réalité un processus complexe dont il faut distinguer deux formes. La première répond à une problématique pratique et permet de pallier les déficiences du seul contrôle visuel – de la visualisation iconique. La seconde existe de manière dialogique avec un travail sur les objets géométriques, définis dans une géométrie axiomatique naturelle. Elle permet des constructions plus élaborées, un plus grand degré d'anticipation, et une source de validité hors de la seule expérience sensible qui n'est plus fiable.

Pour en revenir à notre questionnement initial portant sur la motivation de preuves intellectuelles, il faut enfin interroger le statut de GII et de la déconstruction dimensionnelle. En effet, elles sont apparues dans l'activité des élèves pour la résolution pratique des problèmes, puis pour l'interprétation des consignes et des résultats.
Ceci semble déjà faire signe vers la nécessite de la *démonstration*, puisque la source de validité ne peut se trouver que dans le système axiomatique dans lequel s'inscrivent les objets.
Pour autant, quand bien même l'argumentation employée par les élèves observés s'est généralement enrichie de raisonnements déductifs, il semble que l'activité de construction ne soit pas seule en jeu dans ce processus. Nous avons montré qu'elle a créé des conditions favorables, mais il serait nécessaire d'étudier plus en détail la dimension sociale de ces preuves, c'est-à-dire le rôle du travail en binômes pour franchir le pas qui nous semble séparer la mobilisation de GII et le recours à des preuves intellectuelles.

Bibliographie

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). cKc : modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. *Actes de la XIIIe école d'été de didactique des mathématiques.* La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chaachoua, H. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes.* Grenoble: Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitves , 10*, 5 - 53.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM* , 121 - 138.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives , 11*, 175 - 193.

Jahn, A. P. (1998). *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-Géomètre.* Thèse de l'Université de Grenoble.

Kuzniak, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Proceedings of the First French-Cypriot Conference of Mathematics Education*, (pp. 71 - 89).

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherche en Didactique de Mathématiques* (14(1)), 165 - 210.

Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle.* Thèse de l'Université de Grenoble.

Perrin-Glorian, M.-J. (2010). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. *Actes de la XV e école d'été de didactique des mathématiques.* Clermont-Ferrand: La Pensée Sauvage.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Collin.

Les logiciels tuteurs fermes : institutions d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques ?

Le cas du début du secondaire

Laurent Souchard

Inspecteur de mathématiques et d'informatique

Ministère de l'agriculture

Chercheur associé au LDAR, université de Paris 7 et au CREAS, université de Sherbrooke

laurent.souchard@dbmail.com

Résumé

Pour analyser la place potentielle dans l'École de Logiciels Tuteurs Fermés, LTF, nous avons construit un modèle centré sur la notion d'institution, centrale dans la Théorie Anthropologique du Didactique, définie, par nous, à partir des critères suivants : la réalité sociale, la légitimité, la stabilité et la spécificité. Chacun des quatre logiciels de notre étude a été inspecté entièrement par un expert dont les captures vidéos nous ont permis des comparaisons avec le travail des élèves de notre expérimentation. En ce qui concerne l'apprentissage des mathématiques, nous avons choisi d'analyser la façon dont les quatre LTF proposent un apprentissage du calcul, qu'il soit arithmétique, numérique ou algébrique. Le cadre théorique de Kuzniak pour l'apprentissage de la géométrie a été étendu au numérique et notamment les notions de paradigme et d'espace de travail. Même si les LTF de notre étude ne peuvent que difficilement être utilisés en tant qu'institution autonome de l'institution principale qu'est la classe ordinaire, leur usage peut être valorisé en créant des institutions parallèles adaptées.

Chevallard, Yves, 2003 b, Approche anthropologique du rapport au savoir in Rapport au savoir et didactiques, Fabert, p 81-104.

Kuzniak, A., (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, Premier Colloque Franco-Chypriote de Didactique des Mathématiques, 71-89.

Souchard, L., (2009). Les Logiciels Tuteurs Fermés : institutions d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques ? Le cas du début du secondaire. Thèse de l'Université de Paris 7. (http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00421836/fr/).

L'épistémographie
mise au point d'un outil au service de la didactique

Jean-Philippe **Drouhard**[1, 2]

IUFM Célestin-Freinet, Université de Nice Sophia Antipolis

jpdrouhard@gmail.com

AVERTISSEMENT:

Ce qui suit n'est pas une communication de résultats scientifiques et ne doit pas être considéré comme tel. Il s'agit d'une mise sous la forme d'un texte (assez elliptique), des diapos ayant servi de support à un exposé portant sur l'avancement de mon travail.

Position du problème

Pour faire des mathématiques il ne suffit pas de connaître seulement définitions et théorèmes. C'est une évidence; mais alors, se pose la question de ce qu'il faut savoir d'autre (et de plus). Les différentes théories didactiques apportent chacune, plus ou moins explicitement, et en des termes parfois complètement différents, une réponse à cette question. Nous avons abordé cette question pour elle-même, de telle manière que la réponse ne dépende pas du choix d'un cadre théorique didactique, tout en veillant à ce que les réponses soient compatibles avec les différentes théorisations. Cela nous a amené à développer une typologie des connaissances que nous appelons l'« épistémographie ». Dans cet exposé nous nous centrerons sur les mathématiques.

Démarche

L'épistémographie pose un modèle a priori de l'organisation des connaissances scientifiques et se propose d'analyser, dans les termes de cette organisation, pour un domaine scientifique donné, (appelé « synparadigme ») les connaissances propres à ce domaine. L'épistémographie porte sur l'organisation (synchronique) des savoirs, à la différence de l'épistémologie (Chalmers, 1987) qui porte plutôt sur l'évolution (diachronique) de ces savoirs.

L'épistémographie n'est pas et ne prétend surtout pas être une théorie didactique (de plus!), elle a pour ambition d'être un outil au service de la scientificité des didactiques des disciplines scientifiques (ou plus précisément, des didactiques des composantes scientifiques des disciplines).

Quelle est la nature de l'objet du travail du mathématicien (même apprenti) ? Cette question est l'objet de nombreux débats philosophiques (voir récemment Raymond Duval, 1988 et Maurice

---

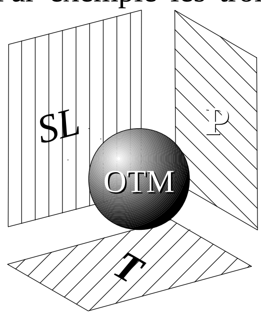
1 Site: https://sites.google.com/site/jeanphilippedrouhard/

2 dans le cadre de la résistance contre une évaluation quantitative de la recherche basée sur un usage imbécile de la bibliométrie, je précise ici la liste des institutions, officielles ou non, labellisées ou non, généreuses ou non, grâce auxquelles, ou parfois malgré lesquelles, cette recherche a pu être menée à bien. Par ordre alphabétique: ADEF (Marseille), ARDM, CEFIEC (Buenos Aires), CESAME (Nice), DIERF (Nice), GECO (Nice), I3DL (Nice), IREM (Nice), IUFM (Nice), OPHRIS (Marseille), UBACyT U003 (Buenos Aires).

Caveing, 2004); mais ce qui est sûr, c'est qu'à ces objets du travail du mathématicien, quels qu'ils soient, sont indissolublement associés des Représentations Sémiotiques (qui peuvent être linguistiques) et des Organisations de Pratiques (surtout calculatoires) au sujet d'Objets mathématiques; le travail lui-même se faisant en suivant un certain nombre de Règles parfois non explicites (mais toujours contraignantes).

Les composantes de l'épistémographie

l'épistémographie est une typologie des connaissances qui postule que les Objets du Travail du Mathématicien présentent (au moins) trois aspects (dimensions) indissociables: une dimension Sémio-Linguistique, une dimension Praxique et une dimension Théorique. Par exemple les trois dimensions de la multiplication sont:

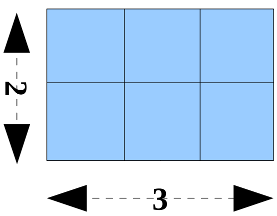


- Sémio-Linguistique: les mots "multiplication", "fois", "par" et les symboles "$^{3}_{2}$" qui l'expriment, mais aussi les tables de multiplication etc.
- Praxique: les algorithmes de multiplication posée, les stratégies de multiplication pensée, l'usage des calculettes, des bouliers, des doigts, des règles à calcul etc.
- Théorique: tout ce que la théorie mathématique dit de la multiplication (qu'elle est commutative, distributive par rapport à l'addition etc.).

Pour pouvoir travailler dans ces trois dimensions, il faut mobiliser pas moins de huit types de connaissances.

1. Les connaissances sémio-linguistiques

Le « langage mathématique » est constitué de langage naturel («deux fois trois»), formel («2×3») et de représentations non linguistiques (Laborde, 1982):



Les connaissances sémio-linguistiques sont celles des registres sémiotiques (Duval, 1995) qui permettent de représenter (et de traiter) les faits et les objets mathématiques. Par exemple, c'est ce qui permet de savoir que "2$^{3}_{2}$*n*" et "2*n*" sont deux écritures équivalentes, non "2$^{3}_{2}$3"et "23". Ces connaissances sont indispensables pour lire, écrire représenter, schématiser, interpréter, communiquer... des documents scientifiques, entre autres parce que, comme le rappelle Raymond Duval, il n'y a pas de noésis sans sémiosis.

2. Les connaissances sémantiques

La relation entre les écritures et les objets (ou les états de fait) mathématiques que ces écritures sont censées représenter, autrement dit la sémantique du langage mathématique, est beaucoup plus difficile à décrire qu'une analyse superficielle ne pourrait le laisser penser. Gottlob Frege (1892) en a posé les bases avec la distinction sens/dénotation.

La *dénotation* de l'expression «2×3» est le nombre 6 (qui est également la dénotation des expressions « 3+3 » et « 6 »); celle de «2×3 = 5» est une valeur de vérité (ici, Faux); celle de « *ab* » est la fonction numérique qui à tout couple de nombres réels associe leur produit, et celle de « $2x = 4$ » est la fonction booléenne qui à 2 associe la valeur Vrai et à tout autre nombre réel associe la valeur Faux. Le *sens* de ces écritures, qui indique comment on obtient leur dénotation, peut être assimilé à un programme de calcul (Drouhard, 1995).

3. Les connaissances notionnelles

Les connaissances notionnelles sont celles des propriétés d'ordre théorique des objets mathématiques: par exemple, que la multiplication est commutative. Les connaissances notionnelles sont indépendantes du registre de représentation sémiotique utilisé (français chinois, langage formel…), et leur énoncé, factuel, est dépourvu de quelque indication de finalité que ce soit.

4. Les connaissances instrumentales

Les connaissances instrumentales sont celles qui sont mobilisées pour l'emploi des instruments (calculette, doigts, abaques, bouliers, calcul posé...). Elles ont une finalité liée à la praxis. Les méta-connaissances telles que les stratégies sont des connaissances instrumentales.

Les connaissances instrumentales se distinguent des connaissances notionnelles en ce que leur énoncé mentionne un but, une finalité. Leur formulation est plus ou moins équivalente à un énoncé du type : « pour faire ceci il faut » (ou : « on a intérêt à » ou : « mieux vaut éviter de » etc.) « faire cela. »; ces formulations renvoient aux catégories du possible et de l'impossible (ou aux graduations du type: utile, facile, difficile...)

5. Les connaissances pragmatiques

Les connaissances pragmatiques sont celles qui consistent à utiliser les traitements des représentations sémiotiques (des « signes » dans le vocabulaire de Vygotsky, 1985) comme instruments. Par exemple: Pour multiplier par 10 un nombre entier il suffit d'ajouter un "0" à son écriture décimale. Le mot « pragmatique » dérive ici de son emploi en linguistique où ce mot désigne l'étude de la langue (système de représentation sémiotique) du point de vue de ses effets (praxis).

6. Les connaissances pratiques

Les connaissances « pratiques » sont celles de l'usage instrumental des notions mathématiques (propriétés), par exemple le fait qu'on peut utiliser la distributivité de la multiplication (connaissance notionnelle) pour effectuer le calcul ("de tête") de $3^{3}_{2}124$. On retrouve ici la complémentarité Outil-Objet (Douady, 1986).

7. Les connaissances nomologiques

Les connaissances nomologiques sont celles des règles, de validité logique, de correction sémiotique, d'usage légitime des instruments (sur ce dernier point voir Balacheff, 2003). Exemple: quand est-ce que le résultat d'une multiplication à la calculette est acceptable et quand est-ce qu'il ne l'est pas? De même, quand est-ce qu'on peut utiliser la règle graduée pour déterminer que deux segments ont même longueur, et quand doit-on l'établir à partir des propriétés de la figure (sans utiliser la règle) ? Ce dernier point est lié à la question de ce que Houdement, Kuzniak et Parzysz (2006) appellent les paradigmes (et que nous préférons nommer « synparadigmes » pour les distinguer de ceux de Kuhn, 1983).

La difficulté propre aux règles du jeu est double: il faut les connaître, mais aussi accepter de les suivre (Wittgenstein 1995, Bouveresse 1987), ce qui peut poser des problèmes particulièrement ardus dans le cas d'élèves qui justement rechignent à suivre les règles de l'école (Giroux, 2008).

Leur formulation est plus ou moins équivalente à un énoncé du type : « pour faire ceci on doit » (ou : « on a le droit de » ou : « on ne peut pas » etc.) « faire cela. »; ces formulations renvoient aux catégories de l'autorisé et de l'interdit (ou aux graduations du type: toléré, acceptable...).

8. Identifiants

les connaissances identificatoires sont celles qui permettent l'identification et la catégorisation des objets ("tu vois, là, ce que tu viens de faire, c'est une multiplication!"). C'est ce qui permet d'identifier (d'apposer un nom) et de catégoriser. Les définitions jouent un rôle dans la (re)connaissance des objets (la « multiplication »), mais aussi des instruments (« la factorisation »). Dans Assude et al., nous avons présenté l'« effet Rain Man »: dans le film *Rain Man*, Charlie, le frère du héros éponyme autiste (Raymond) essaye, à la demande de ce dernier, de lui apprendre à danser. À la fin de sa leçon de danse, Charlie termine en disant à Raymond: "*This is dancing*". Autrement dit, nommer ce qui a été appris fait partie de l'apprentissage, le nom du savoir fait partie du savoir.
Dans ce cas il ne s'agit pas d'un effet Jourdain (Brousseau) bien que ça puisse y ressembler, car il ne s'agit pas ici de plaquer un nom sur une absence de connaissance (ou une connaissance non visée) mais au contraire d'associer un nom à une connaissance visée et, au moins dans la mesure du contrat, acquise.

Une précision pour terminer

Précisons que les composantes sont propres à l'analyse, pas à l'objet même de l'analyse. Ce sont des catégories descriptives de l'objet (de nature épistémologique) : « ce qu'il faut savoir pour faire des mathématiques », ce ne sont pas des catégories cognitives (au sens où cela correspondrait à des sortes de modules indépendants) et encore moins des catégories didactiques (au sens où il faudrait enseigner ces connaissances indépendamment les unes des autres)

Quelques indications bibliographiques

Balacheff, N. (2003). cK¢ Modèle des connaissance pour le calcul de situation didactiques. *Ecole d'été de Didactique des mathématiques. Corps*. (cours rédigé avec l'aide de Claire Margolinas, in Mercier A. & Margolinas C. (eds.) *Balises pour la didactique des mathématiques* (2005) pp. 1-32)

Bouveresse, J. (1987). *La force de la règle, Wittgenstein et l'invention de la nécessité,* Paris : Minuit.

Caveing, M. (2004). *Le problème des objets dans la pensée mathématique.* Paris: Vrin.

Chalmers, A. (1987). *Qu'est-ce que la science ? : Popper, Kuhn, Lakatos, Feyerabend.* Paris: Le Livre de Poche.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *RDM. 7*(2). 5-32.

Drouhard, J-Ph. (1995). Algèbre, calcul symbolique et didactique. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Dir.), *Actes 8ème École d'Été de Didactique des Mathématiques.* Clermont-Ferrand: IREM.

Duval, R. (1988). Signe et objet I et II *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **6** (pp. 139-163 ;165-196) IREM de Strasbourg

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 5, pp. 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (ReLIME)*. Volumen 9 Número Especial. pp. 45-81. http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33509904.pdf

Frege, G. (1892, 1971). *Ecrits logiques et Philosophiques*, Cl. Imbert (Trad.), Paris: Le Seuil.

Giroux J. (2008). Conduites atypiques d'élèves du primaire en difficulté d'apprentissage. *RDM* 28/1, pp. 9-62.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11. p. 175 - 193.

Kuhn, T. (1983). *La Structure des révolutions scientifiques*. Paris : Flammarion.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse d'État. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Maurel, M., & Sackur, C. (2010). *Faire L'expérience des Mathématiques, entre Enseignement et Recherche*. Lyon: Aléas.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J-Ph., Paquelier, Y. (2005) : L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25* (1), 57-90.

Vygotsky, L. S. (1985). *Pensée et langage*. Éditions sociales.

Wittgenstein, L. (1995). *De la Certitude*. Paris : Gallimard.

La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession

Mirène **LARGUIER**

IUFM de Montpellier Université Montpellier2
mirene.larguier@montpellier.iufm.fr

Résumé

Le travail présenté fait partie d'une recherche en thèse dont la visée est de mettre au jour les conditions et les contraintes qui pèsent sur l'enseignement du numérique (au sens d'enseignement relatif aux nombres) en classe de seconde. Elle a plus spécifiquement comme objectif de repérer, décrire et analyser les *gestes professionnels de reprise* (Larguier, 2005) du numérique nécessaires pour assurer la continuité des enseignements du collège au lycée. Cette recherche s'inscrit dans le cadre de *l'observatoire des pratiques sur le numérique* initié par Bronner (2007). La méthodologie de type clinique, s'appuie sur les données recueillies dans deux classes en 2006-2007 et 2007-2008 tout au long de l'année scolaire. La recherche a mis en évidence des *reprises évitées*, possibles cependant sous les contraintes curriculaires, qui constituent des conditions pour poursuivre une étude du numérique plus adéquate du point de vue épistémologique et plus efficiente du point de vue des apprentissages. L'enseignement du numérique apparait en seconde comme un *problème de la profession* (Cirade, 2006) de professeur de mathématiques qui semble non identifié, voire sous-estimé.

Mots clés

Numérique – Reprise – Praxéologie – Problème de la profession – Geste professionnel

1. Présentation du problème à l'origine d'un travail de thèse

1.1. Introduction

Ce texte présente une partie d'une recherche en thèse sous la direction d'Alain Bronner (thèse soutenue en novembre 2009) qui s'inscrit dans le cadre de la didactique au sens de Yves Chevallard (2009) :

> […] la didactique est la science des conditions et contraintes de la diffusion sociale – auprès des personnes et des institutions – des praxéologies. Cette définition appellerait de multiples commentaires et précisions, mais je me limiterai d'abord à éclaircir la distinction faite entre « conditions » et « contraintes ». En principe, tout est condition ; mais on dira qu'une condition est une contrainte pour une certaine instance U – une personne ou une institution – lorsque U ne peut, vu l'ensemble des autres conditions régnantes, espérer raisonnablement, pour une certaine période de temps, pouvoir modifier cette condition. Pour le dire autrement, une contrainte pour U est une condition non modifiable par U. Les conditions qui n'apparaissent pas comme des contraintes seront appelées des conditions, tout court, ou, pour écarter toute ambiguïté, des conditions modifiables (par U).

Je reprends cette importante distinction entre contraintes et conditions dans mon travail de recherche. Le contexte de l'étude est le curriculum réel de l'enseignement du domaine numérique en classe de seconde des années scolaires 2006-2007 et 2007-2008. Le programme de seconde dont il est question dans ce texte est celui du BO HS n°06 du 12 / 08 / 99 applicable en septembre 1999 jusqu'au changement de programme intervenu en septembre 2009.

1.2. Le problème étudié

Le point de départ du questionnement est cette prescription du curriculum officiel de seconde :

> Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions.

J'ai interrogé des professeurs au sujet de la demande précédente et voici deux réponses (Larguier, 2005) qui reflètent deux profils différents de professeurs.

André est un professeur expérimenté, il a été interrogé le 19 octobre 2004 :

> Sur les nombres et calculs j'ai commencé un premier chapitre de la progression qui ne demande pas énormément de choses mais qui permet de revoir beaucoup de techniques dont ils auront besoin. C'est un chapitre de mise en place […]. À la fois c'est un chapitre dans lequel il n'y a pas énormément de compréhension, il n'y a pas de concept nouveau, pas de grande nouveauté et ça permet de reprendre des opérations de base pour aller à la suite.

André exprime une norme qui pourrait se dire ainsi : « Il faut commencer par reprendre les bases du collège avant d'aborder les nouveautés ». Antoine, interrogé le 21 octobre 2004, est un professeur expert, formateur en IUFM, membre de diverses commissions :

> C'est un chapitre délicat [sur le numérique et l'algébrique], puisque tu sais que le gros défaut sur lequel on essaie de lutter c'est les révisions systématiques et tu as des mômes qui font des identités en veux tu en voilà puis de toute façon un mois après ils en ont une dans le problème ils ne la verront pas. On sait que ça sert pas à grand chose et puis ces révisions systématiques lassent les élèves. […] J'ai l'impression que c'est un peu comme la musique. C'est-à-dire que l'élève entend la musique mais c'est tout. Il a un air dans la tête mais il ne l'a pas intégré.

Antoine fait entendre la voix de la noosphère : « il faut lutter contre les révisions systématiques ».

Ces premiers résultats d'enquête ont permis d'exprimer une question cardinale : quelles sont les conditions et les contraintes véritables de l'enseignement du numérique tout au long de la classe de seconde dans une perspective de reprise et de continuité entre ancien et nouveau ?

Cette question nécessite une délimitation du numérique en classe de seconde, domaine mathématique dont le contour n'est pas facile à définir :

> D'un point de vue formel, les règles qui régissent le calcul numérique (comme le calcul algébrique d'ailleurs) ainsi que les transformations des écritures des nombres sont des règles algébriques qui assurent la généralité grâce à l'une des fonctions essentielle de l'algèbre identifiée notamment par Chevallard (1984) puis par Grugeon (1995). Il s'agit de l '« utilisation de l'outil algébrique pour généraliser » (Grugeon, 1995) ce type de traitement algébrique étant mis en œuvre en particulier pour « exprimer une propriété numérique générale » (Ibid.). Le contour du numérique est difficile à cerner puisque d'un point de vue théorique les règles qui permettent le travail mathématique de calcul et de transformation des nombres sont de nature algébrique (Bronner, 2007).

A. Bronner, après B. Grugeon, souligne la nécessaire articulation entre les domaines numériques et algébriques, ce qu'il dénomme le NAA, articulation que je reprends pour cette étude de l'enseignement du numérique en classe de seconde.

1.3. Les objectifs de la recherche

Trois objectifs majeurs sont visés :

- participer à l'observatoire du numérique initié par Bronner (2007) ;
- décrire l'enseignement du « numérique tel qu'on l'enseigne » en classe de seconde
  - sur toute l'année scolaire ;
  - avec une vigilance particulière pour les *reprises* (Larguier, 2005) ;
- analyser les gestes professionnels des enseignants, au sens de Bronner & Larguier (2004) en lien avec les apprentissages.

La finalité est de repérer des *problèmes de la profession* de professeur de mathématiques au sens de Chevallard (2007) en donnant au concept de *profession* un sens très spécifique :

> […] la profession, en entendant par cette expression l'ensemble des acteurs de l'enseignement des mathématiques, « de la maternelle à l'université », c'est-à-dire non seulement les professeurs eux-mêmes, et en particulier les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire, qui forment le gros de la troupe, ainsi que leurs militants associatifs ou syndicaux, mais aussi les formateurs de professeurs, les inspecteurs et les responsables ministériels de l'enseignement des mathématiques, et encore les chercheurs sur l'enseignement des mathématiques (bref la « noosphère lato sensu » moins les « noosphériens » éphémères).

Partant de cette définition, Chevallard (Ibid.) définit un autre concept en parlant des *problèmes de la profession* :

> […] rencontrés dans l'exercice même du métier de professeur ou identifiés par l'observation et l'analyse des conditions et des contraintes de ce métier et reconnus par au moins une partie de la profession comme des problèmes, c'est-à-dire comme des difficultés objectives (même si elles sont d'abord subjectivement éprouvées), dignes de la mobilisation collective de certaines ressources de la profession.

2. Les hypothèses de la recherche

En cohérence avec ces définitions, la question cardinale a été étudiée dans deux classes de seconde et a donné lieu à quatre hypothèses :

H1 : Le geste professionnel de reprise, un geste très délicat.

Les gestes professionnels de reprise du numérique sont des gestes très délicats pour les professeurs de seconde car deux logiques différentes se heurtent à leur sujet. La logique des concepteurs des programmes, jugée irréaliste par les professeurs, et la logique des professeurs confrontés au réel de leur classe, logique qui se traduit dans des normes du métier.

H2 : La variabilité relative à l'enseignement du numérique.

Pour un même enseignant les gestes professionnels d'enseignement du numérique sont variables en fonction de divers paramètres qui peuvent être en particulier la période d'enseignement, le caractère ancien ou nouveau des objets enseignés. Cette variabilité pour un enseignant donné devrait se retrouver en comparant deux enseignants.

H3 : L'incomplétude des praxéologies.

Les praxéologies mathématiques à la disposition des élèves au terme d'un processus d'institutionnalisation sont souvent incomplètes. Cette incomplétude est accentuée dans le cas de reprises de savoirs du collège, mais elle existe également pour des objets nouveaux de seconde. C'est le rapport personnel des élèves à l'activité mathématique qui risque alors d'être non conforme aux nécessités épistémologiques de la discipline.

H4 : Un problème de la profession.

L'enseignement du numérique en classe de seconde doit être considéré comme un problème posé à la profession de professeur de mathématiques. Ce problème se traduit notamment par de nombreux rendez-vous manqués avec des possibilités de reprises sous la forme de poursuites d'étude qui auraient été nécessaires pour construire des apprentissages solides.

3. Le cadre théorique

3.1. Les ancrages théoriques

Trois appuis théoriques principaux ont servi pour élaborer le cadre théorique. Il s'agit en premier lieu de la théorie anthropologique du didactique, en particulier l'échelle des niveaux de détermination didactique et la notion de praxéologie.
En ce qui concerne l'étude du domaine numérique, j'ai déjà cité les travaux d'A. Bronner (1997, 2007), et cette recherche s'inscrit dans l'ensemble des travaux qu'il coordonne sur ce sujet au sein de ce qu'il appelle l'*observatoire du numérique*. Je reprends notamment le concept d'idécimalité (Bronner, 1997), l'opposition décimal/idécimal plutôt que rationnel/irrationnel (Ibid.), et un outil : le *filtre du numérique* (Bronner, 2007) présenté dans la figure 1.

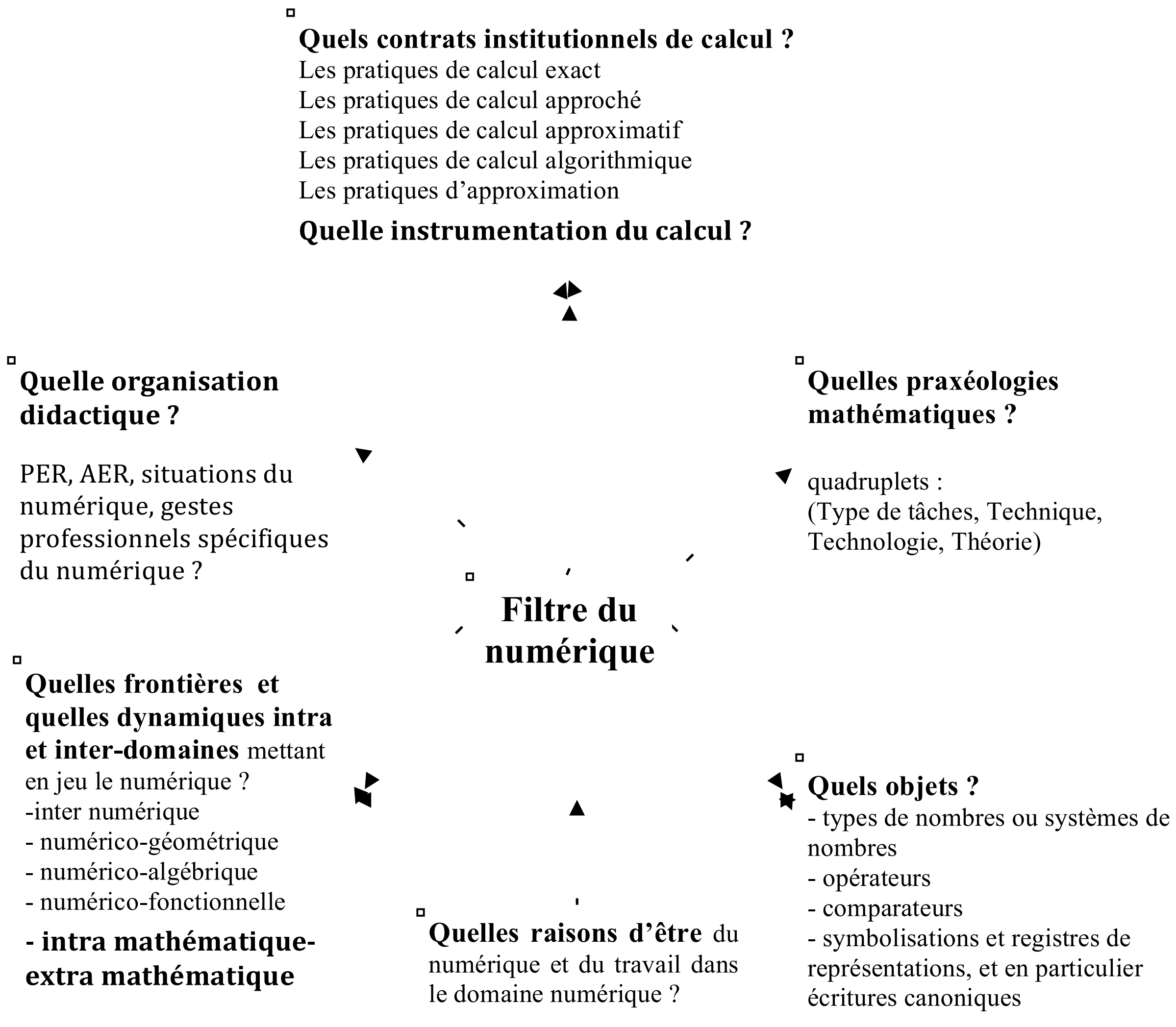


Figure 1 : le filtre du numérique (Bronner, 2007)

Le troisième appui de ce cadre théorique est la théorie des situations didactiques pour décrire et analyser les situations didactiques et pour identifier l'évolution des statuts des connaissances : décor didactique, modèle implicite, connaissance formulée, connaissance structurée, connaissance institutionnalisée (Brousseau & Centeno, 1991).

3.2. La notion de reprise

J'ai cité précédemment une prescription du curriculum officiel visant à lutter contre les révisions systématiques ; mais qu'est-ce qui peut vivre à la place de ces révisions ? Cette question a été abordée par Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1992) qui a défini des situations de rappel et l'institutionnalisation après-coup ; par Yves Matheron (2000) dans sa thèse sur la mémoire didactique et également par G. Brousseau (1998) et Y. Chevallard (2002) qui ont défini des situations de reprise. J'ai élaboré une définition de la notion de *reprise* (Larguier, 2005, 2009) opérationnelle pour cette recherche dans le contexte de l'enseignement du numérique en seconde :

> Lorsqu'un thème du numérique a déjà été en partie enseigné, soit au collège soit lors d'une rencontre précédente en seconde, j'appelle reprise du numérique le moment de l'enseignement où ce thème, ou bien des sujets liés à ce thème, interviennent de nouveau et sont actualisés dans des thèmes de l'enseignement de cette classe. La reprise se situe donc au moment d'une nouvelle mise en scène de savoirs déjà institutionnalisés auparavant (Larguier, 2009).

4. La méthodologie

4.1. Une recherche de type clinique

Cette recherche est une *étude clinique* (Chevallard, 2008), fondée sur une observation directe, que ce soit des personnes (professeurs et élèves) ou des traces écrites du travail des classes concernées. Cela suppose des conditions nécessaires :

- la tolérance du professeur observé qui ouvre sa classe ;
- la neutralité bienveillante du chercheur ;
- la prise de conscience du chercheur de ne pas être dans le même déroulement temporel ni « avoir la même situation », comme le dit Claire Margolinas (2004), que le professeur.

Cette étude clinique repose sur l'observation de deux classes « normales » de seconde dans le même lycée de la périphérie de Montpellier. C'est la classe de Mathieu en 2006-2007, classe de 36 élèves avec les options sciences et SES (sciences économiques et sociales), et la classe de Clotilde en 2007-2008, classe de 32 élèves, options SES et MPI (mesures physiques et informatique). Ces deux classes sont considérées comme étant très bonnes par leurs professeurs. Mathieu, a une cinquantaine d'années, il est depuis une dizaine d'années en lycée ; quant à Clotilde, elle a une trentaine d'années, est en lycée pour la deuxième année consécutive après avoir enseigné cinq ans en collège. Les professeurs ne connaissent que cette intention du chercheur d'après un courrier envoyé à tous les professeurs de mathématiques de leur lycée : « Je m'intéresse à l'enseignement des mathématiques en classe de seconde et je voudrais pouvoir suivre aussi bien l'enseignement par le professeur, que les apprentissages du côté des élèves. » Les observations dans ces deux classes pendant toute l'année scolaire, se sont traduites par 19 observations de séances chez Mathieu et 14 chez Clotilde. Cette présence très importante du chercheur et sa posture de neutralité ne sont pas faciles à accepter pour le professeur, en voici un témoignage de la part de Mathieu lors d'un entretien le 5 juin 2007 :

> Le fait que tu sois là tout le temps, comme quoi pas tout le temps, que tu sois là, ou que tu regardes, que tu participes… ça reste quand même perturbant. … Parce que bon elle m'a

dit qu'elle me regardait fonctionner ok. Mais derrière ça t'as un avis… t'as une méthode, t'es prof …T'as aussi une pratique, et forcément elle vient en accord ou en désaccord avec ce que je fais…donc y a un jugement qui est porté…Et ça c'est gênant… C'est gênant d'autant plus que tu me donnes pas ton avis…

Pour répondre à une attente légitime du professeur observé en échange de l'ouverture de sa classe, le recueil de données est limité dans le temps entre le début de l'année scolaire et fin mai. À partir de cette date un retour est fait au professeur observé pour qu'il puisse avoir un bénéfice en échange de son accord. C'est la raison de l'entretien du 5 juin avec Mathieu en dehors des contraintes de la recherche.

4.2. Les données recueillies

Le recueil d'un maximum de données a permis d'établir un « documentaire didactique » grâce à un important corpus clinique avec deux objectifs essentiels : suivre le fil numérique et croiser les analyses de données multiples. Ces données sont d'une part dynamiques :

- observations directes de séances filmées ou non (Mathieu : 19/Clotilde : 14) ;
- des entretiens avec les professeurs (sans dévoiler les questions de recherche) ;
- des entretiens avec des élèves et des questions écrites à ces élèves.

Ces données sont d'autre part statiques avec le recueil de toutes les traces écrites par les élèves sur toute l'année scolaire (cahiers de cours et d'exercices, tous les devoirs à la maison et en classe).

4.3. La technique du carottage[1]

Le recueil des données dynamiques, au fil des séances observées, peut être appréhendé par le schéma suivant :

Reprise scolaire							…..	**Moment « normal »**					…..
S_1	S_2	$\mathbf{S_3}$	S_4	S_5	S_6	$\mathbf{S_7}$	…..	S_n	S_{n+1}	$\mathbf{S_{n+2}}$	S_{n+3}	S_{n+4}	……

J'appelle reprise scolaire la période entre la rentrée de septembre et les vacances de la Toussaint. Certaines séances, comme par exemple S_3, S_7 ou S_{n+2}, sont observées et parfois filmées. Les données de la *reprise scolaire* sont comparées à des données similaires obtenues dans un moment d'enseignement dit « normal » (qui n'est pas situé lors de la *reprise scolaire*). Le choix des séances observées résulte parfois seulement de la disponibilité du chercheur qui ne connait pas en général le contenu qui va être enseigné. Il s'agit alors de recueillir des *carottes*, comme cela se fait en géologie, pour reconnaitre un *filon* intéressant pour l'étude. Il est évident que la nature du thème étudié, le numérique, permet cette méthodologie puisque le numérique est presque toujours présent dans les différents domaines du programmes de seconde. Cette méthode a permis l'étude de deux filons particulièrement riches du point de vue numérique : la séquence relative à la valeur absolue et la séquence sur la trigonométrie, qui ont pu être observées en grande partie dans les deux classes. Par ailleurs un autre filon n'a pu être travaillé qu'à partir des données statiques, mais il est essentiel au regard du sujet, c'est la séquence sur les ensembles de nombres.

4.4. Description de la méthodologie globale

La méthodologie suivie suppose une certaine posture du chercheur que je vais appuyer sur

[1]« Le carottage est une technique de prélèvement d'échantillons qui consiste à forer un substrat à l'aide d'une tarière pour obtenir un cylindre de matière. L'analyse de la stratification de ce cylindre permet alors de reconstituer la nature d'un sol (carotte de sédiments), une chronologie (carotte de bois) ou encore la composition de l'atmosphère du passé (carotte de glace). ».
http://www.futura-sciences.com/fr/definition/t/climatologie-2/d/carottage_6165/

une définition de la didactique par G. Brousseau (2003) :

> Comme l'économie, la didactique tend à remplir deux fonctions sociales : une fonction de science explicative des faits observés, et une fonction normative où elle s'interroge sur le meilleur moyen d'organiser des conditions favorables à la diffusion qu'elle étudie.

Dans cette recherche, une posture est assumée, conformément à la définition précédente, pour pouvoir dire : voilà **ce qui est** sous les conditions et les contraintes observées et voilà **ce qui aurait pu exister** en modifiant certaines conditions.

Le protocole suivi pour la méthodologie comprend plusieurs phases qui vont être décrites ci-dessous. Ces différentes phases sont nécessairement dépendantes de la phase 0 qui est le point de départ : c'est la phase d'observation dans les classes (ou à défaut la prise en compte des traces écrites). Les autres phases ne sont pas toujours suivies selon l'ordre numérique de présentation.

Phase 0 : C'est l'observation dans les classes qui permet l'accès aux connaissances enseignées sans aucune interaction préalable entre le professeur et le chercheur. Les dates des visites du chercheur dans les classes ont été décidées avec le professeur observé sans avoir connaissance des contenus enseignés. Le thème de la recherche, à savoir le numérique, a permis ce « carottage » puisqu'il existe très peu de thèmes du programme qui ne soient pas liés au numérique.

Phase 1 : À partir des éléments révélés dans la dynamique de l'enseignement, est élaborée une analyse *a priori* ascendante. Elle s'appuie sur les activités et les tâches choisies par le professeur et véritablement observées (ou recueillies grâce aux cahiers des élèves) sans aucune modification de la trame effective de la séance. Cette analyse a priori prend en compte les acquis antérieurs des élèves, la *mémoire didactique* de la classe (Brousseau et Centeno, 1991) et la conformité avec le curriculum officiel. Elle définit donc le potentiel de l'organisation mathématique et en conséquence les praxéologies mathématiques possibles à ce moment de l'histoire de la classe observée.

Phase 2 : À partir du recueil des données effectives (observées directement ou recueillies dans les traces écrites) une analyse *a posteriori* de l'organisation mathématique construite est élaborée par le chercheur. Ainsi pour une tâche donnée aux élèves, telle technique est observée dans la classe avec des éléments technologico-théoriques présents ou non. La praxéologie ainsi développée est analysée en termes de complétude, d'efficacité, … en comparaison avec les praxéologies possibles identifiées dans la phase précédente.

Phase 3 : L'analyse a posteriori porte également sur les apprentissages à partir des productions écrites des élèves (cahiers, devoirs, tests proposés par le chercheur) et des productions orales enregistrées en classe ou lors d'entretiens. Les gestes professionnels des enseignants et les gestes d'étude des élèves sont corrélés pour analyser les effets de l'enseignement sur les apprentissages.

Phase 4 : Deux sortes d'entretiens ont eu lieu pour cette recherche, avec les professeurs et avec trois élèves de chaque classe choisis par le professeur comme étant sérieux et représentatifs des différents niveaux. La trame de ces entretiens a été précisément pensée a priori pour ne pas dévoiler l'objectif de la recherche relative au numérique. Du côté des professeurs ils servent à identifier des éléments technologiques des gestes professionnels des enseignants, et du côté des élèves ils permettent de révéler des conceptions sur certaines notions. Leur fonction est principalement de compléter des analyses déjà développées avec d'autres données.

5. Analyse d'un geste professionnel de programmation annuelle

Le travail du professeur peut se décrire en types de tâches modélisables par une praxéologie (Bronner & Larguier, 2004) dont voici un exemple pour le type de tâches suivant : programmer l'enseignement des mathématiques sur l'année scolaire de seconde. Le tableau 1 permet de comparer les choix des deux professeurs pour programmer l'enseignement pendant la période de la reprise scolaire.

Pour Mathieu, comme l'atteste des cahiers d'élèves à la date du 9 septembre 2006, une technique pour commencer la programmation est de faire des reprises du numérique sous la forme de révisions systématiques sans aucun lien avec des nouveautés du programme de seconde. Le titre « techniques de base » annonce bien cette intention. Un élément technologique pour justifier cette technique est donné par Mathieu lors d'un entretien le 6 décembre 2006 :

> Je trouve que ça fonctionne bien [le premier chapitre], oui. C'est une manière de raccrocher sur ce qu'ils ont fait, c'est une manière pour moi de travailler tout ce qu'ils ne savent pas faire.

Clotilde utilise une autre technique : elle aborde le programme avec les ensembles de nombres et en conséquence une nouveauté du programme, puis elle enchaîne avec des reprises sous la forme de révisions de notions sur « les écritures des nombres » dans le cadre numérique. Cependant l'interprétation de ce qui est désigné par « écritures des nombres » est étonnante. Il s'agit probablement d'un effet visuel de la présentation du programme, avec la mise en regard sur la même ligne du contenu « Nature et écriture des nombres » et de la capacité attendue « Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées ». Clotilde, comme Mathieu, justifie ce début de progression lors d'un entretien le 6 décembre 2007 :

> Moi je trouve qu'il n'y a pas beaucoup de questions sur la progression de seconde, ça va se passer assez naturellement

<table>
<tr><th>Mathieu[2]</th><th>Clotilde[3]</th></tr>
<tr><td>Chapitre I - Activités numériques
I – Techniques de base
1°) Opérations sur les fractions
2°) Développements
3°) Puissance d'un nombre
4°) Racine carrée
5°) Méthode : comment démontrer une égalité ?
6°) Factoriser
II – Ensembles de nombres
III – Equations du premier degré à une inconnue
IV – Arithmétique
Chapitre II -Intervalles de ℝ
I – Inéquations
II – Intervalles
III – Valeur absolue</td><td>Chapitre I - Calcul numérique et algébrique
I – Les ensembles de nombres
II – Les différentes écritures
1°) Valeur exacte et valeur approchée
2°) Notation scientifique. Ordre de grandeur
3°) Ordre de priorité dans le calcul numérique
III – Rappel sur les puissances
IV – Développer et factoriser
V – Rappels sur les racines carrées
VI – Arithmétique et nombres premiers
Chapitre II – Géométrie plane
Chapitre III – Intervalles et valeur absolue
I – Intervalles de R
II – Application des intervalles aux inéquations
III – Valeur absolue</td></tr>
</table>

Tableau 1 : progressions de Mathieu et de Clotilde pour la reprise scolaire

[2] Mathieu ne donne jamais de cours polycopié, tout est écrit par le professeur au tableau et les élèves recopient.
[3] Les parties grisées correspondent à des cours donnés sur polycopiés et que les élèves ont en partie complétés.

Un autre élément technologique, qui est vraisemblablement un appui pour les deux professeurs, est la conformité au découpage du programme et à son écriture, nous avons là une condition au niveau de la discipline que les professeurs vivent peut-être en contrainte. Cependant ils s'affranchissent de l'influence de l'ordre d'écriture des programmes en ce qui concerne le domaine de la statistique. En effet le programme présente en premier ce domaine, mais cela n'incite ni Mathieu ni Clotilde à commencer par cette séquence.

Le premier chapitre des deux professeurs contient les ensembles de nombres, et c'est là le premier filon exploré comme étant le socle nécessaire du domaine numérique. Voici la demande exprimée dans le document d'accompagnement des programmes paru en juin 2000 :

> On fera une synthèse des connaissances rencontrées jusque là [au collège] par les élèves et on introduira les notations usuelles des différents ensembles. Les élèves devront savoir reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés.

Dans le curriculum réel, observable dans les classes de Mathieu et de Clotilde comme dans la plupart des manuels[4], l'essentiel est l'introduction des dénominations des ensembles de nombres. Ces désignations apparaissent comme la nouveauté caractérisant l'entrée officielle dans le programme de seconde. Cependant la synthèse sur les nombres prescrite par le curriculum officiel n'apparait pas et elle est laissée dans le topos de l'élève. Je repère là une reprise manquée attestant de la difficulté de ces gestes de reprise conformément à la première hypothèse de la recherche.

Pourtant une des raisons d'être de la dénomination des ensembles de nombres est d'avoir enfin les concepts et les mots pour indiquer les ensembles d'appartenance des indéterminées figurant dans une identité, des inconnues dans une équation, etc. Ainsi il existe une occasion de faire une reprise faisant avancer le temps didactique en lien avec du nouveau en indiquant le domaine de validité d'un énoncé comme dans l'exemple suivant :

Quels que soient les réels a, b et c on a a(b+c)=ab+ac

Mais cette raison d'être est négligée dans le savoir enseigné chez Mathieu et Clotilde et les règles des domaines numérique et algébrique sont rappelées sans aucune précision ni sur la nature des nombres concernés ni sur le domaine de validité des règles.

6. Un type de tâches emblématique du numérique

Je vais m'intéresser à un type de tâches que j'ai identifié comme étant emblématique du numérique. Il s'agit du type de tâches désigné par T : « déterminer la nature d'un nombre ». Il est inscrit dans le programme officiel. En effet dans le domaine « Calculs et fonctions » le premier objectif du programme est : « Approfondir la connaissance des différents types de nombres » et dans le document d'accompagnement il est précisé que : « Les élèves devront savoir reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés. ». J'ai suivi ce fil numérique tout au long de l'année scolaire en traquant les occurrences de T.

6.1. Le type de tâches T lors de la reprise scolaire

De nombreux spécimens de T sont travaillés dans le premier chapitre pour les deux professeurs. Voici par exemple des traces de ce travail trouvées dans le cahier des élèves de Clotilde :

$\sqrt{18}$ irrationnel

$\frac{1}{3}$ rationnel

La praxéologie ponctuelle écrite dans le cahier de l'élève est incomplète : des éléments du

[4] Une dizaine de manuels parus en 2004 ont été analysés, un seul commence par les statistiques, tous les autres commencent leur progression par les ensembles de nombres et leur dénomination.

bloc technologico-théorique sont absents. Cet exemple est représentatif des traces écrites repérées dans les cahiers d'élèves dans les deux classes et illustre l'hypothèse 3 sur l'incomplétude des praxéologies institutionnalisées. Par ailleurs, dans les classes observées, T est immotivée (Chevallard, 2000). Ces deux extraits d'un cahier d'élève de Clotilde en donnent encore la preuve :

Exercice n°10. En utilisant le signe et les symboles N, Z, Q et R, écrire à quels ensembles appartiennent les nombres ci-dessous.
1) -2 ; $7{,}5$ **2)** $\frac{10}{4}$; $-\frac{7}{3}$ **3)** 0 ; $\sqrt{0}$ **4)** $\frac{0}{5}$; $-\sqrt{1}$ **5)** $\sqrt{3}$; $-\frac{1}{\pi}$

Figure 4 : extrait d'un cahier d'exercice chez Clotilde

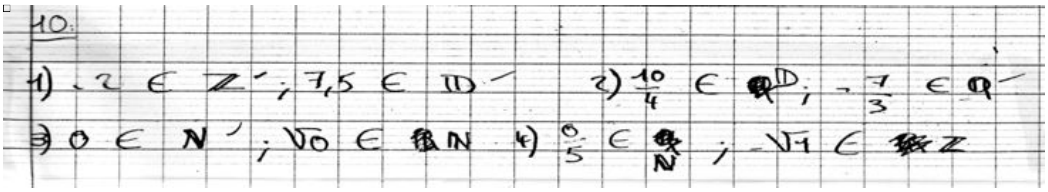


Figure 5 : extrait d'un cahier d'exercice chez Clotilde, réponse à l'exercice 10

Est-ce que la praxéologie a été développée oralement ? Est-ce que Clotilde s'est contentée de l'assentiment des élèves aux réponses exactes données ? Les traces du cahier montrent que l'élève avait interprété la nature du nombre en fonction de son registre d'écriture : une écriture fractionnaire indique un rationnel, la présence du symbole de la racine carrée indique un réel, la présence d'une virgule indique un décimal. La confusion entre un objet mathématique et l'une de ses représentations sémiotiques est une erreur bien connue (Duval, 1995).
L'analyse a priori, développée à partir de la connaissance de ce qui a été véritablement enseigné dans la classe, montre qu'une raison d'être possible pour T aurait pu être rencontrée par les élèves. En effet ce n'est pas la connaissance de la nature du nombre qui est importante, mais la connaissance pour un type de nombre donné de son écriture canonique utile pour comparer, calculer… Y. Chevallard (2000) défend cette idée dans la citation suivante :

> […] un grand problème des mathématiques : comment reconnaître si deux objets mathématiques d'un certain type sont ou ne sont pas le même objet ? […] À ce grand problème, il existe une solution générique, universelle : pour répondre à la question posée, il suffit chaque fois de disposer d'un système d'écriture des objets du type considéré, dans lequel chacun de ces objets ait une écriture et une seule. Le calcul de l'écriture « canonique » des objets à comparer permet alors de répondre.

Ainsi c'est un *savoir pour enseigner* qui est mis au jour avec cette citation qui met en relief la question de savoir si deux nombres sont égaux comme motivation à rechercher la nature du nombre. Cette question génératrice de problèmes peut conduire à faire la synthèse demandée par les programmes en institutionnalisant les écritures des nombres en fonction de leur nature. Le tableau 2 présente ce que pourrait être cette synthèse pour le nombre décimal d'après l'analyse a priori.

En regardant précisément un type de tâches particulier noté T_d qui est de savoir si un nombre est décimal ou idécimal (au sens de Bronner, 1997), trois caractérisations différentes d'un décimal apparaissent et permettent une meilleure connaissance du concept de décimal pour les élèves. Dans les classes observées cette variété de formes permettant d'identifier un nombre décimal n'est pas travaillée alors qu'elle était possible sous les conditions des programmes en vigueur au moment de l'étude (depuis la mise en œuvre des programmes de 2010 la troisième forme d'un décimal, en tant que quotient d'un entier par un produit de facteurs égaux à 2 et à 5, n'est plus présente dans le programme).

Ensemble de nombres	Écriture décimale sans aucun zéro inutile	Exemple d'écriture décimale	Écriture caractéristique	Exemple
	La partie décimale contient un nombre fini de chiffres (éventuellement nul)	–2009 –23,015	$a\times10^{-n}$ ($a \in$ Z) ($n \in$N)	–23015$\times10^{-3}$
D Décimaux			$\frac{a}{10^{n}}$ ($a \in$ Z) ($n \in$N)	$\frac{-23015}{1000}$
			$\frac{a}{2^{p}\times5^{q}}$ ($a \in$ Z) ($p \in$N) ($q \in$N)	$\frac{-4603}{2^{3}\times5^{2}}$

Tableau 2 : écritures canoniques des nombres en fonction de leur nature

6.2. Le type de tâches emblématique dans de nouveaux habitats

De nouveaux habitats sont possibles au cours de l'année de seconde pour une reprise du travail sur la nature et l'écriture des nombres en lien avec des nouveautés du programme. La méthode du carottage a permis le recueil de données et leur analyse dans deux de ces habitats : la séquence sur la valeur absolue qui utilise des *irrationnels de service* et la séquence de la trigonométrie qui permet la rencontre avec des *irrationnels produits*. Les nombres sont qualifiés *de service* ou sont *produits* au sens donné par Bronner (2007) :

> […] soit les tâches et les techniques portent directement sur les irrationnels (calculs d'approximations de π par exemple), soit les tâches et les techniques font intervenir inévitablement des irrationnels (calcul de la longueur de la diagonale du carré de côté unité).

Les thèmes de la valeur absolue et de la trigonométrie ont été choisis pour leur intérêt au regard de la construction des connaissances sur le numérique. Par ailleurs les possibilités que j'ai eues pour assister en direct à des séances m'ont permis de suivre plusieurs séances sur ces deux thèmes dans les deux classes de Mathieu et de Clotilde. La richesse des données dynamiques a donc été un argument supplémentaire pour choisir d'analyser ces thèmes.

6.2.1. Le type de tâches emblématique et la valeur absolue

Le programme de seconde précise que : « La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres » et le document d'accompagnement minimise le travail relatif à la valeur absolue en déclarant ceci : « Aucune étude particulière n'est demandée. Cette notation sera présentée essentiellement pour exprimer la distance entre deux nombres ». Ainsi, en utilisant le filtre du numérique, le curriculum officiel fait apparaître la valeur absolue dans une dynamique inter-numérique, en tant que nouvel opérateur de l'espace numérique.

La définition donnée par Mathieu est dans le cadre numérique :

> Soit x un nombre réel et M le point d'abscisse x sur la droite des réels, la valeur absolue de x notée |x| est la distance de O à M.

La définition donnée par Clotilde est différente, elle associe les cadres numériques et géométriques et elle est conforme à la demande des programmes :

> La distance entre deux nombres réels p et q est celui des deux nombres p-q et q-p qui est positif ou nul. Cette distance se note |p-q| et se lit « valeur absolue de p moins q ».
>
> Δ - P Q ►
>
> Conséquence : la valeur absolue de x, notée |x|, est la distance de x à zéro.

Les deux professeurs, choisissent de faire vivre un type de tâches V typique du travail relatif au concept de valeur absolue. Il s'agit de calculer des expressions avec des valeurs absolues (ce qui revient à supprimer la valeur absolue). En voici un exemple trouvé dans la classe de Clotilde présenté dans la figure 6.

Calculer, en donnant leur valeur exacte les nombres A, B et C :
A = $\|2{,}8 - 0{,}4\| + \|7{,}58 + 0{,}5\| + \|1{,}2 - 7{,}8\|$
B = $\left\|\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right\| - \left\|\frac{2}{3} - 1\right\| + \left\|\frac{4}{3} - 1\right\|$
C = $\left\|\sqrt{3} - 2\right\| + \left\|3 - 2\sqrt{3}\right\| - \left\|5 + \sqrt{3}\right\|$

Figure n°6 : extrait d'un cahier d'élève de Clotilde

Ce qui caractérise ces trois spécimens ce sont des nombres de différentes natures utilisés comme variables didactiques, et en particulier des irrationnels comme *nombres de service.* Le choix des types de nombres est dans le topos du professeur mais les élèves pourraient être interrogés pour expliciter la nature des nombres en jeu ce qui serait l'occasion d'une reprise de T. Mais cette occasion d'une reprise de T n'est pas saisie.

Un autre type de tâches est sollicité par V, il s'agit de « déterminer la distance des réels p et q » en cohérence avec la définition de la valeur absolue conformément au programme. Dans l'analyse a priori à partir des tâches données par Clotilde, et en respectant les conditions et les contraintes de la classe de Clotilde, j'ai identifié six techniques possibles pour V, techniques auxquelles j'ai donné des noms pour les distinguer. Dans la classe de Clotilde, l'analyse a posteriori des données recueillies, permet d'identifier trois de ces six techniques qui sont enseignées successivement, je les présente ci-dessous avec les noms proposées dans l'analyse a priori :

- la technique de *la différence positive* :

-3-7 = -10 et 7-(-3)=10, le positif entre -10 et 10 c'est 10, donc |-3-7| = 10

- la technique de *l'échange* :

-3-7 = -10 donc |-3-7|=|7-(-3)|=10

- la technique du *calcul direct* :

|-3-7|=|-10|=10

Il apparait que la technique du calcul direct est la plus adaptée aux nombres en écriture décimale, mais Clotilde va préconiser uniquement la technique dite de l'échange dans l'exercice de la figure 6. Voici un extrait de son explication en classe lors de la correction qu'elle fait au tableau pour le troisième spécimen. Il s'agit du nombre | $\sqrt{3}$ - 2| :

> À l'intérieur de votre valeur absolue, vous avez votre abscisse p moins votre abscisse q là (elle écrit p et q respectivement sous $\sqrt{3}$ et sous 2 dans l'expression |$\sqrt{3}$ - 2|), vous regardez votre soustraction p-q, si p-q est positif, vous pouvez enlever les valeurs absolues, c'est la bonne distance, si p-q est négatif, il faut que vous calculiez, quand vous enlevez la valeur absolue ça devienne q-p, d'accord ? Quand vous le faites, vous le faites à la calculatrice, si vous trouvez quelque chose de positif vous touchez à rien, si vous trouvez quelque chose de négatif vous inversez votre p et votre q, d'accord ?

Je qualifie cette technique d'ergonomique car elle explicite des manipulations des « deux barres » et des écritures des nombres : on enlève, on ne touche à rien, on inverse. Par ailleurs la détermination du signe de p-q est confiée à la machine et n'est pas du ressort des élèves. En introduisant les nombres p et q, Clotilde fait référence implicitement à l'élément théorique qui sous-tend la technique et qui est la définition de la valeur absolue donnée dans le cahier de cours. Cette technique nécessite de « voir » le nombre dont on cherche la valeur absolue comme étant une différence, ce qui n'est pas toujours la technique la plus efficace.

La valeur absolue dans une dynamique numérico-algébrique

Dans les deux classes de Mathieu et de Clotilde, la valeur absolue devient un prétexte pour travailler des types de tâches algébriques dans une dynamique numérico-algébrique. En étudiant de façon exhaustive toutes les traces écrites, j'ai ainsi dénombré le nombre de tâches travaillées dans chacune des classes dans toute la séquence, je trouve au total 72% des tâches travaillées chez Mathieu de nature algébrique et 53% chez Clotilde. Cette proportion de travail algébrique est très importante. Ainsi les deux professeurs choisissent de faire travailler les techniques de résolution de certaines équations et inéquations utilisant des valeurs absolues dans le cadre algébrique en ne suivant pas les prescriptions du curriculum officiel en vigueur.

Un espace numérique enrichi grâce à la valeur absolue

Pour conclure sur ce filon de la valeur absolue, et en utilisant le filtre du numérique, voici comment je peux décrire l'espace numérique élaboré en seconde et enrichi avec ce nouvel objet du cadre numérique :

- la valeur absolue est un nouvel objet numérique et un nouvel opérateur. En effet quand il s'agit de trouver la valeur absolue d'un nombre donné, d'une expression numérique ou d'une expression algébrique, cela fait fonctionner la valeur absolue comme un opérateur, semblable à l'opérateur racine carrée ;
- les définitions choisies par Mathieu et par Clotilde sont différentes (Cf. hypothèse 2) :
  - une dynamique numérico-numérique chez Clotilde ;
  - une dynamique numérico-géométrique chez Mathieu.
- le travail avec la valeur absolue amène les deux professeurs à développer une dynamique numérico-algébrique non conforme au curriculum officiel, ce qui génère des types de tâches qui ne sont plus officiellement au programme, et qui sont « immotivés » ;
- des nombres de différentes natures sont rencontrés et en particulier des irrationnels sont convoqués pour être au service de la valeur absolue, mais l'occasion d'une reprise de T est manquée (Cf. hypothèse 1).

6.2.2. Le type de tâches emblématique et la trigonométrie

La trigonométrie a déjà été enseignée en collège et elle apparait dans le domaine des « travaux géométriques » au niveau du secteur « Triangle rectangle : relations trigonométriques, distance de deux points dans un repère orthonormé du plan ». En classe de troisième voici ce qui est inscrit dans le curriculum officiel : « Connaître et utiliser dans le triangle rectangle les relations entre le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu et les longueurs de deux côtés du triangle ».

Pour le curriculum officiel de la classe de seconde, cette conception du collège dans le cadre de la géométrie est reprise, mais une nouvelle conception apparaît dans le domaine « Calcul et fonctions » et le secteur « Premières fonctions de référence ». Il s'agit de « Connaître la représentation graphique de $\cos x$ et de $\sin x$ ». Ce commentaire précise la demande du programme : « La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en « enroulant $\mathbb{R}$ » sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30°, 45° et 60° ». Ainsi la reprise des connaissances trigonométriques est en lien avec du nouveau et s'accompagne de ruptures importantes qui concernent :

- le cercle trigonométrique et une nouvelle représentation graphique de la droite des réels qui « s'enroule » autour du cercle ;

- l'angle n'est plus seulement un angle aigu qui peut être pensé comme un angle dans un triangle rectangle, il devient orienté et prend toutes les valeurs réelles ;
- la mesure de l'angle peut être exprimée par un négatif. Elle est exprimée en radians et non plus en degré ;
- le cosinus et le sinus, qui peuvent être considérés comme des opérateurs, changent de statut et deviennent des fonctions dans $\mathbb{R}$ (et même des fonctions de référence dans le programme) pour lesquelles la variable ne réfère plus à une mesure d'un angle mais à un réel.

En conclusion, au collège la trigonométrie fait apparaître des opérateurs donnant les lignes trigonométriques d'un angle géométrique mesuré en degré dans une dynamique numerico-géométrique alors qu'au lycée sont définis des angles orientés mesurés en radians et des fonctions trigonométriques d'une variable réelle. Il s'agit donc d'une dynamique faisant l'articulation entre trois domaines et qui peut être qualifiée de dynamique numérico-géometrico-fonctionnelle. L'analyse du curriculum officiel révèle a priori une question épistémologique épineuse pour les enseignants.

La trigonométrie et des irrationnels produits

La méthode du carottage a permis un recueil important de données dynamiques chez Mathieu à partir du 23 mai 2007 et chez Clotilde à partir du 30 avril 2008. Je vais expliciter comment une nouvelle reprise de T est encore manquée dans le chapitre sur la trigonométrie.

La trigonométrie est un habitat tout à fait intéressant pour y trouver des nombres nécessairement produits par la recherche des lignes trigonométriques des angles particuliers conformément au programme. Le travail numérique dans ce cadre produit des nombres entiers, décimaux non entiers, et irrationnels écrits soit avec le nombre π soit avec des racines carrées. Le répertoire de ces nombres sous la forme traditionnelle d'un tableau donne à voir ce que j'ai appelé la vitrine des nombres. Voici celle qui a été travaillée dans la classe de Clotilde le 9 mai 2008 dans la figure 7.

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Figure 7 : la vitrine des nombres chez Clotilde.

Pourtant tous ces spécimens de nombres différents ne sont pas commentés et il n'est pas dans le topos de l'élève de trouver l'écriture la plus adaptée du nombre en fonction de sa nature, cette nature n'étant d'ailleurs ni questionnée ni formulée. Le professeur se contente de dire aux élèves « qu'on n'aime pas les racines carrées au dénominateur » ou encore « qu'il faut des valeurs exactes ». C'est encore une reprise de T qui n'est pas saisie alors que les nombres sont produits nécessairement dans une dynamique numérico-géométrique. Par ailleurs le contrat de calcul est un contrat de calcul exact car le professeur le demande mais la justification n'est pas d'ordre mathématique pour les élèves, et ce n'est pas de leur responsabilité de choisir ce contrat de calcul.

7. les apprentissages des élèves

Dans les deux classes, trois élèves très sérieux et représentatifs de différents niveaux (excellent, bon, faible) ont accepté de répondre oralement ou par écrit à des questions en dehors des heures de classe. Voici un extrait d'un entretien qui a eu lieu le 10 avril 2008 avec trois élèves de Clotilde qualifiés ainsi par leur professeur : Lucas un excellent élève, Clémentine élève très sérieuse qui réussit bien, Morgane très volontaire mais en difficulté.

> Chercheur : Vous imaginez que vous expliquez à un élève, qui rentre en seconde par exemple, vous lui expliquez ce que c'est que la valeur absolue d'un nombre, je vous laisse un peu réfléchir… Du brouillon éventuellement pour chercher, il y en a si vous voulez là.
> Lucas : ça fait loin quand même
> Chercheur : et oui
> Clémentine : je me souviens que des deux barres verticales
> Morgane : oui
> Clémentine : non je me souviens des exos, il y avait où ça ça là et il y avait un fois là et là il y avait plus et quand celui là il était inférieur à … (Cf. figure n° 8 dessin n°1)
> Morgane : non quand il y avait un moins on changeait à l'intérieur je crois Lucas : c'est jamais négatif de toutes façons … je crois que c'est une distance en fait
> Morgane : ouais
> Chercheur : je crois que ?
> Lucas : c'est une distance, non ?
> Morgane : moi je dirais comme elle a dit, moi je me souviens enfin de la forme comme ça des deux barres comme ça, je me souviens j'étais passée au tableau c'était sur un exercice comme ça et elle m'avait dit qu'il fallait… vu que c'était jamais négatif, il fallait que j'inverse à l'intérieur je sais pas (Cf. figure n° 8 dessin n°2)
> Clémentine : ah oui par exemple quand on a une racine de 3 moins 1 si la racine de 3 était inférieure à 1 il fallait inverser pour que le plus grand soit ici comme ça on a toujours un chiffre positif. (Cf. figure n° 8 dessin n°3)

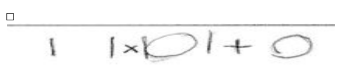
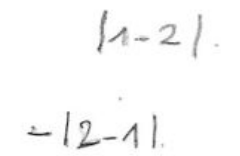
		
Dessin n°1	Dessin n°2	Dessin n°3

Figure n°8 : les écrits des élèves sur le brouillon

Un peu plus tard je demande à ces élèves à quoi est égale la valeur absolue de – 4, Lucas répond c'est 4 ou – 4, les autres élèves sont d'accord. Les mêmes questions posées à trois élèves de la classe de Mathieu donneront les mêmes réponses. Aucun des six élèves n'est capable de savoir que la valeur absolue de – 4 est égale à 4.

8. Un problème de la profession

Dans ce texte j'ai donné quelques résultats de la recherche qui permettent d'identifier un problème de la profession dont l'un des symptômes le plus révélateur se trouve en écoutant ces élèves. À la question « qu'est-ce que c'est ? », leur réponse est : « voilà ce qu'on fait d'habitude avec ».

Ce problème rend compte des difficultés qui dépassent les cas singuliers de Mathieu et de Clotilde et de leurs élèves pour devenir une question posée à toute la profession au sens de Chevallard. Je reprends une analyse en termes de niveaux de détermination didactique pour préciser quelques unes des contraintes ou des conditions qui pèsent sur l'enseignement du numérique en seconde.

- au niveau de la société : la réussite en mathématiques est très souvent la clé pour s'orienter vers des études supérieures. Ainsi la demande sociale pèse sur les professeurs de lycée qui peuvent sous cette pression outrepasser les demandes du curriculum officiel comme c'est le cas avec les types de tâches algébriques utilisant la valeur absolue ;

- au niveau de l'école, la place de la classe de seconde charnière entre collège et lycée, incite les professeurs à faire des révisions systématiques ;
- au niveau de la discipline, l'ordre d'écriture des programmes influence les progressions ;
- au niveau du domaine « calculs et fonctions » on observe dans les organisations mathématiques :
    - l'absence de raisons d'être et des tâches immotivées ;
    - le travail des notions en tant qu'objets et non pas en tant qu'outils au sens de Douady (1986) ;
    - le contrat institutionnel de calcul est dans le topos du professeur et non pas dans celui des élèves.

Au niveau du thème « nature et écriture des nombres », le fil numérique suivi sur l'année scolaire avec la tâche emblématique T, révèle une exportation de T impossible en dehors du thème d'origine officialisé par le programme. Pourtant des habitats comme par exemple ceux de la valeur absolue et de la trigonométrie permettent la reprise de T.

C'est sur cette notion de reprise que je termine ce texte en donnant la parole à Y. Chevallard à travers un extrait du rapport de ma thèse :

> […] l'auteure note qu'il fut longtemps d'usage de commencer l'année, très officiellement (la chose était gravée dans le marbre des programmes), par des révisions systématiques ; la profession, longuement façonnée par cette contrainte, n'a donc pas appris l'art délicat des reprises d'étude motivées par l'étude « normale » du programme de l'année, c'est-à-dire par l'étude d'une matière mathématique inédite. Le passé pèse ainsi sur le présent en entamant la capacité de la profession à reconnaître et à prendre en charge les besoins praxéologiques créés ou recréés par l'avancée du temps didactique : c'est le rapport professoral à l'avant (supposé acquis complètement, ce qui n'est jamais le cas) et à l'après (qu'on s'interdit d'anticiper avant qu'il n'advienne officiellement) qui se révèle ainsi inadéquat.

Références

Bronner A. (1997). *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée.* (Thèse de doctorat). Université J. Fourier, France.

Bronner A. (2007). *La question du numérique : Le numérique en questions.* (Mémoire d'habilitation à diriger des recherches), université Montpellier I2, France.

Bronner A., Larguier M. (2004), Analyse didactique de la séance "carte de géographie", *actes du colloque international de l'AIRDF.* Québec.

Brousseau G. (1998). *La théorie des situations didactiques, Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal* http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

Brousseau, G. (2003). *L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire : Micro et Macro – didactique.* http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/Enseignement_des_maths.pdf

Brousseau G., Centeno J. (1991) Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11* (2/3), 167-210.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège (1ère partie). *Petit x*, 5, 51-94

Chevallard Y. (2000). Enseignement insensé, enseignement raisonné et créativité sociale. *Colloque Mathématiques sans frontières 2000*, Marseille, 39-51.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & Ruhal Floris (Éds), *Actes de la 11^e École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22, 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. *Dans Sociedad, escuela y matematicas, Aportaciones de la Teoria Antropologica de lo Didactico (TAD).* Jaen: Publicaciones de la Universidad de Jaen.

Chevallard Y. (2008). *Journal du séminaire TAD/IDD. Théorie anthropologique du didactique & ingénierie didactique du développement.* http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/fdf/2008-2009/journal-tad-idd-2008-2009-8.pdf

Chevallard, Y. (2009). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. *Dans Margolinas, C. et al. Eds, actes de la XVe école d'été de didactique,* La pensée sauvage éditions, pp. 81-108

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat). Université de Provence, France. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Douady R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* , 7(2).

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang S. A.

Grugeon, B. (1995). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et première G*. (Thèse en sciences de l'éducation), Université Paris 7, France.

Larguier M. (2005). *Les reprises des domaines numérique et algébrique en classe de seconde*. (Mémoire de DEA), Université Montpellier 2, France.

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession*. (Thèse de doctorat), Université Montpellier 2, France. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00637391/fr/

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur : Essai de développement de la théorie des situations didactiques*, (mémoire d'habilitation à diriger des recherches), Université de Provence, France.

Matheron, Y. (2000). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée, quelques exemples*. (Thèse de doctorat), université Aix-Marseille I, université de Provence, France.

Perrin-Glorian, M.-J. (1992). *Aires et surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6^e*. (Thèse de doctorat d'État), université Paris 7, France.

Représentations et discours, dans l'action conjointe en situation didactique[1]

Alain **MERCIER**

Teresa **ASSUDE**

Yves **MATHERON**

Serge **QUILIO**

Membres de l'Equipe EtOS : L'étude, son organisation, les savoirs ; : variations disciplinaires et institutionnelles. UMR P3 ADEF

alain.mercier@ens-lyon.fr ; t.assude@aix-mrs.iufm.fr ; yves.matheron@ens-lyon.fr ; serge.quilio@ens-lyon.fr

Résumé

Notre intervention porte sur les travaux réalisés dans une équipe de *didactique comparée* où coopèrent principalement didacticiens des mathématiques et du français, mais aussi des SES, des sciences, et d'œuvres que l'on ne peut pas aisément classer dans une discipline comme les notes de synthèse, la sécurité ou le cassage des noix pourvu que ce soient pour nous des *œuvres culturelles*.

Nous travaillons sur toutes les *formes de transmission d'œuvres culturelles*, y compris le système éducatif français actuel, ou les types de situations d'enseignement des mathématiques. Nous avons tenté, dans une équipe comparatiste, d'identifier les variations dans l'organisation et l'efficacité de l'étude, d'une technique ou d'une matière d'enseignement à l'autre et d'un groupe social ou d'une institution à l'autre.

Mots clés

Ingénieries didactiques ; démarche d'investigation ; formation ; mémoire didactique ; ostensifs ; non ostensifs ; représentations ; situations didactiques ; soustraction ; systèmes sémiotiques.

I. Intervention d'Alain Mercier : présentation générale

Avertissement :

- Représentations est pris ici dans le sens de Brousseau (2004) « objet (ou système d'objets) graphique, à fonction d'icône de signe ou de symbole » ou dans celui de Vergnaud (1974) lorsqu'il parle de « représentation calculable ».

- Discours est pris dans son sens le plus large, et les discours peuvent bien sûr être des écrits: ce sont encore des objets de langage. On considèrera comme discours les « actes de langage » aussi bien que les « jeux de langage ».

---

[1] Ce texte à quatre voix a été produit en réponse à la question : « Sur quoi travaillez vous, en ce moment? » Il rend compte de ce qui a été dit au SEMINAIRE NATIONAL DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES le 14 mai 2011, par Alain Mercier et Teresa Assude, Yves Matheron, Serge Quilio (Equipe EtOS : L'étude, son organisation, les savoirs : variations disciplinaires et institutionnelles).

Les œuvres culturelles auxquelles nous nous intéresserons aujourd'hui associent des discours à des représentations : ce n'est pas le cas pour les savoirs dits pratiques.

I. 1. Les travaux doctoraux à l'origine de cette présentation

Nous avons travaillé longtemps (de 2003 à 2006) sur ce que nous avons appelé « les représentations » au sens large et notre ouvrage de référence sur la question a été l'ouvrage de Jack Goody, *La peur des représentations*. Nous avions l'idée que les œuvres culturelles qui nécessitent des écoles sont des représentations (et les techniques de production de représentations) et des théories (qui permettent de penser ce que sont les représentations). Ces représentations sont des ajouts au monde, des créations humaines sur lesquelles la pensée s'appuie (c'est ce qu'on appelle *le calcul* dans les modèles). On observe alors que le rapport au monde est médié par les représentations, et que cela change la manière de penser. C'est parce que la pensée n'est alors plus en rapport immédiat au monde que les représentations sont souvent objets de méfiance : elles sont des artefacts, des artifices. Ainsi, on peut entendre dire que « les modèles ne rendraient pas compte de tout et fausseraient le rapport à la complexité des choses » : on l'a par exemple entendu à propos de la TSD, qui ne donnerait accès qu'à un élève dit épistémique. La recherche d'une langue « vraie », qui dirait donc toute la vérité des choses, relève de cette pathologie, et l'expression attribuée à Galilée « le monde est écrit dans la langue mathématique » semble située dans cette continuité, à moins que l'expression ne signifie qu'il n'y a pas à chercher plus loin que les mathématiques, pour comprendre le monde. Nous considérons que les mathématiques sont des modèles du monde, qui expriment certaines des propriétés de nos rapports au monde et que Bachelard a montré comment le travail de la rationalité suppose une psychanalyse du rapport immédiat aux objets du monde.

Nous interprétons ainsi une différence de valeur cognitive faite entre algèbre (monde d'un calcul) et géométrie (monde d'une pensée), car souvent on ignore que la géométrie propose elle aussi un travail dans un modèle de l'espace et des nombres, sur une feuille de papier, et non pas un travail dans l'espace même. Cela ne règle pas bien sûr la discussion sur ce que les représentations représentent : non pas le monde, mais les idées que notre action dans le monde nous conduit à former sur le monde, idées qui donc fondent nos stratégies d'action[2] (Mercier et Tonnelle, 1992), (Mercier et Tonnelle, 1993).

Notre présentation s'appuie donc sur les travaux doctoraux cités ici, dont la plupart sont en coopération avec d'autres didacticiens ou avec des mathématiciens, et sur le séminaire de l'équipe EtOS de notre laboratoire, dont les didacticiens des mathématiques sont outre les doctorants, Teresa Assude, Nadia Douek, Jean-Philippe Drouhard, Yves Matheron, Alain Mercier, et Serge Quilio.

Doctorats sous la direction de Alain Mercier : travaux de Nawal Abou-Raad (2006) ; Eric Mangeant (2009) ; Sebastiana Laï (2009) ; Romain Mario (à venir 2011) ; Géraldine Liger-Grimaud (en cours) ; Souleymane Barry (en cours) ; Jean-Yves Casadepax (en cours).
Cotutelle Maria-Luisa Schubauer-Leoni et Alain Mercier : Florence Ligozat (2009).
Codirection Alain Mercier et Pierre Duchet : Kadir Erdogan (2006).
Codirection Alain Mercier et Antoine Delcroix : Christian Silvy (2010).
Codirection Alain Mercier et Marie-Noelle Roubaud : Karine Millon Fauré (2011).
Coopération aux doctorats dirigés par Maggy Schneider : Maryza Kryzinska (2007) ;

---

[2] Une partie de ce que nous avons appris sur cette question a fondé le cours en « didactique comparée » donné aux étudiants doctoraux de Paris VII (2005-2009). J'ai professé ce cours durant cinq ans, dans le cadre d'une formation qui réunit des étudiants en didactique venus mathématiques, des sciences physiques et chimiques, de la géographie et de l'histoire. Ce cours ouvrait leurs enseignements de DEA. Je remercie Michèle Artigue de me l'avoir proposé car j'ai dû le faire à l'insu de mon institution, l'INRP.

Emmanuelle Rouy (2008) ; Corinne Lebeau (2009).
Doctorat sous la direction de Yves Matheron : Andrea Araya-Chacon (2008).

I. 2. La transmission d'œuvres culturelles mathématiques (et autres)

La question que tous ces travaux posent, chacun à sa manière, a trait à ce qui transparaît dans *le rapport entre*, d'un côté, ce que Brousseau appelle *les représentations* et d'autres les ostensifs, les systèmes sémiotiques ou symboliques : dans l'enseignement des mathématiques on ne nomme et n'étudie que *des notations,* et de l'autre, *les discours,* éléments langagiers qui accompagnent la manipulation des représentations et que Brousseau décrit comme exprimant des connaissances, tandis que d'autres les appellent des non-ostensifs ou des jeux de langage : dans l'enseignement des mathématiques on ne nomme et étudie que *des notions*, prises dans des définitions, théorèmes et démonstrations.

J'utiliserai parfois dans le sens élargi que je définis ici les noms (génériques en mathématiques mais trop restrictifs dans la mesure où ils n'y désignent que des objets institutionnellement stabilisés), de *notions* et de *notations*, en les considérant que leur usage en didactique ouvre leur sens strict usuel en mathématiques. Notations et notions ne sont donc qu'une partie de ce qu'il nous faut comprendre, les parties émergées de deux icebergs. Car en mathématiques, mais surtout dans leur enseignement, la plupart des *notions* (et des manières de les mobiliser dans des formes langagières et proxémiques) utiles au travail des *notations* (et des manières de représenter des objets et des relations pour en faire les objets d'un calcul) sont, nous le verrons des objets préconstruits (Pecheux, 1975) et des objets proto-mathématiques (Chevallard, 1985). Explorer ce phénomène sera l'objet de nos interventions d'aujourd'hui. Les éléments langagiers ou notions fonctionnent comme éléments d'un discours non (non encore?) mathématique qui accompagne et porte l'action initiale, non encore mathématisée. Ces éléments discursifs *fondent les premières tentatives stratégiques dans les situations d'action, parce qu'ils nomment les objets de la situation sur lesquels porte l'action, ainsi que les relations qui sont expérimentées dans cette action.*

On peut donc dire que ces éléments langagiers sont *du logos pour des praxis,* et qu'ils appartiennent donc au domaine des théories. Mais comme ces « objets théoriques » ne sont pas sous le contrôle explicite de leur consistance, ce sont des théories qui fonctionnent comme des « vérités de La Palice » : toujours prises pour vraies, elles ne sont pas interrogées et leur origine nous est inconnue. C'est donc ce que l'on appelle des préconstruits. Lorsqu'on pense qu'elles pourraient (à un tout autre niveau de l'étude des mathématiques) être interrogées et reconstruites dans une axiomatique on dit qu'elles sont proto-mathématiques. Ainsi, mathématiser, c'est produire des systèmes sémiotiques de représentations, et des formes langagières qui permettent de les interpréter. Faire des mathématiques, c'est mettre en œuvre de tels systèmes, dans un travail de modélisation.

I. 3. Situations, représentations

Pour nous, qui tenons une posture anthropologique et non pas psychologique, les notions sont donc des objets discursifs dont l'écologie appartient aux organisations techniques du quotidien : des *expériences* culturelles (au sens de Dewey) ou des *domaines d'expérience* (au sens de Boero), un sens proche semble-t-il de ce que Wittgenstein appelait des *formes de vie pour les jeux de langage*… si tant est qu'on puisse ainsi rapprocher Dewey et Wittgenstein.

Dans ces conditions, les notations sont des objets substitutifs des objets du domaine de réalité étudié, qui en *représentent* les éléments pertinents et permettent des formes de calcul. On appelle calcul les formes de manipulation réglée des notations qui représentent, sous le contrôle des formes discursives associées, les propriétés des objets réels sur lesquels l'action

se réaliserait : cette position est celle de Lebesgue dans « La mesure des grandeurs », lorsqu'il dit que « le nombre est le compte-rendu complet de l'opération qui le produit » et que le reste est métaphysique.
Ces notions et les représentations associées constituent sans doute ce que les psychologues Vygotskiens appellent « les théories quotidiennes » dans la mesure où elles sont « tout naturellement » portées par la langue des pratiques quotidiennes : elles sont donc en principe communes aux participants d'une sphère culturelle, mais peuvent donner lieu à des quiproquos. Car les théories du quotidien ne sont en général pas interrogées sur leur consistance ni sur leur pertinence, au delà de ce que l'usage conventionnel de la langue peut porter comme questionnement : votre idée sur l'infection (du pied, ou dans votre poubelle) n'est pas mise en question dans son rapport à vos idées sur les microbes. (sinon parce que vous savez que l'eau de javel permet de traiter les deux cas).

Nous cherchons donc à montrer que des expériences culturelles ou anthropologiques (des situations au sens de Dewey) peuvent fournir aux élèves les éléments discursifs (les métaphores fondamentales) des situations didactiques qu'ils ont à affronter, ce qui leur permet de les interpréter sans malentendu.

Cependant, les situations didactiques que rencontrent les élèves ne sont des déclinaisons d'une situation fondamentale au sens de la TSD que si elles sont travaillées par le professeur de manière à mobiliser l'expérience culturelle porteuse de ces métaphores, pour ouvrir aux élèves un problème dont la résolution supposera l'apprentissage d'un savoir identifié a priori par le professeur. En mathématiques, et surtout dans leur enseignement, les *notations* en revanche (des manières de représenter des objets et des relations pour en faire les objets d'un calcul) sont presque toujours données aux élèves comme des outils tout faits, qu'il suffirait d'apprendre à mettre en œuvre ce qui crée de nombreuses difficultés et des quiproquos (Tonnelle, 1979) ; (Duval, 1995) ; (Roditi, 2004) ; (Roditi, 2001) ; (Bardini, 2003) ; (Abou-Raad & Mercier, 2009). Car les notations montrent ce que l'on pourrait faire, les outils mobilisés dans les pratiques quotidiennes ont une fonction de représentation de l'action, c'est leur sémioticité. Le problème didactique vient de ce qu'elles ne montrent l'action adéquate qu'à qui connaît personnellement leur usage, et que c'est un cercle vicieux dès que l'on ne se limite pas à l'observation anthropologique d'un état des pratiques institutionnelles et des rites d'entrée dans une institution, pour penser ce que pourrait être une intervention didactique en observant comment se font les apprentissages, fut-ce par déplacement de la ligne du partage topogénétique dans l'institution comme Delbos et Jorion l'ont montré à propos des pêcheurs de Houat (Delbos & Jorion, 2005).

I. 4. Conséquence didactique pratique

Nous travaillons sur le fait que *les élèves peuvent produire par eux-mêmes des représentations qu'ils peuvent faire évoluer vers les notations attendues* si on leur propose des situations adaptées et nous vérifions que ce faisant, ils produisent les notions correspondantes : c'est ce qu'a montré Brousseau (2005), qui donne dans ce texte la synthèse de son travail.
L'idée est que tout observateur qui cherche à décrite l'activité mathématique et le mouvement de mathématisation rencontre les problèmes que nous tentons ici de poser, sans que l'on en ait produit une description valide dans tous les cas de figure... Nous avons bien sûr de très nombreux travaux internationaux sur ces problèmes, de (Radford et al., 2002) ou (Radford, Bardini, Sabena, Diallo, & Simbagoye, 2005) mais ils n'ont pas abouti à tisser des liens avec les théories que nous utilisons, dans la ligne de (Brousseau, Balacheff, Cooper, Sutherland, & Warfield, 1997) et de la TSDM ou de ses réinterprétations par (Chevallard, 1985) et

(Chevallard, 2006) pour la TAD, puis de la théorie de l'action conjointe en didactique venue des interrogations comparatistes et de l'intégration de l'action didactique des élèves dans la théorie (TACD) (A. Mercier, Schubauer-Leoni, & Sensevy, 2002) (Assude, Mercier, & Sensevy, 2007), (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2002), (A. Mercier, 2008). Nous tentons donc ici de tisser ces liens, en direction des théorisations francophones et ailleurs de réaliser le même mouvement en direction des travaux anglophones: c'est ainsi que je suis intervenu à CERME (groupe "Langage et Mathématiques").
Notre intérêt pour ces questions montre alors que *les pratiques mathématiques émergentes des élèves doivent être reconnues par le professeur, afin qu'elles aient un avenir et qu'ils puissent développer collectivement une pensée validée* (Mercier, 1998), (A. Mercier, Sensevy, & Schubauer-Leoni, 2000)
Mais pour que le professeur puisse accompagner les élèves dans le processus de formalisation des systèmes sémiotiques (devenant des systèmes symboliques) et des formes langagières associées (devenant les formes discursives d'une théorie) il faut que le professeur soit au fait des moments nécessaires de ce processus, qui (nous le verrons) ne suit pas nécessairement le chemin de la production théorique directe tel qu'il a été défini par Brousseau (action formulation validation).
Nos travaux d'ingénierie consistent donc à développer les suites de situations qu'un professeur puisse réguler avec l'aide des élèves, parce qu'il en connaîtra les moments clés, les points d'appui et les enjeux épistémologiques : trois dimensions que nous aurons donc à décrire pour rendre nos productions robustes et fiables. Nos observations et nos travaux vont en mathématiques de la maternelle à la Terminale en passant par tous les niveaux intermédiaires, elles sont plus erratiques dans d'autres disciplines.

I. 5. Analyse du site local d'une question : dimensions mathématique et proto-mathématique

Nous avons montré que *l'analyse ascendante de la transposition* (Assude et al., 2007) pouvait identifier les objets mathématiques intervenant plus ou moins immédiatement dans le traitement d'une question (notations symboliques et objets à usage ostensif ; notions portées par des discours associés et objets à usage non ostensif). La description du système des objets pris dans les techniques de traitement d'une tache peut se faire en classant ces éléments selon leur niveau de valeur théorique dans la discipline dans un « site mathématique de la question à l'étude » dont la connaissance peut permettre d'aider un élève dans l'étude de la dite question (Duchet & Erdogan, 2005). Nous avons montré aussi que demeure un reste de l'analyse, qui est de l'ordre du logos initial relatif à la première compréhension de la question par un élève, un ensemble disparate de choses qui peuvent être qualifiées de *proto-mathématique* (Silvy & Delcroix, 2008).
Le site ainsi complété est relatif à une institution plus ou moins vaste et il est organisé à partir des objets sensibles d'un enseignement, ceux qui apparaissent explicitement dans les pratiques utiles et les discours nécessaires au travail attendu. Mais il se développe d'un côté en niveaux théoriques qui en général sont au delà de l'horizon de 'institution concernée et de l'autre en niveaux pré-théoriques .
Prenons l'exemple de la notion de « fonction linéaire » dans le travail de problèmes de proportionnalité en CM2. Certains raisonnements attendus viennent en effet de la considération du problème comme une question (presque explicite) « d'opérateur multiplicatif »… dans la mesure où l'on calculera parfois « un coefficient de proportionnalité » pour obtenir une réponse comme « produit d'une grandeur par ce coefficient ».

Nous montrons qu'au delà de nos premières analyses (et de l'analyse ascendante de la transposition) il y a « un reste » que Silvy et Delcroix ont d'abord appelé « les choses » parce qu'il se composait d'objets hétéroclites et inclassables. Ce reste est de fait indispensable à l'étude autonome, par les élèves, de la question qui leur est posée : l'ensemble de ces choses est organisé dans des énoncés observables et *fonctionne comme une théorie* : qui guide l'action première des élèves, et qui est donc « un logos pour une praxis ».

Cette théorie sera reprise ou non, au fur et à mesure du progrès de l'étude, selon qu'elle apparaît comme absolument erronée ou porteuse d'une idée qui a de l'avenir. Si on considère que ces choses doivent être prises dans la partie mathématique du site, alors on s'aperçoit qu'elles sont souvent au delà de l'horizon des théories disponibles à la profession de professeur de mathématiques, alors que les élèves en mobilisent des formes primitives, en deçà du niveau de langage mathématique.

Ainsi, il est possible que l'idée du coefficient ne vienne que parce que la mise en tableau des correspondances connues suggère « la table de 3 », et que par conséquent « à 8 est associé 24 » puisqu'on dit : « 3×8=24 ». La table de 3 est un objet proto-mathématique, et sans doute l'idée de 'correspondant d'un nombre dans une table' n'est même pas nommée comme association de 24 à 8. Les notions d'image et antécédent seraient là possibles. Mais de fait, la table appartient à la culture de la classe et fournit telle quelle un modèle, utile au traitement réussi du problème… Encore faut-il que le professeur y reconnaisse le coefficient de proportionnalité, et organise l'étude collective de cette réponse, avec la classe.

Nous affirmons alors que (Shulman, 1986) et (Ma, 1999) appellent « pedagogical content knowledge » quelque chose de ce que nous définissons comme « les textes de cette théorie », qui sont organisés et connus comme des *récits*. Ils définissent ces textes comme « la connaissance profonde du thème de l'enseignement, nécessaire pour l'enseigner efficacement ». Le professeur doit en disposer pour réguler la suite des situations que les élèves rencontrent, à son initiative. Les élèves en disposent collectivement par le moyen de ces situations, ou manquent collectivement de ces moyens d'étudier.

I. 6. Représentations, ostensifs, systèmes sémiotiques et connaissances, non-ostensifs, jeux de langage

Entre production de notions et de notations, il faut imaginer une dialectique délicate que développe plus ou moins heureusement toute action didactique. Nous ne la décrirons que dans le cadre strictement didactique de certains enseignements de questions mathématiques précises, dans des conditions définies.

Les interventions de Teresa Assude, Serge Quilio ,Yves Matheron seront coordonnées par ce questionnement commun, par delà les thèmes de recherche que chacun des trois orateurs présentera et qui sont relatifs respectivement : 1) au réseau OPHRIS, 2) au réseau Saint Charles et Maison des Petits, 3) au réseau AMPERES. On ne fera pas intervenir des chercheurs proches comme Nadia Douek et Jean-Philippe Drouhard avec qui nous discutons hebdomadairement, ni Maria-Luisa Schubauer-Leoni et Gérard Sensevy avec qui nous développons les problématiques comparatives, ou Maggy Schneider et Carl Winslow avec qui nous coopérons sur le travail algébrique, mais c'est avec ces chercheurs que nous discutons dans notre séminaire et nos idées viennent de notre tentative comparatiste et des observations parallèles faites en biologie, EPS, français, philosophie, histoire.

II. Intervention de Teresa Assude : Prise en compte des « élèves en situation de handicap » et robustesse des

situations d'enseignement

Le projet de recherche PIMS (Pratiques inclusives dans les mathématiques scolaires) est l'un des projets du réseau national OPHRIS (Observatoire des pratiques sur le handicap : recherche et intervention scolaire). L'objet d'étude dans le projet PIMS est double. Il s'agit d'étudier :
- des pratiques des enseignants dans des CLIS (Classes pour l'Inclusion Scolaire) et des effets de ces pratiques sur les actions et apprentissages mathématiques des élèves en situation d'handicap ;
- les changements opérés, dans le cadre d'un dispositif de formation, sur les représentations et les pratiques des enseignants concernant l'enseignement des mathématiques.

Nous allons aborder ici le problème de la spécificité des situations d'enseignement en mathématiques proposées aux élèves en situation de handicap. La question que nous voulons étudier ici est la suivante : est-il possible de proposer des situations d'enseignement qui ont fait leurs « preuves » dans des classes ordinaires avec des élèves en situation de handicap (dans notre cas des élèves ayant des troubles des fonctions cognitives) ? Si oui, peut-on les utiliser telles quelles ou doit-on les adapter ? Quels types d'adaptations ?

A travers l'analyse d'une situation d'enseignement, nous présenterons une mise à l'épreuve de l'hypothèse H1 suivante : l'une des conditions favorables à l'engagement de ces élèves dans un processus d'apprentissage est que les situations soient choisies en tenant compte des enjeux de savoir mathématique et de façon à permettre des ajustements individuels, sans pour autant perdre leur efficacité didactique.

Nous commencerons par décrire la situation choisie, et ensuite nous présenterons rapidement le résultats d'une mise à l'épreuve (en renvoyant à d'autres textes pour plus de détails dans les analyses), pour ensuite discuter sur les conditions de robustesse d'une situation d'enseignement.

II. 1. Description de la situation « voitures et garages »

La situation « voitures et garages » (SVG) a été conçue et testée par Brousseau dans le cadre de ses travaux à Bordeaux. Pour la description de cette situation, nous nous appuyons, en partie, sur les travaux de Briand, Loubet & Salin (2004).

Cette situation a comme enjeu de savoir la construction du nombre comme mémoire de la quantité. Il s'agit de dénombrer une collection de garages pour produire une collection de voitures ayant le même cardinal que la première collection. Cette situation est organisée en trois étapes :

Première étape : le proche. Dans cette étape, les collections des garages et des voitures sont proches spatialement. Les élèves doivent dénombrer la collection des garages et prendre autant de voitures qu'il y a de garages. Comme les collections sont proches du point de vue spatial les élèves peuvent utiliser la correspondance terme à terme pour résoudre le problème sans utiliser le nombre comme mémoire de la quantité. Dans cette étape, les élèves s'approprient les règles constitutives du jeu, notamment l'importance de la relation « autant d'éléments que » ;

Deuxième étape : l'éloignement spatial. Dans cette étape, les deux collections sont éloignées spatialement. Les élèves doivent dénombrer la collection des garages, garder le nombre en mémoire et ensuite produire une collection de voitures ayant le même cardinal. Ici, les élèves ne peuvent pas utiliser la correspondance terme à terme mais ils doivent utiliser le nombre comme mémoire de la quantité ;

Troisième étape : l'éloignement temporel. Dans cette étape, les deux collections sont éloignées temporellement. Il faut compter le nombre de garages et se rappeler de ce nombre pour aller chercher, ensuite, autant de voitures que de garages. Dans la description faite par

Briand, Loubet & Salin (2004), on va chercher les voitures à un autre moment (par exemple le jour suivant). Dans ce cas, il faut se donner un moyen pour garder trace : un symbole, une écriture, un dessin, soit un outil sémiotique qui soit cette trace-là. Il s'agit de travailler sur les représentations du nombre. Cette étude rend également compte des situations de communication, à partir de messages écrits ou dessinés telles qu'elles ont été étudiées par Brousseau (1998).
Cette situation permet aux élèves de valider leurs réponses car ils peuvent vérifier s'ils ont pris autant de voitures que de garages en plaçant chaque voiture sur un garage. Nous ne présentons pas ici l'analyse a priori de cette situation SVG (voir Assude et alii 2011).

II. 2. Mise à l'épreuve de la situation « voitures et garages »

Nous avons présenté cette situation dans le cadre du dispositif de formation mis en place et elle a été choisi par deux enseignantes pour les mettre en œuvre avec un groupe d'élèves de leurs classes. La première mise à l'épreuve a été faite dans une classe CLIS avec quatre élèves. Dans cette classe, la maîtresse a gardé le même milieu matériel et nous avons pu observé des « petits pas » dans les apprentissages des élèves. Ces analyses ne seront pas présentées ici, et pour cela voir Assude et alii (2011).
La deuxième classe s'agit d'une CLIS 1 qui accueille des élèves ayant des troubles du fonctionnement cognitif (troubles de mémoire, d'attention, difficultés d'apprentissage, etc.). La classe travaille, selon les disciplines, par petits groupes et les élèves ont un niveau scolaire allant de la petite section (élèves de 3 ans) de maternelle au CE2 (élèves de 8 ans). Nous avons observé un groupe de trois élèves (qui ont entre 8 et 12 ans) qui travaillent sur la situation SVG. Ces élèves savent énoncer la comptine numérique jusqu'à 8 (François, Guillaume) et jusqu'à 5 (Olga), reconnaissent des petites quantités (2 ou 3) et ne savent pas encore dénombrer. La situation SVG est apparue à l'enseignante appropriée pour ces élèves. Nous avons observé une séance de la première étape de la situation SVG. Nous ne présenterons pas ici les analyses mais seulement deux résultats. Pour les analyses approfondies voir Assude et alii (2012).

II. 2. 1. Intrigue de la séance

Le groupe de trois élèves (François, Guillaume et Olga) et la maîtresse sont autour d'une table dans un espace connexe à la salle de classe. La séance dure 18 minutes. La maîtresse pose un carton rouge sur la table en indiquant que c'est la hotte du père Noël. Elle a une boîte avec des images de cadeaux. Elle demande aux élèves ce qu'on met dans la hotte du père Noel et Olga répond « des cadeaux ». Elle indique les images des cadeaux en disant qu'elle va commander des cadeaux, ce sont les images qu'elle pose sur le carton rouge. Ensuite elle dit aux élèves qu'ils doivent prendre des cadeaux dans la boîte des images (les mêmes images qu'elle utilisera pour la commande) et les mettre dans la hotte du père Noel. Chaque élève doit participer à tour de rôle et il y a deux tours pour Guillaume et François et trois tours pour Olga. Les élèves auront le nombre d'images suivant : Olga (2, 2, 3), Guillaume (3, 3) et François (4, 5).

II. 2. 2. Obstacle du milieu matériel

La maîtresse n'a pas choisi le même milieu matériel que celui des voitures et des garages. Elle a décidé d'adapter la situation SVG à une thématique qui était travaillée par ailleurs dans la classe qui est celle de la fête de Noël. Ainsi elle décide d'utiliser l'histoire du père Noël qui donne des cadeaux : dans ce cas, la hotte du père Noël est représenté par un carton rouge et les cadeaux sont représentés par des images. Dans cette situation, le milieu matériel est constitué par deux cartons et une collection d'images de cadeaux. Les deux collections de la situation SVG est ici réduite à une seule collection, celle des images de cadeaux. Or cette

réduction va poser un certain nombre de problèmes.
Ce changement de milieu matériel est le résultat d'une contrainte qui est celle de la vie de la classe et une certaine idéologie qui va avec, notamment la suivante : on doit proposer aux élèves des situations qui s'insèrent dans un projet de la vie de la classe. Cette contrainte a amené l'enseignante à changer le milieu matériel de la situation SVG. Dans ce cas, les élèves peuvent apprendre des mathématiques tout en faisant la liaison avec d'autres disciplines comme la lecture d'histoires. Or cette contrainte a fait oublier à l'enseignante l'importance pour ces élèves d'avoir deux collections distinctes qui se nomment avec des mots différents. Certes on sait que « A a autant d'éléments que A » est aussi une relation d'équivalence mais l'absence de mots distincts semble être un obstacle pour que Olga puisse rentrer, à ce moment-là, dans l'acquisition de cette relation en mettant en œuvre une technique de correspondance terme à terme. Il nous semble que ce changement apporte une perturbation à la situation SVG.

II. 2. 3. Incomplétude de la définition du jeu

La difficulté d'Olga de rentrer dans la situation n'est pas seulement due au choix du milieu matériel qui ne permet pas une distinction langagière des deux collections. Il y a aussi un problème d'insuffisance au niveau de la définition du jeu (pour plus de détail voir Assude et alii 2012).
La définition du jeu est l'un des gestes techniques de l'enseignant. Cette définition passe par la présentation du milieu matériel mais aussi par l'indication des règles constitutives du jeu, à savoir les règles qui font que ce jeu est ce qu'il doit être et non un autre. Les règles constitutives du jeu ne sont pas forcément les règles stratégiques, celles qui permettent (par les connaissances des élèves) de gagner au jeu. Dans notre situation, les règles constitutives du jeu (première étape) sont :
A chaque élément de la collection A doit correspondre un et un seul élément de la collection de B
On doit prendre d'un seul coup les éléments de B avant de les faire correspondre aux éléments de A
Plusieurs techniques peuvent être utilisées par les élèves. Dans le groupe des trois élèves observés, la technique visée est d'abord la technique par correspondance terme à terme, technique qui doit être par la suite remplacée par une technique de dénombrement. Or l'enseignante, lorsqu'elle donne la consigne, se focalise sur le milieu matériel et ne précise les règles constitutives du jeu qu'au fur et à mesure que les élèves participent au jeu.
L'incomplétude de la définition du jeu associée à la restriction du jeu à une seule collection au lieu de deux collections distinctes avec les problèmes de langage dérivés sont deux perturbations introduites dans la mise en œuvre de la situation SVG. Ces perturbations semblent induire des obstacles pour les élèves.

II. 3. Discussion

Quelles situations d'enseignement en mathématiques pour des élèves en situation de handicap ? Ces situations, sont-elles spécifiques à ces élèves ?
Dans l'une des classes, nous avons montré (Assude et alii 2011) que cette situation a été adaptée pour des élèves qui ne reconnaissent pas globalement des petites quantités et a permis à ces élèves de faire quelques progrès dans l'apprentissage du nombre et du dénombrement. Les « perturbations » induites dans la mise en œuvre n'ont pas mis en question les enjeux de savoir et les règles constitutives du jeu. Cette situation qui n'a pas été conçue spécifiquement pour ces élèves semble être adaptable et profitable pour les apprentissages.
La deuxième mise à l'épreuve n'apporte pas les mêmes éléments de réponse (Assude et alii 2012). Les modifications apportées concernant le milieu matériel et l'incomplétude de la

définition du jeu mettent en question les enjeux de savoir. Les « perturbations » de la situation touchant les enjeux de savoir font en sorte que le jeu n'est plus le même.
Peut-on dire que la situation SVG n'est pas adaptable à ces élèves ? Deux raisons nous amènent à répondre plutôt négativement à cette question. La première est que le problème ici vient du fait que la contrainte d'adaptation des situations à la vie de la classe est plus forte que la contrainte de respect des enjeux de savoir. Il semble important que ces classes CLIS montrent qu'ils font des choses comme les autres classes. Comme les autres, ils doivent fêter Noël, et cela cache que l'enjeu de la situation est de faire apprendre des mathématiques. La deuxième raison est que le type de phénomène que nous avons observé n'est en rien spécifique à ce type de classes. L'incomplétude de la définition du jeu, qui touche aux règles constitutives du jeu, peut être observée aussi dans des classes ordinaires.
Que peut-on dire sur la robustesse de la situation « voitures et garages » ? Nous considérons que la robustesse d'une situation est estimée par la « stabilité » des enjeux de savoir lors de sa mise en œuvre (à l'épreuve) dans des contextes très différents et avec des acteurs très divers. Une situation est robuste si elle résiste aux « perturbations ». Il peut avoir plusieurs types de perturbations :
- élastique si les modifications de la situation n'atteignent pas les enjeux de savoir de la situation ;
- plastique si les modifications de la situation atteignent certains enjeux de savoir mais pas d'autres ;
- rupture si les modifications atteignent les enjeux de la situation; la situation semble la même mais ce n'est pas vraiment le cas.
Dans le cas de la deuxième classe CLIS, nous sommes dans le cas de perturbations qui constituent des ruptures par rapport à la situation initiale car la situation semble la même mais les enjeux de savoir ne sont plus les mêmes.

Ainsi, notre conclusion provisoire est que la situation SVG est « robuste » et peut être adaptable à des élèves en situation de handicap car notre deuxième mise à l'épreuve n'apporte pas de « preuve » contraire.

III. Intervention d'Yves Matheron : Rôles des ostensifs dans les phases de dévolution, de rappels mémoriels, de production de savoir par les élèves dans l'enseignement courant

III. 1. Position du problème

Le sujet abordé dans cette partie du texte concerne les tentatives faites par des élèves pour produire des réponses à des problèmes dont la résolution leur est dévolue ; certaines de ces réponses pouvant ensuite, lors de moments d'institutionnalisation et sous la direction du professeur, être converties en savoir nouveau. Dans les ingénieries didactiques telles qu'elles furent théorisées et construites en Théorie des Situations Didactiques (TSD), les connaissances apparaissent comme des stratégies optimales permettant aux actants de gagner dans un jeu contre un milieu dénué d'intentions (Brousseau, 1986). Certaines de ces connaissances sont issues de rétroactions aux tentatives menées et permettent ou favorisent une régulation des actions à venir, parfois jusqu'à la production de la réponse attendue.
Mais aussi bien au sein de telles ingénieries didactiques que dans l'enseignement ordinaire, l'entrée dans les ébauches de réponses au problème dévolu suppose, de la part des élèves,

l'engagement de certaines de leurs connaissances antérieures qu'ils adaptent à la situation nouvelle. La question qui se pose est celle des conditions de l'apparition de connaissances anciennes pour l'attaque du problème nouveau, de leur conversion, y compris lorsque les connaissances sollicitées sont erronées, inadaptées au problème, ne conduisant pas à la réponse mathématiquement valide. Analyser les raisons pour lesquelles elles réapparaissent afin d'être utilisées en situation consiste à rechercher quelles informations données par l'énoncé du problème, quels ostensifs, quelles situations didactiques antérieurement rencontrées, déclenchent ces rappels mémoriels. Mener à bien ce type d'analyses permet de commencer à éclairer le chemin resté jusqu'à ce jour passablement obscur et qui, alors qu'une classe est confrontée à la même situation problématique, conduit certains élèves à utiliser des connaissances anciennes les amenant à des tentatives fructueuses tandis que d'autres s'engagent dans des impasses.

Il ne s'agit pas d'étudier le rappel sous l'angle de la psychologie de la mémoire : faisant principalement porter son regard sur les sujets et non sur le savoir avec lequel ils interagissent, elle nous fournit peu de résultats didactiquement utilisables. Il s'agit plutôt, dans les situations dévolues aux élèves, de circonscrire et d'étudier le jeu, au sens des degrés de liberté, qui autorise l'engagement dans une stratégie de résolution plutôt que dans une autre. Le problème a été abordé il y a quelques années à partir des concepts de « bifurcation didactique » et de « dédoublement de milieu ». Il est ici repris en utilisant les notions d'ostensif et de cadre mémoriel. La raison de ce positionnement méthodologique tient au fait que les « milieux » – ce terme nécessitant un élargissement de sa définition originelle – des exemples illustrant l'exposé qui suit ne sont pas donnés avec les situations. On se place donc dans des cas proches de ce qui se fait dans l'enseignement ordinaire tel qu'il existe de la 6^e^ à la Terminale, où les milieux sont essentiellement des construits plus ou moins partagés, à partir de situations peu adidactiques. Dans les phases d'attaque d'un problème, les élèves mobilisent et sélectionnent alors certains éléments de la mémoire didactique d'un collectif. Sous la forme courante de l'ostension déguisée qui sollicite « la participation » des élèves, les souvenirs puisés dans une mémoire didactique supposée commune peuvent se convertir en propositions émises, soit par certains élèves, soit par des sous-groupes organisés par le professeur ; idées et propositions derrière lesquelles on se retrouve ou que l'on critique, etc. De là l'existence de degrés de liberté différemment investis et qui, par conséquent, génèrent des stratégies différentes.

III. 2. Ouverture du rappel mémoriel : un exemple

L'exemple qui suit est tiré de l'observation de séances consacrées à l'enseignement des systèmes de deux équations du 1er degré à deux inconnues en 3e (élèves de 14 à 15 ans). La conception de ces séances a été réalisée par une équipe dirigée par Alain Mercier[3]. L'enseignante est celle de la classe et elle a accepté d'être filmée, de même que les élèves. Les films des séances sont transcrits. Les documents sur lesquels ont travaillé les élèves sont photocopiés et conservés par les chercheurs. La première séance débute par la donnée d'un ensemble de cinq problèmes du même type que les élèves ont à résoudre. On ne s'intéresse dans ce texte qu'aux trois premiers problèmes reproduits ci-dessous :

Premier problème

A la clinique “ la Sauvegarde ”, il n'y a que des chambres à un lit et des chambres à deux lits. Aujourd'hui la clinique est complète : vingt malades occupent tous les lits des 13 chambres. Combien de chambres à un lit et de chambres à deux lits y a-t-il à la Sauvegarde ?

Deuxième problème

Un grand hôtel dispose de 50 chambres et peut recevoir 83 personnes. Il y a des chambres

[3] Equipe constituée autour d'Alain Mercier, de Gilles Lataillade, Maryvonne Merri, Roland Pouget.

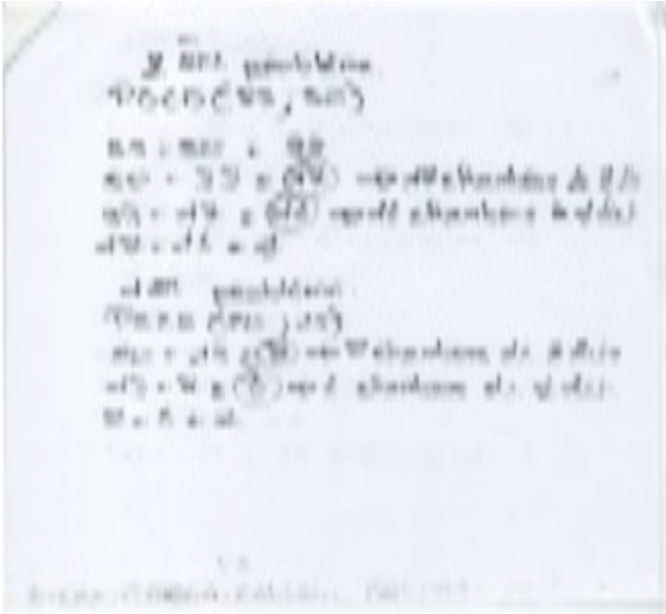
pour une personne et des chambres pour deux personnes. De combien de chambres pour une personne et de combien de chambres pour deux personnes dispose cet hôtel ?

Troisième problème

Dans un refuge de montagne, il n'y a que des chambres à deux lits et des chambres à 4 lits. Aujourd'hui elle affiche complet, 30 randonneurs occupant tous les lits des 12 chambres du refuge, etc.

A ce moment de l'année, les élèves ne disposent que de leurs connaissances arithmétiques venues de l'école élémentaire et de celles, acquises en 4^{e}, relatives à la mise en équation du 1er degré à une inconnue. L'observation montre qu'ils cherchent à résoudre ces problèmes en commençant par utiliser des techniques personnelles qui recourent à divers types d'ostensifs : dessins figurant des chambres et des lits, écritures, flèches, traits, symboles mathématiques, etc. Au bout de quelques séances, l'idée émerge de la possibilité d'une mise en équations d'un type inédit jusqu'alors puisqu'y figureront deux inconnues. Certains élèves inventent alors des stratégies de résolution puis, sous la direction du professeur qui a suggéré le recours aux ostensifs x, y et à l'accolade, la classe parvient aux techniques de résolution de ce niveau : substitution et combinaison linéaire.

Ce qui nous intéresse dans ce qui suit ne se rapporte pas à l'analyse du processus, mais au cas de deux élèves, Akim et Alexandre. Le professeur a engagé la classe dans la recherche des problèmes en affirmant la possibilité pour les élèves de les résoudre : « Ces problèmes sont choisis de telle manière que vous puissiez résoudre certains d'entre eux avant même de connaître une méthode mathématique valable pour tous ». Puis elle a laissé un temps de recherche ; tout d'abord une recherche personnelle, puis en petit groupe. Dans son groupe, si Akim confronte tout d'abord ses résultats à ceux d'Alexandre, chacun utilisant pour cela sa calculatrice, il se met ensuite à chercher, mais en vain, un classeur de mathématiques complet auprès de ses camarades. Il se lance alors de nouveau dans des calculs. L'explication de cette fébrilité est fournie lorsque, après avoir rencontré d'autres groupes, le professeur interagit avec le binôme constitué d'Akim et d'Alexandre. Tous deux déclarent, au grand étonnement du professeur, qu'ils ont utilisé le PGCD : « donc, vous avez calculé avec le PGCD ; c'est marrant ! Vous avez pensé aux problèmes d'arithmétique qu'on a vus en début d'année. Et avec le PGCD, ça marche ? Expliquez-moi un peu. » Ils rectifient alors leur propos : « ça marche bien pour les deux premiers problèmes, pas pour le troisième ». C'est d'ailleurs ce que montre la feuille sur laquelle figurent leurs réponses ; on peut raisonnablement concevoir qu'ils ont dû vérifier leurs résultats en remplaçant, dans les deux premiers problèmes, par les valeurs obtenues :



L'explication du « phénomène » tient au fait que la mise en équations des deux premiers problèmes aboutit à deux équations dans lesquelles le coefficient de x est 1. L'application de l'algorithme des soustractions successives, enseigné pour le calcul du PGCD en début d'année, équivaut, lors de la première étape, à soustraire membre à membre ces deux équations, et donc à éliminer les termes en x. La deuxième soustraction à effectuer dans l'algorithme du PGCD équivaut à déterminer y par substitution dans le système des deux équations. La mise en équations du troisième problème aboutit au système $\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$ dans lequel les coefficients de x d'une part et de y d'autre part diffèrent. La coïncidence entre la technique de recherche du PGCD de 12 et 30 par soustractions et la résolution du système ne se réalise plus dans ce cas.

Relativement au projet d'enseignement, on est ici face à ce que Claire Margolinas (2005) et Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1998) ont appelé une bifurcation didactique. Le terme « bifurcation » apparaît dans les travaux menés sur le milieu et sa structuration telle que l'a définie Guy Brousseau, en lien avec le contrat didactique, et dans les développements du modèle qui ont suivi.

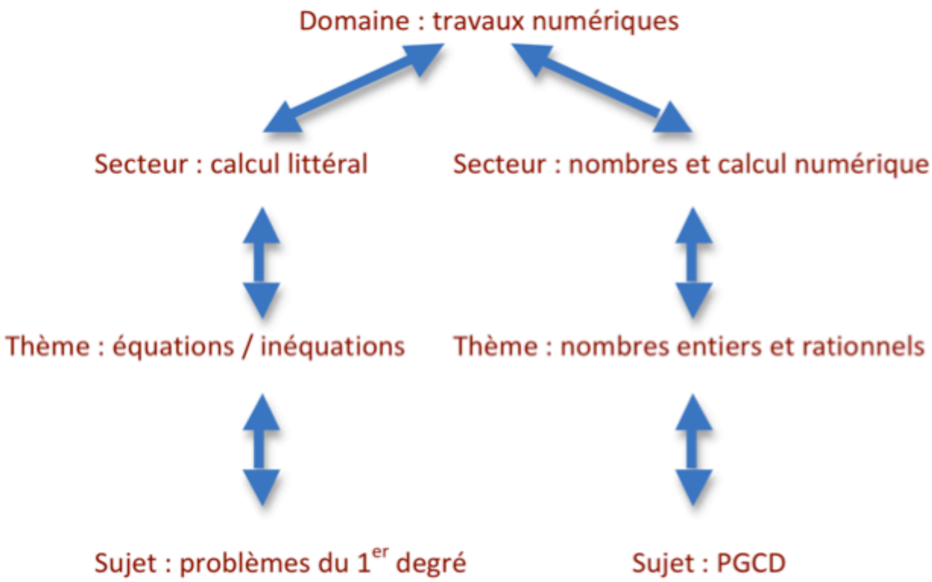
Mais, une fois l'existence du phénomène de bifurcation attesté, la question qui se pose, et qui reste largement ouverte lorsqu'on tente d'aller au-delà de l'analyse d'un milieu – milieu à la structuration le plus souvent « bancale » dans les situations ordinaires d'enseignement –, est celle des causes provoquant ces bifurcations. L'idée suivie dans ce texte consiste à analyser ce qui, pour ces élèves et à partir d'une recherche d'interprétation du contrat didactique, a permis à la fois la constitution d'un milieu qui rétroagira et des moyens pour agir (ou encore d'un média, comme suggéré par Chevallard (2008)[4]). On considère ici que le milieu, sur ou contre lequel on agit pour parvenir à résoudre le problème, est constitué de rapports stables, naturalisés (Chevallard, 1992) à des organisations de savoir, parfois incomplètes, issues de domaines, secteurs, thèmes ou sujets. Il en est de même des médias dans le cas le plus fréquent où les élèves ont à rechercher en classe, c'est-à-dire sans le secours de documents (manuels, ouvrages de bibliothèque, Internet, etc.), les moyens à mobiliser pour la résolution

[4] « À côté de ce recopiage pur et simple, une autre voie – royale – a été dès longtemps ouverte : au lieu d'emprunter à la culture, c'est-à-dire à autrui, on produit par soi-même, au moyen du *raisonnement*, ressource consubstantielle à l'humain, média qui serait à lui-même son propre milieu rendant inutile tout autre milieu. »

attendue. L'exemple d'Akim montre d'ailleurs une recherche vaine – ce qui est un indice de la rareté des médias ordinairement présents dans une classe – du seul document qu'il imagine pouvoir y trouver : un classeur de cours.
A défaut de pouvoir solliciter la mémoire du collectif constitué de la classe, le classeur de cours constitue un objet porteur de mémoire externe pouvant ainsi suppléer le souvenir personnel. Il reste néanmoins à analyser ce qui a guidé ces deux élèves vers le calcul d'un PGCD ; l'un d'entre eux allant probablement jusqu'à tenter la consultation de la partie du cours ayant trait au chapitre sur le PGCD[5]. En ce point, se rencontre la nécessité d'aborder le thème de la mémoire didactique, c'est-à-dire d'un univers cognitif ancien relativement stabilisé et dont on mobilise le souvenir. Il fournit des aides pour se remémorer des rapports antérieurement établis à des organisations mathématiques relevant des notions et concepts évoqués ; aides qui peuvent être vues comme des médias. La question qui se pose alors est celle des objets et des indices autorisant ce rappel mémoriel. Ces objets sont des ostensifs (Bosch & Chevallard, 1999), qu'on appelle parfois « représentations » au risque de la polysémie du terme, dont la valence sémiotique est, dans le premier moment de la recherche d'un problème, celle qui s'exprime le plus fortement ; l'autre valence, instrumentale, n'est pas nécessairement sollicitée à cet instant.
On peut inférer une reconstitution « du chemin » emprunté par Akim et Alexandre, qui les a conduits de la lecture de l'énoncé aux calculs de PGCD. Pour une description plus sûre, il aurait fallu interroger ces deux élèves afin de connaître les raisons pour lesquelles le décryptage des énoncés de ces problèmes, à travers le prisme de leur interprétation du contrat didactique, les a conduits vers le recours au PGCD de deux nombres[6]. On ne peut seulement qu'inférer les raisons et le chemin suivi.
Lors de la prise de connaissance des énoncés de ces problèmes par les élèves, l'enseignante a tout d'abord évoqué une clause du contrat didactique relative à cette situation : les élèves disposent de connaissances anciennes leur permettant de résoudre ces problèmes. La lecture des énoncés permet de situer sans ambiguïté ces problèmes comme relevant du domaine des travaux numériques : des nombres sont donnés et les questions portent sur des nombres à trouver. En dehors des réponses obtenues par tâtonnement, après essais et erreurs (technique utilisée par certains élèves), deux grands types de modélisations s'offrent aux élèves : soit une modélisation algébrique (recours au calcul littéral) ou pré-algébrique (recours à d'autres types d'ostensifs, comme des dessins, des traits, des flèches, etc.) figurant les données et les inconnues, soit une modélisation de type arithmétique. La clause contractuelle relative aux connaissances antérieures pousse Akim et Alexandre à choisir le secteur de l'arithmétique, intitulé « Nombres et calcul numérique » dans le programme de 3^{e} : un chapitre relatif au PGCD de deux nombres a en effet été enseigné au cours de l'année. L'explication de ce choix peut être trouvée dans les ostensifs de l'énoncé : ils sont relatifs à la donnée de deux nombres (le nombre de personnes et le nombre total de chambres), comme dans des problèmes sur le PGCD. La majorité des élèves ont choisi d'autres voies d'attaque, notamment préalgébriques. Le recours à une modélisation par des inconnues représentées par des lettres apparaît plus tardivement, dans les séances ultérieures.
On peut alors représenter le chemin pris par Akim et Alexandre (à droite) et celui (à gauche) envisagé par les concepteurs du scénario des séances – chemin effectivement suivi par la majorité des élèves lors des séances postérieures –, en passant par des niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2002) qui relèvent des grands types d'organisations

[5] L'observation du film ne permet pas d'affirmer avec certitude qu'Akim recherchait un classeur pour consulter ce chapitre. Néanmoins, cela est fortement probable car l'étude du PGCD a été menée quelques mois auparavant (en début d'année dit l'enseignante). Les rapports établis par ces deux élèves sont donc relativement anciens ; ce qui justifie que l'on ait besoin de recourir à cette partie du cours consignée dans un classeur.
[6] Je n'ai eu connaissance de ces films, et des documents associés, que quelques années après leur réalisation.

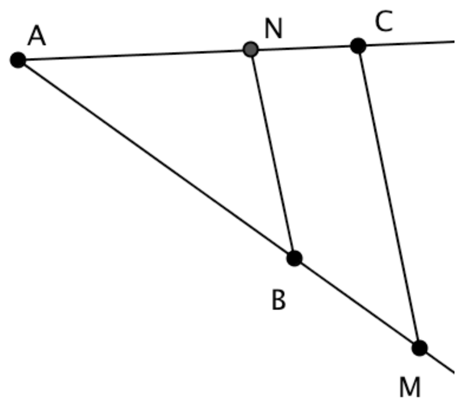
mathématiques : domaines, secteurs, thèmes, sujets.



L'interprétation, à partir de certains termes du contrat didactique, de la signification des ostensifs fournis lors de la prise de connaissance de la tâche, influe donc sur la reconstruction mémorielle permettant l'établissement par les élèves d'un milieu et des ressources sur et grâce auxquelles ils agissent dans ce type de situations adidactiques. Le projet enseignant aurait pu être temporairement mis en défaut par Akim et Alexandre pour qui le temps du replacement nécessaire au sein de certains niveaux a été plus rapide que pour le reste de la classe. La rétroaction du milieu – « la technique du PGCD » est « valable » pour les deux premiers problèmes, mais pas pour le troisième, déclarent-ils – permet de maintenir une dimension adidactique dans cette situation, malgré la bifurcation suivie par ces deux élèves.

III. 3. Fermeture du rappel mémoriel : un exemple

L'observation qui suit porte sur une séance dans une classe de 4e dont l'enseignement a été confié à un professeur stagiaire. Les élèves rencontrent le problème suivant : « ABC étant un triangle isocèle de sommet A et dont les côtés égaux ont pour longueur x, N étant un point de $[AC]$ tel que $CN = 1$, M étant un point tel $B \in [AM]$ et $BM = 2$, on a $(BN) // (MC)$. Déterminer x. »



Les élèves reconnaissent dans la figure dessinée au tableau par le professeur un ostensif qui appelle l'usage du théorème de Thalès. Ils écrivent alors $\dfrac{BN}{MC} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AM}$ restreintes ensuite à : $\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x+2}$.

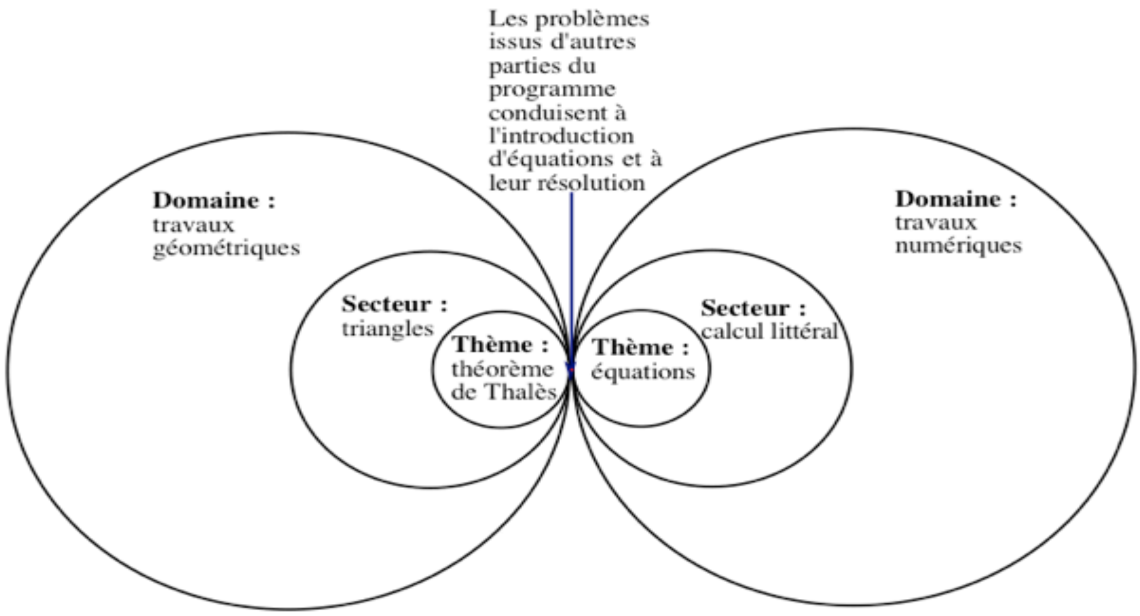
Puis la recherche de la valeur de x conduit à l'équation : $(x - 1)(x + 2) = x^2$. Le professeur fait alors noter au tableau, par un élève, la rédaction de ce raisonnement selon les canons didactiques en usage à ce niveau : « Dans *AMC*, comme $(CM) // (NC)$, alors d'après le théorème de Thalès… »

Arrivé à l'équation notée en insistant sur le produit $(x - 1) \times (x + 2) = x^2$, le professeur s'assure que tout le monde a compris le raisonnement : « Est-ce que tout le monde est d'accord ? » Plusieurs élèves répondent que oui. Il poursuit : « Ces parenthèses-là, comment on fait pour les supprimer ? ». De nombreuses voix répondent qu'il s'agit de la distributivité. Le professeur fait alors remarquer : « Oui, c'est la distributivité. La distributivité, c'est quand y'a un nombre multiplié par une expression entre parenthèses. Là, on a deux parenthèses multipliées entre elles ! » Ce qui ne semble pas poser problème aux élèves qui se lancent dans des calculs suivis de propositions énoncées oralement lorsque le professeur les sollicite, mais qui ne permettent pas d'aboutir.

Dans le cas présent, au cours des différentes étapes qui ont conduit jusqu'à l'équation, le *topos* qui aurait pu être celui des élèves a été en grande partie occupé par le professeur : construction de la figure et indication de la nécessité de « supprimer les parenthèses » notamment. La mention orale de cette « suppression » appelle, de manière quasi spontanée chez les élèves, la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition ; appel sans doute renforcé par la présence de l'ostensif « × ». Le non-ostensif « distributivité » appelle à son tour la technique de développement d'une expression algébrique. A ce moment de l'année, la seule connaissance technique disponible par les élèves vient de la classe de 5^e et concerne le développement de $k(a + b)$. Le professeur attire leur attention sur la nouveauté du développement demandé, du type $(a + b)(c + d)$, mais les élèves en restent à la mise en œuvre de la technique ancienne, sans s'apercevoir que l'expression sur laquelle ils ont à travailler n'entre plus tout à fait dans le pattern de l'écriture « standard » qu'ils connaissent et qu'ils associent à la distributivité. Les tentatives des élèves se heurtent rapidement à la difficulté nouvelle face à laquelle ils sont confrontés.

Un élève propose par exemple d'écrire $(x - 1) \times (x + 2) = (1 \times x - 1 \times 1) \times (1 \times x + 1 \times 2)$. Est-ce le souvenir de la factorisation d'expressions comme $x^2 + x$ qui le pousse à faire apparaître 1 ? Puis de factoriser par 1. D'autres lui font remarquer que cela ne permet pas d'avancer dans le problème. Le débat se poursuit jusqu'au moment où un élève, plus inspiré ou redoublant, propose de considérer $(x - 1)$ comme un nombre et de développer comme cela se faisait l'an dernier. La connaissance de la technique du développement de $(a + b)(c + d)$ est enfin apparue comme un besoin nécessité par le travail mathématique, même si la rencontre des élèves avec leur ignorance, pour reprendre l'expression d'Alain Mercier (1992), n'a pas été immédiate.

Le retour à une analyse en termes de niveaux de codétermination didactique permet de mettre à jour le travail du professeur afin de situer son cours, et l'intention qu'il porte d'enseigner le développement de $(a + b)(c + d)$, à la rencontre de deux domaines. C'est ce qu'autorise l'organisation du programme et la mention indiquant que « diverses parties du programme conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution ». Il place ainsi les élèves au point de contact de deux domaines de leurs connaissances antérieures afin de faire advenir la technique nouvelle qu'il souhaite enseigner : celui des travaux géométriques à partir du théorème de Thalès, et celui des travaux numériques par le biais des équations et de la distributivité de la multiplication sur l'addition. C'est ce qu'illustre le schéma ci-dessous :



Lors de cette séance, les élèves n'ont éprouvé aucune difficulté pour reconnaître et utiliser le théorème de Thalès, puis pour parvenir jusqu'à l'équation du problème. Le rappel mémoriel est dans ce cas très encadré. En effet, les ostensifs fournis par le professeur – la figure qu'il dessine au tableau appelle le théorème de Thalès, la lettre *x* qu'il choisit pour désigner la longueur à trouver appelle les équations – les ont guidés vers le point où il souhaite les conduire. La clause du contrat didactique qui veut que le temps didactique avance, que des savoirs nouveaux adviennent, place les élèves en position d'attente : ils ne peuvent être engagés tout le temps de la séance dans l'exercice de la reconnaissance de savoirs anciens dont ils ont acquis la maîtrise et qui ne sont que prétextes pour enseigner un savoir qu'ils ignorent encore.

III. 4. Développements à partir de ces deux exemples

Le sociologue de la mémoire Maurice Halbwachs expliquait que le souvenir personnel est provoqué par le replacement « au point de vue du groupe » auquel on a appartenu. Il définissait alors des cadres sociaux de la mémoire (1924) propres aux grandes institutions qu'il étudiait : famille, religion, classes sociales. Dans un second travail sur ce thème, publié à titre posthume en 1950, il s'attachait à étudier les cadres mémoriels spécifiques d'institutions de moins grande ampleur : celles des musiciens, des « géomètres » par exemple. Poursuivant la descente vers le microsocial, les deux exemples qui précèdent indiquent que la modélisation issue de la sociologie de la mémoire est aussi opérante pour la mémoire didactique que l'on rencontre dans une classe. L'interaction didactique provoque et s'appuie sur l'instauration de « micro cadres institutionnels de la mémoire didactique » ; c'est ce qu'a montré le travail de thèse d'Andrea Araya (2008). Dans le cas général, le « replacement au point de vue du groupe » s'appuie sur ce qui s'est produit ou ce que l'on a fait au sein du groupe. Dans le cas d'une institution didactique, l'objet sur lequel porte l'activité est un objet de savoir. Ou plutôt, pour être plus précis, *des* objets de savoir qui s'organisent, s'agrègent et se structurent en divers types d'organisations mathématiques : sujets, thèmes, secteurs, domaines. Le « replacement au point de vue du groupe » est guidé par l'interprétation d'indices, d'ostensifs le plus souvent mathématiques, « manipulés » par professeur et élèves au sein de la relation didactique.
Dans le premier exemple sur la recherche de deux nombres entiers, les deux élèves observés se placent au niveau de l'arithmétique et y trouvent les connaissances qu'ils ont du domaine,

parmi lesquelles le PGCD. L'interaction avec le texte du problème (deux nombres entiers à rechercher), avec la présentation qu'en fait le professeur et les questions posées par certains élèves, maintient les élèves au niveau du domaine. Mais des indices non nécessairement mathématiques peuvent aussi être convertis en point d'appui pour un replacement dans un niveau d'organisation mathématique. C'est le cas de l'échange professeur – élèves qui suit, où certains d'entre eux vont jusqu'à interpréter l'expression « banque de problèmes » utilisée par l'enseignante, pour rechercher le niveau en lequel se replacer : P : Quel est le mot qui est un critère ?… P : Hein, c'est le mot « banque » ? … P : Non ? … P : Qu'est-ce qui te fait peur ? E'' : Calcul P : Vous pensez, parce que c'est intitulé « banque de problèmes », que ça a un rapport direct avec des calculs, non ?
Dans le second exemple, la résolution d'une équation, et donc les ostensifs qu'amène avec elle son écriture, replace immédiatement les élèves dans le secteur de l'algèbre alors qu'ils travaillaient auparavant dans le domaine de la géométrie (le théorème de Thalès). Le professeur a contractuellement placé les élèves au sein d'un niveau de codétermination qui leur permet de se remémorer certains objets avec lesquels travailler pour attaquer un problème nouveau. A travers ces deux exemples apparaissent, avec des effets contrastés – un replacement dans un domaine vaste ou restreint –, les « métaphores fondamentales » dont parlait Alain Mercier à partir des notations (en fait des ostensifs). Elles indiquent, du point de vue des élèves qui ignorent le savoir qui va advenir, quelles inférences possibles pour se placer en position de « créateurs de mathématiques », trouver des points d'appui (des médias) et des milieux qui rétroagiront.
L'étude qui a été exposée à partir de la mémoire débouche sur la question d'un enseignement des élèves que la société, par le biais de certaines de ses proclamations officielles, voudrait parfois voir devenus « créateurs de mathématiques », l'espace d'un moment didactique. Au-delà des cercles noosphériens qui la posent, la réponse à la question passe par la résolution d'une autre, difficile car concernant les conditions nécessaires à disposer dans la situation didactique pour que la *métis* des élèves, c'est-à-dire la ruse dans son sens positif d'intelligence, ait des chances d'advenir ; cette question étant à traiter dans l'enseignement « standard », et non pas seulement dans un lieu dédié à la recherche. Deux exemples tirés du travail de (CD) AMPERES illustreront des tentatives d'abord de la question à l'aide d'une dialectique mémoire – *métis*.
Le premier a trait à un travail mené en 5^{e}, au tout début de l'étude des nombres relatifs : les élèves les rencontrent à partir de programmes de calcul du même type qu'ils permettent de simplifier. Il est tout d'abord demandé aux élèves de calculer mentalement des programmes du type $n + a - (a + 1)$, avec n et a entiers naturels et $n \geq 1$. Après avoir travaillé sur un certain nombre de spécimens de ce type, ils sont convaincus qu'il suffit de soustraire 1 à a pour obtenir le résultat cherché. Le professeur pose alors la question de la justification mathématique de cette technique ; par exemple dans le calcul de 435 + 61 – 62. Ne pouvant calculer 61 – 62 (puisque « on ne peut soustraire à un nombre qu'un nombre qui lui est inférieur » et que c'est l'une des connaissances nouvelles dont l'enseignement est visé), les élèves sont amenés à travailler sur 435. Les idées fusent qui s'appuient sur diverses métaphores, notamment celles qui voudraient voir dans les nombres donnés des nombres de points ou de jetons… Le professeur rappelle qu'une justification mathématique est attendue et indique que les élèves pourraient la trouver s'ils se souvenaient de ce qu'ils faisaient « quand ils étaient petits ». C'est alors que certains élèves suggèrent « d'emprunter 1 à 435 pour l'ajouter à 61 ». Le mécanisme qui fait advenir une analogie entre la situation à laquelle les élèves sont confrontés et l'algorithme de la soustraction mériterait d'être finement analysé. Néanmoins, interviennent deux conditions qui le favorisent. L'une concerne les ostensifs contenus dans l'expression, qui indiquent à la fois les impasses à éviter et le résultat auquel aboutit le calcul : la soustraction de 1 à 435. L'autre est la remarque du professeur. Elle

encourage certains élèves à se replacer « au point de vue » de la petite communauté à laquelle ils appartenaient en CE1 – CE2, lorsqu'on y étudiait l'algorithme de la soustraction.
L'autre exemple concerne la démonstration en 4^e du théorème dit « de la droite des milieux » dans un triangle. Les élèves savent qu'elle est parallèle au troisième côté, mais l'attaque de la démonstration résiste. Une telle démonstration constitue, peut-être pour la première fois dans le cursus secondaire des élèves, une rupture manifeste de contrat. Une des clauses du contrat didactique stipule en effet que les données d'un problème suffisent pour le résoudre ; or, dans ce cas, il faut s'autoriser à rajouter des données à l'énoncé, et surtout à la figure, pour démontrer le théorème. Le professeur demande que l'on se remémore tous les théorèmes connus concluant au parallélisme de deux droites. Il y en a peu à ce niveau : certains portent sur le parallélogramme, sur les angles alternes - internes égaux, sur des perpendiculaires à une même droite. Pour chacun d'eux, son efficacité dans la résolution du problème est testée après examen des hypothèses que doit satisfaire la figure pour leur utilisation. La classe aboutit à un constat d'échec. On recherche alors ce qui manque à la figure pour pouvoir utiliser de manière adéquate les quelques théorèmes dont on dispose. Les propositions ne tardent guère à venir lorsqu'on examine le cas du théorème sur les perpendiculaires communes à une droite que l'on devrait utiliser dans un triangle : ce sera une médiatrice ou une hauteur du triangle ! La discussion se conclut par le choix de la hauteur issue du sommet opposé.
Dans ces deux cas, ce que l'on pourrait attribuer à la « créativité mathématique » des élèves résulte de l'organisation par le professeur des conditions didactiques favorisant une dialectique de la mémoire et de la *métis*. Pour les élèves, la recherche conjugue la mobilisation de connaissances antérieures, c'est-à-dire une mémoire didactique, et la *métis* qui y puise des souvenirs pratiques qu'elle adapte à la situation constituée du problème à résoudre. On appelle une mémoire afin de disposer de ressources. Hors des classes, la *métis* s'appuie d'ordinaire sur une mémoire externe, déposée dans la culture à travers la consultation de ressources diverses. En classe, sous les conditions prévalant actuellement dans le système éducatif, la mémoire n'est guère qu'interne, propre à une petite communauté : celle des élèves qui sont préalablement passés par un enseignement mathématique (dans le cas des élèves du second degré évoqués dans ce texte). Une des tâches enseignantes consiste à disposer dans l'environnement didactique les ostensifs qui favoriseront le rappel pour constituer cette mémoire interne, sans trop en dire néanmoins puisqu' « à trop vouloir aider les élèves à réussir, on les fait échouer. »

IV. Intervention de Serge Quilio

IV. 1. Introduction

Nous présentons dans ce qui suit des observations recueillies dans une recherche en cours conduite par des didacticiens des mathématiques de l'Institut Français de l'Éducation (IFÉ) à l'école primaire Saint Charles située en ZEP à Marseille. Dans cette recherche, nous étudions les conditions actuelles de mise en œuvre d'ingénieries didactiques conçues par l'équipe de Guy Brousseau au Centre pour l'Observation et la Recherche en Mathématiques[7] (COREM) de Talence dans les années 1980 pour l'enseignement et l'apprentissage des algorithmes opératoires (soustraction, multiplication et division). Nous cherchons à montrer la pertinence pour « l'enseignement ordinaire »[8] des choix didactiques qui dirigent ces ingénieries tout en cherchant à décrire ce que les professeurs qui conduisent la mise en œuvre en classe doivent effectivement faire. Nous montrons dans ce qui suit des conditions de réalisations effectives

[7] Cité désormais COREM
[8] Nous employons cette expression pour signifier que nous considérons une réalisation de cet enseignement dans le cadre ordinaire de l'enseignement primaire.

d'enseignement d'ingénieries didactiques, ingénieries conçues par l'équipe de G. Brousseau au COREM de Bordeaux, dans une école de ZEP à Marseille. Ces ingénieries ont pour principe fondateur de présenter une forme d'enseignement basée sur une genèse artificielle du savoir qui engage l'étude collective d'une question. Nous décrivons ici à l'aide d'un épisode extrait de séances d'enseignement de la soustraction filmées en 2009-2010 à l'école Saint Charles de Marseille comment des professeurs parviennent à aménager un milieu pour l'étude et la recherche, en faisant en sorte que les élèves s'emparant d'outils, une boîte pour compter des objets par exemple, produisent des extensions d'usages à l'aide de connaissances mathématiques antérieures : la connaissance du code numérique et l'addition. Sous cette description nous retrouvons la problématique de la dévolution aux élèves. Mais il s'agit ici de la dévolution de la construction d'une réponse mathématique à un problème et non pas un exercice d'application d'un algorithme enseigné préalablement. Nous donnons ainsi à voir dans ce contexte spécifique de ZEP comment un professeur engage les élèves dans l'étude d'une question qui motive le savoir à partir d'une expérience culturelle, le pari, et qui fournit à ces derniers une interprétation de la situation didactique qu'ils ont à affronter.

IV. 2. L'ingénierie répliquée dont nous observons les conditions de réalisation : la soustraction au CE1

L'ingénierie dont nous présentons des éléments de l'analyse en cours est un processus organisé en 16 leçons conçu et réalisé originellement au Centre pour l'Observation et la Recherche de l'Enseignement des mathématiques (COREM) de Talence par l'équipe de Guy Brousseau (Bola, 1992). Des éléments de cette ingénierie sont connus parce qu'elle fonde le travail de remédiation engagé par Brousseau auprès de Gaël (Brousseau G., 1998). L'ensemble de cet enseignement s'est déroulé sur 26 leçons menées durant l'année scolaire 2009-2010 dans une classe de CE1.
Au cœur de l'apprentissage envisagé se trouve l'usage d'*une boîte* dans laquelle on place un nombre connu de pièces en plastique venues d'un jeu de construction (des *briques*, que les élèves peuvent compter) et l'étude conduite par les élèves sous la direction du professeur consistera d'abord à résoudre l'ensemble des problèmes qui leur seront posés au moyen d'actions que cette boîte permet d'organiser. Par exemple, si on place dans la boîte un nombre connu de briques il est possible alors d'en sortir un certain nombre, de les compter, et de chercher combien sont restées cachées. On peut aussi chercher à connaître le nombre de briques qu'il faut ajouter à celles de la boîte afin d'atteindre un nombre donné. Dans les deux cas, la vérification se fera par comptage des briques contenues dans la boîte après la manipulation. Ces situations fondent l'ensemble des problèmes rencontrés.
Dans la première phase du processus qui comprend trois leçons, la boîte est utilisée individuellement par les élèves, pour *simuler les situations proposées* (changement d'état, partitionnement). Les élèves procèdent par comptage ou surcomptage des briques sorties ou rentrées pour à résoudre les problèmes que le professeur pose. La boîte joue ainsi le rôle d'un *substitut matériel de la situation* évoquée.
Nous observons ici le passage à la deuxième phase de l'enseignement (à partir de la quatrième leçon) dans laquelle le professeur va proposer de parier (au sens de s'engager pour gagner), sur la réponse avant d'effectuer la manipulation des briques (matériel substitutif) et leur comptage effectif dans la boîte. Dans cette phase c'est le nombre qui est sollicité comme moyen intellectuel pour produire une réponse et ce sera progressivement l'addition qu'ils mobilisent pour vérifier leurs résultats. Durant ces leçons, les élèvent doivent progressivement passer de la manipulation matérielle à l'usage du nombre et de l'addition pour vérifier.
Nous cherchons à connaître les « gestes » et les ostensifs dont s'empare le professeur afin qu'il dévolue le problème aux élèves pour qu'ils s'engagent dans l'identification du problème

que soulève *le pari*, dont ils ont une référence culturelle leur permettant d'entrer dans la situation ? Comment s'y prend-il pour placer les élèves sur la question du *pari à coup sûr* que permet l'usage du nombre et de l'addition pour vérifier ?

IV. 3. Le cadre Théorique

Nous convoquons dans le travail d'analyse la notion de jeu telle qu'elle est envisagée dans le cadre théorique de l'Action Conjointe en Didactique (TACD) et mise en œuvre dans l'étude de l'action effective en mathématiques (Quilio, 2008). Sous cette description, le jeu est un modèle sous lequel est vu l'action effective du professeur et des élèves permettant de produire une description de l'action conjointe permettant d'analyser ensemble le contrat didactique (en tant que systèmes de normes ou d'habitudes ou attentes du professeur et des élèves) et le milieu (en tant que ressources matérielles ou cognitives de la situation) qui caractérise une situation d 'enseignement / apprentissage. Le réseau des descripteurs fourni par la notion de jeu en Théorie de l'action conjointe (Sensevy & Mercier 2007), la mésogenèse (comment quoi), la topogenèse (comment qui) et la chronogenèse (comment quand) décrit la forme de vie (Wittgenstein, 2005), le milieu et le contrat didactique de la situation, construite par le professeur pour le jeu de langage du pari.

IV. 4. La description de la mise en œuvre du pari

Nous examinons la phase du passage de la manipulation de la boîte à l'usage du nombre pour résoudre des problèmes soustractifs. Ce passage est réalisé au moyen d'une situation de pari. Le professeur reprend une situation connue des élèves, et qu'il savent résoudre avec la boîte : X briques dans la boîte, Y sont enlevées, combien reste-t-il de briques dans la boîte.
Le professeur présente ainsi collectivement à la classe le problème suivant avec la boîte. Les nombres du problème seront 45 et 18. La boîte est refermée et 18 cubes sont sortis sur un plateau. « Combien y a-t-il de cubes dans la boîte ? Vous allez parier sur votre résultat si vous le souhaitez». Les élèves annoncent leurs paris et le professeur organise une session de discussion collective des paris annoncés par les élèves.

	La discussion des paris est organisée collectivement par l'enseignant. Le problème est affiché au tableau. Il y a un pupitre disposé devant le tableau de la classe où une boîte est déposée. Les 18 cubes sortis sont posés sur le couvercle.

La discussion s'engage[9] :
P: combien il reste de briques dans la boîte / ***vous avez proposé des réponses / y a des élèves qui pensent qu'il en reste*** *[P montre sur la feuille des réponses]*
E: trente-neuf

[9] Dans cette transcription P indique le professeur, E les élèves non identifiés et EE les élèves s'exprimant collectivement. Le prénom est précisé pour les élèves.

P: y en a qui pensent qu'il en reste [montre]
E: zéro
P: zéro / y en a qui pensent qu'il en reste trente et une /d'autres vingt-sept /d'autres trente /d'autre trente-trois d'autres trente-sept /qui ne veut plus parier [Aminata lève timidement le doigt.]

P occupe une position topogénétique haute *(vous avez proposé des réponses / y a des élèves qui pensent qu'il en reste)*. Les objets du milieu convoqués sont des nombres (*zéro / y en a qui pensent qu'il en reste trente et une /d'autres vingt-sept /d'autres trente /d'autre trente-trois d'autres trente-sept*). Le qui ne veut plus parier enclenche la discussion qui va suivre entre Mounir et P sur l'usage du pari dans la situation.
P: Mounir tu as répondu
Mounir: zéro
P: est-c(e) que tu veux toujours parier
Mounir: oui
M: tu penses qu'il n'y en a plus dans la boîte / on a tout sorti
EE: non
E: y a pas zéro
P occupe toujours une position topogénétique haute pour préciser les actions opérées sur les objets du milieu et de la relations entre les objets et les nombres (ici le zéro) :
P: tu as suivi c(e) que j'avais / ma manipulation
Mounir [prend l'air surpris]: oui
P: tu as bien suivi
Mounir: oui [hoche la tête en signe d'approbation]
P: notamment les derniers quand j'ai sorti les huit
[Mounir hoche la tête en signe d'approbation.]
P: combien d(e) paquets d(e) dix on a mis dans la boîte
EE: quatre
Mounir: quatre
P: quatre paquets d(e) dix / et
Mounir: cinq [inaudible]¤<1335289>(0:22:15.3).
Mounir a bien compris les différentes relations entre les objets (nombre d'objet sortis, nombre d'objets initial). P traite ensuite les autres propositions de paris puis revient un peu plus tard sur l'annonce de Mounir pour préciser les termes du contrat avec le pari:

P: ***attention non c'est là où tu te trompes le pari / le jeu du pari c'est si tu es sûre de ta réponse / si tu vas gagner / il faut qu(e) tu sois sûre de gagner / est-c(e) que tu es vraiment sûre de gagner***
Awa: [inaudible]¤<1911879>(0:31:51.9)
P: alors ne parie pas / Mounir ***est-c(e) que tu es sûr avec tes zéro de parier*** */ tu es sûr de gagner*
Mounir: ***oui***
P: ***tu es sûr de gagner*** */ est-c(e) qu'avec zero / en remettant les dix-huit on a retrouvé les quarante-cinq / on les a retrouvé les quarante-cinq [Lilian rit.]*
La forme de vie qui doit être associée au jeu de langage du pari, en mathématique, est définie par une règle du contrat . Parier c'est être sûr de son pari pour gagner (*tu es sûr de gagner / est-c(e) qu'avec zero / en remettant les dix-huit on a retrouvé les quarante-cinq / on les a retrouvé les quarante-cinq*).
Il faut donc s'assurer d'un moyen connus sur les nombre qui permettra d'anticiper et de gagner à coup sûr (l'usage de l'addition).Seulement à ce moment de la situation, P entretient

un flou sur les relations aux objets symbolique ou matériel qui retarde ou trouble la convocation du calcul pour vérifier :

P [hausse le ton]: ***faux à ça non Mounir ça ce n'est pas vrai*** */ la manipulation tu as dis y a zéro dans la boîte / on a remis les dix-huit on a vérifié ta réponse est arrivé jusqu'à*
E: dix-huit
P: eh oui alors me dis pas qu(e) y en a / alors on est arrivé jusqu'à dix-huit là je/là c'est pas bon/autant je peux / autant on peut discuter tout autant la manipulation c'est la manipulation il faut la suivre sinon on peut plus avancer quoi / alors tu as dis y a zéro dans la boîte/y a zéro dans la boîte / on rajoute nos dix-huit on arrive à dix-huit/est-c(e) que ça peut être la réponse au problème/la solution au problème/est-c(e) que zéro c'est la solution au ***problème est-c(e) que tu en es sûr/oui/allez maint(e)nant on vérifie****/maint(e)nant on vérifie avec la boîte t'es prêt [renverse les briques posées sur le couvercle à côté et ouvre la boîte]/****alors on va compter/alors déjà/écoute hein*** *[secoue la boîte]/est-c(e) que zéro est la solution du problème*
E: non pa(r)c(e) que [inaudible]¤<1988121>(0:33:08.1)
M: déjà il en reste/il en reste [montre une barre de dix]
E: dix [le maître commence à sortir quelque chose de la boîte] vingt
M: alors j(e) fais attention pa(r)c(e) que souvenez vous/dans les paquets qu'est-c(e) que j'avais fais/si vous vous êtes

En effet la manipulation avec la boîte (chronogenèse) vient se substituer à l'usage métaphorique de l'addition (*autant on peut discuter tout autant la manipulation c'est la manipulation il faut la suivre sinon on peut plus avancer quoi / alors tu as dis y a zéro dans la boîte/y a zéro dans la boîte / on rajoute nos dix-huit on arrive à dix-huit/est-c(e) que ça peut être la réponse au problème/la solution au problème/est-c(e) que zéro c'est la solution au problème est-c(e) que tu en es sûr/oui/allez maint(e)nant on vérifie), addition* qui trouverait ici tout son sens pour anticiper une valeur et trouver une forme de vie mathématique pour le jeu de langage du pari.

IV.5. Conclusion

Nous avons pu voir dans ce qui précède une condition de fonctionnement d'une situation dans laquelle les élèves s'engagent par le biais d'une situation culturelle, un pari, qui engagera les élèves dans l'étude du moyen mathématique pour la résoudre. Pour que la forme de vie associée au jeu de langage du pari en mathématique, l'annonce du pari par Mounir met en évidence l'importance pour le professeur de préciser les relations avec les objets du milieu pour faire fonctionner cette étude. L'enjeu est bien de produire dans cette situation le système de représentation (l'écriture d'une relation additive) qui soutiendrait le jeu de langage du pari et non la manipulation matérielle comme le fait à ce moment le professeur. La question posée ici, comme le présente les directions du texte de cadrage de Mercier initial, est celle de l'identification par le professeur des pratiques mathématiques émergentes et des moments déterminants de mise en place du système sémiotique et des formes langagières qui lui seront associées. Ces épisodes clés, mêlant avancée du temps didactique et enjeux épistémologiques des situations, ne suivent pas nécessairement le chemin de production décrit par Brousseau (dialectique d'action/ formulation) et constituent les directions prioritaires de cette recherche en cours.

Références bibliographiques

Abou-Raad, N., & Mercier, A. (2009). Etude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban. *Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 29*. 2, p. 155-188.
Araya, A. (2008). *La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques. Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica.* Thèse de l'Université Paul Sabatier-Toulouse III, Toulouse.
Assude, T. & Mercier, A. (2007). L'action conjointe professeur-élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques. In G. Sensevy & A. Mercier A (Ed.), *Agir ensemble. Éléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves* (pp.153-185). Rennes : P.U.R.
Assude, T., Mercier, A., & Sensevy, G. (2007). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en didactique des mathématiques*, *Vol. 27*(Num. 2), p. 221-252.
Assude T, Perez J-M, Tambone J & Verillon A (2011), Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Education & Didactique*. (accepté)
Assude T, Tambone J & Vérillon A (2012), *Situations d'enseignement spécifiques pour des élèves particuliers ? Problème et débat*, Actes du Colloque EMF 2012, Genève.
Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique: une approche didactique et épistémologique* (Mémoire de doctorat d'université). Paris VII.
Bola, A. (1992). *L'usage du sens dans la relation didactique: étude de la soustraction, en particulier de la composition des translations numériques au cours élémentaire* (Mémoire de doctorat d'université). Bordeaux1, Bordeaux.
Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
Briand, J., Loubet, M. & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris : Hatier, CD-Rom.
Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse de doctorat d'État, Université de Bordeaux I, Bordeaux.
Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 309-336.
Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 241-277.
Brousseau, G., Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R., & Warfield, V. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Kluwer academic publishers.
Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.
Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.
Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Ecologie & Régulation. In J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.) *Actes de la XI^e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage éditions, 41-56.
Chevallard, Y. (2006). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. *Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*, Baeza.
Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des*

mathématiques. Année 2007. Paris : IREM Paris VII, 345 – 366.

Delbos, G., & Jorion, P. (2005, mai 21). La transmission des savoirs. http://terrain.revues.org. text, . Consulté novembre 15, 2011, de http://terrain.revues.org/1387

Duchet, P., & Erdogan, K. (2005). La construction du diagnostic d'un enseignementa partir d'une analyse épistémologique en termes de" site mathématique". *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4), Sant Feliu de Guıxols* (p. 17–21)

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Goody, J. (1997). *Representations and contradictions: ambivalence towards images, theatre, fiction, relics and sexuality.* Wiley-Blackwell.

Halbwachs, M. (1925 ; 1994). *Les cadres sociaux de la mémoire*. Postface de G. Namer. Paris : Albin Michel.

Halbwachs, M. (1950 ; 1997). *La mémoire collective*. Préface et postface de G. Namer. Paris : Albin Michel.

Ma, L. (1999). Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States (1er éd.). Routledge.

Margolinas, C. (2005). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Université de Provence : Aix-en-Provence.

Mercier, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I : Bordeaux

Mercier, A. (1998). La participation des élèves à l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(3), 279–310.

Mercier, A. (2002). Note de synthèse. La transposition didactique des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques. *Revue Française de Pédagogie,* 141, 135 – 171.

Mercier, A. (2008). Pour une lecture anthropologique du programme didactique. *Education & Didactique*, *2*(1), 7–40.

Mercier, A., & Tonnelle, J. (1992). Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège. C- Vers une étude rationnelle de l'espace et des objets de l'espace. *Petit x*, *29*, 15-56.

Mercier, A., & Tonnelle, J. (1993). Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège. D- Questions d'enseignement. *Petit x*, *33*, 5-35.

Mercier, A., Schubauer-Leoni, M. L., & Sensevy, G. (2002). Vers une didactique comparée. *Revue française de pédagogie*, *141*(1), 5–16.

Mercier, A., Sensevy, G., & Schubauer-Leoni, M. L. (1999*). How social interactions within a class depend on the teachers's assessment of the pupils various mathematical capabilities: a case study. Mathematics education I, 342.*

Pêcheux, M. (1975). *Les verites de La Palice : linguistique, semantique, Philosophie / Michel Pêcheux*. Théorie. Paris : F. Maspero.

Perrin-Glorian, M-J. (1998). Analyse d'un problème de fonctions en termes de milieu : structuration du milieu pour l'élève et pour le maître. In R. Noirfalise (Ed.) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*. Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand, 17 – 38.

Plaisance, E (2009). La scolarisation des enfants handicapés. Débats actuels. *Psychologie et éducation*, 2, 11–22.

Quilio, S. (2008). *Contribution à la pragmatique didactique. Une étude de cas dans l'enseignement des nombres rationnels et décimaux à l'école élémentaire*. Aix-en-Provence : Thèse de l'Université de Provence.

Radford, L., Bardini, C., Sabena, C., Diallo, P., & Simbagoye, A. (2005). On embodiment, artifacts, and signs: A semiotic-cultural perspective on mathematical thinking. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 113.

Radford, L., Bartolini Bussi, M. G., Bekken, O., Boero, P., Dorier, J. L., Katz, V., Rogers, L., et al. (2002). Historical formation and student understanding of mathematics. *History in Mathematics Education*, 143–170.

Roditi, E. (2001). L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaires.

Schubauer-Leoni, M. L., & Leutenegger, F. (2002). Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique ordinaire. *Raisons éducatives*, (1), 227–251.

Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy & A. Mercier (Ed.) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes, pp. 13-49.

Sensevy, G., Mercier A. & Schubauer-Leoni, M.-L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, *20(3),* 263-304.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4–14.

Silvy, C., & Delcroix, A. (2008). Site mathématiques d'une ROC: une nouvelle façon d'interroger un exercice?, 103-122.

Tonnelle, J. (1979). Le monde clos de la factorisation au premier cycle. *DEA, Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille II*.

Vergnaud, G. (1974). Calcul relationnel et représentation calculable. *Bulletin de Psychologie*, *28*, 378-387

Wittgenstein, L., & Collectif. (2005). *Recherches philosophiques*. Paris : Editions Gallimard.

Séminaire national et colloquium

des 14 et 15 octobre 2011

Les textes sont dans l'ordre chronologique de présentation pendant le séminaire.

Conditions et contraintes de la recherche en didactique des mathématiques : un témoignage

Yves **CHEVALLARD**
Université de Provence
y.chevallard@free.fr

Résumé
Ce texte reprend et résume mon intervention le 14 octobre 2011 dans le cadre du *Colloquium* organisé par l'ARDM et la CFEM. Il présente un bilan partiel et parcellaire, subjectif par méthode, de mon activité de chercheur en didactique des mathématiques et de quelques-uns des problèmes du métier que j'ai rencontrés au long de plusieurs décennies de pratique.

Mots clés
Approche autobiographique, chercheur, didactique, mathématiques, problème, profession

Approche autobiographique et problèmes de la profession

J'ai été invité par l'ARDM et la CFEM − la *Commission française pour l'enseignement des mathématiques* − à m'exprimer, le 14 octobre 2011, dans le cadre du *Colloquium* que ces deux sociétés savantes organisent conjointement chaque année. Je dois cette invitation, non à un intérêt particulier pour ma personne, mais au fait que l'*International Commission on Mathematical Instruction* (en français, la Commission internationale de l'enseignement mathématique), dont la CFEM est la sous-commission française, m'a attribué le prix Hans Freudenthal pour 2009. Ce prix, attribué tous les deux ans, honore *a major cumulative research program*. Chacun sait que Guy Brousseau a été lui-même, en 2003, le lauréat du prix jumeau, le prix Felix Klein, qui honore *a lifetime achievement.* Je suis évidemment très heureux d'inscrire mon nom après le sien et celui de quelques autres collègues dans les annales de l'ICMI.

Je voudrais employer cette occasion tout à fait exceptionnelle pour tenter d'amorcer une réflexion sur un thème peu fréquenté, me semble-t-il, mais qui a pris une importance croissante à mes yeux au fil des années. De même qu'on peut s'interroger sur les problèmes de la profession de professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire (sauf exception, je parlerai simplement de *professeur* ci-après), on peut s'interroger sur *les problèmes de la profession de chercheur en didactique des mathématiques* (je parlerai simplement de *chercheur* ci-après). Et de même qu'on peut tenter d'identifier leurs problèmes en observant et en interrogeant des professeurs, on peut chercher à repérer les problèmes des chercheurs en les observant et en les interrogeant. Pour ce faire, une technique particulière consisterait à solliciter d'eux des mémoires autobiographiques où ils répondraient librement à la question : « Quelles difficultés avez-vous rencontrées dans l'exercice de votre métier de chercheur qui puissent être regardées comme des problèmes de la profession de chercheur ? » C'est bien cela que je commencerai à faire ici même, mais en sollicitant ma *propre* expérience de quelque 35 années de recherche en didactique des mathématiques.

J'ose espérer que l'inévitable personnalisation de mon propos rencontrera une attention bienveillante. Le bilan qui suit s'arrête à l'année 2000. Il est divisé en cinq périodes, dont chacune est scindée en trois sections, intitulées respectivement *Chronique*, *Ce que j'ai appris* et *Problèmes de la profession*. Dans cette dernière section, j'ai formulé un petit nombre de questions qui tentent d'énoncer ce que je crois être des problèmes importants de la profession de chercheur. Inutile d'ajouter qu'il s'agit là d'un choix parmi un ensemble beaucoup plus vaste. Chaque question se termine par cette apostrophe à la communauté des didacticiens des mathématiques : *Que comptez-vous faire à cet égard ?* Pendant des années, j'ai été confronté à des interpellations auxquelles j'ai essayé de ne pas me dérober. Avec un rien de malice peut-être, je profite ici d'une circonstance exceptionnelle pour retourner le compliment.

Première période : jusqu'en 1961

Chronique 1

Je suis né en 1946. J'ai vécu dans un village proche de Marseille − Carry-le-Rouet −, à la population alors plus que modeste, où j'allais à l'école communale. Un acteur célèbre, Fernandel, y possédait une maison, où il venait régulièrement séjourner. En hiver, le village me semblait coupé du monde que je pressentais à travers la radio et les quelques livres que je me procurais. L'instituteur, fidèle du mouvement Freinet, ouvrait aussi des horizons : « *La Gerbe* est arrivée ! » est un cri qui résonne encore à mes oreilles. À l'été surtout, on voyait arriver des « riches » de Marseille. J'ai tôt appris par leurs enfants, mes camarades de jeu, l'existence de deux ordres scolaires, l'ordre primaire et l'ordre secondaire, comme disent les historiens. Ainsi, nous, nous étions à la communale, en CM1, quand nos camarades « urbains » étaient au lycée, en 8^e^. En même temps, j'ai moi-même connu pendant trois années les classes élémentaires du lycée Carnot de Tunis : comme souvent, je balançais, au gré d'une histoire familiale compliquée, entre deux systèmes qui, en apparence, s'ignoraient. Après la communale, je suis demeuré dans l'ordre primaire de la sixième à la troisième en devenant l'élève, de la rentrée 1957 aux vacances d'été de 1961, d'un cours complémentaire d'une petite ville proche, Martigues [1].

Ce que j'ai appris 1

Tout cela, et en particulier l'expérience de « l'ordre primaire », a marqué le didacticien que je suis devenu. À Tunis, au milieu du XX^e^ siècle, je rencontrai un univers familial scolairement archaïque où, comme au XIX^e^ siècle, de même qu'on se souciait que le petit écolier fût muni d'un crayon, d'une gomme, d'une trousse, etc., on s'assurait qu'il disposât d'*un* livre de grammaire, d'*un* livre de calcul, etc., sans que ceux-ci dussent être identiques à ceux utilisés par les autres élèves de la classe, qui étaient pourtant déjà soumis, eux, aux normes « modernes » d'unicité du manuel dans une même classe. Je m'en souviendrais longtemps après devant la résurgence de cet « esprit XIX^e^ siècle » lorsqu'apparurent les calculatrices : longtemps les professeurs et les « autorités » n'osèrent pas imposer aux élèves d'une classe donnée de disposer d'un unique modèle de calculatrice, au motif notamment qu'on ne pouvait s'autoriser à favoriser commercialement telle ou telle marque − ce qui semblait pourtant depuis longtemps ne plus faire problème s'agissant des manuels.

Au cours complémentaire, en sixième, nous découvrîmes rétrospectivement que, à l'école communale de Carry, Freinet aidant, la formation n'avait pas été aussi resserrée sur le français et les mathématiques qu'en d'autres CM2. Cela suffisait pour être accusé de « dilettantisme ». Ce fut pour moi la première stigmatisation d'un rapport à la connaissance et à l'ignorance un peu décalé. En même temps, les petits *pacoulins* que nous étions n'avaient droit ni au grec, ni au latin, dont on régalait les brillants sujets de la ville, ni à une seconde langue vivante. J'ai

[1] Sur ce qu'était alors un cours complémentaire, comme sur tous les points sur lesquels il le jugera utile, je laisse au lecteur le soin de s'informer par lui-même (à l'aide d'une brève recherche sur Internet ou autrement).

découvert ainsi ce que je nommerai beaucoup plus tard la pénurie praxéologique, la rétention organisée de connaissances, et, du même coup, la difficulté profonde à contrebattre cette pénurie officielle, la quête corrélative de connaissances « introuvables », le bricolage « didactique » pour se les procurer personnellement.

En sixième et en cinquième, le professeur d'anglais était un jeune étudiant en sciences, sympathique et rigoureux, que le rectorat avait envoyé là, selon ses dires, à cause de la pénurie de professeurs et au motif que sa note au bac en cette matière n'était pas mauvaise. Beaucoup plus tard, ses enfants ne le connaîtront que comme professeur de mathématiques. Mais son sérieux et son engagement étaient grands et je n'eus pas à me plaindre de ce que je pus apprendre avec lui. (Au lycée, je serai même présenté au concours général d'anglais, il est vrai sans succès.) C'est là que, comme il était usuel alors, j'appris l'alphabet phonétique international. De tout cela il m'est resté un doute touchant l'idée que l'élève apprendrait d'autant plus et d'autant mieux que le professeur est plus savant : c'est à l'élève d'étudier, le professeur ne peut que l'*aider* à étudier − mais il peut l'aider *mieux*.

Le ressouvenir des mathématiques étudiées au cours complémentaire de l'Île à Martigues a joué un rôle dès mes premiers travaux de didactique : c'est là par exemple que j'appris la distinction entre l'équivalence, notée $A \equiv B$, de deux expressions algébriques A et B et leur égalité, notée $A = B$ et construite syntaxiquement de façon à impliquer l'équivalence. Bien d'autres choses m'en sont restées qui ont nourri ma réflexion. Dans cet univers scolairement et socialement dominé, nombre de professeurs étaient d'anciens instituteurs épris de république, de laïcité, de savoir, de culture : j'appris là qu'on pouvait vouloir faire son travail le mieux possible et en même temps bannir toute esbroufe ; il m'en est resté une indifférence totale à l'esprit de compétition, si naturel à certains qu'ils ne peuvent imaginer qu'on y soit inaccessible.

J'ai vécu toutes ces années dans une grande proximité avec mon grand-père maternel, que j'ai évoqué dans un article intitulé *Concepts fondamentaux de la didactique* (1992). Issu du petit peuple marseillais, il jetait sur le monde un regard moqueur et volontiers sceptique. J'ai appris de lui une défiance dubitative face à tout ce qui est censé « aller de soi », à ce qu'on nomme en anglais *taken-for-grantedness*. J'en ai conservé une rétivité devant toutes les orthodoxies, ce qui a fait de moi un agnostique en toutes matières, tout à fait incapable de partager simplement les vérités communes.

Problèmes de la profession 1

J'ai eu tôt conscience que le « vécu didactique » de l'enfant puis de l'adolescent qu'il a été constitue pour le chercheur une première matière première de sa *clinique du didactique*, socle où prendront appui toutes les techniques de recherche, qu'elles soient dites « cliniques », « expérimentales » ou autres. (Le recours au ressouvenir est ainsi au cœur de la *technique des témoins* utilisée encore récemment pour l'exploration de l'offre praxéologique en un domaine donné : voir Ladage et Chevallard 2011.) Lorsque le témoin est le chercheur lui-même, ce ressouvenir, qui suppose d'abord une anamnèse personnelle, suppose ensuite un *travail d'après-coup* qui objective institutionnellement les productions de l'anamnèse personnelle et les dépersonnalise. (L'examen de manuels anciens porte ainsi à la vue de *quiconque* l'usage de la relation d'équivalence algébrique mentionnée plus haut.) Or il me semble que, sur toutes ces choses, existe aujourd'hui, dans la communauté des didacticiens des mathématiques français, un lourd silence institutionnel, qu'inspire un parti-pris discutable mais trop peu discuté pour des techniques de recherche réputées « sûres » à l'exclusion de toute autre. D'où cette question qui pourra, je l'espère, « faire problème » pour cette communauté : *Quelle part le vécu objectivé du chercheur peut-il avoir dans la recherche aujourd'hui ? Peut-on, et* *comment, lever l'interdit qui semble peser sur l'usage des matériaux issus du ressouvenir en la matière ? Comment « socialiser » de tels fragments cliniques sans les enfermer dans une nouvelle orthodoxie rigide ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Bien entendu, il y a en l'espèce deux poids et deux mesures : le ressouvenir de l'élève, voire du professeur semble accepté, surtout si vous interrogez 500 élèves ou 100 professeurs ; le ressouvenir qui, souvent à son insu, meut le chercheur n'est pas reconnu. C'est là, à mes yeux, un problème non trivial de la profession de chercheur.

Deuxième période : jusqu'en 1967

Chronique 2

En 1961, j'entre au lycée Thiers de Marseille, alors parangon de l'ordre secondaire. (Le proviseur reprendra vivement une interlocutrice − qui me rapportera l'épisode − en lui lançant qu'on n'était pas dans son lycée pour réussir le bac mais pour tenter Polytechnique.) Je resterai là jusqu'à l'entrée à la rue d'Ulm, en 1967. J'avais de bons, voire de très bons résultats scolaires. Mais, je l'ai déjà souligné, je restai un *refuznik* au plan des usages institutionnels, quoique je fusse respectueux des gens et plutôt bien toléré par les professeurs et l'administration. Lisant il y a peu un petit livre de l'anthropologue Marshall Sahlins (2008), je suis tombé sur cette plaisanterie semble-t-il bien connue (p. 111) : à quelqu'un qui lui dit banalement *"Have a nice day!"*, ce qu'il faut entendre *ici* de façon littérale (soit à peu près « Prenez-vous une journée agréable »), un quidam ombrageux rétorque, outragé : "DON'T TELL ME WHAT TO DO!" − « Ne me dites pas ce que je dois faire ! » Tel était le sentiment dominant de ces années, où, bien sûr, j'appris beaucoup.

Ce que j'ai appris 2

En seconde, le professeur de mathématiques, homme vertueux et craint, nous demanda tout de go ce que valait la racine carrée de a^2. Nous répondîmes en chœur la réponse apprise en troisième : « plus ou moins a ». Le ciel nous tomba sur la tête : il fallait répondre « valeur absolue de a ». J'apprends là en un seul coup la relativité institutionnelle des connaissances. En seconde encore, je me procure le livre d'André Lentin et Jacques Rivaud, *Éléments d'algèbre moderne*, paru chez Vuibert en 1956. Je découvre sans bien le comprendre un autre monde, apparemment éloigné du monde mathématique scolaire fait alors de paraboles et d'équations du second degré. Les mathématiques, c'est donc *cela* qui nous est enseigné et *ce n'est pas cela*. Ce que sont les mathématiques *est ainsi problématique*. Le monde bouge ; j'explore un tant soit peu cet autre monde, mais aussi les mondes d'*avant*, tels par exemple que me les révèlent la *Géométrie dans l'espace* de Jacques Hadamard (8e éd., 1949) ou le *Nouveau cours de mathématiques générales* de Robert Deltheil (1959), que me prête un proche, élève d'une école d'ingénieurs marseillaise.

En 1964, j'entre en Maths sup. Les entrants devaient alors passer une épreuve de mathématiques, en quelque sorte « pour voir ». À mon habitude, je n'avais aucune idée de ce qu'il adviendrait de moi ; la plupart des autres candidats m'étaient d'ailleurs inconnus. Divine surprise, je fus classé deuxième. L'élève classé premier s'appelait Alain Connes, qui devait recevoir la médaille Fields en 1982. Conséquence de cet heureux hasard, nous fûmes assis côte à côte tout au long de l'année, en haut du petit amphithéâtre que régentait Victor Charlier de Chily, qui sur-jouait souvent son rôle. Ce que je voyais en observant Alain me montrait ce que pouvait être un rapport aux mathématiques incommensurable avec les rapports personnels « ordinaires » qui seuls m'étaient connus. Nous fûmes séparés en Math spé. Il entra à la rue d'Ulm en 3/2, moi en 5/2. Un jour que, rue d'Ulm, je traversais la cour avec des camarades de promotion, nous le vîmes en train de travailler seul. Sa réputation s'était répandue. Sachant que je le connaissais, ces camarades me demandèrent ce que je pensais de lui. Je répondis sobrement : « C'est un génie. » Si l'histoire s'était arrêtée là, certains de mes collègues didacticiens d'aujourd'hui m'auraient sans doute demandé : « Tu peux le prouver ? » Une année d'observation clinique proche, en ce cas, m'avait suffi amplement pour m'en persuader.

À l'issue de la Maths sup., on me proposa d'aller dans la classe de Maths spé. de Jules Brun mais je préférai choisir la classe de l'autre professeur de spéciales M', André Pfeiffer. Pour des raisons de santé, l'année fut pour moi difficile, malgré la bienveillance du professeur. J'en retiendrai que je vécus en acte un fait qu'il est facile de relier à mes intérêts didactiques actuels et dont je n'avais jusqu'alors qu'une connaissance personnelle intime : contrairement à ce que les usages scolaires pouvaient laisser croire, un problème vrai ne se résout pas au fil de la plume ; le temps qu'on y consacre est une variable essentielle et il faut donc apprendre à vivre *normalement et durablement* dans la compagnie d'un problème ouvert, sans l'écarter, sans l'oublier. André Pfeiffer nous proposait parfois des exercices sur lesquels il séchait lui-même et il n'hésitait pas alors à y revenir jour après jour, en nous montrant chaque fois le peu qu'il avait trouvé depuis la veille. Un exercice sur une équation matricielle nous retint ainsi quatre jours de suite, ce qui, d'après les mœurs taupinales d'alors, semblait incongru.

La classe de l'année 1965-1966 eut des résultats calamiteux. Pfeiffer réagit trop vite − à mes yeux − en « vidant » certains élèves, dont quelques-uns furent « rétrogradés » dans une spéciale M. Parmi eux se trouvait un garçon qui ne se mettait pas en avant mais que j'avais appris à apprécier lors des heures de travail hors de la présence du professeur. Je trouvais que la décision le concernant n'était pas seulement injuste : elle était le fruit d'une erreur de jugement. De fait, à la fin de l'année passée en M, classe qui ne préparait pas à ce concours, il fut reçu à l'X, ce qui me réjouit fort sans m'étonner du tout. La notion de *position institutionnelle* me devint évidente : depuis sa position de professeur, André Pfeiffer ne pouvait voir ce que je voyais dans la position de proximité clinique que j'occupais à l'égard de mon camarade. La reprise en main avait cependant opéré : sur les deux classes de M', nous fûmes quatre, cette année-là, à intégrer la rue d'Ulm.

Problèmes de la profession 2

Les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques constituent en France un haut lieu de l'initiation mathématique des jeunes générations. Un rapport normé aux mathématiques y prévaut largement. En simplifiant un peu, on peut dire que, dans le rapport *mathématicien* aux mathématiques, les mathématiques sont un ensemble de problèmes *ouverts*, à résoudre à plus ou moins long terme, alors que, dans le rapport *taupinal* aux mathématiques, elles sont un ensemble de problèmes *résolus*, c'est-à-dire *refermés*, ou à résoudre sans attendre. Il s'agit là de deux types de rapports qui me semblent avoir été reçus (institutionnellement, car les variations personnelles sont innombrables) de façon peu critique, comme un donné non questionné. Plus précisément le rapport taupinal, qui prévaut sous des formes succédanées au secondaire *stricto sensu*, semble constituer une référence ordinaire dans l'imaginaire des didacticiens, même si, dans la noosphère, la fascination pour le rapport mathématicien fait régulièrement résurgence. (De très mauvaises habitudes ont été prises lorsqu'on a décrété, il y a quelques décennies, qu'un didacticien des mathématiques devait avoir aux mathématiques « au moins » le rapport moyen d'un professeur certifié ou agrégé de mathématiques.) Voici alors la question que je propose à notre profession comme l'un de ses problèmes : *Comment situer, construire, faire évoluer un rapport didacticien aux mathématiques qui soit véritablement adéquat au projet d'une science du didactique en mathématiques ? Corrélativement, comment étudier comme des réalités objectives parmi d'autres les rapports mathématicien, taupinal ou professoral aux mathématiques, en évitant d'en faire soit des* *standards, soit des fétiches ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Un tel rapport didacticien doit libérer le chercheur d'assujettissements allogènes contreproductifs et souvent tyranniques, et lui donner une puissance *sui generis* dans son commerce avec les mathématiques en tant que chercheur en didactique. Pour risquer une formule qu'on pourra rapprocher de celles par lesquelles j'ai voulu « croquer » les rapports mathématicien et taupinal, dans le rapport didacticien aux mathématiques, celles-ci sont un ensemble de problèmes *à rouvrir*.

Troisième période : jusqu'en 1976

Chronique 3

Je suis entré à la rue d'Ulm en octobre 1967, l'année de Mai-68. J'ai passé normalement l'agrégation en 1970. J'avais suivi entretemps divers enseignements de logique mathématique, d'abord à Paris 7 avec Daniel Lacombe, puis à l'IHP avec Jean-Louis Krivine (dont j'avais étudié en détail le *Que sais-je ?* sur la théorie des ensembles). Pendant la quatrième année allouée aux normaliens, j'eus la possibilité de faire, par dérogation, de brefs remplacements en Maths sup. et en Maths spé. au lycée Thiers de Marseille, où j'eus à assurer aussi un cours de logique élémentaire en khâgne, à la demande du professeur de philosophie, Michel Gourinat. À la rentrée 1972, je suis affecté normalement mais tardivement dans le secondaire, dans ce même lycée : on m'y confie une classe de cinquième, une classe de quatrième, une classe de seconde A (qui accueillait des élèves déclarés rétifs aux mathématiques). Je serai en cours d'année recruté comme assistant au département de mathématiques de Luminy, où l'année bat son plein. On m'y propose d'emblée de devenir « animateur » à l'IREM. Dès le mois de février 1972, j'anime un stage de formation au lycée Vauvenargues d'Aix-en-Provence. Les IREM font à l'époque ce qu'on nomme sans élégance du recyclage : il faut « recycler » les professeurs. Ce que demandent ces professeurs ? Au collège, l'alors célèbre « droite affine en quatrième » ; au lycée, les probabilités (que la plupart d'entre eux n'avaient jamais étudiées). Par ailleurs, à l'IREM, je crée et anime un groupe de travail qui prend le nom d'*Atelier « Mathématiques et interdisciplinarité »*. De cet atelier, auquel Alain Mercier participe assidument, sortiront plusieurs « brochures » − selon la terminologie des IREM − dont deux seront réunies par un très actif collègue de l'IREM de Lyon, Maurice Glaymann, pour être publiées chez Cédic en 1977 sous le titre *Deux études mathématiques sur la parenté*. L'une de ces études relevait de la génétique des populations − on y employait notamment la distance de Mahalanobis −, l'autre des « structures élémentaires de la parenté », pour reprendre le titre du maître-ouvrage de Claude Lévi-Strauss paru en 1949. (Lors d'un entretien sur France Culture avec François Le Lionnais, me rapportera un ami, Lévi-Strauss, à qui apparemment rien n'échappait, aura un mot aimable pour ce très mince opuscule.) Une part essentielle de mon travail, cependant, était d'enseigner des mathématiques en maîtrise, où l'on me confia une UV (« unité de valeur ») de topologie, et surtout en DEUG, où de concert avec un collègue, Robert Rolland, j'enseignais les séries. De cela et de quelques autres aventures éditoriales devait sortir en 1979, chez l'éditeur Cédic (qui jouait alors un rôle important dans la noosphère de l'enseignement des mathématiques), allié avec Fernand Nathan, un ouvrage en deux volumes intitulé *Théorie des séries*, dont je signai le premier volume, Robert Rolland signant le second.

Ce que j'ai appris 3

Dans la période qui couvre mon année de 5/2 jusqu'à ma rencontre avec Guy Brousseau, j'ai appris beaucoup, de façon quelque peu erratique. Lorsqu'Alain Connes quitta le lycée Thiers, un an avant moi, il m'abandonna certains de ses livres, dont il estimait n'avoir plus besoin. Il y avait, parmi eux, le volume 3, intitulé *Géométrie*, du *Nouveau cours de mathématiques spéciales* de Georges Cagnac, Edmond Ramis et Joanny Commeau, dont je possédais par ailleurs mon propre exemplaire. Alain y avait mis des annotations manuscrites ainsi que des bristols couverts de sa fine écriture. Au début du chapitre V, « Espaces affines », il avait ajouté une fiche où l'on pouvait lire ce détail : « tous [*sic*] ensemble ayant même puissance que EV peut être muni d'une structure d'EA ». On pouvait en conclure entre autres choses qu'un intervalle de la droite réelle, par exemple]0, 1[, peut être muni d'une structure d'espace affine de dimension *n*, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y avait là un thème qui devait être d'une importance cruciale pour la suite de mon travail.

La logique mathématique me permettait de formuler plus largement le point précédent. Nous sommes habitués à considérer qu'il peut y avoir plusieurs façons de construire une *théorie* $\mathcal{T}$ d'un *système* $\mathcal{S}$, notamment (mais pas seulement) parce qu'il y a plusieurs *langages* $\mathcal{L}$ pour « parler » de $\mathcal{S}$, en sorte qu'il existe en règle générale *plusieurs* théories, $\mathcal{T}_i$, d'un système $\mathcal{S}$. Mais il semble beaucoup plus difficile de concevoir qu'une *même* théorie $\mathcal{T}$ a plusieurs *modèles* $\mathcal{M}_k$ (ce qui est pourtant un fait banal en logique mathématique). Il en résulte alors ceci : lorsqu'on parle d'un certain système $\mathcal{S}$ dans le langage $\mathcal{L}$ d'une théorie $\mathcal{T}$, on croit parler de $\mathcal{S}$ alors même qu'on parle *du même coup* d'une foule d'autres systèmes dont certains nous apparaîtraient, si nous en prenions conscience, comme « bizarres » − qui a jamais regardé l'intervalle]0, 1[de $\mathbb{R}$ comme, disons, un espace affine à trois dimensions ? Sans entrer dans un détail technique qui risquerait de rebuter (même si ces questions sont en vérité passionnantes), j'ajoute que toutes les théories d'un certain type – les théories dites « du premier ordre » −, dès lors qu'elles ont un modèle infini ont des modèles de toute cardinalité (c'est le « théorème de Löwenheim-Skolem »). En particulier, une telle théorie ne peut avoir un modèle unique (à isomorphisme près), de sorte que, en un sens, quand on parle, on ne peut savoir « de quoi on parle » *au juste*.

Dans l'exemple des espaces affines, on passe « simplement » d'un système à un système *équipotent*. Le phénomène de *non-équipotence* des modèles que je viens d'évoquer apparaissait plus encore comme un obstacle à la diffusion des théories « non catégoriques » (dont tous les modèles ne sont pas isomorphes). En préparant l'agrégation, j'avais étudié le livre de Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (1964). L'auteur y proposait une théorie des réels du premier ordre, suffisante, selon lui, pour faire de la géométrie élémentaire. Or il m'était apparu que cette proposition ne pouvait guère être acceptée dans l'enseignement parce qu'on ne peut plus parler alors *du* corps des réels (à isomorphisme près) et qu'on doit en principe évoquer *un* corps des réels. Bien entendu, dans l'enseignement courant, aujourd'hui comme hier, le système des nombres réels n'est pas vraiment défini, mais on fait *comme si*, en en parlant, *on renvoyait à des entités clairement repérées*. Ce « comme si » exprime ce que j'appellerai la contrainte *d'univocité* ou, si l'on veut, *de non-équivocité*. Pour user de formulations familières en mathématiques, cette contrainte impose que, lorsque nous parlons, nous supposions *ipso facto* que ce dont nous parlons *existe et est unique*. C'est là une *contrainte* forte et de haut niveau, que je situerais dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique au-delà même du niveau des civilisations, au niveau de l'espèce humaine, de *l'humanité*. Ces considérations constituaient les prodromes de la théorie de la transposition didactique. Quand une personne ou une institution − et une personne n'est souvent que le porte-parole qui s'ignore d'une institution − nous parle de « quelque chose », entendez d'un système supposé, ce qu'elle dit ne caractérise pas ce système et on est donc en droit, on est même *obligé* de soulever cette question fondamentale : *quelle est cette chose dont on nous parle là ?* Qu'est-elle *au juste* ?

L'expérience du « recyclage » des professeurs allait dans le même sens. Lorsque ceux-ci demandent à l'époque *Qu'est-ce donc que « la droite affine » ?*, ou *Qu'est-ce donc qu'une « probabilité » ?*, et plus généralement lorsque quiconque demande *Qu'est-ce donc que cela ?*, on tient là une interrogation anthropologique indépassable découlant, en l'espèce, de la fragmentation institutionnelle des sociétés humaines. Derrière la résistance des personnes à laquelle se heurtait le travail de « recyclage », j'apercevais des ténacités institutionnelles. Derrière les personnes, je saisissais des institutions auxquelles les personnes demeuraient durement assujetties, même quand elles étaient convaincues de parler en leur nom propre, mues par leurs convictions « personnelles ».

Les années 1960 voient un grand chambardement dans le curriculum mathématique : on passe alors des mathématiques dites « classiques » − qui suscitent, de ce seul fait, un regain de passion chez les réactionnaires de tout poil, si ignorants qu'ils en aient été − aux mathématiques « modernes ». Je dirai aujourd'hui que la période voit une réfection de l'ensemble des *infrastructures* mathématiques de l'enseignement scolaire (et universitaire) des mathématiques. J'appartiens à une génération pour laquelle ce changement fut souvent vécu avec enthousiasme ou, du moins, sans traumatisme. J'ai évoqué plus haut la découverte, en classe de seconde, du livre de Lentin et Rivaud, *Éléments d'algèbre moderne*. En classes préparatoires, je lis régulièrement le *Bulletin de l'APMEP*, qui suit le détail du changement en cours. À la rue d'Ulm, j'étudie les *Éléments de mathématique* de Nicolas Bourbaki. À la Faculté des sciences de Paris, je suis en particulier le cours d'Henri Cartan, qui expose alors la matière de son *Calcul différentiel* et de ses *Formes différentielles*, ouvrages parus chez Hermann en 1967. Or tout ce mouvement se traduit par une redéfinition des notions les plus « communes » de l'enseignement de base. Les angles, notamment, sont au cœur de la tourmente déconstructrice et rebâtisseuse : les anciennes définitions sont mises au rencard, tandis que les nouvelles apparaissent on ne peut plus complexes. Malgré cela, l'adhésion tranquille, qui prévalait jusqu'alors, à des évidences institutionnelles que la patine du temps avait sanctifiées n'est plus de mise.

Depuis mes années en classes préparatoires, et plus encore après, j'ai beaucoup lu dans le domaine des sciences humaines et sociales, notamment en psychologie (Piaget surtout), en sociologie, en ethnologie (Lévi-Strauss en particulier) et dans le champ de l'éducation, où j'avais dévoré entre autres choses les ouvrages de Georges Lapassade. C'est dans son livre *L'entrée dans la vie* (1963), tiré de sa thèse d'État, que j'avais découvert la notion de *néoténie* telle que l'employait l'anatomiste néerlandais Louis Bolk (1866-1930). L'idée historiquement banale de l'inachèvement de l'être humain en découlait aisément. Inachèvement implique indéfinition, flottement, indétermination. Cela rejoignait évidemment les observations associées à l'équivocité fondamentale du langage.

Problèmes de la profession 3

C'est ici l'occasion de formuler deux questions que je ne justifierai pas plus avant. La première pourrait s'énoncer ainsi : Que faut-il savoir ? Que faut-il apprendre ? (En Math spé. je m'étais un jour aperçu que notre professeur, fort savant à nos yeux, ignorait pourtant l'existence des formules d'Olinde Rodrigues pour les rotations de l'espace.) Je retiendrai une formulation volontairement plus explicite : *Dans l'immense multitude des œuvres qu'un chercheur en didactique peut, en tant que tel, rencontrer à son avantage, quelles sont, à un moment donné, les rencontres obligées ? Les rencontres optimales ? Les rencontres souhaitables ? Dépassant sans les annuler les contingences des biographies singulières et tâchant d'en conserver autant que possible la diversité praxéologique, comment influer en conséquence sur la formation initiale et continuée des chercheurs ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Au plan mathématique, par exemple, ma génération a été confrontée à la reconstruction bourbakiste des mathématiques, rigoureuse et théoriciste, mais aussi, quoique moins frontalement, certes, aux emplois pionniers des mathématiques en sciences sociales et humaines − Lévi-Strauss (1949) avait ainsi collaboré avec André Weil (1906-1998) et Philippe Courrège avait ultérieurement proposé *Un modèle mathématique des structures élémentaires de parenté* (1965).

Quatrième période : jusqu'en 1990

Chronique 4

J'ai rencontré Guy Brousseau en juin 1976, à l'IREM d'Aix-Marseille (où je travaillais depuis 1972). J'avais alors trente ans révolus. Guy était là pour mettre en place une réplique du DEA de didactique des mathématiques qui existait alors à Bordeaux. J'assistais à cette rencontre pour un motif un peu périphérique : j'y avais été invité au simple titre d'enseignant du département de mathématiques susceptible d'accueillir dans ses cours et TD des étudiants du futur DEA, lesquels viendraient y effectuer des observations « naturalistes ». Je ne me doutais pas de ce qui allait s'ensuivre. Guy et quelques autres « Bordelais » venaient régulièrement à Marseille pour donner les cours du DEA, qu'une petite troupe marseillaise suivait avec passion. Nous allions également à Talence, notamment pour y réaliser des observations de classes. J'entrepris très vite de développer des recherches propres et de diriger des mémoires de DEA. (Comme les plus jeunes lecteurs le comprendront, la normalisation actuelle des usages universitaires, qui est censée, semble-t-il, garantir l'excellence, ou du moins assurer la qualité, n'avait pas encore frappé.) Mes recherches portaient sur l'enseignement des mathématiques au collège ou au lycée, et non à l'école élémentaire, ce qui assurait de fait que nous pourrions ainsi « faire nos gammes » en didactique sans être tout de go confrontés à la norme très exigeante des travaux bordelais. Les deux premiers DEA, ceux d'Odile Schneider et de Jacques Tonnelle, en découlent. À l'IREM, ce sont des années intenses, où la présence de Jean-Louis Ovaert joue un rôle clé (au moins jusqu'à l'arrivée de la gauche au pouvoir en 1981, où il est appelé au ministère). Je bénéficie d'une grande liberté d'accès à un panorama d'œuvres aussi large que possible : la bibliothèque de l'IREM contenait par exemple aussi bien *L'ordre divin* (1979) de Johann Peter Süssmilch, premier traité de démographie (1741), dont la considération n'est pas inutile quand on se préoccupe d'enseignement de la statistique, que les livres de Gregory Bateson, tel l'ouvrage *Vers une écologie de l'esprit* (tome 1, 1977), ou *L'anthropologie du geste* (1974) de Marcel Jousse, qui fut notamment l'élève de Marcel Mauss et fonda en 1932 un « Institut de rythmo-pédagogie ». Au plan national, les didacticiens des mathématiques forment alors une « bande » active, laborieuse, conviviale et, dans mon souvenir, fraternelle. C'est dans cet état d'esprit que je m'engage avec Claude Comiti − au prix de force coups de téléphone entre Marseille et Grenoble − dans la préparation de la première école d'été de didactique des mathématiques, qui a lieu du 7 au 13 juillet 1980 à Chamrousse. Pendant plusieurs semaines, à l'IREM d'Aix-Marseille, je mène de front deux tâches qui me parurent à l'époque assez légères : concevoir et organiser, y compris matériellement, l'école d'été ; et rédiger le cours que je devais y proposer. En 1984, je suis amené à accepter la direction de l'IREM − que je conserverai, faute de candidats, jusqu'à mon départ pour l'IUFM, à la rentrée 1991, comme professeur des universités. Malgré cela, je dispose alors d'une grande liberté, et cela pour plusieurs raisons, puisqu'il est bien des façons pour un chercheur d'aliéner sa liberté. Plusieurs d'entre nous n'ont alors aucun « plan de carrière ». À vrai dire, on pouvait à l'époque demeurer assistant à vie. Ce qui m'importait et m'importe toujours par-dessus tout, c'était de travailler, de faire de la didactique, de faire reconnaître la didactique comme science nouvelle. Un ami physicien aujourd'hui disparu, qui avait en sympathie les didacticiens, me dit un jour, dans ce qu'il crut être un accès de lucidité et qui était un excès de pessimisme, songeant à moi-même et à quelques autres, dont Guy

Brousseau : « Vous ne deviendrez jamais profs… » Tous les didacticiens, certes, n'avait pas l'innocence qu'il nous prêtait. Mais, comme sans doute quelques autres à l'époque, je travaillais intensément à un projet scientifique collectif, sans visée personnelle. Je n'ai ainsi jamais songé à faire une thèse − la thèse d'État, au reste, allait cesser d'exister du fait de la loi Savary de 1984. Lorsque l'idée m'en est venue − il s'agissait de la thèse nouveau style −, le Doyen de la Faculté des sciences de Luminy, à qui j'en parlais fortuitement dans un ascenseur, me dit : « Mais tu ne vas pas faire une thèse ! C'est ridicule. Passe ton habilitation ! » Ce que je ferai en 1990, avec (entre autres) Alain Connes dans le jury.

Ce que j'ai appris 4

Théorisations en didactique

Ces quinze années furent une période florissante, où se loge une part essentielle de ma vie de chercheur. J'ai appris d'abord et surtout la théorie des situations didactiques (TSD). À partir de 1976, nous fûmes littéralement plongés dans la TSD, théorie déjà très riche à l'époque mais où des avancées se produisaient sous nos yeux mêmes. C'est ainsi qu'un jour où, à quelques-uns, nous arrivions à l'école Jules-Michelet, Guy nous prévint abruptement : « Il y a une quatrième dialectique ! » Après les dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, il venait d'introduire la dialectique de l'institutionnalisation.

J'appris bien sûr à voir et à interroger les phénomènes de transposition didactique. Les institutions et les personnes qui leur sont assujetties, qui ont l'air de savoir ce dont elles parlent, et en vérité qui ont l'air de *savoir*, tout court, de quoi parlent-elles au juste ? Et que savent-elles en vérité ? Lorsqu'un professeur dit à un autre « Ce matin, je leur ai fait $a^2 - b^2$ » et que son interlocuteur a l'air de comprendre de quoi il s'agit, *de quoi s'agit-il au juste ?* Qu'ont donc réellement rencontré les élèves ? Auront-ils rencontré par exemple une égalité aussi simple que $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$? Que sont-ils censés avoir appris à faire ? (Il y avait là, en germe, la notion d'*écologie des savoirs* qui devait être développée notamment dans la thèse soutenue en 1988 par Landy Rajoson sous le titre *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*.) La clé de l'énigme tenait en deux assertions. D'abord, les « savoirs » qu'on observe dans l'enseignement, tel « $a^2 - b^2$ », n'ont en règle générale pas été produits là où on les observe et viennent donc *d'ailleurs*, ce phénomène tenant en particulier à ce que ceux qui les enseignent n'ont pas l'autorité, la légitimité pour enseigner des savoirs *dont ils seraient les producteurs*. Ensuite, le savoir observé diffère du savoir premier, « légitime », vivant « ailleurs », dont il procède, et cela parce que, dans le système d'enseignement, jouent des conditions et des contraintes *autres* que celles sous lesquelles ces savoirs sont originellement venus à l'existence.

J'appris encore le débat au sein d'une communauté scientifique et, d'abord, ses aléas. Le cours de Chamrousse fut publié en 1985 aux éditions La Pensée sauvage de Grenoble. Matériellement, l'ouvrage comportait une ambiguïté que releva sévèrement Hans Freudenthal dans le compte rendu qu'il en donna dans *Educational studies in mathematics* : la couverture portait le titre *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* ; mais, passé le sommaire, une nouvelle page offrait cette variante : *La transposition didactique. Des mathématiques savantes aux mathématiques enseignées*. On pouvait voir en ce *lapsus calami* une négligence fâcheuse. L'erreur éditoriale n'était pourtant pas dénuée de sens. Car une théorie scientifique ne saurait être une théorie *ad hoc* : pour prouver sa validité − même si cela n'est pas suffisant, certes − elle doit prétendre à rendre raison d'un univers d'objets très vaste. La théorie de la transposition didactique devait être une théorie de la transposition *des* *savoirs*, et pas seulement des savoirs *mathématiques*. On voit qu'il y avait là d'emblée une pierre d'achoppement, qu'on peut subsumer sous la notion plus large de *dialectique du spécifique et du générique*.

Réceptions déformantes : transposition didactique et savoir savant

Dans la première année du DEA « marseillais », nous eûmes le plaisir intellectuel et humain à la fois d'entendre Michel Brossard, psychologue spécialiste du développement, à la parole pesée, et qui collaborait avec Guy à Bordeaux. D'une chemise contenant divers feuillets dont il s'aidait pour faire son cours, il sortit une feuille ne comportant que quelques lignes empruntées à un sociologue qui m'était alors inconnu, Michel Verret (né en 1927), où l'expression « transposition didactique » figurait explicitement. Je reconnus la parenté de ce que l'auteur cité pouvait désigner ainsi avec les phénomènes au centre de mes préoccupations d'alors. J'appellerais donc transposition didactique le processus − à étudier − par lequel on passe d'un savoir d'origine à un savoir enseigné. Michel Brossard m'avait sans le savoir transmis un message jamais envoyé et je m'étais trouvé là pour le recevoir : il y a ainsi d'étranges rendez-vous, que nul n'a fixés, et qui n'en sont pas moins décisifs. Mais il arrive que ce qui commence bien dérape ensuite : je découvris plus tard que, selon un procédé que Nietzche aurait peut-être qualifié d'*histoire d'antiquaire*, d'aucuns attribuaient la paternité de ce que j'avançais à Michel Verret lui-même (lequel, me glissa-t-on, en fut amusé), ce qui avait pour principal démérite de brouiller la réception de la théorie.

J'appris donc, du même mouvement, le phénomène de *réception déformante*. Chacun voit midi à sa porte : à la notion − et à l'expression − de *savoir savant*, d'aucuns prétendirent substituer (ou ajouter) celles de « savoir de référence », de « savoir expert », etc. Bien que désuet, le qualificatif *savant* ne semblait pas faire problème dans le cas des mathématiques : chacun convenait que, des savoirs mathématiques, il existe une forme « savante », celle associée aux mathématiciens producteurs de mathématiques. Mais très vite après la publication du livre, je fus interpellé par des collègues de diverses disciplines : où est le « savoir savant » en EPS, en français, en anglais par exemple, demandaient-ils ? Je mis un peu de temps à comprendre ; et ce sont les enseignants de l'UFR STAPS de l'université où je me trouvais alors (depuis 1972) qui me permirent de mieux saisir le problème. Où est donc le savoir « savant » en matière de football ou de cyclisme ? (Je parle là des sports de compétition.) Pour éprouver un peu plus mes interlocuteurs, que je voyais déconcertés, je répondais en choisissant d'incarner ces « savoirs savants » en des professionnels reconnus, certes, mais de réputation intellectuelle un peu terne : le savant en vélo, disais-je donc, c'est Poulidor (Raymond), en football, Papin (Jean-Pierre). Leur surprise n'eut alors d'égale que celle que j'éprouvai moi-même quand je compris que, à leurs yeux, les « savants » en matière de sports, *c'était eux*, enseignants et enseignants-chercheurs des UFR STAPS de France et de Navarre. Or il ne pouvait y avoir pire méprise. Pour la théorie de la transposition didactique telle que je l'avais élaborée, Picasso (Pablo) était un savant en matière de peinture, Flaubert (Gustave) en matière d'écriture romanesque, Noureev (Rudolf) en matière de danse, Prost (Alain) en matière de courses automobiles et Albaladejo (Pierre) en matière de drop (au rugby).

Deux obstacles arrêtaient sur ce point la réception de la théorie. Comme bien d'autres, ces collègues confondaient les « savoirs *de* » (la danse, la peinture, la natation, etc.), qui sont des savoirs consubstantiels à la pratique de haut niveau de ces arts, et les « savoirs *sur* » (la danse, la peinture, la natation, etc.), dont l'archétype est « l'histoire de », et qui peuvent certes modifier l'écologie et l'économie des « savoirs de » mais ne sauraient être a priori identifiés à eux. (Nombre de mathématiciens fort « savants » ne sont pas des savants en histoire ou en philosophie des mathématiques, sans parler de didactique des mathématiques.) Eux étaient peut-être des savants en quelque savoir relatif à telle activité sportive mais, sauf exception, ils n'étaient pas des savants en la matière, c'est-à-dire des « sportifs de haut niveau ». « Savant » est historiquement, en français, le premier participe présent du verbe *savoir* : un savant est un « sachant », quelqu'un qu'on regarde comme nourrissant son action d'un savoir qui est seul jugé susceptible d'expliquer ses hautes performances − footballistiques, musicales, mathématiques ou autres.

En théorie de la transposition didactique, et à plus forte raison en théorie anthropologique du didactique, une définition se réfère par principe à *l'ensemble des activités humaines* : c'est là une caractéristique de l'abord *anthropologique* en didactique, où l'on doit autant que possible se déprendre des valeurs culturelles, des visions institutionnelles d'un monde social fragmenté et polémique. Cette extension « anthropologique » des notions n'allait pas de soi pour tout un ensemble de raisons, certaines superficielles, d'autres plus profondes : voilà ce que j'appris encore. Un commentateur de télévision, ancien joueur de tennis de haut niveau, évoquait récemment, à propos de deux joueuses engagées dans le tournoi de Wimbledon, combien profonde était, à ses yeux, la « science de la terre battue » de ces jeunes femmes, c'est-à-dire combien elles étaient *savantes* en matière de tennis sur terre battue. Mais la réception d'un tel exemple (comme de ceux qui précèdent) est gênée par un obstacle des plus redoutables. L'adjectif « savant », en effet, fait résonner une note laudative : le « savant », en ce sens, impose le respect, convainc de la valeur et de la force du savoir dont procèderaient ses performances, savoir qui, bien que seulement inféré (il correspond plus ou moins à la compétence chomskyenne), est tenu pour une valeur assez rare pour apparaître précieuse. Mais voilà ! Nous ne sommes pas tous d'accord quant à la reconnaissance de tels savoirs. Pour beaucoup, là où d'aucuns imaginent la présence d'un savoir, d'autres ne voient rien de tel : le coureur cycliste qui franchit en vainqueur un col le fait-il grâce à un savoir supérieur ou à une bonne paire de jambes ? La note laudative laisse alors place à une péjoration altière : il n'y a pas là trace de savoir, diront certains, et le champion de haut niveau n'est en rien un savant ! Bref, la reconnaissance de sa « savance » (pour employer un mot d'ancien français) fait défaut. Il résulte de tout cela que, plus de trente ans après le cours de Chamrousse, le concept de savoir savant n'est toujours pas reçu dans son exacte signification. Tout cela fait que n'est toujours pas compris un point fondamental de la théorie de la transposition didactique : lorsque le plus haut savoir supposé en un domaine d'activité donné au sein d'une société donnée *n'y est pas regardé comme « savant »*, alors l'enseignement de ce « savoir à enseigner » ne saurait s'autoriser pleinement de ce plus haut savoir et doit rechercher le parrainage d'autres « autorités », par exemple du métier lui-même (et non pas du savoir qui le fait tenir), ce qui oblige à des contorsions coûteuses et souvent contre-productives.

Les effets d'une rupture épistémologique inaccomplie

J'appris aussi durant cette période que la rupture épistémologique qui rend possible l'émergence d'un champ scientifique était, en didactique, encore peu avancée. Dans l'enseignement scolaire, tout se passe comme si le professeur disait aux élèves (et, au-delà d'eux, à la société), à propos du savoir enseigné : « Vous pouvez me croire, *parce que ce n'est pas de moi !* » Cette situation faite à ces acteurs essentiels de la diffusion scolaire des savoirs, qui les fait apparaître *officiellement* comme n'étant pas les *producteurs* des savoirs qu'ils enseignent, a eu des conséquences non négligeables sur l'épistémologie des chercheurs. Quand vous n'êtes pas producteur d'un savoir, vous n'avez pas à défendre ce savoir : il y a pour cela de supposées *autorités*, qui vous autorisent *par avance*, et cela même en mathématiques, où le professeur est, il est vrai, censé « défendre » un théorème en en donnant une démonstration mais n'a pas traditionnellement à défendre la démonstration elle-même – celle-ci étant censée être justifiée par la « lumière naturelle », pour parler comme Descartes. Pour cela, avoir à défendre une assertion qu'aucune autorité ne défend pour vous par avance, comme il en va par nature dans la recherche, devient alors une situation inconfortable pour des chercheurs encore assujettis à l'épistémologie des professeurs. De là qu'ils recherchent des prédécesseurs, auxquels on aurait emprunté en tapinois la matière de son propos. De là aussi qu'ils professent une éthique « méthodologique » étroite, qui rejette tout rapport à la contingence engageant plus profondément la responsabilité épistémologique du chercheur. Je pense à cet égard à l'incapacité persistante d'assumer le travail que j'appelle *clinique*, mené en synchronie comme en diachronie, cela à *tous* les niveaux de l'échelle de codétermination didactique (le niveau de l'école aussi bien que celui de la société, par exemple), qui est le socle ou, si l'on peut dire, le *camp de base*, de *tout travail possible en tout champ scientifique*.

De cette rupture épistémologique en souffrance découlait aussi, et d'un même mouvement, cette plaie de la vie scientifique *réelle* : l'insuffisance, *en quantité et en qualité*, du travail réalisé pour recevoir *en pair* le travail d'autrui − et non comme un professeur brutal recevant le travail d'un élève qu'il juge a priori insuffisant et fautif. Autour de 1980, j'avais avancé ce qui m'apparaissait cliniquement comme bien attesté : *l'algèbre élémentaire est un savoir culturellement péjoré*, à le comparer en premier lieu au savoir géométrique. Or c'était là une assertion d'un type qui répugnait à certains, comme si j'avais déclaré que l'algèbre est bleue ou que les équations du second degré sont libidineuses. Cette assertion soulevait, certes, deux questions parfaitement légitimes : l'algèbre est péjorée, dites-vous, mais péjorée *par qui* ? Et puis bien sûr : quelle que soit la réponse à la question précédente, comment *l'établissez-vous ?* Dans les objections à l'endroit de cette « thèse », je continue de voir d'abord, hélas !, une forme d'attitude « politiquement correcte ». Si l'on concède que les différentes parties des mathématiques enseignées ne sont pas également valorisées, où s'arrêtera-t-on ? Si l'on affirme que telle partie du curriculum est dépréciée, cela peut être dommageable aux professeurs, aux élèves, à leurs parents même, et finalement à l'enseignement des mathématiques. Or le problème est que, dans une approche anthropologique des faits didactiques (et des conditions et contraintes qui les gouvernent), une telle condition supposée – la péjoration de l'algébrique – *ne peut être ignorée*, car, sans même qu'ils en aient conscience, elle change réellement la situation de l'élève, du professeur et de chacun. La péjoration d'un objet, ainsi, est corrélée ordinairement à l'affirmation de la *facilité* de l'usage de cet objet. (Ainsi en va-t-il par exemple aujourd'hui s'agissant de l'Internet : voir Ladage & Chevallard 2011.) Cela conduit en règle générale à deux grandes conséquences solidaires : tout d'abord, on *étudie insuffisamment* l'objet ainsi déclaré « facile » d'emploi, si bien que, en pratique, on le connaît peu, et mal ; ensuite, et par voie de conséquence, on n'utilise guère l'objet que dans *des usages stéréotypés « faciles »*, ce qui, bien évidemment, conforte le verdict initial de « facilité ». Lorsque, d'aventure, un emploi plus « difficile » est tenté − sans succès −, on déclarera que l'objet péjoré est « incapable » d'un tel emploi. Ainsi en va-t-il avec le calcul algébrique élémentaire, dont les usages scolaires restent limités et ne permettent guère, par exemple, de développer une culture de l'*anticipation* et du *contrôle* dans le travail mathématique, ce qui conduirait par exemple à *prévoir* que, si l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a une racine positive, celle-ci est supérieure à 1, parce que l'égalité $x^2 - x - 1 = 0$ implique que l'on a aussi $x = 1 + 1/x$.

Une culture commune à construire

La médiocrité du débat « scientifique » tenait et tient toujours, me semble-t-il, d'abord à un manque de *culture commune* de la communauté des chercheurs. Rappelant récemment que le mot d'algèbre fut pointé à son introduction en Occident comme « ne signifiant rien dans les langues européennes », je fus « mouché » par un *referee* anonyme qui objecta que bien d'autres mots, tel *magasin*, nous sont venus de l'arabe sans inconvénient apparent pour eux. Ce collègue, qui aurait dû agir en *pair* − dans le cadre de ce qui est en principe une *peer* *review*, et non un exercice de *bullying* – et qui aurait dû entendre que je parlais du mot d'algèbre *et non d'un autre*, ne connaissait-il pas, *par exemple*, ce passage où l'historien des mathématiques David Eugene Smith (1925/1958, p. 392) note que Viète « rejected the name "algebra" as having no significance in the European languages, and proposed to use the term "analysis," and it is probably to his influence that the popularity of this term in connection with higher algebra is due » ? Il aurait dû. Pour travailler efficacement ensemble, il faut − comme dans une classe scolaire ordinaire − *savoir ensemble*, *ignorer ensemble* et *apprendre ensemble* ; et, par là, il faut savoir à un moment donné ce que chacun d'entre nous ou presque sait et ce que chacun d'entre nous ou presque ignore. Le contraire de cette indispensable solidarité épistémologique s'incarne dans la figure culturellement bien connue de Monsieur Je-sais-tout − l'allemand l'appelle *Besserwisser*, « qui sait mieux », l'anglais *know-it-all* ou *know-all*, l'espagnol *sabelotodo*, « qui sait tout », etc. Cette figure semble avoir, chez les didacticiens des mathématiques, une origine *sui generis*. Car celui qui sait, dans l'univers scolaire, c'est le professeur, qui, dans l'état historique *actuel* du métier, est, face aux élèves, condamné à savoir et doit renoncer à tout aveu d'ignorance. (Bien entendu, comme d'autres, j'ai été marqué par l'expérience d'un professeur dont des signes objectifs nous disaient qu'il était fort savant et qui, pourtant, n'hésitait pas à nous dire son ignorance sur tel ou tel point.) L'interdit d'ignorer pèse tyranniquement sur la vie des classes. La manière de participer au débat qu'adoptent encore trop de chercheurs en didactique est souvent l'écho de cette contrainte caractéristique du régime scolaire actuel du savoir et de l'ignorance. Il me semble donc que la source proche du *know-it-all-ism* des didacticiens, de leur *adultisme*, selon une terminologie que j'ai tôt employée, se trouve à nouveau dans une *insuffisante rupture avec la figure du professeur*.

Dans l'approche anthropologique du didactique, il convient de prendre en compte des faits de niveaux très différents : faits de civilisation, de société, d'école, de pédagogie ; et, s'agissant des personnes elles-mêmes, des faits psychologiques (au sens large du terme). Dans chaque cas, les « sciences » qui ont le monopole de tels faits peuvent être utiles au didacticien et il convient donc de les consulter, même si la chose se révèle souvent décevante car la question que, du fait de ses propres travaux, le didacticien est conduit à leur poser n'a guère de chances d'y avoir été posée et d'y avoir reçu réponse. Mais de telles fréquentations ramènent ordinairement des matériaux à partir desquels le didacticien peut espérer articuler une réponse à la question que lui pose sa recherche. J'appris cependant que ces données incontournables de la vie du chercheur posent deux ordres de problèmes. Quel que soit l'apport espéré, la fréquentation de ces sciences « contributives » exige des lectures nombreuses et diverses et une information régulièrement renouvelée. Un tel travail ne peut se réduire à la consultation assidue de quelques livres-fétiches qu'on s'entendrait pour sacraliser. Pour ne donner ici qu'un exemple, si, en certains domaines de la didactique des mathématiques, il est au moins utile d'avoir en tête la notion de *proof-generated concept* introduite par Imre Lakatos dans *Proofs and refutations* (1976, p. 89), il n'est pas inutile de connaître l'article de Solomon Feferman (1981) intitulé *The logic of mathematical discovery versus the logical structure of mathematics* (Feferman 1998, pp. 77-93), où les thèses lakatosiennes sont discutées. J'ajoute à cela que le chercheur doit se nourrir même de mauvais livres et d'articles médiocres, qui peuvent cependant l'alerter sur l'existence de telle ou telle ressource peut-être utile. Je crois que notre communauté n'a qu'à gagner à une ouverture large sur les productions contemporaines et anciennes dans une foule de domaines *qu'il n'est pas possible de circonscrire à l'avance*. La connaissance utile est souvent connaissance *à venir*, à découvrir ou à créer : elle ne saurait être identifiée d'avance sans coup férir.

Second commentaire annoncé : quel que soit le prix qu'il accorde aux apports possibles de tel champ de connaissance, le chercheur ne doit pas s'inféoder à ce champ et aliéner sa liberté en reprenant à son compte les contraintes qui y prévalent, comme s'il désirait s'y voir reconnu en tant que bon et loyal sujet. Ces contraintes, quand elles ne se révèlent pas superfétatoires, permettent sans doute d'être bien vu − et peut-être productif − dans le champ concerné, qu'il s'agisse de psychologie, de sociologie, de linguistique, d'histoire, etc. Mais elles risquent fort de n'être pas véritablement compatibles avec les contraintes imposées par l'objet d'étude propre du chercheur. Et, à plus forte raison, il ne convient donc pas que celui-ci cherche, ouvertement ou subrepticement, à les imposer à ses pairs.

La théorie des rapports et l'appel aux renoncements ostensifs

Dès le cours de Chamrousse, il avait fallu employer un vocabulaire en partie spécifique et des notations inédites. La chose est banale dans les sciences ; mais elle apparaissait là suspecte, sinon interdite. J'ai vite appris qu'un chercheur ne doit pas accepter les invitations répétées à se soumettre à la *doxa* ambiante et au langage de la tribu tel qu'il est. On n'imagine pas un étudiant disant au professeur qui vient de donner la définition mathématique de la notion de groupe que, *pour lui*, un groupe, « ça n'est pas ça », que la notion emporte avec elle une nuance de convivialité, de chaleur qu'il ne retrouve pas dans la définition donnée. Or cela est présent en didactique depuis le début.

La théorie des rapports, élaborée dans les années 1980, en fournirait quelques exemples. L'époque était marquée par le mot d'ordre constructiviste : l'élève, disait-on, « construit son savoir ». Ce slogan me parut contestable à plusieurs égards. Tout d'abord, je rejetais des expressions comme « le savoir *de* l'élève », le « savoir *du* professeur », etc. J'avais parlé de savoir à enseigner, de savoir savant, non du savoir de telle institution ou de telle personne. Le savoir transposé *en une institution* (la notion de transposition didactique s'était élargie en la notion de transposition *institutionnelle*) est une réalité associée à l'institution, dont celle-ci nourrit son action. On peut certes vouloir décrire cette réalité ; mais on ne l'observe qu'à travers les *rapports* qu'ont avec elle les différents types de sujets de l'institution. Encore ces rapports ne peuvent-ils être observés qu'incomplètement à partir d'une *position* donnée dans l'institution ou dans ses entours, chaque position découpant dans le rapport observé une part « publique » (visible) et une part « privée » (invisible). Un individu n'a pas « un savoir » comme il a un bras ou une jambe, mais un rapport à un savoir supposé. Plus largement, étant donné un objet o, un individu x a un rapport *personnel* à cet objet, que je notai $R(x\ ;\ o)$. Ce rapport avait quelque chose du rapport « idéal » à l'objet o que sont censés avoir, dans l'institution I, les sujets de cette institution I qui viennent y occuper la position p : le rapport institutionnel à o pour les sujets en position p dans I, que je notai $R_I(p\ ;\ o)$. Si, par exemple, l'objet o est « la fonction logarithme népérien », notée usuellement ln, il existe à un moment donné, dans l'institution qu'est une classe de terminale scientifique, TS, un rapport institutionnel pour la position d'élève, ε, à savoir le rapport institutionnel $R_{TS}(\varepsilon\ ;\ \ln)$, et un rapport institutionnel pour la position de professeur, π, à savoir le rapport institutionnel $R_{TS}(\pi\ ;\ \ln)$. Ce second rapport comporte bien sûr des éléments relatifs au fait que le professeur doit *enseigner* l'objet $o = \ln$, c'est-à-dire que l'objet ln est pour les sujets en position π un objet *à enseigner*, éléments que ne comporte pas le rapport $R_{TS}(\varepsilon\ ;\ \ln)$, qui intègre, lui, des éléments relatifs au fait que l'objet ln est pour les sujets en position ε un objet *à apprendre*, en sorte que, si l'intersection des rapports $R_{TS}(\varepsilon\ ;\ \ln)$ et $R_{TS}(\pi\ ;\ \ln)$ n'est certes pas vide, on ne saurait avancer que le second inclut le premier, que $R_{TS}(\pi\ ;\ \ln)$ est « plus riche » que $R_{TS}(\varepsilon\ ;\ \ln)$ *à tous égards*.

La formule « l'élève construit son savoir » pouvait alors subir une première transmutation ; elle devenait : « l'élève construit son *rapport* au savoir ». Une seconde transformation apparut en même temps nécessaire : l'élève ne construit pas son rapport au savoir, ce rapport *se construit* et l'élève peut *contribuer* à cette construction, qu'il ne maîtrise pas complètement.

Mais la formule « l'élève contribue à construire son rapport au savoir » comportait une ambiguïté que, pour ma courte honte, je n'ai jamais réussi à dissiper : on y voit apparaître le syntagme « rapport au savoir » qui, sous d'autres plumes − celle notamment de Jacky Beillerot − fit bientôt florès en sciences de l'éducation. Pour moi, « le savoir » était un objet *o* parmi d'autres, que je notais ironiquement $, et on pouvait donc parler des rapports personnels $R(x\ ;\ \$)$ ou des rapports institutionnels $R_I(p\ ;\ \$)$. Mais à tel « savoir » déterminé, disons l'algèbre élémentaire, *a*, existaient *de même* des rapports personnels $R(x\ ;\ a)$ et des rapports institutionnels $R_I(p\ ;\ a)$; et il en allait ainsi pour tout objet *o* possible. Il semble que, du fait du succès de la notion de rapport au savoir (à laquelle est consacré aujourd'hui un article de *Wikipédia*), la réception de cette théorie se soit accompagnée d'une atrophie de la conceptualisation proposée.

Les notions de rapport personnel et de rapport institutionnel allaient de pair avec deux ou trois autres notions clés pour parler des « sujets ». Tout d'abord la notion d'institution, que j'ai déjà utilisée ; ensuite, celle de *personne* ; enfin celle d'*assujettissement* d'une personne à une institution. Une personne n'existe que par ses assujettissements institutionnels : elle est à chaque instant la résultante d'un *nexus* d'assujettissements. Bien entendu, le mot d'assujettissement fut reçu trop souvent au sens du français commun. Contre cela, j'ai dû souligner que nos assujettissements sont le moyen − et l'unique moyen − de notre *puissance*. (Une chaîne de vélo, disais-je, ne sert à rien si elle n'est pas adéquatement assujettie au pédalier.) J'ai insisté aussi sur ce fait que la *liberté de la personne* consistait à se délivrer d'assujettissements installés, voire indurés, en se donnant à de *nouveaux* assujettissements. Mais en quoi consistent alors ces assujettissements qui « font » la personne ? Un individu *x* traverse depuis sa naissance une foule innombrable d'institutions I_k, où il occupe une suite de positions p_k. Il est ainsi assujetti à une foule immense de rapports $R_{I_k}(p_k\ ;\ o)$, qui contribueront à la construction de ses rapports personnel $R(x\ ;\ o)$. La personne est regardée ici comme l'*émergent* du système complexe, évolutif des rapports personnels de l'individu.

La réception de la théorie ne pouvait pas être simple : elle supposait ascèse ostensive et renoncement aux à-peu-près verbaux. Les « formules » qu'elle contenait devaient aider − et aident effectivement − qui *ose* les employer. Lors d'une école d'été, présentant ce qui était à ses yeux les différences entre recherches américaines et recherches françaises en matière de *mathematics education*, Jeremy Kilpatrick montra à l'auditoire, d'une manière plutôt neutre, des « formules » du type $R(x\ ;\ o)$, $R_I(p\ ;\ o)$ ou peut-être encore $R(x\ ;\ R(x\ ;\ o))$, ce qui désigne le rapport de *x* à son propre rapport à *o*, en ajoutant que, cela, on ne le voyait pas dans la littérature d'outre-Atlantique. On n'était pas loin de l'idée d'une possible censure, à ceci près que, à l'évidence, la personnalité du conférencier ne le portait guère à ce genre de choses.

De la théorie des rapports à la théorie praxéologique

À l'instar de la théorie de la transposition didactique des savoirs, la théorie des rapports personnels et institutionnels avait un grand degré de généricité. Elle était indispensable pour penser le sujet d'une manière qui ne fût pas « mentaliste », qui donnât à voir les ressorts de l'action du sujet et leur genèse au lieu de les imaginer stockés quelque part dans son « esprit ». En 1989, quand je commence à diriger le travail de thèse de Marianna Bosch (elle devait soutenir sa thèse en 1994), une lacune pourtant est patente dans ce qui deviendra la théorie anthropologique du didactique : elle concerne *l'origine du contenu* des rapports à un objet *o*. Pourquoi par exemple ce rapport à la fonction logarithme chez ces personnes, et cet autre rapport chez d'autres personnes ? La réponse est en essence la suivante : le rapport de *x* à *o* est engendré par tout ce que *x fait* ou *a fait* avec *o* dans toutes les institutions où *x* a rencontré l'objet *o*. Dans le même temps, le besoin se faisait sentir de préciser ce qu'est, dans la formule par laquelle je désigne aujourd'hui un système didactique, à savoir $S(X\ ;\ y\ ;\ \heartsuit)$, l'enjeu didactique ♥. Il y avait bien sûr la notion de savoir − cet enjeu ♥ serait un « savoir » −, mais, dans une perspective anthropologique, cette notion s'avérait limitative dans un monde où non seulement le titre de « savoir savant » est chèrement disputé, mais où même le titre de (simple) savoir ne s'accorde pas si facilement. Se moucher suppose-t-il un savoir ? Et descendre un escalier ? À ces questions, il fallait à l'évidence répondre *oui*, alors même que toute une société en refusait l'augure avec un joli mouvement du menton.

Tout cela conduisit à la notion de *praxéologie* : toute action humaine est faite de l'exécution de tâches de différents *types*, à chaque *type* de tâches T est associée au moins une *technique* τ, chaque technique requiert (de façon latente en général, qui devient manifeste sous certaines conditions) un discours justificatif et générateur d'intelligibilité que j'appelai une *technologie*, *la* technologie de la technique τ, que je notai par la lettre θ. Enfin, au-dessus de ces trois niveaux, figurait la composante théorique, la *théorie*, Θ, qui justifiait, voire imposait θ et, par son entremise, τ. On arrivait ainsi à un quadruplet noté $[T / \tau / \theta / \Theta]$, qui était *une* praxéologie. Dans cette entité, il y avait un premier bloc, la *praxis* $[T / \tau]$, et un second bloc, le *logos* $[\theta / \Theta]$; et l'on pouvait écrire quelque chose comme $[T / \tau / \theta / \Theta] = [T / \tau] \oplus [\theta / \Theta]$. Retrouvant la langue courante, on pouvait aussi, grosso modo, identifier d'une part *praxis* et « savoir-faire », d'autre part *logos* et « savoir ». La transposée $[T / \tau / \theta / \Theta]^t$ de la praxéologie $[T / \tau / \theta / \Theta]$ d'une institution dans une autre pouvait s'écrire $[T / \tau / \theta / \Theta]^t = [T / \tau]^t \oplus [\theta / \Theta]^t$ et offrir de nombreuses variantes. On pouvait notamment avoir, à la limite, et pendant un temps au moins, $[\theta / \Theta]^t = \varnothing$ (un savoir-faire « nu », en attente d'un « savoir » le justifiant et l'expliquant), ou, plus fréquemment encore peut-être, $[T / \tau]^t = \varnothing$ (un savoir en attente d'emploi). Cette notion permettait un regard acéré sur les connaissances à apprendre et à enseigner : loin d'être une notion spéculative (ou contemplative), elle allait jouer un rôle actif dans la suite des choses.

Pour faire bonne mesure, j'ajoute que, fouillant les débarras de l'histoire, d'aucuns me cherchèrent un prédécesseur en matière de praxéologie. L'un de ces érudits d'occasion, qui n'est pas de notre tribu, écrira sans sourciller que j'aurais tiré cette notion de l'œuvre d'un auteur, Alfred Espinas (1844-1922), dont je n'avais à l'époque jamais entendu parler et qui, bien entendu, ne donnait pas au mot de praxéologie le sens qu'il a en TAD. Mais là, je n'appris rien qui vaille ; je savais déjà tout.

Problèmes de la profession 4

Telles que je les perçois, les conditions du travail scientifique en didactique des mathématiques ont été marquées depuis toujours, *et jusqu'à aujourd'hui*, par deux carences solidaires : un *débat scientifique* trop peu approfondi, gêné par une *culture commune* trop étroite et demeurée insuffisamment travaillée. Une contrainte commande ces conditions : l'insuffisance de la rupture épistémologique avec la culture du métier de professeur − métier qu'il s'agit sans doute d'étudier, non de singer. Une première question en découle : *Comment la communauté des chercheurs peut-elle assumer l'indépassable spécificité de ses rapports aux outils de la recherche, en particulier à la création endogène d'œuvres (par contraste avec l'importation d'œuvres allogènes toutes faites) et, plus largement, à la déconstruction de rapports ailleurs dominants mais inadéquats au travail du didacticien ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Je réserverai en outre une question spéciale à la grande affaire du débat scientifique et en particulier aux difficultés d'une *peer review* qui, trop souvent, ne mérite pas ce nom : *Comment la communauté des chercheurs peut-elle organiser un débat scientifique informé, studieux, voire laborieux, et donc rigoureux, non déformant, bienveillant et pertinent à la fois, enfin dépourvu d'angles morts − grâce, par exemple, à l'adoption des normes* *exigeantes de l'*open peer review *? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Je complète enfin ces interrogations par celle-ci : *Comment élaborer une culture commune indéfiniment ouverte, au service de la recherche, qui répudie notamment tout « catéchisme » limitatif et apporte en même temps les aides utiles aux chercheurs pour partager le trésor évolutif de connaissances rassemblé activement par leur communauté ? Que comptez-vous faire à cet égard ?*

Cinquième période : jusqu'en 2000

Chronique 5

J'ai travaillé à l'IREM d'Aix-Marseille depuis le début de l'année civile 1972 jusqu'à la rentrée universitaire 1991, quand s'est ouvert l'IUFM de l'académie d'Aix-Marseille où j'avais été nommé comme professeur des universités. L'année 1990-1991 avait été occupée, non sans enthousiasme, à penser l'IUFM à venir. J'avais beaucoup appris à l'IREM, dont j'étais le directeur depuis 1984. (Je fis dans ces fonctions plus que mon temps : à la fin des années 1980, en effet, personne ne voulait être directeur et j'eus toutes les peines du monde à me trouver un successeur, sur qui j'organisai inamicalement de fortes pressions amicales pour qu'il accepte l'offre qui lui était faite.) J'espérais que certaines contraintes que j'avais rencontrées jusque-là pourraient être levées à l'IUFM. Or j'y rencontrai d'abord des contraintes négatives nouvelles, qui n'existaient pas à l'IREM. Ainsi n'y avait-il pas de vraie bibliothèque, mais une « médiathèque » sur le modèle des CDI du secondaire, conçue pour les élèves professeurs de l'IUFM, non pour leurs formateurs, fussent-ils enseignants chercheurs de métier. J'ajoute à cela un autre contraste avec l'IREM que je venais de quitter, qui n'était qu'un symptôme, certes, mais fort déplaisant : téléphoniquement, à l'IUFM, nous n'avions pas droit à l'international ! Cette décision du directeur, qui participait clairement de l'univers du secondaire, était handicapante pour faire de la science ; mais l'IUFM était-il un lieu où l'on devait faire de la science ? La réponse de l'institution − du ministère, tout le premier − était clairement *non*.

Il y avait aussi, bien sûr, des contrastes positifs. Je pris d'emblée la direction de la filière « Mathématiques », où l'on formait les professeurs de mathématiques des collèges et lycées, les PLC comme on disait en nombre d'IUFM, les PCL comme nous disions à Marseille. À l'IREM, je m'étais convaincu de la très faible efficacité de la formation continue, qui touchait au mieux 10 % des professeurs de l'académie, des fidèles que l'on voyait revenir année après année. À l'IUFM, nous avions devant nous, à peu de chose près, la totalité des promotions successives de futurs professeurs. En outre, quoique le volume de formation restât ridiculement réduit par rapport à ce qu'il doit être dans une vraie profession, il n'en était pas moins considérablement supérieur à ce qu'il avait pu être dans le cadre du CPR.

La formation des professeurs stagiaires était fondée sur les difficultés que nous rapportaient ces élèves professeurs, à travers des questions écrites recueillies chaque semaine ouvrable. Bien entendu nous n'avions pas forcément « en stock » des réponses solides à ces questions ; mais le principe était de prendre acte que telle ou telle question se posait, qu'elle était un « problème de la profession » auquel la recherche devait à terme apporter une solution. J'étais certain d'une chose − que beaucoup ne partagent pas *en réalité*, même aujourd'hui. Dans la dynamique qui emporte des pans entiers de la vie sociale, tels ceux de la santé ou de l'éducation, la formation n'est pas première, parce qu'elle doit s'alimenter, dans nos sociétés, à la recherche. Plus exactement, il y a une dialectique de la recherche et de la formation, celle-ci fournissant des problèmes « primaires » à celle-là et servant de milieu « adidactique » principal auquel confronter une production de recherche, quelque modeste qu'elle soit. L'ambition que je conçus alors, avec un petit nombre de guérilleros avec qui j'avais parfois longuement travaillé à l'IREM − je pense notamment à Odile Schneider, à Jacques Tonnelle, à Michel Jullien, à Christian Reymonet − pouvait se dire ainsi : il s'agissait de concevoir et de réaliser une formation qui contribuerait à faire passer le métier de professeur du statut séculaire de semi-profession à celui de profession ; qui, donc, participerait à (et de) la *professionnalisation du métier de professeur*. C'est à cela que nous avons employé nos forces, avec enthousiasme, au prix de bien des batailles, sans nous laisser décourager par les aboiements que suscitait le passage de la caravane. En tout cela, bien sûr, j'appris beaucoup.

Ce que j'ai appris 5

De l'IREM à l'IUFM : ce que j'aurais voulu ignorer

Les années passées à l'IREM avaient vu se développer mes activités de recherche et celles des quelques personnes qui composaient avec moi le « groupe *Didactique* » de l'IREM. Mais l'existence de ce groupe même me paraissait être une anomalie permanente : il jouxtait d'autres groupes, autrement étiquetés − il y avait ainsi le groupe *Analyse*, le groupe *Géométrie*, etc. −, qui ne prétendaient nullement « faire de la didactique » ni même « faire de la recherche » en quelque domaine que ce fût, alors bien sûr que, dans le groupe *Didactique*, nous travaillions également sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, de la géométrie ou de la statistique par exemple. Deux mondes se côtoyaient donc, non sans malentendus. Pour moi, les IREM, instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, devaient devenir de véritables instituts de recherche, avec leurs collaborateurs « professionnels », leurs « terrains », leurs formations (qui permettaient notamment la mise à l'épreuve des fruits de la recherche) et avec, en tout premier lieu, *leurs chercheurs*. Or je compris bien vite que c'était là un point de vue qui *reculait* au lieu de s'imposer : la quasi-totalité des gens qui « venaient à l'IREM » considéraient sans le dire − parce que, à leurs yeux, cela allait de soi − qu'il ne s'agissait nullement d'un institut de *recherche*. La situation évoluait en sens inverse de celle que je souhaitais voir se réaliser.

D'une part, en effet, je voyais les didacticiens qui avaient trouvé avantage à amorcer leurs recherches dans un IREM s'efforcer de migrer vers des institutions plus respectables en créant des « laboratoires » ou en se faisant une place dans des laboratoires existants en des domaines connexes non fondamentalement hostiles à la didactique − c'était souvent, me semble-t-il, affaire d'arrangements personnels. D'autre part, les IREM continuaient à être ce pour quoi, en vérité, ils avaient été conçus : des lieux francs où des professeurs pouvaient se retrouver pour « réfléchir » hors hiérarchie sur des questions d'enseignement, mais d'où la recherche proprement dite, celle qui se traduit en thèses, en articles publiés, etc., était exclue. Le mot de « réflexion » était le mot-fétiche qui définissait idéalement la nature des activités qu'on y menait « normalement » : on créait des « groupes de réflexion », qui allaient parfois, il est vrai, jusqu'à être des « groupes de travail », où des productions pour la classe prenaient forme. J'étais pour l'essentiel hostile à cette problématique institutionnelle mais je devais l'assumer comme directeur.

Les transfuges des IREM, dont j'étais, eurent à vivre une expérience que, personnellement, je n'avais pas vu venir. Dans les IREM, nous étions respectés, voire reconnus et, dans une certaine mesure même, appréciés, même si une coterie anti-didacticienne s'était emparée de certains moyens qui auraient dû échoir en partage à *l'ensemble* de la communauté des IREM. (Ainsi étais-je, à l'instar de quelques autres, *persona non grata* en telle revue dont cette bande avait fait son repaire.) Sitôt que nous fûmes entrés à l'IUFM, avant que cette institution se mette même à fonctionner, nous fûmes tenus pour suspects de la part de ceux-là même dont nous nous étions crus si proches. Bref, nous étions sous surveillance, car nous fréquentions désormais un mauvais lieu et l'on devait craindre que, saisis d'un illuminisme pédagogique

que personne ne nous connaissait, nous y bradions la gloire des mathématiques, que tentaient de protéger, à sage distance de la fournaise des IUFM, quelques prêtres et prêtresses des mathématiques éternelles qui continuaient à officier dans les IREM. J'aurais pu dire : « Foutaise ! » Mais le ver était dans le fruit qui, quelques années plus tard, aurait accompli son œuvre.

Quand je quittai l'IREM, les relations avec les corps d'inspection n'étaient plus depuis longtemps un vrai problème − chacun avait son territoire où l'autre n'intervenait guère. Une proposition de coopération avec le CPR lancée depuis l'IREM quelques années auparavant sous la houlette de Jean-Louis Ovaert, qui avait quelque titre à conduire une telle entreprise, s'était ainsi brisée sur le refus affolé des IPR. Dès que je fus parti, à la rentrée 1991, on vit réapparaître d'une part des IPR mus par un fort sentiment irrédentiste, qui rétablirent aussitôt les hiérarchies traditionnelles, et d'autre part cette catégorie de collègues mathématiciens qui venaient là mus par le désir d'aider les professeurs en leur prodiguant les bienfaits dont leur lien avec le haut savoir mathématique leur donnaient le monopole. J'ai appelé ces personnes, souvent des plus estimables au plan humain, des *évergètes*, en reprenant ainsi un mot formé d'après le grec (εὐεργετέω signifie « je fais du bien », un évergète est un bienfaiteur). Tout cela, à mes yeux, contribuaient, sous des apparences de générosité désintéressée, à maintenir le métier de professeur dans son état traditionnel de semi-profession, marqué notamment par la rareté ou plutôt par la quasi-absence de hauts savoirs professionnels issus de la recherche. À distance − à l'IUFM − je pouvais ignorer tout cela. Mais je ne pouvais en être dupe tout à fait : le vieux monde était de retour ; plus tard − mais cela semblait alors si lointain ! −, il fondrait sur sa proie et c'en serait fini des IUFM.

À l'IUFM : tout prendre

Entre le travail accompli à l'IREM (où j'étais resté presque vingt ans) et celui que je devais mener à bien à l'IUFM à partir de 1991, il y avait une différence notable. Dans le premier cas, je faisais de la recherche « libérale », dont les sujets étaient plus ou moins décidés librement − libéralement −, comme il en va souvent avec les sujets de thèse. À l'IUFM, cette recherche libérale n'était plus de mise : nous étions confrontés, en quelque sorte de force, à des questions apportées par de jeunes professionnels en formation, et nous n'étions pas libres de choisir : il fallait *tout prendre*. J'appris là à reconnaître deux conditions solidaires essentielles à la productivité de la recherche : *ne pas choisir* (et ne renoncer à chercher qu'en dernière limite, quand le problème apparaît provisoirement tout à fait hors de portée), et embrasser *un vaste domaine* au lieu de se « spécialiser » de façon souvent illusoire dans de minuscules parcelles de l'immense champ que le souci d'une profession en devenir nous imposait de labourer. La formation devint dès lors une succession recommencée année après année de déconstructions et de reconstructions, dont je ne donnerai ici, à titre d'illustrations, que deux ou trois exemples, en me cantonnant à des questions mathématiques. Une question que la clinique de cette formation m'avait par exemple amené à poser − on verra le lien avec une observation faite plus haut − était la suivante : l'axiomatique du plan de Hilbert suppose un ensemble de parties du plan appelées droites et satisfaisant à certaines conditions imposées par cette axiomatique ; si l'on identifie alors ce plan à l'espace affine $\mathbb{R}^2$, est-il vrai que l'ensemble Δ des variétés affines de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$ *n'est pas* le seul ensemble de parties de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant cette axiomatique ? La réponse du *Journal* du séminaire des PCL2 commençait ainsi : « La réponse est immédiate, et positive : si φ est une bijection *quelconque* de $\mathbb{R}^2$, le couple ($\mathbb{R}^2$, $\varphi(\Delta)$) satisfait l'axiomatique de Hilbert (par transport de structure), et cette axiomatique ne caractérise donc pas les variétés affines de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$. » (Chevallard 2006-2007, pp. 451-452). À cela faisait alors pendant une remarque des plus concrètes :

> Le fait que la rectilinéarité, notion *physique*, ne puisse pas être caractérisée en termes *mathématiques* entraîne que, avec des élèves de 6^{e} notamment, on ne peut faire « l'économie » d'une construction préalable de la notion *sensible* de droite, *qu'aucune théorie mathématique ne saurait à elle seule engendrer*. D'une manière générale, en 2de comme en 6^{e}, il convient de revenir aussi souvent que c'est utile à l'espace sensible : comme en d'autres domaines, *les mathématiques supposent ici le non-mathématique, qu'il s'agit précisément de mathématiser*.

La même observation était faite aussi à propos de la perpendicularité physique, qu'on ne saurait davantage caractériser mathématiquement. Le but était toujours d'explorer le *topos* réel − et non pas supposé − de l'élève. Ainsi montrait-on que, lorsque certains élèves, en cinquième, disent avoir réussi à construire un triangle non aplati de côté 9, 5 et 4 centimètres, lorsque certains même ajoutent que, si l'on commence par le petit côté, la chose est plus évidente encore, ces élèves ne déraisonnent pas. Si $a \geq b \geq c$ sont les mesures en question, avec $a = b + c$, si les côtés qui devraient avoir pour mesure b et c ont, par suite d'une petite imprécision graphique, pour mesures réelles $b(1+r)$ et $c(1+r)$, le triangle effectivement tracé a une hauteur h dont le calcul montre qu'elle vérifie $h^2 \approx 2rbc$. Pour $r = 1$ %, on a $h^2 \approx 0{,}02 \times 4 \times 5 = 0{,}4$ et donc $h \approx 0{,}63$, ce qui, si l'unité est le centimètre, est clairement visible sur le dessin. Si l'on commence par le petit côté, la hauteur est $h'^2 \approx 2rab = \frac{a}{c}(2rab) = \frac{a}{c}h^2$. Ici, $\frac{a}{c} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ et donc $\sqrt{\frac{a}{c}} = 1{,}5$, ce qui donne $h' \approx 0{,}95$. Le calcul confirme ainsi la raison graphique des élèves, contre la raison géométrique du professeur.

Le dépérissement de l'enseignement des mathématiques

L'exploration serrée de l'enseignement *réel* des mathématiques − qui, par le truchement des professeurs stagiaires, était notre première pierre de touche − m'apprit bien des choses. Ce qu'allait me montrer le travail systématique sur le curriculum secondaire, auquel je me voyais désormais librement astreint, et ce que, par contraste, je ne voyais que par bribes dans la pratique de la recherche libérale qui avait été la mienne à l' IREM, c'était l'état historique de décomposition où se trouvait le corpus mathématique enseigné, après la commotion de la réforme des mathématiques modernes (qui avait procédé utilement à la réfection générale des infrastructures mathématiques) et la réaction en forme de contre-réforme qui s'était ensuivie autour de 1978. Instruit par des exemples historiques mémorables (celui de la rhétorique dans le dernier tiers du XIX^{e} siècle, celui aussi du latin-grec dans la seconde moitié du XX^{e}, où chaque fois une discipline « reine » était tombée du piédestal où elle était demeurée depuis des siècles), j'avais plus d'une fois, au cours de ces années, prévenu les futurs professeurs que nous formions qu'ils ne termineraient peut-être pas leur carrière comme ils la commençaient − comme professeurs de mathématiques, *tout court*.

Je ne brosserai ici que bien rapidement le tableau que je découvrais alors chaque jour davantage. Les « œuvres » mathématiques à étudier trônaient dans le programme comme des monuments dont personne ne connaissait plus trop l'usage, ni même l'origine. Les *raisons d'être* semblaient perdues ; elles l'étaient. Pourquoi étudiait-on, à l'école, les angles, les triangles, les tétraèdres, les fractions et leur simplification, l'inverse d'un nombre et *tutti quanti* ? Il y avait eu un temps où les manuels proposaient, en fin de chapitre, une section intitulée *Utilité de…* qui faisaient connaître certaines des raisons d'être des réalités mathématiques que l'on venait de passer en revue. Dans un *Traité de géométrie élémentaire* (Poulain 1885), au chapitre *Des parallèles et des parallélogrammes*, on trouve ainsi un bref développement intitulé *Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes*. Dans le langage du temps, l'auteur y précise que « ces théorèmes servent à en démontrer d'autres qui ont pour objet de prouver que deux droites sont égales, que deux angles sont égaux, que deux droites sont parallèles » (p. 39). Il n'y avait là aucun lyrisme, aucune superbe, aucune grandiloquence : c'est cela qui me fera dire, au scandale de certains, que « les mathématiques, c'est de la plomberie ». Pour retrouver une certaine authenticité épistémologique des mathématiques enseignées, il convenait − et il convient toujours − de « démonumentaliser » cet enseignement, de retrouver les raisons d'être des œuvres mathématiques étudiées. Or cela suppose que l'on accepte ce fait essentiel, antinomique des discours euphoriques sur les mathématiques, sur leur beauté, etc., qu'est la nature « plombière » de l'activité mathématique. Tel est le roc énorme qui bloque le passage vers un avenir où l'enseignement des mathématiques retrouve son lustre et son pouvoir attractif à l'endroit de qui ne se laisse plus prendre aux discours apologétiques traditionnels.

La TAD se développe au chevet du métier de professeur

L'état de la TAD au début de la décennie 2000 ne sera plus le même qu'au début de la décennie 1990. Le travail réalisé à l'IUFM fut à cet égard fondamental. En formation initiale, comme je l'ai dit, il fallait affronter − en droit − tous les problèmes qui se faisaient jour. Le « trésor » accumulé jusque-là en fut largement enrichi. Pour cela, je revins alors sur certains acquis antérieurs. Les idées de *type de tâches* (ou, plus exactement, de type de *problèmes*), de *technique*, de *raison d'être* même, et finalement de praxéologie (didactico-mathématique) m'étaient apparues déjà clairement dans les remarquables ouvrages de Léonhard Épistemon parus chez Cédic/Fernand Nathan grâce à la diligence de Jean-Louis Ovaert et de Jean-Luc Verley. Là encore le contraste était fort entre certains discours complaisants sur les mathématiques et un travail au plus près des besoins de l'activité mathématique, dont voici un simple et unique exemple (*Analyse* 1, 1983, pp. 21-22) :

> a) **Parties ouvertes.** Cette notion est utile pour étudier les *problèmes locaux :* continuité (chapitre 3), dérivabilité (chapitre 4), différentiabilité (*Analyse* 5), comparaison des fonctions au voisinage d'un point (chapitre 3), propriétés affines et métriques des courbes et des surfaces (*Analyse* 2), etc.
> Pour montrer qu'une partie U est ouverte, on dispose des méthodes suivantes :
> − Pour tout point a de U, on construit un intervalle (ou une boule) de centre a contenu dans U (autrement dit, on utilise la définition des ouverts).
> − On fait apparaître U comme image réciproque d'un intervalle ouvert par une fonction numérique continue. Ainsi, les parties de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^n$ définies par des *inégalités strictes* portant sur des fonctions continues sont ouvertes.
> − On utilise les opérations sur les ouverts.
> Les points précédents sont illustrés par les exercices 1.26, 1.27 et 1.31, et les VRAI OU FAUX 25 à 28.

Dans ces ouvrages, je rencontrai aussi l'idée que, lorsqu'on étudie un « exercice », c'est en fait *tout un type de problèmes* pour lequel on ébauche une *technique* censée marcher au moins sur le spécimen étudié. L'idée d'*organisation* mathématique (et plus largement d'organisation *praxéologique*) me fut inspirée notamment par la lecture du livre de Hans Freudenthal, *Mathematics as an educational task* (1973). La base théorique restait bien entendu la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau. Mais, dans la pratique de la formation, je m'appuyais aussi sur un article peu connu du mathématicien Georges Bouligand (1889-1979) intitulé « Regards sur la formation mathématique » (1962) qui allait contre la monumentalisation du curriculum en promouvant l'idée simple et fondamentale que le travail mathématique est la résultante d'une part de l'activité de *résolution de problèmes*, d'autre part de l'activité d'élaboration d'une *synthèse* qui mette en forme l'organisation mathématique issue de la résolution des problèmes étudiés, l'oubli d'un des deux termes constitutifs du dualisme problèmes/synthèse conduisant à un curriculum mathématique inauthentique. Tout cela se concrétisait dans les notions d'AER − d'activité d'étude et de recherche − et d'organisation *didactique*, avec le modèle des *moments de l'étude* ou encore la notion de *question cruciale* dans l'étude d'un problème, toutes choses que je ne rappellerai pas ici.

De fait, tout cela et bien d'autres choses encore se trouvent dans les éditions successives du séminaire destiné aux PCL2 de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille. Je dois à la vérité de dire que bien peu de gens dans la communauté didacticienne française, semble-t-il, firent l'effort d'en prendre connaissance. Des bribes circulaient grâce aux articles que de loin en loin je publiais. Mais tout s'est passé comme si un texte long − autour de 500 pages −, riche, systématique restait invisible en dépit même des invitations à le lire qu'il m'arriva de lancer à plusieurs reprises dans de grandes réunions nationales. Je reste persuadé qu'un des mobiles derrière cette incuriosité apparente était simplement le fait que, pour beaucoup d'entre nous, des documents adressés à des *étudiants* ne sauraient être porteurs de morceaux de science méritant qu'un chercheur en prenne connaissance, ce qui allait à contre-fil de notre problématique de formation fondée sur la dialectique de la recherche et de la formation et ce qui était et reste pour moi un signe de mauvaise santé épistémologique de notre communauté.

Ces circonstances ont pesé sur la réception de la TAD. C'est ainsi que, si la notion d'organisation mathématique a été reçue à peu près correctement, la notion indissociable d'*organisation didactique* a fait l'objet de méprises dont l'examen nous ramènerait à des problèmes déjà évoqués. Très tôt j'ai utilisé l'adjectif *didactique* non pour qualifier un geste d'*enseignement* seulement, mais pour désigner un geste d'*étude* (effectué par un étudiant, un élève, un chercheur) ou *d'aide à l'étude* (réalisé par un professeur, un parent, un directeur de recherche). Un « savoir didactique » est donc, en mathématiques, une praxéologie (ou un fragment de praxéologie) dont la mise en œuvre permet d'étudier des questions de mathématiques. C'est ainsi que savoir que, pour prouver que U est ouvert, je peux faire « apparaître U comme image réciproque d'un intervalle ouvert par une fonction numérique continue » est une connaissance *didactique* − de nature mathématique. Les principaux outils d'étude de questions de mathématiques sont eux-mêmes mathématiques. Certains outils didactiques sont, certes, non mathématiques, parce qu'ils n'ont pas (encore) été mathématisés : il y a tendanciellement une mathématisation du didactique en mathématiques, le mathématique *stricto sensu* et le didactique nouant entre eux des relations dialectiques. Plus généralement, si, dans un champ de connaissance et d'action donné, j'appelle *praxéologique* ce qui relève proprement de ce champ, le didactique relatif à ce champ sera fait en grande partie de praxéologies de ce champ et se construira dans une relation dialectique avec celui-ci, avec en particulier une intégration progressive du didactique dans le praxéologique. C'est tout cela, au moins, que j'appris alors, sans toujours pouvoir le faire connaître et reconnaître au-delà d'un cercle étroit, faute de conditions idoines.

Problèmes de la profession 5

La noosphère de l'enseignement des mathématiques apparaît, à travers les IREM notamment, comme faite d'au moins deux mondes qui s'ignorent et dont chacun peut décrire l'autre comme se livrant à des activités non ou peu pertinentes. Au sein même des jeux de pouvoir dont la noosphère est le lieu et souvent l'enjeu, l'évergétisme traditionnel, qui renaît périodiquement de ses cendres et dont j'ai dit les ambiguïtés, soulève un problème historique profond − à comparer la situation actuelle, par exemple, à celle qui prévaut depuis longtemps dans l'univers de la santé. De ce point de vue, je formulerai au moins cette question : *Comment la recherche en didactique peut-elle rendre compte de la diversité des travaux sur (ou pour) l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ? Par contraste notamment avec une attitude d'apparente bienveillance pratique et humaine qui masquerait une relative* *indifférence épistémologique, quelle place et quel statut la recherche en didactique peut-elle donner à de tels travaux et à leurs résultats ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Contre la tentation de fabriquer sans cesse des petits mondes noosphériens que n'épargnent pas les fièvres obsidionales, on peut avancer une stratégie de développement scientifique ouverte, visant de vastes domaines de pratique − celui des professeurs de mathématiques, bien sûr, mais pas seulement −, où la recherche s'efforce indéfiniment d'articuler le local et le global, ce que j'exprimerai à travers cette question : *Rejetant les illusions du libéralisme épistémologique, quelles réorganisations de la cartographie des domaines de recherche permettraient à la didactique d'apparaître comme une source essentielle de connaissances sur les difficultés concrètes de la diffusion des connaissances ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Une autre question encore ne peut pas ne pas être posée, qui est liée à ce qui pourra apparaître rétrospectivement comme une urgence historique de notre temps, et dont l'abord suppose un certain sang-froid épistémologique : *Comment la recherche en didactique peut-elle prendre en charge l'hypothèse d'un effondrement historique en cours du paradigme ancien et actuel de l'enseignement scolaire des mathématiques et travailler à explorer les lignes de force les moins improbables de l'évolution de nos systèmes d'enseignement ? Que comptez-vous faire à cet égard ?*

Épilogue : la recherche continue

Mon récit s'arrête volontairement à l'année 2000. Cette année-là voit l'introduction dans certaines classes de première des *travaux personnels encadrés* (TPE), que suivront au collège les *itinéraires de découverte* (IDD). Simultanément, et parfois en écho, dans la formation dispensée à l'IUFM d'Aix-Marseille aux futurs professeurs de mathématiques, de nouveaux problèmes sont travaillés et, corrélativement, de nouveaux concepts émergent, qui posent les premiers jalons des recherches actuellement en cours : la notion d'AER est ainsi plongée dans celle de PER − de *parcours d'étude et de recherche* − et les travaux ultérieurs amèneront à dégager la notion plus générale encore d'*enquête*, en même temps que se dessinera − à travers le *schéma herbartien* notamment − le portrait-robot d'un nouveau paradigme de l'étude scolaire, le paradigme *du questionnement du monde*. Si nombre de problèmes demeurent, la recherche continue.

Références bibliographiques

Bateson, G. (1977). *Vers une écologie de l'esprit*, tome 1. Paris : Seuil.

Bouligand, G. (1962). Regards sur la formation mathématique. Dans F. Le Lionnais (Éd.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 532-542). Paris : Albert Blanchard.

Bourbaki, N. (1970-). *Éléments de mathématique*. Paris : Hermann.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Cartan, H. (1967). *Calcul différentiel*. Paris : Hermann.

Cartan, H. (1967). *Formes différentielles*. Paris : Hermann.

Chevallard, Y. (1977). *Deux études mathématiques sur la parenté*. Paris : Cédic.

Chevallard, Y. (1979), *Théorie des séries. 1. Séries numériques*. Paris : Cédic/Fernand Nathan.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2e éd. 1991). Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 7-32.

Chevallard, Y. (2006-2007). *Séminaire de didactique des mathématiques 2006-2007* [en ligne] : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=141

Courrège, P. (1965). Un modèle mathématique des structures élémentaires de parenté. *L'Homme, 5*(3), 248-290.

Deltheil, R. (1959). *Nouveau cours de mathématiques générales*, vol. 1. Paris : Baillière.

Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris : Hermann.

Feferman, S. (1998). *In the light of logic*. New York : Oxford University Press.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht : Reidel.

Hadamard, J. (1949). *Leçons de géométrie élémentaire*. 2. *Géométrie dans l'espace*. Paris : Armand Colin.

Jousse, M. (1974). *L'anthropologie du geste*. Paris : Gallimard.

Krivine, J.-L. (1969). *Théorie axiomatique des ensembles*. Paris : PUF.

Ladage, C. & Chevallard, Y. (2011). Enquêter avec Internet. Études pour une didactique de l'enquête. *Éducation & didactique, 5*(2), 85-116.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge : Cambridge University Press.

Lapassade, G. (1963). *L'entrée dans la vie. Essai sur l'inachèvement de l'homme*. Paris : Minuit.

Lentin, A. & Rivaud, J. (1956). *Éléments d'algèbre moderne*. Paris : Vuibert.

Lévi-Strauss, C. (1949). *Les structures élémentaires de la parenté*. Paris : PUF.

Ovaert, J.-L. & Verley, J.-L. (1983). *Analyse* 1. Paris : Cédic/Fernand Nathan.

Poulain, A. (1885). *Traité de géométrie élémentaire*. Paris : Desclée De Brouwer.

Rajoson, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas* [Thèse de troisième cycle]. Marseille : IREM.

Rolland, R. (1979). *Théorie des séries.* 2. *Séries entières*. Paris : Cédic/Fernand Nathan.

Sahlins, M. (2008). *The Western Illusion of Human Nature*. Chicago : Prickly Paradigm Press.

Smith, D. E. (1958). *History of mathematics: Vol. II Special topics of elementary mathematics* (Édition originale 1925). New York : Dover.

Süssmilch, J. P. (1979). *L'ordre divin dans les changements de l'espèce humaine, démontré par la naissance, la mort et la propagation de celle*-ci. Paris : INED.

Développer le modèle praxéologique pour analyser les dynamiques de la cognition institutionnelle

Corine **CASTELA**

LDAR Université Paris7-Université de Rouen

IUFM de Haute-Normandie

Corine.Castela@univ-rouen.fr

Résumé

Modéliser les productions praxéologiques des institutions dans le cadre d'une épistémologie de la cognition sociale, considérée comme un domaine de la didactique, tel est l'objectif du travail présenté dans ce texte. Celui-ci ayant été suscité par la rencontre avec plusieurs objets de recherche, ceux-ci sont présentés en tant que préalables indispensables à la compréhension de la dynamique de réflexion qui a conduit à la nouvelle représentation du modèle praxéologique détaillée à la suite. Des liens possibles du modèle avec plusieurs lignées de travaux concernant les mondes du travail sont ensuite développés : *mathematics on the workplace*, ergonomie cognitive, clinique de l'activité. A cette occasion est abordée la question de la contribution de communautés stables de sujets à la créativité praxéologique des institutions utilisatrices La conclusion envisage certaines perspectives de recherches en didactique des mathématiques.

Mots clés

Théorie Anthropologique du Didactique, Praxéologie, Technologie théorique et pratique, Circulation interinstitutionnelle et Transposition, Paradigme, Résolution de problèmes, Utilisation des mathématiques, Transformée de Laplace, calcul symbolique.

Introduction

Le processus de sollicitation de l'Habilitation à Diriger des Recherches est l'occasion pour un chercheur de réexaminer ses recherches pour y déceler des éléments de cohérence qui sont présentés dans un texte de synthèse (Castela 2011). Dans mon cas, il apparaît que les différentes thématiques que j'ai abordées ont en commun d'avoir appelé et nourri un travail sur la notion de praxéologie. Présenter ce travail est la préoccupation principale du présent article. Comme on peut s'en douter puisque le modèle praxéologique a été introduit en didactique des mathématiques par Y. Chevallard (1997), le cadre théorique adopté est celui de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). On commencera donc par une tentative d'élucidation du parti pris philosophique et des choix épistémologiques qui sont les miens et me conduisent à voir dans la TAD la théorie la plus appropriée pour outiller mon travail. Puis on en viendra en quatre temps à l'objet annoncé dans le titre : quatre exemples qui ont contribué de manière cruciale au développement de la réflexion seront d'abord présentés, ils permettront de motiver les différentes réorganisations du modèle praxéologique proposées ensuite ; ceux-ci seront mis en relation avec trois courants de travaux directement liés à la didactique des mathématiques pour le premier, de manière nettement plus lointaine pour les deux autres ; on terminera en envisageant plusieurs directions de recherche pour lesquelles le modèle présenté fournit un outil, pour questionner des phénomènes négligés et en concevoir l'étude.

Une approche institutionnelle de l'anthropologique et du didactique

Il est d'usage de définir l'anthropologique comme ce qui est spécifique de l'humain, l'anthropologie comme l'ensemble des sciences qui étudie l'homme dans sa spécificité. De telles définitions n'outillent guère. Elles permettent mal de comprendre, par exemple, pourquoi la Théorie Anthropologique du Didactique n'a jusqu'à présent jamais cherché à s'intéresser à des approches psychologiques du didactique. Pourtant les capacités d'apprentissage de l'individu humain lui sont largement spécifiques dans le règne animal. La non prise en compte par la TAD du point de vue de la psychologie humaine est-elle circonstancielle ou intrinsèque à la théorie, c'est-à-dire conséquences de choix qui définiraient dans l'anthropologique un domaine spécifique à théoriser, délimitation renvoyant nécessairement à un point de vue sur l'essence humaine ? Cette question des soubassements philosophiques des théories didactiques n'est guère travaillée, sans doute parce que cette science est jeune, ce qui lui a permis d'éviter toute crise des fondements grâce à une personnalisation très forte du travail de développement théorique. Ce sont pour l'essentiel les créateurs des théories qui y introduisent des aspects nouveaux et valident les apports d'autres chercheurs. On se rend bien compte qu'il faut dépasser ce stade pour la vitalité même des théories existantes et ceci passe, à mon sens, par un travail collectif de mise à jour de leurs fondements. C'est ce que j'ai essayé d'accomplir pour moi, afin de justifier mon inscription dans le cadre de la TAD et l'autorisation que je me suis donnée d'en développer-peaufiner-modifier certains outils pour pouvoir les utiliser dans mes travaux. Les propositions qui en résultent sont soumises à discussion, Y. Chevallard conteste certains de mes choix, cela ne me conduit pas à envisager qu'il me soit nécessaire de changer de cadre théorique.

Un parti pris socioculturel sur la spécificité humaine, autrement dit avec d'autres références un postulat, gouverne tout ce qui va suivre : *l'individu est un potentiel d'humanité qui ne s'actualise que par rencontre et appropriation d'une partie d'un capital culturel accumulé en dehors de lui-même*. Ceci est complété par un deuxième postulat qui met en avant le rôle des institutions dans le développement de ce capital d'humanité extérieur aux individus : *organisations stables, les institutions créent les conditions d'une inventivité vue comme essentiellement collaborative, de la pérennisation des inventions en innovations*[1] *légitimées et de leurs transmission*. C'est ce que globalement je désigne par l'expression **action cognitive des institutions.** Notons que les institutions sont à la fois **productrices** et **médiatrices** : l'individu ne peut accéder à des fractions de la culture humaine qu'en s'assujettissant à diverses institutions. Une telle insistance sur la dimension institutionnelle définit une véritable spécificité parmi les tenants d'une approche socioculturelle. Au sein des travaux anglo-saxons notamment qui s'en réclament, la dimension sociale est souvent limitée à la prise en compte des interactions entre individus, au niveau de communautés généralement restreintes qui ne sont pas pensées comme des objets à considérer en eux-mêmes. Un troisième postulat concerne la nature des situations problématiques que les humains affrontent et à l'occasion desquelles et pour lesquelles ils produisent des réponses qui vont enrichir le capital culturel : *toutes ces tâches ont des dimensions génériques*. Si l'on veut bien considérer que cette généricité est une condition *sine qua non* du développement de l'humanité, mais aussi de

[1] J'ai utilisé ici une distinction invention/innovation empruntée aux paléontologues et archéologues :
" 'Invention' désignera le premier stade de l'innovation, laquelle est le processus qui conduit de la conception d'une idée nouvelle à son acceptation généralisée." (A. de Beaune 2008, p.6)

l'individu, alors le troisième postulat est en réalité une conséquence des deux premiers. Quoi qu'il en soit, il est au fondement de la notion de praxéologie et donc de tout ce qui sera présenté dans ce texte. On pourra aussi trouver dans le chapitre 1 de Castela 2011 une analyse des différentes tendances présentes dans le courant du *Problem Solving* qui précisément les situent par rapport à ce troisième énoncé.

Dans le cadre défini par les trois postulats précédents, les phénomènes didactiques d'appropriation et de transmission peuvent être envisagés de deux points de vue : celui des individus (ou groupes d'individus) qui s'approprient ou transmettent, celui des institutions qui organisent ou provoquent, selon un projet plus ou moins explicite, l'appropriation par leurs sujets de certaines ressources et une certaine normalisation des pratiques. Une science des phénomènes didactiques ne peut pas se contenter de l'un de ces points de vue mais une recherche donnée peut le faire. Et c'est bien un tel découpage dans le champ des phénomènes didactiques que je choisis de réaliser en centrant mon travail sur l'action **didactique** et **normative** des institutions en tant que dimension **essentielle** de leur action **cognitive**.
J'ai surligné quatre termes qui nécessitent éclaircissements. J'utilise ici l'adjectif didactique dans un sens restreint qui n'est pas celui adopté par Y. Chevallard, plutôt, me semble-t-il, celui que la TSD lui donne. Je ne considère pas comme didactique toute activité d'étude d'une question, de traitement d'une tâche problématique. Le didactique, y compris au niveau de l'individu, est au moins associé à une conscience de la généricité de la tâche problématique et à un projet de généralisation et capitalisation des réponses trouvées, lié à un apprentissage qui veut dépasser le succès ponctuel auquel peut conduire l'examen d'une tâche problématique. Au niveau des institutions, je réserverai l'expression action didactique aux situations dans lesquelles il y a un projet explicite et une organisation institutionnelle de la transmission à des sujets. Ainsi une situation a-didactique d'action est-elle éminemment didactique car elle a pour le professeur une visée explicite de transmission ; elle ne l'est pas intrinsèquement pour l'élève dont on attend qu'il cherche à résoudre un problème (c'est la dévolution), sans nécessairement se situer dans un projet plus général (c'est le professeur qui le fait par l'enchaînement des situations proposées). Dans le sens très large donné par Y.Chevallard à l'adjectif didactique, une situation a-didactique étant une situation d'étude d'une question est didactique pour l'élève, donc pour tous les acteurs. Je choisis de ne pas adopter cette généralisation qui me semble affaiblir la force opérationnelle que nous avons donnée dans la communauté des didacticiens français au couple didactique/adidactique.
Les actions didactiques des institutions ont des effets normalisateurs sur certaines pratiques des sujets mais on n'atteint pas ainsi la totalité de l'action normative[2] des institutions qui, par des processus beaucoup plus discrets (et donc plus difficiles à exhumer), contribue à la transmission culturelle. La présence des termes didactique et normatif répond au souci de ne pas négliger la part du non-didactique dans les processus de transmission.
Ces processus sont dits constituer une dimension essentielle de l'action cognitive des institutions. Ceci signifie que la transmission fait partie de l'essence même de la cognition institutionnelle : une invention (un artefact matériel comme une connaissance) ne peut pas devenir une innovation, ne peut pas être intégrée au capital culturel commun d'une institution, sans diffusion à d'autres humains que celui ou ceux qui l'ont créée, il est nécessaire que d'autres s'en approprient l'usage. Au-delà, la légitimation de l'innovation dans l'institution se traduit par et en même temps passe par la transformation de l'invention en une norme de l'institution (pour le moins, une pratique ou un savoir accepté, sinon privilégié). Etudier l'action cognitive des institutions suppose donc nécessairement de s'intéresser aux processus

[2] Je dois beaucoup sur ce point de la prise en compte de l'action normative institutionnelle au groupe mexicain qui a développé la socioépistémologie (Cantoral & Al. 2006). J'invite les lecteurs à se reporter au chapitre 3 de Castela 2011 (pp.108-111) pour des références précises, en particulier au travail de N. Covián.

de normalisation, en particulier, mais pas seulement, à ceux qui sont assurés dans des dispositifs didactiques, dont l'existence est l'une des expressions et modalités de la légitimation institutionnelle des innovations.

Ainsi est explicité mon choix de centrer le travail de recherche sur l'étude des voies de l'action cognitive institutionnelle, choix fondé sur la conviction que l'essentiel du développement culturel humain est l'œuvre d'institutions. Un tel parti pris ne me paraît en rien contradictoire avec ce qui se laisse deviner des fondements philosophiques de la TAD, peu dévoilés par Y.Chevallard mais exprimés à travers les objets étudiés et les concepts introduits. C'est donc sur la base de l'approche institutionnelle de l'anthropologique et du didactique définie précédemment que je me réclame du cadre théorique de la TAD et que je prétends en travailler les outils, plus particulièrement dans cet article la notion de praxéologie.

Le modèle praxéologique a été introduit en didactique (Chevallard 1997, 1999) avec l'intention de rendre compte des activités humaines dans leur diversité et des ressources produites pour en surmonter les aspects problématiques. Dans la perspective institutionnelle que j'ai dessinée, je réserverai ici le terme de *praxéologie* à des éléments culturels, socialement produits, institutionnellement reconnus. En ce sens, il s'agit d'une généralisation de la notion de s*avoir* ; au niveau de la cognition individuelle, il faut de même, généraliser les notions de *connaissance* et *savoir personnel* (Conne 1992) en parlant de *praxéologie personnelle*. Ceci ne sera pas abordé dans cet article qui s'intéresse exclusivement à la modélisation de ce que l'on peut maintenant désigner comme **l'action praxéologique des institutions**.

Quatre exemples cruciaux

Cette partie présente quatre exemples qui ont joué un rôle crucial dans le travail sur le modèle praxéologique. Les deux premiers ont suscité un effort d'éclaircissement de la notion de technologie, débouchant sur ce qu'on peut considérer comme un élargissement ou bien comme une reformulation plus explicite, suivant le sens attribué aux différents termes utilisés dans les textes fondateurs de 1997 et 1999 pour caractériser les fonctions de la technologie d'une technique (*Justifier, Rendre intelligible, Produire)*. Les deux suivants ont introduit le besoin de questionner les modalités de la validation du bloc technologico-théorique dans le cas des Organisations Mathématiques (*OM* dans la suite).
Concernant les deux premiers exemples, j'ai choisi de ne pas respecter l'ordre chronologique dans la mesure où le plus récent a apporté un éclairage qui permet d'approfondir les analyses initialement proposées à propos du premier.

L'enseignement de la transformée de Laplace dans un cours d'automatique

Les analyses qui suivent ont été développées à l'occasion du co-encadrement avec M. Artigue de la thèse d'A. Romo Vázquez (2009). Celle-ci est essentiellement consacrée à l'étude de la place des mathématiques dans les projets d'ingénierie réalisés dans le cadre de leur formation par des étudiants d'un Institut Universitaire Professionnalisé (IUP). L'un des projets, centré sur une situation d'asservissement d'un système, nous a amenées à nous intéresser à l'enseignement de la Transformée de Laplace. Selon les institutions, celui-ci est pris en charge par un cours de mathématiques ou par un cours d'une discipline appliquée, dans notre cas, l'automatique. Trois réalisations ont été comparées (voir Castela & Romo Vázquez 2011 pour une présentation complète des analyses). L'une d'elle est un cours en ligne, intitulé "Asservissements continus" et destiné à des étudiants en formation de techniciens supérieurs (site iutenligne.net/ressources/automatique, auteur M. Verbeken). Nous y avons rencontré un discours technologique très développé, dont une partie importante prend explicitement en compte l'utilisation des techniques mathématiques enseignées dans le contexte de l'automatique. Pour analyser ce texte, nous avons été conduites à distinguer six fonctions possibles pour la technologie d'un bloc [T, τ] : *décrire, faciliter, motiver, valider, expliquer, évaluer.*

Décrire la technique

La production d'un descriptif des gestes qui composent une technique est prise en compte comme un fait de savoir non identifiable à la maîtrise de la technique elle-même. L'élaboration d'un système de représentations, verbales et plus largement symboliques, des actions est en jeu. On comprend bien que ceci constitue une dimension cruciale du processus de transmission qui convertit les inventions en innovations, donc de l'action cognitive institutionnelle.

Faciliter la mise en œuvre de la technique

Les savoirs considérés ici permettent d'utiliser avec efficacité mais aussi dans un certain confort la technique. Ils sont porteurs d'améliorations mais aussi d'avertissements permettant d'éviter erreurs et maladresses connues comme fréquentes. Ce domaine de savoirs est le terrain privilégié des élaborations technologiques d'utilisateurs. Il produit des reprises du descriptif, qui l'adaptent aux spécificités du contexte institutionnel d'utilisation et l'enrichissent de la mémoire des expériences accumulées.

Motiver la technique et les gestes qui la composent

Les savoirs de motivation participent d'une intelligence des fins : pour faire quoi accomplit-on tel geste à tel moment ? Ce sont aussi des savoirs sur le type de tâches puisqu'ils en analysent les buts : ceux-ci justifient rationnellement les gestes en montrant leurs raisons d’être. Ils permettent d'anticiper les étapes à atteindre et jouent un rôle heuristique important lorsque la mise en œuvre de la technique nécessite des adaptations.

Evaluer la technique

Les savoirs envisagés ici portent sur les conditions et les limites d'une technique relativement aux tâches du type T, par comparaison avec d'autres techniques possibles s'il en existe. Ils peuvent également concerner l'ergonomie de la technique du point de vue de ses utilisateurs. Les fonctions évaluer, faciliter et motiver sont parfois intimement associées : la mise en évidence de certaines difficultés (*évaluer)* peut entraîner au bout d'un certain temps la production d'améliorations (*faciliter)* dont la motivation est donc fournie par l'évaluation.

Valider la technique

La fonction considérée correspond à ce qui est en général entendu sous le terme *justifier* dans les textes qui définissent la notion de praxéologie. Les savoirs considérés établissent que la technique et les gestes qui la composent permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés.

Expliquer la technique

L'enjeu est ici d'analyser comment il se fait que la technique permet bien d'atteindre les buts visés. Il existe des validations qui n'expliquent pas (par exemple des démonstrations analytiques en géométrie). Il existe aussi des explications qui ne valident pas, parce qu'elles ne respectent pas complètement les normes de la validation dans l'institution qui examine cette question de la validité. Elles insèrent la technique et ce qui en est su dans le tout d'une culture partagée, contribuant à la compréhension des causes par les sujets.

Illustrons ces définitions à partir d'éléments inspirés[3] du cours d'automatique évoqué précédemment. Ce qui suit est très allusif ; pour en atteindre une certaine compréhension, il faut au moins avoir une idée de ce qu'est la problématique de l'asservissement d'un système : l'objectif est de maintenir une variable f à une valeur constante imposée et ce en dépit des perturbations qui peuvent la modifier ; un capteur détermine donc les variations de f et déclenche un réajustement qui rétablira f à la valeur voulue. Précisons ensuite que dans ce cours la transformée de Laplace est utilisée pour résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Appliquer la transformation de Laplace à une telle équation fait apparaître une équation algébrique dont la solution F est une fonction rationnelle de la variable p. La fin de la résolution fait intervenir deux types de tâches : T_1, retrouver la fonction f (de la variable t) ayant pour transformée F, ce qui passe par T_2, décomposer $F(p)$ en éléments simples. Commençons par donner une idée de la technologie proposée pour T_2 ; il est important de noter que la technique proposée n'est pas celle qui est utilisée en mathématiques pour laquelle les binômes introduits dans la factorisation du dénominateur sont de la forme $p+b$, le cours s'attarde sur ce choix :

Décrire la technique
Mettre le dénominateur de $F(p)$ sous une forme canonique de type suivant :

$$k(1+\tau_1 p)\,(1+\tau_2 p)\,(1+\tau_3 p)\ldots$$

Par exemple, $3p+2$ se transforme en $2(1+1{,}5p)$ et non $3(p+2/3)$.

Motiver : quel est le but de cette factorisation particulière ?
1,5 est la constante de temps (notée τ) de l'exponentielle qui intervient dans l'expression de la solution $f(t)$ cherchée : $f(t) = K\cdot(1-e^{-t/1{,}5})$. Or de la constante de temps en question dépend directement la réactivité, donc la qualité du dispositif de régulation, il faut donc la connaître.

Expliquer : d'où vient le lien entre constante de temps et réactivité ?
K peut être la valeur constante à laquelle on veut maintenir f. On sait qu'après $7.\tau$, ici $7.1{,}5$ secondes, l'exponentielle sera nulle, c'est-à-dire sera inférieure au seuil à partir duquel, en automatique, on considère une quantité comme négligeable. Après ce laps de temps, le phénomène sera donc stabilisé à la valeur K cherchée.

Valider l'explication précédente :
Calculons le temps t_α tel que $e_\alpha^{-t/\tau} = \alpha/100$:

$e_\alpha^{t/\tau} = 100/\alpha$ d'où $t_\alpha = \tau.\ln(100/\alpha)$.

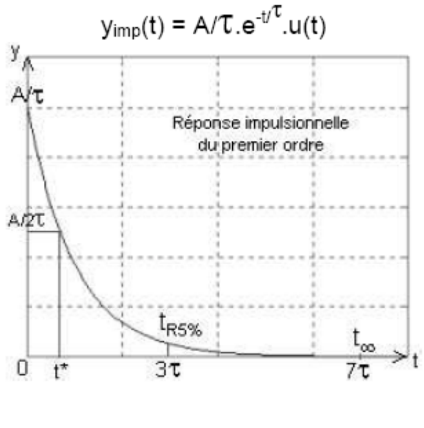
A.N. : $\alpha = 50 \quad t^* = \tau.\ln.2$

$\alpha = 36{,}8 \quad t \cong \tau$

$\alpha = 5 \quad t_{R5\%} = 3\tau$

$\alpha = 1 \quad t_{R1\%} = 5\tau$

$\alpha < 1 \quad t_\infty = 7\tau$



La fonction *Evaluer* sera illustrée par un extrait du cours en ligne (p.15) consacré au type de tâches T_1 :

"3 méthodes s'offrent à nous, mais seulement la dernière sera exploitée.

[3] Il ne s'agit généralement pas de citations véritables qui auraient nécessité beaucoup plus de temps (voir Castela & Romo Vazquez 2011 pour un travail plus précis) mais d'une reconstitution qui vise à donner rapidement une idée des arguments présentés.

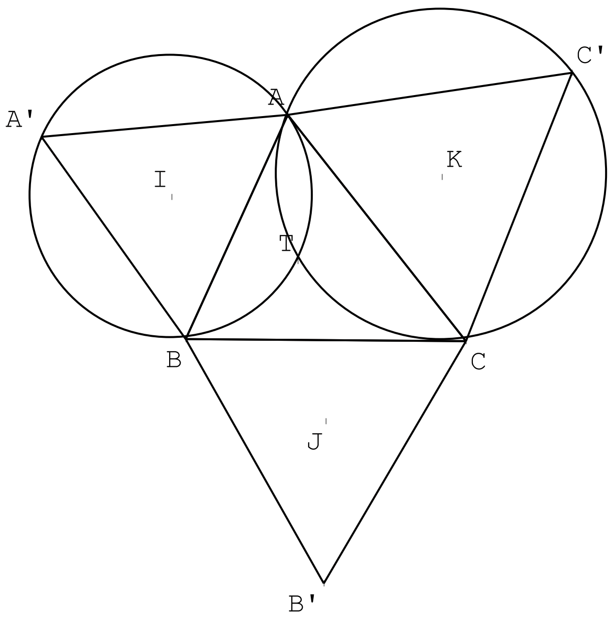
[…] 1.8.3. Table de Transformées de Laplace

C'est grâce à cette table que nous pourrons exprimer les fonctions du temps sans trop de calculs. Cette table est présentée à la page suivante. Elle est parfaitement adaptée à nos besoins en Automatique. Evitez d'utiliser une autre table qui renfermera des éléments inutiles et qui ne donnera pas les fonctions sous leur forme canonique."

Ces six fonctions ont été distinguées pour outiller l'analyse des savoirs développés dans un contexte non mathématique d'utilisation de techniques mathématiques. Elles se sont révélées également efficaces dans un contexte très différent, celui de la résolution de problèmes en mathématiques.

Les savoirs en jeu dans la résolution de problèmes mathématiques

Ce thème a été mon souci quasiment unique pendant de nombreuses années. Dans la mesure où il est plus familier que le précédent aux lecteurs de ces actes, j'y consacrerai moins de temps. On pourra se reporter à Castela 2000 et 2008 pour plus de détails. Le travail repose fondamentalement sur ce que j'appelle *le pari de la généricité pratique en mathématiques* : tout problème nouveau est considéré *a priori* comme ayant des aspects génériques, au service desquels on peut mettre un champ de savoirs qui ne se limite pas au savoir théorique mais en favorise l'utilisation. Je vais utiliser les fonctions de la technologie distinguées à propos du contexte extra-mathématique de l'exemple précédent pour donner une idée de ce que sont les savoirs considérés. L'exemple sur lequel je m'appuie est emprunté à un épisode récent d'un enseignement de géométrie dans le cadre de la préparation au concours de recrutement des professeurs de mathématiques du secondaire. La situation particulière traitée est relative au point de Torricelli d'un triangle :



ABC étant un triangle, on construit sur ces côtés trois triangles équilatéraux qui lui sont extérieurs. On montre dans un premier temps que les cercles circonscrits aux trois triangles équilatéraux sont sécants en un point T, qui peut être confondu avec un sommet. Puis on établit que T est aussi commun aux droites (CA'), (AB') et (BC'), problème converti en la démonstration de trois alignements.

Ajoutons que pour ce faire, on peut choisir de montrer que

$(\overrightarrow{TA'},\overrightarrow{TC}) = 0[\pi]$ (1)

ou que $(\overrightarrow{A'T},\overrightarrow{A'C}) = 0[\pi]$ (2).

Le point de Torricelli d'un triangle

Dans cette situation, des savoirs théoriques relatifs aux angles orientés de vecteurs valident une technique pour chacun des types de tâches suivants : *Montrer que 4 points sont cocycliques*, *Montrer que trois points sont alignés*. Quels savoirs favorisent-ils l'utilisation des deux techniques en question ? Centrons-nous sur l'alignement, type pour lequel il existe de très nombreuses techniques, celle qui est notre objet consiste à montrer qu'un angle orienté de vecteurs a une mesure nulle modulo π.

> *Evaluer :* pour que τ puisse être efficace, il faut avoir un contexte euclidien et des hypothèses propices à fournir des égalités angulaires, par exemple des points cocycliques.
> *Motiver* : on utilise la relation de Chasles sur les angles orientés pour se ramener à des angles inscrits dans des cercles.
> *Faciliter* : cela sera plus facile si le "sommet" de l'angle initial est commun à deux cercles (approche (1) ci-dessus, plutôt que (2)) ; alors il suffira de faire intervenir la corde commune dans la décomposition par relation de Chasles.

Castela 2008 propose de prendre en compte ostensiblement dans le modèle des Organisations Mathématiques les savoirs dont on vient de rencontrer quelques exemples en distinguant deux composantes de la technologie d'une technique : $[T, \tau, \theta^{p}\text{-}\theta^{th}, \Theta]$.
La *composante théorique* θ^{th}, est formée des savoirs technologiques validés par des théories mathématiques. La *composante pratique* θ^{p}, est formée de savoirs orientés vers l'utilisation des techniques, forgés et validés dans l'empirie des pratiques de résolution de problèmes ; contrairement aux savoirs théoriques, ils ne vivent pas sous le régime de la nécessité : s'ils sont considérés comme vrais, c'est qu'ils sont la plupart du temps modalisés par des restrictions du type "en général", "on peut penser à", "il est plus facile de".

Conformément à ce qui a été mis en avant à la fin de la première partie, la praxéologie $[T, \tau, \theta^{p}\text{-}\theta^{th}, \Theta]$ renvoie à une construction sociale. Ainsi, depuis le début de mes travaux, notamment dans Castela 2000 dont toute la réflexion est motivée par le projet d'un enseignement explicite de savoirs pratiques (alors désignés par l'expression *savoirs sur le fonctionnement mathématique*), est formulée l'hypothèse que de tels savoirs vivent explicitement dans certaines institutions de la recherche mathématique, équipes, laboratoires où se déroule l'affrontement premier aux questions nouvelles. Le problème de la nature des processus de légitimation dans une institution mathématique de tels savoirs, non validés par des théories mathématiques, doit pouvoir être clairement posé, c'est ce que tentera la modélisation présentée dans la suite.
Le contexte particulier des savoirs pratiques de la recherche en mathématiques me permet d'évoquer la position d'Y. Chevallard qui met en cause la pertinence du qualificatif "pratique". Il propose de parler de "*savoirs didactiques*", le terme didactique étant utilisé dans le sens général de "relatif à l'étude d'une question". De fait, si les mathématiciens développent des savoirs relatifs à l'utilisation des techniques mathématiques disponibles, c'est bien dans le cadre de l'étude de questions nouvelles. Dans ce contexte, les savoirs pratiques apparaissent alors comme produits dans et pour l'étude des questions de recherche en utilisant les *OM* reconnues. Peut-on généraliser à d'autres pratiques utilisatrices ? L'approche institutionnelle qui est la mienne me conduit à répondre positivement : l'émergence au niveau institutionnel d'une technique et encore plus de savoirs, même validés empiriquement, suppose une recherche de généricité sur la résolution des tâches, qui peut correspondre à l'idée d'étude, dans un sens très généralisé par rapport à ce qu'on envisage classiquement. Pourtant, je continuerai à ne pas reprendre à mon compte l'expression *savoirs didactiques*, pour la raison présentée dans la première partie, qui me fait réserver le qualificatif *didactique* à ce qui met en jeu l'organisation intentionnelle d'un processus de transmission-apprentissage. L'idée qu'il y a étude étant déjà portée par le terme savoir, le qualificatif pratique en est une spécification dont nous verrons dans la troisième partie qu'elle renvoie à la nature empirique de la validation.

Le calcul symbolique d'Oliver Heaviside

Comme il vient d'être dit, la prise en compte de la technologie pratique amène à s'interroger sur la nature de la validation des savoirs ainsi incorporés (ou distingués) dans la praxéologie d'une technique. Par contre, du moins dans le cas des mathématiques, la question ne semble pas devoir être posée pour la composante théorique, par définition validée aux yeux de l'institution de recherche par l'existence de démonstrations utilisant les théories existantes. Deux exemples m'ont pourtant conduites à prendre conscience de la relativité institutionnelle d'un tel paradigme, y compris dans des cas où des types de tâches mathématiques sont en jeu. Celui que nous abordons ici concerne à nouveau la résolution d'équations différentielles dans un domaine de recherche extérieur aux mathématiques.

A la fin du XIXe siècle, Oliver Heaviside (1850-1925), chercheur en physique, développe, dans le cadre de ce qu'il appelle calcul symbolique, une technique de résolution des équations différentielles, formellement identique à celle que fonde de nos jours la transformée de Laplace mais à laquelle il ne cherche pas à donner un sens. Elle lui permettra cependant de déterminer les solutions des équations introduites par l'étude des régimes transitoires dans les phénomènes électriques. Heaviside ne se soucie pas de questions de validité mathématique, il valide par induction les techniques de résolution proposées en comparant les solutions symboliques avec les solutions explicites connues. Le calcul symbolique fonctionne comme un outil heuristique permettant de trouver l'expression de solutions dont l'existence est établie du fait que les équations à résoudre modélisent des phénomènes physiques effectifs, et que le physicien peut valider en dernier ressort par retour à ces mêmes phénomènes. Contestés par les mathématiciens, les travaux scientifiques de Heaviside furent reconnus par ses pairs, bien avant que, vers la fin des années 1930, le calcul symbolique ne soit validé à partir des intégrales de Carson et de Laplace, puis trouve sa place dans l'édifice plus global de la théorie des distributions développée par L. Schwartz (1950).
Je proposerai de résumer le processus rapidement décrit ici de la façon suivante : dans un premier temps, une institution utilisatrice de mathématiques qui est une institution de recherche en électromagnétisme, est confrontée à un type de tâches mathématiques *T* pour laquelle il n'existe pas d'*OM* suffisamment efficace. Elle développe, en toute autonomie vis-à-vis de la recherche en mathématique, des techniques de traitement dont le bloc technologico-théorique est validé selon un paradigme mixte qui accepte les normes des sciences expérimentales. Même si l'absence de validation par la communauté des mathématiciens agit comme un frein à la reconnaissance de ces praxéologies, celles-ci sont néanmoins légitimées de fait dans et par cette communauté scientifique.

France et Chili : deux choix transpositifs distincts pour l'enseignement de la géométrie au secondaire

La situation envisagée ici est exactement inverse de la précédente. Existe initialement une *OM* $[T, \tau, \theta^{th}, \Theta]$ validée par la recherche en mathématiques. Un système d'enseignement prend $[T, \tau, \theta^{th}, -]$ comme objet d'enseignement. Mais au niveau scolaire en question, la théorie mathématique ne peut véritablement être enseignée. Ce phénomène a été mis en évidence, par exemple à propos de l'enseignement des limites de fonctions dans le secondaire espagnol (Bosch, Espinoza & Gascón 2003) ; l'expression « OM incomplète » (Bosch, Fonseca & Gascón 2004) est utilisée pour y faire référence en signalant l'insuffisance du bloc technicologico-théorique. Une recherche consacrée à une comparaison des enseignements de géométrie en France et au Chili, réalisée dans le cadre d'un projet de coopération Ecos-Conicyt (Castela & Al. 2006), montre que la transposition didactique peut affronter un tel problème de différentes façons.

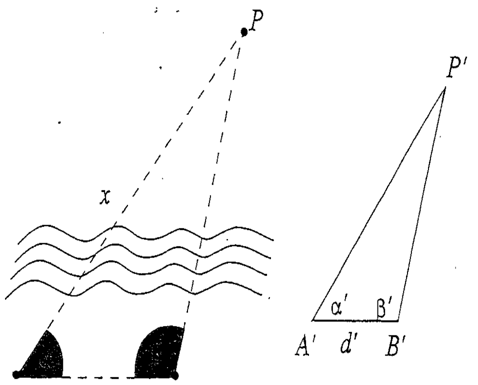
En France[4], dès les premières années du collège, il est choisi de faire entrer les élèves dans le paradigme de la science mathématique experte, c'est-à-dire de reconnaître la seule

[4] Ce résumé fait évidemment référence à l'état de l'enseignement au moment où l'étude a été effectuée (2003-2004) ; depuis, des changements de programmes peuvent avoir induit quelques évolutions.

démonstration comme moyen de validation, la géométrie (qui est alors une Géométrie II- Houdement & Kuzniak. 2000) en constitue le cadre privilégié d'apprentissage (même s'il n'est pas le seul). Dans le cas où un théorème ne peut pas être établi à partir du corpus des résultats disponibles, ce théorème est déclaré admis, statut figurant explicitement dans les programmes. Ceci signifie que l'institution scolaire invoque officiellement la tutelle, l'aval épistémologique, de l'institution de recherche en mathématiques[5]. Si des validations locales sur des configurations particulières ou expérimentales par mesures sur dessins sont proposées, le fait qu'elles ne suffisent pas à valider le théorème est mis en évidence. On peut dire que l'incomplétude de la praxéologie est assumée, une garantie experte se substitue à la théorie.
Au Chili, le choix est très différent. Le paradigme de la géométrie scolaire n'est pas celui des mathématiques expertes, c'est un paradigme mixte qui mêle validations par démonstrations et validations expérimentales. Les Géométries I et II restent conjointement présentes. La démonstration, enseignée à partir du niveau Segundo Medio (équivalent de la Seconde), est seulement peu à peu présentée comme préférable, elle ne devient pas clairement le mode exclusif de validation. Le statut de théorème admis n'existe pas.

L'exemple de la praxéologie de détermination d'une grandeur inaccessible enseignée dans un manuel (*Arrayán*) de *Segundo Medio*, permet d'illustrer ces propos. L'unité consacrée aux figures semblables aborde ce type de tâches et propose la technique suivante :

Situer un point B à une certaine distance de A.
Par visée, mesurer les angles déterminés $\prec$ PAB[6] et $\prec$ ABP ; mesurer $\overline{AB}$.
Construire à l'échelle un triangle auxiliaire A'B'P' semblable au triangle ABP.
Mesurer la longueur de $\overline{A'P'}$.
Calculer la longueur de $\overline{AP}$ en prenant en compte le rapport de l'échelle employée $\frac{d}{d'}$.



Technologie

Nous nous intéressons ici aux savoirs mathématiques qui valident la technique utilisée. La technique d'obtention de la représentation à l'échelle est justifiée par le cas de similitude noté AA (deux triangles ayant deux angles respectivement égaux sont semblables), le retour aux dimensions réelles l'est par la définition des triangles semblables (proportionnalité des côtés et égalités des angles). Ces théorèmes sont enseignés dans l'unité étudiée. Par contre, les savoirs numériques relatifs au traitement de l'égalité de rapports sont anciens.

Théorie

Il s'agit de savoir comment à son tour est justifiée la technologie, ce qui nécessite une organisation cohérente de savoirs constituant au moins un embryon de théorie. Dans le manuel considéré, l'organisation en question est la suivante : le théorème de Thalès est énoncé sous deux formes, conservation des rapports par projection parallèle, forme spécifique au triangle (3 rapports égaux) ; ce dernier résultat est utilisé pour démontrer ce qui est désigné

[5] Ce terme, avec d'autres (convoquer, évoquer, ignorer) est utilisé dans Castela Romo Vázquez 2011 (pp.104-113) pour décrire les choix opérés relativement à la validation par les enseignements de la transformée de Laplace étudiés.
[6] Les notations sont celles du manuel.

comme "théorème fondamental de similitude" (lorsqu'on mène dans un triangle ABC une parallèle à l'un des côtés, on détermine un triangle semblable à ABC) ; les cas de similitudes sont énoncés sans démonstration mais il est précisé en marge qu'ils peuvent être démontrés à partir du théorème fondamental associé aux cas d'isométries enseignés l'année précédente.
Ce descriptif laisse à penser que la théorisation ainsi proposée relève du paradigme GII dans lequel le seul mode de validation accepté est la démonstration. Mais ce n'est pas le cas pour les différents énoncés du théorème de Thalès : ceux-ci sont établis par mesurage sur des dessins puis institutionnalisés comme théorèmes sans qu'à aucun moment ne soit mis en évidence un quelconque changement de statut (par exemple, de conjecture à théorème admis ou à théorème qui peut se démontrer, comme c'est le cas pour les cas de similitude). Il y a donc bien co-existence de modes de validation relevant des paradigmes GI et GII.

On retiendra donc que les deux pays se distinguent quant aux: choix de transposition relatifs au bloc théorique [θ^{th}, Θ] : la France assume l'incomplétude, le Chili adopte un paradigme mixte de validation, non légitime par rapport aux mathématiques expertes.

Réorganisation du modèle praxéologique

Appuyés sur les exemples qui précèdent, nous pouvons maintenant en venir aux réorganisations du modèle praxéologique qu'ils ont suscités.

Le cas des Organisations Mathématiques

Dans les deux premiers exemples, nous avons été en présence de techniques et savoirs technologiques validés par des théories mathématiques auxquels ont été associés des savoirs non validés par ces théories. Nous avons vu que ces savoirs apparaissaient explicitement dans le cours d'automatique en ligne. Dans le cas de la résolution de problèmes en mathématiques, un volant de mes travaux qui ne sera pas abordé ici sur la différenciation scolaire et le travail personnel des élèves et étudiants me conduit à considérer comme nécessaire que les futurs enseignants de mathématiques rencontrent explicitement de tels savoirs pendant leur formation, ceci suppose que la question de la légitimité de la technologie pratique soit posée : dans quelles institutions ces savoirs que j'ai proposés d'intégrer au modèle des Organisations Mathématiques sont-ils reconnus ? Comment le sont-ils alors même qu'ils ne se déduisent pas des théories mathématiques ? La modélisation proposée par Castela 2008, [T, τ, θ^p-θ^{th}, Θ], n'est pas appropriée à un tel questionnement car elle ne montre pas la différence de rapport entre la théorie et chacune des composantes de la technologie. C'est pourquoi j'ai abandonné la présentation linéaire précédente pour l'ostensif suivant :

$$\left[T, \tau, \begin{array}{l} \theta^{\text{th}} \leftarrow \Theta \\ \theta^{\text{p}} \end{array} \right].$$

Cette représentation fait apparaître (c'est le sens du signe ←) que la composante théorique est produite et validée par une théorie mathématique et que ce n'est pas le cas de la composante pratique. La place de la théorie au niveau pratique est laissée vide, c'est une position radicale, contestée par Y. Chevallard pour lequel existe toujours un embryon de théorie justifiant la technologie. Ce point n'est absolument pas anodin, il touche à une question qui n'a jusqu'à présent guère été travaillée dans la TAD : qu'y appelle-t-on *théorie* ? Chevallard 1999 (p. 227) définit la composante "théorie" d'une praxéologie comme la technologie de la technologie. La théorie est un discours rationnel qui produit, valide et explique la technologie. Elle peut être évanescente. Comment dans ce cas peut-elle avoir le **pouvoir** de **valider** institutionnellement les savoirs technologiques ? J'insiste ici sur la fonction de validation et sur le fait que ce que je veux retenir comme caractérisation d'une théorie c'est qu'elle permet par son fonctionnement propre d'établir la validité d'un élément technologique. Pour moi, la place de la théorie dans une praxéologie ne peut pas être occupée par un énoncé qui se contenterait d'être l'institutionnalisation du résultat d'un long processus de validation largement située en dehors du seul domaine de la pensée. Ceci est précisément le cas des savoirs pratiques. En choisissant donc de laisser vide cette place de la théorie dans la schématisation adoptée, mon intention est de montrer ostensiblement l'absence d'une organisation de savoirs ayant un pouvoir de validation et donc d'appeler à l'étude des processus qui valident et légitiment la composante θ^p dans l'institution qui la développe. Et c'est donc précisément pour faire apparaître l'existence d'un tel procès institutionnel de validation et plus largement légitimation que je complète la représentation précédente :

$$\left[T, \tau, \begin{array}{l}\theta^{\text{th}} \leftarrow \Theta \\ \theta^{\text{p}}\end{array}\right] \begin{array}{l}\leftarrow P(M) \\ \leftarrow I_u\end{array}$$

I_u désigne une institution utilisatrice au sens que certains de ses sujets ont à affronter des tâches de type T pour laquelle ils utilisent officiellement la technique τ. Dans ce contexte sont produits des savoirs pratiques qui sont donc l'objet d'un processus de reconnaissance par l'institution I_u. *P(M)* désigne l'institution de la recherche en mathématiques qui apparaît également pour signifier que, si la théorie assure pour cette institution la validité de θ^{th}, y sont également mis en oeuvre des processus de contrôle des démonstrations et plus globalement d'examen des théories elles-mêmes. Ces différents processus sont figurés par les deux flèches extérieures à la praxéologie proprement dite.

Remarquons que le schéma présenté ici est une simplification de la contribution institutionnelle dans la mesure où, à chaque niveau, ce sont des chaînes d'institutions emboîtées qui contribuent aux processus envisagés. Ainsi, dans le cas de la recherche en mathématiques interviennent notamment laboratoires, séminaires, congrès, revues. Il en est de même au niveau des institutions utilisatrices au sein desquels il faut *a priori* imaginer la même multiplicité. Dans une telle perspective, doit pouvoir être pensée une contribution des sujets au développement cognitif institutionnel. Nous y reviendrons dans la quatrième partie, en lien avec les travaux de clinique de l'activité.

La notion d'épure praxéologique

En l'état, le modèle présenté permet de caractériser un des rôles de l'institution de production *P*(*M*), et au-delà des institutions productrices de savoirs théoriques : pour faciliter l'appropriation de la praxéologie par des institutions utilisatrices, *P*(*M*) doit prendre la responsabilité du processus de décantation dans lequel est éliminé tout ce qui relève des usages éventuels de cette praxéologie par les mathématiciens qui l'ont produite. Le résultat est ce que je désigne par l'expression *épure praxéologique*

$$\left[T, \tau, \begin{array}{l}\theta^{\text{th}} \leftarrow \Theta \\ \text{--}\end{array}\right] \begin{array}{l}\leftarrow P(M) \\ \leftarrow -\end{array}$$

Le niveau pratique devra être forgé par l'institution utilisatrice, soit dans les exemples présentés précédemment, des équipes de recherche en mathématiques ou en automatique, des institutions d'enseignement ou de formation. Seront ainsi développées des praxéologies mathématiques dont je tiens à signaler dès maintenant que je ne les déprécie en aucun cas par rapport à l'organisation mathématique produite par *P*(*M*), contrairement à l'interprétation que l'on pourrait donner de plusieurs ostensifs utilisés, le terme d'épure, la représentation physique en deux niveaux dont l'un est nécessairement au-dessus de l'autre. Quant à l'absence de la composante théorique, elle ne peut être considérée comme teintée de mépris qu'à partir d'une valorisation de la pensée théorique qui n'est pas mienne.

Généralisation du modèle des praxéologies mathématiques

La vision de la production et de la circulation des praxéologies est très liée, dans ce qui précède, au fonctionnement des mathématiques. On envisage clairement qu'il faut la modifier si l'on veut la rendre pertinente pour d'autres disciplines. Par ailleurs, l'exemple du travail d'O. Heaviside autour du calcul symbolique montre que, même dans le cas de types de tâches mathématiques, ce modèle doit être enrichi. C'est ce que tente la généralisation suivante :

$$\left[T, \tau, \begin{matrix} \theta^{\mathrm{r}}, \Theta \\ \theta^{\mathrm{p}} \end{matrix} \right] \begin{matrix} \leftarrow I_r \\ \leftarrow I_u \end{matrix}$$

I_r, généralisation de l'institution de recherche en mathématiques, désigne des *institutions de recherche*, c'est-à-dire dont le rôle social est de créer des praxéologies : la fonction institutionnelle des chercheurs n'est pas limitée au traitement de tâches de *T*, elle est de développer et valider une praxéologie relative à *T*. Ce détour par rapport à la pratique et ses contraintes, ce délai par rapport à ses rythmes, n'est pas l'apanage de la science. Ainsi la recherche technique, pourtant prioritairement intéressée par la pratique et le développement des techniques (alors que la science a d'abord des visées épistémiques), se donne le temps d'une validation organisée et systématique de ses inventions. Ce faisant, elle développe une technologie qui est donc ici notée θ^r, celle-ci peut être exclusivement expérimentale : en résistance des matériaux par exemple, de très nombreuses formules en jeu dans le bâtiment résultent de processus de modélisation-vérification expérimentale en laboratoire. Dans un autre domaine, les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) sont des institutions relevant de ce niveau I_r, les professeurs qui y travaillent prenant alors clairement une position décalée par rapport à leurs pratiques quotidiennes d'enseignement.

$[\mathrm{T}, \tau, \theta^r, \Theta]$ est une généralisation de la notion d'épure praxéologique considérée précédemment. θ^r est composée de savoirs validés selon les normes en vigueur dans I_r. L'exemple de la résistance des matériaux montre la nécessité d'envisager que, même dans ces institutions de recherche, la validation ne repose pas ou ne repose que très partiellement sur une théorie. Ceci a motivé la disparition, dans la généralisation proposée, de la flèche manifestant pour le cas des praxéologies mathématiques légitimées dans *P(M)* l'action de validation de Θ. Se peut-il que, dans certaines de ces épures praxéologiques, soit vide la place de la composante théorique ? Le modèle permet de considérer la possibilité d'une réponse positive à cette question sans pourtant nier l'existence d'un processus scientifique ou au moins systématique de validation de la praxéologie dans I_r. C'est alors au niveau d'une réflexion épistémologique globale qu'on pourrait rechercher un travail théorique ayant des enjeux de validation, validation du paradigme de validation de la technologie en l'occurrence. Cette position extrême étant envisagée, la généralisation du modèle praxéologique appelle à approfondir la réflexion sur le rôle des théories scientifiques en dehors des mathématiques, plus précisément sur leurs fonctions vis-à-vis du bloc $[\tau, \theta^r]$. Mais seul un travail conjoint avec des chercheurs de l'une ou l'autre des sciences expérimentales peut permettre de poursuivre un développement du modèle praxéologique qui prenne véritablement en compte l'épistémologie de la discipline concernée.

Pour ce qui concerne le deuxième niveau de la praxéologie, la signification est identique à celle qui a déjà été commentée dans le cas des mathématiques. Il permet de rendre compte de l'action cognitive des institutions utilisatrices. Les deux composantes de la technologie sont désormais distinguées par l'institution qui les valident ainsi que par les modalités de la validation : θ^p est validée dans l'empirie par définition ; si une institution utilisatrice I_u organise une systématisation de la validation, celle-ci sera prise en charge dans une institution I_r, émanation de I_u certes mais désengagée de la pratique ; l'exemple des IREM est tout à fait caractéristique d'un tel phénomène. Le modèle continue à laisser vide la place de la théorie, pour la raison principale présentée précédemment que par définition la validation de θ^p n'est pas réalisée par une théorie mais selon des processus et des dispositifs qu'on veut mettre en évidence avec l'intention d'en appeler l'étude. Ceci étant, on a envisagé qu'au niveau I_r, par exemple dans les sciences expérimentales, les théories scientifiques existantes puissent avoir essentiellement d'autres fonctions que celle de valider. La question de la caractérisation de ce que l'on pourrait nommer *théorie pratique* ou *théorie située*[7] est donc ouverte. Y répondre suppose d'analyser des exemples effectifs de discours rationnels développés par des sujets utilisateurs et légitimés dans leurs institutions, mais ce travail gagnerait certainement à prendre appui sur une étude du fonctionnement théorique des sciences expérimentales.

Précisons enfin que la contribution praxéologique des institutions utilisatrices n'est pas nécessairement consécutive à celle des institutions de recherche. Celle-ci peut au contraire prendre appui sur ce que je propose de nommer des *ethnopraxéologies*, c'est-à-dire des praxéologies de la forme $[\mathrm{T}, \tau, \theta^p, -]$ développées dans des institutions ayant affaire à *T*.

La modélisation proposée fait donc clairement apparaître l'indexation des praxéologies par les institutions dans lesquelles elles vivent. Toutefois elle suppose que la circulation d'une épure produite dans une institution de recherche vers une institution utilisatrice a pour seul effet transpositif de développer la technologie pratique. Ceci est possible si l'institution utilisatrice est une sous-institution de I_r (c'est le cas du deuxième exemple). Mais la notion de transposition didactique nous a depuis longtemps alertés sur la pertinence très limitée d'une telle vision. Les premiers et derniers exemples présentés dans ce texte ont donné à voir que les effets transpositifs induits par l'utilisation d'une épure mathématique, dans un domaine professionnel ou pour l'enseigner, pouvaient affecter toutes les composantes d'une épure. Ceci est intégré dans une troisième version du modèle qui figure la forme transposée de l'épure praxéologique $[\mathrm{T}, \tau, \theta^r, \Theta]$ produite par I_r :

$$\left[T^*, \tau^*, \begin{matrix} \theta^{*\,\mathrm{r}}, \Theta^* \\ \theta^{\mathrm{p}} \end{matrix} \right] \begin{matrix} \leftarrow I_r^* [\,\mathrm{Ir} \wedge \mathrm{Iu} \\ \leftarrow I_u \end{matrix}$$

Le symbole * exprime l'existence d'une transposition de la praxéologie initiale, transposition qui est produite, validée et légitimée dans une institution I_r* qu'il paraît cohérent de qualifier de *noosphérienne*, où sont représentées et où négocient les institutions concernées I_r *et* I_u.

Cette présentation étant maintenant complète, je voudrais dans la partie suivante montrer que le modèle proposé semble avoir quelque pertinence puisqu'il trouve des échos très forts à mes yeux dans trois lignées de travaux n'ayant *a priori* aucun lien avec la TAD.

Liens avec d'autres travaux

Ouverture sur les travaux britanniques consacrés à la place des mathématiques dans le monde du travail

Au Royaume Uni, un groupe de chercheurs, comprenant notamment C. Hoyles, P. Kent,

[7] J'emprunte ici à C. Hoyles et R. Noss (1996) qui ont introduit l'expression *situated abstraction.*

R. Noss et S. Pozzi s'est particulièrement intéressé aux mondes professionnels, y recherchant les traces d'un usage de savoirs mathématiques[8]. Je m'appuie ici sur une intervention de P. Kent et R. Noss dans un symposium consacré à la formation des ingénieurs en 2002 (I.E.E. Second annual symposium on engineering education). Cette communication (accessible en ligne) est intitulée "*The mathematical components of engineering expertise: the relationship between doing and understanding mathematics*" et se centre sur une recherche essentiellement consacrée à la place des mathématiques dans le génie civil et le génie des structures.

Je me contenterai dans ce texte de retenir l'analyse développée par les auteurs de ce qui en anglais est désigné par l'expression '*Codes of Practice'*.

> "Underlying the use of mathematics is the general structuring of design knowledge and practice through **Codes of Practice**[9]. The codes provide recommendations for the practical design of steel, concrete, timber, etc structures, **based on a combination of accepted construction practice, experimental work on structures and analytical knowledge**. It is worth noting that much of what is done in structural engineering practice is only partially understood at an analytical level."
> "Since the construction Codes of Practice represent the base knowledge of normal practice, much of the work of the analytical specialist lies in interpreting the Codes (which are **a compromise of the current state of understanding of practical experience and theory**, and Codes in different countries often reach different compromises) and extending them into non-standard areas, but **using the same "language" and style as the codes do**, offering equations that the designer can make use of."

Les Codes de Pratiques relèvent de la composante [θ^{r}, Θ], de nature théorique ou expérimentale, et l'on perçoit très bien à travers l'idée de compromis qu'ils sont le fruit d'un travail d'élaboration et de transaction dans une institution I_r* où collaborent et se confrontent institutions de recherche et institutions professionnelles. P. Kent et R. Noss ont aussi pu constater que, si ces codes sont les ressources de base pour le travail ordinaire de conception de structures, ils sont aussi féconds dans les cas hors normes : ils fournissent une interface permettant aux ingénieurs analystes qui inventent des solutions adaptées à ces situations extraordinaires, de les rendre accessibles aux ingénieurs de terrain, grâce notamment au langage utilisé. Ressources pour l'activité, les codes le sont, mais ils imposent aussi des normes, le passage suivant évoque un aspect du processus d'assujettissement :

> "The Codes for structural design are not legally-prescriptive documents: there is always the liberty of not following codes, but that comes at a price. **Working within the codes, design calculations will be familiar to other engineers, and to official building inspectors; but going outside could involve a lot of time and effort to produce a convincing argument** that a structure will behave as predicted, and this may be in the form of a mathematical analysis that requires the input of an analytical specialist."

C'est ainsi la double dimension, facilitante et contraignante, de la praxéologie forgée dans les institutions de recherche qui est particulièrement exhibée. Mais d'autres passages de la conférence évoquée ici laissent entrevoir d'autres résultats qui entrent en résonance avec le modèle praxéologique, en mettant en évidence l'existence d'une technologie contextualisée, référée aux situations professionnelles, notamment pour expliquer et motiver.

---

[8] Plusieurs de ces auteurs viennent de publier un livre sur ce domaine :
Hoyles C., Noss R., Kent, P., Bakker A. (2010), *Improving Mathematics at Work: The need for techno-mathematical literacies*. Oxford: Routledge.

[9] Les passages en gras sont de mon fait, ils visent à faire apparaître les éléments décisifs pour mon commentaire.

Ouverture sur les travaux français d'ergonomie cognitive

Je cherche maintenant à situer le modèle et les trois niveaux qu'il distingue dans le bloc des savoirs par rapport aux travaux développés par l'école française d'ergonomie cognitive (notamment P.Pastré, P. Rabardel, J. Rogalski et R. Samurçay) autour de la notion de concept pragmatique. Je prends comme référence la revue de travaux réalisée par C. Vidal-Gomel et J. Rogalski (2007). L'objet central de cet article est la conceptualisation, particulièrement dans les situations de travail. En tant que processus relevant du sujet cognitif et produisant des constructions individuelles, la conceptualisation n'est pas un objet que j'ai cherché à prendre en compte dans le modèle praxéologique. C'est à une conceptualisation sociale que je m'intéresse, plus exactement aux différentes formes de manifestation d'un tel processus et d'intervention des concepts produits. Ainsi les notions de concept et théorème-en-acte introduites par G. Vergnaud (1990) en tant que modélisations produites par le chercheur d'inaccessibles et hypothétiques élaborations cognitives du sujet ne relèvent pas du point de vue socioculturel que j'ai adopté. S'il existe des invariants interindividuels dans l'action, non socialement représentés, ils sont en tant que tels pris en charge au niveau de la technique. Par contre, la revue de travaux réalisée par Vidal-Gomel et Rogalski distingue trois types de concepts qui relèvent effectivement du bloc technologico-théorique du modèle praxéologique, concepts scientifiques, techniques et pragmatiques. Ces concepts appartiennent eux-mêmes à trois champs de savoir : science, technique et savoirs professionnels. Science et technique produisent des connaissances sur le réel avec une ambition comparable de systématisation. Les concepts techniques sont "regardés comme issus d'une démarche systématique de construction sociale, parente de la démarche scientifique" (Samurçay & Rabardel 2004, p. 178) :

> "les concepts techniques sont plutôt issus d'une conduite de détour, de la volonté explicite de théoriser suffisamment un phénomène pour s'assurer de la cohérence d'ensemble, de l'amplitude du domaine de validité et de l'utilité du concept technique." (Vidal-Gomel & Rogalski 2007, p. 62)

Toutes deux en position de désengagement par rapport à l'action, science et technique se distinguent par leur visée respective, épistémique pour la science (produire de la connaissance), pragmatique pour la technique (produire un effet). Néanmoins, compte tenu de l'acception donnée à la notion d'institutions de recherche, ces deux types de concepts relèvent de la composante $[\theta^{r}, \Theta]$.

Les concepts pragmatiques quant à eux relèvent très clairement de la composante θ^{p}.

> "[Ce sont] des représentations schématiques et opératives, élaborées par et pour l'action, qui sont le produit d'un processus historique et collectif, et qui sont transmises essentiellement par expérience et compagnonnage." (Samurçay & Rogalski 1992, p. 235)
> "les concepts pragmatiques permettent de penser et de comprendre pour agir en situation, ici et maintenant. […ils] sont inséparables de l'organisation de l'action." (Vidal-Gomel & Rogalski 2007, p. 62)
> "les concepts pragmatiques sont verbalisés par les opérateurs. Ils sont transmis par les communautés professionnelles sous des formes langagières diverses." (*ibidem,* p. 69)

Les derniers éléments cités montrent que, contrairement aux concepts-en-actes, les concepts pragmatiques appartiennent bien à la technologie. Il est intéressant pour mieux spécifier la composante θ^{p} de préciser ce qui les distingue des concepts techniques :

> "dans un domaine professionnel, on n'entreprend pas de démarche systématique de validation des concepts pragmatiques, contrairement aux domaines scientifiques et techniques." (*ibidem*, p. 62)
> "Un concept pragmatique est une construction mentale dont les propriétés l'apparentent

> aux concepts techniques ou scientifiques mais, à la différence de ceux-ci, son domaine de validité est précisément circonscrit à une catégories de situations de travail dans un domaine professionnel précis, et la pierre de touche de cette construction n'est pas la validation théorique mais l'efficacité pratique." (*ibidem*, p. 75)

Ajoutons pour finir que le caractère non isolé des concepts pragmatiques est mis en avant avec insistance :

> "Ils s'inscrivent dans un réseau de relations, qui intègre des concepts pragmatiques et les relie à des paramètres directement observables." (*ibidem*, p.. 52)

Mis en relation pour produire une représentation conceptuelle de la situation, ils sont également intégrés dans un champ de savoirs professionnels qui relèvent de la composante θ^p. Dans quelle mesure une telle organisation pourrait-elle être prise en compte, sous certaines conditions, dans l'éventuelle théorie pratique ou située dont nous avons précédemment envisagée l'existence ? C'est une question pour moi totalement ouverte.

Ainsi apparaît une convergence tout à fait stimulante de deux approches privilégiant des dimensions très différentes puisque les travaux développés par les chercheurs cités ici le sont dans une optique psychologique alors que, dans le cadre de la TAD, je m'intéresse à la dimension socioculturelle. Mais je le fais en accordant *a priori* crédit aux productions cognitives non aristocratiques si je peux dire, à celles qui ne sont pas développées par les institutions de recherche, autrement dit au *folklore* au sens étymologique plein du terme en anglais, au savoir du peuple. C'est ce qui autorise la convergence avec une ergonomie cognitive qui de son côté fait référence à l'approche Vygotskienne du psychologique humain et prend donc inévitablement en compte les productions de la cognition sociale. C'est aussi ce qui me fait rencontrer les travaux développés autour de Y. Clot en Clinique de l'activité.

Ouverture sur les travaux français de clinique de l'activité

Comme cela a été évoqué précédemment, toute une chaîne d'institutions emboîtées est impliquée dans la légitimation des praxéologies. C'est le cas pour les institutions de recherche, c'est également vrai dans les institutions utilisatrices. Je vais ainsi postuler qu'au sein d'une institution utilisatrice professionnelle I_u, les sujets peuvent localement constituer des communautés de pratiques (au sens de Wenger 1998) stables, identifiables dans certains cas à des institutions en ce sens qu'elles ressourcent et encadrent les activités que leurs membres réalisent. Ces communautés inscrivent leur travail dans le cadre déterminé par les praxéologies instituées dans et par I_u, elles en respectent *a priori* les normes et profitent des ressources ainsi mises à leur disposition. En particulier, les sujets n'ont pas à reprendre le processus de validation, c'est une question réglée par I_u qui est garante de la praxéologie.

Mais ces communautés sont en même temps le lieu privilégié du développement du niveau pratique des praxéologies, pour utiliser au mieux les marges de manœuvre laissées par les normes en temps ordinaire mais aussi pour affronter les désajustements des techniques instituées aux conditions effectives de travail lorsque celles-ci évoluent. Une communauté de sujets peut produire des ressources praxéologiques pour elle-même dans une logique interne d'amélioration du travail de la communauté ; elle ne contribuera véritablement aux processus producteurs de praxéologies dans I_u qu'en s'inscrivant dans une logique externe de transmission vers la profession, ce que Y. Clot et J-L. Roger appellent dimension transpersonnelle du métier :

> "le travail collectif de réorganisation de la tâche [qui] en assure ou non la "maintenance". Cette dimension transpersonnelle est l'objet et le résultat du travail que le collectif fait sur lui-même pour conserver, transmettre et finalement "retenir" sa mémoire du travail, et "refaire" le métier tout en le faisant." (Roger 2007, p.20).

Le concept clé de *genre d'activité*, plus largement de *genre professionnel,* généralisations de la notion de genre de discours due à S.Bakhtine*,* est ce qui, dans cette ligne de travaux, prend en charge le champ des productions praxéologiques développées par les communautés de sujets, cette mémoire du travail évoquée dans la citation précédente.

> "Le genre professionnel est ici compris comme une sorte de pré-fabriqué, histoire socialement et collectivement élaborée par le milieu de travail, ne relevant pas de la prescription officielle et définissant les diverses façons admissibles dont les professionnels doivent se comporter dans l'exercice de leur métier, mais aussi les variantes acceptables ou déplacées des manières de travailler. Une telle histoire est une mémoire qui permet de mieux affronter le cours des évènements dans la situation de travail. Elle est le répondant collectif de l'activité individuelle, collectif dans l'individu, retenant les attendus d'une situation et préparant à ses inattendus, réglant ou déréglant l'action personnelle. Il s'agit, en quelque sorte, d'un "stock" diversifié de "mises en mots" et de "mises en actes" prêt à servir et qui préfigure l'action. Ce "stock" est à la fois contrainte et ressource pour agir. Pour réussir à faire ce qu'ils ont à faire, les professionnels, de façon largement insue, le mobilisent, le défaisant et le refaisant sans cesse, renouvelant du même coup la mémoire vivante du métier." (conférence conjointe de Y.Clot et J-L. Roger tenue en 2004 à l'IUFM de Rouen et citée dans (Roger 2007, p. 18)

Cette citation présente, à mes yeux, l'intérêt de mettre en évidence la nécessité d'une grande subtilité pour approcher les ethnopraxéologies qui composent les genres professionnels tels que définis par Y. Clot et J-L. Roger, encadrant le travail tout en n'étant pas nécessairement perçues par les acteurs.

L'introduction du niveau pratique permet de prendre en compte dans la TAD la contribution, non pas des sujets individuels, mais des communautés de sujets de I_u au développement des praxéologies. Il s'agit de pouvoir ainsi faire une place aux contributions des sujets à la dynamique cognitive des institutions :

> "Ainsi les sujets d'une institution, qui permettent déjà à celle-ci de vivre, contribuent-ils en même temps *à la faire évoluer*, en exerçant une pression institutrice sur les rapports institutionnels." (Chevallard 2003, p. 5)

Notons pour finir qu'il n'y a pas d'automatisme à ce que les collectifs de sujets se constituent en institutions participant de la chaîne des I_u. C'est un point qu'examine particulièrement J-L. Roger dans le livre cité dans lequel il rend compte d'interventions auprès de collectifs que l'on pourrait décrire comme en souffrance par manque de réactions partagées à des situations de désajustement du genre, des soignants dans des services de séjour de fin de vie en gériatrie et des enseignants. Il précise donc dans l'introduction de son livre :

> "Encore faut-il que les collectifs de professionnels puissent assumer cette double dimension psychologique et sociale. De tels collectifs ne peuvent être compris comme de simples groupes ou collections d'individus assemblés simplement et formellement par la tâche partagée, comme c'est aujourd'hui souvent le cas dans les milieux de travail, même sous couvert de travail collectif. Il faut que ce soient des collectifs s'inscrivant effectivement dans l'histoire d'un milieu." (*ibidem*, p. 23)

Se trouve ainsi soulevée la question des conditions de la conversion de collectifs de travail en institutions locales susceptibles de contribuer au développement cognitif de l'institution dont ils sont les sujets, d'exercer cette pression institutrice évoquée par Chevallard, ou encore, pour reprendre une expression utilisée dans un journal syndical par Y. Meignan, chercheur travaillant avec Y. Clot, de faire autorité dans le travail.

Conclusion : quelles perspectives de recherche ?

Le travail de développement du modèle praxéologique que j'ai présentée ici ouvre sur plusieurs directions possibles de travail.

Confrontation du modèle à l'épistémologie d'autres sciences

Ce modèle se prétend pertinent dans d'autres sciences que les mathématiques. Or c'est principalement poussée par la dynamique des idées qu'à partir de l'exemple du calcul symbolique, j'ai éprouvé la nécessité de prendre en compte la diversité des paradigmes de la validation scientifique. Le modèle doit maintenant être mis à l'épreuve en travaillant avec des spécialistes d'autres sciences. Ceci serait entre autre l'occasion d'approfondir le travail sur les fonctions des théories scientifiques relativement aux éléments des praxéologies.

Etude des effets de transposition produits par l'utilisation des praxéologies mathématiques

Mais, en tant que didacticienne des mathématiques, la direction principale que j'envisage prolonge ce qui a été commencé avec A. Romo Vázquez, c'est-à-dire le recueil et l'analyse des formes transposées des praxéologies mathématiques développées dans les sciences utilisatrices de mathématiques et plus largement dans les mondes professionnels. Comme le montre la dernière forme du modèle, il s'agit d'envisager que toutes les instances de l'épure mathématique puissent être affectées, de même que le paradigme de la validation. Ceci est une dimension que des travaux co-disciplinaires sur l'étude des choix transpositifs opérés par des professeurs d'une discipline non mathématique amenés à enseigner des praxéologies mathématiques devraient rencontrer. Le changement récent des programmes dans les filières scientifiques de lycée rendra inévitablement plus fréquentes que jamais de telles situations pour la physique. Mais là ne s'arrête pas l'étude de la transposition : il convient de prêter la plus grande attention aux savoirs pratiques spécifiques de chaque institution utilisatrice. Seuls de tels recueils quasi ethnologiques permettront de poursuivre le travail sur les fonctions des technologies d'une part, sur l'existence et la nature d'un niveau théorique spécifique.

De telles recherches répondent en premier lieu à une curiosité épistémologique relative à la productivité praxéologique des institutions mais elles s'inscrivent également dans une perspective didactique. Au moment où se pose de manière très aiguë à l'université la question d'une intégration réussie dans des licences professionnelles de publics variés, issus des filières techniques et technologiques de l'enseignement secondaire, il y a urgence à développer des recherches sur ce type de parcours. Or, avant que de prétendre avancer des propositions didactiques concernant l'enseignement des mathématiques aux différents niveaux de la formation professionnelle, il est nécessaire d'explorer avec esprit d'ouverture la réalité des praxéologies vivantes, en s'attachant à différencier les professions. Si le métier d'ingénieur est très certainement aujourd'hui d'une grande diversité, il n'y a aucune raison de généraliser à toutes les formations un modèle d'enseignement des mathématiques adapté aux ingénieurs-analystes par exemple, évoqués par P. Kent et R. Noss. J'envisage plus particulièrement de m'intéresser aux métiers utilisateurs de géométrie, dans le bâtiment mais aussi, par exemple, en chaudronnerie, ce qui poursuivrait la direction de recherche ouverte par plusieurs didacticiens français comme A. Bessot, M. Eberhard et C. Laborde (Bessot & Eberhard 2006) et plus récemment C. Bulf dans sa thèse (2008). Mais des recherches sur la formation des ingénieurs introduiraient très certainement d'autres domaines mathématiques.

Etude de la productivité praxéologique des enseignants de terrain

Une troisième direction de recherche concerne l'évolution des praxéologies didactiques et la formation des enseignants de mathématiques. Il s'agit de prendre comme objet d'étude la contribution des enseignants de terrain à l'entretien du genre professionnel. Spécifiquement, dans l'époque de désajustements majeurs que nous vivons, où se multiplient ce que G. Cirade (2006) et Y. Chevallard (2010 par exemple) pointent comme des problèmes de la profession, n'existe-t-il pas des communautés d'enseignants qui produisent des réponses ? Quelles sont les conditions écologiques pour que cette productivité contribue au développement praxéologique des institutions d'enseignement ? La modélisation proposée dans mon travail permet de soulever ce type de questions dans le cadre de la TAD car elle favorise la prise en compte des sujets, du moins des communautés stables qu'ils forment, et de leur participation à la dynamique cognitive des institutions. On entrevoit alors la possibilité de convergences autour d'un même objet avec des travaux se réclamant d'approches théoriques très différentes comme ceux de B. Jaworski autour des communautés de pratiques, de G. Gueudet et L. Trouche (2009) à propos de l'usage collaboratif des ressources documentaires, d'A. Robert, D. Butlen et E. Roditi qui, dans le cadre de la double approche, accordent désormais une véritable place au rôle de collectifs d'enseignants.

Etude des phénomènes de légitimation institutionnelle des praxéologies

Cette dernière direction de recherche est tout d'abord un complément indispensable de l'étude des phénomènes transpositifs : il s'agit fondamentalement de se pencher sur la transposition en tant que processus où peuvent être mises en doute les légitimités acquises dans les institutions dont sont issues les praxéologies, où, par ailleurs, des modifications et des développements, notamment de la technique et/ou de la technologie pratique, sont opérés, qui doivent donc être légitimés. Quels sont les acteurs de cette remise en chantier praxéologique ? Dans quelles institutions, sur quelles bases, selon quels critères, par quels processus se reconstruit la légitimité, se valident les éléments nouveaux incorporés à la praxéologie ? Dans quelle mesure y contribue la garantie de l'institution productrice ? Quels rôles jouent les sujets utilisateurs ? Telles sont les questions que je suggère d'aborder dans le cas des utilisations de mathématiques dans certains contextes scientifiques ou professionnels.

Les phénomènes de transposition didactique peuvent également être abordés dans cette perspective. Il s'agit de s'intéresser aux processus de multi-déterminations institutionnelles qui, dans des pays différents ou dans des institutions scolaires différentes d'un même pays, conduisent à des choix transpositifs distincts. Qu'est-ce qui conduit certains pays à accepter des paradigmes de validation ne répondant pas aux normes mathématiques quand d'autres les refusent ? On se situe alors à un niveau macro-didactique et ce sont les déterminations exercées par des institutions relevant des niveaux supérieurs de l'échelle introduite par Y. Chevallard (2002), société et civilisation, qu'il s'agit de prendre comme objets d'étude. C'est la dynamique de la réflexion théorique qui me conduit à envisager la possibilité et l'intérêt de tels travaux mais rien dans mes recherches antérieures ne m'outille méthodologiquement pour les aborder dans la mesure où ils ont nécessairement une forte dimension sociologique et historique. Je ne conçois guère de m'engager dans cette direction en dehors d'une collaboration interdisciplinaire.

Enfin, la lignée des recherches développées par la socioépistémologie (voir Cantoral & Al. 2006) au sujet des ethnopraxéologies est absolument passionnante. Il s'agit de s'intéresser à des praxéologies développées dans certaines communautés, praxéologies qui pourraient être validées par certains savoirs mathématiques avec lesquels cependant les communautés en question n'ont eu aucun contact. Le contenu des praxéologies en question, les processus par lesquels elles sont validées, s'institutionnalisent et normalisent les comportements sont pris pour objets d'étude. La perspective éducative de ces recherches est de concevoir des dispositifs didactiques qui s'appuient sur les praxéologies existantes pour enseigner les savoirs mathématiques qui leur sont liés. Je ne sais si on peut facilement réaliser en France de tels travaux. Toutefois il est possible que, dans certaines professions, l'éloignement des utilisateurs avec les savoirs mathématiques validant certaines techniques utilisées soit tel que ces savoirs ne participent nullement à la praxéologie effectivement présente chez les professionnels experts, celle-ci s'apparentant alors à une ethnopraxéologie.

Conclusion

Dans ce texte, j'ai essayé de motiver les modifications que je propose du modèle praxéologique, au moins de sa représentation, à partir des divers objets qui les ont suscitées. Les trois modélisations successives présentées unifient une grande partie des recherches que j'ai réalisées dans ma carrière. Toutefois le présent texte dépasse déjà ce travail de synthèse dans la mesure où il poursuit les discussions engagées à l'occasion de la soutenance de mon HDR avec Y. Chevallard et tient compte de certaines réactions et objections des participants au séminaire. Les perspectives envisagées montreront, je l'espère, que le travail réalisé sur un modèle, n'est pas vain : il ne produit aucun résultat mais permet de poser des questions nouvelles en donnant une existence dans le cadre de la TAD à des phénomènes jusque là négligés.

Références

A. DE BEAUNE S. (2008), *L'homme et l'outil. L'invention technique durant la préhistoire.* CNRS Editions.

BESSOT A., LABORDE C. (2006), Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture-tracé du bâtiment. In C. Castela & C. Houdement (Eds) *Actes du Séminaire national de Didactique des mathématiques, Année 2005* (pp.39-76). Paris : IREM Paris 7.

BOSCH M., ESPINOZA L. & GASCÓN J. (2003), El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espóntaneas. Recherches en Didactique des Mathématiques, 23(1), 79-136.

BOSCH M., FONSECA C., GASCON J. (2004), Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 24(2/3), 205-250.

BULF C. (2008), *Etude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*. Thèse de doctorat : Université Paris 7.

CANTORAL R., FARFAN R., M., LEZAMA J., MARTINEZ SIERRA G. (2006), Socioepistemología y representación: algunos ejemplos, *Relime,* 9(1), 83-102.

CASTELA C. (2000), Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(3), 331-380.

CASTELA C. (2008), Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 28(2), 135-182.

CASTELA C. (2011), *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques.* Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot. Paris : Irem Paris 7.

CASTELA C., CONSIGLIERE L., GUZMAN I., HOUDEMENT C., KUZNIAK A., RAUSCHER J-C. (2006), *Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Une étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français.* Cahier de Didirem Spécial n°6. Paris : IREM Paris 7.

CASTELA C., ROMO VAZQUEZ A. (2011), Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.
CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12(1), 73-112.
CHEVALLARD Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 17-54.
CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
CHEVALLARD Y. (2003), Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S.Maury et M.Caillot (Eds) *Rapport au savoir et didactique* (pp. 81-104). Paris : Editions Fabert ou site Yves.Chevallard.free.fr.
CHEVALLARD Y. (2010), Didactique et formation des enseignants.
http://yves.chevallard.free.fr
CIRADE G. (2006), *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en iufm. Les mathématiques comme problème professionnel*. Thèse de doctorat. Marseille : Université Aix-Marseille I
CONNE F. (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(2/3), 221-270.
GEORGET J-P. (2009), *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. Thèse de doctorat : Université Paris 7.
GUEUDET G., TROUCHE L. (2009), Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques ? In I.Bloch & F. Conne (Eds) *Actes de la 14ème école d'été de didactique des mathématiques* –Sainte Livrade, 18-24 Août 2007- (pp. 109-133). Grenoble : La Pensée Sauvage.
HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2000), Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 89-115.
NOSS R., HOYLES C. (1996), *Windows on Mathematical meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
ROGER J-L. (2007), *Refaire son métier. Essai de clinique de l'activité*. Préface d'Y. Clot. Toulouse : Eres.
ROMO VAZQUEZ A. (2009), *La formation mathématique des ingénieurs.* Thèse de doctorat : Université Paris Diderot.
SAMURÇAY R., RABARDEL P. (2004), Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences, propositions. In R. Samurçay & P.Pastré (Eds), *Recherches en didactique professionnelle* (pp. 163-180). Toulouse : Octarès Editions.
SCHWARTZ L. (1950), *Théorie des distributions Tome 1.* Paris : Hermann.
SCHNEIDER M. (2011), Ingénieries didactiques et situations fondamentales : quel niveau praxéologique ? In C. Margolinas & Al. (Eds) *Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques* –Clermont-Ferrand, 16-22 Août 2009-, pp.175-205. Grenoble : La Pensée Sauvage.
VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.
VIDAL-GOMEL C., ROGALSKI J. (2007), La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences. *Activités, revue électronique*, 4(1), 49-84.
WENGER E. (1998), *Community of Practice: Learning, meaning and identity*, Cambridge : Cambridge University Press.

Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes

Eric **MOUNIER**

Université Paris-Est Créteil (UPEC), Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR)

ericmounier@u-pec.fr

Résumé

Les élèves de Cours Préparatoire (CP), âgés de 6-7 ans, ont une approche des nombres essentiellement en lien avec la numération parlée en France, associée le plus souvent à une activité de dénombrement un par un. L'écriture chiffrée ne constitue pas une simple transcription écrite du langage oral ; elle est vecteur de nouvelles connaissances mathématiques à apprendre. Comme il semble inévitable de faire une séquence sur les nombres sans les nommer, se pose alors la question de la place des désignations de la numération parlée dans l'apprentissage au CP des aspects positionnels de la numération écrite. Notre thèse « Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes », (Mounier, 2010), revisite le contenu mathématique pour faire un nouvel inventaire des possibles. Elle fait un bilan de travaux existants. Elle rend compte des pratiques actuelles à travers l'analyse de manuels et de mises en œuvre effectives en classe. Elle ouvre des perspectives de recherches à partir de nouvelles propositions pour l'enseignement à ce niveau. La présentation au séminaire national a été l'occasion de donner un aperçu de l'ensemble du travail. Deux aspects y ont été plus largement développés. Il s'agit d'une part d'une étude des deux numérations à partir de leurs signes et d'autre part d'une analyse de certains déroulements en classe dans le cadre de la double approche (Robert et Rogalski, 2002). Ce texte a pour objectif de rendre compte de cette présentation et ainsi de faciliter l'accès au texte de la thèse.

Mots clés

Numération, nombre entier, écriture chiffrée, déroulement, classe de CP

Préambule

Le texte qui suit est une présentation d'un travail de thèse (Mounier, 2010). Il est conçu comme un compte rendu qui a pour intention d'indiquer la teneur des cadres théoriques, de la méthodologie et des résultats qui s'y trouvent, ainsi que les endroits où ils sont développés dans le texte de la thèse. C'est pourquoi des références (chapitre et paragraphe) sont indiquées au fur et à mesure.

Introduction

Les questions initiales de la recherche concernent les échanges en classe. Lorsque l'enseignant ou l'élève dit « quarante-deux », fait-il référence au mot de la comptine numérique ou à l'écriture chiffrée (dans ses aspects positionnels) ? Réciproquement que penser quand l'enseignant ou l'élève montre (du doigt) l'écriture « 42 » ? Qu'en est-il alors des conséquences sur l'apprentissage et l'enseignement ? Ces questions sont pertinentes au regard des différences qu'il peut exister entre deux façons de désigner le nombre. En quoi constituent-elles deux numérations différentes ? Qu'engagent-elles à voir et à comprendre sur

le nombre ? Quels sont alors les savoirs à enseigner et les écueils envisageables de ce point de vue ? Elles deviennent sensibles au Cours Préparatoire (CP), élèves âgés de 6-7 ans, quand il s'agit de traiter les aspects positionnels des écritures chiffrées, et non uniquement de les considérer comme forme écrite des désignations orales (ce qui est le cas à l'école maternelle, enfants âgés de 3-6 ans, que la quasi-totalité des élèves en France fréquente).
Le premier paragraphe de ce texte décrit tout d'abord l'organisation d'ensemble. La thèse comporte trois grandes parties. Deux des trois parties sont ensuite plus développées : la première (§2) et la troisième (§3). La première concerne une analyse des numérations qui est nouvelle du fait de la méthodologie utilisée et des résultats obtenus. Elle mène à éclairer les différents liens que les numérations entretiennent avec les nombres entiers. Ce premier volet est susceptible d'intéresser tous ceux qui se posent des questions sur (l'apprentissage de) la numération. Il a conditionné l'ensemble du travail. Les résultats afférents à la compréhension de déroulements en classe sont présentés dans le troisième paragraphe de ce texte, avant de conclure sur certains prolongements possibles. Ainsi, ce troisième paragraphe présente directement la troisième partie de la thèse. En conséquence la deuxième partie de la thèse, qui fait le lien entre l'analyse des numérations et celle des déroulements en classe de CP, ne fait pas l'objet ici d'un paragraphe spécifique.

1. Généralité sur la thèse

Comme ce paragraphe a pour but de donner un aperçu de l'ensemble de la thèse en particulier pour comprendre les liens entre sa première partie et sa troisième et dernière, la deuxième partie de la thèse est ici un peu plus développée que les autres, dans la mesure où elle n'est pas reprise ensuite. L'intention étant de faciliter au lecteur l'accès au texte de la thèse, en voici l'organisation qui est commentée par la suite.

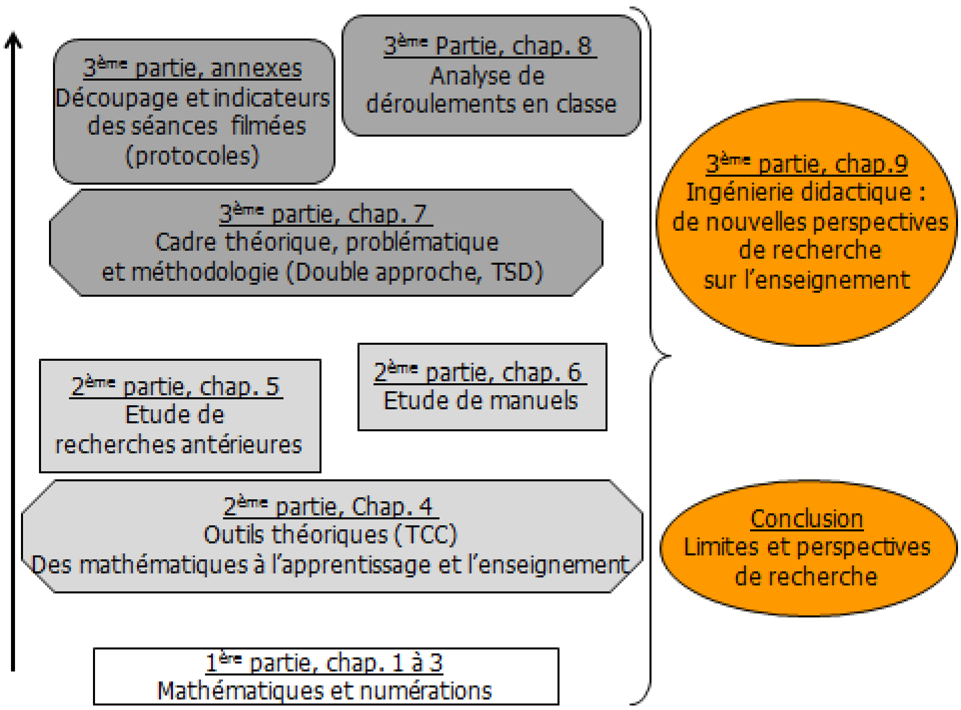


Figure 1 : l'organisation générale de la thèse

1.1 Des questions initiales à la problématique

Les interrogations de départ portent sur les déroulements en classe, sur les emplois des signes oraux et écrits pour désigner le nombre dans les échanges entre les différents acteurs (enseignant et élèves). Les questions sont développées dans l'introduction de la thèse. La problématique ainsi que son traitement ne viennent que dans la troisième partie (chapitres 7 et 8). Dans la recherche menée, il est apparu essentiel de revenir tout d'abord sur les liens entre les mathématiques et les numérations. La consultation d'auteurs ayant traités ce sujet a montré la nécessité d'une étude plus poussée (1ère partie de la thèse, chapitres 1 à 3). Les résultats obtenus, présentés dans le deuxième paragraphe de ce texte, mettent en relief des différences entre les deux numérations plus importantes que celles relevées par les recherches antérieures. La numération écrite chiffrée éclaire le nombre via des principes mathématiques qui font fonctionner le système de manière différente de la numération orale utilisée en France. Ce constat peut se généraliser aux numérations orales de type indo-européen. Les questions de départ sont donc légitimes à ce niveau d'analyse, celui des signes, puisque la numération écrite chiffrée n'est pas la version écrite de la numération orale. La deuxième partie de la thèse fait le lien entre d'une part ces résultats et d'autre part les apprentissages et certains aspects de l'enseignement. Deux outils ont été élaborés (chapitre 4) dans le cadre de la théorie des champs conceptuels (TCC) de Vergnaud (1991). Le premier est la notion de « cheminements cognitifs ». Les problèmes à résoudre concernant le nombre entier et les numérations sont tout d'abord classés selon la relation entre les signifiants en jeu (ou non) et le signifié(s). Ensuite, grâce en particulier à la notion de théorème-en-acte, les « cheminements cognitifs » permettent de faire un lien entre les différentes stratégies envisageables pour résoudre un problème et les propriétés mathématiques mises à jour dans la première partie de la thèse. Le deuxième outil se base sur le premier en se plaçant au niveau de l'enseignement. Il s'appuie sur le fait que certains problèmes et stratégies favorisent l'emploi de propriétés (en-actes ou non) qui sont liées à tel ou tel aspect de chaque numération. Il est alors possible d'envisager des « itinéraires cognitifs d'enseignement », c'est-à-dire une organisation *a priori* de propriétés à aborder (via les problèmes posés aux élèves) qui va favoriser tel ou tel type de lien entre les numérations (signifiants) et le nombre (signifié). Dans le chapitre 5, cet outil est utilisé pour analyser un large panel de propositions d'enseignement et de discussions venant de recherches diverses (y compris des recherches internationales, en particulier les recherches anglo-saxonnes comme celle de Fuson et al. (1997). Trois types d'itinéraires sont distingués, mais il ressort que la plupart des études se classent dans deux types (itinéraires de type 1 et de type 2). Ceux-ci envisagent prioritairement les écritures chiffrées comme la version écrite de la numération parlée. Il s'agit ensuite de mettre en exergue certaines caractéristiques qui vont les disjoindre. Pour ce faire il est proposé tout d'abord de faire évoluer la numération parlée, d'une interprétation ordinale ou additive (« quarante-deux » comme le quarante deuxième mot de la comptine ou comme « deux <u>après</u> quarante », ou bien quarante-deux comme quarante plus deux) vers une interprétation multiplicative (quarante-deux comme quatre dizaines plus deux)[1]. Ensuite, l'écriture chiffrée est présentée comme la version écrite de cette interprétation multiplicative. A la différence du premier, le deuxième itinéraire convoque en outre un autre système de numération orale, système qui est « régulier », par exemple « quatre dix deux » pour « quarante-deux ». Un troisième itinéraire est bien moins exploré dans les recherches récentes. Les écritures chiffrées n'y sont pas présentées comme un moyen de traduire par écrit les mots prononcés, mais de désigner « directement » par écrit le signifié « nombre »[2]. Dans ce sens,

[1] Ces interprétations sont détaillées dans le deuxième paragraphe de ce texte.
[2] Grâce à des tâches de comparaison de cardinaux de collections, l'ingénierie didactique du chapitre 9 de la thèse est une proposition d'un itinéraire de type 3.

les aspects positionnels sont abordés indépendamment du système de numération parlée. Les deux numérations y sont donc utilisées d'emblée comme deux systèmes différents, c'est la logique de distinction.

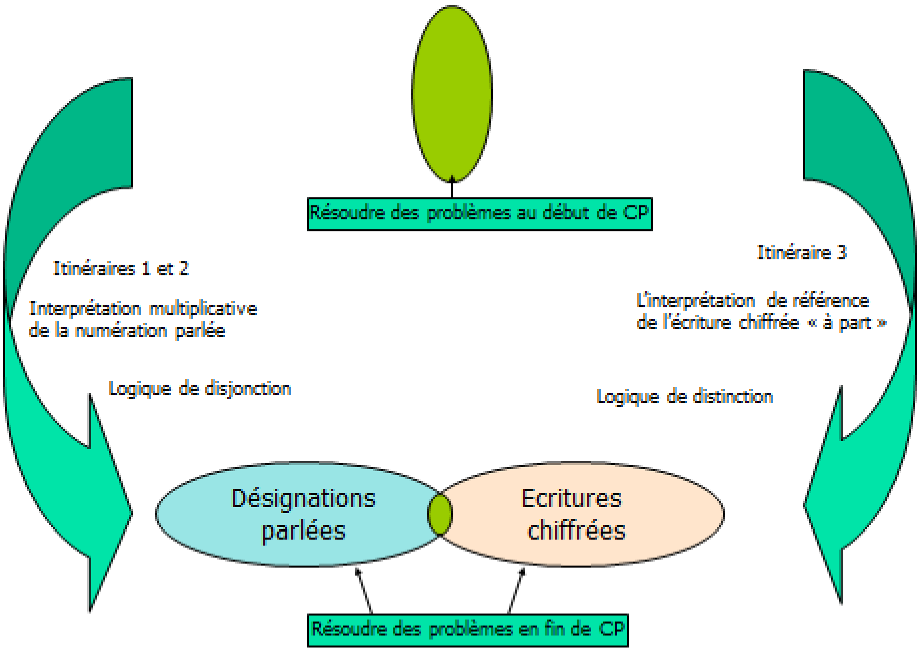


Figure 2 : des itinéraires cognitifs d'enseignement

La fin du chapitre 5 propose une discussion des itinéraires en termes d'avantages et d'inconvénients *a priori* pour un enseignement concernant des élèves de CP en France, c'est-à-dire des élèves ayant fréquentés les nombres principalement via la numération parlée et le plus souvent à travers des tâches de dénombrement. Le chapitre 6 analyse les propositions de deux manuels français comme des variantes des deux premiers itinéraires et prolonge cette discussion. Cette étude à un niveau plus fin met en relief un nombre important de déclinaisons potentielles.

1.2 La problématique et les éléments de réponse

Les deux premières parties de la thèse permettent d'obtenir des informations sur la nature du contenu mathématique en jeu pour comprendre les déroulements de séquences au CP : son épistémologie et les tâches proposées aux élèves en lien avec un itinéraire d'enseignement. Les lignes suivantes concernent la dernière partie de la thèse qui est à nouveau reprise dans le troisième paragraphe de ce texte. La problématique est posée en termes d'interprétations relevées dans les déroulements en classe (nature, fréquence, moment) et de facteurs qui permettent de comprendre les constats. Elle est formulée dans le cadre théorique de la double approche de Robert et Rogalski (2002) qui fournit en outre une méthodologie pour son étude. Des éléments de réponse (chapitre 8) sont fournis à partir de l'analyse du déroulement de séances de classes ayant suivi le « même » scénario (prescrit par un même manuel scolaire). Ces séances ont été filmées. Les différents emplois des signifiants du nombre (par l'enseignant et les élèves) ont été analysés à l'aune des propriétés des interprétations des numérations dégagées dans la première partie de la thèse. La prise en compte de leur survenue selon différentes phases des déroulements en classe permet de répondre à la première partie de la problématique (analyse descriptive). Ces résultats sont formulés en termes de confusions (potentielles) sur le sens des signifiants employés, les acteurs ne semblant pas percevoir qu'ils « ne parlent pas de la même chose ». Par ailleurs, les enseignants ont recouru à des moyens similaires (non prescrits par le manuel) pour valider les productions des élèves, et ont (ensuite) été confrontés à des obstacles similaires pour faire le lien entre la connaissance des élèves et le savoir visé. Les cinq composantes de la double approche fournissent le cadre pour analyser ces points communs. Le dernier chapitre de la thèse (chapitre 9) expose des éléments d'une ingénierie didactique qui permet de disposer d'un outil pour prolonger la recherche.

2. Premier développement : la comparaison des deux numérations

2.1 Éléments méthodologiques

La question initiale de la première partie de la thèse peut être formulée ainsi : quelles mathématiques sont en jeu dans les deux systèmes de numération ? Et de manière plus concrète encore : quel est le lien entre la décomposition dite polynomiale[3] telle que 4x10+2, « 42 » et « quarante-deux ». L'étude est menée dans un cadre général emprunté à la sémiotique de Peirce (Peirce, 1906). Ces emprunts sont limités mais ils ont suffi car l'objectif n'est pas l'analyse sémiotique en elle-même. Ils permettent d'analyser les deux numérations dans un même cadre, en particulier pour permettre des comparaisons. Peirce conçoit un signe comme « quelque chose qui tient pour quelque objet ». C'est en particulier la notion de signe comme triade objet/representamen/interprétant qui est convoquée. L'objet nombre est regardé à travers les representamens (les écritures chiffrées d'un côté, les mots en français de la numération orale usuelle de l'autre) et l'interprétant qui fait le lien entre l'objet et les representamens (les propriétés, la logique qui sous-tend les règles syntaxiques[4]). Des modèles de principes mathématiques, qui pourraient sous-tendre la logique syntaxique des numérations, sont recherchés dans les Mathématiques (théorie des langages formels) pour la numération écrite chiffrée et dans ceux proposés par Cauty (1988) pour la numération parlée en France[5]. L'analyse entreprise consiste à discuter de la pertinence de ces modèles pour analyser les signes des numérations. De manière plus précise, une fois décrites les règles syntaxiques régissant chacun des systèmes de numération, la confrontation à ces modèles permet de mettre en évidence les principes mathématiques susceptibles d'éclairer leur logique. Par exemple, une possibilité est de se référer à la décomposition dite polynomiale en base dix pour les règles syntaxiques de la numération parlée en France. Ensuite, la question réciproque est étudiée, c'est-à-dire celle concernant les possibilités que chaque principe mathématique offre pour élaborer une numération. Ce dernier processus, des principes vers une numération, est appelé « mise en signes ». Ainsi, par exemple, la décomposition dite polynomiale telle que 4x10+2 peut mener à une mise en signes de numération utilisant les signes « XXXX II » ou « 4X 2 », ou l'oral « quatre dix deux », et donc non uniquement « 42 » ou l'oral « quarante-deux ». La « mise en signes » de principes mathématiques renvoie au processus d'élaboration d'un système de numération à partir d'une syntaxe dont la logique est basée sur ces principes[6]. Les apports historiques dus tout particulièrement à Guitel (1975) et Ifrah (1994) ont complété l'étude en prenant en compte certains paramètres qui éclairent la genèse des deux numérations parmi un ensemble plus vaste. Les résultats obtenus par

[3] Cette décomposition est celle du nombre suivant les puissances de dix.

[4] Ces règles ne sont pas les mêmes pour les deux numérations. Par exemple, l'inversion des chiffres a du sens (23 ; 32), ce qui n'est pas toujours le cas pour les mots prononcés (vingt/trois ; trois/vingt).

[5] Des modèles sont indiqué dans l'article « Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique. Application à la numération parlée en France » (en révision aux Annales de Didactique et de Sciences cognitives).

[6] Les choix des chiffres et des sons utilisés ou encore de la disposition des chiffres dans un espace à deux dimensions sont analysés dans la thèse comme ne relevant pas directement des principes mathématiques.

l'analyse sont qualifiés d'interprétation pour signaler les emprunts à la sémiotique de Peirce, mais aussi pour montrer qu'ils ont été obtenus par une méthodologie d'analyse propre à la recherche.

2.2 Résultats

En ce qui concerne les écritures chiffrées, les principes mathématiques de la décomposition dite polynomiale sont les seuls retenus, alors que pour la numération parlée en France quatre possibilités sont mises à jour (figure 3). La première met en jeu des principes ordinaux « stricts », « quarante-deux » vu comme un seul mot (quarantedeux) qui indique le nombre via un rang dans une comptine (il y autant de mots différents que de nombre, aucun lien entre deux representamens n'est retenu). La deuxième décrit des principes ordinaux avec repérants. A la différence de la première, certaines régularités sont prises en compte : les repérants. Par exemple, une fois le mot « vingt » prononcé, « trente » est vu comme un nouveau mot introduit à la suite de la comptine de un à neuf, c'est un nouveau repérant. La troisième expose des principes arithmétiques additifs (avec appuis additifs) : quarante-deux vu comme quarante plus deux. La dernière fait référence à des principes multiplicatifs, via la décomposition dite polynomiale. La pertinence de ces choix a été estimée en considérant les différentes étapes nécessaires dans la mise en signes de chacun des principes mathématiques aboutissant aux signes des numérations considérées. Ces étapes sont différentes selon les principes et selon le champ numérique. Ainsi par exemple, sans entreprendre une analyse morphologique, l'analyse syntaxique effectuée dans la thèse montre que le nom des nombres de un à seize sont indépendants deux à deux[7]. Ce qui permet de dire que la distance entre la numération parlée en France et une interprétation strictement ordinale est la plus petite pour ces nombres. En outre, en fixant cette fois-ci le champ numérique (un à seize) et en faisant varier les interprétations, c'est pour l'interprétation strictement ordinale que cette distance est la plus courte. Ce qui peut être résumé dans le tableau suivant :

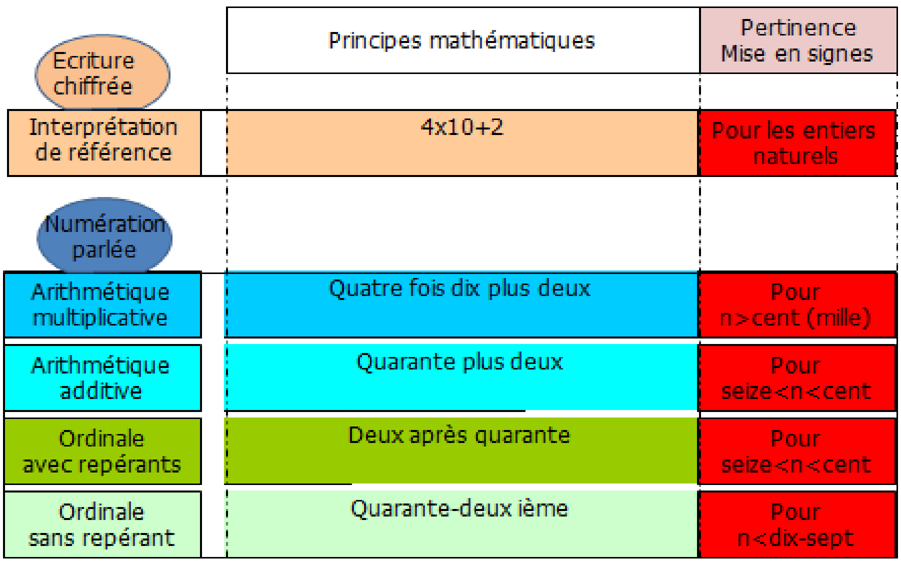


Figure 3 : principes mathématiques et mise en signes

La première ligne concerne la numération écrite chiffrée (l'expression « interprétation de

[7] Une analyse morphologique permet en effet de trouver une trace de dix (ou/et d'un premier repérant) dans la formation des representamens onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize.

référence » vient de son unicité), les quatre dernières la numération parlée en France. La dernière ligne souligne qu'avec l'interprétation ordinale sans repérant, la logique sous-tendue par la syntaxe de la numération parlée en France est analysée comme relevant de principes strictement ordinaux. Les spécificités de la numération parlée en France entraînent que la mise en signes de ces principes est plus pertinente pour les nombres strictement inférieurs à dix-sept. La lecture de la colonne de droite indique qu'en comparant les interprétations pour ce champ numérique, c'est l'interprétation ordinale qui propose une mise en signes comportant le moins d'étapes.
Le schéma suivant permet de synthétiser la réponse apportée à la question initiale concernant la décomposition dite polynomiale, en se limitant aux nombres inférieurs à cent (classe de CP)

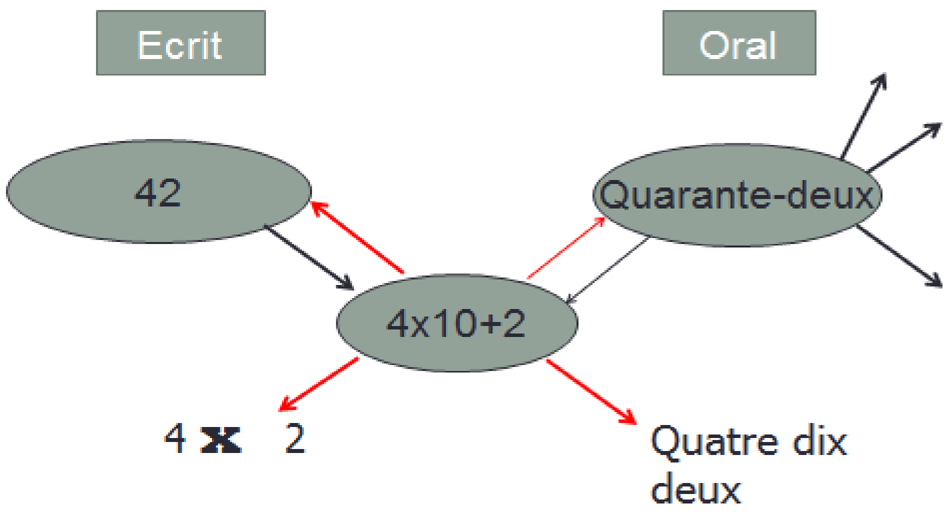


Figure 4 : le lien à la décomposition dite polynomiale

Chaque flèche partant des representamens (ici « 42 » d'une part et « quarante-deux » d'autre part) indique un choix de principes mathématiques pour rendre compte de la logique des règles syntaxiques de la numération considérée. La présence d'une seule flèche pour « 42 », allant vers « 4x10+2 », signifie que pour l'écriture chiffrée les principes mathématiques de la décomposition dite polynomiale sont les seuls retenus. La présence de quatre flèches partant de « quarante-deux » rend compte des quatre possibilités mises à jour pour la numération parlée en France (cf. figure 3). La flèche allant de « quarante-deux » à « 4x10+2 » n'est pas en gras. Ceci indique que, pour la numération parlée en France, le choix des principes mathématiques de la décomposition dite polynomiale est moins pertinent pour les nombres inférieurs à cent. Les flèches partant de la décomposition « 4x10+2 » mettent en relief les différentes mise en signes envisageables à partir de tels principes. La flèche allant vers « quarante-deux » n'est pas en gras pour souligner que cette mise en signes est moins pertinente que d'autres, dans le sens où le coefficient (quatre) et l'ordre (dix) sont indiqués par un seul mot (quarante). Par ailleurs, les deux rectangles « écrit » et « oral » du tableau renvoient à des distinctions des numérations selon ces aspects. Les possibilités de mises en signes offertes par la forme écrite et par la forme orale sont très différentes : d'un côté l'espace à deux dimensions du support des écritures et leur permanence due à la matérialité de ce support, d'un autre la linéarité du langage et la non permanence des sons dans le temps et l'espace. Les considérations historiques de la fin du chapitre 3 mettent en évidence que les écritures chiffrées sont employées pour conserver des informations dans l'espace et dans le

temps. En outre, les numérations orales et écrites se distinguent dès leur apparition dans l'humanité, dans le sens où elles n'ont été élaborées ni pour dire (prononcer) les nombres à partir d'un signe écrit ni pour les écrire à partir d'un signe oral : pour désigner le nombre auquel renvoie « 4 » dans le système écrit que nous employons, les premières écritures sont de la forme « I I I I » alors que les premières numérations orales sont ordinales (le quatrième mot d'une suite d'items). Notre numération parlée en France, quant à elle, est issue de celle parlée en latin, alors qu'à l'époque romaine les nombres étaient désignés par un système écrit dont la syntaxe ne peut pas s'analyser à l'aide de la décomposition dite polynomiale.
Ceci permet de donner du sens à un des résultats de la thèse formulé ainsi : les écritures chiffrées du système de numération de position usuel ne sont pas la version écrite des mots utilisés pour dire les nombres en France (et dans d'autres pays), et, réciproquement, ces mots ne sont pas la version orale des écritures chiffrées. Pour autant les liens ne sont pas absents, puisqu'il s'agit de désigner les « mêmes objets », les nombres. Néanmoins, dans le cadre de l'analyse entreprise, des points communs, comme par exemple le rôle joué par dix dans les deux numérations[8], sont à replacer dans la logique de chaque interprétation.

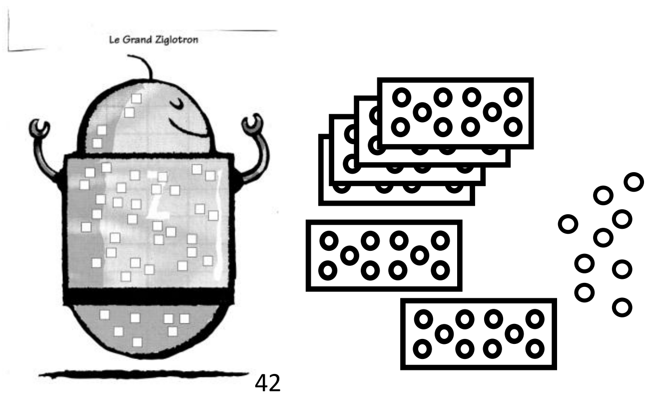
3. Deuxième développement : l'effet bouclage dans les déroulements en classe

3.1 Généralités sur la dernière partie de la thèse

La dernière partie de la thèse aborde les déroulements en classe[9]. La séquence « Grand Ziglotron » du manuel Cap Maths, de Charnay R., Dussuc M-P. et Madier D. (2005), a été filmée dans deux classes.

Les tâches proposées aux élèves

La tâche des élèves consiste à effectuer une commande d'objets (dénommés gommettes ou jetons pour les classes filmées) pour « réparer » un robot, le « Grand Ziglotron », dont les boutons (indiqués par des carrés sur un dessin du robot) sont manquants.



Je voudrais
paquets de 10 gommettes
et gommettes toutes seules

Figure 5 : le matériel des séances « Grand Ziglotron »

Le robot avec les boutons manquants, les conditionnements des boutons, le bon de commande

8 Il est un arbitraire non mathématiquement justifiable dans l'analyse entreprise, ce qui ne veut pas dire qu'il n'existe pas des arguments qui permettent de le comprendre.
9 Un article intitulé « Y a-t-il des marges de manœuvre pour piloter la Classe ? De l'influence de la notion enseignée dans la phase de bouclage : le cas de la numération à l'école primaire » est en révision pour la revue de l'ARDM, Recherches en Didactique des Mathématiques.

Au fur et à mesure le milieu matériel change, les objets sont disponibles en deux conditionnements (plaques de dix et boutons « tout seuls ») puis il est impossible de commander plus de neuf boutons « tout seuls » (et donc le reste doit être obtenus en plaque(s) de dix). Le dessin du « Grand Ziglotron » est d'abord disponible, ce qui permet de disposer de la collection (non manipulable) des « boutons » manquants, puis leur nombre est indiqué par une écriture chiffrée (dans l'exemple de la figure 5, c'est « 42 »). La commande se fait d'abord oralement, puis un bon doit être rempli en termes de groupement de dix et d'objets isolés (dans l'exemple de la figure 5, l'enseignant a contextualisé ce bon avec des gommettes pour faciliter une validation matérielle ultérieure). Cette séquence s'insère dans un itinéraire de 1er type. Il s'agit donc de faire apparaître la numération parlée dans son interprétation multiplicative, comprendre « quarante-deux » comme « quatre dizaines et deux », via la formulation sur le bon de commande (l'utilisation du mot dizaine n'est pas prescrite par le manuel). L'écriture chiffrée (que les élèves connaissent déjà en tant que forme écrite des désignations orales usuelles) est alors reliée à la forme écrite de la numération parlée ainsi interprétée. Ce passage précis se fait dans la séance 3 (le nombre de boutons manquants n'est pas à dénombrer, il est indiqué par « 42 » aux élèves), les deux premières étant dévolues à la compréhension de la tâche. La dernière séance est un exercice consistant à tester si, dans ce contexte, les élèves font le lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée « 42 » et les nombres intervenant dans le bon de commande : une des deux formulations est donnée, l'autre étant demandée.

Le lien avec les questions posées dans la thèse

Cette séquence a été choisie (cf. chapitre 7 §.3 de la thèse) car elle est celle durant laquelle les chiffres sont reliés pour la première fois de l'année (et du cursus des élèves) à la décomposition du nombre en dizaine(s) et unité(s). A travers le lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée comme « 4 2 » et les mots des expressions de type « quatre plaques de dix et deux », des aspects positionnels de l'écriture y sont donc abordés, bien qu'il n'y a pas d'institutionnalisation prévue sur le caractère conventionnel de certains autres, comme écrire « 42 » au lieu de « 24 ». D'après les résultats des deux premières parties de la thèse, puisque son intention est de disjoindre les deux numérations, c'est dans ce type de séquence que sont susceptibles de survenir dans les échanges en classe de nombreuses interprétations différentes et simultanées pour un même signifiant : c'est un moment clé de l'apprentissage. En outre l'itinéraire emprunté dans le manuel scolaire « Cap Maths » est couramment utilisé dans les manuels en France, mais aussi le plus étudié dans les recherches. Il est lié à une tâche de dénombrement (au moins nécessaire dans les premières séances), qui elle aussi est souvent proposée, ce qui confère un certain caractère général aux résultats. Pour comprendre certaines difficultés d'apprentissage chez les élèves mais aussi des spécificités de l'enseignement de la numération, les deux questions posées dans la thèse sont :
Question 1 : Quel peut être le « jeu » des relations entre les cinq différentes interprétations susceptibles d'intervenir en classe au moment de l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel ?
Question 2 : Quels sont les facteurs qui contribuent à leur survenue ?

Méthodologie d'analyse

Ce sont en particulier les résultats concernant le lien entre procédures et propriétés des numérations obtenus à la fin du chapitre 5 de la thèse qui permettent de répondre à la première question. La double approche de Robert et Rogalski (2002) fournit le cadre théorique général pour la deuxième question. La méthodologie induite par la double approche comporte deux temps : une analyse didactique (composante cognitive et composante médiative) puis une prise en compte des autres composantes : institutionnelle, sociale et personnelle. Des éléments de la théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau 1998, Perrin-Glorian et Hersant 2003, Margolinas 1992) sont utilisés pour l'analyse didactique. Le recueil de données comprend des entretiens à chaud avec les deux enseignants (qui suivent le même scénario, celui prescrit par le manuel), des productions des élèves, des informations sur les séances supplémentaires ou complémentaires effectuées, et, ce qui est la source principale du corpus, de l'ensemble des séances filmées[10]. Concernant ce dernier point, le travail consiste à définir des indicateurs utiles pour répondre à la problématique. De manière concrète, il s'agit, à partir des enregistrements vidéos, d'effectuer un découpage des séances d'un grain assez gros (phase de lancement, de réalisation de la tâche par les élèves, de mise en commun) puis, plus fin, avec des épisodes (par exemple des échanges entre l'enseignant et un ou quelques élèves concernant la validité de leur réponse). Les différents emplois des nombres sont repérés et analysés comme mettant en jeu telle ou telle interprétation de la numération telle que définie précédemment dans la thèse. Les incidents didactiques (Rogalski 2003, Roditi 2005) sont aussi relevés et analysés. L'ensemble de ce travail constitue un important corpus d'informations et d'analyses préalables agencées chronologiquement et replacées dans la dynamique des séances.

3.2 Eléments de réponses aux questions posées

Des interprétations différentes des signes des numérations

Il a été constaté des emplois fréquents de signifiants du nombre (en particulier les signes de la numération orale et ceux de la numération écrite) qui renvoient à des interprétations différentes. Ainsi, un même signe peut être utilisé plusieurs fois par une même personne (élève ou enseignant) et dans des temps rapprochés, en faisant référence à deux interprétations différentes. Par ailleurs, au cours d'un échange deux personnes (élève ou enseignant) peuvent convoquer deux interprétations différentes du même signe, sans que celles-ci ne soient explicites. C'est dans ce sens que l'emploi des signes des numérations constitue des sources de confusion. Ces confusions sont analysées comme ne favorisant pas le lien entre la connaissance (des élèves) et le savoir visé (Conne 1992), tel qu'il est envisagé dans l'itinéraire cognitif d'enseignement adopté par le manuel. Elles peuvent ainsi constituer des sources de difficultés pour l'enseignement.

Une organisation des déroulements via les composantes de la double approche : de l'effet bouclage

Les enseignants observés ont parfois l'occasion de dissiper certaines confusions. Ces occasions se présentent de différentes manières (et plus ou moins fréquemment) dans les deux classes. Elles surviennent cependant principalement au moment des échanges privés entre l'enseignant et un élève ou un petit groupe d'élèves, et presque exclusivement pendant la phase de réalisation de la tâche des élèves, quand l'enseignant passe dans les rangs. Dans la troisième séance, la conduite de la classe par les deux enseignants comporte des points communs, jusque-là relativement peu remarquables, durant un moment particulier, celui de la validation les réponses des élèves suivi du lien avec le savoir visé. Au cours de cette séance 3, les élèves connaissent le nombre de boutons à commander (via une écriture chiffrée qu'ils lisent). La tâche consiste toujours à indiquer sur un bon de commande la quantité de boutons qu'il faut commander pour réparer le Ziglotron, en termes de paquets de dix et de boutons « tout seuls » (neuf au maximum).

[10] Dans le cadre de la double approche, il s'agit d'étudier l'activité potentielle (des enseignants, des élèves) provoquée par des tâches.

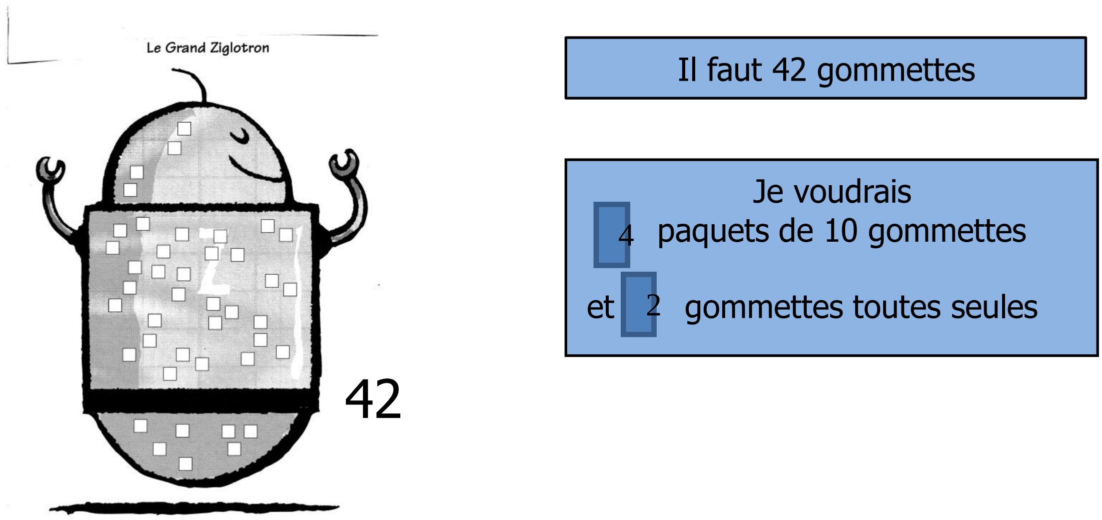


Figure 6 : le matériel et la réponse discutée dans la séance 3

L'exemple illustré par la figure 6 est contextualisé en utilisant les mots employés dans une des classes, celle qui utilise des gommettes, mais ce qui est relaté est valable pour les deux classes. La réponse « 4 paquets de 10 gommettes et 2 gommettes toutes seules » est l'objet de la validation. Elle prend la forme d'une explication à l'initiative de l'enseignant du type : « quatre paquets ça fait quarante : dix, vingt, trente, quarante. Et pour quarante-deux, il faut encore deux ». Valider la réponse à partir de son expression (« 4 paquets de 10 gommettes et 2 gommettes toutes seules ») comme il a été observé en classe, permet d'utiliser des connaissances anciennes des élèves, ici une interprétation ordinale ou/et additive : « dix, vingt, trente, quarante ; quarante et deux ». Cependant la tâche met l'accent sur le passage de « quarante-deux » (l'information que les élèves ont via « 42 ») à « quatre paquets de dix et deux » (le bon de commande à remplir) et non l'inverse. Elle induit donc un travail qui permet d'interpréter la numération parlée de manière multiplicative. Ainsi, la forme prise par la validation dans les deux classes ne va pas dans le sens de l'itinéraire d'enseignement et de surcroît ne reprend pas les procédures des élèves. Pourtant, dans les autres séances, à l'inverse de ce qui est constaté ici, les enseignants observés laissent les élèves indiquer leurs procédures. Par ailleurs, à la suite de la séance 3, conformément au scénario proposé dans le manuel, les professeurs engagent les élèves à faire le lien entre l'écriture chiffrée « 42 » et le bon de commande « 4 paquets de 10 gommettes et deux gommettes toutes seules ». L'objectif est en effet de relier une interprétation multiplicative de la numération parlée aux chiffres de l'écriture chiffrée de cette numération. Dans aucune des classes les élèves ne font le lien attendu, et les enseignants vont (finalement) le leur indiquer, soit à partir de l'exemple de la séance 3, soit en utilisant les exercices de la séance 4.
La thèse n'analyse pas ce constat en termes de conséquences sur l'apprentissage. Le but est d'estimer le poids relatifs des facteurs qui interviennent afin de comprendre les similitudes relevées dans les déroulements. Au cours d'une intervention publique, concernant tous les élèves simultanément, les enseignants font en sorte que ces derniers valident tous l'exactitude de la réponse étudiée. Ils recourent à des connaissances anciennes susceptibles d'être partagées par tous, connaissances qui convoquent dans le cas présent des interprétations additives ou ordinales. Dans le cadre de la double approche, ces constats sont analysés tout d'abord comme une réduction de marges de manœuvre pour l'enseignant lorsqu'il réalise des

gestes professionnels dans une phase collective particulière du déroulement en classe : c'est l'effet bouclage. L'effet est conditionné par des facteurs relevant des composantes sociale, institutionnelle (des gestes professionnels en classe « ordinaire » (Butlen, Charles-Pézard et Masselot 2011)) et cognitive (des spécificités du savoir en jeu et des tâches proposées aux élèves). La dénomination « effet bouclage » vient du fait que cette phase a été analysée par un outil appelé « phase de bouclage »[11]. Les confusions qui sont constatées sont à replacer ainsi au regard des marges de manœuvre « restantes » investies par l'enseignant (composante personnelle) et du savoir en jeu (composante cognitive). En utilisant les composantes de la double approche, dans le cadre de la réponse donnée à la deuxième question posée dans sa dernière partie, la thèse propose donc une organisation qui donne à comprendre certains déroulements. Le tableau suivant synthétise cette organisation.

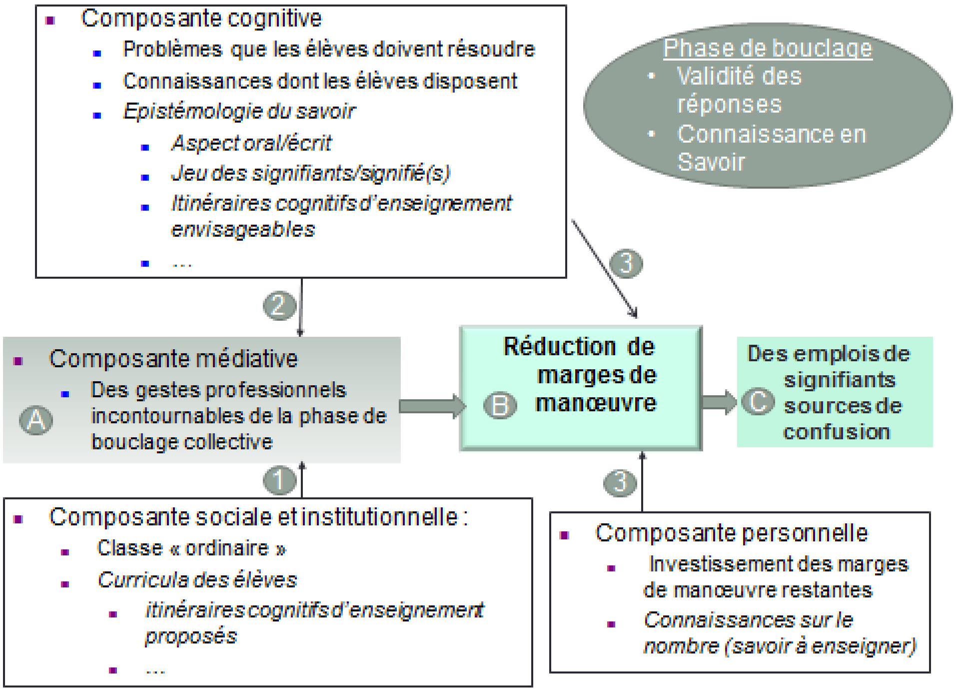


Figure 7 : une analyse en trois étapes A, B, C

Les emplois de signifiants sources de confusions sont une conséquence de l'effet bouclage

Flèche (1) menant à l'étape A : le fait de faire classe en contexte « ordinaire » engage l'enseignant à des gestes professionnels dans des moments collectifs analysables par l'outil « phase de bouclage » (validation, transformation de la connaissance en savoir).
Flèche (2) menant à l'étape B : des éléments venant de la composante cognitive jouent sur les marges de manœuvre : c'est l'effet bouclage. En effet les tâches proposées aux élèves favorisent la mobilisation de certaines connaissances, alors que la validation est accessible à tous les élèves via des connaissances qui sont anciennes dans le cas considéré (1er niveau de conclusion). En outre les connaissances en jeu conditionnent les liens possibles avec le savoir visé (2ème niveau de conclusion).

[11] La « phase de bouclage » fait référence à la phase de conclusion définie par Margolinas (1992) et aux définitions de la connaissance et du savoir de Conne (1992). Deux niveaux de conclusion (liés) sont identifiés : l'accès des élèves à la validité de leur réponse et la transformation de la connaissance en savoir. Dans le contexte de la séquence étudiée, ce deuxième niveau est caractérisé par la mise en évidence de l'interprétation multiplicative de la numération parlée (qui est liée au premier niveau, l'accès des élèves à la validité de leur réponse) et de la « justification » (ici partielle) de la constitution de l'écriture chiffrée (vue comme forme écrite d'une désignation orale).

Flèches (3) menant à l'étape C : l'enseignant investit les marges de manœuvres selon ses propres connaissances sur le savoir à enseigner. Intervient aussi la nature de ce savoir. Dans le cas des séances observées, les connaissances anciennes sont mobilisées à propos d'un signifiant du nombre déjà connu des élèves (« 42 »). Elles engagent à le voir comme une transcription par écrit des mots de la numération parlée (« quarante-deux ») interprétée de manière ordinale (avec repérants) ou/et additive. Or le savoir visé met en jeu le lien entre l'écriture chiffrée avec une interprétation multiplicative. C'est ce qui mène à l'utilisation de signifiants analysés comme sources de confusions.

L'effet bouclage rend compte de certains déroulements dans le cadre de la double approche. Dans la thèse, il concerne l'enseignement de la numération dans deux classes de CP. Sa nature permet d'envisager qu'il puisse devenir un outil pertinent pour des analyses didactiques concernant les déroulements dans d'autres classes de CP, dans des classes autre que le CP et ne se restreignant pas à la numération. Cette question est à l'étude.

Conclusion

Perspectives de recherche

Le dernier chapitre de la thèse définit les éléments principaux d'une ingénierie didactique qui ouvre des perspectives pour la recherche. Les tâches successives proposées aux élèves sont analysées *a priori* dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Les choix sont explicités par rapport aux résultats obtenus dans les chapitres précédents. La tâche principale consiste à comparer le cardinal de collections d'objets de manière perceptive (visuellement). Les quantités augmentent afin de faire apparaître l'organisation des collections comme une solution pour résoudre le problème : les procédures de comptage ne sont pas possibles dans le temps imparti pour réaliser les tâches. La désignation orale des cardinaux des collections n'est donc pas nécessaire, d'autant que la validation se fait par association terme à terme et que la taille des collections (rapidement au-delà de quarante) permet difficilement aux élèves de CP de mobiliser leurs connaissances sur la comptine numérique. Par la suite, les élèves sont amenés à coder par écrit ces organisations de collections[12]. Le système d'écritures chiffrées est mis en perspective par rapport à d'autres possibilités. Dans un deuxième temps il s'agit de leur faire résoudre des problèmes en jouant sur ce qui pourrait constituer deux cadres (Douady 1986) : la numération parlée et la numération écrite chiffrée.

Depuis 2009 la recherche (groupe M615 du LDAR) concerne une ingénierie de développement (Perrin-Glorian 2007). A partir de la proposition de la thèse, une ressource est élaborée en interaction avec des professeurs. Ensuite celle-ci est proposée à d'autres n'ayant pas participé à son élaboration. Il s'agit d'étudier comment ces derniers vont s'en emparer dans le cadre de l'approche documentaire (Gueudet et Trouche 2008). Cette méthodologie permet d'aborder des questions concernant l'enseignement en classes « ordinaires ». Ainsi, outre celles directement liées à la compréhension de la genèse documentaire, certaines questions de recherche portent sur la conceptualisation et l'apprentissage du nombre (du côté des élèves) et d'autres reprennent celles de la thèse, comme la définition de l'effet bouclage (du côté des enseignants). Cette recherche a débuté dans une première classe de CP au sein de laquelle a été élaborée une première version de la ressource. En 2011-2012 une autre classe de CP utilise cette ressource. Des formateurs membres associés du LDAR sont venus compléter l'équipe. A la fin de l'année scolaire 2012, des premiers résultats vont être obtenus concernant la conceptualisation du nombre, alors qu'en septembre 2012 la ressource va être proposée à plusieurs professeurs de CP.

[12] Le code chiffré doit être perçu comme indiquant le nombre d'objets d'une collection, ce qui constitue une difficulté conceptuelle pour les élèves de cet âge (DeBlois 1996).

Questions soulevées dans le séminaire

Ces questions concernent la formation des enseignants et la place de l'ingénierie par rapport aux recherches et propositions antérieures en direction de la classe.

L'analyse proposée (cf. figure 7) met en avant un « effet bouclage », qui place en particulier d'une certaine manière plus en aval l'influence de facteurs relevant de la composante personnelle que d'autres facteurs. La définition de cet effet est encore à préciser pour son emploi en didactique. Dans la thèse, de manière contextualisée, il permet de fournir un moyen de comprendre (dans le cadre théorique adopté) l'apparition de confusions sur les signifiants du nombre. Ces confusions sont analysées comme conséquence en partie de cet effet (le deuxième temps qui mène au B de la figure 7), et pour une autre partie de certains éléments spécifiques de la composante cognitive et personnelle (le troisième temps qui mène au C de la figure 7). « Perturber » le déroulement en classe en jouant sur certains éléments, puis évaluer les conséquences de cette perturbation est un moyen d'étudier le poids relatif de ces facteurs (et donc l'effet bouclage). Plusieurs pistes sont alors envisageables :

- De par leur nature, il semble difficile de modifier les éléments relevant de la composante sociale et de la composante institutionnelle. Dans le cadre de l'enseignement en classe « ordinaire » les gestes professionnels sont analysés comme incontournables pour un enseignant ayant installé une paix scolaire et exerçant une certaine vigilance didactique (Butlen, Charles-Pézard et Masselot 2011). Par ailleurs les programmes scolaires ne sont pas modifiables par le chercheur.
- Il est possible de jouer sur des éléments de la composante cognitive, en particulier l'itinéraire cognitif d'enseignement et les tâches pour réaliser cet itinéraire (y compris leur programmation dans l'année). C'est la voie suivie par le projet exposé ci-avant. A travers la mise en évidence d'un itinéraire d'enseignement de type 3, la thèse a en effet fait ressortir une perspective pour l'enseignement qui est moins explorée. L'ingénierie didactique proposée dans le chapitre 9 utilise ce résultat comme moyen de poursuivre la recherche. Ce n'est pas l'unique possibilité. Une autre solution est d'explorer les autres itinéraires, par exemple en jouant sur la programmation et la nature des tâches. Il est alors nécessaire de prendre en compte les propositions existantes, par exemple celles des équipes de formateurs et/ou chercheurs.
- Une autre possibilité est de regarder du côté de la composante personnelle des enseignants. Dans le contexte de l'enseignement de la numération au CP, il est par exemple envisageable d'utiliser la formation des enseignants pour appréhender leurs connaissances sur le nombre et d'étudier ensuite leur influence sur le déroulement de séances en classe. Y aura-t-il des confusions ? Sont-elles encore analysables avec l'effet bouclage ?

Pour conclure, les résultats de la thèse et l'ingénierie peuvent être utilisés pour former les enseignants, par exemple en utilisant les relations entre ingénierie et formation décrites par Perrin-Glorian (2007). Cela constitue une perspective intéressante qui pourrait être abordée au niveau recherche une fois l'ingénierie étudiée. La recherche menée peut renseigner sur les connaissances des professeurs des écoles concernant la numération. En particulier, ces connaissances peuvent être mises en relation avec les documents que l'enseignant utilise puisque ces documents conditionnent l'itinéraire d'enseignement et les tâches proposées aux élèves. Ceci peut constituer un apport pour la formation[13].

[13] Des résultats de la recherche sont actuellement diffusés en direction des formateurs d'enseignants (Copirelem), mais aussi des enseignants en formation initiale (dans l'option recherche du master « Education et Métiers de l'enseignement du premier degré » de l'Université Paris-Est Créteil) ou continue (stages en circonscription organisés par l'inspection départementale de Seine-Saint-Denis de l'académie de Créteil).

Références bibliographiques

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BUTLEN D., CHARLES-PÉZARD M. & MASSELOT P. (2011) Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. In *Le travail enseignant au XXIe siècle Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle.* Colloque international INRP.

CAUTY A. (1988) Sémantique de la mise en signes du nombre : une vision ordinale. *Amérindia* 13. Disponible sur : http://celia.cnrs.fr/Fr/Amerindia.htm

CONNE F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(2/3) 221-270.

DEBLOIS L. (1996) Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(1) 71-127.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2).

FUSON K., WEARNE D., HIEBERT J., MURRAY H., HUMAN P., OLIVIER A., CARPENTER T., & FENNEMA E. (1997) Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education* 28(2) 130-162.

GUEUDET G. & TROUCHE L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et Didactique* 2(3) 7-34.

GUITEL G. (1975) *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris : Flammarion.

IFRAH G. (1994) *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Robert Laffont.

MARGOLINAS C. (1992) Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 12(1) 113-158.

MOUNIER E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Paris : LDAR Université Paris.Diderot (Paris 7). Disponible sur : http://tel.archives-ouvertes.fr/

PEIRCE C.S. (1906) *Prolégomènes à une apologie du pragmaticisme*, The Monist, vol.16.

PERRIN-GLORIAN M-J. & HERSANT M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 23(2) 217-276.

PERRIN-GLORIAN M-J., (2007) L'ingénierie comme interface Recherche-Enseignement. In *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Actes de la XV[e] école d'été de didactique des mathématiques. Clermont-Ferrand : La pensée sauvage. 57-78.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques de enseignants de mathématique : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 2/4 505-528.

RODITI E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques, entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'harmattan.

ROGALSKI J. (2003) Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3) 343-388.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10 (2/3) 133-170.

Manuel scolaire :

CHARNAY R., DUSSUC M-P. & MADIER D. (2005) *Cap Maths CP*. Paris : Hatier.

Des approches Franco-Hollandaises en didactique des mathématiques. L'exemple des recherches relatives aux TICE

Paul **DRIJVERS**

Freudenthal Institute, Utrecht University, Utrecht, Pays-Bas

p.drijvers@uu.nl

Résumé

L'enseignement des mathématiques aux Pays-Bas est très influencé par la théorie de 'Realistic Mathematics Education' (RME). Comme méthode de recherche, on y trouve une tradition de 'design research'. En France, l'approche instrumentale avec ses notions de genèse et d'orchestration a beaucoup influencée la recherche sur l'intégration des TICE, ainsi que le rôle du professeur dans ce processus. Comment intégrer ces deux approches, comment 'marier' l'aspect 'design RME' avec la richesse théorique de l'école Française de didactiques des mathématiques ?

Dans la présentation, cette question sera abordée par quelques exemples d'études récentes sur les pratiques des professeurs qui utilisent les TICE dans leur enseignement.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 75(2), 213-234.

Trouche, L. & Drijvers, P. (2010). Handheld technology: Flashback into the future. ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 42(7), 667-681.

Des mathématiques pour enseigner

Analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire

Stéphane Clivaz

Université de Genève et HEP Vaud

stephane.clivaz@hepl.ch

Résumé
La recherche présentée vise à décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants primaires sur leur gestion didactique de tâches mathématiques. Elle s'appuie sur une comparaison à ce sujet entre enseignants chinois et étatsuniens (Ma, 1999), sur les catégories de connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball, Thames & Phelps, 2008), sur la structuration du milieu et sa déclinaison en niveaux d'activité du professeur (Margolinas, 2002), et sur les critères de pertinence mathématique du professeur élaborés par Bloch (2009).
Dans une première partie, des entretiens avec des enseignants vaudois ont permis de mettre en évidence certaines similitudes avec les enseignants interrogés par Ma. Dans une seconde partie, quatre enseignants ont été observés durant leur enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres. Les résultats ont été considérés à plusieurs niveaux d'analyse allant jusqu'au grain très fin de la structuration du milieu. Ils font apparaître des liens entre connaissances mathématiques, pertinence et choix didactiques des enseignants.

Mots clés
connaissances mathématiques, enseignant, enseignement primaire, algorithme de la multiplication, pertinence, structuration du milieu, bifurcation didactique

Cette communication est un aperçu du travail de thèse réalisé sous la direction de Jean-Luc Dorier à l'université de Genève (Clivaz, 2011). Quelques éléments de cadrage et de méthodologie sont présentés en première partie. Les principaux résultats sont ensuite énoncés afin de permettre l'exposition de quelques conclusions.

Introduction

La recherche vise à décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants primaires sur leur gestion didactique de tâches mathématiques.
Au cours des dernières années, les recherches portant sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement ont pris de l'ampleur dans la communauté scientifique internationale (Bednarz & Proulx, 2009). Ce mouvement s'observe également dans le monde francophone, toutefois plus au Québec qu'en Europe.
Si de nombreuses recherches, en particulier étatsuniennes, tentent d'établir un lien entre les connaissances mathématiques des enseignants et les performances des élèves, les résultats

sont souvent mitigés, voire contradictoires. De plus, même quand un effet est mesuré, les mécanismes permettant de décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur leur enseignement restent mystérieux (Hill, Rowan & Ball, 2005, p. 401). Suite aux comparaisons internationales des performances des élèves, certains auteurs ont comparé les connaissances des enseignants. L'étude de Ma (1999) en particulier analyse les connaissances mathématiques d'enseignants chinois et étatsuniens au travers d'un questionnaire mettant les enseignants en situation de classe.
Par ailleurs, si la Théorie des Situations Didactiques (TSD) s'est d'abord axée sur la modélisation de situations d'apprentissage quasi isolées, ne se préoccupant pas de modéliser le rôle du professeur (Bloch, 2005, pp. 59-61), les travaux de didactique des mathématiques francophone étudiant le rôle de l'enseignant se développent depuis les années 1980. Selon Bloch (1999, p. 139), il y a ici la possibilité de permettre l'étude de la contingence, en particulier en tentant d'identifier les connaissances dont l'enseignant a besoin pour gérer une situation d'enseignement/apprentissage. Plusieurs études mettent particulièrement en évidence les connaissances du professeur (Bloch, 2009; Comiti, Grenier & Margolinas, 1995; Coppé, 2007; Grugeon, 2008; Margolinas, 1992; Margolinas, Coulange & Bessot, 2005; Pian, 1999; Robert, 2001; Robert, 2005).

Cadre théorique

Le cadre théorique de la recherche s'appuie sur la structuration du milieu (Margolinas, 1995) et sa déclinaison en niveaux d'activité du professeur (Margolinas, 2002), sur les catégories de connaissances mathématiques (Ball *et al.*, 2008) et sur les critère de pertinence mathématique du professeur élaborés par Bloch (2009).

Les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement

Ball, Thames et Phelps (2008) proposent de classifier les différentes *Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement* (CME) selon le découpage suivant :
Connaissances du sujet :

- Connaissances Mathématiques Communes
- Connaissance de l'Horizon Mathématique
- Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement

Connaissances pédagogiques du contenu :

- Connaissances du Contenu et de l'enseignement du sujet
- Connaissances des Elèves et de l'apprentissage du sujet
- Connaissances des Programmes et des moyens d'enseignement[1]. (p. 403)

Les Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement sont des connaissances mathématiques dont ne disposent pas d'autres professionnels utilisant les mathématiques. C'est le cas par exemple quand il s'agit d'expliquer pourquoi « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro », quand il faut analyser des erreurs d'élèves ou quand il faut décider si une procédure originale proposée par un élève est correcte. Une situation particulière nécessitant ces connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement est celle de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication (Ball, Hill & Bass, 2005, pp. 17-21). Ces Connaissances Mathématiques Spécifiques se distinguent des Connaissances Mathématiques Communes, mais aussi des connaissances pédagogiques du contenu :

> Knowing mathematics for teaching demands a kind of depth and detail that goes well beyond what is needed to carry out the algorithm reliably. […] Important to note is that each of these common tasks of teaching involves mathematical reasoning as much as it

[1] Ma traduction des termes de (Ball *et al.*, 2008).

does pedagogical thinking[2]. (Ball et al., 2005, p. 21)

La pertinence mathématique

Afin de distinguer les effets des connaissances mathématiques de l'enseignant, Bloch (2009) propose quant à elle de distinguer divers degrés de *pertinence mathématique des interventions du professeur* selon les trois critères suivants :

> C1 : […] capacité à interagir avec les élèves sur des éléments mathématiques de la situation et à encourager l'activité des élèves par des interventions et des retours sur leur production mathématique
>
> C2 : […] tolérance aux formulations provisoires et approximatives, aux expressions dans l'action, et la capacité à reconnaître les idées mathématiques qui sont incluses dans des ostensifs non canoniques
>
> C3 : […] aptitude à conduire la situation à son terme avec une phase de débat et validation ; ceci inclut la capacité à sélectionner des formulations et à en laisser d'autres de côté, et à gérer la chronologie du débat sans le tuer par l'énoncé immédiat des meilleures productions ou du savoir visé. (p. 33)

Ces trois critères permettent ainsi d'évaluer les connaissances de la matière de l'enseignant en fonction de la manière dont elles conduisent à mettre en place une organisation didactique.

La structuration du milieu

En vue d'analyser ces connaissances et leurs effets, tant sur la mise en place d'organisations didactiques que sur les interactions en classe, nous avons utilisé le modèle de structuration du milieu. Ce modèle a été développé par Margolinas (1992) qui a enrichi la structuration de Brousseau (1986) pour analyser les activités usuelles du professeur et *démêler* des pratiques qui sont imbriquées.

M_{+3}: M-Construction		P_{+3}: P-Noosphérien	S_{+3}: Situation noosphérienne
M_{+2}: M-Projet		P_{+2}: P-Constructeur	S_{+2}: Sit. de construction
M_{+1}: M-Didactique	E_{+1}: E-Réflexif	P_{+1}: P-Projeteur	S_{+1}: Sit. de projet
M_0: M-Apprentissage	**E_0: Elève**	**P_0: Professeur**	**S_0: Situation didactique**
M_{-1}: M-Référence	E_{-1}: E-Apprenant	P_{-1}: P-Observateur	S_{-1}: Sit. d'apprentissage
M_{-2}: M-Objectif	E_{-2}: E-Agissant		S_{-2}: Sit. de référence
M_{-3}: M-Matériel	E_{-3}: E-Objectif		S_{-3}: Sit. objective

Tableau 1 – Structuration du milieu (Margolinas, 2002, p. 145)

Les niveaux d'activité du professeur et les situations ne sont pas réduits au temps de la leçon en classe, même si certaines phases d'une situation didactique sont partiellement caractérisées par des situations de niveaux différents. Elles ne sont pas non plus temporellement successives (Margolinas, 1995, p. 96), et chaque niveau peut être considéré dans le présent de l'action, mais aussi dans le passé ou le futur. Par exemple, durant le travail en classe, le professeur peut travailler au niveau +1 en projetant une future leçon ou en se souvenant de son travail passé de préparation. De la même manière, il est en tension entre son ambition, qu'elle concerne la leçon (niveau +1), le thème (niveau +2) ou plus généralement l'enseignement (niveau +3) et ce qu'il pense que les élèves pourront répondre (niveau 0) ou la façon dont il souhaite les observer (niveau -1) (Margolinas, 2004, p. 75). La situation didactique S_0 peut ainsi être déterminée soit par une analyse ascendante, de S_{-3} à S_0, du point de vue de l'élève, soit par une analyse descendante, de S_3 à S_0, du point de vue du professeur. Il peut arriver que ces deux situations ne correspondent pas. Margolinas parle alors de bifurcations didactiques (2004, pp. 59-63).

---

[2] « Connaître des mathématiques en vue de les enseigner demande un type de profondeur et de détail qui va bien au delà de ce qui est nécessaire pour effectuer l'algorithme de manière fiable. […] Il est important de remarquer que chacune de ces tâches ordinaires d'enseignement implique un raisonnement *mathématique* autant qu'une pensée pédagogique ». L'italique est de Ball et ses collègues, la traduction est la mienne.

Questions de recherche

Les questions de recherche sont :

1. Quelles sont les connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants vaudois ?
2. En mathématiques et pour des enseignants généralistes, à quels niveaux d'activité du professeur les différents types de connaissances mathématiques pour l'enseignement se manifestent-ils ?
3. Quels effets les différents types de connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants ont-ils sur la pertinence mathématique de leurs interventions et sur l'organisation didactique de leurs cours de mathématiques à l'école primaire ?

Méthodologie

Le dispositif de recherche comporte deux parties. Dans une première partie, au moyen d'un entretien semi-dirigé repris, en partie, de Ma (1999), mettant en scène des situations d'enseignement et nécessitant le recours aux connaissances mathématiques de l'enseignant, 16 enseignants primaires vaudois ont été interrogés et leurs connaissances ont été comparées à celles relevées par Ma auprès d'enseignants chinois et étatsuniens.

Dans une seconde partie, nous avons observé toutes les leçons à propos de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres chez quatre enseignants de 4ème primaire[3]. Le nombre de séances varie entre deux et neuf. Il s'agit d'une observation de type « naturaliste » (Comiti *et al.*, 1995, pp. 98-99), c'est-à-dire que nous ne sommes pas intervenus sur le choix des activités laissé au libre arbitre de chaque enseignant. Les observations ont été précédées et suivie d'un entretien semi-dirigé. Les leçons ont été filmées (caméra en fond de classe et micro cravate pour l'enseignant) et quelques passages significatifs du point de vue des connaissances mathématiques pour l'enseignement ont été mis en évidence. Les enregistrements des séquences et des entretiens ont été traités à l'aide du logiciel Transana (Fassnacht & Woods, 2002-2011) afin de relever pour chaque extrait le niveau d'activité du professeur et, pour les passages où des connaissances mathématiques sont utilisées, leur type et leur pertinence. Ces extraits peuvent être situés dans la séquence grâce à la réalisation d'un synopsis (Schneuwly, Dolz & Ronveaux, 2006) et d'une macrostructure (Dolz & Toulou, 2008).

Résultats

Les résultats obtenus sont de quatre types, esquissés maintenant en allant vers un grain d'analyse de plus en plus fin.

Les connaissances de mathématiques fondamentales des enseignants vaudois

Le premier type de résultats concerne le prolongement de la comparaison internationale de Ma. Cette comparaison conduisait à opposer les enseignants étatsuniens et les enseignants chinois sur presque toutes les caractéristiques de leurs connaissances des mathématiques élémentaires et de l'usage qu'ils en font pour l'enseignement. Notre étude tend à situer les enseignants vaudois interrogés entre ces deux extrêmes, ce que nous illustrons par une des questions tirées de l'étude de Ma (1999) concernant l'algorithme de la soustraction et l'usage de l'analogie de l'échange.

[3] 4ème primaire, ou 4P : élèves de 9 à 10 ans, équivalent CM1 en France.

Prenons quelques instants pour réfléchir à un sujet particulier avec lequel vous pourriez avoir à travailler quand vous enseignez : l'algorithme de soustraction par échange.
Examinons ces questions :

$$\begin{array}{rrr} 52 & 91 & 102 \\ \underline{-25} & \underline{-79} & \underline{-15} \end{array} \quad \text{etc.}$$

Comment approcheriez-vous ces calculs si vous enseigniez en 3e primaire ? Que pensez-vous que des enfants devraient comprendre ou être capables de faire avant de pouvoir commencer à apprendre la soustraction avec échanges ?

Lors des entretiens, la plupart des enseignants ont débuté par ce qu'ils souhaitaient que leurs élèves apprennent. Pour les enseignants étatsuniens, il s'agit très majoritairement (83%) de la technique de calcul et ils l'expriment sous forme d'un emprunt au groupement d'ordre supérieur. Les enseignants chinois en revanche privilégient la compréhension, en axant leurs explications sur la décomposition de l'entité supérieure (51%), voire en donnant plusieurs décompositions (35%)[4]. Les enseignants vaudois interrogés se situent à mi-chemin. 55% d'entre eux privilégient la technique et l'illustrent par l'idée d'emprunt. 45% mettent en avant la compréhension en parlant de décomposition. Aucun d'entre eux n'utilise plusieurs décompositions.

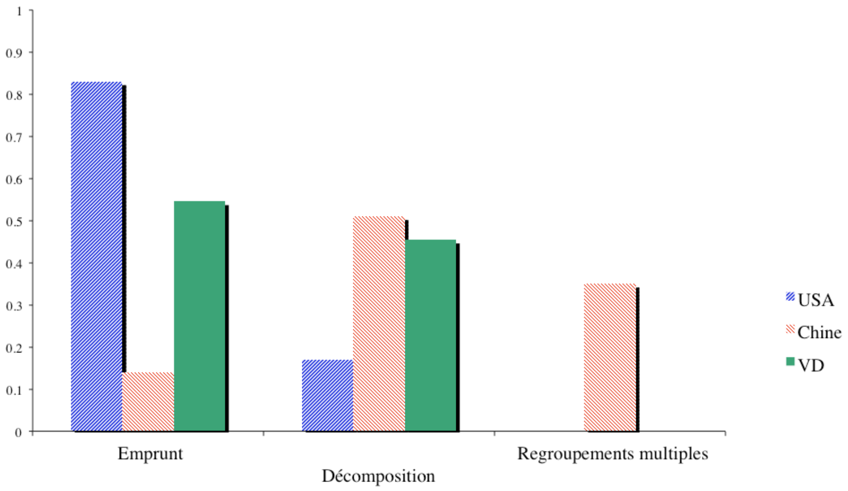


Figure 1 : Compréhension de la soustraction avec retenues.

La présentation de la soustraction avec retenue par les enseignants vaudois interrogés utilise souvent des images. La plus courante est celle d'un emprunt chez le voisin ou chez la voisine. Cette image est à la fois mathématiquement incorrecte et dangereuse car elle incite à penser que les chiffres d'un nombre sont indépendants et qu'un nombre peut changer arbitrairement au cours du calcul. Ce danger est illustré par les déclarations de plusieurs enseignants, par exemple celle de Kate :

> Je leur donne la technique que, quand ils ont pas assez dans leur réserve, ils doivent aller chercher des réserves ailleurs. Donc, Madame unité qui est toute seule, doit aller chercher des réserves chez sa copine la dizaine, qui en a tout plein à côté. Donc elle traverse la rue, elle frappe à la porte : "Toc, toc... Bonjour, les dizaines, j'aurais besoin de réserves, parce que je dois faire une grosse livraison et j'ai pas assez". Comme la dizaine est sympa parce qu'elle en a 9, elle va lui donner une dizaine. Mais l'unité ne peut pas amener une dizaine chez elle, elle doit la transformer en unités, donc elle va ramener 10 unités à la maison, puis,

[4] Par exemple pour 53-26 = 53-(20+3+3) = 53-20-3-3 = 50-20-3 = 47-20 = 27

comme elle en a déjà une, ça fait 11... Donc là j'explique aux enfants de ... Je leur dis que notre dizaine qui en avait 9, elle en a plus que 8, parce qu'elle a été sympa et elle en a donné une dizaine à ses copines, à sa copine l'unité... L'unité, elle transforme cette dizaine en unités, donc il y en à 10, mais elle en avait déjà une. Donc elle en a maintenant 11. Parce qu'elle a fait 10 plus 1, et puis souvent au début je leur met ça en haut pour les aider (Kate écrit, voir Figure 2). Et puis après, on peut soustraire comme on le faisait, et puis on fait 11 moins 9. Ce qui donne 2 et on va faire 8 moins 7, ce qui donne 1.

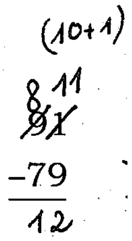


Figure 2 : Soustraction écrit par Kate

Outre les questions suscitées par l'idée d'emprunt, le problème posé quant à la conception du nombre et de son écriture se cristallise dans l'hésitation entre le singulier et le pluriel à propos des mots dizaine et unité. Pour Kate, la fameuse voisine est à la fois LA dizaine, c'est à dire la colonne, celle qui possède LES dizaines et à la fois LES dizaines. Kate n'est toutefois pas consciente de la difficulté et déclare que cela n'a jamais posé problème pour les élèves. De manière similaire, Martin considère que l'objection du remboursement de l'emprunt est un faux problème et qu'il faut être généreux. L'analogie devient ici plus forte que la rationalité mathématique et l'éthique devient un argument quasiment mathématique. Cette analogie cohabite d'ailleurs fort bien avec un argument d'autorité sur le fait qu'il est « impossible » d'enlever 5 à 2… du moins en 3P.
Cette question de l'impossibilité de soustraire 5 de 2 est d'ailleurs l'occasion pour la plupart des enseignants de justifier, quand ils l'utilisent, d'où vient cet emprunt. C'est le cas de Gaëlle :

> Je parle souvent de bonbons, parce que je trouve que ça marche assez bien, que c'est plus représentatif, et puis je leur dis que si ils ont 2 bonbons, ils ne peuvent pas en manger 5. […] Je leur dis que si ils sont 5 copains, et qu'il n'y a que deux bonbons, ben ça va être difficile de les partager, donc il faut aller... je leur explique qu'on va aller chercher, on va aller en chercher chez le voisin pour pouvoir en avoir plus...

Cette enseignante, qui par ailleurs est celle qui crée le plus de liens entre les diverses notions en jeu, ajoute à la confusion sur l'emprunt, celle entre la soustraction et la division-partage. Ces confusions indiquent bien une compréhension superficielle de l'algorithme et des notions en jeu. Cependant ce manque de compréhension est masqué par un fort recours à des analogies ou à du matériel, qui sont ici mal choisis et ne sont pas « représentatifs » de la notion qui pose problème, ici celle du regroupement par 10, alors même que Gaëlle affirme utiliser ce matériel pour que les élèves « puissent comprendre ».

Sur l'ensemble des quatre questions constituant l'entretien, les enseignants vaudois interrogés se rapprochent de leurs collègues chinois de par leur capacité à faire des liens entre notions mathématiques ou par leur usage adéquat des manipulations, du matériel ou des représentations d'opérations. Ils essayent de résoudre eux-mêmes des problèmes mathématiques. Cependant, les liens entre notions sont moins bien ordonnés, les conséquences de ces liens sur la construction des apprentissages ne sont pas exprimées, l'usage du matériel est moins discuté et les représentations sont moins riches. Ils font également preuve de moins de richesse et de rigueur que les enseignants chinois dans leurs démarche d'investigation et dans leur argumentation. Sur d'autres points, au contraire, les enseignants vaudois ont des caractéristiques plus proches des enseignants étatsuniens. Ainsi, ils mettent souvent au premier plan le discours et les justifications pédagogiques au détriment du discours et des arguments mathématiques. Leur discours est mal ordonné et le lien entre la résolution d'un problème mathématique et l'apprentissage des notions contenues dans ce problème n'est pas fait.

Les corrélations entre les CME et la pertinence

Les résultats suivants concernent les observations de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication. La deuxième série de résultats concerne la corrélation entre les types de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement (CME) et la pertinence. Plus de 17 heures de séances et 11h30 d'entretiens ont été traitées. Environ 80% des données ont fait l'objet d'un découpage en près de 800 épisodes et ont été codées selon le niveau d'activité de l'enseignant, selon les catégories de CME présentes et selon la pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Les parties non codées dans les entretiens correspondent aux moments de salutation ou de rappel des conditions de la recherche. Celles non codées des séances de classe sont des moments durant lesquels l'enseignant n'est pas dans une position didactique, mais dans une pure position de gestion de classe. Une première analyse statistique permet de mettre en évidence des corrélations significatives entre la présence des diverses catégories de CME et la pertinence des interventions de l'enseignant. En particulier une corrélation forte apparaît entre la présence dans un épisode d'une Connaissance Mathématique Spécifique à l'enseignement correcte et la manifestation de la pertinence mathématique. Ce lien n'existe en revanche pas pour les autres types de CME. En particulier, d'un point de vue statistique, les Connaissances Mathématiques Communes correctes ne sont liées à une manifestation de pertinence que quand elles sont présentes conjointement à d'autres CME correctes ou, dans une moindre mesure, quand elles sont seules présentes. En revanche une Connaissance Mathématique Commune correcte présente en même temps qu'une autre CME erronée, particulièrement d'une Connaissance Mathématique Spécifique erronée, est liée le plus souvent à la non-pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Cela suggère que les Connaissances Mathématiques Communes ne génèrent de la pertinence mathématique que quand elles sont liées à d'autres connaissances mathématiques pour l'enseignement.

L'analyse par enseignant et la comparaison des moments particuliers

La troisième série de résultats porte sur une analyse par enseignant et une comparaison de moments particuliers entre les quatre enseignants observés. Elle sera l'objet du texte présenté au GT1 d'EMF 2012 (Clivaz, 2012).

La mise en évidence de bifurcations didactiques

Le quatrième type de résultat porte sur l'analyse fine d'un épisode de 27 minutes qui a été menée en terme de structuration du milieu. Cet épisode est extrait d'une suite de 7 leçons que Dominique donne dans sa classe de 4P.

L'analyse *a priori* détaillée est faite d'un double point de vue. Celui de l'enseignant dans un mouvement descendant et celui de l'élève d'un point de vue ascendant. Une analyse *a posteriori* permet ensuite d'interpréter l'épisode enregistré et de chercher les causes des phénomènes observés dans les CME de l'enseignant et leur pertinence. Seules certaines parties de l'analyse ascendante et l'interprétation en terme de CME sont détaillées ici, les autres sont uniquement évoquées.

Analyse descendante

L'analyse descendante a priori du point de vue de l'enseignant permet la détermination de la situation didactique S_0. Elle permet également de montrer comment les CME de l'enseignant se déclinent à chaque niveau et conduisent Dominique à envisager une situation didactique dans laquelle il montrera tout d'abord une multiplication en tableau (voir Figure 3), puis la multiplication en colonnes usuelle en faisant le parallèle entre le résultat de chaque ligne du tableau et la ligne correspondante de la multiplication en colonnes.

Analyse ascendante

L'analyse ascendante *a priori* du point de vue de l'élève conduit à considérer, à partir du milieu matériel mis en place par l'enseignant, six situations de niveau 0.

Niveau -3 : Situation objective

Selon Margolinas (1995, p. 99) le milieu matériel M_{-3} pour E_{-3} doit contenir les éléments nécessaires pour entrer dans la question. La situation est non finalisée (Comiti *et al.*, 1995, p. 106). M_{-3} est donc constitué de la description « brute » de l'algorithme donnée par l'enseignant sur un exemple et par les connaissances anciennes et, en principe, mobilisables d'un élève générique.
Parmi ces connaissances, E_{-3} sait effectuer une addition en colonnes, ainsi qu'une multiplication par un nombre à un chiffre en colonnes. Il sait que « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro ». Cette *règle du zéro* a été rappelée de multiples fois et « justifiée » par induction à partir de produits connus. Elle est complètement naturalisée pour les élèves. E_{-3} sait que les nombres (implicitement inférieurs à 100) peuvent être décomposés en dizaines et unités. En particulier dans un nombre entre 11 et 19, « le un, c'est pas un, c'est dix ».
Le milieu matériel comprend également la description, donnée par l'enseignant, des algorithmes (en tableau et en colonnes) pour 12x17, ainsi que la description du lien entre les deux algorithmes sur cet exemple. La première ligne du tableau donne le même résultat que la première ligne de la disposition en colonnes, il en va de même pour la deuxième. La somme finale est identique.

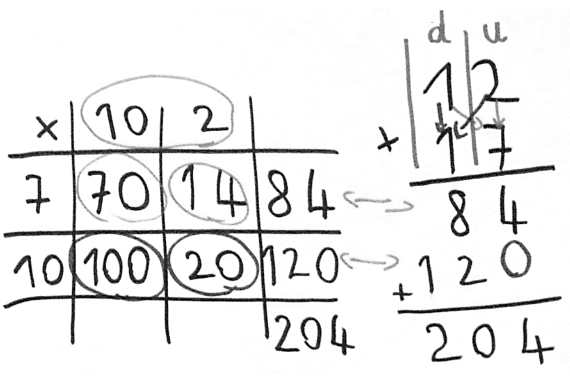


Figure 3 : Lien entre les deux façons d'effectuer la multiplication 12x17, effectuées sur affiche lors de la leçon 4

Niveau -2 : Situation de référence

L'élève E_{-2} est un élève agissant. Pour décrire S_{-2}, il faut trouver un enjeu dont la conclusion puisse être obtenue dans l'interaction de l'élève agissant avec le milieu objectif (Margolinas,

1995, p. 99). Cet enjeu peut donc être de « faire la multiplication » en même temps que l'enseignant qui donne son explication en interrogeant les élèves à chaque étape.
Le milieu M_{-2} est alors constitué de la situation S_{-3} et des explications et connaissances qui s'y trouvent. Il faut y ajouter les justifications que donne l'enseignant et les connaissances du métier d'élève de E, son habitude d'interagir avec cet enseignant et de répondre à ses attentes d'un enseignement par ostension. Les réponses possibles peuvent être déterminées *a priori* à partir des éléments du milieu.
La multiplication 12x17 en tableau est présentée comme une extension de la procédure vue l'année précédente. Selon ce qui est dit par l'enseignant, tant durant cette explication que lors des entretiens, il s'agit là d'une disposition de calcul. Le lien avec le produit cartésien ou l'aire du rectangle (lien dont l'enseignant n'est pas conscient) n'est jamais établi. Chaque produit est calculé pour lui-même, Pour E_{-2}, la *règle du zéro* est appliquée mécaniquement et la somme par ligne, écrite en ligne à la leçon 2, semble évidente. E_{-2} applique cet algorithme en tableau (à une ligne) de façon automatique. Le fait de décomposer le second facteur 17 en 10 et 7 et de créer ainsi une deuxième ligne ne sera pas remis en question. Cette remise en question sera d'autant plus fermée que l'enseignant a prévu de mettre les unités avant les dizaines, en ne le motivant auprès de élèves que par une utilité future pour la multiplication en colonnes. A la suite des deux sommes en ligne, E_{-2}, placé dans un contexte additif effectue par analogie une addition. Il est toutefois possible qu'une incitation de l'enseignant soit nécessaire afin de lui faire faire une opération (il pourrait laisser le tableau en l'état). L'apparition d'une multiplication semble ici peu probable, ne serait-ce que parce que les nombres en jeu (84 et 120) sont plus difficiles à multiplier que les nombres de départ.
La multiplication en colonnes de 12x17 est présentée immédiatement après celle en tableau et disposée à côté de cette dernière. Pourtant, ni le tracé des colonnes pour les dizaines et les unités, ni le fait d'écrire deux lignes en séparant les deux chiffres du 17, ni la façon d'effectuer ces deux lignes n'est rapprochée de la multiplication en tableau. Les deux lignes et la séparation du 17 sont simplement énoncées par l'enseignant et la façon d'effectuer chaque ligne est ramenée à la multiplication en colonnes par un nombre à deux chiffres. Le parallèle est fait exclusivement en comparant le résultat de chaque ligne à la somme obtenue dans le tableau. Face à cette présentation, l'élève agissant E_{-2} va pouvoir investir quatre situations, notées en colonnes dans le Tableau 2. Soit utiliser les mêmes règles d'action que celles énoncées par l'enseignant (correspondance ligne à ligne), soit utiliser les résultats de chaque case du tableau pour établir la ligne correspondante (correspondance produit à produit), soit encore ne pas effectuer la multiplication en colonnes et écrire directement le résultat de chaque ligne, voire le résultat final (utilisation directe du tableau). Il peut également ne faire aucune correspondance et effectuer les deux opérations de façon indépendante (algorithmes indépendants).
Pour ce qui est du zéro de la deuxième ligne, selon l'explication de l'enseignant, il faut « faire 12 fois 1, mais comme il ne s'agit pas de 1, mais de 10, il faut ajouter un zéro ». Ici trois situations S_{-2} semblent possibles. Elles sont notées en ligne dans le Tableau 2. La première serait d'appliquer mécaniquement la « recette » en mettant le zéro et en effectuant la suite de la multiplication (application recette), la deuxième serait de mettre en rapport ce zéro avec ceux figurant comme dernier chiffre dans chaque produit de la deuxième ligne du tableau (correspondance des zéros), la troisième serait de prendre en compte l'explication de l'enseignant, et donc de rajouter un zéro à chaque fois que, dans la multiplication en colonnes, le chiffre représente une dizaine (ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines).
En croisant les réactions possibles sur le lien entre les deux algorithmes et celles sur le zéro, il serait donc possible d'imaginer 12 situations :

			Attitudes par rapport au lien entre les deux algorithmes			
			Correspondance ligne à ligne *L*	Correspon-dance produit à produit *P*	Utilisation directe du tableau *D*	Algorithmes indépendants *I*
Attitudes par rapport au zéro de la deuxième ligne	Application recette	*r*	$\left(S_{-2}\right)_r^L$	$\left(S_{-2}\right)_r^P$	$\left(S_{-2}\right)_r^D$	$\left(S_{-2}\right)_r^I$
	Correspondance des zéros	*z*	$\left(S_{-2}\right)_z^L$	$\left(S_{-2}\right)_z^P$	$\left(S_{-2}\right)_z^D$	$\left(S_{-2}\right)_z^I$
	Ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines	*a*	$\left(S_{-2}\right)_a^L$	$\left(S_{-2}\right)_a^P$	$\left(S_{-2}\right)_a^D$	$\left(S_{-2}\right)_a^I$

Tableau 2 : Situations S_{-2} possibles.

Dans le tableau, chaque situation correspond à une des attitudes possibles par rapport au lien entre les algorithmes (codée en exposant) à une attitude possible par rapport au zéro (codée en indice). Quelques-unes sont décrites ci-dessous.

La situation $\left(S_{-2}\right)_r^L$ représente la situation d'un élève E_{-2} qui verrait une correspondance entre chaque ligne de la multiplication en colonnes et le résultat de chaque ligne du tableau et qui, au moment de commencer la deuxième ligne placerait un zéro sans s'interroger sur la signification de ce zéro. La situation $\left(S_{-2}\right)_z^P$ est celle d'un élève qui mettrait en correspondance chaque case du tableau avec un produit partiel en colonnes, remarquerait donc que les lignes de l'algorithme en colonnes sont déjà le résultat d'une addition, et remarquerait également que chaque produit de la deuxième ligne du tableau se termine par zéro, voire que ce zéro est « ajouté » car on multiplie par un nombre se terminant par 0, et donc que ce zéro est « ajouté » de la même maniée à la deuxième ligne de la multiplication en colonnes. La situation $\left(S_{-2}\right)_a^L$ est paradoxale. D'un côté elle respecte la visée de l'enseignant déterminée par l'analyse descendante, puisqu'elle suppose un élève effectuant une correspondance ligne à ligne et appliquant la *règle du zéro*. D'un autre côté, elle pourrait conduire cet élève à "ajouter un zéro" à chaque fois qu'il travaille avec des dizaines, c'est à dire pour chaque produit partiel de la deuxième ligne, mais aussi pour le deuxième produit de la première ligne. Cette situation est donc mathématiquement incohérente, mais c'est celle qui correspond le mieux au contrat didactique.

D'autres situations sont incohérentes. Par exemple, pour $\left(S_{-2}\right)_a^P$, si l'élève fait une correspondance entre chaque case de la multiplication en tableau et le produit partiel correspondant de la multiplication en colonnes, il ne pourra pas appliquer la *règle du zéro* directement et sans se poser de question. Etant donné que ces situations, en plus d'être incohérentes ne correspondent pas aux intentions de l'enseignant déterminées par l'analyse descendante, elles sont très peu probables, voire impossibles. Ces cases sont grisées dans le tableau ci-dessus.

En revanche une situation n'apparaît pas dans la combinaison des possibilités, puisque E_{-2} peut recopier directement les lignes du tableau sans se préoccuper du zéro. Cette situation est nommée $\left(S_{-2}\right)_*^D$. Le nombre des situations S_{-2} possibles est ainsi de six.

Niveau -1, situation d'apprentissage et niveau 0, situation didactique

La poursuite de l'analyse ascendante permet la détermination de la situation S_0 du point de vue de l'élève et fait ainsi apparaître six situations. Une d'entre elle $\left(S_0\right)_a^L$ semble correspondre à la situation S_0. Cette correspondance n'est toutefois pas complète puisque le fait d' « ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines » n'est appliqué par l'enseignant que pour le

premier produit partiel de la seconde ligne de l'algorithme en colonnes.
En terme de bifurcations didactiques, on ne peut dès lors considérer aucune branche comme principale et toutes les branches sont donc marginales ! De fait, la situation matérielle mise en place ne peut pas conduire à la situation didactique souhaitée par l'enseignant !

Analyse a posteriori

L'analyse *a posteriori* confirme les tensions que ces bifurcations peuvent générer (Clivaz, A paraître). La plupart des élèves se placent dans une situation $(S_0)_r^L$ en utilisant une correspondance ligne à ligne entre les deux algorithmes et en ne s'interrogeant pas sur la signification du zéro à la seconde ligne. Seul un élève, Armand, habitera la situation $(S_0)_a^L$, voulant ajouter un zéro à chaque fois qu'il effectue une multiplication par un chiffre des dizaines. Cette situation n'est pas cohérente. Elle nécessite soit le passage en $(S_0)_r^L$ par l'abandon de la justification « on ajoute un zéro quand on travaille avec des dizaines », soit le passage en $(S_0)_z^P$ pour comprendre cette justification. Le premier passage est obstinément refusé par l'élève qui semble ne pas supporter d'appliquer une recette sans la comprendre. Le second passage est systématiquement évité par l'enseignant qui tente de ramener l'élève à la situation S_0. Mais cette situation de l'enseignant n'est pas compatible avec le milieu matériel mis en place, sauf en modifiant le milieu en appliquant mécaniquement la *règle du zéro*, c'est à dire en rabattant la situation S_0 en situation $(S_0)_r^L$.

Connaissances mathématiques pour l'enseignement, pertinence et bifurcations didactiques

L'analyse *a posteriori*, s'appuyant sur l'analyse *a priori*, montre que la démultiplication des situations de niveau 0 et le sentiment d'incommunicabilité entre ces situations sont causés par certains choix faits par l'enseignant, soit au moment de la détermination de S_0, soit au moment de la mise en place de la situation de référence S_{-3}, mais aussi par l'impuissance de l'enseignant en position P_0 à adapter ses interventions didactiques à la situation de l'élève, ne serait-ce que pour faire évoluer cette dernière. Il s'agit maintenant de reprendre ces choix en les rattachant aux connaissances mathématiques pour l'enseignement de Dominique et à sa pertinence mathématique.
Le premier choix à considérer est celui d'appuyer l'algorithme de la multiplication en colonnes sur celui de la multiplication en tableau en insistant sur la correspondance entre les lignes de l'algorithme en colonnes et les sommes par lignes du tableau. Les connaissances mises en jeux pour faire ce choix sont des connaissances du contenu du point de vue de son enseignement (Connaissance du Contenu et de l'enseignement du sujet, de par la volonté d'expliquer l'algorithme), des connaissances du programme et des moyens d'enseignement (Connaissance des Programmes et des moyens d'enseignement, de par la connaissance de plusieurs algorithmes et de l'usage de l'algorithme en tableau) et des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement enfin (Connaissance Mathématique Spécifique, de par la connaissance de l'algorithme en tableau). Ces connaissances sont correctes. Il est plus difficile d'expliquer le choix de ne pas mettre en évidence la correspondance terme à terme, voire les tentatives d'esquiver cette correspondance. En fait Dominique possède la Connaissance Mathématique Spécifique de cette correspondance, comme il le montre lors des entretiens, mais cette connaissance n'est pas pertinente puisqu'elle ne lui permet pas d'interagir sur les éléments mathématiques de la situation, c'est à dire de se placer dans la situation $(S_0)_z^P$ ou il aurait pu retrouver l'élève Armand dans le passage considéré. La raison de cette absence de pertinence d'une Connaissance Mathématique Spécifique correcte et

apparemment disponible est probablement à chercher dans la représentation qu'a Dominique de la multiplication.

Lors des séances en classe, Dominique affirme à plusieurs reprises que la multiplication est un raccourci de l'addition. Interrogé à ce sujet lors de l'entretien *post*, il répétera cela et ne donnera aucune représentation de type produit cartésien ou aire d'un rectangle. Ainsi la Connaissance Mathématique Spécifique de la multiplication en tableau est purement procédurale, le tableau n'est pas vu comme un produit cartésien, mais comme un endroit où l'on range des produits à additionner ensuite en ligne. Ce manque de compréhension du fondement de la multiplication en tableau va l'empêcher de l'utiliser avec pertinence pour interagir sur les aspects mathématiques de la multiplication en colonnes représentés par la situation $\left(S_0\right)_z^P$.

Le deuxième choix est celui de donner une recette pour la *règle du zéro*. Ce choix pose problème, à la fois dans l'application dans l'algorithme en colonnes puisqu'on n' « ajoute un zéro quand on travaille avec les dizaines » que au début de la deuxième ligne. Il pose également un problème de vocabulaire additif (ajouter) dans une situation multiplicative et est confondu avec l'ajout de la retenue. La non pertinence de la connaissance mathématique commune est ainsi liée dans ce cas à l'absence de la *version spécifique* de cette connaissance.

D'autres choix, plus secondaires, sont faits par l'enseignant et influencent la situation didactique. Il faut mentionner en particulier, parmi les éléments qui déterminent le milieu objectif et par suite les situations successives, le choix des nombres multipliés pour les premières multiplications, tous compris entre 12 et 19. Les raisons de cette option ne sont pas explicitées par Dominique, mais on peut penser qu'il vise une progression dans la difficulté. Ce choix a pour conséquence de rendre la seconde ligne de la multiplication en colonnes triviale, ce que l'enseignant ne mentionne jamais. Il a aussi pour conséquence de donner l'impression de refaire plusieurs fois la même multiplication et par exemple à Armand de poser plusieurs fois la même question, « c'est 1x1 ou 10x10 ? », à propos de plusieurs multiplications.

Conclusion

Les quatre séries de résultats obtenus à des niveaux d'analyse de plus en plus fins mettent en évidence le rôle des connaissances mathématiques des enseignants. Tant dans les entretiens à partir des questions de Ma (1999) que dans les observations de l'enseignement de l'algorithme ou lors des entretiens encadrant ces observations, les choix, envisagés (mais pas forcément mis en œuvre) ou effectifs, des enseignants sont conditionnés par leurs Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement. D'autres variables influencent certainement ces choix : manuels, conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement, conceptions des mathématiques, contexte scolaire… Pourtant les connaissances mathématiques jouent un rôle premier dans le sens où elles rendent possibles ou impossibles des choix en fonction des autres variables. L'absence de certaines Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement relatives à un objet d'enseignement ne permet pas à l'enseignant d'effectuer ses choix en disharmonie avec ses conceptions de l'apprentissage, de l'enseignement ou des mathématiques. Nous avons par ailleurs des indications tangibles qu'au contraire la présence de telles Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement rend les enseignants à même de faire ces choix en harmonie. Comme l'affirmait Ma (p. 36), il est possible pour un enseignant de choisir de donner une explication procédurale s'il possède une compréhension profonde des mathématiques. Il lui est en revanche impossible de donner une explication conceptuelle s'il ne possède qu'une compréhension procédurale d'un sujet. Ce cas de figure, celui d'un enseignant souhaitant donner une explication de type conceptuel alors qu'il ne dispose pas des Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement permettant de décortiquer le fonctionnement d'une procédure mathématique comme un algorithme, peut le conduire à donner des raisons mathématiquement infondées ou à défaut des recettes mnémotechniques, en étant persuadé qu'il interagit avec ses élèves au plan mathématique. Ce phénomène, observé lors des deux parties de notre recherche, est une illustration de l'importance des Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement de l'enseignant pour la pertinence mathématique de ses interventions.

Les réponses à nos trois questions de recherche nous ont permis d'alimenter notre question naïve initiale : qu'est-ce que ça change de connaître les maths quand on les enseigne ? Les éléments de réponse que nous sommes en mesure d'apporter à l'issue de cette thèse retrouvent un caractère un peu naïf. Connaître les mathématiques qu'on enseigne permet de choisir comment on les enseigne. Connaître les mathématiques enseignées donne une liberté pédagogique à l'enseignant.

Références bibliographiques

Ball, D. L., Hill, H. C. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching, who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*(Fall 2005), 14-22, 43-46. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/65072/4/Ball_F05.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389

Bednarz, N. & Proulx, J. (2009). Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement: Clarifications conceptuelles et épistémologiques prenant leur source dans une analyse de la pratique des enseignants. *For the learning of mathematics, 29*(3), 11-17. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://flm.educ.ualberta.ca/BednarzProulx.pdf

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu – connaissances et savoirs. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 135-194.

Bloch, I. (2005). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur : contribution à l'étude et à l'évolution de quelques concepts issus de la théorie des situations didactiques en didactique des mathématiques.* HDR. Paris 7, Paris

Bloch, I. (2009). Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x, 81*, 25-52.

Brousseau, G. (1986). La relation didactique: le milieu. In *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques* IREM de Paris 7.

Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève. Consulté le 27 septembre 2011, dans http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047

Clivaz, S. (2012). Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication, *EMF 2012*. Genève

Clivaz, S. (A paraître). Connaissances mathématiques de l'enseignant et bifurcations didactiques : analyse d’un épisode. *Recherches en didactique*

Comiti, C., Grenier, D. & Margolinas, C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier & A. Tiberghien (Eds.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 91-127). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Coppé, S. (2007). Les connaissances antérieures des professeurs de mathématiques à travers la préparation de séances de classe. Cas de stagiaires en fin de formation initiale. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Année 2006* (pp. 139-168). Paris: IREM Paris 7.

Dolz, J. & Toulou, S. (2008). De la macrostructure de la séquence d’enseignement du texte d’opinion à l’analyse des interactions didactiques. *Travail et formation en éducation*, (1). Consulté le 18 juillet 2011, dans http://tfe.revues.org/index596.html

Fassnacht, C. & Woods, D. K. (2002-2011). Transana (Version 2.42) [Mac]. Madison: University of Wisconsin. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://www.transana.org/

Grugeon, B. (2008). Quelle évolution des pratiques d’un professeur stagiaire de mathématiques pendant son année de formation à l’IUFM. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 383-419). Toulouse: Octarès.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers’ Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Margolinas, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 113-158. Consulté le 24 janvier 2011, dans http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00458309/fr/

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques : actes du Séminaire national 1993-1994*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-155). Grenoble: La Pensée Sauvage. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=m2hj19vrm34e7osqkidopu67k7&view_this_doc=halshs-00421848&version=1

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques.* HDR. Université de Provence - Aix-Marseille I. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580/en/

Margolinas, C., Coulange, L. & Bessot, A. (2005). What Can the Teacher Learn in the Classroom? *Educational Studies in Mathematics, 59*, 205-234.

Pian, J. (1999). *Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels*. Paris: IREM Paris 7.

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21*(1-2), 57-79.

Robert, A. (2005). Recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants du second degré en mathématiques – L’exemple d’une formation de formateur. In C. Castela & C. Houdement (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2005* (pp. 137-176). Paris:

ARDM et IREM de Paris 7.

Schneuwly, B., Dolz, J. & Ronveaux, C. (2006). Le synopsis: un outil pour analyser les objets enseignés. In M.-J. Perrin-Glorian & Y. Reuter (Eds.), *Les méthodes de recherche en didactiques : actes du premier séminaire international sur les méthodes de recherches en didactiques de juin 2005* (pp. 175-189). Villeneuve d'Ascq: Presses univ. du Septentrion.

Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse de pratiques ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires

Magali **HERSANT**

IUFM des Pays de la Loire, CREN, Université de Nantes

magali.hersant@univ-nantes.fr

Résumé
Ce texte reprend la présentation d'une partie de mon HDR (Hersant, 2010a, 2010b). Après avoir rappelé les résultats que j'ai considérés comme fondamentaux pour opérer la bascule d'une recherche sur les pratiques ordinaires d'enseignement des mathématiques vers une recherche sur le développement de situations pour la classe, je présente une ingénierie didactique sur l'entrée dans la rationalité mathématique au cycle 3 de l'école élémentaire.

Mots clés
Contrat didactique, milieu, pratiques ordinaires d'enseignement des mathématiques, ingénierie didactique

1. De l'analyse des pratiques ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires

L'objet de cette première partie est de présenter comment, et aussi un peu pourquoi, mes préoccupations de chercheur ont évolué de recherches sur les pratiques ordinaires vers le développement d'ingénieries pour ces mêmes classes. J'expose un cheminement personnel, ce qui explique le style plutôt narratif du début de ce texte.
Dans mes premiers travaux, et en particulier dans ma thèse (Hersant, 2001), j'ai étudié des pratiques ordinaires d'enseignement des mathématiques à la fin du collège. Les recherches dans ce champ de la didactique des mathématiques, en plein essor à l'époque, étaient développées dans des cadres théoriques différents, notamment la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998 ; Margolinas, 1995) et la double approche – en émergence alors - (Robert et Rogalski, 2002).
Ces premières recherches conduites pour ce qui me concerne dans le cadre de la théorie des situations didactiques ont débouché sur des résultats qui représentent des points d'appui forts pour mes travaux ultérieurs dans la mesure où ils constituent des outils pour rendre compte d'une part importante de la pratique d'un enseignant dans le cas de situations ordinaires et des hypothèses pour penser des ingénieries didactiques destinées aux classes ordinaires.

Le couple (contrat didactique, milieu) pour l'analyse de situations de classe ordinaire

Dans ma thèse sur les pratiques ordinaires au collège j'ai eu à analyser des situations qui présentaient des potentialités adidactiques très différentes. Dans certains cas, ces potentialités étaient pratiquement inexistantes d'où une difficulté à utiliser la structuration du milieu proposée par Margolinas (1995). Le concept de contrat didactique (Brousseau, 1998 ; 1996) s'est avéré particulièrement intéressant pour ces cas, à condition de le développer un peu. Repartant des précisions de Brousseau (1996) et de premières propositions de Comiti et Grenier (1996, 1997) pour utiliser ce concept dans l'analyse de situations de classes ordinaires, j'ai identifié quatre composantes du contrat didactique (domaine mathématique, caractéristiques méso-génétiques de la situation, statut didactique du savoir, répartition des responsabilités) et proposé une structuration du contrat didactique en micro, méso, macro contrats. A chacun de ces niveaux est associée la stabilité de certaines composantes, à une échelle de durée donnée (Hersant, 2001 ; Perrin-Glorian, Hersant, 2003). Ainsi, une analyse des différentes composantes du contrat au fil de l'avancée d'une séquence permet de caractériser le contrat didactique établi dans la classe, et par là de préciser la pratique de l'enseignant (Hersant, 2004).

De plus, parmi ces composantes, la *réparation des responsabilités* (niveau du micro-contrat) et les *caractéristiques méso-génétiques de la situation*, utilisées conjointement, s'avèrent particulièrement intéressantes pour dégager des caractéristiques des pratiques, que l'on travaille sur une échelle de temps long ou sur une échelle plus courte. En effet, lorsqu'on emploie une méthodologie qui articule analyse *a priori* et analyse *a posteriori* et utilise conjointement les notions de milieu et de contrat didactique (Hersant, 2001 ; Perrin-GLorian, 2003) on peut caractériser la pratique d'un enseignant d'un double point de vue : les choix qu'il fait en termes de situations (quelles potentialités adidactiques des situations choisies ?) ; son jeu dynamique et complémentaire, au cours du déroulement de la séance, sur le milieu et le contrat didactique - deux leviers dont il dispose pour gérer la situation didactique. En procédant ainsi on rend compte d'une part importante de l'action didactique fine déployée par l'enseignant pour faire avancer son projet face à la contingence de la classe, notamment au niveau des processus de dévolution et d'institutionnalisation. C'est pourquoi on peut dire que l'utilisation du couple (contrat didactique, milieu) permet d'établir des résultats sur les pratiques.

Caractérisation de la correction-cours dialogué

L'utilisation conjointe des outils contrat didactique et milieu a permis de caractériser une pratique assez répandue au collège : la correction-cours dialogué (Hersant, 2001 ; Hersant, 2004 ; Hersant et Perrin-Glorian, 2005).

Dans cette pratique l'enseignant s'appuie sur un problème pour réaliser son objectif. Ce problème est choisi de façon telle qu'il ne demande pas l'utilisation du savoir visé mais peut facilement être complété par des questions qui le nécessitent. A partir de ce problème introductif, l'enseignant organise dans la classe un travail en petits groupes sur l'énoncé initial (mobilisation de connaissances anciennes pour les élèves) suivi d'une discussion collective des solutions proposées par les élèves. Au cours de cette discussion, il y a une synthèse des solutions obtenues dans la classe en utilisant les savoirs anciens puis l'enseignant prolonge oralement le problème initial par des questions dont la résolution nécessite le savoir en jeu. Au niveau de cette phase, l'action du professeur est caractéristique à deux endroits. D'une part, l'enseignant accorde de l'intérêt à la plupart des interventions des élèves, y compris lorsque cela le conduit à faire des digressions. Cela distingue cette pratique de l'ostension déguisée que Salin (1999, p. 343-344) caractérise de la façon suivante : « l'enseignant, désireux de s'appuyer sur les connaissances antérieures des élèves, propose les exercices avant la présentation du savoir, et [. . .] il traite les réponses d'une certaine façon : il effectue un tri, parmi elles, pour valoriser celles qui conduisent assez rapidement au savoir visé sans prendre réellement en compte les autres ». D'autre part, lorsqu'il s'appuie sur certains élèves pour faire avancer le savoir dans la classe, l'enseignant laisse le plus souvent au reste de la classe une

part importante de responsabilité dans la validation des productions, il instaure préférentiellement -- il cherche autant que possible à instaurer -- un micro-contrat d'adhésion. Ainsi, le savoir nouveau est introduit comme réponse à un problème mais cette pratique ne correspond pas à une transmission du savoir par des situations. En effet, il n'y a pas de réelle dévolution d'un problème associé à la construction d'un savoir nouveau aux élèves puisque la responsabilité de la production des connaissances et de leur évaluation n'est laissée aux élèves qu'à de rares moments, le professeur privilégiant une résolution collective et guidée du problème, s'appuyant sur quelques élèves de la classe. Dans la suite de la séquence, l'enseignant laisse aux élèves une responsabilité importante dans la résolution d'autres problèmes requérant l'utilisation du savoir nouveau.
Par ailleurs, cette pratique est aussi caractérisée par une institutionnalisation très diluée tout au long de l'enseignement et effectuée uniquement au moment de la correction d'exercices (Hersant, 2004, p. 137 en particulier) : il n'y a pas de moment d'institutionnalisation formelle et de décontextualisation, comme on peut l'observer lorsqu'un enseignant fait une « leçon » et comme on pourrait l'observer dans une pratique d'ostension déguisée. En particulier, le travail de mise en texte du savoir nouveau est quasi-absent : même si l'enseignant indique à l'oral les éléments importants, il n'indique pas aux élèves quoi noter sur leur cahier (en particulier pas de formulation du savoir).

Le jeu sur le couple (contrat didactique, milieu) et l'épistémologie de l'enseignant

Dans la suite de mes travaux, le plus souvent dans des équipes pluridisciplinaires (analyse plurielle au CREN en particulier), j'ai continué à étudier des pratiques dans des situations forcées (des situations proposées par le chercheur à un enseignant) et me suis intéressée à la relation entre le jeu de l'enseignant sur le couple (contrat didactique, milieu) et son épistémologie (au sens de ses connaissances mathématiques).

Dans ma thèse sur l'enseignement de la proportionnalité à la fin du collège, l'une des enseignantes avait participé à la conception d'un logiciel sur la proportionnalité à l'IREM de Rennes avec J. Houdebine et J. Julo qui ont beaucoup travaillé sur cette notion. Elle avait une grande maîtrise didactique de ce domaine. Sa pratique correspondait à la correction-cours dialogué, elle procédait préférentiellement par des aménagements du milieu, ce qui n'était pas du tout le cas de l'autre enseignante qui avait plutôt une pratique de type ostension.

Dans une recherche ultérieure au niveau de l'école élémentaire[1] où les enseignants sont polyvalents, j'ai comparé avec la méthodologie présentée précédemment la pratique d'un professeur des écoles stagiaires (PE2 à l'époque) et d'un enseignant expérimenté à propos d'une même situation « forcée » sur un problème pour chercher (Hersant, à paraître ; Hersant, 2010a, 2010b). La stagiaire avait une licence de mathématiques pures et le maître-formateur n'avait pas de formation scientifique. Dans les moments critiques de la séance, la stagiaire a privilégié autant que possible l'aménagement du milieu au jeu sur la répartition des responsabilités, alors que le maître expérimenté a choisi préférentiellement de prendre une part plus importante de responsabilités.

Ainsi, tout se passe comme si, lorsqu'un enseignant est à l'aise sur une notion, face à la contingence du déroulement de son projet, il choisit préférentiellement d'aménager le milieu, plutôt que de donner la réponse et donc de prendre une part de responsabilité importante dans la production du savoir ou dans son évaluation. Les connaissances mathématiques de

[1] Recherche « Analyse plurielle en mathématiques » réalisée au CREN entre 2003 et février 2009, voir (Hersant, Morin, à paraître).

l'enseignant apparaissent donc comme une des conditions de la dévolution, c'est-à-dire pour que l'élève agisse de façon autonome (comme l'indique Salin) et qu'il se sente responsable de l'obtention du résultat[2].

De ces résultats à des hypothèses pour la conception de situations pour les classes ordinaires

L'étude des pratiques ordinaires répond, dans une certaine mesure, à l'échec de la transmission des ingénieries didactiques, avec l'objectif de mieux y revenir (Perrin-Glorian, 1998). Estimer avoir suffisamment de résultats sur les pratiques ordinaires pour revenir aux ingénieries est délicat : en continuant toujours de chercher, on affinera certainement toujours ces résultats et il ne me semble pas qu'il existe un critère de complétude... Pour cela et certainement parce que la question des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes à l'Ecole m'interpellait, à partir de ces résultats sur les pratiques ordinaires, et sans prétendre avoir fait le tour de la question[3], j'ai envisagé un travail d'ingénierie didactique pour les classes ordinaires. Cela signifie que j'ai considéré les résultats précédents comme représentatifs de certains aspects des pratiques ordinaires et, donc, comme des éléments dont il convient de prendre acte pour proposer aux enseignants des situations dont ils peuvent s'emparer. Autrement dit, je fais l'hypothèse que les résultats précédents renvoient à *des* conditions pour que les enseignants s'approprient l'ingénierie didactique. Quelles sont précisément ces conditions ?

La caractérisation de la correction-cours dialogué met en évidence qu'il n'est pas peut-être pas utile d'avoir des situations à potentialités adidactiques initiales très importantes à partir du moment où l'on peut envisager comment aménager le milieu. Autrement dit, les hypothèses d'apprentissage qui sous-tendent la théorie des situations (Brousseau, 1998) ne correspondent vraisemblablement pas à celles faites par les enseignants, ce qui se comprend tout à fait au vu des différentes contraintes auxquelles ils sont soumis. Si on propose des situations qui peuvent être facilement « complétées » par la suite, comme cela se produit dans la correction-cours dialogué, peut-être qu'elles seront plus facilement appropriées par les enseignants. Mais, d'après le second résultat, l'aménagement du milieu d'une situation n'est pas aussi facile pour tous les enseignants. Il faut donc y penser sérieusement lorsqu'on travaille des situations. Enfin, vraisemblablement, d'après la caractérisation de la correction-cours dialogué, il faut aussi anticiper sur le processus d'institutionnalisation.

2. Une ingénierie pour l'entrée dans la rationalité mathématique au cycle 3

En 2003, l'injonction institutionnelle demandant aux enseignants de l'école primaire, polyvalents, de réaliser dans leur classe des « problèmes pour chercher » *i.e.* des problèmes ouverts (Arsac, Germain et Mante, 1991 ; Arsac, Mante, 2007) a motivé mon passage de l'étude des pratiques ordinaires d'enseignement des mathématiques à l'ingénierie didactique pour les classes ordinaires (Perrin-Glorian, 2011). Ce travail qui comprend une étude épistémologique et didactique préliminaire et des propositions analysées de situations se situe à l'intersection de plusieurs enjeux : l'enseignement de la résolution de problème à l'Ecole, la transposition didactique des pratiques de recherche en mathématiques, l'identification des savoirs associés à ces pratiques, la faisabilité d'un enseignement *de la* résolution de problème.

[2] voir, bien entendu, aussi à ce sujet, dans ce même volume, la contribution de S. Clivaz.
[3] Pour faire le tour de la question, il faudrait reprendre l'ensemble des travaux sur les pratiques ordinaires, effectués avec les différents cadres théoriques qui le permettent (théorie des situations didactiques, double approche, action conjointe…).

Une étude épistémologique et didactique pour dégager un cadre conceptuel

Une étude épistémologique critique du problème ouvert

Les problèmes ouverts sont caractérisés par Arsac, Germain et Mante en 1991 comme une activité qui vise « l'acquisition d'une démarche de résolution » nommée « la démarche scientifique ». Les auteurs proposent ce type d'activité en référence au rôle important joué par les conjectures dans le développement des mathématiques et pour établir « un équilibre entre l'acquisition de connaissances en vue de la résolution de problèmes classiques et l'entraînement à la recherche de problèmes » (Arsac, Mante, 2007, p. 19).

La démarche scientifique est définie de la façon suivante (Arsac, Mante, 2007, p. 22) :

> S'il veut alors résoudre le problème, il [l'élève] va devoir mettre en route la démarche scientifique rappelée ci-dessous :
>
> - faire des essais pour produire une conjecture ;
> - tester sa conjecture en faisant d'autres essais ;
> - prouver la validité de sa conjecture.

D'un point de vue épistémologique, cette définition interroge. N'y a-t-il réellement que cette démarche qui puisse être qualifiée de scientifique en mathématiques ? Vraisemblablement non. Quelle définition de référence les auteurs utilisent-t-ils pour qualifier une démarche de « scientifique » ? L'existence d'essais, de conjectures et de preuve est-elle nécessaire ? Suffisante ? Est-ce là l'essence du scientifique ? Des questions d'ordres didactiques se posent aussi. D'une part, l'enjeu de savoir est « gros » et difficile à travailler : déclarer aux élèves que pour résoudre un problème de façon scientifique il faut faire des essais, formuler une conjecture, la tester et la prouver ne les aidera pas forcément à faire les « bons » essais, à en dégager une conjecture et à savoir ce qu'est une preuve. Une difficulté à expliciter les savoirs associés à la démarche scientifique apparaît donc. Par ailleurs, l'analyse de différents dispositifs qui s'apparentent au problème ouvert (situations de recherche en classe de Grenier et *al*., situations de preuve de Douaire, problèmes pour chercher) et la lecture de différents compte-rendu de réalisation de problèmes ouverts (par exemple dans Arsac, Mante, 2007) montrent une difficulté à articuler esssais-conjecture-preuve et à donner aux essais une place en rapport avec conjecture et preuve.

La référence à Bachelard (1934, 1938, 1949) permet de préciser le qualificatif « scientifique » : le scientifique est caractérisé par un dépassement de l'opinion et la capacité à poser des problèmes ; il est associé à l'apodictique et s'oppose à l'assertorique qui est emprunt de contingence. En mathématiques, la production et la construction de problèmes s'effectuent en particulier lors du passage des essais aux conjectures qui est le lieu premier d'un travail sur l'opinion et l'empirisme naïf dans la mesure où faire des essais et formuler des conjectures à partir de ces essais indique un refus de l'opinion première. De plus, les essais permettent d'établir des faits, de l'ordre du registre empirique, qui permettent de modifier l'opinion et qu'il faut extrapoler en utilisant l'induction et des points de contacts suggestifs au sens de Polya (1958) pour formuler des conjectures à valider ou invalider. Mais pour tirer partie des essais il faut au moins deux conditions : d'une part, il faut qu'une certaine rationalité organise les essais (pas au hasard!) ; d'autre part, pour émettre des conjectures intéressantes, envisager des raisonnements « plausibles » comme le dit Polya, il faut autant que possible éliminer la contingence de ces essais. Ces conditions constituent les mathématiques en une science expérimentale et on les retrouve, par exemple, dans la description que D. Perrin fait de la démarche expérimentale qu'il utilise pour résoudre des problèmes (Perrin, 2007). En résumé (voir Hersant, 2010b, 2012) cela me conduit à poser que :

1. le caractère scientifique d'une démarche tient non seulement à la présence d'expérience(s), de conjecture(s) et de preuve(s) mais aussi et surtout à leur articulation qui permet le dialogue des faits et des raisons dans la recherche et la résolution de problèmes pour distinguer l'assertorique de l'apodictique et comprendre comment ces deux registres faits et raisons contribuent à établir le vrai et le faux en mathématiques ;
2. dans ce dialogue du registre des faits et du registre des raisons, l'expérience tient une place cruciale.

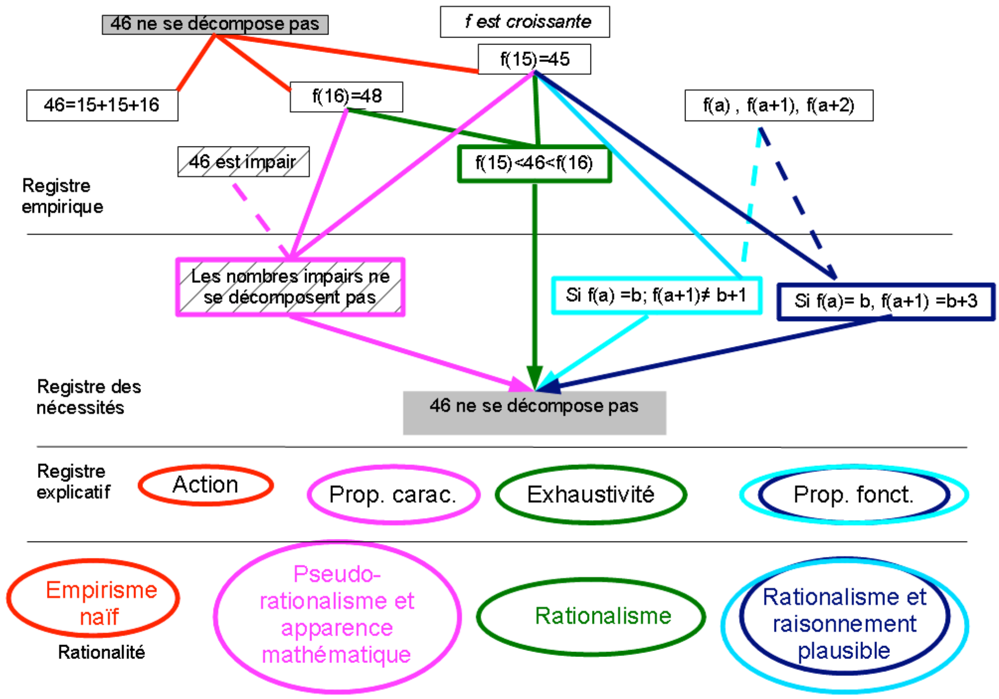
La construction d'un savoir apodictique à partir d'un dialogue du registre des faits et du registre des raisons est caractéristique du cadre de la problématisation développé par Fabre et Orange (Fabre, Orange, 1997). Partant de là, je pose que la formation à la résolution de problèmes en mathématiques consiste, entre autres, à faire évoluer la rationalité des élèves de l'empirisme naïf (au sens de Bachelard, où la connaissance provient uniquement de l'expérience et reste contingente) vers une rationalité qui relève du rationalisme et des mathématiques où la connaissance provient de l'expérience menée et observée avec raison pour en évacuer, autant que possible, la contingence. Cela demande en premier lieu que les élèves apprennent comment, en mathématiques, l'expérience se situe par rapport au registre des faits et au registre des raisons. Ce qui n'est pas forcément facile dans la mesure où le vrai et le faux en mathématiques sont à la fois liés à l'empirique et à la nécessité. Cela permet de formuler des savoirs associés à la résolution de problème en mathématiques qui peuvent être travaillés spécifiquement à travers un choix de problèmes et institutionnalisés, par exemple :

- un fait issu d'une expérience peut invalider une conjecture ou la valider ;
- des faits issus de l'expérience et des raisons extérieures à cette expérience peuvent être tous les deux nécessaires pour valider une conjecture ;
- le registre des raisons associé aux données du problème permet de valider une conjecture, en particulier en utilisant un raisonnement hypothético-déductif.

Avant de construire des situations qui permettent de travailler ces savoirs, il convient de préciser ceux qui semblent utiles et abordables pour les élèves de cycle 3. Cette étape est nécessaire dans la mesure où peu de connaissances issues de travaux didactiques et psychologiques sont disponibles sur le sujet.

Rationalités des élèves de cycle 3

L'analyse des productions individuelles et collectives (orales et écrites) d'élèves permet de travailler sur la question des savoirs utiles et abordables pour les élèves de cycle 3 à partir, par exemple, du problème des *Trois nombres qui se suivent* extrait de ERMEL et de la question « 46 peut-il se décomposer en la somme de trois nombres qui se suivent ? ».



Dans cet espace de contraintes, la fonction f est la fonction définie dans N qui a un nombre entier associe la somme de ce nombre, de son prédécesseur et de son successeur.

Figure 1 : espace de contraintes pour le problème « 46 peut-il se décomposer en la somme de trois nombres qui se suivent ? »

J'utilise pour cela, en particulier, un outil issu du cadre de la problématisation et proposé par Orange (2001, p. 72-73), les espaces de contraintes qui permettent de représenter la façon dont, dans la classe, dialoguent les registres empirique et des nécessités pour la construction de savoirs scientifiques et constituent un outil d'analyse et de représentation de ce dialogue :

> C'est une mise en ordre des différents éléments problématisants qui sont apparus au cours de ce débat, d'une manière très implicite et même souvent inconsciente pour les élèves. Mais si ces éléments correspondent bien à des idées et des arguments produits par les élèves, il est clair qu'ils ont subi un filtre épistémologique, d'une part par la conduite du débat par le maître et, d'autre part, par l'interprétation que nous avons faite des propositions. Mais nous faisons l'hypothèse que cet espace a une valeur qui dépasse le cas étudié. D'une part car il gomme l'aspect chronologique de ce débat particulier au profit des relations logiques. D'autre part parce que, selon le principe de toute étude qualitative, nous pensons que ce cas fait sens. Et enfin parce que tout ou partie de cet espace se retrouve dans d'autres débats sur ce sujet, avec des élèves d'âge comparable.

Pour dresser cet espace de contraintes (figure 1), à partir des productions des élèves, j'ai reconstruit l'expérience qu'ils ont menée, les faits (contingents) issus de cette expérience et les nécessités (correctes ou non) employées par les élèves pour conclure au problème. Une telle représentation permet, d'une part, de mettre en évidence les problématisations et non-problématisations observées et, d'autre part, de distinguer différentes façons d'établir le vrai en mathématiques et de penser l'impossible pour les élèves de cycle 3. En effet, si pratiquement tous les élèves ont établi que 14+15+16 = 45 (fait 1) et 15+16+17 = 48 (fait 2), l'exploitation de ces faits diffère. Certains élèves qui ont aussi cherché des décompositions additives de trois termes de 46 qui ne respectent pas la contrainte de termes successifs concluent à l'impossibilité de décomposer 46 avec un argument du type « je n'arrive pas à avoir 46 en respectant les contraintes, donc c'est impossible. ». Pour eux, le vrai mathématique est associé uniquement aux faits obtenus et à l'action. Cette rationalité relève de l'*empirisme naïf.* Les autres élèves recherchent des nécessités, ce qui correspond plus à ce qui attendu en mathématiques, mais de différentes façons. Certains élèves associent les faits 1 et 2 au fait que 46 est compris entre 45 et 48 et, implicitement, à l'idée qu'ils ont effectué une recherche exhaustive puisque la fonction *f* est croissante dans un ensemble discret et qu'ils ont essayé les cas « les plus proches de 46 ». Dans ce raisonnement, j'estime que les nécessités associées à l'impossibilité de décomposer 46 sont construites, c'est pourquoi je le qualifie de *rationalisme*. Le raisonnement d'autres élèves peut se lire comme une tentative de dégager, à partir des égalités qu'ils ont obtenues en respectant les contraintes du problème, une « règle » que l'on pourra appliquer à 46 pour conclure. Certains essaient de trouver une propriété caractéristique des entiers qui se décomposent en la somme de trois nombres qui se suivent (« les nombres impairs ne se décomposent pas »), d'autre une propriété de la fonction *f* (les images de deux entiers successifs ne sont pas des entiers successifs, « ça va de trois en trois »). Dans le premier cas, la règle utilisée est fausse et non cohérente avec l'expérience et les éléments dont disposent les élèves. En effet, il a été établi précédemment dans les deux classes que 15, 36 et 96 se décomposent. Cette règle est prégnante, difficile à invalider et de nombreux élèves de la classe y adhèrent (4 affiches sur 7 dans la classe où elle apparaît). Dans ce cas, il y a une recherche de nécessités mais, en même temps, le raisonnement est emprunt d'assertorique, l'apparence mathématique de l'argument l'emporte sur la rationalité. Je parle alors de *pseudo-rationalisme* associé à une apparence mathématique. Les autres élèves recherchent des nécessités à partir de la mise en relation du registre des faits et du registre des nécessités ; ces nécessités sont associée à une « règle » qui est une inférence généralisatrice non prouvée mais cohérente avec l'expérience menée. Dans ce cas, je parle de *rationalisme et raisonnement plausible.*

Par ailleurs, l'étude de l'évolution des arguments des élèves au cours des séances, c'est-à-dire la façon dont ils peuvent modifier leur justification après un échange entre pairs ou au cours du débat, permet de dégager trois ruptures dans l'accès à la rationalité mathématique chez les élèves, associées à des obstacles. La première consiste à envisager l'impossible. Les élèves de cycle 3 sont si peu habitués aux problèmes d'impossible qu'au début certains ne l'envisagent même pas et persistent à vouloir trouver une décomposition. La seconde rupture concerne le dépassement de l'empirisme qui semble constituer un saut important, une rupture ; les affiches produites et les réactions des élèves au cours de la séance témoignent de cette difficulté à s'émanciper de l'empirisme. La dernière consiste à accéder à l'apodicticité, à dépasser le recours à des énoncés tiers, au mieux plausibles. En effet, une fois l'empirisme invalidé, l'accès à l'apodicticité, c'est-à-dire aux nécessités premières qui expliquent l'impossible, n'est pas garanti ; il y a là un autre obstacle didactique associé à la preuve en mathématiques : les élèves, comme l'un d'entre eux le dit d'ailleurs, cherchent une règle car ils pensent que les mathématiques consistent en l'application de règles, ce qui n'est qu'en partie vrai.

En conclusion, il ressort que le passage de l'empirisme naïf à l'apodictique est un enjeu fort. Dans la perspective de construction de situations pour les classes, il convient donc de s'intéresser maintenant aux conditions didactiques qui permettent aux élèves d'accéder à l'impossible apodictique, de construire des nécessités. C'est une partie que je ne vais pas détailler je reprends seulement les résultats.

Conditions de la construction de l'impossible au cycle 3

En référence aux trois ruptures identifiés et m'appuyant, d'une part, sur l'analyse de deux mises en œuvre du problème « Trois nombres qui se suivent » et, d'autre part, sur des travaux français relatifs à la preuve, voici les conditions didactiques que je dégage pour la construction de nécessités par les élèves au cycle 3.

1. Laisser suffisamment de temps aux élèves pour chercher individuellement le problème leur permet d'éprouver l'impossibilité qu'ils n'imaginaient pas au départ.
2. L'expérience et l'observation de l'expérience sont nécessaires pour l'élève dans la mesure où elles lui permettent d'émettre des conjectures sur ce qui est possible et ce qui ne l'est pas. En particulier, éprouver l'impossible conditionne le besoin de justification et constitue un moteur de la preuve.
3. La production et la construction de nécessités par les élèves demande la mise en place d'un contrat de preuve où produire des égalités correctes ne suffit pas.
4. Se situer dans un contexte où les élèves ont peu d'habitudes les oblige à se positionner personnellement et facilite l'instauration d'un contrat de preuve.
5. Pour aider les élèves à s'émanciper de l'empirisme naïf, il est préférable de proposer des problèmes où, d'une part, les arguments de la preuve ne sont pas des évidences pour eux (cela risque de masquer les nécessités) et où, d'autre part, les faits issus de l'expérience et utiles pour produire des conjectures sont suffisamment différents des faits nécessaires pour produire l'apodicticité pour bien marquer la différence entre les deux registres (idée de ne pas avoir une trop grande continuité cognitive entre l'expérience et la preuve).
6. Proposer des situations / problèmes où il apparaît, au moins pour certains élèves, que l'impossible éprouvé ne peut constituer un argument valable (par exemple car cet impossible a été mis en défaut précédemment) permet aux élèves d'invalider l'impossible éprouvé avec un minimum d'interventions de l'enseignant.
7. Proposer des situations où des arguments à l'apparence mathématique risquent moins d'apparaître (même si cela est difficile à anticiper).
8. Les nécessités mathématiques en jeu dans la preuve du problème doivent, autant que possible, s'appuyer sur des concepts mathématiques bien maîtrisés par les élèves afin d'éviter qu'ils remplacent leurs arguments empiriques par des arguments non pertinents mais d'apparence mathématique et difficiles à réfuter.
9. Le milieu de la situation doit être assez contraignant pour permettre l'émergence de conjectures et d'explications / preuves partagées dans la classe et, en partie au moins, correctes.
10. Le milieu doit être assez antagoniste pour permettre l'invalidation de certains arguments établis par les élèves, en particulier ceux établis avec une rationalité qui n'est pas la rationalité mathématique.

Ces conditions dépendent de la gestion de la situation par l'enseignant ou du choix du problème ou de la situation. Elles ne sont pas toutes du même ordre.

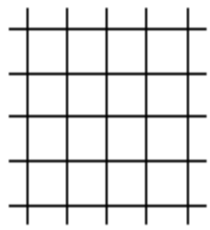
La conception de situations pour les classes ordinaires

La résolution de problèmes d'optimisation discrète requiert un dialogue entre le registre des faits et celui des raisons. Elle met en jeu les savoirs précédemment précisés à travers trois types de preuve : des preuves de résultats faibles (existence d'un résultat non optimal) obtenues par ostension ; des preuves de « courts-circuits » qui permettent de réduire le champ des possibles et font appel à des nécessités autres qu'ostensives ; les preuves de solution qui mobilisent à la fois l'ostension et la construction de nécessités non ostensives.

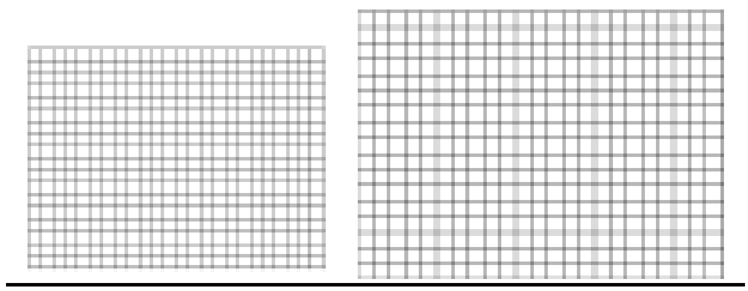
Par ailleurs, ces problèmes répondent plutôt bien aux conditions précédentes et constituent donc de bons candidats pour développer des situations qui permettent de dépasser l'empirisme naïf et construire des nécessités premières en préservant une potentialité adidactique aux situations. En effet, dans ces problèmes la phase de première recherche d'un résultat conduit rarement à trouver le meilleur résultat possible et les élèves qui peinent à améliorer ce premier résultat peuvent penser qu'il est impossible de faire mieux jusqu'à ce que d'autres élèves proposent une meilleure solution valide.

Voici quelques uns des problèmes qui ont servi de support à des situations.

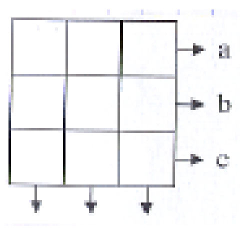
Pas trois points alignés : placer le plus possible de points sur les intersections de cette grille sans former aucun alignement de trois points.



Etiquettes (grilles de 18 sur 24 ou de 17 sur 24) : dans cette grille disposer le plus possible d'étiquettes de 5 sur 7.



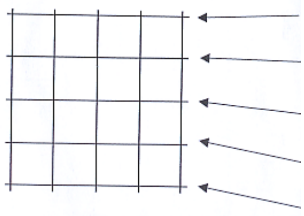
Carré magique : on place dans la grille ci-dessus les nombres de 1 à 9 puis on calcule la somme de chaque ligne et de chaque colonne. On note S la plus grande valeur obtenue. Placer les nombres dans la grille de telle façon que S soit la plus petite possible.



A partir de ces problèmes, et en référence aux résultats précédemment indiqués concernant les pratiques ordinaires, les situations proposées suivent le scénario basique suivant. D'abord, le problème proposé aux élèves est orienté vers la réalisation d'essais à partir d'une consigne du type « placer / découper le plus de . . . possibles, en respectant la contrainte ». Cette première consigne doit permettre à tous les élèves de s'engager dans une phase d'exploration du

problème de type énumération, dans un travail individuel puis en petits groupes. Ensuite, lorsque la recherche empirique s'épuise et que les élèves n'arrivent pas à « faire mieux », l'enseignant interrompt la recherche et demande à chaque groupe de produire une affiche qui représente une des meilleures solutions du groupe. Les élèves sont invités à vérifier scrupuleusement le respect des contraintes. Les affiches des différents groupes sont exposées, une vérification collective des affiches est effectuée et la ou les meilleures productions sont identifiées. Il s'agir alors de faire basculer les élèves de la recherche empirique vers la recherche de courts-circuits et de preuves d'impossible. La phase suivante est une phase de travail et de tri (validation / invalidation) des différents arguments proposés par les élèves. Elle permet d'élaborer une conclusion au problème, compte-tenu des résultats des élèves, et donc éventuellement de conclure qu'il y a une zone d'incertitude. C'est aussi un moment d'institutionnalisation sur la preuve en mathématiques. D'une part, les différentes preuves acceptables produites au cours de la résolution (preuves de résultat faible par ostension, preuves de résultat fort) sont étiquetées comme telles : « on a prouvé avec un exemple qu'on pouvait faire. . . », « on a prouvé avec une preuve / avec un raisonnement qu'il est impossible de faire. . . ». D'autre part, les explications non valables proposées par des élèves (empirisme et autres raisonnements erronés) sont désignées. Par exemple, l'enseignant pourra dire : « Pierre a dit : c'est impossible, on ne peut pas faire plus car on n'a pas réussi ». Cela n'est pas une preuve en mathématiques. Ce n'est pas parce que personne dans la classe n'a réussi à faire mieux aujourd'hui que personne ne pourra jamais faire mieux. Ainsi, ces situations présentent des points communs avec les situations choisies par les enseignants dans la correction-cours dialogué.
La réalisation dans des classes ordinaires de ces situations et l'analyse des déroulements conduit à des questions un peu plus théoriques travaillées au cours de cette recherche et que je considère comme représentatives des questions didactiques associées au développement de situations pour les classes ordinaires. Ces questions concernent l'aménagement du milieu ainsi que le contrat didactique et les processus d'institutionnalisation et de dévolution dans le cas particulier des savoirs visés. Je les aborde ici avec un double point de vue, celui de la problématisation et celui de la théorie des situations.

La première question concerne l'aménagement du milieu d'une situation de façon à avoir non seulement un milieu qui a de bonnes propriétés rétroactives mais qui est aussi suffisamment contraignant pour permettre aux élèves d'évoluer dans la situation souhaitée. Or, pour la situation « Pas trois points alignés » des difficultés surviennent à ce niveau. En effet, les élèves utilisent implicitement pour résoudre le problème un théorème en acte du type « il ne faut pas placer plus de deux points par ligne » mais ne l'explicitent que très rarement pour établir la preuve du problème. De plus, lorsqu'il est explicité certains élèves pensent que c'est une contrainte du problème et non une nécessité de la situation. Les élèves ne peuvent donc pas construire les nécessités voulues parce que le milieu n'est pas assez contraignant, la situation est trop ouverte. Comment aménager le milieu pour préserver des potentialités adidactiques à la situation ? Voici une proposition testée qui fonctionne assez bien. Au cours de la première séance, les élèves énumèrent le problème et on procède à un inventaire des solutions. Les meilleures propositions sont vérifiées. La seconde séance débute par un rappel de la meilleure valeur trouvée, puis l'enseignant demande « est-ce qu'on peut faire mieux et pourquoi ? ». L'enseignant fait remarquer que des avis différents s'expriment et propose d'utiliser un petit tableau comme celui-ci-dessous pour chercher si on peut en mettre plus, et pourquoi, mais sans placer de point sur la grille.



Lorsque l'on utilise cette grille, on effectue un changement de cadre (Douady, 1986) mais on peut préciser en utilisant des espaces de contraintes. Il s'avère en effet (voir figure 2) que ce changement de cadre qui permet l'explicitation de la contrainte et l'émergence de nécessités correspond à un enrichissement du milieu au niveau du registre des nécessités. Lorsqu'il y a modification du milieu ce n'est pas toujours à ce niveau. Par exemple, pour Carré Magique, un problème un peu semblable se pose : les élèves ne peuvent pas conclure s'ils savant que la somme des sommes en ligne (ou en colonne) fait toujours 45, mais il est difficile de modifier uniquement au niveau des nécessités pour injecter cette connaissance dans le milieu.

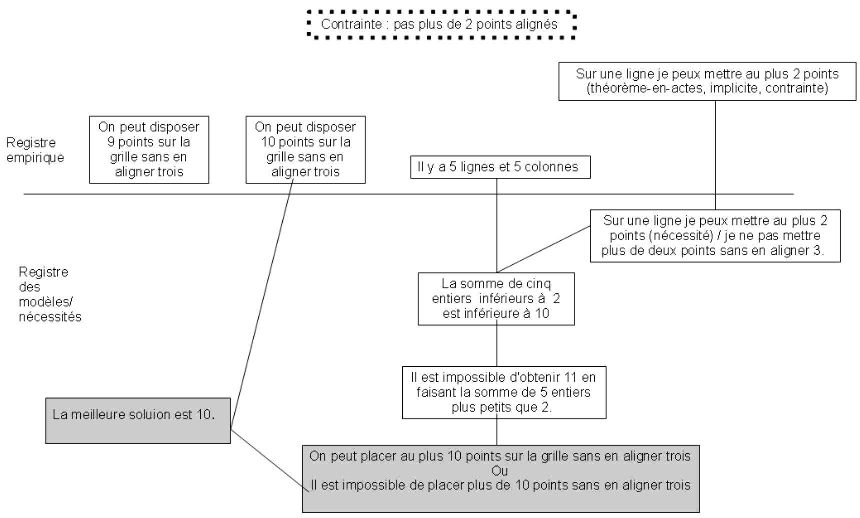


Figure 2 : effet d'un aménagement du milieu

Je me place maintenant du point de vue de la réalisation en classe des situations et des problèmes associés à la dévolution et à l'institutionnalisation qu'elle fait émerger. Le cadre de la problématisation accorde une place importante aux aspects langagiers dans la construction de savoirs scientifiques, notamment à travers les processus de mise en texte (et donc d'institutionnalisation). Dans ce cadre, on considère que le langage permet de faire évoluer l'état de connaissance sur le problème au cours du débat par la mise en tension des éléments des registres empiriques et apodictiques qui émergent et que c'est en travaillant sur la mise en texte des idées que vont se dégager les nécessités. La prise en compte de ces aspects langagiers et son articulation avec la théorie des situations didactiques permet de pointer plusieurs difficultés liées aux pratiques des enseignants dans le cas des situations étudiées ici. Tout d'abord, le passage dans la situation, de la recherche de résultats faibles (empirie) à la recherche de majorants et de nécessités est un point délicat qui n'est pas réductible à un changement de tâche, c'est un changement de contrat didactique : il s'agit d'amener les élèves vers la preuve. A cet endroit, le discours de l'enseignant est un élément important pour signifier ce changement d'attentes. Or il s'avère que les discours des enseignants sont très différents. Certains véhiculent fortement l'idée d'opinion (non congruent avec la mise en place d'un contrat de preuve) et font référence aux possibles ; d'autres apparaissent plus congruents avec un contrat de preuve dans la mesure où ils ont une dimension d'universalité et questionnent l'impossible (voir Hersant, 2011). Par ailleurs, d'autres questions se posent au sujet cette fois de l'institutionnalisation dans la mesure où on observe rarement des mises en texte de preuves de résultat faible établi au cours de la séance, ni de majorants qui ne sont pas cruciaux pour la suite de la résolution du problème (par exemple 26 ou 25 pour le problème « Pas trois points alignés »…), même si des (re)formulations orales de propos d'élèves peuvent exister. Or, cela est nécessaire pour mettre en évidence comment interviennent les registres des faits et des nécessités dans les différentes preuves ; cela permettrait, *via* un travail sur les formulations, de faire apparaître l'universalité et la nécessité des propositions.

3. Des perspectives de travail

La présentation de cet itinéraire de recherche allant de l'étude des pratiques ordinaires d'enseignement des mathématiques avec les outils milieu et contrat didactique vers le développement de situations destinées aux classes ordinaires en associant les cadres de la théorie des situations et de la problématisation ouvre la voie à des travaux ultérieurs qui concernent les ingénieries destinées aux classes ordinaires et l'articulation des cadres de la théorie des situations didactiques et de la probématisation. Un travail de développement d'ingénieries articulant des contraintes d'adidacticité et de problématisation et l'étude des conditions de possibilités de réalisation de ces ingénieries dans les classes ordinaires (notamment à travers l'identification des déterminants d'une situation, voir Hersant, 2011) semble nécessaire. De nouvelles questions émergent en ce qui concernent l'aménagement du milieu d'une situation : peut-on caractériser différents types d'aménagement du milieu employés par les enseignants à l'aide des espaces de contraintes ? Par ailleurs, les possibilités, intérêts et limites de l'utilisation du cadre de la problématisation dans le champ de la didactique des mathématiques sont à explorer.

Références bibliographiques

Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : Scéren.

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problèmes ouverts et situations-problèmes*. Lyon : IREM de Lyon.

Bachelard, G. (1934). *Le nouvel esprit scientifique*. Paris : PUF

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bachelard, G. (1949). *Le rationalisme appliqué.* Paris : PUF.

Brousseau, G. (1996). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques* (Noirfalise et Perrin, p. 3-46). Clermont-Ferrand: IREM

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Comiti, C., & Grenier, D. (1996). Etude de quelques phénomènes typiques de l'activité didactique. *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques* (Noirfalise R., Perrin M.J., p. 57-65). Clermont-Ferrand : IREM

Comiti, C., & Grenier, D. (1997). Régulations didactiques et changements de contrats. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *17*(3), 81-102.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Douaire, J. (2006). *Analyse didactique des processus de preuve dans le domaine numérique au cycle 3 de l'école primaire* (Thèse). Université Paris 7.

Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER*, *24*, 37-57.

Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situations de recherche en classe essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Les cahiers du Laboratoire Leibniz*, Les cahiers du Laboratoire Leibniz, (92).

Hersant, M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Paris 7, Paris.

Hersant, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement des mathématiques, le cours dialogué. *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technologies Education*, *4*(2), 241-258.

Hersant, M. (2010a). *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3* (Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches). Université de Nantes. Consulté de https://sites.google.com/site/magalihersant/publications/habilitation-a-diriger-des-recherches

Hersant, M. (2010b). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir: de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations didactiques.* (Note de synthèse des travaux, habilitation à diriger des recherches). Université de Nantes. Consulté de https://sites.google.com/site/magalihersant/publications/habilitation-a-diriger-des-recherches

Hersant, M. (2011). Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations, une étude de cas relative aux problèmes pour chercher. *Actes de la 15è école d'été de didactique des mathématiques* (Margolinas C. et al.). Clermont-Ferrand: La Pensée Sauvage.

Hersant, M. (2012). Recherche et résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques : une étude didactique pour identifier les savoirs et les apprentissages possibles. *Les didactiques en questions. Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation* (Elalouf et Robert). Bruxelles : de Boecke

Hersant, M. (à paraître). Le contrat didactique et l'organisation de la rencontre des élèves avec le savoir. *Complexité des pratiques enseignantes : expérience, savoir et normes en mathématiques* (Hersant, Morin, p. 83-107). Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux

Hersant, M., & Perrin-Glorian, M.-J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1), 113-151.

Hersant, M., & Morin, C. (à paraître). *Complexité des pratiques enseignantes : expérience, savoir et normes en mathématiques* (p. 286). Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux

Margolinas, Claire. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a poseriori de situations. *Les débats en didactiques des mathématiques, annales 1993-1994* (Margolinas C., p. 89-103). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques* (Dorier et al., p. 141-155). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Actes du 33è colloque de la Copirelem* (p. 37-72). Dourdan.

Perrin-Glorian, M.-J. (1998). Introduction du thème « Comprendre les pratiques d'enseignement ». *Actes de la 9ème Ecole d'Ete de didactique des mathématiques* (Bailleul et al., p. 12-14).

Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche et de l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, Recherches en didactique des mathématiques (C. Margolinas et al., p. 57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Perrin-Glorian, M. J., Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(2), 217-276.

Polya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement « plausible »*. Paris : Gautier-Villard.

Robert A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technologies Education*, *2*(4), 505-528.

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(1-2), 57-79.

Salin, M. H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants. *Le cognitif en didactique des mathématiques* (Lemoyne G. et Conne F., p. 327-352). Montréal: Les presses de l'Université de Montréal

Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations a dimension adidactique.

Etude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement en classe de CM2

Isabelle BLOCH et Patrick GIBEL

Laboratoire LACES, Université de Bordeaux

Isabelle.bloch@u-bordeaux4.fr

patrick.gibel@u-bordeaux4.fr

Résumé : Notre communication vise à présenter un modèle d'analyse des raisonnements dans des situations didactiques comportant une dimension de recherche. Notre souhait est, d'une part de proposer un modèle issu de théories « macro », afin de pouvoir intégrer les analyses dans des études de situations ; d'autre part, de chercher à produire un modèle initial comportant une structure identifiable, afin qu'il puisse être réutilisé dans des analyses de corpus même dans un contexte éloigné de celui qui nous a servi d'appui pour la conception.
Le modèle a été élaboré à partir de la Théorie des Situations Didactiques et de la Sémiotique de C.S. Pierce. Il offre la possibilité d'analyser les raisonnements produits par les élèves et l'enseignant selon trois axes distincts et complémentaires du point de vue de l'analyse didactique. Nous présenterons l'utilisation de ce modèle dans le cadre de l'étude d'une situation de validation à l'école primaire, mise en œuvre au COREM[1], dans une classe de CM2.

Mots clés : raisonnement, situations, décisions, preuves, argumentation, sémiotique, opérations, propriétés des opérations.

1. Présentation du modèle d'analyse des raisonnements

Cette première partie a pour objet de présenter succinctement le modèle d'analyse des raisonnements réalisé par Bloch et Gibel (2011). Nous avons montré, dans une précédente recherche (Ibid.), l'intérêt de ce modèle en effectuant une étude détaillée des raisonnements apparaissant dans le déroulement d'une séquence d'analyse portant sur la notion de limite de suites, en classe de Première scientifique. Cet écrit vise à montrer l'étendue du domaine de validité de notre modèle, en établissant son utilité pour analyser une séquence de mathématiques en classe de CM2 (5$^{\text{ème}}$ primaire).
Dans cette première partie nous explicitons la définition choisie pour le terme « raisonnement » ; puis nous présentons les caractéristiques du modèle multidimensionnel construit, lequel permet une visibilité et une analyse des raisonnements produits dans les situations à dimension adidactique. Un postulat de notre travail est que la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998), notée par la suite TSD, fournit un cadre premier pour cette étude, et notamment que l'analyse des fonctions du raisonnement dans les niveaux de milieux permet une catégorisation des raisonnements. Ce cadre doit cependant être complété par des outils d'analyse locale, et par une analyse des fonctions des raisonnements

[1] Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, école Jules Michelet, Talence.

(Gibel, 2004) et des signes (formels, langagiers) qui le soutiennent. Pour cette dernière fonction nous utilisons les outils d'analyse issus de la sémiotique peircienne (Bloch et Gibel, ibid. ; Bloch, 2008).

1.1 Définition du raisonnement

Le terme *raisonnement*, dans le cadre de notre étude, tend à couvrir un champ plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. Pour cette raison nous avons pris comme définition de base celle proposée par Oléron :

> Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but. (Oléron 1977, p.9)

L'analyse par l'observateur d'un supposé raisonnement nécessite de prendre en compte les connaissances et les savoirs dont l'élève est censé disposer pour s'approprier la situation objective et produire des raisonnements par confrontation aux différents milieux. Ceci nous conduit à définir, dans le paragraphe suivant, la notion de *répertoire didactique* utilisée dans l'élaboration de notre modèle.

1.2 Le répertoire didactique et le répertoire de représentations

L'ensemble des moyens sémiotiques que le professeur met en œuvre, et ceux qu'il pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue le répertoire didactique de la classe tel que l'a défini Gibel (2004). Les situations choisies par l'enseignant déterminent la capacité de l'élève à organiser, en confrontation au milieu de la situation, ses procédures de résolution et donc son répertoire. La fonction principale du répertoire est de faciliter la communication dans la classe, en donnant à l'élève les moyens de produire ou de retrouver, et donc de mettre en œuvre, au moment voulu, une suite d'actions, une formulation ou une justification (Ibid.).

Le répertoire didactique de la classe est identifiable à la part du répertoire mathématique que l'enseignant a choisi d'expliciter, notamment pour la validation et lors de l'institutionnalisation. Le répertoire de représentations est une composante du répertoire didactique. Il est constitué de signes, schémas, symboles, figures ; il convient d'y adjoindre également les éléments langagiers (énoncés oraux et/ou écrits), permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.

Le répertoire de représentations comporte deux composantes, la première étant liée à la chronogenèse et la seconde au milieu de la situation. La première composante correspond au répertoire antérieur, c'est-à-dire aux différentes représentations des connaissances antérieures. La seconde composante apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des connaissances de son répertoire. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations liées à la situation. Cette composante est le *système organisateur*.

Nous distinguons donc dans le répertoire didactique deux types d'objets : d'une part la collection d'énoncés que nous appelons *registre des énoncés,* et d'autre part ce qui permet de l'organiser et de l'utiliser qui est désigné par *système organisateur* (Gibel, 2004). Le système organisateur est ce qui permet à l'élève de réactiver des énoncés déjà rencontrées dans des situations antérieures, mais aussi de générer de nouvelles formules en articulant entre eux certains énoncés, ou en les combinant afin de répondre à la situation.

Lorsque le sujet agit dans une situation, il met en œuvre deux catégories de connaissances : la connaissance elle-même qui lui permet de résoudre directement la situation, ou des moyens indirects qui correspondent à une élaboration de cette connaissance, laquelle résultera alors, *in fine*, du fonctionnement du système organisateur.

1.3 Le modèle d'analyse des raisonnements

La construction de situations d'enseignement issues de situations fondamentales d'un savoir dans la TSD a été souvent justifiée par le bénéfice de ce type de situations sur les possibilités d'amener les élèves à entrer dans une démarche de preuve (Legrand 1997). Notons toutefois que les situations parfois dites adidactiques sont des réalisations, dans la contingence, de modèles d'une situation fondamentale d'un savoir : en ce sens, ces situations comportent des phases plus ou moins adidactiques ou à dimension adidactique (cf. Bloch, 1999), et des phases didactiques. L'élaboration et l'analyse a priori de ces situations se basent sur l'étude des niveaux de milieux organisés ; l'analyse a posteriori doit ensuite vérifier une concordance raisonnable du déroulement effectif avec la situation anticipée.
Le modèle de structuration du milieu que nous utilisons est celui de Bloch (2006), issu primitivement du modèle de Margolinas (1994) modifié afin de tenir compte du rôle du professeur dans les niveaux adidactiques de milieu. Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse des fonctionnalités des différents niveaux de milieux, et plus précisément, à l'élaboration et à la construction du *milieu expérimental a priori* relatif à notre situation, et aux résultats de la mise en œuvre dans la contingence (Bloch 2006). Le tableau ci-dessous résume les niveaux de milieux – de M1 à M-3 – correspondant à la situation *expérimentale*. Les niveaux négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions (apparition d'un processus de preuve dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique), car c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif (qu'il vaudrait peut-être mieux appeler *milieu heuristique*) et le milieu de référence que nous pourrons voir apparaître et se développer les raisonnements attendus.

M1 Milieu didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet	
M0 Milieu d'apprentissage : institutionnalisation	E0 : Elève	P0 : Professeur enseignant	S0 : situation didactique	
M-1 Milieu de référence : formulation & validation	E-1 : E-apprenant	P-1 : P régulateur	S-1 : situation d'apprentissage	a-didactique
M-2 Milieu objectif : action	E-2 : E-agissant	P-2 : P dévolueur observateur	S-2 : situation de référence	
M-3 Milieu matériel	E-3 : E-objectif		S-3 : situation objective	

Tableau1 *– La structuration du milieu*

Dans la structure précédente, nous savons que des étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques : ainsi la confrontation à un milieu heuristique permet leur élaboration ; le passage à un milieu de référence a pour fonction d'établir la généricité des méthodes et le caractère de nécessité des propriétés trouvées ; enfin, le milieu didactique met en évidence la fonction des différents énoncés apodictiques, soit de preuve soit de décision, et organise l'institutionnalisation.
Au final, nous avons été amenés à retenir trois axes qui orientent notre analyse des raisonnements des élèves dans une situation. Ces axes réfèrent à des degrés de modélisation différents des raisonnements en jeu dans le déroulement de la situation : modélisation globale relative aux niveaux de milieux, modélisation locale au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe, ainsi qu'au niveau des signes émergents de ce travail.
Le premier axe est lié au milieu de la situation : dans une situation comportant une dimension adidactique, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent, ce que nous illustrons dans la partie 3.

Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à mettre ces deux axes en relation, en montrant comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieu et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux.
Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation. Pour les analyser nous utilisons les catégories peirciennes : icône, indice, argument (cf. Bloch & Gibel, Ibid.).
En prenant en compte les trois axes (fonctions des raisonnements ; niveaux d'utilisation des signes comme icône, indice, argument ; répertoire de représentations) dans chaque niveau de milieu M_{-2}, M_{-1}, M_0, nous parvenons au tableau suivant. Les niveaux matriciels indiqués (R1.1, etc.) servent de référence lors de l'analyse du corpus : la progression des indices matriciels va en principe de pair avec la sophistication et la formalisation croissantes des raisonnements et des signes.

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du professeur éventuellement)
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur - règles de calcul	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

***Tableau 2** – Le modèle milieux/répertoire/symboles*

Le tableau présente donc de façon synthétique le modèle produit ; il indique les signes et raisonnements attendus dans chaque niveau de milieu, à partir de l'analyse a priori réalisée pour la situation prévue. Nous avons codé en SYNT ou SEM les dimensions possibles, syntaxiques ou sémantiques, rencontrées dans les différents niveaux d'argumentation. Remarquons cependant que les dimensions syntaxique et sémantique ne sont pas spécifiques du niveau d'adéquation à la situation : en effet, des élèves peuvent fort bien utiliser leurs connaissances anciennes de façon syntaxique mais ne pas entrer dans les requis de la situation, ce qui rendra ces essais peu opérants ; par ailleurs le travail syntaxique, une fois mis en forme, joue un indéniable rôle sémantique, que tous les mathématiciens (re)connaissent.

2. Présentation et analyse a priori de la situation étudiée

2.1 Origine et enjeux de cette séquence

Le problème de mathématiques a été initialement proposé par G. Glaeser (1999), l'énoncé est le suivant :

> Soient cinq nombres naturels quelconques a,b,c,d,e. Quel est le nombre le plus grand que l'on peut obtenir à partir des quatre opérations élémentaires {+ ;- ;× ; :} appliquées à ces nombres qui ne seront pris dans le calcul qu'une seule fois, une même opération pouvant être utilisée plusieurs fois.

La mise en œuvre de cette séquence est liée à la rencontre de G. Brousseau et de G. Glaeser, à l'origine de ce projet didactique. Le problème proposé est un problème ouvert ; l'idée est de faire débattre les élèves sur des déclarations mathématiques, suivant des règles qui les conduisent à produire des preuves, plus précisément leur faire chercher des contre exemples.
La situation d'argumentation, telle qu'elle a été conçue par G. Brousseau, est une situation adidactique ou du moins en grande partie adidactique : en effet il est possible et même probable que l'enseignant sera conduit à intervenir de manière à assurer le maintien du processus. Par conséquent l'analyse de cette séquence, à partir de notre modèle, devrait nous permettre d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :
Quelles sont les différentes formes de raisonnements qui apparaissent lors des différentes phases de cette séquence ? Quelles fonctions recouvrent-ils ? A quel(s) niveau(x) de milieu(x) réfèrent-ils ? Comment évolue, au cours de la séance, le répertoire de représentations ?

2.2. Eléments d'analyse a priori de la séquence

2.2.1. Analyse de la nature de la réponse attendue au problème proposé

Pour déterminer la nature de la réponse attendue par l'enseignant il est nécessaire de distinguer les conditions dans lesquelles la réponse doit être produite :

- Si la suite de nombres est donnée par l'enseignant, alors la réponse attendue est un nombre ainsi que le programme de calculs permettant de l'obtenir.
- Si les cinq nombres ne sont pas explicités, c'est-à-dire si l'on se place dans le cas général, alors la réponse idoine est une méthode de calculs. Cependant il est à noter que l'écriture d'une expression algébrique ne conviendra pas car il est nécessaire de distinguer différents cas selon la suite de nombres considérée.

Dans le second cas nous sommes amenés à considérer l'expression algébrique $a \times b \times c \times d \times e$, où a,b,c,d et e désignent cinq entiers naturels quelconques. Or cette expression algébrique n'est valide, pour obtenir le nombre le plus grand à partir d'un 5-uplet donné, que si les cinq nombres sont tous distincts de 0 et de 1.
Le domaine de validité de cet algorithme 'naturel' n'est pas immédiatement évident ; il devrait cependant *in fine* conduire les élèves à s'interroger sur le statut des nombres 0 et 1. Ces derniers ne sont pas des nombres comme les autres, ils ont des caractères didactiques et culturels spécifiques, ce qui nécessite de distinguer des cas particuliers lors de la formulation de la méthode. Ainsi la présence d'un ou plusieurs 0 nécessite, pour obtenir le nombre le plus grand, de déterminer, à partir de la suite constituée par les entiers non nuls, le nombre le plus grand et d'ajouter, ensuite, le ou les entiers nul(s). Rappelons que même des élèves de collègue peuvent avoir des difficultés à assimiler que le produit de tout nombre par zéro donne zéro. Pour ce qui est du 1, le multiplier n'étant pas opératoire dans cette situation, il faut réfléchir à son ajout à l'un des autres nombres de la suite, et donc décider quel ajout s'avère le plus performant.

La formulation d'une méthode générale dépend plus généralement du répertoire didactique relatif aux propriétés de la multiplication ; il convient de s'intéresser aux connaissances dont disposent les élèves en cinquième année de primaire. Pour ces élèves, l'associativité n'est pas acquise en ce qui concerne l'usage de cette propriété, ni formulable. La commutativité est admise implicitement par les élèves mais ces derniers ne peuvent pas faire référence à cette propriété – plus précisément ils ne peuvent se référer à sa désignation.[2]

2.2.2. Analyse didactique de la séquence

L'un des objectifs de cette séquence est de permettre aux élèves de passer progressivement de l'arithmétique à des énoncés généraux. Est aussi visé dans cette séquence l'enseignement des règles du jeu de la preuve : il s'agit d'une leçon sur le vrai et le faux mais également sur la manière de l'établir. L'objectif principal de la séquence est donc de mettre les élèves en situation de débattre de la validité de méthodes permettant d'obtenir le nombre le plus grand, quelle que soit la suite de nombres proposée. Dans cette situation, il est prévu que le rejet d'une méthode soit lié à la production d'un contre-exemple, plus précisément à l'exhibition d'une suite de cinq nombres et d'une (nouvelle) méthode conduisant à la production d'un nouveau nombre – plus grand que celui obtenu par la méthode initialement proposée.

Pour qu'une mise en débat de la validité des méthodes soient envisageable, c'est-à-dire pour que la situation de validation puisse être (à dimension) adidactique, il est nécessaire que :

- Ces méthodes aient été produites par les élèves, et donc qu'elles résultent d'un travail de formulation fondé sur l'écriture de méthode ;
- Elles aient fait l'objet d'une reconnaissance formelle par l'enseignant et par conséquent qu'elles appartiennent au *répertoire didactique* de la classe, de sorte qu'elles soient utilisables par l'ensemble des élèves ;
- Les élèves parviennent à se les approprier, c'est-à-dire à faire le lien entre leur formulation et leur usage ;
- Elles soient assimilables à des assertions, dans le sens où elles sont correctement formées et consistantes.

De plus, pour qu'il soit concevable de demander aux élèves d'élaborer des méthodes, il faut dans un premier temps envisager des répétitions de calculs sur des suites de nombres différentes données afin que les élèves parviennent à élaborer des programmes de calculs que nous appellerons programmes d'actions finalisés.

Du point de vue du langage, il convient d'examiner :

- D'une part les écritures qui correspondent à leur programme de calculs. Dans le cas où les nombres sont spécifiés les élèves peuvent utiliser des écritures comportant des parenthèses ou avoir recours à des arbres de calculs.
- D'autre part les formulations que les élèves peuvent élaborer afin de désigner les nombres dans le cas général. Dans ce cas les élèves présenteront l'énoncé de leur méthode sous forme d'écriture littérale ou de termes oraux (« n'importe quel nombre »…).

Dans la mise en situation, initialement les élèves sont en situation d'action, plus précisément en situation de produire des programmes d'actions finalisés pour des nombres entiers particuliers. A la suite d'une phase de recherche, l'enseignant organise ensuite une phase de confrontation au cours de laquelle les élèves explicitent les résultats obtenus ainsi que la manière dont ces résultats ont été produits.

La situation d'action est donc le « jeu du nombre le plus grand »; il s'agit pour les élèves de trouver le nombre le plus grand que l'on peut obtenir à l'aide d'un *répertoire* formé des quatre

---

[2] Pour une analyse a priori détaillée de la séquence nous renvoyons le lecteur à (Gibel, 2008)

opérations élémentaires {+ ;- ;× ; :} appliquées à un ensemble de cinq nombres entiers donnés. La règle précise que l'on ne peut utiliser chacun des nombres qu'une seule fois.
Dans la situation de formulation, les élèves doivent écrire une méthode utilisable quels que soient les cinq nombres entiers proposés et permettant d'obtenir le nombre le plus grand. Ils doivent passer de l'activité de raisonnement, au sens de la mise en œuvre d'un programme d'actions finalisé, à la rédaction d'une 'méthode' générale qui permette d'obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de 5 nombres proposée.
Nous verrons que les élèves se heurtent à des difficultés. En effet, expliciter la méthode complète requiert l'usage de l'algèbre, car il est nécessaire d'utiliser des termes pour désigner les nombres qui ne sont pas fixés – étape incontournable pour obtenir une méthode utilisable pour tous les 5-uplets. Ces problèmes de dénotation font de cette situation (si on la pousse jusqu'au bout de sa logique) une situation fondamentale de l'algèbre.
La situation de validation constitue l'élément central de notre étude. C'est le jeu des 'propositions'[3] dans lequel il y a un concours de ces propositions entre les équipes, concours qui va aboutir à la production par les élèves de preuves syntaxiques, sémantiques et pragmatiques (« En faisant ainsi ça marche »…).

En résumé, la situation didactique consiste donc essentiellement à :
1) Faire dévolution aux élèves de la situation d'action, c'est-à-dire présenter les règles du jeu et amener les élèves à formuler : d'une part le nombre obtenu, d'autre part la justification du programme d'actions finalisé qui lui est associé. Le maître va donner les règles du jeu mais il va, lors des phases de jeu de la première séance, cacher le fait qu'il peut choisir 0 ou 1 dans la suite de nombres ce qui va surprendre les élèves, lors de la rédaction des méthodes, car ils n'avaient pas envisagé cette possibilité.
Le maître choisit les nombres qu'il va donner pour mettre en scène les règles convenables, puis ensuite pour éprouver, lorsque cela s'avère nécessaire, la validité des « méthodes » proposées par les élèves lors de la situation de formulation..
2) Faire dévolution de la situation de formulation afin que les élèves s'engagent dans l'écriture d'une méthode « générale » i.e. utilisable pour obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de 5 nombres proposée.
Compte tenu de la difficulté de la tâche dévolue aux élèves, l'enseignant devra leur indiquer très précisément d'une part la finalité, c'est-à-dire la production d'une méthode permettant de gagner au jeu du nombre le plus grand quel que soit le 5-uplet donné, et d'autre part la forme de l'écrit, c'est-à-dire la rédaction d'une méthode sous la forme d'une proposition. Pour que cette dernière soit correctement formulée et consistante, l'enseignant devra vraisemblablement interagir avec l'élève ou les élèves auteurs de la proposition pour les amener à préciser certains termes.
3) Faire dévolution de la situation de validation, c'est-à-dire amener les élèves à prendre position relativement à la validité des méthodes formulées par chacun des groupes. L'enseignant aura à préciser les règles lors de la situation de validation.
4) Intervenir si nécessaire pour maintenir le caractère adidactique de la situation de validation et par conséquent maintenir le processus de validation.
Nous explicitons ci-dessous les différentes phases des séances afin de rendre compte de l'ingénierie dans sa globalité.

2.2.3. Le déroulement de la séquence

La séquence est constituée de trois séances, dont les différentes phases figurent en annexe. Nous donnons ci-dessous un résumé de ces séances.

[3] La dénomination correcte est 'conjecture', il s'agit là d'un abus de langage

Séance 1 : 13 phases.
Dévolution du jeu, proposition d'un 5-uplet 3,8,7,5,4 ; mise en commun des méthodes. Deuxième jeu avec le 5-uplet 7,3,2,5,8, concours de propositions. Troisième jeu 2,5,3,2,4 et présentation des résultats.
Séance 2 : 17 phases.
Consigne relative au concours de propositions. Mise en commun, explicitation, débat sur les méthodes. Jeu avec 8,1,3,0,0. Résultats, proposition d'une nouvelle méthode. Recherche de contre exemples et débat sur leur validité. Proposition de nouvelles méthodes. Jeu avec 7,0,4,3,1, résultats, recherches de contre exemples.
Séance 3 :8 phases.
Mise en commun des résultats du 5-uplet d'Hélène 8,1,1,1,0 et débat. Jeu proposé par l'enseignante 1,1,1,1,1. Recherche de la méthode adéquate. Phase de jeu 1,1,1,1,9. Présentation des résultats, et rédaction d'une méthode.

3. Analyse des raisonnements à partir du modèle

Pour effectuer une analyse des raisonnements produits, selon notre modèle nous utilisons d'abord le schéma de la structuration du milieu, de manière à expliciter les différentes situations « emboîtées » correspondant aux différents milieux (Brousseau et Gibel, 2005).
La mise en œuvre du modèle doit ensuite nous permettre d'analyser a posteriori, lors de la séquence, les transformations des raisonnements produits par les élèves du point de vue de leur formulation et compte tenu de leurs fonctions dans la relation didactique.

3.1 Analyse a priori des différents milieux

Pour chacun des niveaux du modèle nous entendons analyser à quelles conditions les différentes actions des élèves peuvent être assimilées ou non à une forme de raisonnement, et d'autre part déterminer – en effectuant l'analyse a posteriori de la séquence – les formes et les fonctions des raisonnements produits par les différents acteurs de la relation didactique.

La situation objective : L'acteur objectif et le milieu matériel

La situation objective, objet de notre étude, est fondée sur le problème de mathématiques proposé. C'est donc une situation de jeu pour un 5-uplet donné. Le milieu matériel est constitué par les entiers naturels. Les connaissances du répertoire didactique, que les élèves vont devoir utiliser, relèvent des opérations sur les entiers et de leurs propriétés.

La situation de référence : Sujet agissant et milieu objectif

Dans cette séquence du nombre le plus grand, l'enseignant a pour objectifs : d'une part de faire dévolution aux élèves de la situation d'action, c'est-à-dire présenter les règles du jeu ; et d'autre part d'amener les élèves à formuler le nombre obtenu et la justification du programme d'actions qui lui est associé.

La situation d'apprentissage : Le sujet apprenant et le milieu de référence

Rappelons que le but de la situation de formulation est que les élèves s'engagent dans l'écriture d'une méthode générale, c'est-à-dire utilisable pour obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de 5 nombres proposée.
Le sujet apprenant – l'actant dans la situation, selon Brousseau – va devoir prendre en compte les objets, les règles, mais également les conditions dans lesquelles ont été produits chacun des programmes d'action. L'actant considère maintenant ses actions sur les objets en regard

des conditions nécessaires ou suffisantes à la réussite, et non seulement dans un but de communication. Pour le dire autrement, dans le milieu de référence il ne s'agit plus de jouer pour gagner, même au hasard, mais de savoir pourquoi et à quelles conditions on est sûr de gagner (phases 4 et 8 de la séance 1, cf. Annexe). L'objectif est alors de faire produire aux élèves une méthode dont le domaine de validité soit le plus étendu possible. La phase de formulation des méthodes vise à permettre aux élèves une prise de position sur l'action, et donc une prise de conscience des décisions sur lesquelles reposent leurs actions, afin qu'ils puissent produire des procédures dont la validité pourra être mise en débat.
Le répertoire d'objets d'un sujet est constitué de noms d'objets ; dans le cas de l'écriture de la 'méthode', l'une des difficultés c'est précisément la désignation des nombres dans le cas général. Les élèves peuvent faire référence soit à l'ordre dans lequel les nombres ont été donnés soit à leur rang (le plus grand, le plus petit) en référence à la bande numérique (suite ordonnée des entiers naturels). Ce problème de la désignation des nombres dans le cas général nous fait avancer que l'interprétant 'final' du jeu du nombre le plus grand est un interprétant algébrique et non arithmétique : il est donc très probable que des élèves de CM2 ne pourront aller jusque-là, et que la professeure ne pourra institutionnaliser que des méthodes de type arithmétique ou, au mieux, pré-algébriques, c'est-à-dire fragmentaires par rapport à la solution algébrique complète.

La situation didactique : L'élève et la situation d'apprentissage

Le niveau (M0) est celui des assertions. Le niveau précédent, (M-1), est un niveau des relations pragmatiques, où la vérité est évidente : la relation est vraie ou fausse mais il n'y a pas de jugement. Nous voyons que l'enseignante essaye, au niveau M0, d'introduire des calculs avec parenthèses qui ne sont pas repris par les élèves ; les élèves amorcent une prise de conscience du domaine de validité des énoncés produits, mais, comme dit ci-dessus, ne sont pas en mesure de formaliser ces énoncés dans un milieu (pré)algébrique.

3.2 Analyse des raisonnements

Nous analysons ici certains épisodes en indiquant les différentes phases de la séance dont ils sont extraits. Lors de cet examen des formulations, conjectures et contre-exemples, le modèle permet d'étudier les différentes formes de raisonnements apparaissant dans la relation didactique ; dans la mesure du possible, nous spécifions à chaque fois leurs fonctions en relation avec le niveau de milieu associé, et en indiquant les signes (langagiers et scripturaux) en référence avec le répertoire didactique utilisé, et le niveau de ces signes : ici *indiciel* (du niveau d'une proposition mathématique sur un objet précis) ou *argumentaire* (règle générale).

Episode 1 extrait de la séance 1, phase 4 (cf. Annexe). Les élèves présentent le nombre le plus grand obtenu à partir de la suite 3-4-5-7-8 et justifient la validité de la procédure ayant permis de l'obtenir. L'enseignante interroge Myriam sur son résultat et la manière dont elle l'a obtenu.

	M : (en désignant Myriam) : A toi.	
	Myriam : Moi j'ai trouvé 3360 !	
	E : Moi, aussi !	
	E : Non pas moi, j'ai trouvé plus grand.	
0.09.00	M : 3360, tu expliques. Attention, je t'écoute.	La maîtresse écrit au tableau 3360.
	Myriam : 8 fois 7 , 56	La maîtresse écrit le programme de calculs au fur et à mesure que
	M : Alors, tu as fait 8 fois 7, oui.	
	Myriam : Après j'ai fait 5 fois 4 , ça fait 20	

<table>
<tr><td></td><td>M : Hum ! (ton approbateur)</td><td rowspan="7">l'élève lui dicte
(8×7)×(5×4)×3
(1) (2)
56
56 × 20
(3)
1120
(4)
3360</td></tr>
<tr><td>0.09.20</td><td>Myriam : Après j'ai additionné 56 et …</td></tr>
<tr><td>0.09.22</td><td>E : Additionné ?</td></tr>
<tr><td></td><td>Myriam : Non multiplié ; 56 fois 20</td></tr>
<tr><td>0.09.27</td><td>M : C'est-à-dire tu as multiplié ces deux-là !</td></tr>
<tr><td></td><td>Myriam : 56 fois 20, 1120 et après j'ai fait fois 3 et j'ai trouvé 3360</td></tr>
<tr><td>0.09.40</td><td>M : Et après tu as fait fois 3 pour trouver 3360.</td></tr>
</table>

Myriam effectue donc un calcul en arbre, par paliers successifs, tel que schématisé ci-dessus. Chaque étape de la formulation de Myriam est en fait une assertion dont la validité par rapport au calcul, mais également par rapport aux règles du jeu, est débattue par les élèves. Il s'agit d'une dialectique de la validation.

Nature et fonction – Milieux	Signes et répertoire
Confrontation de l'actant au milieu objectif M-2 Mise en œuvre d'une procédure calculatoire Raisonnement en situation d'action : Les élèves sont confrontés à des choix concernant les nombres et les opérations qu'ils utilisent à chaque étape de leur programme d'actions. Décisions de calculs R1.1 SEM Raisonnement en situation de communication du programme d'actions. Preuve de la validité de la proposition. Myriam parvient ainsi à produire, par la formulation de son programme d'actions, le résultat annoncé (3360). La maîtresse valide le résultat proposé par Myriam du point de vue de sa conformité aux règles du jeu mais aussi du point de vue des règles de calculs	Utilisation des tables de multiplication. Utilisation de la règle des zéros (×20) Respect des règles du jeu explicitées par l'enseignante. Du point de vue des signes, la formulation produite par Myriam est en fait une suite de calculs rédigés sur le mode « machine » (mode opératoire) et d'ordre indiciel (constatation) 7x8= 56 5x4=20 56x20=1120 1120x3=3360 R2.1 SEM Les calculs rédigés par l'enseignante sont éloignés du calcul pragmatique produit par les élèves. L'enseignante essaye d'introduire une écriture et un formalisme axé sur l'utilisation des parenthèses pour rendre compte des étapes du calcul : ces arguments (au sens de Peirce) de type algébrique ne sont pas recevables à ce niveau d'enseignement.

Episode 2 : Discussion sur la méthode

Cet épisode est extrait de la séance 2, phase 2.
Les trois énoncés produits à l'issue de la séance 1 correspondent à des méthodes équivalentes à la méthode du groupe d'Aline, c'est-à-dire : on multiplie tous les nombres entre eux dans n'importe quel ordre. Des élèves soulèvent alors le problème du zéro et du 1, s'ils apparaissent dans le 5-uplet.

> Sylvie: Si tu multiplies 5 par 0 ça fait 0, si tu fais 5 plus 0 ça fait 5.
> Anne : Eh 0 je ne crois pas qu'elle le mettrait dans les chiffres !
> *(La réaction d'Anne met en évidence le caractère très particulier du 0.)*
> Sylvie : Et Aline, elle disait que quand on avait les numéros il fallait tous les multiplier. Et si on fait 1 fois 5, ça fait 5 et si tu fais 1 plus cinq ça fait 6.
> Anne : Bon ça c'est ce que j'avais dit la dernière fois. Bon eh bien la méthode à Aline, ça ne marche pas !

La conclusion formulée par Sylvie est valide, et sa règle de multiplication par zéro correctement formulée. La fonction de son raisonnement est d'invalider la méthode d'Aline

(le nombre le plus grand est obtenu en effectuant le produit de tous les nombres). Ce contre-exemple est refusé par Anne ; cette suite de nombres, selon elle, n'est pas envisageable.
Sylvie propose ensuite un exemple de suite comportant un 1, elle apporte la preuve de la non validité de la méthode d'Aline et emporte l'adhésion du groupe d'Anne.

Nature et fonction – Milieux	Signes et répertoire
Confrontation du sujet apprenant au milieu de référence. M-1 Formulation de conjecture étayée. R1.2 SEM/SYNT Le sujet apprenant revient au milieu objectif afin d'effectuer une comparaison de 2 méthodes dans un cas particulier où la suite comporte un zéro.	R2.2 Arguments locaux. Référence à des suites particulières dans le sens où la première proposition de suite comporte un 0, la deuxième proposition de suite comporte un 1. R3.2 : formulation, et mise en œuvre implicite (indice au sens de Peirce) de la propriété : « 0 est un élément absorbant » Usage indiciel de la propriété « 1 est élément neutre pour la multiplication »

Suite de l'épisode 2

Une élève : Qu'est-ce qu'on fait comme méthode ?
Anne: Il faut multiplier tous les nombres sauf quand il y a des 1, on les additionne.
Anne : Cédric tu fais la méthode d'Aline, toi aussi et nous on fait la méthode celle-là pour voir ceux qui ont la mieux.
Anne : Alors 5,8,1,2,6 allez 5,8,1,2,6…5,8,1,2,6 ; Alors vous deux vous faites la méthode d'Aline et toi tu fais ma méthode, il faut trouver le nombre le plus grand avec cette méthode.
M : Alors vous faites des essais.
Une élève : Oui on fait des essais
Anne : Eux ils font la méthode d'Aline et nous ma méthode.

Nature et fonction – Milieux	Signes et répertoire
Niveau M-1 Raisonnement lié à la formulation d'un contre-exemple à la méthode d'Aline R1.2 Proposition d'un contre-exemple : Formulation d'une suite de nombres, 5-uplet, support pour la comparaison des méthodes et d'une (nouvelle) méthode. Organisation des tâches : répartition des rôles au sein du groupe. Mise en projet. La suite exhibée est en adéquation avec le projet visant à mettre en défaut la méthode d'Aline : établir la preuve de la validité de sa méthode par l'expérimentation dans un cas particulier.	R2.2 Arguments locaux visant à mettre en défaut la méthode d'Aline. La formulation de la méthode d'Anne est imprécise. Elle n'a pas indiqué le nombre auquel il faut ajouter le 1. Formulation de la finalité des calculs i.e. la comparaison effective des résultats obtenus par les 2 méthodes pour une suite en adéquation avec le projet. Recherche explicite d'un *argument symbolique* exprimant la nécessité : *cette méthode est meilleure que… :* « pour voir ceux qui ont la mieux »

Suite…

Anne : Tu as compris ? Tu additionnes le 1 au nombre le plus grand, au nombre le plus grand, ou à n'importe quel nombre mais tu l'additionnes avec un nombre. *(Sa formulation laisse supposer que le résultat est identique quel que soit le nombre auquel on ajoute 1.)*
Anne : On additionne le 1 avec n'importe quel nombre puis on multiplie tout.
Elève 2 : Moi je voulais le mettre en dernier pour l'additionner.
Anne : Ce n'est pas grave tu peux le faire mais je ne sais pas si ça fera pareil.(…) Non, non ça ne fera pas pareil.
Elève 2 : Mais si ça revient au même!

Nature et fonction – Milieux	Signes et répertoire

Niveau M-2 Formulation de la méthode. Cette dernière est imprécise car le nombre auquel il convient d'ajouter le 1 n'est pas précisé. Cette interaction conduit Anne à prendre conscience du fait que les résultats obtenus diffèrent selon le nombre auquel on rajoute le 1.	Utilisation implicite (indicielle) de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition. Anne prend conscience de l'influence du nombre auquel on ajoute le 1 sur le résultat obtenu. Décision sur un objet mathématique (Anne), concernant l'influence du nombre auquel on ajoute 1 sur le résultat obtenu : R1.2

Suite de la discussion sur la suite 5,8,1,2,6
L'expérimentation effectuée, par le groupe, à partir de la suite proposée par Anne 5-8-1-2-6 montre que le résultat (540), obtenu par sa méthode « en ajoutant 1 au nombre le plus grand », est plus grand que celui obtenu par la méthode d'Aline (481).

Anne : Moi j'ai trouvé 540. Regarde (Elle présente son calcul, écrit sur son cahier) au début j'additionne le 1 avec le nombre le plus grand, ça fait 9 9 fois 5 égal 45 45 fois 2 égal 90 et 90 fois 6,égal 540	Lors de la mise en œuvre de la méthode Anne a choisi d'additionner le 1 au nombre le plus grand conformément à la méthode qu'elle a énoncée.
Un élève : On n'a pas dit de faire comme ça.	L'élève fait référence à l'écriture mathématique attendue (écriture avec parenthèse introduite par l'enseignante)
Anne : C'est pas grave, on fait en vitesse. Combien t'as trouvé ?	
Un élève: 540.	
Un autre élève : Moi 481	
Anne : Bon vous écrivez la méthode. « On multiplie tous les nombres, sauf quand il y a un ou plusieurs 1, on l'additionne avec le nombre le plus grand et on multiplie tout. »	Le nombre obtenu par sa méthode étant plus grand que celui produit par la méthode d'Aline, elle invite les élèves du groupe à écrire sa méthode.

On remarque que le nombre obtenu est certes, plus grand que le précédent mais n'est pas, dans l'absolu, le nombre le plus grand possible.

Nature et fonction – Milieux	Signes et répertoire
Confrontation au milieu de référence Elaboration d'une preuve sémantique : R3.2 Retour au milieu objectif pour illustrer l'usage de la (nouvelle) méthode L'exposé des résultats obtenus par les deux méthodes, à partir de la suite choisie par Anne, conduit à mettre en défaut la méthode d'Aline.	R2.2 Arguments locaux ou plus généraux Nature des signes : les calculs sont rédigés sur le mode « opératoire ». Le formalisme, basé sur l'usage des parenthèses, et introduit par l'enseignante, n'est pas utilisé par Anne. Explicitation d'arguments locaux.

La maîtresse écrit au tableau les deux nouvelles méthodes proposées:
Méthode 1 (Jérémy, Aline, Mélanie, Sylvain): On multiplie les nombres entre eux dans n'importe quel ordre sauf avec le 0 et le 1 on fait plus.
Méthode 2 (Anne, Sylvie, Cédric et Séverine) : On multiplie tous les nombres sauf quand il y

a un ou plusieurs 1, on l'additionne avec le nombre le plus grand et on multiplie tout après.

Episode 3 : Extrait de la séance 2, « débat relatif aux méthodes 1 et 2 ». La discussion porte cette fois sur le nombre auquel il faut ajouter 1.

> M : Une autre méthode ? Qui a écrit ça ? Il faut vous décider, vous ne savez pas trop. Vous avez une autre méthode ?
>
> Elsa : Nous on avait fait la première méthode mais si on ajoute le 1 à la fin il y est qu'une fois, il y est qu'une fois ; mais si on le met au plus grand et qu'après on le multiplie, il va être répété plusieurs fois et ça agrandit le nombre.

Nature et fonction – Milieux	Signes et répertoire
Confrontation au milieu M0. Formulation basée un argument de nature syntaxique. Mise en défaut de la méthode 1 (Jérémy, Aline, Mélanie, Sylvain).	R3.3 SYNT Raisonnement explicite basé sur une disjonction de cas conduisant Elsa à produire une conclusion valide. Argument syntaxique : si on ajoute le 1 à un nombre et qu'après on le multiplie, il va y être plusieurs fois.

Nous remarquons que les élèves ne vont que difficilement vers la formulation d'un argument symbolique (au sens peircien) sur le rôle du 1, ce qui est conforme avec l'analyse a priori. Cependant, on peut penser que l'objectif de la séance est atteint puisque l'idée de méthode générale est sous-jacente aux déclarations des élèves et à leur recherche systématique de contre-exemples.

Conclusion

L'analyse de la séquence, réalisée à partir du modèle, a montré que les élèves ont produit de nombreux raisonnements dans des fonctions très diverses telles que : prendre des décisions afin de produire une réponse et justifier la validité de celle-ci, élaborer une méthode générale lors de la situation de formulation, argumenter et débattre de la validité et de la pertinence des méthodes, de manière à formuler une méthode dont le domaine de validité soit le plus étendu possible.

Le modèle met en évidence les raisonnements produits en les reliant aux connaissances et aux savoirs antérieurs du répertoire didactique concernant les opérations élémentaires et les propriétés de la multiplication (commutativité, associativité, élément neutre et distributivité de la multiplication sur l'addition). Du point de vue des formulations, le modèle donne à voir leur évolution en lien avec les différents milieux : on passe de l'énoncé de suites de calculs arithmétiques à la formulation de méthodes générales, de nature quasi algébrique, pour parvenir à la production d'arguments sémantiques et syntaxiques. Cette évolution se produit en situation de débat. L'analyse sémiotique montre aussi le décalage existant entre le formalisme introduit par l'enseignante et le répertoire de signes effectivement mobilisé par les élèves tout au long de la séquence. Ceci conforte l'analyse a priori : la situation « finale » étant algébrique, il était difficile pour les élèves de ce niveau de parvenir à une formulation de cette nature.

Nous avons souhaité mettre en évidence la robustesse de notre modèle pour analyser les raisonnements produits en situation à dimension adidactique, en illustrant son utilisation à un niveau d'enseignement (CM2) assez éloigné de celui illustré initialement en classe de Première scientifique (Bloch et Gibel, 2011).

Références bibliographiques

BESSOT A. (2011) L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations, in *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, 27-54. Coordonné par Margolinas C., Abboud-Blanchard, Bueno-Ravel L., Douek N., Flückiger A., Gibel P., Vandebrouck F. & Wozniak F., Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I. (2006) *Quelques apports de la théorie des situations a la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur.* Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7.

BLOCH I. (2008) Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif, *Les sciences de l'Education, Pour l'ère nouvelle, Numéro spécial* 41-1 (Coordonné par Bailleul M.) 91-114, Université de Caen.

BLOCH I., GIBEL P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 31-2, 191-228, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1998) *La théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G., GIBEL P. (2005) Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics* 59, 13–58.

DURAND-GUERRIER V. (2007) Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques. In Rouchier A. (Ed.) *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ? (Cédérom.).* Bordeaux : IUFM d'Aquitaine.

EVERAERT-DESMEDT N. (1990) *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de CS Peirce.* Liège : Mardaga.

GIBEL P. (2004) *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques*, Doctorat de l'Université de Bordeaux 2.

GIBEL P. (2006) Raisonnement et argumentation : Analyse des différentes formes et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) *Actes du colloque EMF 2006 (Cédérom).* Sherbrooke : Éditions du CRP.

GIBEL P. (2008) Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 13, 5-39, IREM de Strasbourg.

GLAESER G., (1999), « *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques* », Edition La Pensée Sauvage, Grenoble

LEGRAND M. (1997) La problématique des situations fondamentales, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(2) 221–279.

MARGOLINAS C. (1994) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In Margolinas C. (Ed.) *Les débats de didactique des mathématiques*, (pp.89–102). Grenoble : La Pensée Sauvage.

OLERON P. (1977) *Le raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.

PEIRCE C. S. (1995) *Le raisonnement et la logique des choses* (Trad. par Chauviré C., Thibaud

PEIRCE C. S. (1978) *Écrits sur le signe (traduction et commentaires de Deledalle, G.).* Paris : Seuil.

ANNEXE

Les différentes phases de chacune des trois séances

Les différentes phases de la séance 1

Phase 1 : Dévolution du jeu. Suite proposée 3,8,7,5,4

Phase 2 : Informations complémentaires.

Phase 3 : Recherche individuelle.

Phase 4 : Mise en commun. Etablissement des résultats et désignation des gagnants.

Phase 5 : Comparaison de méthodes.

Phase 6 : Consigne du deuxième jeu 7,3,2,5,8

Phase 7 : Recherche individuelle.

Phase 8 : Mise en commun. Exposition des résultats et désignation des gagnants.

Phase 9 : Consigne relative au concours de propositions.

Phase 10 : Recherche

Phase 11 : Regroupement. Formulation des propositions. Débat relatif aux propositions.

Phase 12 : Phase de jeu 2,5,3,2,4

Phase 13 : Présentation des résultats.

Les différentes phases de la séance 2

Phase 1 : Consigne relative au concours de propositions.

Phase 2 : Recherche en groupe.

Phase 3 : Mise en commun. Explicitation des méthodes.

Phase 4 : Débat relatif aux méthodes.

Phase 5 : Phase de jeu. 5,2,4,0,3

Phase 6 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.

Phase 7 : Proposition de nouvelles méthodes.

Phase 8 : Phase de jeu 8,1,3,0,0

Phase 9 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.

Phase 10 : Proposition d'une nouvelle méthode

Phase 11 : Recherche d'un contre-exemple à une méthode.

Phase 12 : Propositions de contre-exemples. Débats relatifs à la validité des contre-exemples.

Phase 13 : Proposition de nouvelles méthodes.

Phase 14 : Phase de jeu (7-0-4-3-1).

Phase 15 : Présentation des résultats.

Phase 16 : Recherche de contre-exemples.

Phase 17 : Proposition de contre-exemples.

Les différentes phases de la séance 3

Phase 1 : Mise en commun des résultats suite à la série proposée par Hélène (8-1-1-1-0)

Phase 2 : Débat relatif au statut de la proposition d'Hélène.

Phase 3 : Présentation par la maîtresse d'une série de nombres (1-1-1-1-1).

Phase 4 : Recherche de la méthode correspondante.

Phase 5 : Présentation des méthodes. Explicitation du contre-exemple.

Phase 5 : Phase de jeu. (1-1-1-1-9)

Phase 6 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.

Phase 7 : Recherche de contre-exemples.

Phase 8 : Phase de rédaction individuelle d'une méthode.

Séminaires et Colloquium de 2011 Programmes

Programme du séminaire national de didactique des mathématiques des 18 et 19 mars 2011

Séminaire organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM)

http://ardm.eu/

Les conférences se dérouleront à la Halle aux Farines
sur le site PRG de l'Université Paris Diderot – Paris 7,
vendredi 18 mars : amphi 10 E
Samedi 19 mars : amphi 7C

Accès et plan du bâtiment :
http://ardm.eu/contenu/les-seminaires-nationaux

Responsables du séminaire national de didactique des mathématiques :

Maha Abboud-Blanchard
maha.blanchard@math.jussieu.fr
LDAR, Université Paris-Diderot, case courrier 7018, 75205 Paris cedex 13

Annick Fluckiger
annick.fluckiger@unige.ch
Equipe DiMaGe, FPSE, Université de Genève, CH- 1211Genève 4

Le séminaire est organisé avec le partenariat de l'IREM de Paris 7.

Vendredi 18 mars 2011 – 14h-19h **Amphi 10E**

Fête des 30 ans de la revue RDM

14h à 16h30
Table ronde - Passé et présent : quels apports de la revue RDM ?
Nicolas BALACHEFF, Annie BESSOT, Florence LIGOZAT, Yves MATHERON, André ROUCHIER, Maggy SCHNEIDER

16h30 à 17h Moment festif **Salle 165E**

17h à 19h
Table ronde - Le futur: quelles perspectives pour la revue RDM ?
Michèle ARTIGUE, Nicolas BALACHEFF, Jean-Luc DORIER, Aline ROBERT, Claire MARGOLINAS, Joris MITHALAL

Samedi 19 mars 2011 – 9h-12h30 **Amphi 7C**

9h à 11h Hors les murs
Études des enseignements- apprentissages en statistique : Questions de disciplines
Dominique LAHANIER-REUTER (Laboratoire Théodile-CIREL Université Lille 3)
11h15 à 12h30 Travaux d'équipe
Expérimentation et position du chercheur en didactique des mathématiques : réflexion autour du thème du IVème séminaire des jeunes chercheurs de l'ARDM.
Audrey DAINA (DiMaGe, Université de Genève), Anne-Cécile MATHE (LML, Université d'Artois), Nicolas PELAY (ICJ, Université Lyon 1), Hussein SABRA (LEPS, Université Lyon 1).

Samedi 19 mars 2011 – 13h45-17h **Amphi 7C**

13h 45 à 14H45 Plage de l'ARDM
Assemblée générale de l'ARDM

15h à 17h Travaux d'équipe
Quand un prof rencontre un autre prof... Un dispositif didactique de confrontation entre deux enseignants du primaire et du secondaire.
Audrey DAINA, Pierre-Alain CHERIX, François CONNE, Jean-Luc DORIER, Annick FLUCKIGER (Equipe DiMaGe – Université de Genève)

Programme du séminaire national de didactique des mathématiques des 13 et 14 mai 2011

Séminaire organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM)
http://ardm.eu/

Les conférences se dérouleront à la Halle aux Farines
sur le site PRG de l'Université Paris Diderot – Paris 7,
Vendredi 13 mai : amphi 10 E
Samedi 14 mai : amphi 7C

Accès et plan du bâtiment :
http://ardm.eu/contenu/les-seminaires-nationaux

Responsables du séminaire national de didactique des mathématiques :

Maha Abboud-Blanchard
maha.blanchard@math.jussieu.fr
LDAR, Université Paris-Diderot, case courrier 7018, 75205 Paris cedex 13

Annick Fluckiger
annick.fluckiger@unige.ch
Equipe DiMaGe, FPSE, Université de Genève, CH- 1211Genève 4

Le séminaire est organisé avec le partenariat du LDAR et de l'IREM de Paris 7

Vendredi 13 mai 2011 – 14h-19h Amphi 10E

Après midi thématique : Recherches autour de l'utilisation des technologies dans l'enseignement

14h - 15h30 Présentation d'HDR
La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : La modélisation des connaissances des élèves. Hamid CHAACHOUA (Laboratoire LIG, IUFM de Grenoble, UJF)

15h45 – 16h20 Présentation de travaux
Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. Caroline POISARD (IUFM de Bretagne/UBO, laboratoire du Cread)

16h30 - 17h Moment festif Salle 470E

17h - 17h35 Présentation de thèse
Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle. Joris MITHALAL (IUFM de Paris – LDAR)

17h35 – 18h10 Présentation de thèse
Les logiciels tuteurs fermés : institutions d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques ? Le cas du début du secondaire. Laurent SOUCHARD (Inspecteur de mathématiques et d'informatique, Ministère de l'agriculture. Chercheur associé au LDAR, université de Paris 7 et au CREAS, université de Sherbrooke)

18h10 – 19h Synthèse et perspectives suivie d'un Débat Général
Michèle ARTIGUE (Laboratoire de Didactique André Revuz)

Samedi 14 mai 2011 – 9h-12h15 Amphi 7C

9h - 10h45 Synthèse de travaux
L'épistémographie : mise au point d'un outil au service de la didactique
Jean-Philippe DROUHARD (URE "I3DL" - Université de Nice Sophia Antipolis - UMR P3 "ADEF" - Aix-Marseille Universités, INRP)

11h - 12h15 Présentation de thèse
La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.
Mirène LARGUIER (IUFM de Montpellier, Université Montpellier 2)

Samedi 14 mai 2011 – 13h30-17h Amphi 7C

13h 30 - 14H30 Plage de l'ARDM

14h45 - 17h Travaux d'équipe
Présentation, par quelques didacticiens des mathématiques de l'équipe de l'UMR P3-ADEF « L'étude, son Organisation, les Savoirs, variations disciplinaires et institutionnelles » (EtOS), de certains de leurs travaux actuels...
Alain MERCIER, Teresa ASSUDE, Yves MATHERON, Serge QUILIO (UMR P3 ADEF/équipe EtOS)

Programme du séminaire national de didactique des mathématiques des 14 et 15 octobre 2011

Séminaire organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM)
http://ardm.eu/

Les conférences se dérouleront à la Halle aux Farines
sur le site PRG de l'Université Paris Diderot – Paris 7,

Vendredi 14 octobre : Salle des thèses (5ème étage - 580F)
Samedi 15 octobre : Amphi 4C

Accès et plan du bâtiment :
http://ardm.eu/contenu/les-seminaires-nationaux

Responsables du séminaire national de didactique des mathématiques :

Maha Abboud-Blanchard
maha.blanchard@math.jussieu.fr
LDAR, Université Paris-Diderot, case courrier 7018, 75205 Paris cedex 13

Annick Fluckiger
annick.fluckiger@unige.ch
Equipe DiMaGe, FPSE, Université de Genève, CH- 1211Genève 4

Le séminaire est organisé avec le partenariat du LDAR et de l'IREM de Paris 7

Vendredi 14 octobre 2011 – 14h-19h – *Salle des Thèses (580F)*

14h à 16h **Colloquium ARDM & CFEM**
Didactique et diffusion des connaissances mathématiques : questionnements et perspectives.
Yves CHEVALLARD
Professeur à l'Université de Provence. Lauréat 2009 du prix Hans Freudenthal
Docteur honoris causa de l'Université de Liège

16h à 16h30 **Moment festif** - *Salle 278F*

16h30 à 18h **Présentation d'HDR**
Développer le modèle praxéologique pour analyser les dynamiques de la cognition institutionnelle
Corine CASTELA (LDAR Université Paris Diderot - Université de Rouen, IUFM de Haute-Normandie)

18h à 19h **Présentation de thèse**
Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.
Eric MOUNIER (LDAR Université Paris Diderot - Université Paris-Est Créteil, Paris 12)

Samedi 15 octobre 2011 – 9h-12h - *Amphi 4C*

9h à 10h30 **Hors les murs**
Des approches Franco-Hollandaises en didactique des mathématiques. L'exemple des recherches relatives aux TICE.
Paul DRIJVERS (Freudenthal Institute, Utrecht University, Utrecht, Pays-Bas)

10h45 à 11h45 **Présentation de thèse**
Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire
Stéphane CLIVAZ (HEP Vaud, Lausanne et Université de Genève)

Samedi 15 octobre 2011 – 13h15-17h – *Amphi 4C*

13h15 à 14h15 **Plage de l'ARDM**

14h30 à 16h **Présentation d'HDR**
De l'analyse de pratiques ordinaires d'enseignement des mathématiques au développement de situations didactiques. Un exemple relatif à l'entrée dans la rationalité mathématique au cycle 3.
Magali HERSANT (IUFM des Pays de la Loire, CREN, Université de Nantes)

16h à 17h **Présentation de travaux**
Les raisonnements dans les situations à dimension adidactique : présentation d'un modèle d'analyse multidimensionnel
Isabelle BLOCH et Patrick GIBEL (Université Bordeaux IV, IUFM d'Aquitaine-Laboratoire LACES, Université Bordeaux II et Bordeaux IV)

Sommaire *Le sommaire complet avec les titres des textes se trouve au début de l'ouvrage.*

Éditeur : IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot
Directeur responsable de la publication : F. Vandebrouck
www.irem.univ-paris-diderot.fr
Dépôt légal : 2012 - ISBN : 978-2-86612-336-9