La réforme des programmes du lycée et alors ?

Les nouveaux programmes en mathématiques et en physique.
Leur impact sur l'enseignement post baccalauréat

ACTES DE COLLOQUE IREM

Commission Inter IREM Université
Commission Inter IREM Lycée

Commission Inter IREM Stat-Proba

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

La Commission Inter IREM Université (CI2U), avec la collaboration des C2I Lycée et C2I Statistique et Probabilités, a organisé à Lyon les 24 et 25 mai 2013 un colloque sur la transition lycée–post baccalauréat et plus particulièrement sur la réforme des programmes scientifiques de Lycée, en mathématiques et en physique, avec son impact potentiel dans l'enseignement supérieur à partir de la rentrée 2013.

Il s'agissait d'aider les collègues du secondaire et du supérieur à identifier les pertes et les nouveautés dans les derniers programmes de terminale en mathématique et en physique, avec leurs conséquences possibles sur les connaissances des étudiants entrant dans le supérieur en 2013. Plus précisément, il s'agissait

- d'aider les collègues du secondaire à s'appuyer sur les nouveaux programmes, à identifier les opportunités s'y trouvant pour travailler correctement les notions dans la perspective de la transition ;

- d'aider les collègues du supérieur à mieux connaître le travail accompli par leurs élèves quand ils étaient au Lycée et les aider à identifier ce sur quoi ils pouvaient s'appuyer raisonnablement pour concevoir leurs enseignements à partir de la rentrée 2013.

Les 3 conférences et les 12 ateliers étaient co-animés par des enseignants de mathématiques et de physique ou des enseignants du secondaire et du supérieur. Ce colloque souhaitait aider à la connaissance des programmes de chaque ordre et de chaque discipline

Comité Scientifique

Fabrice Vandebrouck (CI2U, IREM de Paris)
Nicolas Décamp (Université Paris Diderot, UFR de Physique)
Françoise Hérault (C2I Lycée, IREM de Paris)
Philippe Lac (C2I Lycée, IREM de Clermont-Ferrand)
Gwenola Madec (CI2U, IREM Paris-Nord)
Hubert Raymondaud (C2I Proba-Stat, IREM de Toulouse)
Hervé Vasseur (C2I Proba-Stat, IREM d'Orléans),

Comité d'Organisation

Patrick Frétigné (CI2U, IREM de Rouen)
Christian Mercat (IREM de Lyon)

CONFERENCE D'OUVERTURE : ÉTAT DES NOUVEAUX PROGRAMMES ET ATTENTES DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

Dominique Bernard, IREM Lyon, CII Lycée ;
Isabelle Lémonon, GREPhyC[1] IREM Paris7 ;
Pascal Sauvage, GREPhyC IREM Paris 7 ;
Loïc Lanco Université Paris Diderot ;
Nicolas Saby, IREM de Montpellier et CII Université

Nouvelles méthodologies dans l'enseignement et dans l'évaluation, changements importants de contenus et d'horaires ; ces nouvelles pratiques introduites par la réforme du lycée en physique-chimie et en mathématiques posent des questions nouvelles, mais elles s'accompagnent aussi d'appréhensions et de difficultés, notamment en ce qui concerne la transition secondaire-supérieur. Au cœur de ces interrogations émergent d'une part la question de l'évolution des pratiques d'enseignement, mais aussi celle de l'articulation entre mathématiques et sciences physiques.

Les cinq textes qui suivent sont des transpositions des présentations de la conférence d'ouverture du colloque national des 24 et 25 mai à Lyon, organisé par les IREM et qui avait pour objet la réforme des programmes du Lycée, ses enjeux et ses implications, notamment pour l'enseignement supérieur. Ces présentations sont accessibles sur le site des Portails des IREM : http ://www.univ-irem.fr/spip.php ?rubrique298

Les trois premiers textes portent sur les programmes du lycée. Dominique Bernard, enseignante en mathématiques et Isabelle Lémonon, enseignante en sciences physiques et chimiques présentent le programme dans leurs disciplines respectives. L'accent est mis sur la description des changements, tant du point de vue pratique (nombre d'heures, contenus) que dans l'esprit des nouvelles pratiques d'enseignements associées. Pascal Sauvage, enseignant en sciences physiques et chimiques, traite plus spécifiquement de la place des mathématiques dans le programme de sciences physiques et chimiques. L'accent est mis sur l'évolution des contenus ainsi que sur les enjeux interdisciplinaires, en particulier en ce qui concerne les pratiques d'enseignement qui diffèrent parfois grandement entre les deux disciplines.

Les deux derniers textes portent sur l'enseignement universitaire. Loïc Lanco, enseignant-chercheur en physique, aborde les enjeux de la transition secondaire-supérieur en Licence de physique. Les questions de technicité mathématique visée en fin de Master, les différences de pratiques entre physiciens et mathématiciens, ainsi que les difficultés spécifiques à l'Université sont au cœur de son discours. Nicolas Saby, enseignant chercheur en mathématique, rappelle les nombreuses contraintes structurelles et institutionnelles auxquelles est soumise l'Université en général et l'enseignement des mathématiques en particulier.

[1] Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des sciences Physiques et Chimiques.

1. LE NOUVEAU PROGRAMME DE MATHEMATIQUES EN TERMINALES S. PERTES ET NOUVEAUTES POUR LES ETUDIANTS ENTRANT DANS LE SUPERIEUR (DOMINIQUE BERNARD)

Le Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011 fixe les objectifs du programme de terminale scientifique : donner à chaque élève la culture mathématique indispensable pour sa vie de citoyen et les bases nécessaires à son projet de poursuite d'études, former à la démarche scientifique avec pour objectif de procurer aux élèves un bagage solide tout en donnant le goût de la recherche. Ceci s'inscrit donc dans un continuum. Les attendus concernent, comme dans les autres séries, la modélisation de situations à l'aide d'outils mathématiques mais aussi les capacités à effectuer des démonstrations et mener des raisonnements plus abstraits. L'accent est mis sur l'utilisation d'outils logiciels notamment lors de la résolution de problèmes pour limiter le temps consacré aux calculs techniques. Mais on peut se demander si ces ambitions affichées seront réalisables avec l'organisation des enseignements et le développement des capacités attendues.

Les grilles horaires et les contenus disciplinaires

Les grilles horaires

Les horaires élèves en classe entière sont pour le cycle terminal 4h en Première S et 6h en Terminale S plus éventuellement 2h en spécialité mathématiques au lieu de 5h en Première S et 5,5h en Terminale. Des heures dédoublées sont à prendre dans l'enveloppe gérée par chaque établissement[1] d'où une grande disparité suivant les établissements. En classe Terminale, l'accompagnement personnalisé[2] prend appui sur les dominantes disciplinaires des séries et contribue à la préparation à l'enseignement supérieur. Là encore on observe des mises en place fort diverses tant par les horaires que les contenus. Le déséquilibre des heures d'enseignement entre la Première et la Terminale ne laisse certainement pas le temps nécessaire pour la réflexion sur les notions et ne ménage plus de transition entre les deux niveaux. De plus, l'horaire global est certainement insuffisant pour disposer du temps qui permettrait aux élèves de prendre goût à la recherche.

Les contenus disciplinaires

Le programme se répartit en une moitié du temps consacré à l'analyse, l'autre moitié à la géométrie et aux statistiques et probabilités. De copieux documents ressources sont proposés.

Ce qui disparaît en analyse : les définitions rigoureuses concernant les limites, la continuité et la dérivation. La dérivation des fonctions composées est connue dans quelques cas mais la formule générale disparaît ainsi que la résolution des équations différentielles La fonction tangente n'est plus au programme. Les suites adjacentes ne sont plus étudiées, l'intégrale est introduite comme une aire sous la courbe et les propriétés qui suivent sont admises. L'intégration par parties a disparu. En géométrie disparaissent les barycentres, l'utilisation des nombres complexes et les transformations complexes. En probabilités, la loi binomiale

[1] Chaque établissement dispose d'une enveloppe de 10 heures par semaine et par classe à répartir sur des enseignements ou projets de son choix.

[2] http ://www.education.gouv.fr/cid50471/mene1002847c.html

disparaît du programme de terminale parce qu'étudiée en première ; il n'y a plus de dénombrement ni de formule sur les coefficients binomiaux, on utilise les arbres de probabilités et la calculatrice.

Ce qui apparaît en analyse : les limites finies ou infinies à l'infini ou en un point, les asymptotes, les fonctions trigonométriques sinus et cosinus ne sont vues qu'en terminale, les dérivées de certaines fonctions composées sont à connaître. Les élèves n'ont pas fait de géométrie dans l'espace en première donc en terminale apparaissent les positions relatives de droites et de plans, le théorème du toit. Le plus gros changement est en statistiques et probabilités où apparaissent : loi normale centrée réduite, loi normale, théorème de Moivre-Laplace, intervalle de fluctuation, intervalle de confiance. Cette partie de programme semble excessive et ses contenus trop ambitieux pour être parfaitement maîtrisés par les élèves. Cette partie de programme a demandé un investissement important des enseignants. (Il est remarquable qu'aucune question n'ait été posée sur la loi normale au bac S 2013 en métropole).

Thèmes transversaux : sur les trois niveaux du lycée on trouve des recommandations sur l'algorithmique, le raisonnement et les notations mathématiques. En algorithmique, les élèves sont entraînés, dans le cadre de la résolution de problèmes, à décrire certains algorithmes en langage naturel ou symbolique, à en réaliser quelques uns sur calculatrice ou logiciel adapté, à interpréter des algorithmes plus complexes. Aucun langage n'est imposé. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne font pas l'objet de cours spécifiques. Le vocabulaire et les notations sont introduits au fur et à mesure; il n'est nulle part précisé quel travail spécifique est attendu mais il est possible d'institutionnaliser a posteriori... Qu'en restera-t-il post-bac ?

L' « esprit » de la réforme et sa mise en œuvre.

L'esprit de la réforme

Nulle part n'est présentée aux enseignants une vision globale, cohérente et explicite des choix opérés pour l’enseignement des mathématiques du collège au lycée, que ce soit en termes de culture générale, d’outils nécessaires pour les futurs scientifiques ou de formation au raisonnement.

L'objectif général annoncé est de donner une culture mathématique et une base pour un projet d'étude. Pour cela le programme vise des compétences transversales : mettre en œuvre une recherche de façon autonome, mener des raisonnements, avoir une attitude critique vis à vis des résultats et communiquer à l'écrit et à l'oral. Les activités en classe, et en dehors de la classe, doivent prendre appui sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou issus d'autres disciplines. L'utilisation de logiciels, d'outils de calculs formels et scientifiques doit changer profondément la nature de l'enseignement en favorisant la démarche d'investigation. Les modes d'évaluation doivent prendre des formes variées (mais il n'y a aucun changement, pour le moment, de l'épreuve du bac)

Si l'on ne peut qu'adhérer à ces objectifs généraux, on peut regretter que le développement des capacités attendues ne soit pas en accord avec ces annonces des préambules. On rencontre trop souvent les verbes « observer », « connaître »... et l'on peut se demander quelle est la part de la modélisation ?

L'approche par compétences

Aucune nouvelle épreuve au baccalauréat. L'évaluation par compétences est encore confidentielle en mathématiques au lycée.

L'accompagnement personnalisé

Quelques propositions d'approfondissement, destinées à des activités dans le cadre de l'accompagnement personnalisé figurent dans le programme comme par exemple l'étude de phénomènes d'évolution, les équations fonctionnelles. Mais il semble que dans bien des établissements l'accompagnement personnalisé soit réduit, en dehors de l'orientation, au soutien et à la remédiation.

L'ouverture interdisciplinaire

Les incitations au travail interdisciplinaire sont fortes : après un enseignement d'exploration « méthodes et pratiques scientifiques en seconde », des TPE en première, le programme de terminale signale des points de convergence avec les autres disciplines scientifiques, notamment les sciences physiques : ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique, radioactivité, intensité sonore, magnitude d'un séisme par exemple. Mais quelle place accorder à ces incitations lorsqu'on sait par exemple que la radioactivité a pratiquement disparu des programmes de physique-chimie ?

Conclusion

Les nouveaux programmes comportent de nombreuses évolutions qui demandent un effort d'autoformation des enseignants : logique, techniques de calcul, algorithmique, probabilités et statistique.... Les documents ressources, pour utiles qu'ils soient, ne sauraient suffire pour permettre une réelle implication de tous les enseignants dans ces domaines. L'apparition d'un contenu extrêmement ambitieux dans le cadre de l'accompagnement personnalisé à l'intérieur des programmes semble officialiser et à tout le moins rend possible un enseignement à deux vitesses dans différents lycées d'où une disparité certainement encore plus grande des pratiques des élèves à l'entrée dans le supérieur.

La part croissante de l'algorithmique et de la simulation ont peut-être rendu la discipline davantage « expérimentale », en lien plus étroit avec le réel. Par ailleurs, la maîtrise du calcul n'est sans doute pas un objectif du programme (cf. recours au calcul formel en cas de calculs « très techniques »). L'évitement trop systématique des difficultés et des constructions théoriques, pourrait, contrairement aux buts que l'on prête aux rédacteurs du programme, détourner des mathématiques nombre de scientifiques français de demain.

2. LES NOUVEAUX PROGRAMMES DE SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES AU LYCEE (ISABELLE LEMONON)

Les changements structurels et disciplinaires imposés par les nouveaux programmes de lycée en mathématiques, ont une résonance particulière avec l'enseignement des sciences physiques, même si ce dernier subit certainement une réforme plus profonde. En effet, si les contraintes horaires ont suivi les mêmes variations et adaptations, « l'esprit » de la réforme en sciences physiques tend à bouleverser les pratiques des enseignants aussi bien d'un point de vue des méthodes d'enseignement que des méthodes d'évaluation. Ces bouleversements sont guidés par deux objectifs centraux : **la formation des esprits et l'acquisition de connaissances** (BO Spécial n° 8 du 13 octobre 2011)**,** nécessaires à la construction d'une culture scientifique et citoyenne, et au développement des vocations pour la science. On n'examinera ici en détail que la voie générale scientifique, mais les changements profonds mentionnés pour cette série sont également représentatifs de ceux réalisés dans les sections générales L/ES et technologiques STL/STI.

Les grilles horaires et les contenus disciplinaires

Les grilles horaires

Tout comme l'enseignement des mathématiques, celui des sciences physiques voit ses horaires modifiés. Cette variation ne peut se résumer à une simple hausse ou baisse des horaires, car l'autonomie des établissements influe de manière importante sur les grilles horaires et leur modalité d'application (voir tableau 1 en annexe). Pour résumer, l'ancien horaire annuel national[1] de sciences physiques était de 416 heures pour un élève suivant une scolarité de la seconde à la Terminale S (sans enseignement de spécialité). Avec la réforme, cet horaire passe à 384 heures +/- 40 heures avec le jeu des heures distribuées par le chef d'établissement[2] et l'usage de l'accompagnement personnalisé. Cette variabilité des horaires d'un établissement à l'autre s'accompagne également d'une variabilité des conditions d'enseignement. En effet, la répartition de l'horaire de sciences physiques entre les enseignements en travaux pratiques (demi-groupe) et ceux réalisés en classe entière est laissée au choix de l'établissement. On constate donc des variations qui peuvent être importantes d'un établissement à l'autre (BUP, vol 107, mars 2013). On peut alors s'interroger sur leurs conséquences quant à la disparité des profils des futurs bacheliers scientifiques issus de cette réforme.

Les contenus disciplinaires

La réforme des programmes en sciences physiques conduit également à une évolution des contenus disciplinaires vers la physique moderne. Ainsi, l'électricité, partie importante de l'ancien programme de Terminale S, disparaît[3], au profit de la relativité restreinte et de la mécanique quantique (cette dernière n'étant qu'effleurée dans l'ancien programme). La mécanique du point, auparavant traitée dès la 1ere S, est principalement étudiée en Terminale S, tout en allégeant l'approche différentielle omniprésente dans l'ancien programme. Cette orientation s'insère dans une volonté de changer les pratiques des enseignants.

[1] Sur une année de 32 semaines

[2] Chaque établissement dispose d'une enveloppe de 10 heures par semaine et par classe à répartir sur des enseignements ou projets de son choix.

[3] Une approche énergétique est conservée en 1ere S

L'« esprit » de la réforme et l'approche par compétences

L'esprit de la réforme

Cette réforme place l'enseignant face à une liberté pédagogique extrêmement étendue, où **la seule contrainte est qu'au bout du compte, l'ensemble des notions et contenus explicités dans le programme soient traités dans la perspective de l'acquisition par tous les élèves des compétences exigibles précisées, tout en respectant l'esprit de la démarche scientifique**. (BO Spécial n° 8 du 13 octobre 2011). L'approche thématique des sciences physiques est ainsi privilégiée, rompant avec l'ancien découpage physique / chimie. L'enseignant est libre de suivre les thèmes proposés (comme la santé, le sport, l'univers en classe de 2nde) ou de créer ses propres « fils rouges ». La réforme valorise l'approche des sciences physiques par l'étude de problématiques sociétales ou scientifiques, qui placent l'élève comme acteur de la démarche scientifique. Les activités d'analyse (documentaire, expérimentale) et de questionnement sont au coeur de l' « esprit » de la réforme, ce qui entraîne nécessairement une diminution des activités fondées sur la technicité mathématique (ces activités de questionnement et d'analyse étant grandes consommatrices de temps). Tous ces changements constituent un véritable bouleversement des pratiques des enseignants, qui nécessite un accompagnement. Cette nécessité est d'autant plus importante, que les méthodes d'évaluation évoluent également.

L'approche par compétences

La réforme, comme indiquée précédemment, vise l'acquisition de compétences et de connaissances en sciences physiques qui pour certaines ne peuvent être évaluées en utilisant les anciens systèmes de barèmes. Ainsi les compétences « extraire » et « exploiter », centrales dans le programmes de Terminale S, et associées à des activités d'analyse documentaire (ou expérimentale) et de questionnement ne peuvent être notées au demi ou point près. L'évaluation s'appuie donc sur de nouvelles grilles basées sur les six compétences de base : s'approprier, analyser, réaliser, valider, communiquer et faire preuve d'autonomie. Cette nouvelle forme d'évaluation des tâches complexes, déjà en place au collège, a intégré cette année les épreuves du baccalauréat, **qui mettront l'accent sur l'acquisition de la méthodologie scientifique** (BO Spécial n° 8 du 13 octobre 2011). Cette nouveauté dans l'enseignement et l'évaluation des sciences physiques se traduit très concrètement par un nouvel exercice de baccalauréat : la synthèse argumentée de documents (comparable à celle qui existe en SVT), et par l'évaluation par compétences de l'épreuve expérimentale. Là encore, les pratiques des enseignants sont soumises à un grand bouleversement.

Conclusion

Tous ces changements dans l'enseignement des sciences physiques entraîneront certainement une profonde évolution du profil des futurs bacheliers scientifiques à laquelle devra s'adapter l'université et la formation initiale et continue des enseignants : une culture scientifique plus large qu'auparavant, des connaissances moins approfondies, une meilleure capacité d'analyse et de questionnement (en activités documentaire et expérimentale), une capacité de communication plus riche mais aussi une technicité mathématique moins importante.

3. INTERACTIONS MATHEMATIQUES – SCIENCES PHYSIQUES DANS LE CONTEXTE DE LA REFORME DU LYCEE (PASCAL SAUVAGE)

Les mathématiques dans les nouveaux programmes de physique et chimie de la filière S occupent une place bien différente de celle qu'elles avaient dans les anciens programmes : nette diminution du volume, disparition de certains sujets (équations différentielles, fonction exponentielle), apparition d'autres, mais aussi et surtout une modification de l'importance relative des différents objets mathématiques abordés. Au final, c'est le statut des mathématiques dans l'enseignement des sciences physiques et chimiques qui est modifié et l'interaction entre les deux disciplines qu'il s'agit peut-être de repenser sous un jour nouveau.

Les Mathématiques dans le nouveau programme SPC

Un changement des contenus

La place et la nature des sujets de mathématiques présents dans le nouveau programme de physique et chimie ont été modifiées de manière importante. Ainsi, la fonction exponentielle et les équations différentielles, avant très présentes, ne figurent plus dans le nouveau programme[1]. Le calcul différentiel et le calcul vectoriel, bien que toujours présents, occupent maintenant une place bien moins importante. Au contraire, les équations algébriques ainsi que le thème de la mesure expérimentale[2] et des incertitudes occupent un rôle central dans le nouveau programme. Plusieurs sujets nouveaux font aussi leur apparition sans pour autant faire l'objet d'approfondissements : le concept de champ, l'analyse spectrale et le calcul binaire. On assiste dans l'ensemble à une diminution du volume des mathématiques et de la technicité attendue de la part des élèves. On peut penser que ces changements, et en particulier la diminution de technicité attendue, sont vraisemblablement liés à l'évolution de l'esprit du programme de physique et chimie dans lequel le questionnement et la démarche scientifique sont placés au cœur de l'activité pédagogique, ce qui nécessite un temps certain.

De nouveaux enjeux d'enseignement

Dans ce nouveau contexte, on constate que les mathématiques de la filière S s'organisent maintenant autour de trois thèmes importants : les équations algébriques, les grandeurs et mesures expérimentales, et la proportionnalité-linéarité. Ce dernier thème est omniprésent et intervient sous les formes extrêmement variées qu'on lui connaît (formules algébriques, conversions, graphiques, échelles, pourcentages, modélisations fonctionnelles, …). Si les équations algébriques utilisées au lycée ne font intervenir que des opérations élémentaires (addition-soustraction, multiplication-division, puissance carrée-racine, …) et demeurent extrêmement simples mathématiquement, elles n'en restent pas moins fondamentales dans le

[1] Seule l'équation du type $f''(x) = \text{constante}$ est étudiée en TS dans le nouveau programme. Sa résolution ne faisant intervenir que l'opération de primitive, nous la distinguons des équations habituellement qualifiées d'équations différentielles.

[2] Le choix de l'expression « mesure expérimentale » (pléonasme pour un expérimentateur) vise à lever l'ambiguïté du terme « mesure », qui est aussi utilisé par les mathématiciens dans le contexte de la « théorie de la mesure ».

contexte des sciences expérimentales tant par la place importante qu'elles occupent effectivement en sciences, mais aussi par le rôle étroit qu'elles entretiennent conceptuellement avec les équations différentielles[1]. Sur le plan de la formation scientifique – toujours dans le contexte des sciences expérimentales – les équations algébriques sont aussi extrêmement riches de par les modes de pensée et savoir-faire mis en jeu : prise en compte de la nature des grandeurs présentes, réalisation d'une analyse dimensionnelle, gestion pertinente des unités, analyse de la dépendance entre les grandeurs, comparaisons entre les grandeurs, réalisation de représentations graphiques pertinentes, applications numériques, utilisation de tableurs, maîtrise du domaine de validité de la formule envisagée comme modèle, ou encore calculs d'incertitudes. La maîtrise par les élèves de ces différents aspects est bien moins évidente qu'il n'y parait, mais reste essentielle à une formation scientifique solide. Enfin, le thème grandeurs et mesures expérimentales – intrinsèque à la discipline – est explicitement renforcé dans les programmes et renvoie notamment aux notions de chiffres significatifs, d'incertitude expérimentale, de moyenne ou encore d'écart type.

Les enjeux interdisciplinaires mathématiques-sciences physiques

Un nouveau cadre, de nouveaux sujets à partager.

La réforme pose un cadre nouveau propice aux travaux co-disciplinaires : l'Accompagnement Personnalisé, les Enseignements d'Exploration en classe de Seconde, les Travaux Personnels Encadrés en classe de Première ou encore la modularité permise dans le nouveau programme de physique et chimie, sont autant d'occasions pour les enseignants de disciplines différentes de travailler ensemble et d'échanger sur leurs pratiques. Cependant, avec la disparition des équations différentielles et de la fonction exponentielle du programme de physique et chimie de Terminale S, de nombreux enseignants ont le sentiment d'avoir perdu un lien de co-disciplinarité très fort. En pratique, l'enseignant de physique et chimie n'a pour ainsi dire plus besoin des apports théoriques qui sont développés en cours de mathématiques cette même année et l'enseignant de mathématiques ne peut plus compter sur l'enseignant de physique et chimie pour illustrer les concepts mathématiques par des cas concrets. Toujours du point de vue strict des contenus, on peut noter cependant que le renforcement du thème de la mesure expérimentale dans le programme de physique et chimie et l'entrée en force des statistiques et probabilités dans celui de mathématiques, invitent à explorer cette nouvelle voie. Ainsi, un travail au sein du cours de mathématiques sur des données obtenues par les élèves en activité expérimentale de physique ou de chimie est envisageable. Il semble cependant qu'en l'état, les deux disciplines n'ont pas encore le recul nécessaire pour envisager de réels interactions sur le sujet.

Un besoin de coordination des pratiques d'enseignement entre les sciences physiques et les mathématiques

Au-delà des contenus des programmes et de cette réforme, on peut relever qu'aujourd'hui encore, par de nombreux aspects, sciences physiques et mathématiques peuvent « interférer

[1] On peut illustrer ce propos simplement à l'aide par exemple du concept de vitesse qui peut se décliner sous forme algébrique, c'est la vitesse moyenne $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$; ou sous forme différentielle, c'est la vitesse instantanée $v{=}dx/dt$.

destructivement » au sein de la classe. Les origines de ces difficultés sont parfois inhérentes aux cultures respectives des deux disciplines. Il en est ainsi par exemple de l'écriture des zéros à la fin d'une écriture décimale : en cours de mathématiques on attend de l'élève qu'il n'écrive pas le zéro car « 0,3 = 0,30 », alors qu'en cours de sciences physiques on tient le discours opposé « 0,30 g ≠ 0,3 g » car un zéro en fin de nombre est toujours *significatif* de la précision de la mesure expérimentale. Un autre cas très important « d'interférence » porte sur la manière de rédiger une équation : en mathématiques, on n'hésite pas à faire coexister d'un même côté d'une égalité symboles et nombres, alors qu'en sciences physiques ce type de rédaction est inconcevable pour des raisons d'homogénéité. L'exemple suivant illustre le propos : dans un problème de calcul d'une aire A, l'enseignant de mathématique pourra être amené à écrire $A = 4x+x^2$; en l'état, cette écriture est inacceptable pour un enseignant de physique et chimie qui identifierait le terme 4x à une longueur (nombre ×longueur) et qui ne peut donc pas être additionné au terme x^2 qui est une surface (longueur×longueur). La raison profonde de ce malentendu porte probablement sur le fait que les écritures symboliques du mathématicien représentent toujours des nombres, tandis que celles du physicien toujours des grandeurs. Pour autant, cette différence de pratique entre les deux disciplines n'est dans la réalité de la classe pas aussi franche que le suggère la phrase précédente. Aussi, lors du passage de la formule littérale (symbolique) à l'application numérique, même parmi les enseignants de physique et chimie, certains remplacent les symboles de la formule par les valeurs des grandeurs (des nombres) *avec* l'unité correspondante. D'autres enseignants – la grande majorité – remplacent les symboles par des nombres *sans* les unités associées et n'écrivent celles-ci qu'à la toute fin du calcul, au prix de poser une égalité – fausse – entre des nombres et une grandeur. On constate au final, que des pratiques pouvant sembler aussi simples que l'écriture décimale d'un nombre, la rédaction d'un calcul élémentaire de surface ou encore la réalisation d'une application numérique, se déclinent en pratique de manières très différentes entre nos deux disciplines, voire au sein même de celles-ci. On peut facilement imaginer que dans ces conditions, certains de nos élèves puissent rencontrer des difficultés à aborder et à utiliser le langage mathématique.

Conclusion

Le volume qu'occupent les mathématiques dans le nouveau programme de physique et chimie de la filière S a nettement diminué comparativement à l'ancien programme. Le statut des mathématiques a lui aussi changé : dans l'ancien programme plusieurs concepts mathématiques importants « se prolongeaient » dans le cours de physique et chimie ; dans le nouveau programme, les mathématiques présentes s'articulent pour l'essentiel autour de la proportionnalité-linéarité, de la mesure expérimentale et des équations algébriques. Il semblerait que dans les nouveaux programmes, les mathématiques – moins techniques qu'avant - se retrouvent *au service* du questionnement, de la démarche scientifique et de l'argumentation, au lieu d'être des *objets d'étude en soi*, à approfondir ou à illustrer. Ces changements bouleversent les rapports qu'entretenaient nos deux disciplines et une co-disciplinarité est probablement à repenser. Au-delà de la réforme du lycée, on peut aussi espérer que cette « mise à plat » puisse être l'occasion d'une coordination de nos pratiques au sein de la classe ou au moins d'une prise de conscience de leur variété. Les enjeux sont importants : il en retourne non seulement de l'image véhiculée de la science et de sa cohérence revendiquée, mais aussi et surtout de la formation et de la réussite scolaire de nos élèves.

4. PROBLEMATIQUES POUR LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR EN PHYSIQUE A L'UNIVERSITE (LOÏC LANCO)

Quelques constats

Les objectifs d'une Licence de Physique

Jusqu'ici, les universités définissaient leurs maquettes d'enseignement des licences de Physique avec des objectifs généraux influencés par un lien fort entre recherche et enseignement. Parmi ces objectifs :

- Développer l'autonomie, le sens critique, et l'esprit d'initiative des étudiants, en les formant à la démarche scientifique.

- Leur ouvrir l'esprit et développer leur culture générale, grâce au contact avec la recherche et la physique moderne

- Proposer des programmes attractifs/originaux, en évitant l'inutilement formel et en gardant un équilibre entre concepts abstraits et applications concrètes

- Maintenir le lien avec le monde du travail, les applications, les impacts économiques, sociaux et environnementaux associés aux sujets abordés.

Au-delà de ces compétences, toute maquette de Licence de Physique générale a aussi pour devoir de fixer la liste des connaissances attendues, et cette liste est déterminée, en aval, par les exigences de la recherche. En effet, puisque certains étudiants (même s'il s'agit d'une minorité) deviendront doctorants et devront réussir dans un travail de recherche intensif sur trois ans, les M2 doivent apporter les compétences et connaissances nécessaires pour qu'ils soient rapidement efficaces, dans un contexte de compétition internationale féroce. Les M1 doivent alors préparer à ces M2, les L3 à ces M1, etc…, jusqu'au L1. Dans ce schéma, le niveau du L1 est avant tout fixé par les exigences en aval, et pas en amont (les compétences des bacheliers). Ce n'est qu'en régime stationnaire, et donc en l'absence de réformes, que le système peut se stabiliser vers une progression régulière et efficace entre le niveau du bac et le niveau exigé en M2. Avec la réforme des lycées en physique, extrêmement profonde, on peut s'attendre à ce que de nombreuses années s'écoulent avant qu'un régime stationnaire intelligent ne s'établisse…

Les problèmes structurels

En plus de la question du niveau exigé, qui rend les études à l'Université particulièrement difficiles pour les bacheliers non sélectionnés, une Licence de Physique doit également faire face à de nombreux problèmes structurels. Parmi ce qui n'a pas changé dans les dix dernières années :

- Généralement moins de la moitié des étudiants présents parvient à décrocher une Licence, et, encore plus inquiétant, souvent moins de 10% des étudiants la décrochent en trois ans.

- Le discours ambiant continue à faire croire aux étudiants qu'il y a moins de travail personnel à effectuer à l'Université, ce qui est un leurre extrêmement dommageable.

- Le contrôle continu est souvent réduit, du fait que les enseignants-chercheurs ont intérêt à passer un minimum de temps en corrections de copies et en préparation d'énoncés.

- Pour la même raison, relativement peu de documents pédagogiques sont produits par les enseignants-chercheurs, en comparaison avec les classes préparatoires.

- La communication entre les multiples unités d'enseignement, dont chacune a un enseignant référent, est peu efficace en comparaison avec les classes préparatoires.

Et, parmi ce qui a évolué dans les dix dernières années :

- Les notions mathématiques et les concepts formels sont nettement moins intégrés et visualisés par les étudiants.

- L'entraînement au calcul a aussi très largement baissé.

- La culture générale des étudiants, par contre, a clairement augmenté - mais pas forcément l'esprit critique qui doit accompagner ce vernis de culture.

On a déjà vu que la réforme des lycées va aggraver les deux premiers points; on peut espérer qu'elle améliorera, comme c'est son objectif, le troisième point.

Le problème des outils formels pour la physique

Concernant le manque de visualisation des concepts formels pour la physique, le lycée est fortement responsable de cet état de fait, qui vient des énormes différences d'approche entre maths et physique. Quelques exemples :

- La dérivée, pour un bachelier, n'est souvent qu'une formule à apprendre et appliquer, reliée à la croissance ou à la décroissance de courbes mathématiques. Pour le physicien, une dérivée est une quantité concrète : un quotient entre deux minuscules variations.

- L'intégrale, pour un bachelier, est souvent considérée comme « une aire » ou « une primitive ». Pour le physicien, l'intégrale est une quantité concrète : une somme de nombreux petits éléments.

- Le vecteur, pour un bachelier, est purement géométrique, souvent assimilé à quelque chose qui relie deux points, ou bien à un triplet de 3 coordonnées. Pour le physicien, un vecteur peut représenter n'importe quelle quantité physique (vitesse, force, accélération…) caractérisée par une norme, une direction et un sens.

Enfin, concernant le manque d'entraînement au calcul, l'évolution des dix dernières années a eu un impact majeur sur le niveau des bacheliers en physique, mais également en maths. Les programmes de physique des années 90 avaient le défaut de la lourdeur formelle, mais ils permettaient d'obtenir des étudiants meilleurs… en maths. Ainsi, si les enseignants se plaignent actuellement d'une baisse de niveau en mathématiques, ce n'est paradoxalement pas dans les programmes de cette matière qu'il faut en chercher la cause principale !

L’enseignement des outils mathématiques pour la physique : comment faire ?

Les outils indispensables à la physique, du L1 au L3

Concrètement, avec la réforme des lycées, l’Université va devoir prendre en charge la quasi-totalité de la formation des étudiants en termes d’outils mathématiques pour la physique (et avec les méthodes et le langage de la physique). Les urgences sont malheureusement très nombreuses, vu les exigences des enseignements de physique qui les utilisent, mais elles peuvent tout de même être classées par ordre de priorité.

L’urgentissime, pour commencer, est de faire acquérir aux étudiants (en un semestre maximum…) l’ensemble des compétences auparavant développées au lycée :

- Calcul différentiel et intégral : raisonner avec des variations infinitésimales ; comprendre les dérivées composées; résoudre des équations différentielles plus ou moins complexes, en identifiant clairement solution générale et conditions aux limites; calculer des sommes de diverses quantités grâce aux intégrales.

- Géométrie et vecteurs : s’approprier la géométrie et la trigonométrie ; comprendre, au passage, le lien entre nombres complexes, trigonométrie, et opérations géométriques ; apprendre à projeter des vecteurs, calculer des produits scalaires et des composantes, et à travailler avec des bases de vecteurs unitaires…

- Méthodologie/modélisation : poser/résoudre un problème quantitatif ; identifier paramètres, inconnues, contraintes; parvenir à un système de N équations à N inconnues; résoudre le système en manipulant ces équations (opérations algébriques, fonctions réciproques, etc…); faire des approximations grâce aux développements limités.

Toutes les notions ci-dessus correspondent à un vaste ensemble de connaissances et de compétences, qui pourraient faire l’objet d’un livre entier. Malheureusement, les bacheliers ne sont plus familiarisés avec ces notions alors que nombre d’enseignants chercheurs les considèrent encore comme admises/triviales, à la rigueur dignes d’être rappelées dans un formulaire, mais certainement pas expliquées (« il n’y a pas le temps »).

Après l’urgentissime, vient l’urgent : faire acquérir aux étudiants les compétences nécessaires aux raisonnements dans l’espace en 3 dimensions. Un semestre pourrait ainsi être consacré aux nombreuses notions associées :

- Calcul vectoriel dans les différents systèmes de coordonnées (cartésien, cylindrique, sphérique) : coordonnées, vecteurs unitaires, projections, et correspondances entre les systèmes ; calculs de produits scalaires et vectoriels, dérivées de vecteurs…

- Intégration (1D) sur des courbes/surfaces/volumes : éléments de longueur/surface/volume infinitésimaux (coquilles sphériques, etc…) ; calculs de longueurs, surfaces et volumes finis par sommation de ces éléments infinitésimaux ; puis calculs de quantités physiques plus complexes, éventuellement vectorielles, tels des moments d’inertie ou des forces résultantes.

- Fonctions de plusieurs variables : variations infinitésimales et dérivées partielles, différentielle, vecteur déplacement et gradient,

De façon un peu moins urgente, car correspondant plutôt aux nécessités des programmes de L2, viennent les notions suivantes :

- Analyse avancée : intégrales impropres, intégrales à plusieurs variables.

- Champs et opérateurs : gradient d'un champ scalaire, courbes iso et lignes de gradient ; lien entre flux et opérateur divergence, et lien entre circulation et opérateur rotationnel; calculs avec ces opérateurs dans les différents systèmes de coordonnées.

- Nombres complexes et signaux périodiques : rappels sur les complexes et les exponentielles complexes; résolution d'équations différentielles linéaires avec second membre périodique (résonance); série de Fourier et analyse spectrale.

Enfin, et enfin seulement (car correspondant aux exigences du L3, voire du M1), on aura besoin des notions suivantes :

- Matrices et espaces vectoriels : opérateurs linéaires, bases, valeurs propres et vecteurs propres, diagonalisation....

- Analyse complexe : analyse dans le plan complexe, théorème des résidus et applications

- Espaces de Hilbert : espaces discrets et continus ; lien avec l'algèbre linéaire; transformée de Fourier ; introduction aux distributions.

- Probabilités et statistiques descriptives : distributions, moments, corrélations ; ajustements et régression linéaire.

Ce dernier point est un peu à part, car il prend une place très importante dans les nouveaux programmes des lycées, alors que pour la physique c'est seulement en L3 et même plutôt M1 qu'il commence à devenir utile.

Exemple de programme permettant la progressivité des difficultés mathématiques

Comme exemple de programme se voulant adapté aux enjeux de la réforme, on peut prendre celui de l'Université Paris Diderot – Paris 7, qui a prévu de refonder l'ensemble de ses enseignements dès la rentrée 2013. Le programme conçu, tout en prenant en compte les (trop) nombreuses contraintes imposées par les décrets successifs encadrant les créations de maquettes, a été construit autour de deux principes :

1. Prendre le temps d'enseigner vraiment les outils mathématiques et méthodologiques pour la physique (et avec le langage des physiciens), à l'aide de cours et de travaux dirigés, d'exercices obligeant à un travail personnel intense, et de documents pédagogiques largement détaillés. Ceci ne peut se faire que dans le cadre d'une unité d'enseignement spécifique, en complément des enseignements de physique.

2. Pour ces derniers, organiser l'ordre des matières de façon à ne pas trop mélanger les difficultés mathématiques, mais au contraire de bien insister sur chaque point important, en prenant soit d'assurer une progressivité des difficultés semestre par semestre.

Plus concrètement, le premier point se traduit par la création de nouvelles unités d'enseignement, intitulées « Méthodologie de la physique », au nombre d'une par semestre pendant trois semestres (S1, S2, S3). L'enseignement du premier semestre est bien entendu consacré aux outils mathématiques urgentissimes (cf la section précédente). Celui du second est alors consacré aux raisonnements en trois dimensions, et celui du troisième semestre à l'un peu moins urgent, comme détaillé dans la section précédente.

Quant au second point, il se traduit par un choix clair d'outil mathématique principal à acquérir à chaque nouveau semestre.

- Pour le premier semestre, les équations différentielles scalaires ont été choisies pour outil principal, dans le cadre d'un enseignement qui reprend les bases rigoureuses de mécanique, avec une grande part d'applications à une seule dimension. La mécanique est bien sûr introduite sous forme vectorielle, mais se focalise d'abord sur des exemples où l'on projette les vecteurs selon un seul vecteur unitaire.

- Pour le second semestre, ce sont les vecteurs et les équations différentielles vectorielles qui constituent l'outil principal, dans le cadre d'un enseignement de mécanique avancée (synchronisé avec l'enseignement de méthodologie qui est justement focalisé sur les raisonnements dans l'espace à trois dimensions).

- Pour le troisième semestre, les champs et les opérateurs constituent l'outil formel principal, dans le cadre de l'enseignement d'électromagnétisme (en régime quasi-statique seulement), et dans le cadre d'un enseignement sur les flux et les lois de conservation (qui permet d'aborder, entre autres, la thermique).

- Pour le quatrième semestre, l'outil formel principal est le nombre complexe et son application à la résolution de diverses équations différentielles, dans le cadre des enseignements sur l'électrocinétique et sur les ondes et vibrations.

Dans un tel programme, l'électromagnétisme/l'optique ondulatoire, ainsi que la thermodynamique (au delà de la thermique, donc avec entropie), sont placés en début de L3, année qui est également l'occasion d'aborder la physique contemporaine sous ses nombreuses formes (entre autres la relativité et la physique quantique). On peut voir un écart significatif avec le programme de classes préparatoires : cet écart est dû au fait que les universités doivent s'y prendre des années à l'avance pour satisfaire, dans une création de maquette, aux contraintes administratives imposées par le ministère. Les programmes d'Université ont donc été conçus bien avant que des informations ne filtrent concernant les programmes de classes préparatoires. Ce n'est que dans plusieurs années qu'il pourra être envisagé de rapprocher ces programmes de ceux des classes préparatoires.

Conclusion : les impacts de la réforme à l'Université

La réforme des lycées provoque des difficultés particulièrement majeures pour les universités, où les enseignants-chercheurs doivent se débrouiller, seuls, pour reconstruire (ou pas) l'ensemble de leurs enseignements, sans programme défini au niveau national. C'est donc bien à l'Université, plus qu'en classes préparatoires ou dans toute autre filière sélective, que l’effet négatif de la réforme des lycées sera le plus douloureux. Or, avant même la réforme, c’était déjà l’Université qui subissait de plein fouet tous les défauts du système éducatif.

Comme discuté ci-dessus, il est possible d’organiser des programmes universitaires qui prennent en compte les besoins majeurs des nouveaux étudiants. Il est alors nécessaire de passer beaucoup de temps sur la maîtrise des outils formels pour (et par) la physique, tout en essayant de reconstruire la physique de façon progressive et rigoureuse. Une contrainte qui rend les choses particulièrement difficiles est la nécessité d’arriver aussi haut qu’avant en L3 et M2, tout en partant de plus loin, pour former d’éventuels futurs doctorants compétitifs à l’échelle internationale (une contrainte que n’ont pas les classes préparatoires). Le tout avec une population étudiante extrêmement touchée par l’échec et la démotivation.

Il est ainsi possible de s’en sortir localement, dans telle ou telle filière, mais il est particulièrement improbable que les choses se passent bien en général. Une première raison est que nombre d’enseignants-chercheurs ne sont pas encore au courant des effets de la nouvelle réforme. La plupart sont au courant par ouï-dire uniquement, et imaginent que cette réforme sera comme toutes les autres et qu’on verra bien. Même parmi ceux qui conçoivent des maquettes, les protestations sont fortes face à la nécessité de refaire des enseignements qui correspondent à la Terminale qu’ils ont connue. Dans tous les cas, il y a très peu de temps pour s’adapter et énormément de contraintes accumulées sur les épaules des enseignants-chercheurs (que le système, rappelons-le, évalue principalement sur la base des activités de recherche). Et il y a donc la possibilité d’un refus de la réforme, ou d’une sous-estimation de ses enjeux, avec l’idée qu’on peut décider de ne rien changer car les étudiants motivés s’en sortiront toujours, et que les démotivés ne s’en sortiront de toute façon pas (une conception cynique de la situation qui, malheureusement, n’est pas totalement dénuée de fondement …).

Il y a donc un très fort risque d’augmentation de l’échec à l’Université pendant les prochaines années, et de crispation légitime de la part tant des étudiants que des enseignants-chercheurs. Toute la question est de savoir combien d’années seront nécessaires pour que le choc s’amortisse et amène à une situation plus gérable… en attendant la réforme suivante.

5. TRANSITION SECONDAIRE SUPERIEUR ET NOUVELLES MAQUETTES (NICOLAS SABY)

Ce paragraphe s'articule autour de trois temps :

- Quels problèmes ?

- Quelques exemples locaux.

- Quelles réponses ?

Le contexte

Les universités sont rentrées depuis plusieurs années dans une logique d'habilitations à offrir des formations et des diplômes sur des plans quadriennaux, qui deviennent maintenant quinquennaux. Cela veut dire que potentiellement, elles peuvent faire des changements de contenus et d'organisation des enseignements de manière très régulière. Cette logique s'accompagne maintenant d'une absence de cadrage national des diplômes et des contenus.

Une orientation progressive des étudiants et un grand brassage en première année, surtout au premier semestre est maintenant aussi la logique commune imposées par les différents décrets autour du LMD (Licence Master Doctorat) qui est la grande réforme des études mise en place à partir de 2002 et de la rentrée 2003 ou 2004 pour les premières universités.

Cette orientation progressive nécessite ainsi la mise en place de nombreuses passerelles. Une architecture en semestre et modules, que la CIIU a dénoncée dès sa mise en œuvre est ainsi devenue la référence. Cependant cette structure montre sa nocivité dans le niveau L dans les études de mathématiques qui nécessitent de la durée et de la continuité dans les apprentissages. L'augmentation et l'accélération du nombre de ruptures dans les apprentissages est une contrainte dont la discipline se serait passée.

Pour illustrer ces contraintes de calendrier et de structures, il est bon de s'attarder sur les exemples locaux. Il s'agit de l'université Montpellier 2 et de sa Faculté des Sciences.

Une nouvelle habilitation du LMD est mise en place à la rentrée 2011 censée durer 4 ans. Le passage aux plans quinquennaux imposera de mettre en place une nouvelle habilitation à la rentrée 2014, soit trois ans après la mise en place de l'actuelle habilitation qui a du être elle-même adaptée suite au nouvel arrêté licence d'août 2012 ! Par ailleurs, et c'est l'objet de ce colloque, une réforme importante du lycée est en place et les étudiants de cette réforme arrivent à l'université en 2013... On comprend alors que d'un point de vue strictement structurel, il est illusoire d'envisager des adaptations importantes en terme de curriculum et de cursus pour nos étudiants, suite à la réforme du lycée. L'adaptation curriculaire sera plutôt fortement modifiée lors de l'habilitation à venir, quoique celle-ci doit aussi s'intéresser à l'origine de nos étudiants sur laquelle nous allons maintenant nous attarder sur l'exemple de Montpellier.

Quelle est l'origine des étudiants ?

Des données étonnantes :

BAC ES	37	7 %
BAC L	2	0.5 %
BAC S	279	51 %
BAC Professionnel	58	10 %
BAC Technologique	102	18.5 %
DAEU (diplôme d'Accès aux Etudes Universitaires)	4	1 %
Bac étranger	66	12 %
Total	548	

Ces données sont loin d'être une singularité montpelliéraine...On s'aperçoit immédiatement sur ces données que les bacheliers de la filière S ne sont pas l'écrasante majorité des étudiants de L1.

On voit donc qu'un premier problème est que l'on ne peut pas ne s'intéresser qu'aux acquis des seuls élèves de S pour lesquels il y a déjà beaucoup à dire. La grande hétérogénéité des étudiants de première année est ainsi devenue un problème bien plus difficile à gérer que les différents changements de programmes des filières générales et technologiques.

Quelles études ces étudiants vont trouver à l'université ?

Pour ce qui concerne la « physique », cela devient vite compliqué ou diversifié : physique, mécanique, EEA--électronique, électrotechnique et automatique--, avec des attentes disciplinaires différentes et des enseignants ayant des sensibilités différentes suivant leur formation et leur laboratoire.

L'orientation dans les cursus est certes progressive, mais très rapide : les étudiants sont assez rapidement et de plus en plus tôt orientés dans des mentions où rapidement, il n'y a plus que de la discipline !

Dans ce contexte, les mathématiques sont pour une majorité d'étudiants et de cursus une « discipline de service » : on voit se développer de plus en plus dans les universités, à la demande des physiciens (et quelques fois, c'est eux qui l'enseignent) des contenus de type calculus, mettant l'accent sur des aptitudes de calcul du très élémentaires au pas élémentaire : fractions, puissances, logarithmes et exponentielles, identités remarquables, trigonométrie, complexes, calcul vectoriel, équations algébriques et systèmes linéaires, dérivation d'une et plusieurs variables, intégration, équations différentielles, longueurs, surfaces, volumes, statistiques.

Cela rend le travail interdisciplinaire très compliqué à l'université sitôt que les effectifs sont importants.

Quelles solutions ?

Dans ce contexte peu optimiste, dans quelles directions peut-on chercher des solutions à ces problèmes ?

Du point de vue du mathématicien, il y a un besoin de rentrer dans l’activité mathématique et dans les raisonnements complexes. On retiendra sans souci d'être exhaustif : logique et raisonnement mathématique --la quantification des propositions, les conditions nécessaires et suffisantes, le raisonnement par récurrence--, entrée dans l’algèbre linéaire, entrée dans l'analyse. La diversité du public s'accompagne de points d'appuis très fragiles que ce soit sur les notions de logique, celles d'analyse ou d'algèbre. Un travail spécifique de transition en lien avec les nouveaux programmes mérite d'être entrepris pour explorer ou revisiter ces voies.

Conclusion

Au-delà de ces questions, il demeure quelques vrais enjeux et difficultés de l'entrée à l'université :

1. Comment mettre au travail les étudiants dans ces conditions ?

2. Comment identifier des points d'appui sur les connaissances des élèves, du fait d'une grande hétérogénéité ?

3. Comment rendre crédible un travail interdisciplinaire ?

La communauté aspire à un peu plus de stabilité pour pouvoir développer et mettre en place des situations d'apprentissages robustes et adaptées à ce rapide panorama des grandes difficultés que rencontrent nos étudiants.

REFERENCES

BO Spécial n° 8 du 13 octobre 2011, *Programmes des classes terminale des voies générale et technologique, enseignement spécifique de physique-chimie de la série scientifique*

Document d'accompagnement de mathématiques *: Grandeurs et mesures au collège.*

BUP, vol 107, mars 2013, p.265, Résultats de l'enquête sur les programmes de première S

ANNEXE

	Ancien Programme	**Nouveau Programme**
2nde (horaire élève)	1,5 h TP + 2 h cours, soit 3,5 h	Choix établissement 3 h
1ere S (horaire élève)	2 h TP + 2,5 h cours, soit 4,5 h	Choix établissement 3 h
Term S (horaire élève)	2 h TP + 3 h cours, soit 5 h	Choix établissement 5 h +AP (établissement)
Total (sur 32 semaines)	416 h	352 h (sans AP)

Tableau 1 : Comparaison des grilles horaires du lycée Ancien programme / Nouveau programme

CONFERENCE 2 : APPORT POUR LES FUTURS ETUDIANTS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA STATISTIQUE ET DES PROBABILITES AU LYCEE

Philippe Dutarte, IA-IPR, académie de Créteil
Michel Henry, CII Statistique et probabilités
Hélène Lample, IREM de Lyon
Jean-Louis Piednoir, Inspection générale
Jean-Pierre Raoult, Comité Scientifique des IREM

L'enseignement du calcul des probabilités et de la statistique en France est actuellement – et ce depuis plusieurs années – dans une phase à la fois délicate et transitoire, tiraillé qu'il est entre d'une part une demande sociale forte (éducation du citoyen, besoins scientifiques et technologiques) et de fortes réticences dans sa mise en application : les enseignants de lycée vivent mal des évolutions successives et rapides dans le poids (croissant) et dans le contenu de ces enseignements, nouveaux pour eux et pour lesquels on n'a pas encore su leur montrer en quoi ils se relient, dans un contexte de modélisation particulier, à la totalité des mathématiques qu'ils enseignent ; les enseignants de licence et de classes préparatoires aux grandes écoles n'éprouvent pas encore le besoin de prolonger à leur niveau les nouveaux acquis des lycéens, qu'ils sont souvent portés à mettre en doute. C'est un état des lieux en cette année 2013, où se passent pour la première fois les baccalauréats rénovés, qu'on esquisse ici, avec un complément relatif aux concours de recrutement des enseignants et une indication sur la manière de se renseigner sur la situation dans certains pays étrangers.

1 - LE LYCEE, LES PROGRAMMES ET LES PRATIQUES (MICHEL HENRY)

a. Cohérences des programmes de la seconde à la terminale

Les programmes des années 1990 : l'approche fréquentiste

Le programme de 1991 en classe de première (arrêté du 27 mars 1991) indiquait [Henry, 2010] :

> *Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois... La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante...*

Le choix d'introduire la notion de probabilité par l'observation de la « relative » stabilisation des fréquences lors de la répétition d'une même expérience aléatoire, induisait un regard expérimental sur cette notion. Cela suppose la mise en œuvre dans la classe d'expériences concrètes (répétées par l'accumulation des observations de chacun des élèves) et de simulations sur calculettes ou ordinateurs. Ce point de vue faisait donc courir le risque didactique que les élèves confondent le domaine des observations expérimentales des fréquences avec le domaine du modèle mathématique représentatif où la probabilité peut être définie.

Les programmes des années 2000 : un changement de point de vue

La distinction à faire entre données expérimentales et cadre théorique est bien précisée, citons la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques [CREM, 2002], p. 51 :

> *La statistique traite de données expérimentales ou d'observation, à étudier dans leur contexte : sa spécificité est d'établir des liens entre ces données et la théorie mathématique des probabilités, d'expliquer ainsi le passé et de prévoir l'avenir.*

L'observation de simulations est mise en avant :

- Commentaire du programme de seconde, BO hors série n°6 du 12 août 1999 :

> *L'objectif des simulations est d'observer la fluctuation d'échantillonnage, sa stabilisation lorsque la taille de l'échantillon grandit, et d'estimer des fréquences limites d'événements ou des valeurs moyennes limites.*

- Présentation du programme de première S, BO hors série n° 7 du 31 août 2000 :

> *La simulation joue un rôle important en permettant d'observer des phénomènes variés, elle amène les élèves à enrichir considérablement leur expérience de l'aléatoire et favorise l'émergence d'un mode de pensée propre à la statistique ; elle rend de plus nécessaire la mise en place de fondements théoriques.*

- Enfin, la notion de modèle fait partie des objectifs de l'enseignement, comme le souligne le document d'accompagnement du programme de première S publié par le GEPS en 2001, p. 68 :

> *Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité. Une fréquence est empirique : elle est calculée à partir de données expérimentales, alors que la probabilité d'un événement est un « nombre théorique ».*

L'esprit de ces programmes des années 2000 est de dépasser l'approche « fréquentiste » des années 90 pour adopter le point de vue de la modélisation. Simulations et modélisation sont des termes explicitement dans les programmes. Mais d'une certaine manière, l'approche fréquentiste reste implicitement présente. La loi des grands nombres (convergence des fréquences) fait son apparition dans ce programme de première S :

> *Le lien entre loi de probabilité et distributions de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques vers les variances théoriques…*

Les programmes des années 2010

Le programme de la classe de seconde, BO n° 30 du 23 juillet 2009, explicite ses objectifs :

> *Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes dans le cadre de l'échantillonnage :*
>
> *+ faire réfléchir les élèves à la conception et la mise en oeuvre d'une simulation ;*
>
> *+ sensibiliser les élèves à la fluctuation d'échantillonnage, aux notions d'intervalle de fluctuation et d'intervalle de confiance et à l'utilisation qui peut en être faite.*
>
> *Échantillonnage : notion d'échantillon. Intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95%*
>
> *Réalisation d'une simulation. L'objectif est d'amener les élèves à un questionnement lors des activités suivantes :*

+ l'estimation d'une proportion inconnue à partir d'un échantillon ;

+ la prise de décision à partir d'un échantillon ».

Le point de vue de la modélisation qui considère les probabilités comme des outils théoriques au sein de modèles représentatifs de situations aléatoires, est clairement affirmé :

Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes dans le cadre des probabilités, rendre les élèves capables :

+ d'étudier et modéliser des expériences relevant de l'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou de dés, tirage de cartes) ;

+ de proposer un modèle probabiliste à partir de l'observation de fréquences dans des situations simples ;

+ d'interpréter des événements de manière ensembliste ;

+ de mener à bien des calculs de probabilités.

Capacité attendue : Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées

b. Simulation et modélisation

Notion de simulation

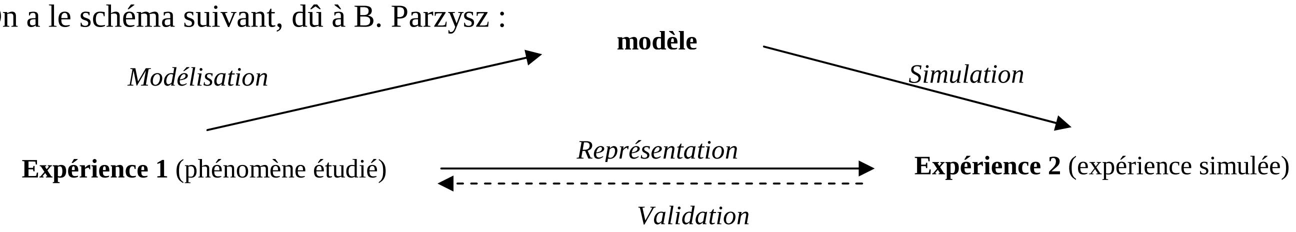
On trouve cette définition de la simulation dans l'Encyclopédie Universalis :

La simulation est l'expérimentation sur un modèle. C'est une procédure de recherche scientifique qui consiste à réaliser une reproduction artificielle (modèle) du phénomène que l'on désire étudier, à observer le comportement de cette reproduction lorsque l'on fait varier expérimentalement les actions que l'on peut exercer sur celle-ci, et à en induire ce qui se passerait dans la réalité sous l'influence d'actions analogues.

Il convient donc de faire d'abord le choix d'un modèle pour l'implanter dans les instructions de calcul d'un ordinateur ou d'une calculette. Il faut ainsi comprendre le statut de la simulation : à partir d'un protocole expérimental, on dégage des hypothèses de modèle et on programme une simulation de ce modèle [Henry, 2011].

Des simulations pour expliciter le processus de modélisation

On a le schéma suivant, dû à B. Parzysz :



Quand une simulation est comprise comme une simple interprétation d'une expérience réelle représentée sur un écran, l'étape de la modélisation est ignorée et ce schéma triangulaire est remplacé par un schéma linéaire. Le processus de modélisation doit conduire à réfléchir sur les hypothèses de travail issues du protocole expérimental et à voir leur correspondance avec les hypothèses de modèle implantées dans la simulation. Des premiers exemples simples de simulations conduisent les élèves à une meilleure compréhension de ce qu'est un modèle probabiliste et à s'intéresser au processus de modélisation.

c. Intervalles de fluctuation [Cerclé, Dutarte]

Le programme de la classe de seconde, BO n° 30 du 23 juillet 2009, introduit un outil pour la prise de décision statistique [Ducel & Saussereau] : quelle valeur pour une proportion inconnue ? C'est l'***intervalle de fluctuation*** :

> *Pour des échantillons de taille n > 25 et des proportions p du caractère comprises entre 0,2 et 0,8 : si f désigne la fréquence du caractère dans l'échantillon, f appartient à l'intervalle [p – 1/√n ; p + 1/√n], avec une probabilité d'au moins 0,95.*

- Vérification de cette propriété par la simulation de nombreux échantillons de taille n.

- Prise de décision : si en pratique, lors de la répétition *n* fois d'une expérience aléatoire, la fréquence de succès observée est en dehors de l'intervalle de fluctuation, alors on peut rejeter l'hypothèse que la proportion inconnue est égale à *p*. Décision erronée dans 5% des échantillons.

Dans le programme de première S, BO spécial n° 9 du 30 septembre 2010, les lois de probabilité sont présentées comme des outils pour la modélisation :

> *La notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire permet de modéliser des situations aléatoires, d'en proposer un traitement probabiliste et de justifier certains faits observés expérimentalement en classe de seconde.*
> *À l'aide de simulations et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on fait le lien avec la moyenne et la variance d'une série de données.*

Le programme se limite ainsi à une « approche heuristique de la loi des grands nombres », et ne parle plus de « stabilisation », de « convergence » des fréquences, voire de « fréquence théorique ».

Le programme propose un *nouvel intervalle de fluctuation* pour la prise de décision :

> *Exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.*

En spécifiant la loi binomiale $X \approx B(n, p)$ du nombre de succès observés dans l'échantillon, on obtient un intervalle de fluctuation moins général et plus précis qu'en seconde : l'intervalle $[a ; b]$ où a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ et b le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

Le programme de Terminale S, BO spécial n° 8 du 13 octobre 2011, présente ainsi l'introduction de la loi normale :

> *On introduit les lois de probabilité à densité. Le programme en propose quelques exemples et, en particulier, la loi normale qui permet notamment d'initier les élèves à la statistique inférentielle par la détermination d'un intervalle de confiance pour une proportion à un niveau de confiance de 95 %.*

Il indique la méthode passant par une visualisation du théorème de Moivre-Laplace :

> *Pour introduire la loi normale N(0,1), on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire* $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

où X_n suit la loi binomiale B(n, p), et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1.

Un nouvel intervalle de fluctuation dit « asymptotique » en est déduit :

Connaître l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%, $\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ *où p désigne la proportion dans la population. Avec les exigences usuelles de précision, on pratique cette approximation dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.*

En majorant $1{,}96\sqrt{p(1-p)}$, *on retrouve l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde.*

Pour tester la valeur d'une proportion à partir de la fréquence observée dans un échantillon, le programme indique :

La problématique de prise de décision, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau avec l'intervalle de fluctuation asymptotique.

Le programme propose en outre une initiation à l'estimation par intervalle de confiance par l'estimation d'une proportion inconnue à partir d'un échantillon [Bonneval, 2012] :

Il est intéressant de démontrer que, pour une valeur de p fixée, l'intervalle $\left[F_n-\frac{1}{\sqrt{n}}, F_n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilité au moins égale à 0,95,*

et propose une application aux sondages :

La simulation de sondages sur tableur permet de sensibiliser aux fourchettes de sondages.

2 - LE VECU DES PROFESSEURS DE LYCEE (HELENE LAMPLE)

a. La formation des professeurs

Dans leur grande majorité, les professeurs de lycée n'ont pas suivi d'enseignement universitaire en statistique inférentielle. Les outils mobilisés pour assurer cette formation sont :

- les documents ressource de première et terminale, édités par l'Inspection Générale ;
- les articles et brochures des IREM ;
- les divers stages de formation proposés dans les académies ;
- les ressources proposées par l'APMEP ou les universités.

b. Niveau première : introduction de la loi binomiale

- Les coefficients binomiaux sont introduits sans expression formelle par les factorielles, conformément au programme. En pratique les valeurs s'obtiennent facilement avec les calculatrices.

- L'intervalle de fluctuation et la problématique de la prise de décision statistique : Les élèves éprouvent des difficultés à saisir ce qu'est un intervalle de fluctuation et à comprendre comment il permet de prendre des décisions d'ordre statistique, à un niveau de risque donné.

- De façon générale, ce qui pose problème aux élèves est la lecture des énoncés rédigés en français et leur traduction dans le langage probabiliste : quelles sont les données ? Que me demande-t-on ? Quelle loi puis-je utiliser ? Faut-il prendre une décision statistique ?

Exemple : extrait du document ressource de première

Un groupe de citoyens demande à la municipalité d'une ville la modification d'un carrefour en affirmant que 40 % des automobilistes tournent en utilisant une mauvaise file.

Un officier de police constate que sur 500 voitures prises au hasard, 190 prennent une mauvaise file.

***1.** Déterminer, en utilisant la loi binomiale sous l'hypothèse p = 0,4, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.*

***2.** D'après l'échantillon, peut-on considérer, au seuil de 95 %, comme exacte l'affirmation du groupe de citoyens ?*

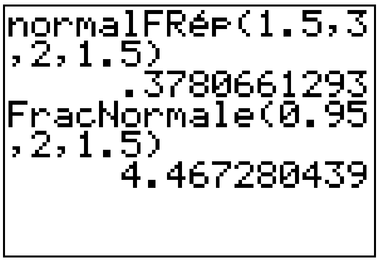
c. Niveau terminale : introduction des lois normales

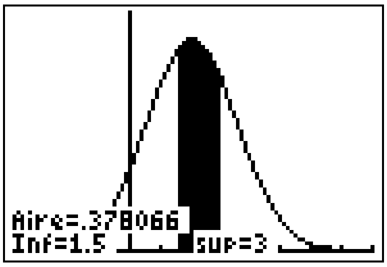
- **L'introduction des lois continues**, se passe comme dans les programmes précédents. On introduit aussi la notion d'espérance d'une variable continue. Aucune difficulté n'est soulevée pour le calcul d'intégrales généralisées (elles sont convergentes et leur valeur s'obtient comme limite d'intégrales finies). La fonction de répartition ne figure pas dans les contenus des programmes mais elle est utilisée régulièrement dans les calculs pratiques.

- **L'introduction de la loi $N(0, 1)$** par le théorème de Moivre-Laplace est perçue comme difficile. Pour les professeurs qui ont enseigné en BTS, le changement de point de vue n'est pas toujours bien perçu : il est parfois interprété comme volonté de toujours centrer-réduire au lieu d'identifier une démarche de convergence en loi en lieu et place de celle d'approximation directe.

- **Les loi normales $N(m, s^2)$** sont introduites à partir de la loi $N(0, 1)$ et les calculs sont effectués avec la calculatrice de façon très simple.

Calcul et représentation graphique de $P(1{,}5 < X < 3)$ lorsque $X \sim N(2{,}1 ; 5^2)$ ainsi que la détermination du fractile associé à la probabilité 0,95 pour cette même loi.





- **L'intervalle de fluctuation asymptotique** est une notion difficile à appréhender par les professeurs qui manquent de formation théorique. Certains élèves se sentent dépassés par ces notions.

- **L'intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance 0,95** donne lieu à des applications assez simples en exercice mais les confusions sont fréquentes entre intervalle de fluctuation, qui dépend de la loi considérée et du niveau de risque et intervalle de confiance dont les bornes sont aléatoires. Ici aussi, les professeurs sont en demande d'une formation.

d. Niveau terminale : les démonstrations du programme

Le programme de TS indique quelques démonstrations à présenter aux élèves, certaines figurent en « capacités attendues ». De la même façon que pour l'utilisation du théorème de Moivre-Laplace, il s'agit ici de mettre en évidence une introduction rigoureuse des concepts de probabilité du programme.

- Démontrer que pour α dans]0, 1[, il existe un unique réel positif t_α tel que $P(-t_\alpha \leq X \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$, lorsque X suit la loi normale N(0,1).

- Démontrer que si la variable aléatoire X suit la loi binomiale B(n, p), alors, pour tout α dans]0, 1[, on a $\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$ *, où I_n désigne l'intervalle* $\left[p - t_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + t_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

Exemple : extrait du document ressource de terminale :

On souhaite estimer dans une ville V la proportion de personnes en surpoids. Pour cela 460 personnes ont été sélectionnées de manière aléatoire à partir de la liste des logements connue par la municipalité, c'est-à-dire que le fait d'avoir été sélectionné pour participer à l'étude est uniquement dû au hasard. On admet que cette procédure permet d'assimiler la sélection des personnes interrogées à un schéma de Bernoulli. Un enquêteur s'est déplacé au sein de chaque logement afin de recueillir les informations nécessaires à l'enquête.

1. Dans un premier temps, l'enquêteur va s'assurer que l'échantillon est représentatif de la population qu'on étudie sur des informations qu'on peut vérifier et qui sont en lien avec le critère étudié. Dans l'échantillon de 460 personnes on a dénombré 260 femmes (et 200 hommes) et 108 personnes ayant au moins 60 ans (352 ayant moins de 60 ans).
On sait que, dans la population, il y a 46% d'hommes et 20% de personnes de plus de 60 ans.

a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 de la variable aléatoire « proportion de femmes » dans un échantillon aléatoire de taille 460 sélectionné au sein de la population de cette ville.

b) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 de la variable aléatoire « proportion de personnes âgées de plus de 60 ans » dans un échantillon aléatoire de taille 460 sélectionné au sein de la population de cette ville.

c) Si pour chacune des variables, genre et âge, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% contient la valeur de l'échantillon on considère que l'échantillon est représentatif de la population pour cette information. Quelle est donc la conclusion pour le cas étudié ici ?

2) La première étape de ce travail a donc été de sélectionner un échantillon qui soit accepté comme « représentatif » de la population. Ainsi les informations qui seront obtenues à partir de cet échantillon seront généralisables, avec un certain nombre de précautions, à l'ensemble de la population dont il est extrait. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la proportion de personnes en surpoids.

L'intérêt de cet exercice est de présenter, sur une même situation :

- un calcul d'intervalle de fluctuation pour valider la représentativité de l'échantillon ;

- un calcul d’intervalle de confiance pour estimer une caractéristique inconnue.

Il faut noter que la notion d’échantillon représentatif ne figure pas au programme du lycée. Dans le cadre de l’accompagnement personnalisé, version approfondissement, le professeur peut décider de compléter cette notion.

e. Et la simulation ?

Un des axes transversaux des nouveaux programmes du lycée est l’algorithmique. Aussi, dès la classe de seconde, l’item « échantillonnage » du programme comporte tout naturellement la réalisation de quelques simulations. En pratique, cette question est souvent abordée en fin d’année mais les pratiques évoluent et certains professeurs s’approprient réellement ces questions.

Il faut indiquer aussi qu’après la mise en œuvre du programme de terminale, les équipes pédagogiques appréhendent mieux la cohérence des programmes et on peut penser que les pratiques vont évoluer au fil des années. Au niveau première, la simulation d’une loi binomiale est mise en place par certains collègues. Ci-dessous deux exemples de simulation de la loi binomiale sur Algobox et sur calculatrice (langage TI).

```
VARIABLES
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  X EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  LIRE n
  k PREND_LA_VALEUR 1
  X PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (k<=n) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    X PREND_LA_VALEUR X+floor(random()+p)
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER X
FIN_ALGORITHME
```

```
PROGRAM:BIN
:Prompt N,P
:1→K
:0→X
:While K≤N
:X+partEnt(NbrAl
éat+P)→X
:K+1→K
```

```
PROGRAM:BIN
:0→X
:While K≤N
:X+partEnt(NbrAl
éat+P)→X
:K+1→K
:End
:Disp "X=",X
```

```
prgmBIN
N=?100
P=?0.5
X=
                52
              Fait
```

f. Quelques sujets de bac

Un algorithme de simulation : Pondichéry S, avril 2012

Situation : Choix au hasard de 5 coureurs soumis à un contrôle anti-dopage à l’arrivée d’une course de 50 participants.

Variables a, b, c, d, e sont des variables du type entier

Initialisation | a :=0 ; b :=0 ; c=0 ; d :=0 ; e :=0

Traitement | Tant que ($a = b$) ou ($a = c$) ou ($a = d$) ou ($a = e$) ou ($b = c$) ou ($b = d$) ou ($b = e$) ou ($c = d$) ou ($c = e$) ou ($d = e$)

Début du tant que

a := rand(1, 50) ; b := rand(1, 50) ; c := rand(1, 50) ;
d := rand(1, 50) ; e := rand(1, 50) ;

Fin du tant que

Sortie Afficher a, b, c, d, e

Un exercice classique sur les lois normales : Pondichéry ES/L 2013

Situation : Production de batteries pour véhicules électriques
Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.
Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 40$.
1. Quelle est la probabilité, arrondie an centième, de ne pas atteindre cette ville ?
2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? Justifier votre réponse.

Utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique : Amérique du Nord S 2013

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes.
Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.
Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche.

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leq X \leq 400)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.
On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leq -1{,}751) = 0{,}040$

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.
1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains

commercialisables dans un échantillon de taille 300.

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables. Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

3 – L'IMPACT SUR LES PROGRAMMES DE BTS (PHILIPPE DUTARTE)

a. Lois de probabilité et modélisation en contexte aléatoire

Les programmes de mathématiques en sections de techniciens supérieurs (STS) sont rénovés avec une mise en application en première année à la rentrée 2013 (arrêté à paraître). Cette rénovation répond à un triple objectif :

– prendre en compte les nouveaux programmes du lycée général et technologique et du lycée professionnel ;

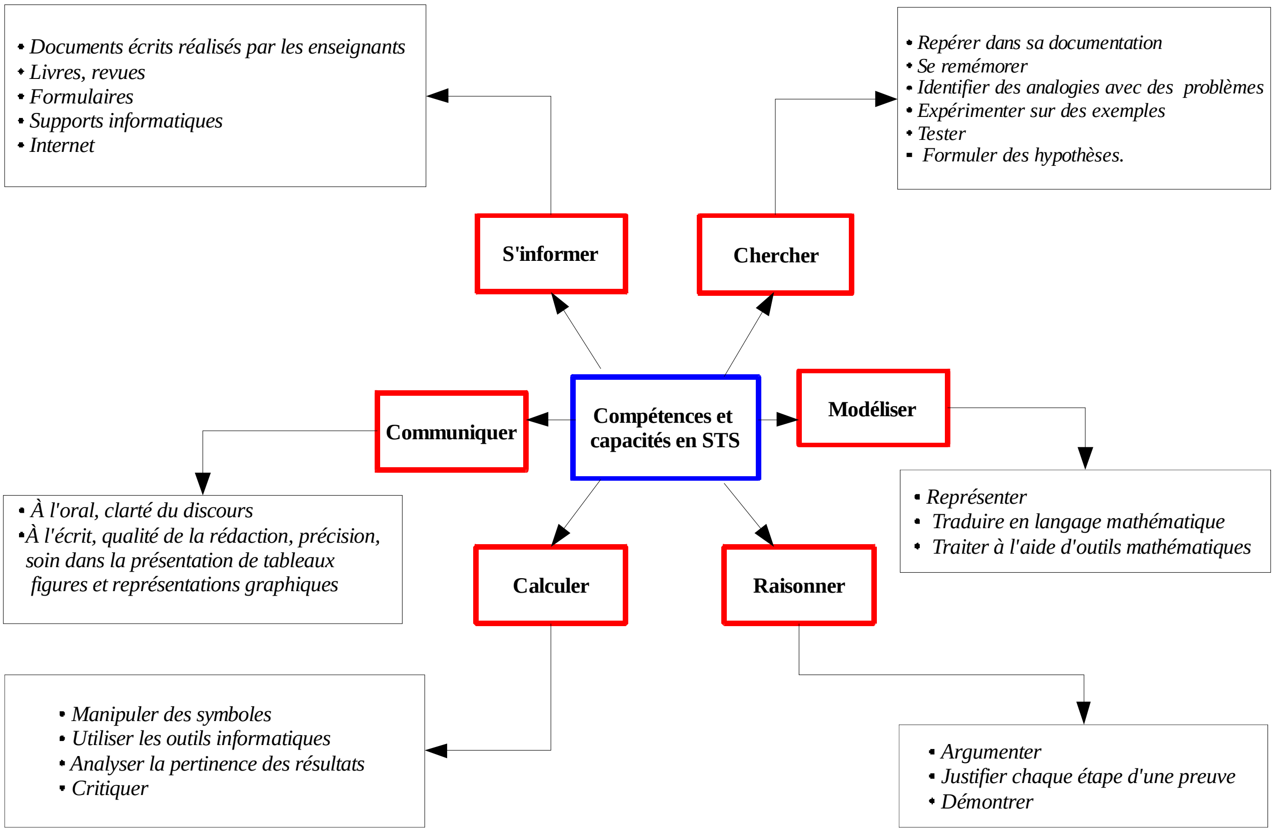
– favoriser l'intégration des titulaires d'un baccalauréat professionnel en première année ;

– préciser les capacités mathématiques attendues avec les outils numériques et favoriser leur usage en mathématiques, notamment en lien avec les applications propres à chaque spécialité de BTS.

Dans ce cadre, les changements, relativement importants, en statistique et probabilités dans les programmes des lycées impactent significativement les programmes de STS dans ces domaines.

Pour chaque spécialité de BTS, le programme de mathématiques est constitué à partir d'un choix effectué dans une liste de « modules ». Il existe six modules de statistique et probabilités : Statistique descriptive ; Probabilités 1 (conditionnement, lois binomiale, uniforme et normale) ; Probabilités 2 (lois exponentielle, de Poisson, exemples de processus aléatoires) ; Statistique inférentielle ; Fiabilité ; Plans d'expérience. Les deux derniers étant inscrits à un nombre plus réduit de STS, ne seront pas évoqués ici.

Comme les programmes du lycée général et technologique, les modules de STS sont rédigés en trois colonnes : contenus, capacités attendues, commentaires. Le fait de lister les capacités attendues est une nouveauté en STS. Ces capacités s'inscrivent dans le cadre de six compétences, que l'on peut résumer selon le schéma suivant.



Lois de probabilités et outils numériques

Dans la continuité des programmes du lycée général et technologique (aucune loi de probabilité ne figure aux programmes du lycée professionnel), les calculs concernant les lois de probabilité s'effectuent, pour l'essentiel, à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel. Il n'y a plus lieu d'enseigner l'usage des tables de probabilités en STS. Le module « Probabilité 1 » comporte notamment les capacités suivantes :

- *Simuler un schéma de Bernoulli.*
- *Représenter graphiquement la loi binomiale à l'aide d'un logiciel.*
- *Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.*
- *Concevoir et exploiter une simulation dans le cadre d'une loi uniforme.*
- *Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre de la loi normale.*

On libère ainsi un temps d'apprentissage important, précédemment consacré à l'enseignement de techniques de calcul, en particulier à l'usage de la table de la loi normale centrée réduite. On se concentre désormais sur une meilleure compréhension de ces lois (illustrations graphiques, simulations) et de leur domaine d'utilisation dans des contextes de modélisation.

Loi de Poisson et initiation aux processus aléatoires

Dans les programmes précédents de STS, la loi de Poisson était essentiellement vue comme une approximation de la loi binomiale, et pratiquement exclusivement dans ce cadre restrictif dans les sujets d'examen. Certains étudiants ayant abordé la loi exponentielle au lycée général et technologique, la loi de Poisson est introduite dans le module « Probabilités 2 » dans le cadre du processus correspondant :

> *La loi de Poisson est introduite comme correspondant au nombre de réalisations observées, durant un intervalle de temps de longueur donnée, lorsque le temps d'attente entre deux réalisations est fourni par une loi exponentielle.*

Le symbole ⇆ indique des contextes d'utilisation en lien avec les autres disciplines : fiabilité, désintégration nucléaire, gestion de stocks ou de réseaux.

L'étude d'exemples de chaînes de Markov (nouveauté en STS) est proposée dans le module « Probabilités 2 », comportant les capacités suivantes, qui pourront être complétées pour les sections possédant à leur programme le module « Calcul matriciel » :

- *Représenter un processus aléatoire simple par un graphe probabiliste.*
- *Exploiter un graphe probabiliste pour calculer la probabilité d'un parcours donné.*
- *Simuler un processus aléatoire simple.*
- *Exploiter une simulation d'un processus aléatoire pour estimer une probabilité, une durée moyenne ou conjecturer un comportement asymptotique.*

Théorème de la limite centrée et compléments d'analyse

Les titulaires d'un baccalauréat scientifique, très minoritaires en STS (sauf pour quelques spécialités), ont utilisé, sans le démontrer, le théorème de Moivre-Laplace. Les titulaires d'un baccalauréat technologique STI2D ont pratiqué l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale. Dans le module « Probabilités 1 »,

> *« le théorème* [de la limite centrée], *admis, s'énonce en termes d'approximation par une loi normale de la somme de n variables indépendantes de même loi. L'outil informatique [en] permet une approche expérimentale. ».*

Il s'agit donc d'une généralisation de ce qui a pu être vu au lycée général et technologique sans objectif de rigueur mathématique dans l'énoncé et encore moins de démonstration. Pour autant, certaines connaissances supplémentaires acquises en analyse (limites de fonctions, intégration par parties, équations différentielles) permettent de consolider les manipulations des lois à densité (loi normale, loi exponentielle) et, inversement, les contextes probabilistes présentent des applications concrètes de concepts d'analyse.

Dans le cadre de premiers cycles universitaires plus ambitieux, sur le plan mathématique, que les sections de techniciens supérieurs, un approfondissement en analyse (notions de limite, de convergence, de continuité, d'intégrale généralisée...) nous semble permettre un regard enrichi sur certains points de probabilités abordés au lycée général.

b. Tests d'hypothèse

Au lycée professionnel comme au lycée général et technologique, la notion de test d'hypothèse est abordée dès la classe de seconde, puis reprise en première et terminale, sous la forme de prise de décision concernant une proportion à partir de l'intervalle de fluctuation d'une fréquence. Dans les deux cas, la problématique est en place ; ce qui distingue le lycée général et technologique du lycée professionnel étant l'utilisation de lois (binomiale et normale) pour justifier l'obtention d'intervalles de fluctuations.

Dans le module « Statistique inférentielle » des STS, après un paragraphe « estimation ponctuelle » (d'une proportion, d'une moyenne, d'un écart type), le contenu « Tests d'hypothèse » est donc présenté avant celui « Estimation par intervalle de confiance », jugé conceptuellement plus délicat et non abordé au lycée professionnel.

À propos des tests d'hypothèse, le module « Statistique inférentielle » se limite, comme au lycée général et technologique, au cadre des lois binomiale et normale, mais on approfondit ce qui a été vu au lycée à trois niveaux :

– l'hypothèse concerne une proportion ou une moyenne ;

– le test peut être unilatéral (c'est assez fréquemment le cas en pratique) ;

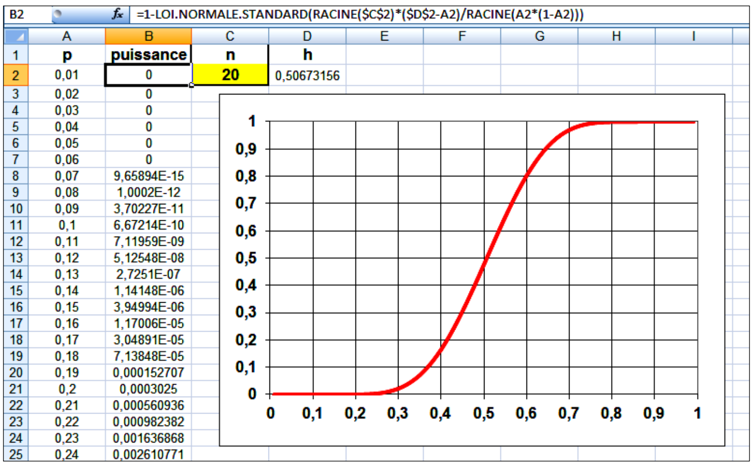
– les risques d'erreur de première et de seconde espèce sont analysés, la notion de puissance d'un test étant abordée.

Pour la compréhension de ces notions, les moyens logiciels sont sollicités :

> *On compare, à l'aide d'un algorithme ou de simulations, les différents seuils de signification et on met en évidence les risques d'erreur de première et de seconde espèce.*

Ainsi, la puissance d'un test est aisément illustrée à l'aide d'un tableur. Considérons par exemple un questionnaire à choix multiples (QCM) proposant n questions indépendantes avec, pour chaque question, trois propositions.

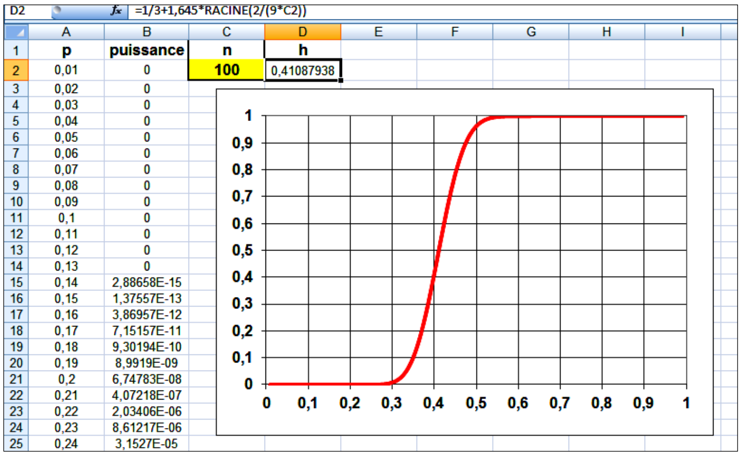
Le graphique 1 ci-contre indique, pour p probabilité de bonne réponse à chaque question située en abscisses, la probabilité de succès au QCM (hypothèse nulle $p = 1/3$ rejetée) située en ordonnées.



	A	B	C	D
1	p	puissance	n	h
2	0,01	0	20	0,50673156
3	0,02	0		
4	0,03	0		
5	0,04	0		
6	0,05	0		
7	0,06	0		
8	0,07	9,65894E-15		
9	0,08	1,0002E-12		
10	0,09	3,70227E-11		
11	0,1	6,67214E-10		
12	0,11	7,11959E-09		
13	0,12	5,12548E-08		
14	0,13	2,7251E-07		
15	0,14	1,14148E-06		
16	0,15	3,94994E-06		
17	0,16	1,17006E-05		
18	0,17	3,04891E-05		
19	0,18	7,13848E-05		
20	0,19	0,000152707		
21	0,2	0,0003025		
22	0,21	0,000560936		
23	0,22	0,000982382		
24	0,23	0,001636868		
25	0,24	0,002610771		

Graphique 1

On « voit » dans ce graphique 2 comment un test de $n = 100$ questions est plus « puissant » qu'un test de $n = 20$ questions.



D2 =1/3+1,645*RACINE(2/(9*C2))

	A	B	C	D
1	p	puissance	n	h
2	0,01	0	100	0,41087938
3	0,02	0		
4	0,03	0		
5	0,04	0		
6	0,05	0		
7	0,06	0		
8	0,07	0		
9	0,08	0		
10	0,09	0		
11	0,1	0		
12	0,11	0		
13	0,12	0		
14	0,13	0		
15	0,14	2,88658E-15		
16	0,15	1,37557E-13		
17	0,16	3,86957E-12		
18	0,17	7,15157E-11		
19	0,18	9,30194E-10		
20	0,19	8,9919E-09		
21	0,2	6,74783E-08		
22	0,21	4,07218E-07		
23	0,22	2,03406E-06		
24	0,23	8,61217E-06		
25	0,24	3,1527E-05		

Graphique 2

c. Estimation par intervalle de confiance

La notion d'intervalle de confiance n'a pas été vue au lycée professionnel.

Un bachelier scientifique, connaît, pour une proportion, l'intervalle : $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ , \ f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

à plus de 95 % de confiance, qui est en partie justifié.

Un bachelier technologique STI2D a utilisé l'intervalle de confiance à 95 % :

$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \ , \ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$ qui a été en grande partie admis.

Le module « Statistique inférentielle » des sections de techniciens supérieurs se limite au cadre de la loi normale, pour une proportion ou une moyenne, à un niveau de confiance donné (et non limité à 95 %). Les capacités attendues à ce propos sont les suivantes :

- *Déterminer un intervalle de confiance à un niveau de confiance souhaité pour :*
  - *une proportion, dans le cas d'une loi binomiale approximable par une loi normale ;*
  - *une moyenne, dans le cas d'une loi normale quand l'écart type de la population est connu ou dans le cas de grands échantillons.*
- *Exploiter un intervalle de confiance.*
- *Déterminer la taille nécessaire d'un échantillon pour estimer une proportion ou une moyenne avec une précision donnée.*

Les commentaires insistent :

- sur le rôle de la simulation pour « *mieux comprendre la notion d'intervalle de confiance* » ;
- sur la nécessité de bien distinguer confiance et probabilité :

Avant le tirage d'un échantillon, la procédure d'obtention de l'intervalle de confiance a une probabilité de 0,95 ou de 0,99 que cet intervalle contienne le paramètre inconnu ; après le tirage, le paramètre est dans l'intervalle calculé avec une confiance de 95% ou 99%.

4 -STATISTIQUE, PROBABILITES ET FORMATION DES MAITRES (JEAN-LOUIS PIEDNOIR)

La formation des futurs professeurs de mathématiques se déroule maintenant sur 5 années.

Quelle place est faite à la statistique, aux probabilités dans les formations dispensées sachant la place actuelle de ces champs scientifiques dans les nouveaux programmes des lycées ?

On sait que leur importance varie beaucoup d'une université à l'autre et est très réduite dans les classes préparatoires aux grandes écoles alors que leurs anciens élèves forment une part importante dans les reçus aux différents concours.

On sait que l'importance que les futurs candidats accordent aux différents chapitres d'un cursus dépend fortement des programmes et des usages des concours.

De prime abord on peut dire que la place des probabilités et surtout de la statistique est très modeste dans les différents programmes.

a. Au CAPES interne

Le programme de l'écrit se réduit au programme des classes du second degré, celui de l'oral dépend du niveau d'enseignement du candidat admissible, le plus souvent le collège. On aura donc des certifiés dont la formation en probabilités et statistique risque fortement d'être très légère voire quasi inexistante.

b. Au CAPES externe

Le programme de l'écrit est celui du second degré, des classes de techniciens supérieurs (STS) et des classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE). La première épreuve orale est la présentation d'une leçon relative aux classes du second degré et des STS. En clair c'est le seul programme des STS qui permet une approche de la statistique inductive allant plus loin que l'estimation par intervalle de confiance de la moyenne d'une loi de Gauss. Il permet aussi une première approche de la théorie des tests et aussi la découverte d'autres lois que la gaussienne ou la binomiale.

c. Au CAPLP2 de mathématiques - sciences,

Le programme précise des éléments de statistique descriptive : moyenne, écart-type, ajustement affine pour la liaison éventuelle entre deux variables, les premiers concepts du calcul des probabilités, y compris l'énoncé de la loi des grands nombres, rien en statistique inductive.

d. À l'agrégation interne

Outre le programme du second degré, il existe un programme complémentaire relativement fourni, souvent plus ambitieux que celui des CPGE avec par exemple en algèbre : anneaux, corps, groupes en liaison avec la géométrie, de l'analyse numérique, mais pas de statistique, et en probabilités les seules notions de variable aléatoire et la loi faible des grands nombres.

e. À l’agrégation externe

L’écrit se compose de deux épreuves écrites de 6 heures et pour l’oral on distingue 4 options : probabilités et statistique, calcul scientifique, algèbre et calcul formel, informatique, avec 3 épreuves. Deux sont communes aux trois premières options : algèbre et géométrie, analyse et probabilités, la troisième, intitulé modélisation, a un programme propre à l’option probabilités et statistique.

A l’écrit on a une épreuve de mathématiques générale et une épreuve d’analyse et probabilités. En probabilités le programme comprend les notions de variable aléatoire, y compris la fonction caractéristique, de modes de convergence, avec la convergence presque sûre, la loi faible des grands nombres et le théorème central limite.

Pour les trois premières options, une allusion est faite à la simulation et la méthode de Monte Carlo est au programme.

L’option probabilités et statistique a un programme plus développé en probabilités avec chaînes de Markov, martingales, vecteurs aléatoires dans R^n, étude de lois usuelles.

Elle est la seule à comporter un programme de statistique inférentielle : estimation ponctuelle et par intervalle, tests paramétriques, méthode du maximum de vraisemblance, modèle linéaire dans le cas gaussien (méthode des moindres carrés), tests d’adéquation du χ^2 et de Kolmogorov.

L’épreuve de modélisation est la seule qui permet à un candidat de traiter une situation faisant appel à la statistique.

Tous les agrégés des autres options peuvent donc ignorer la statistique.

f. La pratique des concours

Dans le passé, cette dernière défavorise de fait la statistique voire les probabilités.

En effet, à l’oral, le candidat a le choix entre deux sujets. Les jurys ne couplent quasiment jamais de sujets concernant le champ probabilités et statistique. Les candidats le savent, si bien que l’on peut être reçu en faisant l’impasse sur ces chapitres du programme, sauf bien sûr si l’on a choisi l’option correspondante.

g. En résumé

On remarque que les probabilités, et surtout la statistique, sont les parents pauvres des programmes des concours de recrutement. Pratiquement les programmes des concours internes les ignorent quasi complètement. Ceci est évidemment en contradiction avec l’évolution récente des programmes de lycée. Sous réserve d’existence, il reste un grand espace pour la formation continue !

5 - QUEL IMPACT DE LA REFORME DES PROGRAMMES EN PROBABILITES ET STATISTIQUE SUR L'ENSEIGNEMENT EN LICENCE ET EN IUT ? (JEAN-PIERRE RAOULT)

a - Licence

Un questionnaire a été envoyé (avec l'aide des directeurs d'IREM et de correspondants locaux de la SMF), auquel ont répondu les responsables de nouvelles maquettes de L1 dans 19 universités.

Le champ de l'enquête était délimité ainsi :

> *Ce questionnaire porte sur la première année de licence, dans la filière qui, dans votre université, comporte la plus grande part de mathématiques (obligatoire ou optionnelle).*

Trame du questionnaire (nous ne reproduisons pas ici le détail des questions, où étaient rappelées point par point les dominantes des programmes de lycée)

1. Sur l'ensemble des enseignements de mathématiques prévus en L1 en 2013-2014, avez-vous prévu des modifications importantes pour prendre en compte les nouveaux programmes de lycée ?
2. Y a-t-il dans votre projet de maquette une section de calcul des probabilités ?
3. Y a-t-il dans votre projet de maquette une section de statistique ?
4. En probabilités ou en statistique, avez-vous prévu l'usage de moyens de calcul ? En quoi ?
5. Avez-vous déjà prévu les grandes lignes des enseignements de probabilités et statistique en L2 (2014) et L3 (2015) ?

1. Réponses sur l'ensemble des enseignements de mathématiques prévus en L1

Quatre universités affirment ne faire aucun changement notable, 3 parlent de « légères modifications » (dont une sans précisions). Toutes les autres déclarent devoir beaucoup évoluer pour remédier aux manques les plus importants de la formation du lycée.

Les avis diffèrent un peu sur les « trous » à combler en priorité. L'analyse élémentaire est la plus souvent citée (fonctions de référence, continuité, dérivation, suites...) mais les choix de « renoncements » pour repousser en L2 (voire L3) des thèmes auparavant traités en L1 varient : on conserve ou non le calcul intégral (en général conserve), les équations différentielles (en général non), les séries (en général non), les développements limités (en général non).

La géométrie est citée dans 4 universités. Sauf dans une université qui insiste sur les liens avec la physique, les arguments sont toujours « de l'intérieur des maths ».

2. Réponses sur les probabilités

Il est remarquable que jamais les probabilités ni la statistique n'étaient citées spontanément parmi les « trous » a combler en priorité. Il n'est donc pas étonnant que toutes les universités qui ont répondu sauf 3 aient décidé de ne pas enseigner de probabilités ni de statistique en L1 (en affirmant souvent que telle était déjà la situation actuelle) ; sur les 3 exceptions une met

« un peu de probas » en algèbre, une intègre les probabilités dans une UV avec Logique et combinatoire, la dernière crée une UV en MASS.

Souvent (9 universités) les idées sont déjà un peu élaborées sur l'enseignement en L2. La nécessité est en général affirmée de tout reprendre à zéro, ou « presque » (pas étonnant vu l'interruption d'un an) avec souvent des arguments du type : « avait été trop difficile pour les élèves au lycée », « inadapté en lycée vu le manque d'outils » (par exemple sur les coefficients binomiaux).

Le lien avec d'autres branches des maths est peu explicite, sauf avec le calcul intégral (2 fois UV commune) et une fois avec les séries.

3. Réponses sur la statistique

La statistique n'est jamais prévue en L1 sauf dans deux universités : une qui envisage d'enseigner intervalle de confiance et tests avec « l'espoir que les élèves aient profité de l'enseignement de terminale », l'autre qui fait une UV de statistique descriptive.

La plupart des universités ne répondent pas sur ce que pourraient être les projets en statistique pour L2 ou L3 ; deux répondent ne pas avoir l'intention de changer l'existant ; une seule affirme qu'il n'en sera pas enseigné du tout en licence, mais on peut imaginer que ce sera le cas dans plusieurs autres.

Dans 6 universités il est déjà prévu que la statistique en Licence soit optionnelle ; une seule évoque le besoin en cette matière pour les futurs professeurs du secondaire et donc prévoit cette UV pour ceux-ci (mais peut-être d'autres y songent et ne l'ont pas explicité).

4. Réponses sur les outils de calcul

Très peu de réponses à cette question. Dans 4 universités seulement on a précise les outils : WIMS (1 fois), R (2 fois), Scilab (1 fois).

En conclusion (attendue ?)

La place prise par les probabilités et la statistique dans les programmes de lycée ne semble pas se prolonger dans la vision des mathématiciens qui préparent des programmes de licence. Au pire elle est ignorée, au mieux elle fait l'objet d'une grande suspicion sur ce que les élèves en auront retiré, d'ou la volonté de tout reprendre à zéro (« avec de meilleurs outils mathématiques » dit-on parfois).

Seules deux universités semblent vraiment vouloir s'appuyer sur des acquis du lycée (explicitement niés par nombre d'autres).

b - IUT. Départements STID (Statistique et Informatique Décisionnelle)

Informations recueillies auprès de Florence Muri-Majoube, IUT de Paris-Descartes, membre de la CPN (Commission Pédagogique Nationale) STID et Informatique.

Le nouveau PPN (Programme Pédagogique National) qui devrait être validé en STID obéit essentiellement à deux contraintes :

- l’évolution des métiers et le renforcement de l’informatique décisionnelle, peu présente dans le programme actuel,

- l’évolution exigée des publics d’étudiants, qui, en plus des bacheliers S et ES accueillis traditionnellement, doivent comporter des bacheliers techno STG (notamment option gestion des systèmes d’information) et STI2D (notamment option systèmes d’information et numérique) et des bacheliers L option math, voire (ce sera plus compliqué) des bacheliers STL.

L’impact de l’évolution des programmes dans les lycées généraux est plutôt secondaire par rapport à ces deux contraintes.

Évolution des contenus

L’équilibre des Unités d’Enseignement est modifié : les mathématiques auparavant avec la programmation sont maintenant dans la même UE que la statistique, ce qui en facilitera la validation pour les étudiants moins à l’aise en mathématiques. Le volume du cours de mathématiques a été augmenté en prenant en compte la diminution de son contenu au lycée.

Le contenu du cours de probabilités a été modifié pour prendre en compte l’augmentation du volume d’heures en probabilités au lycée et sera enseigné en utilisant beaucoup plus la simulation. Le contenu en algorithmique (diminution du nombre d’heures) a également été revu pour prendre en compte ce qui est fait au lycée.

De manière générale, tous les cours de statistique de 1ère année prennent en compte l’augmentation du nombre d’heures de statistique dans les nouveaux programmes du lycée.

Évolution des méthodes d’enseignement

Afin de favoriser l’adaptation des différents publics à la formation, une UE d’accueil en 1ère année comporte un module « Mathématique ou Économie » dont le contenu est adapté : les bacheliers S suivront le module Économie, les ES le module Maths (renforcement des bases de l’analyse), pour les bacheliers techno ce sera fonction de leur série. L’enseignement de statistique descriptive, qui est dans cette UE d’accueil, a aussi une mise en œuvre différenciée selon ce profil (prise en compte du fait que les ES font plus de statistique au lycée).

Selon les départements, du tutorat peut être prévu pour accompagner les étudiants qui le souhaitent (par exemple à Paris un enseignant sera en charge des bacheliers professionnels). L’accent est mis sur le PPP (Projet Pré Professionnel) sur les 2 ans pour ancrer encore plus les étudiants dans la formation en les faisant travailler sur les métiers, leur motivation, les méthodes de travail.

c - IUT. Départements INFORMATIQUE

Informations recueillies auprès de Max Chlebowski, IUT de Lille, membre de la CPN (Commission Pédagogique Nationale) STID et Informatique.

Comme pour STID, le Ministère a donné instruction de produire des nouveaux Programmes Pédagogiques Nationaux à mettre en œuvre en septembre 2013, en prenant en compte les nouveaux programmes du Lycée, que ce soit en séries générales ou pour les baccalauréats de Techniciens (en particulier STI2D).

Pour les départements INFO l'appui sur les contenus des programmes de Lycée est jugé suffisamment lâche pour qu'il n'y ait pas trop de contraintes nouvelles ; tout juste a-t-il été repris de l'analyse classique pour reprendre des éléments qui avaient disparu des programmes de S, tout en laissant de côté des éléments de statistique élémentaire maintenant largement pratiqués au Lycée. Le débat le plus ardu dans la préparation du programme a porté sur la part à laisser aux mathématiques classiques face aux maths discrètes, avec le souci d'éviter la fuite en avant consistant à créer un programme si énorme que nul ne peut le réaliser en totalité.

Dans le nouveau PPN (approuvé par le CNESER le 15 avril 2013) figure une présentation bien plus détaillée des objectifs de la formation en termes de compétences professionnelles. Il n'a pas été tenu compte de la nouvelle spécialité ISN « Informatique et Science du Numérique » de la terminale S : les rédacteurs du programme doutent que son contenu ambitieux soit assimilé par les étudiants et de plus pour l'instant la proportion des lycéens qui l'ont choisie est assez faible.

d - Classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques

Nous nous limitons ici, faute de temps et vu la nature du colloque, rassemblant des mathématiciens et des physiciens, aux filières à dominante mathématiques ou physique (MPSI, PCSI). Mais il faut savoir que la place des probabilités et de la statistique est bien plus importante dans d'autres filières, en particulier biologiques. Dans le programme de première année (entrant en vigueur en octobre 2013), le chapitre « probabilités » a pour préambule :

> *Ce chapitre a pour objectif de consolider les connaissances relatives aux probabilités sur un univers fini et aux variables aléatoires définies sur un tel univers présentées dans les classes antérieures. Il s'appuie sur une étude préalable des bases du dénombrement. Ce chapitre a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Il se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.*

Les thèmes d'activité proposés sont l'utilisation du logiciel au programme pour simuler des variables aléatoires (lois uniforme, de Bernoulli, binomiale, géométrique) et l'étude d'exemples de chaînes de Markov à espace d'états fini (marches aléatoires, ruine du joueur).

Dans l'état actuel des programmes de seconde année (en consultation jusqu'au 20 juin 2013) on lit :

> *Ce chapitre, dont l'objectif est d'aborder l'étude des variables aléatoires discrètes, généralise celle qui a été effectuée en première année et fournit des outils permettant d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de processus stochastiques à temps discret. La mise en place de ces outils nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités. Ces dernières font l'objet d'un exposé a minima...*
> *Les résultats vus en première année s'étendent de manière très naturelle au cas des variables aléatoires discrètes. Cette extension doit être effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour des activités pratiques.*

Plus que ce qui figure dans ces programmes (avec moult précautions pour limiter l'aspect fondamental des notions abordées et donc les possibilités de liaisons vraiment fructueuses avec le reste du programme de maths), est intéressant ce qui n'y figure pas. En particulier on lit explicitement dans le projet pour la seconde année : *La notion de variable à densité est hors programme.* La statistique est totalement absente de ces programmes.

Il y a donc une utilisation vraiment a minima d'une continuité avec les programmes de terminale ; c'est dans les grandes écoles que les élèves de ces filières reprendront contact, après deux ans d'interruption, avec les variables aléatoires continues ou avec le raisonnement statistique ; on sait que c'est souvent loin d'être satisfaisant et cela ne les prédisposera pas à en voir l'intérêt mathématique !

6 - COMPARAISON AVEC LES CHOIX A L'ETRANGER (JEAN-PIERRE RAOULT)

Nous nous appuyons ici sur le numéro spécial de la revue en ligne, éditée par la SFdS (Société Française de Statistique), *Statistique et Enseignement* (volume 4, numéro 1, avril 2013), coordonné par Carmen Batanero (Granada), Jeanne Fine (Toulouse) et Jean-Pierre Raoult (Paris) : **Le curriculum statistique dans le secondaire - Comparaisons Internationales** : http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/StatEns

Ont contribué à ce numéro des auteurs en provenance d'Allemagne, de Belgique (francophone), du Canada, d'Espagne, de France, d'Italie, du Mexique et des USA.

Un article de synthèse dans ce numéro est celui de Gail Burrill (USA) et Rolf Biehler (Allemagne) : *Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire.* Après avoir fait une synthèse de différentes sources, ces auteurs organisent ces « idées fondamentales » autour de sept concepts : les données ; la variation ; les distributions ; les représentations ; les corrélations et associations entre variables ; les modèles probabilistes ; l'échantillonnage et l'inférence.

C'est en fonction des poids respectifs de ces concepts dans les programmes et des moyens (origine des données, outils mathématiques...) qui sont mis en avant pour les traiter que l'on peut caractériser les enseignements des différents pays. Il faut cependant relever deux points communs : il n'est aucun pays ou les programmes ne revendiquent, dans leurs attendus, la nécessité que l'enseignement des mathématiques, à travers en particulier la statistique, contribue à former l'enfant en tant que futur citoyen à la littératie numérique.

Dans la mesure où l'enseignement de la statistique reste dans le cadre du cours de mathématiques (même si des pistes sont parfois évoquées pour favoriser des collaborations transdisciplinaires), un souci central est celui de la formation des enseignants, que leur formation mathématique a souvent peu préparés aux spécificités de la statistique.

Dans cette typologie des 7 concepts fondamentaux, un pays comme la France, ayant choisi d'orienter son programme dans les lycées (filières S ou ES) vers de la statistique inférentielle (intervalles de confiance, initiation aux tests d'hypothèses), met l'accent sur les distributions, les modèles probabilistes, l'échantillonnage et l'inférence. À l'opposé les USA vont privilégier une approche à partir des données et de leur variabilité. Ceci est particulièrement frappant dans un rapport publié par l'ASA (American Statistical Association), rapport intitulé *Guideline for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE)* [Franklin et al., 2007], suite à une demande du National Council of Teachers of Mathematics (USA).

Il y a là matière à débat et on peut penser que, quoique les programmes en France soient très récents, ils connaîtront assez prochainement des évolutions reflétant cette tension.

REFERENCES

Bonneval, L.-M. (2012). Fluctuation et confiance au lycée. *Bulletin APMEP 500*, septembre-octobre 2012, 494-504.

Cerclé, V. (2013). Quelques précautions autour de l'intervalle de fluctuation de la seconde à la terminale. *Repères IREM 91*, avril 2013, 51-69.

CREM (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques*, chap. 2 : Statistique et probabilités, Odile Jacob.

Ducel, Y. & Saussereau, B. (2011). La prise de décision de la Seconde à la Première. *Repères IREM 85*, octobre 2011, 31-49. En ligne : http ://www.univ-irem.fr/spip.php ?article=71&id_numero=85&id_article_reperes=572

Dutarte, P. (2013). Du bon usage d'un intervalle de fluctuation. *Bulletin APMEP*, à paraître.

Franklin, C., Kader G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. and Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education* (GAISE). Report : A pre-K-12 curriculum framework, Alexandria, VA : American Statistical Association, http ://www.amstad.org/education/gaise/

Henry, M. (2010). Évolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités. En ligne, *Statistique et enseignement 1(1)*, mars 2010 : http ://publications-sfds.math.cnrs.fr/ojs/index.php/StatEns/article/view/4

Henry, M. (2011). Simulations d'expériences aléatoires en classe, *Bulletin APMEP 496*, novembre-décembre 2011, 536-550. En ligne : *MathemaTICE 26*, septembre 2011, http ://revue.sesamath.net/spip.php ?article353

CONFERENCE 3 : DES DISPOSITIFS POUR MIEUX ACCUEILLIR LES ETUDIANTS A L'UNIVERSITE

Pierre Arnoux, IML - Institut de Mathématiques de Luminy
Jean Yves Boyer, Université Bordeaux1 – IMB
Stéphanie Bridoux, Université de Mons (Belgique)
Martine De Vleeschouwer, Université de Namur (Belgique)
Patrick Frétigné, Université de Rouen, Responsable de Commission Inter-IREM Universités
Josiane Gasparini, UFR de mathématiques et informatique, Université De Strasbourg
Pascale Sénéchaud, Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences et Technique de Limoges et IREM de Limoges.

Après un point de vue introductif sur l'état actuel de l'enseignement en licence (notamment sur la mesure des impacts du plan PRL), nous présentons des dispositifs précis, innovants, de natures différentes, en Belgique et dans plusieurs universités françaises, en relevant les bonnes idées, les difficultés rencontrées qui ont parfois mis à mal les dits dispositifs. Nous établissons ensuite un ensemble de questionnements qui se posent à l'aube de l'arrivée dans le supérieur des lycéens ayant appris avec les nouveaux programmes.

INTRODUCTION

Ce document se veut le reflet de la conférence qui a été donnée lors du colloque de Lyon, sous le titre « Des dispositifs pour mieux accueillir les étudiants à l'université ». Nous avons voulu faire un premier point sur les dispositifs d'accueil des primo-entrants universitaires, un état des lieux et nous espérons que ce dossier permettra de débuter une réflexion approfondie sur le sujet.

Chaque conférencier a donc rédigé un résumé de son intervention et ce document en est la juxtaposition. Il se termine sur un ensemble de questions qui se sont posées lors des débats.

Dans la première partie, Pierre Arnoux dresse un état des lieux des dispositifs mis à la disposition des primo-entrant à l'université. Il souligne, entre autre, la difficulté de la mise en œuvre des outils d'évaluation des filières mises en place.

La deuxième partie permet d'ouvrir le débat aux autres universités européennes avec un compte rendu de l'expérience développée par deux universités Belges (Mons et Namur).

En complément du diaporama présenté, qui permet de faire un tour d'horizon des dispositifs de remise à niveau existants dans l'hexagone, les parties III et IV sont dédiées à ces dispositifs : Dans la partie III, Pascale Sénéchaud tente de répondre à deux questions : quel est le public inscrit dans ces filières et quelles sont alors ses attentes ? Et dans la partie IV, Patrick Frétigné propose une réflexion, une analyse plus approfondie sur le bien-fondé de ces filières et sur leur place dans les cursus universitaires.

L'université de Strasbourg, comme d'autres, a mis en place un parcours dit d'excellence qui veut modifier l'attractivité de l'université. Josiane Gaspérini explique, dans la partie V, le pourquoi et le comment de cette filière.

Enfin, dans la dernière partie, Jean-Yves Boyer, dresse la liste des réformes des années 2000, et rappelle quels ont été les actions et les dispositifs mis en place dans le cadre du « Plan Réussite en Licence » et termine par quelques questions posées lors des débats.

SOMMAIRE

1- LA REUSSITE DES ETUDIANTS EN PREMIER CYCLE ET LES FILIERES DITES « D'EXCELLENCE » (PIERRE ARNOUX)

La réussite des étudiants en premier cycle : un état des lieux.

Après avoir fortement augmenté entre 1987 et 1995, passant de 32 228 à 63 720, les effectifs entrant en licence scientifiques sont retombés en 2008 à 31 848, augmentant très légèrement dans les années suivantes (33 154 en 2011, dernière année disponible). Tous les effets de la hausse des années 80-90 ont été annulés, et on est revenu au niveau du début des années 1980.

Cette baisse des effectifs ne signifie pas une augmentation de la sélectivité du recrutement des formations, au contraire. Comme les effectifs du baccalauréat général stagnent et ceux du baccalauréat technologique baissent, tandis que les effectifs du baccalauréat professionnel augmentent fortement, passant de 89 937 en 2005 à 164 678 en 2012 et dépassant nettement ceux du baccalauréat technologique, le nombre de bachelier professionnels qui s'inscrivent en licence scientifique augmente rapidement, alors que leur taux de réussite reste de 0%.

Le taux de réussite effectif en licence pour tous les étudiants est très difficile à déterminer; certaines statistiques « officielles » proposent un « *taux de réussite selon la méthode 3 du MESR* » déterminé de la façon suivante : on rapporte le nombre de néo-bacheliers de la Cohorte diplômés d'une Licence l'année T+2 et inscrits pour la première fois en première année de Licence l'année T à l'ensemble des néo-bacheliers de la Cohorte encore présents à T+2. Autrement dit, ce taux de réussite élimine tous les étudiants qui ont raté leur première année et quitté l'université, et en particulier la quasi-totalité des candidats titulaires d'un baccalauréat professionnel.

Il est difficile de comprendre comment les taux publiés par les études de la DEPP sont calculés (voir à ce sujet la note 13-02 citée ci-dessous, qui consacre une demi-page dense à cette question en page 6), et encore plus de savoir quelle est la fiabilité des données sur lesquels ils se fondent; mais on peut supposer que ces divers biais sont assez constants suivant les années, et que les variations des indicateurs ont un sens. Une étude récente de la DEPP (note 13-02) montre que les effectifs totaux de la cohorte de licence sont passés de 172 777 en 2004 à 154 364 en 2007 (dernière année pour laquelle les résultats au diplôme en 3 et 4 ans sont disponibles). Durant la même période, le taux de réussite en trois ans est passé de 28,8% à 27,0%, et le taux de réussite en quatre ans de 40,3% à 38,9%. On a donc réussi à faire baisser à la fois les effectifs et les taux de réussite. Cette même étude donne un taux de réussite en trois ans de 28,3% en sciences-STAPS, mais ce taux combiné camoufle, grâce au fort taux de réussite en STAPS, un taux de réussite en 3 ans de 23% en licence de sciences, taux le plus bas de toutes les licences avec la licence AES.

Les rares études complètes que l'on peut avoir pour certaines universités montrent des taux réels (taux de réussite en trois ans sur tous les inscrits) encore plus bas, parfois inférieurs à 5% dans certaines filières; des taux de passage L1-L2 compris entre 20 et 30%, et parfois inférieurs au taux de réussite au concours de la première année de médecine, ne sont pas rares.

Pour résumer, les flux d'entrée en licence ont fortement baissé depuis 1995, et les taux de réussite sont très bas; sur les dernières années, période d'application du « plan réussite en licence », ces taux ont légèrement baissé, et ils sont particulièrement bas en licence scientifique.

Il n'y a pas de désaffection pour les études scientifiques

Cet ensemble de phénomènes a été résumé sous le titre de « désaffection pour les études scientifiques », souvent raccourci en « désaffection pour les sciences ». Cette explication tautologique (si les étudiants ne s'inscrivent pas, c'est qu'ils n'ont pas envie de s'inscrire) permet de réduire les problèmes très réels de la licence universitaire à une question de nature psychologique, laissant croire qu'il suffirait de quelques campagnes de publicité pour résoudre le problème.

Cette idée a des avantages multiples : elle est compréhensible par tous, sa nature tautologique la rend particulièrement convaincante, elle s'accorde bien avec les préjugés des journalistes, de formation littéraire en général, qui la diffusent, et elle dispense les responsables du moindre investissement sérieux pour tenter d'améliorer les choses, puisqu'elle semble dire que les obstacles sont de nature psychologique.

Le seul problème est que cette idée n'a aucune validité. Il n'y a aucun argument sérieux qui indiquent que les étudiants aimeraient les sciences, ou les études scientifiques, plus ou moins aujourd'hui qu'en 1960 ou en 1990; toutes les études disponibles indiquent au contraire une grande constance dans l'intérêt pour les sciences, et les carrières de recherche gardent un grand prestige, même si de nombreux jeunes les considèrent, d'une façon très raisonnable, comme inaccessibles.

Les évolutions des choix des étudiants ne sont pas motivées par des considérations « affectives », mais par des considérations matérielles, largement de nature économique. Les étudiants prennent en compte les conditions d'étude, l'encadrement, la probabilité d'arriver à obtenir le diplôme, la valeur que la société donne à ce diplôme, et les débouchés qu'ils peuvent espérer; il est clair que, sur tous ces points, l'université est handicapée, ce qui explique une large part des évolutions.

On peut (et on doit) parler de la baisse des flux d'entrée à l'université, des mauvaises conditions d'étude, des taux d'échec; mais il faut rayer le mot « désaffection » du vocabulaire : il induit un diagnostic inapproprié des causes de ces évolutions, et conduit à des propositions de solution inefficaces.

Le plan réussite en licence

L'ampleur de l'échec en premier cycle, après avoir été longtemps minimisée, est maintenant généralement reconnue, même si l'opinion publique, et la plupart des décideurs, ignorent les chiffres réels. Des plans d'action ont donc été lancés; le dernier, le « plan réussite en licence » (PRL ci-dessous), a été largement médiatisé, et le ministère y a mis des moyens non négligeables, environ 0,13 milliards d'euros par an depuis 2008.

Nous commençons maintenant à avoir un peu de recul pour juger de ses résultats; comme nous l'avons vu ci-dessus, sur la durée du plan, le taux d'échec en licence a légèrement progressé, d'un peu plus de 1%; mais cette hausse est modique, et il n'est pas clair que l'on puisse l'attribuer au PRL (ce pourrait être par exemple une conséquence d'une baisse de niveau des bacheliers s'inscrivant en licence, due entre autre à une changement d'origine scolaire et sociale). On ne peut donc pas affirmer que le PRL a eu des conséquences négatives, il n'a peut-être juste eu aucun effet.

En quoi ont consisté les actions prises dans le cadre du PRL ? Essentiellement dans la poursuite et l'amplification d'actions déjà bien connues et balisées :

- admission post-bac et orientation active,
- tutorat et enseignant référent,
- cours intégrés, suppression des amphis,
- diminution des effectifs.

Il y a eu, à ma connaissance, très peu d'évaluations sérieuses du PRL; on manque de travaux sur la pédagogie et la didactique de l'enseignement supérieur, et il est très difficile d'évaluer l'efficacité de ces mesures. L'une des études les plus intéressantes est le rapport de la Cour des Comptes sur le sujet (rapport public annuel 2012, chapitre 3, pages 656–704). Elle ne dit bien sûr pas grand chose sur le côté pédagogique de l'opération, sur lequel les compétences sont rares et qui intéresse peu de monde, mais son verdict sur l'organisation est sévère :

> Alors que la formule retenue de l'appel à projets aurait dû conférer un caractère incitatif aux crédits du plan « Réussir en licence », la DGESIP n'a pas entendu moduler significativement le montant des crédits attribués en fonction de la qualité des projets présentés et (...) en fonction du degré de mobilisation propre à chaque établissement. En réalité, hormis les variations marginales dont ils ont fait l'objet, ces crédits n'ont jamais servi qu'à abonder de façon forfaitaire la dotation des universités pour financer des actions en principe ciblées sur la réussite en licence.
>
> Le plan ministériel n'a pas fait l'objet, de la part du ministère, d'un pilotage et d'un suivi garantissant l'efficacité de cette dépense publique supplémentaire.

Le jugement sur les universités a été plus modéré :

> Les universités se montrent aujourd'hui plus soucieuses de s'adapter aux besoins de leurs étudiants. La plupart d'entre elles se sont mobilisées pour mieux accompagner ces derniers, même si la relation entre cette dynamique et le plan « Réussir en licence » demeure difficile à apprécier.

L'action d'aide à la réussite des étudiants se déroule donc surtout au niveau local, indépendamment du PRL, et cette table ronde en présente quelques éléments.

Quelques initiatives

Le PRL ne s'est pas adressé aux problèmes réels de la licence, et probablement ne pouvait-il pas le faire, car il aurait fallu pour cela identifier ces problèmes et remettre en cause l'application du LMD. Une enquête de la SMF avait, il y a déjà plusieurs années, identifié certains de ces problèmes :

- le morcellement croissant des enseignements,

- le nombre d'intervenants en licence (dans une majorité des universités, un étudiant de L1 de maths voit au moins 8 enseignants de mathématiques différents dans l'année),
- la diminution régulière de la pluridisciplinarité suite au passage du DEUG à la licence,
- le raccourcissement de l'année, et la durée croissante des périodes d'examen,
- la diminution de la durée de travail personnel demandée aux étudiants.

Des initiatives locales se sont préoccupées de ces problèmes; elles peuvent être regroupées, pour une large part, dans deux catégories : les enseignements palliatifs, et les parcours « élitistes », ou catalogués comme tels.

Les premiers se donnent en général pour but une remise à niveau, et ciblent des populations d'étudiants dont le taux de succès est faible. Même si ces enseignements de remise à niveau fonctionnent, ce succès n'est pas souvent visible, car ils permettent surtout à une partie de leur auditoire de rebondir dans d'autres formations après avoir fait des choix d'études plus appropriés à leur niveau.

Les seconds apparaissent souvent sous la forme de « classes préparatoires intégrées à l'université », et préparent des concours ; ce sont en général des petits groupes, d'une part parce qu'il y a peu de candidats, d'autre part parce que, pour nombre de hauts responsables universitaires, la qualité de la formation est inséparable d'une sélection drastique, dont on doit faire la preuve pour être catalogué « parcours d'excellence ».

Ces parcours, on en verra quelques exemples, font assez facilement la preuve de leur efficacité : la qualité de leur corps enseignant, quand on lui donne les moyens permettant un encadrement efficace des étudiants, garantit une réussite sans rapport avec celle des parcours standards. Mais c'est aussi là que réside leur limite. Le manque de moyens ne permet pas de généraliser ces méthodes reconnues à l'ensemble de la licence, si bien qu'ils ne peuvent concerner qu'une petite minorité d'étudiants; de plus, le manque d'engagement à moyen terme des universités rend difficile la construction d'une identité, d'une « image de marque », comparée à celle des classes préparatoires d'un grand lycée; un changement de stratégie de l'université peut entraîner la disparition irrémédiable d'un parcours de ce genre, avec l'énergie qui y a été investie par l'équipe pédagogique.

Ces « parcours d'excellence » ne sont donc pas, dans la situation actuelle, une voie de sauvetage pour la licence scientifique; tout au plus indiquent-ils que, si on voulait s'en donner les moyens, une autre existence serait possible pour la licence, et c'est pour cela qu'il faut les observer avec attention. Si un jour l'université se donne d'autres priorités, c'est dans ces parcours que l'on trouvera les idées qui permettent d'avancer.

J'aimerais cependant indiquer une initiative atypique (il en existe certainement bien d'autres dont je n'ai pas connaissance) : la licence « sciences et humanités » de l'université d'Aix-Marseille, qui construit, semble-t-il avec succès, un parcours authentiquement pluri-disciplinaire alliant, comme son nom l'indique, les sciences (mathématiques, physique) et les humanités (histoire, sciences sociales).

2- DESCRIPTION DE QUELQUES ACTIONS DANS DEUX UNIVERSITES BELGES (STEPHANIE BRIDOUX ET MARTINE DE VLEESCHOUWER)

Précisons que l'Université, en Belgique, est l'institution où se donnent les formations de plus haut niveau (décernant des diplômes de niveau Bac+5, Bac+8), contrairement aux Hautes écoles belges (diplômes de niveau Bac+3). De plus, bien qu'un socle de compétences terminales commun soit à la base de la conception des programmes enseignés dans toutes les écoles secondaires belges, il n'existe pas d'épreuve standardisée (style Bac) en fin de secondaire. Et comme, mis à part quelques rares exceptions, il n'y a pas de sélection ni de contingentement à l'entrée à l'Université, le niveau des étudiants y entrant est très varié. Nous présentons dans cette section des dispositifs mis en place, dans deux universités belges, pour aider les étudiants dans la transition lycée-université.

A l'université de Namur

L'Université de Namur compte quelques 6.000 étudiants, et fait partie de l'Académie[1] Louvain qui compte près de 36.000 étudiants. A Namur, deux catégories de dispositifs ont été mis en place pour aider les étudiants de première année dans la transition secondaire-université : des dispositifs *obligatoires* (insérés dans le cursus de première année et débouchant sur une évaluation certificative) et d'autres *facultatifs*. Les dispositifs obligatoires sont de type création de cours et instauration de travaux de groupes. Nous ne les détaillerons pas ici, et renvoyons le lecteur à la sous-section suivante pour plus de détails sur de tels cours. Nous nous centrons ici sur les dispositifs *facultatifs*, proposés à différentes périodes de l'année académique. Nous les présentons très brièvement ci-après (pour plus de détails, consulter http://www.unamur.be/sciences/esa/uae).

Avant la rentrée académique (de mi-août à début septembre), des sessions propédeutiques sont proposées aux futurs étudiants. Un des objectifs de ces sessions est le *rappel* de matières disciplinaires et l'*enseignement* de notions qui ne sont pas au programme de toutes les sections du secondaire mais qui seront utilisées dès la première année d'université[2].

A la rentrée académique (deux premières semaines), deux types de dispositifs sont proposés aux étudiants de première année : le « Passeport pour le Bac[3] » et des « Modules de méthodologie ». Initié en 2004 à l'Université de Namur et généralisé quelques années plus tard à toute l'Académie Louvain, l'opération « Passeport pour le Bac » a pour but de promouvoir et démocratiser la réussite des étudiants de première année universitaire en se focalisant sur les *prérequis* des formations universitaires. Ces prérequis, tant disciplinaires que transversaux, sont tout d'abord identifiés selon les sections par l'analyse de programmes, de polycopiés, et par des interviews de professeurs d'université. Des questionnaires « Passeports pour le bac » sont ensuite proposés aux étudiants de première année au cours des

[1] Une Académie est un regroupement d'Universités.

[2] Par exemple, la résolution d'équations différentielles ne fait pas partie des compétences terminales en Belgique mais intervient dans les cours de physique de première année en médecine.

[3] Le terme « Bac » ne fait pas référence au Baccalauréat français, mais bien au Bachelor, terme qualifiant, selon une convention européenne, les trois premières années d'études post-secondaires.

deux premières semaines de la rentrée académique pour tester et autoévaluer la maîtrise de ces prérequis. Les résultats sont ensuite communiqués aux étudiants ainsi qu'à leurs (futurs) professeurs. Des actions correctrices sont ensuite mises en place (séances de remédiations, aménagements de certains cours,…). En 2011, quelques 6000 étudiants ont ainsi participé à l'opération. Plus de détails peuvent être trouvés sur le site *www.passeportspourlebac.be* . Plusieurs facteurs permettent d'optimiser l'efficacité de ce dispositif, notamment la présentation et la motivation de l'opération par des professeurs, ainsi que la rétroaction rapide auprès des étudiants.

Durant les deux à trois premières semaines de la rentrée académique, des modules de méthodologie (5 x 2 heures) sont également proposés aux étudiants, en *étroite collaboration* avec les *cours de leur nouveau cursus*. Ainsi, par exemple, le module « Prendre des notes » se rapporte à un cours de chimie suivi par les étudiants et propose une analyse de la pertinence des notes des étudiants en fonction des critères donnés par le professeur du cours qui les interrogera en fin d'année.

Cinq à six semaines après la rentrée académique, les cours de 1ère année sont suspendus pendant trois jours pour permettre la mise en place d'*évaluations formatives* dans trois cours, dans des conditions proches de celles de l'examen final. Lors de la remise de leur copie corrigée, les étudiants peuvent se rendre compte des critères d'exigence requis à l'université.

Enfin, ***tout au long de l'année académique,*** l' « Opération Tremplin » propose des séances de remédiation sur des matières scientifiques, *à la demande des étudiants*, chaque mercredi matin (plage horaire réservée aux remédiations dans l'horaire). Les contenus des séances sont discutés lors de réunion hebdomadaires réunissant des professeurs et des représentants d'étudiants. Ces réunions sont l'occasion d'aider ces représentants à préciser les questions formulées par les étudiants, et d'établir le programme du mercredi matin. Au-delà de l'explicitation de la matière, les séances de remédiation permettent d'amener progressivement les étudiants à l'autonomie dans le travail de leur cours. Plusieurs facteurs influencent le bon déroulement de cette opération, avec, entre autres : la représentativité des délégués étudiants, les discussions aux réunions hebdomadaires, la compétence du remédiateur.

A l'université de Mons

La Faculté des Sciences de l'UMONS a mis en place, depuis plus de 10 ans, un dispositif destiné aux étudiants de L1 pour leur permettre une meilleure transition entre le lycée et l'université dans les cours de mathématiques. Dans cette perspective, des actions sont menées durant toute l'année académique mais nous avons choisi de décrire ici deux actions : l'intégration d'un nouveau cours et l'organisation de séances de remédiation. Celles-ci concernent les étudiants des filières mathématique, informatique et physique, qui ont en commun de suivre les mêmes cours de mathématiques en L1. Il nous semble également important de souligner que la Faculté a choisi de consacrer un poste académique temps plein pour la bonne mise en œuvre du dispositif. Un « assistant pédagogique » (il s'agit du nom donné à ce poste) a donc comme tâche principale d'encadrer les étudiants de L1.

La première action dont il est question est la création d'un cours de mathématiques générales (45 heures) qui se déroule durant les six premières semaines de l'année académique. Ce cours vise tout d'abord à consolider certaines notions enseignées au lycée que les enseignants de L1 considèrent comme des prérequis pour leurs cours. Une spécificité du cours est de proposer aux étudiants des exercices qui mettent autant que possible les notions en relation de manière à décloisonner les sujets. Une exigence forte du cours concerne la rédaction des solutions de ces exercices. En effet, nous demandons constamment aux étudiants d'expliquer leur démarche avec la rigueur attendue, en explicitant leur démarche, en y intégrant les énoncés des résultats utilisés et en détaillant les calculs. En ce sens, la stratégie didactique développée dans ce cours consiste à s'appuyer sur le bagage mathématique que les étudiants ont acquis au lycée pour qu'ils développent à l'université les compétences disciplinaires et transversales qu'exige ce type d'études. Pour aider les étudiants à atteindre ces objectifs, le déroulement du cours a lui aussi ses propres spécificités. Tout d'abord, lorsque des exercices sont proposés aux étudiants, une équipe composée de l'enseignant, de l'assistant pédagogique et de futurs enseignants, encadre les étudiants en vérifiant leur travail et en conseillant ceux qui rencontreraient des difficultés. Nous estimons qu'une personne peut ainsi gérer le travail d'une quinzaine d'étudiants. Il s'agit donc d'une aide presque personnalisée. Pour que les étudiants puissent obtenir un retour sur leur évolution mathématique au fil des semaines, une évaluation hebdomadaire est organisée chaque lundi matin (pour des exemples de tests, consulter http://math.umons.ac.be/anum/fr/enseignement/mathelem/). Ce cours de mathématiques générales est aussi le seul cours de mathématiques suivi par les étudiants en début d'année, les cours de mathématiques propres à la L1 ne démarrant qu'en novembre.

La seconde action dont il est question est l'organisation de séances de remédiation à partir du mois novembre jusqu'à la fin de l'année académique. L'objectif principal de ces séances est de répondre aux questions des étudiants sur les différents cours de mathématiques. Cependant, l'expérience montre que malgré un public nombreux, les questions sont pratiquement absentes. En réalité, les étudiants sont très peu habitués à se poser des questions durant les phases de travail personnel. Par conséquent, durant le premier semestre, le travail mené consiste à développer chez eux certaines aptitudes spécifiques de l'activité mathématique pour leur permettre de travailler plus efficacement. Par exemple, un travail sur le sens des notions est réalisé ; les étudiants apprennent à mettre des mots sur les définitions des cours, à trouver d'autres exemples que ceux proposés par l'enseignant. Ces séances sont également l'occasion de signaler des erreurs fréquentes à ne pas commettre. Des explications complémentaires sont aussi données sur les dessins présents dans les cours car les étudiants y accordent souvent peu d'attention. Ce travail se fait en collaboration avec l'assistant pédagogique qui a la charge de ces séances. Une fois ce type de travail réalisé durant la première partie de l'année, les séances qui ont lieu au second quadrimestre suivent un déroulement différent. Elles ont cette fois lieu sous la forme de réponses aux questions posées par les étudiants.

En conclusion, face à un public qui a beaucoup évolué ces dernières années, ce dispositif permet aux étudiants de développer une certaine autonomie et a le mérite de les inciter à travailler de manière régulière. À la fin de la L1, nous observons un maintien du niveau mathématique de nos étudiants au fil des années. Le taux de réussite est lui aussi constant. Toutefois, force est de constater que l'investissement pédagogique que requiert ce dispositif est chaque année de plus en plus important.

3-UNE PRESENTATION DES FILIERES DE REMISE A NIVEAU : POUR QUI ? POUR QUOI ? (PASCALE SENECHAUD)

Les filières de remise à niveau ont été mises en place dans des universités de taille moyenne, exception faite de Bordeaux, dont le choix de diversification de l'offre en première année est clairement affichée : parcours classique, remise à niveau, filières d'excellence dont une ouverte sur l'international ont été mis en œuvre.

La mise en place de telles filières de remise à niveau influence fortement les résultats en fin de L1. En effet les étudiants les plus faibles s'y dirigent et allègent la première année du cursus classique. On se retrouve alors avec deux types de premières années : celles pour qui les étudiants ne manquent pas et qui peuvent se permettre une sélection vers le haut et celles plus petites, qui cherchent à attirer les étudiants, à conserver une attractivité maximum en mettant en avant la qualité et la personnalisation de leur encadrement.

À la lecture de leurs maquettes (voir le diaporama), ces filières sont destinées à remettre à un niveau de terminale S des étudiants ne l'ayant pas ou au moins à donner un bagage suffisant pour suivre la première année d'un parcours scientifique à l'université aux étudiants titulaires d'un bac autre que S.

Deux questions se posent alors : quels sont, en pratique, les inscrits dans ces filières et vers quels objectifs doit-on tendre dans ces formations ?

À la première question, on peut, au vu des données caractérisant la provenance des étudiants de ces filières à Limoges et à Strasbourg, répondre qu'environ la moitié des étudiants provient d'un bac technique (avec une proportion importante de bac STSS à Limoges et de bac STI à Strasbourg), qu'un petit quart provient des filières L et S, un quart également provient d'un bac professionnel. Le reste, entre 5 et 10 %, sont des étrangers.

L'arrivée importante des étudiants titulaires d'un bac professionnel s'explique sans doute par un taux de chômage en augmentation mais aussi par l'impact du slogan « l'université est une chance, saisissons là » qui sous-tend l'idée que l'université est à la portée de tous.

Il s'avère pourtant, que l'apprentissage théorique et abstrait mis en place à l'université déroute plus d'un étudiant et les chiffres sont là pour le montrer. Les bacheliers de la filière professionnelle voire ceux de la filière technique ne sont pas préparés à la technicité et à la théorisation de l'apprentissage tel qu'il est conçu à l'université et se donner une année pour fournir les armes nécessaires à ces jeunes pour continuer des études longues est dérisoire. En revanche, les étudiants des bacs généraux ont déjà dans leur formation un bagage plus adapté : la moitié réussissent ensuite leur première année classique.

Une proportion de 70% d'étudiants issus de la filière de remise à niveau limousine s'oriente vers un I.U.T ou un BTS : ce qui correspond aux bacheliers professionnels et techniques. Certaines universités (Rouen) voient cette réorientation comme un échec : l'effort fait par les universités pour que des étudiants des filières professionnels et technologique du secondaire puissent réussir en première année ne porte pas ses fruits mais fournit des étudiants aux filières dites courtes.

Par ailleurs au vu du succès de ces filières de remises à niveau, la plus part des universités limitent le nombre d'étudiants autorisés à s'y inscrire : un ou deux groupes de 30 étudiants sont en général constitué.

À la deuxième question, la réponse est moins aisée : les contenus diffèrent d'une université à l'autre et pourtant les objectifs affichés sont les mêmes. La diversité des étudiants à l'entrée complique la situation. Si l'objectif est de permettre à ces étudiants de suivre une première année de licence, il est loin d'être atteint (10 à 15% des étudiants à Limoges ayant suivi la CPEL réussissent leur première année). Si c'est cet objectif que l'on veut poursuivre des questions se posent alors : quels sont les pré-requis pour entamer une première année de licence scientifique à l'université ? Les mathématiques enseignées jusqu'en classe de terminale S sont-elles nécessaires ? Suffisantes ? Certaines connaissances sont-elles indispensables ou s'attend-on plus à des acquis en termes de compétences ?

Évidemment les acteurs sur le terrain se posent ces questions auxquelles il est nécessaire de répondre aujourd'hui pour réfléchir à l'avenir de tels dispositifs et à leur évolution.

4 – QUEL AVENIR POUR LES FILIERES DE REMISE A NIVEAU SCIENTIFIQUE DANS LES UNIVERSITES (PATRICK FRETIGNE)

A l'Université : pourquoi là ?

Les filières initiales sont par définition à la liaison entre le lycée et les études supérieures. On les a toujours considérées comme faisant partie des études supérieures et non comme des études secondaires. D'ailleurs, elles s'appellent « formations initiales » et non pas « compléments ou approfondissements…. aux études secondaires ». Malgré cela, on est en droit de se poser la question de savoir si leur place n'est pas dans les lycées plutôt que dans les universités, où elles se déroulent actuellement.

Après tout, les études conduisant aux BTS sont elles-aussi des études supérieures et cela n'étonne personne qu'elles se déroulent dans des lycées. Mais il est vrai qu'il y a une différence de taille : les BTS ne conduisent pas à d'autres études ultérieures.

Mais les critiques contre ces filières au sein des universités rendent légitime la question : « sont-elles à leur place à l'université ou peut-on envisager des remises à niveau scientifique ailleurs ? ». Dans certaines universités, on a bien le sentiment qu'elles gênent : essentiellement à cause du coût qu'elles représentent. A cause aussi de la trop grande incertitude (là aussi pour les gestionnaires) des orientations ultérieures des étudiants de ces filières et du coup, des retombées réelles pour ces universités. Mais, y-a-t-il un intérêt pour la qualité de ces formations à se faire dans des lycées ou dans des universités ?

Pour répondre à cette question, il faut se demander ce que ça changerait.

En tout premier lieu : les enseignants !

Quels avantages ? Quels inconvénients ? Les enseignants de l'Université connaissent mieux les notions essentielles à connaître pour suivre la licence dans de bonnes conditions, et ceux du lycée connaissent mieux les capacités de ces étudiants, notamment en fonction de leur Bac : il existe à l'heure actuelle une quantité impressionnante de bacs technologiques et de bacs pros et il est difficile d'avoir une idée précise des compétences des étudiants en fonction du bac qu'ils ont obtenu. Or dans ces filières de remise à niveau justement, on rencontre des étudiants qui peuvent venir de n'importe lequel de ces baccalauréats. A l'inverse très peu d'enseignants du secondaire ont une bonne connaissance des attentes à l'entrée à l'Université.

La question qu'il convient de se poser est plutôt « les universités sont-elles capables d'encadrer ces formations et ont-elles un intérêt à le faire ? ».

A mon avis : oui. Un intérêt économique, j'avoue ne pas le savoir. Mais je ne pense pas que ces filières représentent un gouffre financier comme on l'entend parfois. C'est à l'évidence plutôt un placement sur du long terme. Mais c'est surtout en terme d'image que les universités ont intérêt à se diversifier. Malgré des tentations de rentabilité, l'université reste le lieu où on peut apprendre quel que soit son parcours antérieur. Elle ouvre grand les bras à des arrivées « par le haut » (anciens élèves de prépa, d'IUT, d'école d'ingénieur,...), il n'est pas compréhensible qu'elle ferme ses portes pour des entrées « par le bas ». Reste le problème de la transition entre des études et des parcours multiples et loin des cursus universitaires et des cursus de licence, bien établis eux.

La solution idéale consisterait donc à organiser ces formations à l'université avec une équipe pédagogique mixte : composée à la fois d'enseignants du secondaire et du supérieur. Il y a quelques années, c'était le cas : certains enseignants du secondaire pouvaient faire quelques enseignements en 1ère année (en tant que vacataires) mais, les effectifs d'étudiants ayant fondu, il n'y a parfois même plus de quoi assurer les services des enseignants et donc encore moins d'engager des vacataires. La communication entre enseignants du secondaire et du supérieur doit donc passer par d'autres canaux.

Ces filières atteignent-elles leur objectif ?

Un des points essentiels pour y parvenir est justement celui qu'on vient d'évoquer : une bonne connaissance du niveau des élèves en fonction de leurs études antérieures et des connaissances dont ils auront besoin à leur entrée en L1 (ou dans d'autres filières comme les IUT...).et aussi de leurs attentes.

Mais l'autre problème qui se pose dans ces filières et qui le restera, que ces filières soient intégrées à l'enseignement secondaire ou pas, est l'hétérogénéité des niveaux des élèves. Et de là du coup de leurs besoins : ceux qui enseignent dans ces formations depuis plusieurs années le savent : on ne peut pas apporter la même chose à un bachelier titulaire d'un Bac S et à un titulaire d'un Bac Pro. Et pourtant, on est censé les amener tous les deux à un niveau qui leur permet de suivre dans de bonnes conditions une première année de licence (en fait dans les conditions identiques à celles d'un bachelier scientifique).

Les écarts de niveaux qu'on peut rencontrer dans ces classes sont certainement les plus importants qu'il nous soit donné de rencontrer dans nos enseignements.

Et c'est une vraie difficulté ! Ceci nous conduit même à nous poser des questions de fond : Est-ce raisonnable de constituer des effectifs où sont ainsi mélangés des étudiants de niveaux aussi différents ? Est-ce qu'on peut leur apporter la même chose à tous ? Et n'est-ce pas leurrer les étudiants les plus faibles en leur faisant croire qu'en 1 an, on va pouvoir leur donner un niveau leur permettant de poursuivre des études scientifiques ? Personnellement, l'expérience que j'ai de l'enseignement dans ce type de formations me fait penser que oui : il y a tromperie : ou alors, il faudrait se donner des moyens considérables permettant un suivi quasi-individuel des ces étudiants. Les étudiants titulaires d'un Bac Pro sont de plus en plus nombreux à tenter l'aventure d'un parcours universitaire. Il est n'est pas compliqué de comprendre pourquoi : la courbe ascendante du chômage (chez les jeunes) est directement corrélé à cette augmentation. Plutôt que de rester à ne rien faire, ces jeunes tentent d'améliorer leur CV, tout en continuant à chercher du travail. Très peu réussissent finalement à finir cette année de transition, mais pour beaucoup ce n'était pas réellement leur but. Il n'est pas étonnant qu'ils ratent d'ailleurs : ils ne sont pas complètement motivés car pas certains d'avoir fait le bon choix. Souvent, ils ne savent pas ce qu'ils sont venus chercher en s'inscrivant ici. Et, tout naturellement, ils entrent dans la spirale qui conduit vers l'abandon : pas de motivation donc un travail peu soutenu et irrégulier, donc des mauvais résultats, donc découragement et donc encore moins de motivation...

La seule façon de leur apporter quelque chose, serait des enseignements à la carte : on l'a souvent tenté un peu sous forme d'enseignements optionnels mais jamais « à fond ». Or un étudiant titulaire d'un bac technologique « biologie » pourrait être totalement dispensé de l'enseignement de la biologie pendant cette année de remise à niveau (enseignement par contre très utile par exemple à un bachelier ES), alors qu'il pourrait consacrer beaucoup plus de temps à faire des Maths ou de la Physique. Cela nous conduit à une réflexion beaucoup plus vaste : pour ces filières dites de remise à niveau, ou « années zéro », l'université ne devrait-elle pas avoir aussi pour but de tout simplement améliorer les connaissances et la culture des jeunes qui s'y inscrivent, ou les aider à améliorer leur dossier pour candidater ici ou là, sans avoir nécessairement pour tous le même souci de la validité d'un diplôme identique, espèce d'examen d'entrée à l'université. Actuellement, on est bien loin de ces préoccupations car nous sommes dirigés quasi-exclusivement par des soucis de rentabilité, et donc d'amélioration de taux de réussite par rapport aux inscrits, par rapports aux présents et bien sûr que ceci va à l'encontre d'une certaine liberté qui permettrait d'utiliser l'université pour simplement apprendre, découvrir, réfléchir, se cultiver.

Alors que faire de ces étudiants ? Que peut leur apporter l'université et doit-elle les encourager à poursuivre des études supérieures ? Je pense que c'est le rôle des universités de le faire mais que si c'est le cas il faut être conscient que les formations généralistes comme les licences de Maths, de Physique ne sont pas bien adaptées, ni à leurs niveaux, ni à leurs objectifs. Ils briguent souvent à la sortie de cette année de transition, une entrée en IUT, en BTS, ou une préparation courte et spécialisée, dirigeant vers un métier parfaitement identifié (comme par exemple un DU d'imagerie médicale) : la formation initiale scientifique leur est alors utile pour prouver un niveau scientifique supérieur à celui qu'ils pouvaient présenter un an plus tôt, à la sortie de leur Terminale non-scientifique. Ce sont bien ces étudiants qui tirent les statistiques de réussite aux examens vers le bas : ces étudiants, d'eux-mêmes, se font un enseignement à la carte, choisissant de suivre exclusivement les matières utiles à leur candidature.

Et les IUT ?

Puisque ces étudiants ne s'inscriront pour la plupart jamais dans une licence, tournons-nous vers les IUT : ces derniers sont, on le sait, extrêmement convoités et bien sûr, pas seulement par les bacheliers-non S. Cette attirance s'explique de nombreuses façons, dont celle d'offrir un diplôme reconnu après seulement 2 ans. Il n'est donc pas étonnant que les étudiants des filières initiales scientifiques soient eux-aussi très attirés par un parcours en IUT dès l'année suivante. Ce choix paraît d'ailleurs judicieux puisqu'à priori ce sont des étudiants qui, même avant la fin de leur parcours secondaire avaient opté pour des études plutôt courtes. Les IUT ont une autre particularité : ils sont à l'intérieur des Universités et devraient donc rassurer ceux qui s'inquiètent que les étudiants fuient les études universitaires. On est donc en droit de se demander pourquoi si peu de ces étudiants arrivent à y entrer, et donc pourquoi les IUT ne jouent pas ce rôle dans les universités : accueillir exclusivement des étudiants qui souhaitent un diplôme après 2 ans d'études pour travailler aussitôt. Pourquoi enfin, les IUT sont presque exclusivement remplis de bacheliers S ? J'en ai souvent parlé avec des enseignants d'IUT et qui participent au recrutement des élèves en 1ère année. Leur réponse est souvent troublante : ils disent qu'ils n'ont pas assez de places pour accueillir ces étudiants parce que la demande des bacheliers S est de plus en plus forte dans les IUT : des élèves - y compris de « bons » élèves candidatent dans les IUT et il est difficile pour les jurys de sélection de refuser un bon dossier dont il est très probable qu'il aura son DUT en 2 ans et de prendre à sa place un étudiant arrivant avec des lacunes parce que non titulaire d'un bac scientifique. Mais le problème, qui est très préoccupant pour les IUT eux-mêmes d'ailleurs, c'est que ces élèves qui marchent bien, ne se contentent pas ensuite d'un DUT : ils s'inscrivent à l'IUT sans pour autant renoncer à des études longues : leur objectif est d'éviter les premières années de licence (qui ont plutôt mauvaise réputation), obtenir un diplôme de niveau Bac +2 avant d'intégrer une licence via une équivalence leur donnant les 2 premières années. C'est un problème pour les IUT dont la fonction n'est pas de « pré-former » de futurs étudiants d'universités. Ça pose aussi le problème de la lisibilité des IUT et de leurs débouchés qui du coup manquent d'exemples d'étudiants qui se font embaucher directement après un parcours chez eux. Les IUT y gagneraient sans doute à former des étudiants qui souhaitent des études courtes pour obtenir un diplôme leur permettant de travailler aussitôt.

Conclusion

Malgré tous les problèmes évoqués ci-dessus et notamment celui de l'extrême hétérogénéité rencontrée dans ces filières, il ne faut pas perdre de vue que les formations initiales scientifiques sont très utiles à certains profils d'étudiants : notamment ceux qui à un moment de la scolarité on dû (ou ont choisi de) quitter la filière scientifique et qui sont maintenant très motivés pour la rejoindre de nouveau. Des études ont été faites sur la poursuite d'étude des étudiants qui réussissent cette « année-zéro » et poursuivent leurs études à l'université : elles montrent qu'une écrasante majorité d'entre eux obtiennent ensuite leur licence en 3 ans, donc sans aucun redoublement.

En conclusion, avec l'expérience de ces filières que nous avons dans mon université (plus de 20 promos...), je pense que ces formations constituent un défi tout à fait réalisable.

A condition d'y mettre les moyens pédagogiques et financiers conséquents car ces étudiants, même motivés doivent être davantage encadrés que des étudiants dans les filières classiques. Ça reste difficile de retrouver les raisonnements utilisés en maths, en Physique et en SVT quand on n'en a pas rencontré depuis plusieurs années. Ces étudiants rencontrent souvent des périodes de doute assez violentes pendant cette première année post-bac. Il est indispensable que l'équipe enseignante soit soudée, communique régulièrement et que le nombre d'étudiants par enseignant soit faible.

Si toutes ces conditions sont réunies, on peut obtenir de bons résultats y compris statistiquement (critère essentiel désormais pour les décideurs de nos universités). Et on constate quasi systématiquement qu'un étudiant qui fait une bonne première année de remise à niveau et qui reste à l'université, y reste longtemps (Master...) et enchaîne les années sans redoublement. Donc, même sur des critères budgétaires, ces formations sont à considérer très sérieusement et il est bien imprudent de décider brutalement de les fermer tout simplement sur la seule constatation qu'elles coutent cher. A plus long terme, ce n'est pas certain et il ne faut pas négliger le fait que les universités sont les seules structures où on peut offrir tout simplement une progression des connaissances. L'image des universités peut y gagner. Il y a un coût important par étudiant, c'est indéniable, mais elles peuvent contribuer à alimenter les filières scientifiques (qui continuent à en avoir bien besoin) avec des étudiants intéressants qui apportent une diversité supplémentaire par rapport au reste du flux de lycéens S.

5- MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE APPROFONDIES : UN EXEMPLE DE FILIERE D'EXCELLENCE A L'UNIVERSITE DE STRASBOURG (JOSIANE GASPARINI)

La création de filières dites d'excellence dans les universités a accompagné la multiplication de classes préparatoires aux grandes écoles. Elle constitue une tentative de réponse des universités à la diminution notable du nombre de néo-bacheliers s'inscrivant en licence de mathématiques ou de physique ces dernières années. A titre d'exemple, à Strasbourg, la première année de licence math-info a accusé une baisse de près de 50% de ses effectifs entre 2006 et 2012. Pierre Arnoux a fait une analyse approfondie des motivations des choix des étudiants et rejeté l'hypothèse qu'il s'agirait d'une désaffection pour les sciences.

L'encadrement des étudiants à l'Université en question ?

Si l'excellence scientifique des enseignants chercheurs est unanimement reconnue, l'encadrement pédagogique réputé plus « laxiste », le manque de lisibilité voire de régularité des évaluations, l'absence ressentie de référents enseignants bien identifiés, conduisent les parents des néo-bacheliers à orienter plutôt leurs enfants vers des parcours plus encadrés tels que les CPGE ou les IUT. Ce choix n'est d'ailleurs pas incompatible avec le projet assumé d'intégrer l'Université au niveau de la troisième année de licence (L3).

Le modèle de la « prépa intégrée »

Les Universités ont de longue date mis en place des parcours dits de « prépa intégrée » proposés aux étudiants par les écoles d'ingénieurs rattachées aux Universités elles-mêmes ou en contrat avec celles-ci. C'est le cas de l'INSA de Strasbourg (Ecole publique d'ingénieurs et d'architectes). Après étude de leur dossier dans le cadre de la procédure post-bac, les étudiants accèdent - sur classement- à une école du réseau INSA. Ces « prépa » ne sont pas réellement en concurrence avec les CPGE car elles s'adressent à des étudiants dont le projet professionnel est déjà plus affirmé et plus précis que celui des étudiants postulant en CPGE. Ces bacheliers visent une école ou un groupe d'écoles qui ne sont pas parmi les plus prestigieuses et qui forment ainsi leurs élèves sur des bases moins généralistes.

Une option originale : la double compétence Math-Physique

L'Université de Strasbourg (UDS) a mis en place depuis 2009 un parcours d'excellence d'un type un peu différent. Il s'agit d'un vrai parcours universitaire sur deux ans, validé par des crédits. Ce parcours *Mathématiques et Physique approfondies* (MPA) dont la particularité est la double compétence affirmée en mathématiques et en physique donne de plein droit accès aux L3 de mathématiques ou de physique indifféremment.

Le constat qui a été fait et qui a participé à la mise en place de cette filière est le suivant : nombre d'étudiants de CPGE rejoignent les magistères de mathématiques ou de physique - notamment pour préparer l'agrégation voire s'inscrire en thèse - car les débouchés proposés répondent mieux à leur projet initial.

Il s'agit donc d'attirer à l'Université et de former dès la première année de bons étudiants qui viendront rejoindre ces magistères et qui, sans cette offre, n'auraient pas fait le choix de s'inscrire à l'Université en L1. A titre d'exemple en 2012 seuls 25% des 250 candidats en MPA mentionnaient dans la liste de leurs vœux un L1 maths ou physique.

Le magistère de mathématiques existe à Strasbourg depuis 1987, un magistère de physique verra le jour à la rentrée 2013 et la mise en place du parcours MPA en a été le moteur.

Le mode de recrutement

L'information sur la filière MPA est accessible sur le site post-bac. L'UDS a également mis en place une campagne de communication dynamique en direction des lycéens de l'académie : des enseignants chercheurs et des anciens étudiants vont à leur rencontre dans leurs établissements, présentent la filière et peuvent répondre à leurs questions.

Les dossiers de candidature sont étudiés dans le cadre du dispositif post-bac. L'effectif retenu n'excède pas 25 à 30 étudiants.

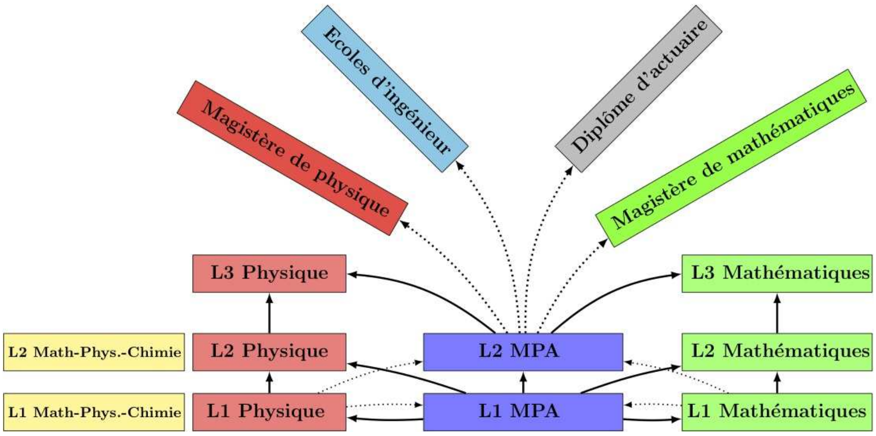
Les contenus et les exigences

Les programmes sont ceux des deux licences de mathématiques et de physique. Des devoirs écrits hebdomadaires en temps limité sont proposés ainsi qu'un système d'interrogations orales. Les exigences sont fortes et les cours denses. Cette démarche va à rebours de la tendance actuelle d'alléger les contenus disciplinaires au profit d'enseignements dits d'ouverture ou transversaux. A tout moment, un étudiant peut réintégrer le parcours classique par un système de passerelles très souple.

Les débouchés

A l’issue des deux années, les étudiants peuvent présenter les concours réservés à la filière universitaire des écoles d’ingénieurs. Un étudiant sur 4 a choisi cette option et tous ont intégré l’école de leur choix. Les autres poursuivent leurs études à l’université (environ ¼ en physique et la moitié en maths). Un accès en DUAS (diplôme actuaire en partenariat avec la faculté de gestion) est également possible.

Le schéma ci-dessous récapitule les possibilités offertes. Les flèches en gras indiquent les parcours de droit, celles en pointillé les accès sur dossier.



Les perspectives d’avenir de ce parcours

Ce parcours MPA est financé par le volet formation IDEX. Un partenariat avec deux écoles d’ingénieurs strasbourgeoises – l’EOST (Ecole et Observatoire des Sciences de la Terre) et l’ENSIIE (Ecole Nationale Supérieure d’Informatique pour l’Industrie et l’Entreprise) - garantit actuellement 5 places aux étudiants de MPA. Un partenariat « universel » sur le même modèle est à l’étude avec toutes les autres écoles du site strasbourgeois, ce qui donnera un surplus d’attractivité à la filière.

Le nombre de dossiers a doublé en 4 ans d’existence et tout porte à croire que cette filière s’installera durablement dans les maquettes de la licence de Sciences de l’UDS.

6 – DES DISPOSITIFS POUR MIEUX ACCUEILLIR LES ETUDIANTS A L’UNIVERSITE (JEAN-YVES BOYER)

Pour faire face à l'échec des étudiants entrant à l'université de nombreux dispositifs ont été mis en place. LMD, LRU et PRL vont dans le même sens. Sans vouloir être original et en abordant à peine le sujet qui demanderait plus de précision nous présentons brièvement ces dispositifs et comment les universités s'en sont emparées.

Réformes et dispositifs

En 2003, le LMD (Licence Master Doctorat) a été mis en place dans les universités françaises. Cette réforme profonde a permis d'organiser nos formations universitaires sur le modèle des standards européens en mettant fin aux cursus DEUG-Licence-Maîtrise-DEA-Thèse. Les formations universitaires doivent depuis être organisées sous forme de parcours, permettre de développer la professionnalisation et mettre en place des moyens pour améliorer la qualité pédagogique. C'est suivant ces critères que les maquettes d'enseignements sont jugées et validées.

En 2007, la LRU (loi relative aux Libertés et Responsabilités des Universités) a donné de nouvelles missions à l'université : prendre en charge l'orientation des étudiants (mise en place d'espace conseil orientation emploi et de conseillers) et mettre en place une procédure de pré-inscription pour les étudiants postulant en première année de licence. La LRU a aussi ouvert la porte à l'autonomie des universités, la gestion des ressources humaines par l'université et le plan Campus qui a pour objectif de faire émerger en France douze pôles universitaires d'excellence de niveau international, grâce à des dotations exceptionnelles.

En 2008, le PRL (Plan Réussite en Licence) donne des moyens (730 millions d'euros en cumulé sur 2008-2012) pour aider les universités à développer des actions en faveur de la réussite de leurs étudiants engagés dans un cursus de licence et lutter contre l'échec en première année d'université. Ce budget doit servir à rénover le contenu de la licence générale de l'université pour une maitrise progressive des connaissances et des compétences, mettre en œuvre l'orientation et l'accompagnement des étudiants et mobiliser les filières professionnelles courtes pour la réussite de tous les étudiants. Dans le paragraphe suivant nous donnons des actions que des universités ont mis en place dans ce cadre.

Des actions entreprises dans le cadre du Plan Réussite en Licence

Nous avons dégagé cinq axes : l'accueil des étudiants entrants, l'encadrement pédagogique, le soutien, la professionnalisation des enseignements et la démarche qualité. Nous développons ci-dessous les trois premiers points.

Accueillir des nouveaux étudiants

Des universités ont mis en place une prérentrée, en général fin aout-début septembre, avec outre une présentation des lieux, des entretiens individuels, des tests de positionnement, des ateliers …

Suite à aux tests, des stages de remise à niveau (Paris 6 : MIME et PCME) ou du soutien durant le semestre ont pu être proposés à des étudiants repérés fragiles. Des universités ont aussi proposé de dédoubler des TD, des colles, du tutorat.

Renforcer l'encadrement pédagogique

Des universités ont mis en place des enseignants référents pour accompagner un groupe d'étudiants. Des entretiens individuels et réguliers durant le semestre permettent de repérer les décrochages et servent de lien entre l'étudiant et l'équipe enseignante

Le tutorat pédagogique, fait soit par des enseignants, soit par des étudiants plus avancés et rémunérés pour cette tâche, a aussi pu être proposé aux étudiants.

Pour lutter contre l'échec certaines universités ont fait le choix de réduire les effectifs des groupes de TD ou d'augmenter le volume horaire enseignement.

Pour prévenir le décrochage, des universités ont modifié l'évaluation des connaissances. L'examen terminal a été remplacé par du contrôle continu avec des tests réguliers sur le trimestre et un devoir surveillé terminal de coefficient modéré (inférieur à 40% de l'évaluation du semestre). Il a été aussi mis en place des colles, des examens blancs, des mémoires avec des soutenances.

Pour renforcer l'attractivité de l'université pour des études en licence, différents parcours ont pu être proposés suivant le profil des étudiants. Pour ceux qui n'ont pas le niveau : aménagement du parcours, soutien, tutorat et pour de bons étudiants proposer des bi-licences ou des modules dans une langue étrangère.

Soutenir les étudiants en difficultés

Pour venir en aide aux étudiants en difficultés des modules de mise à niveau en début de semestre, voir un semestre de consolidation des connaissances, ou des TD renforcés pour les étudiants en difficultés ont parfois été proposés.

Des universités ont proposé lors de l'inscription ou des entretiens individuels un contrat pédagogique engageant l'étudiant à travailler en échange d'un suivi personnalisé (par exemple à Bordeaux 1 avec les « séries à contrat d'études »).

Des universités ont pu améliorer la réorientation des étudiants en proposant aux étudiants souhaitant une réorientation un semestre banalisé en liaison avec les conseillers des services d'orientation et la mise en place de passerelles avec d'autres formations.

Des dispositifs mis en place

Des filières sélectives

L'exemple de Strasbourg : un parcours renforcé en math et en physique avec un horaire proche de ceux des classes préparatoires pour préparer des concours, l'admission dans un magistère ou les masters de préparation à l'agrégation (math ou physique). Il permet d'acquérir une double compétence math-physique et de proposer un meilleur encadrement et suivi des étudiants avec une assurance de débouché.

Des filières de remise à niveau

Pour des bacheliers de séries autres que S certaines universités proposent une année de remise à niveau : Bordeaux (Pré-L1)**,** Limoges CPEL (Classe Préparatoire à l'Entrée en Licence)**,** Nantes REUSCIT (REorientation vers des Etudes Universitaires SCientifique et Technologiques)**,** Rouen (Formation Initiale Scientifique puis Parcours Plan Réussite)

Autres dispositifs

D'autres universités ont mis en place d'autres dispositifs : du soutien sur 4 semaines à Nancy, un Diplôme Universitaire Propédeutique à Strasbourg, un semestre Rebondir à Bordeaux 1.

Quelques questions

Ce survol des différents dispositifs qui ont vu le jour ces dernières années dans les universités peuvent conduire à se poser quelques questions :

Doit-on accepter la mise en place de filières ? Des remises à niveau ? De limiter le nombre d'accès ?

Quels sont les objectifs de ces filières ?

Peut-on, doit-on accueillir tout les élèves ?

Peut-on intervenir pour que les BTS et IUT acceptent davantage de bac pro ?

Les filières ``d'excellence'' : pourquoi ce besoin ? L'université est-elle dans son rôle ici ?

Et il est important de souligner la nécessité d'évaluer les actions entreprises.

ATELIER A1 : L'ALGORITHMIQUE AU LYCEE : ENTRE PROGRAMMATION ET DEMARCHE MATHEMATIQUE

Chloé Ubéra, IREM d'Aquitaine

Alex Esbelin, IREM de Clermont-Ferrand, Université Blaise Pascal

La conception unanime de l'algorithmique en fait un outil pour la programmation ; son introduction ne peut alors être naturelle que dans un projet de programmation. Or l'informatique est en dehors (à côté, mais en dehors) des mathématiques. Ainsi l'algorithmique ne peut apparaître que plaquée sur l'enseignement des mathématiques. Mais il existe une alternative ....

PROBLEMATIQUE

L'introduction de l'algorithmique dans les programmes du secondaire relève de l'injonction institutionnelle. En l'absence d'une culture algorithmique répandue chez les enseignants de mathématiques, les modalités de son enseignement dépendent essentiellement de la formulation de cette injonction. La situation est différente par exemple pour la logique ou les nombres complexes.

POINTS DE DEPART

Comment évaluer la production d'un algorithme par un élève ? Que veut-on que les élèves sachent ?

Le problème suivant suit une organisation qui pourrait être celle d'un problème de bac[1]. Contrairement à la partie "mathématique", seulement ébauchée, la partie "algorithmique" est donnée en détail. La question posée aux participants ne concerne pas le problème, mais des réponses (imaginaires) d'élèves qui font suite.

Résumé de la première partie mathématique

On considère la fonction f définie sur [-2 ; 1] par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x$. Son tableau de variations est donné aux élèves ou déterminé par eux.

On veut donner une valeur approchée de x_0.

[2]

x	-2	x_0	1
f		$f(x_0)$	
	-16		-7

[1] La situation utilisée a été proposée par Henri Rolland, de l'IREM d'Aix-Marseille avec un tout autre objectif.

[2] La remarque faite par un participant sur la disponibilité d'une méthode alternative simple (détermination de la valeur qui annule la fonction dérivée polynomiale de degré 2) n'invalide pas ce problème : il n'est pas proposé comme situation d'apprentissage, et particulièrement comme situation permettant de montrer l'intérêt d'une démarche algorithmique. L'exploitation pédagogique de cette remarque n'entre pas dans le champ de ce travail.

Partie algorithmique

1) Prenons a = -2 et b = 1. On divise l'intervalle [a ; b] en trois parties de même longueur avec u = -1 et v = 0. Calculer *f(u)* et *f(v)*. Ces résultats permettent-ils de dire lequel des trois intervalles [a ; u], [u ; v] ou [v ; b] contient x_0 ?

2) Reprendre la méthode initiée au 1) en remplaçant [a ; b] par l'intervalle trouvé à la question précédente et obtenir un nouvel encadrement de x_0.

3) Si on répète encore deux fois la méthode, quelle sera alors la longueur de l'encadrement de x_0 obtenu ?

4) En s'appuyant sur les résultats précédents, écrire un algorithme permettant de calculer un encadrement de x_0 à une précision donnée.

Question 1 : évaluer les quatre exemples de réponses suivantes

Réponse 1 :
Je pars de l'intervalle [a ; b].
Je le découpe en trois parties égales avec u et v.
Je calcule *f(u)* et *f(v)*.
si *f(u)* < *f(v)*, je remplace a par u;
si *f(u)* > *f(v)*, je remplace b par v;
si *f(u)* = *f(v)*, je remplace a par u et b par v;
Je recommence jusqu'à ce que a – b soit inférieur à la précision voulue

Réponse 2 :
A, B, E et f sont donnés.
Tant que $B-A\geq E$
$H\leftarrow(B-A)/3$
$U\leftarrow A+H$
$V\leftarrow B-H$
Si $f(U)\leq f(V)$ alors $A\leftarrow U$
Si $f(U)\geq f(V)$ alors $B\leftarrow V$
Afficher (A, B)

Réponse 3 :
Je pars de l'intervalle [a ; b].
Je calcule $u=\dfrac{2a+b}{3}$ et $v=\dfrac{a+2b}{3}$.
tant que $v-u\geq e$
je calcule *f(u)* et *f(v)*;
si *f(u)* < *f(v)*, je remplace a par u;
si *f(u)* > *f(v)*, je remplace b par v;
si *f(u)* = *f(v)*, je remplace a par u et b par v.
Dès que $v-u<e$, j'écris [u ; v].

Réponse 4 :
On découpe en trois parties égales l'intervalle [a ; b] qui sont [a ; u], [u ; v] et [v ; b].
si *f(u)* < *f(v)*, on remplace a par u;
si *f(u)* > *f(v)*, on remplace b par v;
sinon, on remplace a par u et b par v.
On recommence autant de fois que nécessaire

- Remarque à propos de la réponse 1 : les instructions « Je découpe [l'intervalle] en trois parties égales avec u et v » et « Je recommence jusqu'à ce que a – b soit inférieur à la précision voulue » ne sont pas précises.

- Remarque à propos de la réponse 2 : les variables ne sont pas typées, or l'opération "/3" concerne des nombres flottant alors qu'un typage dynamique ou naturel ferait de A et B des entiers.

Conclusion : notre hypothèse (qui mériterait d'être approfondie) est que la majorité des enseignants évalueront la réponse 2 comme la meilleure, et que cette évaluation met en évidence la conception suivante :

La fonction des algorithmes est d'être des outils utiles pour la programmation.

Partons maintenant de la certitude suivante :

Une fonction des algorithmes est d'être des outils utiles pour la programmation

Cette affirmation relève de l'évidence si on accepte les deux points suivants :
1) ce n'est ni une définition, ni une caractérisation ;
2) ce n'est pas nécessairement la seule fonction.

Supposons (provisoirement) l'hypothèse suivante : c'est la seule

Sous cette hypothèse, on peut prendre l'introduction des algorithmes dans les programmes de mathématiques comme le cheval de Troie de l'informatique (au sens de sciences du numérique) qui chercherait en rentrer dans la place de l'enseignement secondaire qui lui est fermée. Envisageons maintenant deux sous-hypothèses suivant la place qui serait donnée à l'informatique.

Cas 1 : *que faire dans le cas où le cursus prévoit un enseignement informatique ?* C'est le cas en IUT, dans les départements d'informatique. On relèvera dans la section suivante comment cette fonction y est l'un des fils directeurs de l'organisation de l'enseignement. Ce sera peut-être le cas dans l'avenir au lycée. La seule question importante dans ce cas est celle de la formation ou à tout le moins du recrutement des professeurs d'informatique. Et la question subsidiaire de savoir ce qu'on en fait en maths.

Projet de Programme Pédagogique National
DUT Informatique 2013
Version 6.4

Champs disciplinaires, unités d'enseignements
Les champs disciplinaires « informatique » (environ 50% des enseignements).
Le champ disciplinaire **« Algorithmique - Programmation – Langages »** couvre l'ensemble du spectre de l'activité de développement de logiciel. Outre la présentation des bases théoriques de la construction d'un programme (algorithmique, décomposition de problèmes en sous-problèmes, mécanismes de validation),...
Les champs disciplinaires de culture scientifique, sociale et humaine (environ50% des enseignements)
Le champ disciplinaire « Mathématiques », support théorique des technologies de l'information et de la communication, apporte les connaissances reliées au domaine informatique : l'arithmétique pour la théorie de la cryptographie, l'algèbre linéaire pour la théorie du codage, l'analyse et la géométrie pour le traitement des signaux et des images, les probabilités et les statistiques pour l'informatique de gestion et le

traitement des données sans oublier les graphes, langages et les grammaires pour la théorie des langages et l'étude des réseaux. Globalement, ces enseignements participent aussi au développement de l'aptitude à l'expression et à la communication scientifique ainsi que de l'aptitude à la formalisation et à la modélisation.

Conclusion : *notre hypothèse est que, comme c'est le cas dans les DUT informatique, l'apparition de l'informatique chasse l'algorithmique du domaine officiel des mathématiques*

Cas 2 : que faire dans le cas où le cursus ne prévoit pas d'enseignement informatique ?
C'est le cas au lycée actuellement.

Mais d'abord : cherchons une autre fonction s'il en est une.

CONCEPTS DE L'ALGORITHMIQUE ET DE SA DIDACTIQUE

Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Un peu d'histoire

Entre le XIIème et XVème siècle, le mot désigne les techniques opératoires sur les entiers et les décimaux héritées des arabes par opposition à celles héritées des romains, prônées par les abacistes.

Bien que cet aspect conduit à un débat important au primaire (à propos de la question suivante : quel sont les avantages respectifs de l'usage des calculatrices et de l'usage des techniques classiques dans les apprentissages des opérations), nous ne l'abordons pas (remarquer que la question ne se pose plus depuis des décennies en ce qui concerne la notion de racine carrée !).

Au XIXème et au début du XXème, le terme est utilisé dans le champ philosophique dans le cadre d'étude sur les différentes formes de pensée[1].

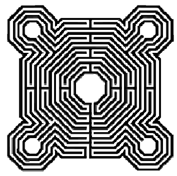
Bien sûr, des algorithmes existent depuis bien avant ces deux périodes, mais le terme lui même ne semble pas avoir été utilisé avant le XXème siècle dans d'autres acceptions que les

---

[1] *Un algorithme conventionnel - qui d'ailleurs n'a de sens que rapporté au langage - n'exprimera jamais que la nature sans l'homme. Il n'y a donc pas à la rigueur de signes conventionnels, simple notation d'une pensée pure et claire pour elle-même, il n'y a que des paroles dans lesquelles se contracte l'histoire de toute une langue, et qui accomplissent la communication sans aucune garantie, au milieu d'incroyables hasards linguistiques.* M. Merleau-Ponty, Phénoménologie de la perception,1945, p. 219 ou *Mais le cerveau, nous l'avons assez vu, possède une activité propre; il peut opérer des constructions, à base d'images ou d'algorithmes, à l'aide desquelles il relie entre elles les sensations et les transforme en « objets ». Il est parfaitement vrai que la perception, conformément à la thèse de Lachelier et de M. Brunschvicg, suppose déjà une « réflexion », du même ordre que celle qui fait la science.* R. Ruyer, Esquisse d'une philosophie de la structure,1930, p. 218.

deux citées ci-dessus. Il n'apparaît pas par exemple dans l'article de Tarry concernant le problème ci-dessous[1].

Le problème du labyrinthe :



Les gardes de Minos vous ont conduit à l'intérieur du labyrinthe et vous y abandonnent !

Question 2 : Montrer qu'il est possible de sortir !
Démontrer le Théorème : il existe un chemin qui conduit de tout point d'un labyrinthe vers la sortie.

Quelques réponses possibles :

Réponse 1 : suivre au retour le chemin de l'aller. Comparer avec l'argument « le labyrinthe est modélisé par un graphe connexe et la définition de la connexité entraine la conclusion ».

Réponse 2 : suivre le fil d'Ariane.

Réponse 3 : suivre les déplacements suivis pour l'aller en inversant les directions et l'ordre.

Réponse 4 : la méthode de Tarry :

> G. Tarry, "Le problème des labyrinthes", Nouvelles Annales de Mathématiques, ser. 3, 14 (1895), 187-190.
> Tout labyrinthe peut être parcouru en une seule course, en passant deux fois en sens contraire par chacune des allées, sans qu'il soit nécessaire d'en connaître le plan.
> Pour résoudre ce problème, il suffit d'observer cette règle unique :
> Ne reprendre l'allée initiale qui a conduit à un carrefour pour la première fois que lorsqu'on ne peut pas faire autrement.
> Nous ferons d'abord quelques remarques.........
> En suivant cette marche pratique, un voyageur perdu dans un labyrinthe ou dans des catacombes, retrouvera forcément l'entrée avant d'avoir parcouru toutes les allées et sans passer plus de deux fois par la même allée.
> Ce qui démontre qu'un labyrinthe n'est jamais inextricable, et que le meilleur fil d'Ariane est le fil de raisonnement.

Bilan :
1) une méthode ne peut être retenue comme algorithmique si elle utilise une connaissance globale de la structure de donnée;
2) la question des moyens disponibles dépasse la seule remarques précédente : peut on écrire sur les murs ? A-t'on pu écrire sur les murs ?

On cherche à mettre en évidence que si la description de ce que doit être un algorithme n'est pas facile, le consensus pour savoir parmi les méthodes précédentes lesquelles sont algorithmiques est facile à atteindre.

---

[1] *On peut trouver dans la littérature mathématiques des XVIIIème et XIXème de nombreux autres exemples de ce type.*

L'algorithmique et l'informatique

On raconte que les autorités militaires américaines ont évalué le coût de la réalisation et du test de programmes à conduit à un montant exorbitant : l'algorithmique a pu apparaître comme une façon d'augmenter la productivité des informaticiens.

On trouvera facilement de nombreuses variantes comme les *commandements* de Mac Naughton :

1) Un algorithme doit pouvoir être écrit dans un langage de programmation;
2) Son exécution dépend d'une donnée d'entrée et produit une donnée de sortie ;
3) Il exécute les unes après les autres un nombre fini étapes;
4) Son déroulement à chaque état dépend exclusivement de son état.

Bilan : la *description de la notion d'algorithme par les informaticiens vise à encadrer une pratique intégrée au travail de conception de programme.*

De la notion au concept[1]

Lors du deuxième congrès international des mathématiciens, à Paris en 1900, David Hilbert présente une liste de problèmes parmi lesquels *Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung. Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoefficienten sei vorgelegt : man soll ein Verfahren angeben, nach welchen sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*[2]

Pour en arriver à un théorème énonçant l'inexistence d'une telle méthode, il aura fallu donner un statut mathématique à la notion de méthode. C'est ce qu'a fait par exemple Turing en définissant ses fameuses machines, sous une forme comme suit :

Une machine de Turing est un septuplet $(Q, \Gamma, B, \Sigma, q_0, \delta, F)$ où
Q est un ensemble fini d'états ;
Γ est l'alphabet de travail des symboles de la bande;
$B \in \Gamma$ est un symbole particulier (dit blanc) ;
Σ est l'alphabet des symboles en entrée $(\Sigma \subseteq \Gamma - \{B\})$;
$q_0 \in Q$ est l'état initial ;
$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ est la fonction de transition ;
$F \subseteq Q$ est l'ensemble des états acceptants (ou finaux, terminaux).

---

1 Cette distinction est utilisée par exemple dans Chabert et al. « Histoire d'algorithmes »

2 De la possibilité de résoudre une équation diophantienne. Soit la donnée d'une équation diophantienne à un nombre quelconque d'inconnues et à coefficients entiers rationnels : on doit trouver une méthode par laquelle, au moyen d'un nombre fini d'opérations, on pourra décider si l'équation est résoluble en nombres entiers rationnels.

Nous n'écrivons pas tout : il s'agit ici seulement de montrer qu'une telle définition appartient bien au champ des mathématiques.

Conclusion : *tant qu'il s'agit de produire des modes de résolution d'un problème (de la même façon de résolution des équations polynomiales), il y a facilement consensus sur ce qui relève de la* ***méthode*** *et ce qui relève de* **l'algorithme**. *La nécessité d'une* **définition** *n'apparaît que lorsqu'il s'agit de démontrer une inexistence.*

Y-a-t'il des concepts spécifiques à l'informatique ?


Alice veut pouvoir s'identifier auprès de Bob son ordinateur.

Elle a donc sauvegardé un mot de passe, et à chaque utilisation de son ordinateur, elle écrit ce mot de passe que Bob vérifie en comparant avec celui qu'elle a sauvegardé.


Mais Charles le pirate peut lire le contenu de la mémoire.
Question : comment empêcher qu'il ne découvre puis utilise le mot de passe ?

Réponse : *par l'utilisation d'une fonction* ***f*** *difficilement inversible : la mémoire de l'ordinateur contient un algorithme de calcul de* ***f*** *et l'image par* ***f*** *du mot de passe* ***a*** *d'Alice. Quand quelqu'un veut s'identifier avec un mot de passe* ***b***, *Bob utilise l'algorithme pour calculer* ***f(b)*** *et compare avec* ***f(a)***. *Ce procédé est efficace si la connaissance de l'algorithme de calcul d'une image par* ***f*** *et la connaissance de* ***f(a)*** *ne permet pas de déterminer* ***a***.



Alice veut pouvoir communiquer avec Bob à distance.
Charles le pirate apprend comment intercepter les messages.
Question : Comment faire pour que les informations qu'il découvre ne lui permettent pas de se faire passer pour Alice ?

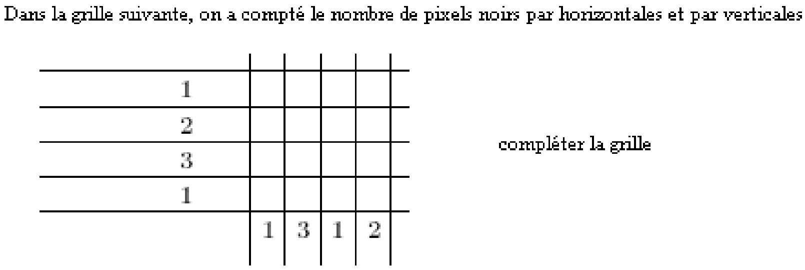
Question : comment deux interlocuteurs peuvent se mettre d'accord sur un code secret de telle manière qu'un piratage soit repéré.

Question : comment deux interlocuteurs peuvent se mettre d'accord sur un code secret par des échanges entièrement publics ?

Conclusion : il existe *des concepts spécifiques à l'informatique : parmi ceux-ci,* **celui de fonction difficilement inversible**, *qui utilise les concepts de* **rapidité d'exécution d'un programme** *et de* **complexité en temps d'un algorithme**.

Y-a-t'il des concepts partagés entre mathématique et informatique ?

Hors de tout contexte d'enseignement, la tomographie médicale conduit, par un chemin qui sera décrit en détail dans un article ultérieur, à un problème de tomographie discrète comme le suivant.



Une fois le problème résolu dans le cas de figure proposé, (ou même avant), on se convainc aisément qu'un algorithme exhaustif, qui envisage toutes les grilles possibles et vérifie si leurs projections tomographiques conviennent, permet de résoudre ce problème.

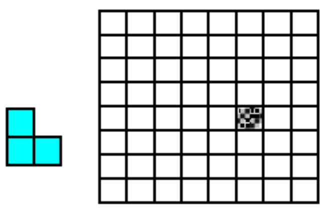
Question : comment représenter toutes les grilles ?

Réponse : on peut représenter chacune de ces grilles par un entier écrit en binaire, de longueur 16, chaque chiffre représentant la coloration noir/blanc de chacune des cases ; par exemple 1000000000001000 représente la grille ayant un pixel noir en haut à gauche et un pixel noir en bas à gauche...

Conclusion : *l'identification et le codage d'une structure de donnée est un exemple de problème partagé entre informatique et mathématique. La difficulté que peut rencontrer un mathématicien pour répondre à cette question en mobilisant ses connaissances en matière de représentation des entiers montre la spécificité de ce type de problème.*

Démarche algorithmique

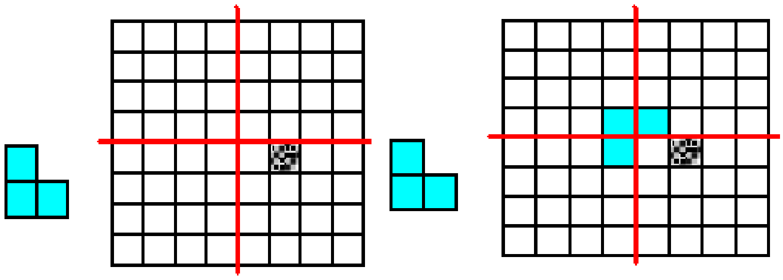
Question : résoudre le problème suivant :
Etant donné un carré de taille 2^n, n quelconque, avec un « trou » d'une case, pour quelles positions du trou est-il pavable par des triminos coudés ?
Ci-contre, un cas particulier.[1]



[1] D'après D. Grenier et C. Payan ; voir par exemple *Deux exemples de situations de recherche pour la classe*

Réponse :

On découpe le carré en quatre carrés de même taille. En posant un trimino sur les trois petits carrés qui ne comportent pas le trou, on obtient quatre petits carrés comportant un trou. Ainsi, si il est possible de résoudre le problème pour des carrés de taille 2^n, il est possible de le résoudre le problème pour des carrés de taille 2^{n+1}.



L'algorithme évoqué ci-dessus résout le problème (démontre le théorème) de manière complète et acceptable par un mathématicien. Pourtant, la réalisation d'un programme requiert une technicité assez importante.

Conclusion : *une démarche algorithmique peut se développer dans un cadre mathématique sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'informatique pour la justifier, l'illustrer, l'institutionnaliser, ...*

De quoi une démarche algorithmique peut elle être constituée ? Nous venons de rencontrer la méthode de diviser pour régner, récursive, ... pour ranger un paquet de copies dans l'ordre alphabétique, j'en prends quatre que je range dans l'ordre alphabétique, puis quatre autres, puis je fusionne les deux tas. Et ainsi de suite…

A ce jour, nous avons identifié deux autres éléments clés de la démarche algorithmique. D'abord les algorithmes exhaustifs comme le sont ceux cités au début de la partie précédente.

Un algorithme exhaustif permet la résolution d'un problème de recherche d'informations sur la partie d'un ensemble donné définie par une contrainte sur les éléments de cet ensemble. Il est possible de le décliner sous des variantes adaptées à l'information cherchée :

1) Existe-t-il des éléments x de X satisfaisant $P(x)$?
   Pour chaque élément x de X, tester si $P(x)$;
   Dès qu'un test est positif, répondre "il existe des éléments x de X satisfaisant $P(x)$" ;
   Si aucun test n'est positif, répondre le contraire.

2) Combien d'éléments x de X satisfont $P(x)$?
   Pour chaque élément x de X, tester si $P(x)$;
   Quand un test est positif, incrémenter le compteur des réponses de 1.

Une question à envisager est la suivante : « rédiger un algorithme exhaustif relève-t-il des mathématiques ? ». Mais il faut d'abord considérer la question de savoir ce qu'est « *rédiger un algorithme exhaustif* » ? Si nous nous sommes bien compris nous même, il ne reste plus qu'à :

- écrire une fonction qui teste si $P(x)$;

- énumérer tous les éléments de *X*.

D'un point de vue mathématique, ceci ne pose pas de problème.

En revanche, l'énumération effective des objets considérés, dans un projet de programmation, peut être difficile : on a vu de telles structures de données plus haut. On peut aussi penser à énumérer tous les graphes à 12 sommets, énumérer tous les arbres binaires de profondeur 6, ...

Le dernier élément (à ce jour) permet de systématiser le tâtonnement : c'est la méthode du juste prix, du balayage, de la dichotomie. On trouvera dans un article à venir la relation d'une démarche d'investigation menée sur le tableur colorcalc dans une classe de ZEP en 1990, où les élèves mettent en œuvre spontanément une telle démarche dans la recherche d'un encadrement de $\sqrt{32}$.

ATELIER A2 : LES NOMBRES COMPLEXES : ENTRE MATHEMATIQUES, PHYSIQUE ET PHILOSOPHIE

Thomas Hausberger, Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier - Université Montpellier 2 & IREM de Montpellier

Manuel Bächtold, IUFM - Université Montpellier 2 & IREM de Montpellier

Les nombres complexes sont des objets qui se situent à la transition entre lycée et université. Mais ce sont également des objets interdisciplinaires : construits par le mathématicien, ils sont utilisés par le physicien et discutés par le philosophe. Nous examinons au cours de cet atelier des exemples de scénarios pédagogiques visant à croiser les regards sur les nombres complexes. Nous montrons également, en nous appuyant sur cet exemple, comment la réflexion épistémologique peut-être utile afin de faciliter la transition lycée-université.

INTRODUCTION

Les nombres complexes sont à double titre un objet de transition : du point de vue institutionnel, puisqu'ils sont enseignés en fin du cycle secondaire et à l'entrée de l'université, et du point de vue épistémologique, dans la mesure où ils constituent un objet de connaissance qui peut servir d'initiation à la pensée mathématique avancée. Cet atelier a pour objectif de clarifier ce point et de montrer que l'étude des nombres complexes peut contribuer à faciliter la transition secondaire-supérieur dans le domaine de l'apprentissage des mathématiques. Dans cette optique, nous avons développé des scénarios pédagogiques adaptés. L'approche que nous proposons a pour originalité d'être historique et épistémologique. Nous tenterons de montrer que cette approche permet (i) de favoriser l'appropriation des nombres complexes, (ii) de faciliter la transition lycée-université, mais aussi (iii) d'établir des ponts entre les mathématiques et la physique – ces trois points étant interconnectés.

LES NOMBRES COMPLEXES : UN OBJET DE TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Nous posons les deux questions suivantes : 1. En quoi les nombres complexes sont-ils un objet de transition ? 2. Comment introduire les nombres complexes ? Avant d'y répondre, il est utile de situer les nombres complexes dans le contexte actuel de leur enseignement, en relation avec le thème du colloque.

Un coup d'oeil sur les nouveaux programmes de Terminale Scientifique

Les nombres complexes constituent, comme dans le précédent programme, le premier thème du chapitre géométrie. Pour autant, l'articulation avec la géométrie se résume à l'interprétation géométrique des complexes qui « sont vus essentiellement comme constituant un nouvel ensemble de nombres ». Ceci est à comparer avec l'ancien programme qui stipulait : « l'objectif est de montrer la puissance des calculs dans les problèmes de géométrie », l'étude des similitudes à l'aide des complexes occupant de plus une heure hebdomadaire de l'enseignement de spécialité mathématique pendant un trimestre.

Au-delà de l'introduction générale au nouveau programme, les nombres complexes constituent l'un des principaux thèmes (voire le seul ?) dotés explicitement d'une référence à l'histoire des mathématiques : « on introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique ». Bien qu'il s'agisse d'une recopie du texte de l'ancien programme, d'autres raisons peuvent expliquer cet encart dans les programmes. Nous en discuterons ci-dessous, ainsi que de la mise en œuvre de cette approche.

Les applications concernent essentiellement la résolution des équations et la trigonométrie (pas d'application à la géométrie ni à la physique) : en définitive, les nombres complexes sont présentés essentiellement comme des objets théoriques formels aux multiples facettes (algébrique, géométrique,...), sans se donner les moyens d'articuler ces facettes et d'en montrer la force applicative. Les ambitions affichées sont réduites : « cette introduction s'inscrit dans la perspective d'une poursuite d'étude », reléguant au supérieur les tâches d'approfondissement.

L'enseignement des nombres complexes en première année de Licence à Montpellier

À Montpellier, les nombres complexes sont enseignés aux étudiants du portail mathématiques-physique-informatique dans le cadre d'un module de 84h du premier semestre de licence (nombres réels, nombres complexes, premières notions d'algèbre linéaire, analyse). Le plan de ce chapitre du cours est le suivant : Description des nombres complexes - Propriétés fondamentales des opérations - Forme algébrique d'un nombre complexe, parties réelle et imaginaire - L'absence de relation d'ordre sur **C -** Représentation géométrique des nombres complexes - Conjugué d'un nombre complexe - Module et argument - Propriétés du module et de l'argument - Forme polaire, notation exponentielle - Multiplication par un nombre complexe et géométrie - Formules trigonométriques - Racine carrée d'un nombre complexe - Équation du second degré à coefficients complexes - Racines n-ièmes d'un nombre complexe - Racines des polynômes à coefficients complexes - Le cercle unité - L'exponentielle complexe - Appendice : une construction des nombres complexes.

En définitive, le contenu est en gros identique à celui du programme de Terminale S, mais le mode d'exposition est plus théorique et systématique. Les complexes ne sont pas appliqués à la géométrie (ce qui reflète un certain cloisonnement des modules). Par contre, ils font partie des prérequis mathématiques d'un grand nombre de modules de physique (électronique, optique, électromagnétique,...) qui ouvrent à de vastes champs d'application.

En quoi les nombres complexes sont-ils un objet de transition ?

Les complexes se situent de fait à la transition lycée-université par leur place dans le curriculum. Pour autant, des raisons plus profondes permettent de les concevoir comme des objets liés à cette transition. Partons des analyses des didacticiens :

– La transition lycée-université oppose deux cultures différentes, un nouveau contrat didactique étant mis en place à l'université.

– D'un point de vue épistémologique, cette transition est marquée par le passage de « décrire à définir, de convaincre à prouver ».

– Parmi les obstacles identifiés figurent l'obstacle du formalisme et l'accroissement du niveau d'abstraction.

– Les mathématiques du supérieur font apparaître un enrichissement des objets et concepts, lesquels sont organisés en réseaux conceptuels.

– Les tâches à l'université nécessitent de la flexibilité et de l'autonomie dans les changements de cadres et de registres de représentations sémiotiques.

Il est remarquable que l'organisation mathématique du cours de L1 exposée précédemment prenne en charge la transition de « décrire à définir » : le cours débute par une « description », la définition formelle (héritée de Hamilton) des nombres complexes n'étant donnée qu'à la fin, et ceci sans que les collègues du supérieur n'aient pris connaissance des travaux en didactique. Cette transition, pour les nombres complexes, a donc lieu au cours du L1.

Les nombres complexes s'insèrent dans ce tableau de la transition lycée-université sous deux aspects principaux : l'obstacle du formalisme abstrait et l'articulation de différents cadres (géométrique, algébrique, numérique) et formes de représentations (cartésienne, trigonométrique) qui en font des objets riches (en ce sens, ils méritent leur nom !). Nous allons discuter plus en détail ces deux points.

Nombres complexes et formalisme

Nous faisons deux hypothèses :

a) L'étude des nombres complexes permet d'éclairer le processus de constitution et le fonctionnement du formalisme mathématique.

b) Un enjeu didactique important de la construction des nombres complexes à la transition lycée-université pourrait être de faciliter l'appropriation des démarches formelles abstraites en mathématiques.

Une activité sera proposée à la fin de cette première partie afin d'étayer l'hypothèse b). Voici des éléments soutenant l'hypothèse a) :

- Les complexes sont des objets formels : ils sont décrits par des symboles nouveaux ou définis comme des couples appelés nombres uniquement parce qu'ils sont munis d'opérations.
- La construction de ce formalisme a une histoire qui permet de la problématiser.
- Le principe de construction a été érigé en méthode par Hilbert : cette dernière consiste à adjoindre des éléments idéaux (i ou un point « à l'infini »), par commodité et simplicité, de façon à obtenir la permanence de certaines lois (un polynôme de degré n possède n racines, 2 droites se coupent en un point).
- Ce formalisme « attrape » *a posteriori* plus que ce que l'on y a mis (interprétation géométrique des complexes, applications en physique,...) : c'est le gain de l'abstraction, qui la justifie *a posteriori*.

L'articulation entre algèbre et géométrie

Nous faisons également deux hypothèses :

a) L’articulation entre algèbre et géométrie, au sein d’un objet à « double-face », est un des enjeux mathématiques et épistémologiques fondamentaux des nombres complexes.

b) Un enjeu didactique important de l’introduction des nombres complexes en fin de lycée est de favoriser la flexibilité dans les changements de cadres et de registres requise par la pensée mathématique avancée à l’université.

Pour soutenir l’hypothèse a), c’est en effet la découverte des complexes qui permettra d’obtenir ultérieurement une extension significative des possibilités d’algébrisation de la géométrie et de géométrisation de l’algèbre. Les algèbres géométriques deviennent ainsi le langage de la physique du XX^e^ siècle, comme l’illustre la théorie de l’électron relativiste de Dirac. Ainsi que le décrit Parrochia (2012), un chemin de pensée conduit des complexes jusqu’aux grands programmes d’unification contemporains (Langlands, supercordes). La philosophie de cette entreprise pourrait être décrite comme suit : l’algèbre crée des nombres pour traduire des propriétés géométriques (irrationnels, complexes, quaternions,...) et réciproquement, la géométrie fournit des intuitions pour décrire les propriétés des équations des courbes, surfaces et variétés algébriques. L’origine de cette articulation est probablement à situer au niveau de la géométrie de Descartes que l’on peut interpréter comme une réécriture de la géométrie en algèbre, établissant ainsi une correspondance encore imparfaite. La difficulté de définir géométriquement les opérations sur les complexes sera vaincue par Argand avec la naissance d’un nouveau cadre : le cadre vectoriel

Concernant l’hypothèse b), voici une situation destinée à travailler la flexibilité dans les changements de cadres :

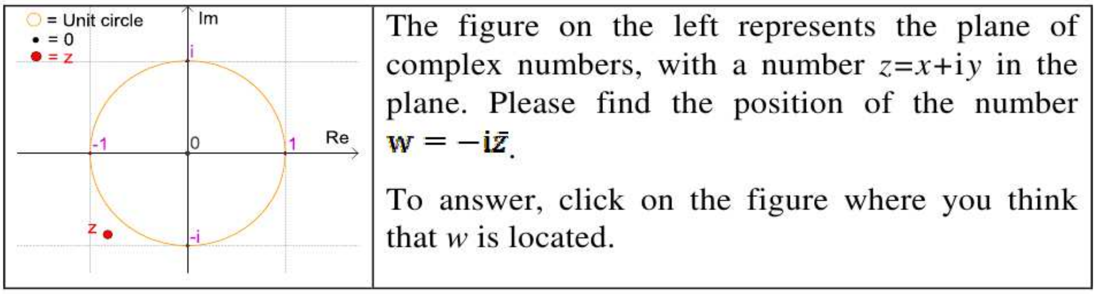


Figure 1 : exemple de tâche proposée par Wims (Vandebrouck 2006)

Cette situation a été rencontrée en troisième année de Licence par l’un des auteurs, lorsqu’il s’est agi de choisir un système de représentants des irréductibles de l’anneau **Z**[i] (modulo les inversibles) en prenant ceux qui sont situés dans le premier quadrant. La dévolution de cette tâche aux étudiants a révélé à cette occasion une difficulté persistante.

Comment introduire les nombres complexes ?

Les différentes dénominations des complexes à travers les âges : nombres ou solutions impossibles, qui « sont plus sophistiques que réels » (Cardan 1545, Bombelli 1560), nombres imaginaires (Descartes, 1637), nombres complexes (Gauss, 1837) sont révélateurs d’un obstacle de nature épistémologique. Il s’agit de l’*irrationnel épistémique*, selon la formulation de Gaston-Granger (1998), chap. II :

> L'irrationnel épistémique apparaît dans le procès même de la connaissance, lorsque ce procès rencontre inopinément une propriété de son objet qui interdit de poursuivre ce processus tel quel. Il s'agit donc, dans ce domaine, d'un cas typique d'*irrationnel comme obstacle, considéré dans l'acte de connaître*. Mais il peut arriver aussi que le sujet connaissant ait recours délibérément à une contradiction de ce genre qu'il introduit lui-même dans l'objet et qu'il assume, au moins provisoirement, pour obtenir des résultats nouveaux. Il s'agit toujours alors d'un moment du *travail de constitution de l'objet scientifique*, et l'irrationnel ne qualifie nullement une attitude et un comportement pratique de l'acteur.

L'enjeu d'une ingénierie dédiée à l'introduction des complexes est alors de faire en sorte que les nombres complexes n'apparaissent pas comme un irrationnel introduit arbitrairement par le mathématicien ou le professeur, mais bien d'un irrationnel *a priori* introduit délibérément et justifié *a posteriori* par les fruits de son introduction.

Dans cet esprit, le groupe IREM « Mathématiques et Philosophie » de Montpellier a construit une ressource « L'équation du troisième degré : une histoire complexe », disponible à l'adresse http ://www.irem.univ-montp2.fr/Actions-en-direction-des-lycees. En voici les idées directrices :

- Ne pas partir de l'équation de degré 2 mais de degré 3, qui fait apparaître un *conflit cognitif* : la formule de Cardan n'est a priori plus applicable alors qu'il existe trois racines réelles.
- Faire fonctionner la *dialectique outil-objet*, la dimension outil étant première.
- Se donner le temps de présenter la démarche de construction de l'outil et de discuter la pertinence des notations (qui conduit à abandonner la notation $\sqrt{-1}$).
- Restaurer ainsi la rationalité des nombres complexes : l'introduction de la racine carrée d'un nombre négatif, historiquement située, apparaît comme un procédé délibéré justifié par son succès dans la résolution du conflit cognitif.

Cette approche historique, basée sur les travaux de Bombelli, figure dans bon nombre de manuels de Terminale S. Cependant, lorsqu'elle est menée « à la hussarde » ou avec un mauvais contrôle des variables didactiques, les objectifs pédagogiques ne sont pas atteints. C'est pourquoi nous avons approfondi le travail d'ingénierie. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la ressource pour les détails du scénario.

LES LIENS ENTRE LES MATHEMATIQUES ET LA PHYSIQUE : LE CAS DES NOMBRES COMPLEXES

Des ressources IREM produites sur ce thème

Le groupe IREM « Mathématiques et Philosophie » de Montpellier[1] conçoit des activités d'enseignement pour la classe de Terminale où interviennent conjointement des professeurs de philosophie et de mathématiques ou de philosophie et de physique. En particulier, il a constitué deux ressources présentant chacune un scénario pédagogique sur le thème des liens entre les mathématiques et la physique basé sur le cas des nombres complexes. Ces deux

[1] Les membres du groupe sont Bächtold Manuel, François Thomas, Guin Daniel, Guin Dominique, Hausberger Thomas, Pinet Véronique, Reboul Henri et Vergnerie Cédric.

ressources, intitulées respectivement « Le réel et la raison 1 » et « Le réel et la raison 3 : utilisation des nombres complexes en physique » s'appuient sur une vidéo présentant l'exemple de la réflexion totale frustrée. Ces trois documents sont accessibles sur le site http://www.irem.univ-montp2.fr/Actions-en-direction-des-lycees.

Signalons que le thème « La raison et le réel » est inscrit au programme de philosophie de Terminale et que l'exemple des nombres complexes est parfois mobilisé pour alimenter la réflexion sur ce thème. C'est ce qui a motivé le groupe à produire ces ressources à la croisée de la philosophie, des mathématiques et de la physique.

Quel est l'intérêt de ces scénarios ?

Les scénarios pédagogiques développés présentent un intérêt multiple :

- Ils donnent à voir aux élèves une application concrète en physique de ces objets abstraits que sont les nombres complexes.
- Ils montrent, ce faisant, que les nombres complexes peuvent être utiles, ou autrement dit, constituer des instruments théoriques pour la résolution de problèmes. L'étude de cet aspect opératoire des nombres complexes dans le cadre d'une réflexion épistémologique est un moyen de donner du sens à ces objets abstraits. En effet, comprendre l'usage qui peut être fait des nombres complexes est un moyen d'accéder à la signification de ces objets.
- Dans l'exemple de la réflexion totale frustrée, les nombres complexes interviennent dans la modélisation de la lumière en termes d'ondes électromagnétiques. Or, les ondes électromagnétiques sont l'objet de nombreux cours de physique à l'université. Ces scénarios pédagogiques font donc entrevoir aux élèves l'usage qui pourra être fait de ces objets mathématiques dans leur possible future formation universitaire en physique.
- Les trois points précédents peuvent motiver les élèves à travailler les nombres complexes en mathématiques.
- La co-intervention d'un enseignant de physique et d'un enseignant de philosophie crée un dynamisme nouveau dans la classe et permet de capter davantage l'attention et l'intérêt des élèves.
- En s'appuyant sur des exemples concrets et en mobilisant des connaissances empruntés aux domaines des mathématiques et de la physique (accessibles aux élèves de Terminale S), l'enseignant de philosophie alimente la réflexion épistémologique menée avec ses élèves.

Dans ce qui suit, il ne sera pas question de décrire ces scénarios pédagogiques en détails. En revanche, nous allons présenter les principaux points d'épistémologie traités par ces scénarios et indiquer comment ils permettent de les aborder.

La vidéo sur la réflexion totale frustrée

Dans cette vidéo, Henri Reboul, astrophysicien de l'Université Montpellier 2 et membre du groupe IREM « Mathématiques et Philosophie » de Montpellier, commente une sélection de diapositives tirées d'un diaporama conçu par l'équipe et accessible également sur son site internet. Il rappelle la loi de Snell-Descartes de la réfraction de rayons lumineux lorsqu'ils passent d'un milieu 1 à un milieu 2 dont l'indice de réfraction n'est pas le même. Il souligne qu'il existe un angle d'incidence limite au-delà duquel les rayons lumineux sont totalement réfléchis. C'est le phénomène bien connu de la « réflexion totale ».

Il présente ensuite une petite expérience réalisée avec un prisme. Le phénomène de réflexion totale peut être obtenu sur la base du prisme, face intérieure (voir Figure 2). Lorsque l'on presse un doigt sur cette même base du prisme, face extérieure, on constate que les rayons lumineux ne sont plus totalement réfléchis (voir Figure 3). Au niveau des parties du doigt qui sont en contact avec la base du prisme, les rayons lumineux sont transmis à travers cette base, puis diffusés dans toutes les directions par la peau du doigt sous forme de rayons plus sombres : la réflexion totale est dite « frustrée ».

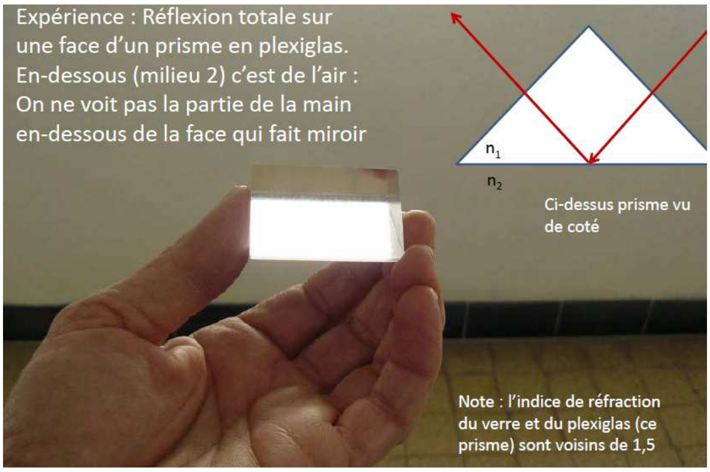


Figure 2 – Phénomène de réflexion totale avec un prisme (extrait du diaporama)

Figure 3 – Phénomène de réflexion totale frustrée avec un prisme (extrait du diaporama)

La suite de la présentation concerne la modélisation de ce phénomène de réflexion totale frustrée. Deux questions peuvent être discutées avec les élèves afin de les aider à clarifier le contenu de cette présentation. Premièrement : « Quel est le problème posé par l'expérience du doigt ? » La réponse pourrait être formulée ainsi : « Les lois disponibles en physique (lois de Snell-Descartes) ne permettent pas d'expliquer que l'on voit l'empreinte digitale (qui résulte d'un phénomène de réflexion totale frustrée) ». Deuxièmement : « Comment surmonter le problème ? ». La réponse à laquelle la discussion est supposée aboutir peut s'exprimer ainsi :

« En modélisant la lumière à l'aide des nombres complexes. Il est possible ainsi de trouver des solutions pour les angles d'incidence au-delà de l'angle limite (*limite* dans le cadre d'une modélisation sans nombres complexes) ».

Pour les détails de ces solutions, nous renvoyons le lecteur aux diapositives de la ressource. Indiquons ici qu'elles sont obtenues au moyen d'une modélisation mathématique en termes de fonctions d'onde *avec des nombres complexes*. Ajoutons que ces solutions impliquent l'existence d'ondes évanescentes qui se forment dans le milieu 2 (constitué d'air, dans l'exemple du prisme). Lorsque ces ondes évanescentes peuvent se former, elles assurent la réflexion totale. Lorsqu'elles ne peuvent pas se former (en raison de la présence de la peau du doigt, dans l'exemple du prisme), la réflexion totale est frustrée. La dernière partie de la présentation pointe le fait que ces ondes ont été mises en évidence expérimentalement. Henri Reboul discute alors de l'exploitation technologique de la nouvelle connaissance ainsi acquise (exemples des capteurs d'empreintes digitales et de la microscopie optique à champ proche) et de l'analogie pouvant être faite entre la frustration de la réflexion totale et l'effet tunnel de la mécanique quantique. Il termine sa présentation en donnant l'exemple du processus de fusion (entre deux protons) qui s'opère dans le Soleil par un effet tunnel à travers une barrière de potentiel (celle créée par la force de répulsion électrostatique entre les deux protons).

Quelle est l'utilité des mathématiques en physique ?

Cette question peut être abordée à partir de l'exemple de la réflexion totale frustrée. En effet, cet exemple illustre l'élément de réponse suivant :

> (a) L'introduction d'objets mathématiques en physique peut offrir de nouvelles possibilités pour la modélisation des phénomènes problématiques et la prédiction de nouveaux phénomènes.

Cet élément de réponse peut être précisé en distinguant deux cas. Un premier cas est celui de phénomènes problématiques : lorsque les physiciens ne parviennent pas à modéliser certains phénomènes (par exemples, la réflexion totale frustrée ou la fusion dans le Soleil), le recours à certains objets mathématiques (nombres complexes) peut permettre de débloquer la situation et de dépasser, voire transgresser, les lois existantes (respectivement, les lois de Snell-Descartes et le caractère infranchissable d'une barrière de potentiel). Un second cas est celui de la prédiction de nouveaux phénomènes : le recours à certains objets mathématiques peut permettre de prédire de nouveaux phénomènes dont les physiciens ne soupçonnaient pas l'existence (par exemple, les ondes évanescentes évoquées plus haut).

Afin de compléter le propos sur la question de l'utilité des mathématiques en physique, nous pouvons ajouter deux autres éléments de réponse qui ne sont pas apportés par l'exemple de la réflexion totale frustrée :

> (b) Exprimer les résultats d'expérience (constatés ou prédits) au moyen de nombres leur confère une portée universelle (un nombre étant perçu et reconnu de la même manière par tous), et ce, par contraste avec la qualité d'un objet dont la perception par les sens peut varier d'un observateur à un autre. En d'autres termes, le passage du qualitatif au quantitatif permet de s'émanciper de la subjectivité de l'expérience sensible.
>
> (c) Cette expression mathématique des résultats d'expérience rend possible l'établissement

de liens précis entre les grandeurs. Ceci, à son tour, rend possible le point (a), c'est-à-dire la modélisation de phénomènes problématiques et la prédiction de nouveaux phénomènes.

Pourquoi peut-on appliquer les mathématiques au monde physique ?

La question de l'utilité des mathématiques en physique peut être articulée à une seconde question, celle de la possibilité même de pouvoir appliquer les mathématiques au monde physique. Nous proposons de problématiser cette seconde question à partir du cas des nombres complexes : comment expliquer le fait que les nombres complexes, qui n'ont pas été tirés de l'expérience, puissent néanmoins servir à modéliser et prédire des phénomènes ? Cette question peut ensuite être généralisée à la question de la « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles » (selon l'expression de Wigner, 1960), que nous pouvons reformuler en ces termes : comment expliquer le fait que les mathématiques, qui sont des produits de notre activité intellectuelle, soient efficaces lorsqu'on les applique au monde physique ? Remarquons que le traitement de cette question constitue une façon possible de s'emparer du thème « la raison et le réel » inscrit au programme de philosophie de Terminale.

Dans la ressource « Le réel et la raison 3 : utilisation des nombres complexes en physique », la démarche proposée ne vise pas à fournir aux élèves une réponse fermée à cette question, mais à les conduire à identifier le problème, c'est-à-dire à saisir le caractère surprenant de l'efficacité des mathématiques, et à envisager des pistes de réponses. Notre hypothèse est que l'étude du cas des nombres complexes permet de rendre problématique la question concernant l'efficacité des mathématiques.

En quoi cette question est-elle problématique ? Pour s'en convaincre, nous proposons de présenter deux réponses à la fois simples et de primes abords sensés, puis de montrer que le cas des nombres complexes les rend difficilement défendables. La première réponse a été apportée notamment par Aristote. Elle revient à soutenir que les mathématiques s'appliquent au monde sensible parce que ce dernier est la source première de laquelle sont tirées les mathématiques (voir par exemple Espinoza, 1997). À la rigueur, ce point de vue peut être maintenu si l'on considère le cas des nombres entiers naturels ou celui de la géométrie euclidienne. Cependant, dans le cas des nombres complexes, cette idée n'est pas vérifiée : les nombres complexes ont été forgés dans la sphère des mathématiques, en réponse à un problème purement mathématique (voir Partie 1).

La seconde réponse a été avancée par Galilée : « La philosophie est écrite dans ce grand livre – je veux dire l'Univers – continuellement ouvert sous nos yeux. Mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre sa langue et à lire les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques sans l'intermédiaire desquelles il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot » (*Il saggiatore*, 1623). En substance, Galilée affirme que les mathématiques s'appliquent au monde physique parce ce que ce dernier possède une structure mathématique. Or, dans le cas des nombres complexes, la relation entre ces objets mathématiques et le monde physique est très indirecte. Dans l'exemple de la modélisation de la réflexion totale frustrée, seule la partie dite « réelle » de la fonction d'onde complexe est mise en relation avec les phénomènes. Rien ne permet de conclure qu'il existe un isomorphisme entre les nombres complexes (côté théorie physique) et le monde physique.

L'examen critique de ces deux tentatives de réponse met en évidence le point suivant : le fait que les mathématiques puissent s'appliquer au monde physique ne s'explique pas aisément. Afin de ne pas clore la discussion sur la remise en cause de ces deux réponses et d'inviter les élèves à poursuivre leur réflexion sur cette question, d'autres pistes de réponse peuvent être présentées. Nous en évoquons ici quatre :

(i) Les théories physiques mathématisées peuvent modéliser et prédire des phénomènes parce que ces derniers sont eux-mêmes déjà exprimés au moyen des mathématiques. Cette réponse a par exemple été suggérée par Duhem (2007 [1906]).

(ii) Nous pouvons appliquer les mathématiques pour décrire les phénomènes notamment parce qu'ils sont caractérisés par une certaine régularité. Il s'agit là d'une transposition de l'idée de Hume pour justifier l'applicabilité du principe de causalité (voir 2008 [1748, 1751]).

(iii) Certains outils mathématiques ont été développés pour s'adapter à la modélisation des phénomènes. Cette idée a été développée plus récemment par Lambert (1999).

(iv) Enfin, nous pourrions retourner la question. Après tout, les mathématiques constituent un langage parmi d'autres. Pourquoi les mathématiques *ne* pourraient-elles *pas* être utilisées pour modéliser et prédire les phénomènes ? D'ailleurs, ce langage ne présente-t-il pas des avantages sur les autres, en particulier pour formuler des liens précis entre les grandeurs et pour mener des raisonnements déductifs ?

Cette seconde partie a permis de faire entrevoir que les nombres complexes constituent un exemple très riche permettant d'alimenter efficacement la réflexion épistémologique sur les liens entre les mathématiques et la physique.

CONCLUSION

Nous avons mis en évidence la richesse des nombres complexes en tant qu'objets de connaissance et leur potentiel en termes d'apprentissages (mathématiques, méta-mathématiques, philosophiques,...). Les nombres complexes offrent la possibilité de construire et de pratiquer un formalisme mathématique abstrait articulant différents cadres, de l'appliquer à la modélisation des phénomènes physiques (et de s'émerveiller de son efficacité), enfin d'en discuter la portée philosophique. Si les ambitions affichées contrastent avec la place qui est faite aux nombres complexes dans les nouveaux programmes, les ressources produites par l'IREM de Montpellier ont été conçues pour permettre aux enseignants motivés d'être porteurs de ces ambitions, en usant de différents leviers (histoire des mathématiques, réflexivité, pratiques interdisciplinaires,...). Les nombres complexes, pierre d'achoppement, pourront peut-être trouver ainsi un contexte de réalisation à même de leur permettre de jouer leur rôle dans le cheminement vers la pensée mathématique avancée. Aux praticiens d'expérimenter !

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Commission inter-IREM Histoire et Epistémologie (1998). Images, imaginaires, imaginations : une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes. Paris : ellipses.

Duhem, P. (2007 [1906]). La théorie physique : son objet, sa structure. Paris : Vrin.

Espinoza, M. (1997). Les mathématiques et le monde sensible. Paris : Ellipses.

Flament, D. (2003). Histoire des nombres complexes : entre algèbre et géométrie. Paris : CNRS Editions.

Galilée (1623). Il saggiatore.

Gaston-Granger, G (1998). L'irrationnel. Paris : Odile Jacob.

Hume, D. (2008 [1748, 1751]). Enquête sur l'entendement humain. Paris : Vrin.

Lambert, D. (1999). L'incroyable efficacité des mathématiques. La Recherche, 316, 48.

Parrochia, D., Artibano, M. et Anglès, P. (2012). L'unification des mathématiques, Cachan : Lavoisier.

Vandebrouck, F. (2006). Enseigner autrement les mathématiques en licence de sciences : des exemples utilisant les nouvelles technologies. Dans N. Bednarz, C. Mary (dir.) L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Actes de colloque EMF 2006 (cédérom), Sherbrooke : Editions du CRP.

Wigner, E. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13(1), 1-14.

ATELIER A3 : LA DEMARCHE EXPERIMENTALE EN MATHEMATIQUES ET DANS L'ENSEIGNEMENT

Denis GARDES, lycée Montceau-les-Mines et IREM de Dijon

Denise GRENIER, Institut Fourier et IREM de Grenoble

Nous donnons dans ce texte des éléments d'analyse de l'activité mathématique, en essayant d'y situer la « démarche d'investigation » telle qu'elle est décrite dans les programmes scolaires actuels français. Beaucoup de questions se posent sur les choix des problèmes qui assureraient à la fois leur faisabilité en classe (dévolution, durée et gestion) et leur pertinence pour les objectifs visés (savoir faire des mathématiques). Les réponses ne sont pas faciles, contrairement à ce que peuvent laisser croire les commentaires des programmes et les propositions d'exercices des documents ressources. Nous devons construire des problèmes adéquats. Les « Problèmes ouverts » et les « Situations de Recherche pour la Classe » présentés ici en sont des exemples, qui tentent de réunir les caractéristiques pour une vraie activité de recherche et les conditions d'un fonctionnement raisonnable dans la classe.

DEMARCHE DE RECHERCHE, DEMARCHE EXPERIMENTALE ET DEMARCHE D'INVESTIGATION

L'activité mathématique du chercheur

Lichnerowicz (dans Nimier 1989, p. 19) la caractérise ainsi : « L'activité mathématique pour moi, enfin pour n'importe quel chercheur en mathématiques est d'une espèce assez différente [de celle qui est communément admise] : vous vous posez une question, vous vous préoccupez d'un problème ». Plus proche de nous, Perrin (2007, p. 7) écrit, en le posant comme « maxime » : « Faire des mathématiques c'est poser et – si possible – résoudre des problèmes ».[1] Pour faire des mathématiques, il faut savoir « chercher ». Une question se pose alors : quelles conditions permettent de faire la dévolution aux élèves de la *démarche de recherche*, composante essentielle d'une activité mathématique conforme à celle évoquée par ces mathématiciens ? Cela ne va pas de soi. Une erreur souvent faite dans l'enseignement est de supposer qu'il suffit de modifier un exercice usuel (d'application d'une définition, d'un théorème ou d'une technique) ou de cacher le problème mathématique dans un contexte « de la vie courante », pour en faire une situation « de recherche ». Ces effets non pertinents ont été étudiés en didactique (je renverrai juste ici à Coulange 1998).

La démarche expérimentale

Dans son quotidien, un chercheur va faire des essais, résoudre des cas particuliers, calculer, dessiner, étudier des conjectures, changer de cadre ou de registre, se poser une nouvelle question, mais aussi s'informer sur ce qui a été fait, échanger et débattre avec d'autre chercheurs. Où commence et où s'arrête l'activité expérimentale dans tout ça ? Quel est le rôle

[1] Il faudrait pouvoir citer plus largement ces deux textes, très intéressants pour le thème qui nous préoccupe ici.

de l'expérimental dans la résolution d'une question, d'un problème ? Il n'y a pas de réponse simple, car tout est imbriqué. D. Perrin (op. cit.) décrit une expérience mathématique en deux phases, l'une expérimentale, l'autre d'observation des résultats de l'expérience. Giroud, dans sa thèse sur la démarche expérimentale dans les SiRC[1], la décrit comme « un ensemble d'actions et de rétroactions entre les différents éléments suivants : questions, expérimentations, hypothèses, conjectures, preuves ».

La « démarche scientifique » dans le programme de seconde

En France, le récent programme de la classe de seconde (élèves de 15 à 16 ans) décrit ainsi la « démarche scientifique » dans l'introduction du programme de mathématiques pour la classe de seconde, BO n°30 du 23 juillet 2009, page 1, dont voici un extrait.

> L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :
> - modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;
> - conduire un raisonnement, une démonstration ;
> - pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;
> - faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;
> - pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registres (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;
> - utiliser les outils logiciels (ordinateurs ou calculatrices) adaptés à la résolution d'un problème ;
> - communiquer à l'oral et à l'écrit.

Tout y est, ou presque. Il reste le plus difficile pour les enseignants, à savoir quels problèmes proposer aux élèves pour réaliser ces objectifs ambitieux. Les exemples proposés par le Ministère de l'éducation nationale dans le document « ressources » associé[2] sont très en deçà de ces objectifs.

La démarche d'investigation dans les documents officiels pour le collège

Dans les programmes des collèges français actuels, la démarche d'investigation occupe une page entière dans le document commun aux quatre années de collège[3]. En voici un extrait.

> La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre

[1] Giroud N. (2011), *Le rôle de la démarche expérimentale dans les SiRC.* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

[2] *Ressources pour la classe de seconde, notations et raisonnement mathématiques*, juillet 2009. M.E.N. site Éduscol.

[3] *B.O. Spécial n°6 du 28 août 2008.*

> elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre. (B.O. Spécial n°6 du 28 août 2008, p. 4.)

Une remarque immédiate : la démarche d'investigation en mathématique ne se distinguerait de celle en sciences expérimentales qu'au moment de la *validation*. Or, l'observation expérimentale et le raisonnement inductif n'ont pas les mêmes fonctions en mathématiques et dans les autres sciences. Dans ces dernières, si aucune observation contraire ne vient contredire celles qui ont été faites, elles seront considérées comme valides (ce sera le cas sur un petit nombre d'observations en classe). C'est bien sûr faux en mathématiques. Que se cache-t-il derrière cette affirmation d'une (grande) « proximité » entre les deux domaines ? Le risque est de masquer les spécificités du raisonnement mathématique, indispensable pour mener la résolution d'un problème, pour construire et étudier des conjectures. Il n'est peut-être pas prévu que les conjectures des élèves puissent être fausses ! Ce qui est effectivement rarement le cas avec des logiciels de géométrie dynamique qui donnent des conjectures évidemment vraies, ou avec des calculatrices sophistiquées qui donnent des calculs justes. Or les incertitudes font partie intégrante d'une situation permettant une vraie investigation. Continuons la lecture de la page consacrée à la démarche d'investigation. Un « canevas d'une séquence d'investigation » est proposé. Il est commun à toutes les disciplines scientifiques, et il est dit qu'il doit être « aménagé » pour chacune d'elles. Ce canevas contient sept « moments essentiels » non nécessairement linéaires, des allers et retours entre eux étant possibles. Les voici :

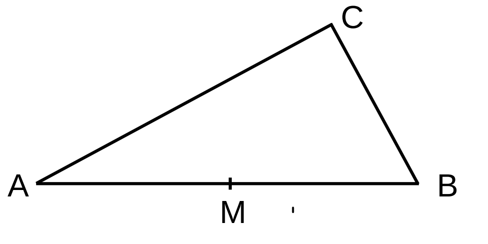
> Le choix d'une situation-problème – l'appropriation du problème par les élèves – la formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles – l'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves – l'échange argumenté autour des propositions élaborées – l'acquisition et la structuration des connaissances – la mobilisation des connaissances.

Chacun de ces moments est décrit, nous ne ferons ici que quelques remarques sur leurs choix, leurs intitulés et leur description. Les sept « moments » sont de types et d'importance très inégaux, rien n'est dit à ce sujet. Il y a ceux qui ne concernent que l'enseignant tel le choix d'une situation-problème (moment qui se situe hors du temps de la classe). Les phases didactiques et adidactiques ne sont pas clairement distinguées : ainsi, dans la description du moment d'appropriation du problème par les élèves, il est dit l'enseignant peut intervenir pour guider et recentrer le travail, reformuler la question. Que reste-t-il comme investigation à l'élève ? L'acquisition des connaissances est-elle un « moment » ? Les deux derniers moments font-ils vraiment partie de l'investigation ? On peut se demander si ce canevas donnera réellement aux enseignants des outils pour choisir et gérer une situation d'investigation pertinente pour les élèves. Le document « ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège » sur le thème « raisonnement et démonstration » contient (page 3) un paragraphe intitulé « démarche d'investigation et raisonnement » qui n'apporte pas plus de réponses de ce point de vue. Enfin, la démarche d'investigation est prévue dans des problèmes relatifs à une notion qui fait l'objet d'un « cours » qu'il faut connaître. L'activité de recherche est donc ici biaisée, puisque l'on sait déjà ce qui va résoudre la question. Et même plus, une vraie investigation est-elle possible si le savoir à mettre en jeu est désigné à l'avance ? Prenons un exemple de ce document, rubrique « raisonnement déductif et démarche d'investigation ».

Un exemple du document « Ressources pour la classe de seconde [•••] » (page 5)

> **Exemple 2,** à partir de la quatrième :
>
> Deux points *A* et *B* étant donnés, déterminer l'ensemble de tous les points *C* tels que le triangle *ABC* soit un triangle rectangle en *C*.

On peut supposer que ce problème induit une investigation seulement si l'élève ne connaît pas le théorème qui répond à la question : l'ensemble des points *C* du plan est le cercle de diamètre [*AB*] privé de *A* et *B*. Cette remarque qui peut sembler banale ne va pas de soi pour certains enseignants. Lors d'un stage de formation continue où j'ai fait étudier cet exemple du point de vue de la démarche d'investigation, pour une large majorité de ces enseignants, il n'y avait que deux possibilités : application du théorème ou utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour avoir la conjecture. Dans chacun de ces choix, la part laissée à l'élève pour expérimenter et chercher est très réduite, car considérée comme inaccessible, le problème ne pouvait donc remplir son objectif[1]. Les commentaires du document Ressources (figure 1) situent bien le problème dans la recherche du théorème. Cependant, ils mettent sur le même plan la construction des points *C* avec les instruments matériels et celle avec un logiciel de géométrie dynamique. Or, du point de vue de l'investigation, ce n'est pas du tout la même activité pour l'élève. On aurait pu s'attendre au contraire que dans un tel paragraphe, les deux soient bien dissociés. D'autre part, le déroulement « fictif » présenté dans ce document pour cette situation ne distingue pas les apports de l'enseignant du travail personnel des élèves.

> Première expérimentation : tracé d'un certain nombre de points avec une équerre ou avec un logiciel de géométrie dynamique (dans les deux cas, l'élève est amené à raisonner pour faire sa construction).
> Observation : cela semble être un cercle. Mais quel est son centre ?
>
> Émission d'une conjecture : l'ensemble des points est le cercle de diamètre [AB].
> Vérification expérimentale avec une règle graduée, un compas ou le logiciel : la distance du milieu de | AB] aux points tracés est-elle égale à la moitié de AB ?
> Un triangle tracé en partant d'un point du cercle est-il toujours rectangle ?
>
> Justification :
> Qu'est-ce qui permet de montrer que C est sur le cercle de centre M et de diamètre [AB] (privé des deux points A et B) ?
>
> 
>
>
> La diagonale d'un rectangle ?
> Des triangles isocèles (grâce aux angles) ?
> Les médiatrices des cotés de l'angle droit ? Et

1 Un enseignant de collège de l'académie l'a expérimentée avec succès dans sa classe, avec règle, équerre et compas.

réciproquement ?

Figure 1 – Commentaires du document cité sur l'exemple 2.

En conclusion de cette étude partielle, il nous semble que l'investigation proposée aux élèves est (trop) contrainte à la fois par la désignation des notions ou propriétés visées, l'utilisation d'outils externes (calculatrice, logiciel) qui donnent les « bonnes » conjectures, et une interaction fréquente de l'enseignant avec la situation (pour guider, recentrer, reformuler). Nous n'avons trouvé aucune remarque dans ce texte sur l'importance du doute, la part de l'empirique, celle de l'intuition, la gestion des erreurs et des impasses, etc... ni aucun moyen ou critère pour que l'enseignant puisse faire sa propre analyse a priori et choisir les situations pertinentes et leur gestion (sauf quelques remarques très générales).

EXEMPLE DE TRAVAUX PRATIQUES POUR LA CLASSE DE TERMINALE S

L'inspection générale de Mathématiques a pendant trois années scolaires (2007- 2009) proposé des travaux pratiques de mathématiques en fin d'année scolaire, ceux-ci faisant le pendant de l'épreuve ECE (évaluations des capacités expérimentales) en Sciences Physiques et Sciences et Vie de la Terre.. La durée était d'une heure et un examinateur évaluait quatre candidats.

Exemple typique de TP année 2008 (sujet 28)

Soit m un réel. On cherche à déterminer le nombre de solutions réelles dans l'intervalle [-5,5] de l'équation :

$$-x^2+2x-1+me^{-x}=0 \qquad (E)$$

– Dans cette question on pose m=2.

À l'aide d'un grapheur (logiciel ou calculatrice), donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de l'unique solution de (*E*).

Appeler l'examinateur pour validation du résultat et de la méthode employée.

– Soit *f* la fonction définie sur [-5, 5] par $f(x)= (x^2-2x+1)e^x$. À l'aide d'un grapheur, tracer la courbe représentative de *f* et émettre une conjecture quant au nombre de solutions de l'équation $f(x)= m$ dans l'intervalle [-5,5], en fonction des valeurs de *m*.

Appeler l'examinateur pour validation de la conjecture.

– Démontrer que pour tout *m*, l'équation (*E*) et l'équation $f(x)= m$ ont le même ensemble de solutions dans l'intervalle [-5,5].

– Répondre au problème posé.

Dans la première question, l'énoncé demande de tracer sur une calculatrice ou sur un grapheur la courbe représentative d'une fonction et ensuite d'examiner les points d'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses. Cela relève d'un savoir-faire largement maitrisé en classe de Terminale puisque son apprentissage débute dès la classe de seconde. Pour la deuxième question, cela relève aussi du même savoir-faire mais avec une droite d'équation $y = m$. Aussi presque tous les TP présentés lors de ces trois sessions relèvent de cette même organisation.

Ils comportent deux parties essentiellement distinctes : une partie informatique où l'élève utilise un logiciel pour répondre à la question et une partie mathématique où il doit prouver les conjectures émises. Celles-ci sont dans la plupart des cas évidentes à formuler et ne sont d'aucune aide à la démonstration. Ainsi avec ces énoncés, aucun aller et retour entre les résultats de l'expérience, la formulation de(s) conjecture(s) et les preuves n'est nécessaire. L'expérience permet seulement de prévoir des résultats ou de les contrôler mais en aucun cas de les construire.

LA DEMARCHE D'INVESTIGATION DANS LES SITUATIONS DE RECHERCHE POUR LA CLASSE

Nos postulats pour la garantie d'une vraie activité mathématique

- Pour une réelle possibilité d'investigation par l'élève, il faut un *enjeu de vérité* dont il peut s'emparer, qu'il peut tester et non évident à prouver, et aussi qu'aucune « boîte à outils » (théorèmes, propriétés, algorithmes) ne soit disponible et désignée de manière évidente pour la résolution.
- Les contextes « de la vie courante » ne sont ni nécessaires ni suffisants pour faire pratiquer une démarche de recherche, expérimentale ou d'investigation : cela ne garantit pas la pertinence du problème, et peut même apporter des bruits qui font obstacle à l'investigation.
- Il n'est pas raisonnable de faire travailler la démarche de recherche – et donc la démarche d'investigation – en même temps que l'apprentissage de notions nouvelles difficiles.

Le modèle de Situation de Recherche pour la Classe

Il était déjà en gestation dans Arsac & al. 1995 et Grenier & Payan 1998. L'objectif des SiRC est l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux pour faire des mathématiques, tels : expérimenter, étudier des cas particuliers, modéliser, formuler des conjectures et les étudier par la production d'exemples et contre-exemples, argumenter, distinguer condition nécessaire/condition suffisante, définir, prouver. Pour de nombreuses SiRC, nous avons maintenant une analyse a priori fiable et des éléments de gestion pour la classe. Certaines sont intégrées dans des cursus de formation d'enseignants, et dans des enseignements universitaires pour lesquels les étudiants doivent être évalués – l'évaluation porte sur l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique que nous venons de décrire. L'intérêt de ces situations est renforcé du fait des programmes actuels du collège et lycée français.

Rappelons ici la caractérisation du modèle SiRC (Grenier 2009), car les ressemblances avec le sujet qui nous intéresse ici sont évidentes. Comme tout modèle, celui-ci est une référence (aussi bien épistémologique que pratique) pour les situations que nous construisons, qui peuvent s'en démarquer plus ou moins.

• *Une SiRC est proche d'une question vive de la recherche mathématique.* Cette condition, assez contraignante, a pour but d'éviter que la question ou la réponse semblent évidentes ou familières. L'objectif est de donner une pertinence à l'activité de recherche. Cette condition peut être artificiellement recrée par la mise en scène du problème, lorsque celui-ci est résolu dans la recherche.

• *La question initiale est facile d'accès et pertinente à des niveaux différents.* Notre intention est de rompre avec la pratique didactique usuelle qui tend à attribuer tout problème à un niveau scolaire précis. Les savoir-faire transversaux doivent en effet être pris en charge tout au long de la scolarité, du primaire à l'université. Pour remplir cette condition, les énoncés des SiRC sont forcément peu mathématisés, mais nous cherchons à éviter les « bruits » non mathématiques courants dans les problèmes dits « concrets », qui complexifient la tâche de l'élève et l'empêchent parfois de rentrer dans les mathématiques.

• *Des stratégies initiales existent, mais elles ne résolvent pas complètement la question.* En d'autres termes, il faut assurer la dévolution du problème, tout en laissant une incertitude qui ne peut être réduite par la seule application de techniques ou propriétés usuelles connues (c'est ainsi que Brousseau décrit, dans sa théorie, une « bonne » situation). Le cadre théorique de résolution n'est ni donné, ni évident, mais il est possible de s'emparer du problème sans cela.

• *Plusieurs avancées dans la résolution sont possibles, par essais-erreurs, étude de cas particuliers, production d'exemples, etc.* Il s'agit de favoriser la construction par les élèves de conjectures — issues de l'exploration de la question — qui ne seront pas évidemment vraies, mais pourront être examinées au moyen d'exemples et de contre-exemples construits par les élèves eux-mêmes.

• *On peut changer les hypothèses, ou la question initiale, et s'emparer d'un nouveau problème.* La question initiale peut déboucher sur des questions annexes : fermeture du problème par choix de valeurs de certains paramètres, ou question nouvelle issue de l'activité de recherche.

Enfin, une SiRC est caractérisée par des variables (didactiques ou adidactiques), et au moins une *variable de recherche* (Godot 2005), paramètre du problème qui pourrait être une variable didactique, mais qui est laissé à la disposition de l'élève. Cette variable de recherche détermine ce qui, dans la situation, conduit à une activité mathématique.

On s'accordera aisément sur le fait que très peu de problèmes de la recherche actuelle en mathématiques peuvent être transposés ainsi. Le choix des « bonnes » questions de recherche et de leur transposition pertinente en SiRC est donc une tâche difficile. Mais c'est peut-être à ce prix que l'on peut assurer une vraie activité mathématique. Les mathématiques discrètes sont un domaine privilégié, mais pas le seul comme nous le verrons ensuite. Des analyses *a priori*, des organisations didactiques et les objets des phases collectives et d'institutionnalisation, sont décrits dans Grenier 2009. Nous renvoyons le lecteur à ce texte. Ils montrent que l'on peut assurer la dévolution d'une investigation « mathématique » ouverte, à des niveaux très différents.

Des exemples de ces SiRC et leur analyse ont été présentées aux colloques EMF2006 et AMQ2006[1] à Sherbrooke (Grenier & Payan 2007 & Grenier 2008b), ainsi que dans un

[1] Association Mathématique du Québec

ouvrage de vulgarisation (Grenier 2008a). En particulier, nous montrons comment, dans la situation « pavage de polyminos par des dominos ou triminos » l'investigation, induite par la *manipulation* de polyminos matériels, permet la résolution de cas particuliers et l'énoncé de conjectures (vraies ou fausses) à tous les niveaux scolaires, avant de devenir un outil de preuve. La preuve reste à faire, mais tous les éléments en ont été construits par les élèves. De nombreux travaux didactiques ont été réalisés et publiées depuis plus de quinze ans sur les SiRC. Ouvrier-Buffet (2003) a étudié l'*activité de définition* dans un domaine mathématique pour lequel les étudiants n'avaient aucun support théorique disponible – les mathématiques discrètes. Ses travaux montrent bien comment la phase expérimentale, les essais et les recherches systématiques sur un objet qui reste à découvrir, aboutissent à des « zéros-définitions », ce qui était le but de ces problèmes. Ceci est repris dans Ouvrier-Buffet 2010 avec la question « comment permettre à des étudiants d'avoir une expérience mathématique ? » Cartier (2008a & 2008b) a étudié un problème qui se modélise par deux types de graphes, l'un étant pertinent et l'autre non. C'est clairement l'investigation qui permet de choisir le « bon » modèle. Les notions en jeu sont celles du programme de la spécialité Maths de Terminale ES. Ses travaux analysent aussi comment les choix de transposition faits réduisent l'activité de modélisation à quasiment rien, alors que le modèle « graphe » est pertinent et accessible même à des élèves de primaire. Deloustal-Jorrand (2004) a construit une SiRC mettant en jeu des notions géométriques institutionnalisées (les quadrilatères), l'activité de recherche étant assurée à la fois par le choix du sous-ensemble de quadrilatères à étudier et les questions posées, comme celle-ci par exemple : « On se place dans l'ensemble des quadrilatères ayant deux côtés opposés de même longueur. À quelles conditions sur les diagonales les deux autres côtés sont-ils parallèles ? ». L'étude de cas particuliers, les tracés de figures génériques et la reformulation de la question sont nécessaires pour faire des conjectures, non évidentes à prouver. En effet, aucune des propriétés connues n'est suffisante pour résoudre la question, mais les propriétés classiques sur les quadrilatères vont permettre d'en faire la dévolution et d'initier la résolution. Tanguay & Grenier (2009 & 2010) ont étudié une SiRC construite sur une propriété bien connue (celle des cinq polyèdres de Platon) par un choix des questions (définir, construire, prouver) et une mise en scène du problème (manipulation de matériel sommets-arêtes), où la manipulation induit une démarche d'investigation qui, avant d'aboutir à des conjectures, permet de repérer des conceptions erronées (parfois étonnantes) sur les objets du plan concernés (polygones, régularité, angle « digone »), les objets de l'espace (polyèdre, angle dièdre) et les rapports entre eux. En particulier, nous y avons repéré l'absence totale de la notion d'angle dièdre chez les étudiants de niveau licence préparant le concours d'enseignement (à Grenoble comme à Montréal), alors que celle-ci est présente (mais implicite) dès qu'on fait de la géométrie dans l'espace au lycée (Grenier & Tanguay, 2008).

Exemple au niveau Seconde

L’énoncé est un problème ouvert de l’IREM de Lyon.(Arsac G. Germain G. & Mante M. 1991) :

Soit N un entier quelconque. N peut se décomposer en sommes d’entiers positifs (par exemple, pour le nombre N = 23, on peut écrire N = 5 + 12 + 6 = 18 + 5 = 3 + 4 + 10 + 2 + 4 = ….).

Trouver, parmi les différentes décompositions de N, celle dont le produit des termes est maximum.

Devant cet énoncé, il est clair qu'il est aisé de se lancer dans des exemples, mais que la réponse devient assez vite difficile à établir, car trouver toutes les décompositions du nombre est rapidement fastidieux. Ainsi la démarche d'analyse de ces exemples découle naturellement des différents essais, et des conjectures peuvent être formulées. Nos expérimentations en classes montrent que s'il est très rare que les premières conjectures soient exactes, des contre-exemples apparaissent, puis de nouvelles conjectures, qui sont à la portée des élèves …. Des aller et retour entre les résultats expérimentaux et les formulations de conjectures permettent de résoudre la question.

Exemple au niveau Terminale S en théorie des nombres

L'énoncé qui suit est un vrai problème ouvert puisqu'à l'heure actuelle il n'est toujours pas résolu. Il s'agit de la conjecture énoncée par Erdös et Straus en 1950 :

Pour tout entier naturel n ≥ 2, il existe trois entiers naturels non nuls et non nécessairement distincts a, b, c tels que : $\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Cet énoncé peut être donné à différents niveaux mais, d'après nos expérimentations au lycée, c'est en Terminale S (spécialité Mathématique) qu'il se révèle le plus riche. Ici encore, il est aisé de rentrer dans la recherche et les premiers exemples apportent rapidement des résultats qui se démontrent aisément (réduction aux nombres premiers, existence vérifiée pour les multiples de 2, de 3, de 5…) Ensuite l'étude des cas particuliers demande plus d'analyse et de recherche au niveau des régularités.

L'étude de cette situation est l'objet d'une thèse en cours de M. L. Gardes (Étude de processus de recherche de chercheurs, étudiants et élèves confrontés à la résolution d'un même problème ouvert en théorie des nombres).

CONCLUSION

En guise de conclusion, nous réagirons à une question souvent posée, celle du transfert, dans l'activité quotidienne de l'élève, des savoir-faire en jeu dans les situations que nous venons de présenter. En fait, cette question se pose pour tous les apprentissages quels qu'ils soient, et à notre connaissance, il n'y a pas de réponse universelle connue. En revanche, nous sommes nombreux, enseignants et chercheurs, à convenir que nos élèves de lycée et nos étudiants ne savent pas « faire des mathématiques ». Ce qui montre que les « contenus standards » du second degré – et au delà – sont inadéquats pour l'apprentissage des savoir faire qui constituent une vraie activité mathématique. Il est donc temps de proposer autre chose que la seule pratique de « techniques » ou de « méthodes » bien définies, pour résoudre des « types de problèmes » bien précis, qui ne permettent de résoudre que des problèmes ... que ces élèves et étudiants ont déjà rencontrés ! C'est l'organisation didactique globale qui doit être repensée, dans laquelle les situations de type SiRC ou « problème ouvert » rempliraient tout simplement les objectifs qui leur sont assignés, en accord avec les programmes actuels.

REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIE

Arsac G. Germain G. & Mante M. (1991) *Problème ouvert et situation-problème*, ed. IREM de Lyon.

Arsac G., Gréa J., Grenier D., Tiberghien A (eds) (1995) *Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble, ed. La Pensée Sauvage.

Cartier L. (2008a) A propos du théorème d'Euler et des parcours eulériens dans les graphes, *petit x* n°76, pp. 27-53, ed. IREM de Grenoble.

Cartier L. (2008b) *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation,* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Coulange L. (1998) Les problèmes « concrets à mettre en équation » dans l'enseignement, *petit x* n°47, pp. 33-58, ed. IREM de Grenoble.

Deloustal-Jorrand V. (2004), *Etude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Godot K. (2005), *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Grenier D. (2002), Different aspects of the concept of induction in school mathematics and discrete mathematics, actes du *European Research in Mathematics Education*, Klagenfurt, august, 23-27.

Grenier D. (2003) The concept of « induction » in mathematics, *Mediterranean Journal For Research in Mathematics Education*, vol.3. ed. Gagatsis ; Nicosia Cyprus.

Grenier D. (2008a) Expérimentation et preuve en mathématiques, in *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, collection « Science, histoire et société », direction Laurence Viennot, PUF.

Grenier D. (2008b) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique, *Actes du colloque AMQ*, Sherbrooke, Québec, juin 2006.

Grenier D. (2009), Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes, *actes du séminaire national de didactique des mathématiques,* ed. IREM de Paris7.

Grenier D. (à paraître) « Some specific concepts and tools of Discrete Mathematics », actes de l'International Congress on Mathematics Education ICME11, Monterrey, juillet 2008.

Grenier D. & Payan Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de modélisation en Mathématiques Discrètes, *Revue de Didactique des Mathématiques* vol. 18.1, pp.59-100, La Pensée Sauvage.

Grenier D. & Payan Ch. (2003), Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *cahiers du séminaire national de l'ARDM, Paris, 19 Octobre 2002.*

Grenier D. & Payan Ch. (2007) Des « situations recherche » pour l’apprentissage des savoirs transversaux, *actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF*, Sherbrooke, mai 2006.

Grenier D. & Tanguay D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x*, n°78, pp. 26-52, ed. IREM de Grenoble.

Nimier J. (1989) *Entretiens avec des mathématiciens*, IREM de Lyon, publication n° 67.

Ouvrier-Buffet C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Ouvrier-Buffet C. (2010) Mathématiques discrètes : un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques, *actes du séminaire national de didactique des mathématiques,* ed. IREM de Paris7.

Perrin D. (2007) L'expérimental en mathématiques, *petit x*, n°73, pp. 6-34, ed. IREM de Grenoble.

Poincaré H. (1902) *La Science et l'Hypothèse*, Flamarion.

Tanguay D. & Grenier D. (2010) Experimentation and Proof in a spatial Geometry Teaching Situation, *For the Learning of Mathematics* vol.30-3, pp.36-42 (FLM publishing association) Cubberley Education Library, Stanford.

Tanguay D. & Grenier D. (2009) A classroom situation confronting experimentation and proof in solig geometry, in proceedings of *ICMI Study19 Proof and Proving,* in Mathematics Education, vol.2 pp. 232-238, ISBN 978-986-01-8210-1.

ATELIER A4 : DU DISCRET AU CONTINU DANS LE CAS PARTICULIER DU THEOREME DE MOIVRE-LAPLACE

MISE EN OEUVRE AVEC R
LOGICIEL PROFESSIONNEL LIBRE DE STATISTIQUE

Hubert Raymondaud, LEGTA Louis Giraud (Ministère de l'Agriculture), 84200 Carpentras

Anne Perrut, Institut Camille Jordan, Domaine de la Doua, 69366 Villeurbanne

Le logiciel **R** est un logiciel libre de statistique et un langage de programmation. Il est très utilisé dans les universités scientifiques, aussi bien par les mathématiciens que par les biologistes, aussi bien pour l'enseignement que pour la recherche, car il est facile d'accès (gratuit) et car il permet de développer rapidement de nouveaux outils. Pour les mêmes raisons, ce logiciel tient une place de plus en plus importante dans les entreprises.

PRISE EN MAIN DE R ET PRESENTATION DES ACTIVITES

Pour commencer avec **R**, il faut l'installer (http://cran.R-project.org) et installer une interface agréable (http://www.rstudio.com/). Ensuite, il faut apprendre le langage de **R**. Il n'est pas forcément facile pour les élèves car l'aide est en anglais (mais quel bon exercice !) et elle s'adresse à des statisticiens. Bref, il faut déjà connaître les outils pour les utiliser. Par ailleurs, le langage est assez simple à apprendre, proche de celui de scilab ou matlab. Il ne nécessite pas de définition de variables et permet de programmer vite grâce à la programmation vectorielle : on peut appliquer directement une fonction aux vecteurs.

La fenêtre la plus importante de l'interface est la console. Vous pouvez l'utiliser comme une calculatrice pour commencer. Puis rapidement, pour sauvegarder votre travail, il faudra écrire les lignes de programme dans un fichier texte, un script **R**, que vous pourrez enregistrer. Il faut donc ouvrir un nouveau script et l'enregistrer avec un nom raisonnable, se terminant par l'extension **.R**.

Attention : les noms de fichiers ne doivent pas comporter d'espace ni d'accent et doivent commencer par une lettre. Taper une opération simple, comme 2+3 dans votre script. Pour effectuer cette opération dans la console, il suffit de placer le curseur sur la ligne du script à effectuer et de taper Ctrl+Entrée ou de cliquer sur l'icône Run.

Avant tout, vous aurez besoin d'aide. Tapez dans le console : `help(rnorm)` ou `?rnorm` (aide de la fonction `rnorm`) . On peut aussi taper directement `normal distribution` par exemple, dans le cadre de recherche de la fenêtre d'aide.

Les objets de base sont les vecteurs et les matrices. Les différents types sont les entiers, les réels, les complexes, les booléens (TRUE, FALSE), les caractères. L'affectation se fait avec les signes `=` ou `<-`.

créer un vecteur	:	`x <- c(1, 5, 12, 3, 52, 43, 25)`
la suite (1,2,3,4,5,6,7)	:	`1 :7`
concaténation de deux suites	:	`y <- c(x, 1 :7)`
suites arithmétiques	:	`seq(from = 1, to = 10, by = 2)`
répétitions	:	`rep(1 :5, 2)`

Testez maintenant les différentes commandes qui permettent de faire une étude statistique unidimensionnelle après avoir créé un échantillon artificiel de la loi binomiale B(100 ; 0,5)

```
ech <- rbinom(500, 100, 0.5)
summary(ech)
hist(ech)
barplot(table(ech))
boxplot(ech, range = 0)
sd(ech)
```

La fonction de base pour tracer des graphiques est `plot`. Soient x et y deux vecteurs de même longueur.

`plot(x)`	: trace le nuage des points (i ; x_i)
`plot(x, y)`	: trace le nuage des points (x_i ; y_i)
`plot(x, y, type = 'l')`	: trace une ligne brisée qui joint les points (x_i ; y_i)

La fonction plot possède de nombreuses options comme `main = "Mon titre"` (titre du graphique). On peut aussi jouer avec les options `pch, lty, col` pour changer les types de points, de lignes ou les couleurs. Tous les paramètres concernant les fenêtres graphiques sont décrits là : `?par`.

Pour tracer des fonctions, on utilise tout simplement curve. Par exemple,

```
curve(dnorm(x, 2, 3), from = -6, to = 10)
```

On peut évidemment mener tous types de calculs probabilistes. En ce qui concerne la loi normale,

`dnorm(x, mean = 0, sd = 1)`	: densité de la loi normale N(0,1)
`pnorm(q, mean = 0, sd = 1)`	: fonction de répartition de la loi normale
`qnorm(p, mean = 0, sd = 1)`	: fonction fractile (quantile, réciproque de la fonction de répartition)
`rnorm(n, mean = 0, sd = 1)`	: simulation de n nombres aléatoires suivant la loi normale

On peut bien évidemment changer la moyenne et l'écart-type, les valeurs 0 et 1 étant les valeurs par défaut. On peut retrouver toutes les fonctions pour les autres lois de probabilités, en changeant le `norm` par :

`binom`	: loi binomiale
`pois`	: loi de Poisson
`geom`	: loi géométrique
`unif`	: loi uniforme sur un intervalle
`exp`	: loi exponentielle

La fonction sample permet de simuler n'importe quelle loi discrète, à support fini.

On peut définir une **fonction** ou plus généralement une **procédure**. Voici l'exemple de la création d'une fonction qui permet de calculer le résumé numérique d'un échantillon, avec les quartiles du lycée.

```
resume <- function(echantillon, dig = 3){
    m <- mean(echantillon)
    s <- sd(echantillon)
    med <- median(echantillon)
    q <- quantile(echantillon, type = 1)
    resume <- c(m, s, q[2], med, q[4], q[1], q[5])
    names(resume) <- c("moyenne", "écarttype",
         "Q1", "médiane", "Q3", "min", "max")
    print(resume, digit = dig)
}
```

La syntaxe pour les boucles est la suivante

```
for (i in 1 :50) { ... }
while (cond) { ... }
```

et pour les tests logiques :

```
if (cond) {...} else {...}
```

Après avoir testé ces quelques commandes, nous pouvons écrire (copier) des programmes plus complexes. Nous vous proposons trois activités :

1° Exemple d'une séance de travaux pratiques d'algorithmique illustrant le théorème de Moivre-Laplace, en classe de terminale.

R est utilisé pour illustrer graphiquement la distribution d'une variable binomiale X, que l'on habille avec des rectangles (qu'on évite d'appeler histogramme, terme réservé à la représentation graphique d'une série « observée ») puis pour illustrer la distribution de la variable centrée réduite correspondante et enfin pour observer ce qui se passe quand n augmente. Le passage à la variable centrée réduite entraine le passage à la densité pour la graduation des ordonnées, ce qui permet la superposition de la courbe de densité de la loi de Gauss centrée réduite.

On passe alors des lignes de commande **R** à une fonction **R**. **R** est utilisé sous **RStudio** qui est un environnement facilitant son utilisation (coloration syntaxique, complétion automatique, visualisation des objets créés en mémoire, rémanence des 40 derniers graphiques créés ...).

2° Illustration de la fluctuation d'échantillonnage et de la loi des grands nombres par la recherche d'un algorithme et sa mise en œuvre d'une simulation avec R.

On simule une série de n variables de Bernoulli dont on fait les sommes cumulées croissantes, puis les fréquences cumulées croissantes en divisant par les effectifs cumulés croissants. On obtient ainsi n simulations non indépendantes d'échantillons d'effectifs croissants de 1 à n. Les fréquences obtenues sont illustrées par un graphique en lignes brisées ou, mieux, en nuages de points, pour mettre l'accent sur l'aspect discret de la variable effectif. Cette activité permet d'illustrer l'efficacité de l'utilisation des couleurs avec **R**. Un prolongement possible consiste à simuler des échantillons indépendants et à illustrer la suite des distributions ainsi obtenues.

3° Exploration des intervalles de fluctuation de la seconde à la terminale.

L'activité consiste à analyser et à mettre en œuvre un algorithme permettant de calculer et d'illustrer graphiquement la probabilité binomiale « exacte » de séries d'intervalles de fluctuation asymptotiques de seconde et de terminale, en fonctions de la valeur de n. Les représentations graphiques permettent de visualiser la complexité de la relation liant la probabilité binomiale à la valeur de n. C'est la conséquence de la « discrétisation » autrement dit le fait de passer d'une fréquence à une valeur entière de la variable binomiale correspondante. L'activité se termine par la réalisation en **R**, des fameuses abaques, représentant les trois « types » d'IF (seconde, première et terminale) en fonction de p. Ces abaques électroniques permettent d'illustrer les problèmes d'approximation lorsque p se rapproche de 0 ou de 1.

Les pages suivantes présentent la feuille de route de ces trois activités, comprenant le code des commandes utilisées ainsi que quelques exemples de résultats obtenus.

Pour certaines activités nous avons proposé quelques réflexions et prolongements, montrant comment l'utilisation des TICE permet de présenter et d'illustrer des notions mathématiques délicates comme la loi des grands nombres et de surmonter des obstacles didactiques.

Références

Un manuel en français est disponible sur le site de **R**~ : ***R** pour les débutants* de Emmanuel Paradis, à l'adresse http ://cran.r-project.org/doc/contrib/Paradis-rdebuts_fr.pdf

Des milliers d'autres tutoriels, forums sont disponibles sur internet : notes de cours d'Anne Philippe_(http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/download/Anne-Philippe-cours-R-par4.pdf) ou cours et exercices (http://pbil.univ-lyon1.fr/R/).

Un ouvrage pour bien commencer : *Initiation à la statistique avec **R*** de Frédéric Bertrand et Myriam Maumy-Bertrand, chez Dunod.

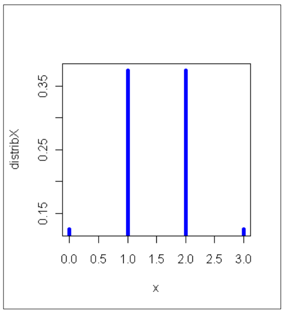
ACTIVITÉ 1 : DU DIAGRAMME EN BATONS A L'HISTOGRAMME POUR ILLUSTRER LE THEOREME DE MOIVRE-LAPLACE

I – Représenter graphiquement la distribution d'une loi binomiale

Un premier exemple d'**une variable aléatoire X** de loi binomiale de paramètres n = 3 et p = 0,5 :

On crée une liste contenant la distribution des (n + 1) probabilités ponctuelles de X :

```
(x <- 0 :10) ; n <- 3 ; p <- 0.5
(distribX <- dbinom(0 :n, n, p))
[1] 0.125 0.375 0.375 0.125
```



On réalise l'illustration graphique habituelle en diagrammes en barres :

```
plot(x, distribX, type = "h", col = "blue", lwd = 5)
```

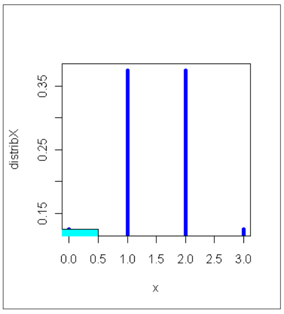
On va « habiller » avec des rectangles :

On prépare les bornes des intervalles encadrant les valeurs entières de X :

```
(bornesX <- seq(-.5, n + .5, 1))
[1] -0.5 0.5 1.5 2.5 3.5
```

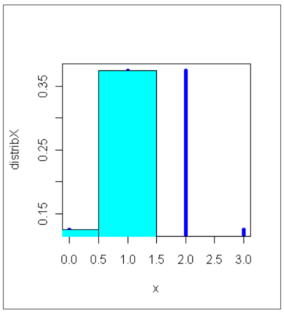
On superpose le premier rectangle :

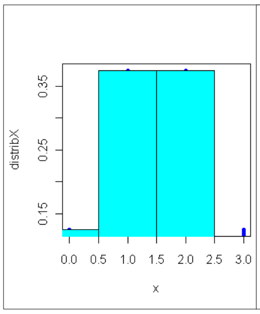
```
polygon(c(-0.5, -0.5, 0.5, 0.5),
c(0, distribX[1], distribX[1], 0), col = "cyan")
```

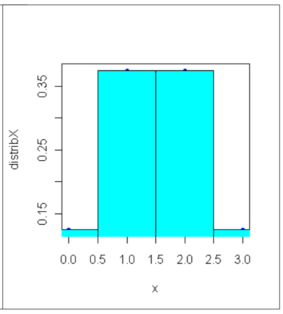


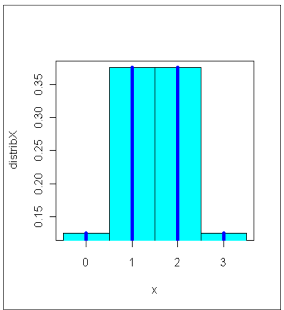
On superpose le deuxième rectangle puis le troisième et le quatrième :

```
polygon(c(0.5,  0.5,  1.5,  1.5),  c(0,  distribX[2],  distribX[2],
0),
  col = "cyan")
polygon(c(1.5,  1.5,  2.5,  2.5),  c(0,  distribX[3],  distribX[3],
0),
  col = "cyan")
polygon(c(2.5, 2.5, 3.5, 3.5), c(0, distribX[4], distribX[4], 0),
  col = "cyan")
```









Il y a un petit aménagement à faire sur l'axe des abscisses, qui doit commencer à -0,5 et finir à n + 0,5. Il faut reprendre la construction du graphique depuis la commande plot, mais avec le type « n ». Placer ensuite les rectangles. Enfin on peut superposer les barres ...

Que vaut la surface totale des rectangles ?

II – Représentation graphique de la distribution de la variable centrée réduite (X – E(X)) / racine(V(X))

On crée une liste contenant les valeurs de la variable centrée réduite :

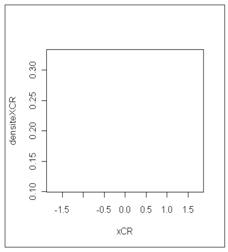
```
EspX <- n * p ; etypX <- sqrt(n * p * (1 - p))
(xCR <- (x – EspX) / etypX)
[1] -1.7320508 -0.5773503 0.5773503 1.7320508
```

On calcule les bornes centrées réduites des intervalles utilisés pour le graphique précédent.

```
(BornesXCR <- (bornesX – EspX) / etypX)
[1] -2.309401 -1.154701 0.000000 1.154701 2.309401
```

On calcule les densités (probabilité divisée par l'étendue des intervalles qui vaut 1 / etypX).

```
(densiteXCR <- distribX * etypX)
[1] 0.1082532 0.3247595 0.3247595 0.1082532
```

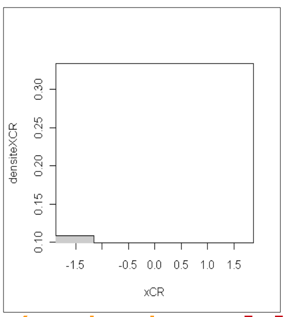


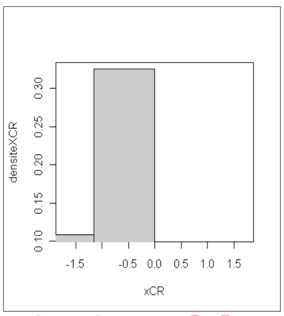
On ouvre une fenêtre graphique de tracé, vide

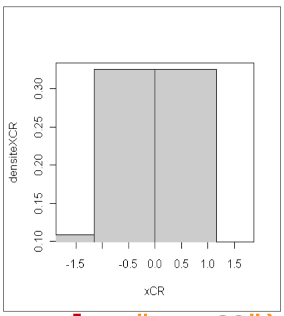
```
plot(xCR, densiteXCR, type = "n")
```

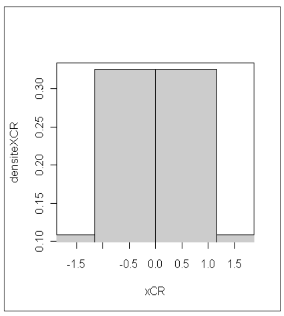
On trace les rectangles un par un :

```
polygon(c(BornesXCR[1], BornesXCR[1], BornesXCR[2], BornesXCR[2]),
  c(0, densiteXCR[1], densiteXCR[1], 0), col = "grey80")
polygon(c(BornesXCR[2], BornesXCR[2], BornesXCR[3], BornesXCR[3]),
  c(0, densiteXCR[2], densiteXCR[2], 0), col = "grey80")
polygon(c(BornesXCR[3], BornesXCR[3], BornesXCR[4], BornesXCR[4]),
  c(0, densiteXCR[3], densiteXCR[3], 0), col = "grey80")
polygon(c(BornesXCR[4], BornesXCR[4], BornesXCR[5], BornesXCR[5]),
```

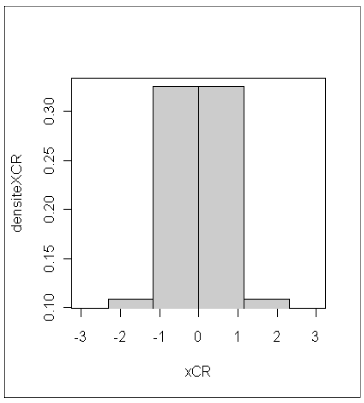









```
  c(0, densiteXCR[4], densiteXCR[4], 0), col = "grey80")
```



Il y a un petit problème sur l'axe des abscisses qu'il faut s'empresser de résoudre en choisissant correctement les extrémités de l'axe.

```
minX <- floor(min(BornesXCR))
maxX <- ceiling(max(BornesXCR))
plot(xCR, densiteXCR, type = "n", xlim = c(minX, maxX))
# IL SUFFIT DE REFAIRE LES POLYGONES (sélectionner, exécuter)
```

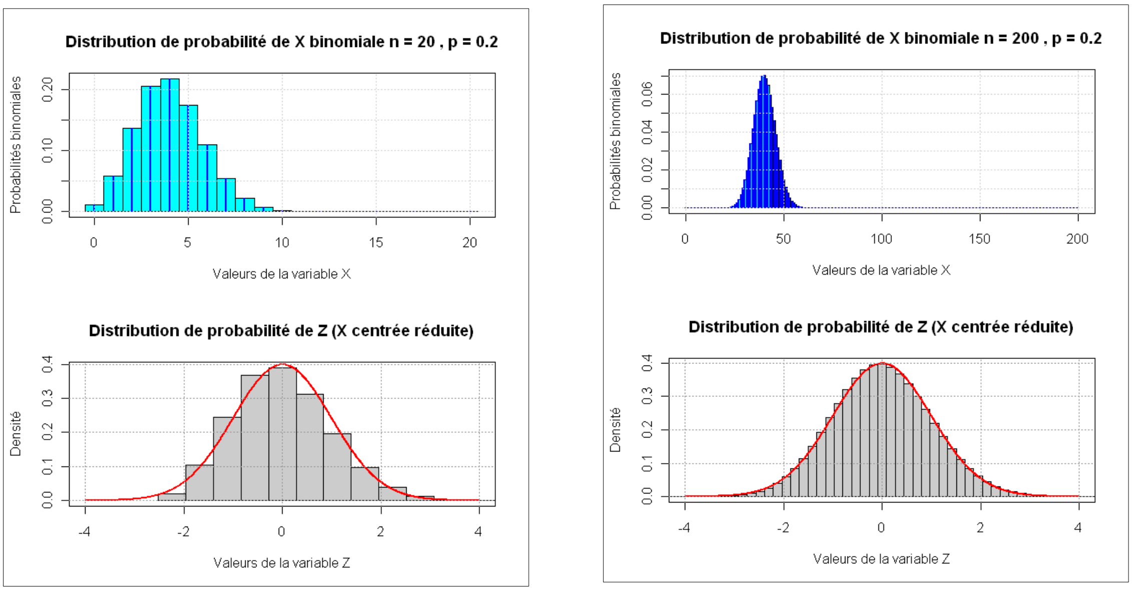
Un autre algorithme pour tracer les rectangles avec une boucle « pour ».

```
plot(xCR, densiteXCR, type = "n", xlim = c(minX, maxX))
for (k in 1 :(n + 1)) {
 polygon(c(BornesXCR[k], BornesXCR[k], BornesXCR[k + 1], BornesXCR[k + 1]),
   c(0, densiteXCR[k], densiteXCR[k], 0), col= "grey80")
}
```

III – Pour pouvoir facilement changer les valeurs de n et p, on fabrique une fonction R

On rassemble les lignes de commande précédentes pour en faire une fonction **R**. Il faut juste leur donner la bonne structure, à l'aide de la fonction `function(...){...}`. On ajoute quelques légendes ...

La fonction R correspondante, `MoivreLap0(...)`, figure dans le document ArticleA4.pdf en couleur et dans le fichier AtelierA4_CodesR.zip des codes des fonctions R, proposés sur le site http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique298.



ACTIVITÉ 2 : DE LA FLUCTUATION D'ECHANTILLONNAGE A LA LOI DES GRANDS NOMBRES

I – Simuler et représenter graphiquement les fluctuations d'échantillonnage d'une fréquence

- **Simulation de nbn=18 variables de Bernoulli de paramètre p,** les valeurs sont stockées dans le « vecteur » `px`.

```
p <- .5 ; nbn <- 18
px <- rbinom(nbn, 1, p)
[1] 1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0
```

- **Calcul des 18 (nbn) fréquences cumulées** correspondantes dont les valeurs sont stockées dans le vecteur `repartfreqsim`. On fait commencer le calcul des fréquences à partir de l'échantillon de taille 5.

```
(repartfreqsim <- cumsum(px)[5 :nbn] / (5 :nbn))
[1] 0.6000000 0.6666667 0.7142857 0.6250000 0.6666667 0.6000000 0.5454545
```

```
[8] 0.5000000 0.4615385 0.5000000 0.5333333 0.5000000 0.4705882 0.4444444
```

- **Illustration graphique en ligne brisée** (`type = "l"`) de la première série de 18 simulations.

```
plot((5 :nbn), repartfreqsim, type = "l", ylim = c(.3, .7),
  main = paste("Simulations d'une variable fréquence",
  "\nIFasympt. de seconce (en vert), IFasympt. de term (en noir)"),
  ylab = "Fréquences* simulées",
  xlab = "Nombre de tirages (Effectif de l'échantillon)")
```

- **Simulation de la deuxième série** de 18 simulations.

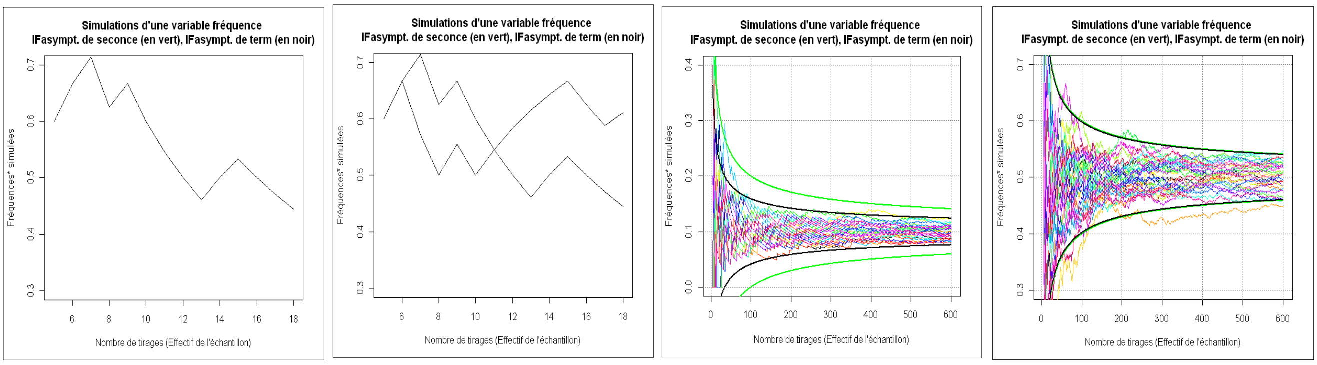
```
(rfs <- cumsum(rbinom(nbn, 1, p))[5 :nbn] / (5 :nbn))
 [1] 0.6000000 0.6666667 0.5714286 0.5000000 0.5555556 0.5000000 0.5454545
 [8] 0.5833333 0.6153846 0.6428571 0.6666667 0.6250000 0.5882353 0.6111111
```

- Illustration graphique, une deuxième ligne brisée se superpose à la première :

```
lines(5 :nbn, rfs)
```

- **On continue à simuler des séries d'échantillons** de tailles croissantes de 1 à 18, à l'aide d'une boucle for. Pour différencier les 18 séries, on fait intervenir la gestion de la couleur avec **R** et sa fonction rainbow(...)

```
for (i in 1 :nbsim) {
 (rfs <- cumsum(rbinom(nbn, 1, p))[5 :nbn] / (5 :nbn))
 lines(5 :nbn, rfs), col = rainbow(nbsim)[i])
}
```



- Les principaux inconvénients de cette simulation sont que les échantillons de différentes tailles ne sont pas indépendants et qu'elle ne permet pas d'illustrer la suite des différentes distributions associées aux tailles d'échantillons.

II − Une simulation alternative illustrant la suite des distributions

Cette fois ci les échantillons de différentes tailles sont indépendants. Nous avons fait deux types d'illustrations graphiques mettant en évidence quelques aspects des distributions des échantillons de différentes tailles.

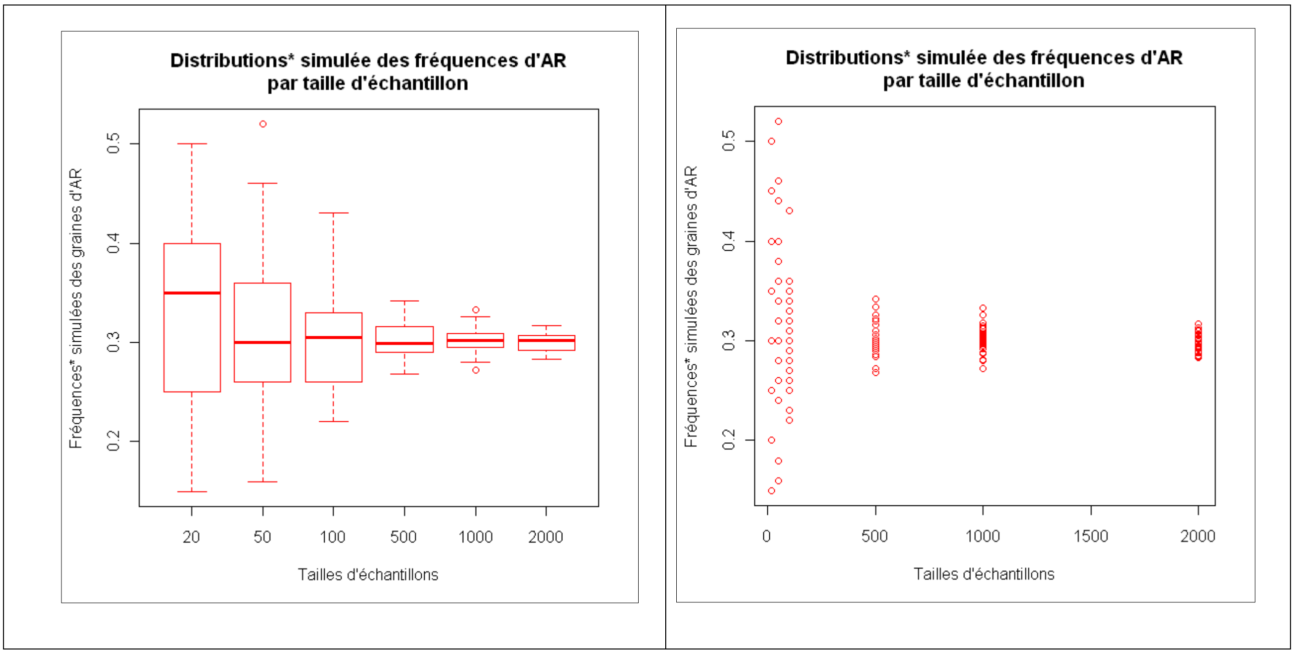
En fait cette simulation numérique est le prolongement d'une activité de simulation de contrôle de qualité par attribut, réalisée avec des bouteilles contenant des boules de couleurs simulant des lots de marchandise, à l'aide d'un protocole et des grilles de saisie représentant une situation concrète. Cette activité est détaillée sur le site de l'IREM de Lyon http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php ?article506.

Lorsque la taille de l'échantillon augmente (n = 500, n = 1000, n = 2000) on ne peut plus faire d'expérience réelle, on la remplace par une simulation numérique, comme cela se fait dans beaucoup d'autres domaines scientifiques, techniques, biologiques.

On va créer des données simulées que l'on stockera dans 2 variables, taille d'échantillons `(taillEch)`, et fréquence simulée de **graines d'AR** `(FreqBino)`, **représentées par des boules rouges, représentant le succès.** Les tailles d'échantillons simulés seront de 20, 50, 100, 500, 1000, 2000. On fera 30 répétitions de chaque simulation (comme si c'était les 30 élèves d'une classe qui réalisaient les simulations).

```
# Les paramètres des lots (Niveau de Qualité Acceptable)
# correspondant aux bouteilles à bouchons rouges, contenant 30 % de boules rouges)
p <- .3 ; nbsim = 30

# Création des tailles d'échantillons
taillEch <- rep(c(20, 50, 100, 500, 1000, 2000), each = nbsim)


# Création d'une fonction pour la Simulation de séries “binomiales”.
EchBino <- function(taille){rbinom(nbsim, taille, p)}

# Simulation numérique de 6 séries de 30 (nbsim) échantillons de tailles
# n = 20, 50, 100, 500, 1000, 2000. La variable X est le nombre de
# graine d'AR (boules rouges) dans l'échantillon
EffBino <- c(EchBino(20), EchBino(50), EchBino(100), EchBino(500), EchBino(1000),
EchBino(2000))

# On fait le graphique (en boite)
plot(as.factor(taillEch), EffBino)

# On passe donc à la variable X/n fréquence de graines d'AR
# dans l'échantillon de taille n
FreqBino <- c(EchBino(20) / 20, EchBino(50) / 50, EchBino(100) / 100,
 EchBino(500) / 500, EchBino(1000) / 1000, EchBino(2000) / 2000)

# Cette fois-ci le graphique (en boite) est pertinent
plot(as.factor(taillEch), FreqBino,
 main = "Distributions* simulée des fréquences d'AR\npar taille d'échantillon",
 xlab = "Tailles d'échantillons",
 ylab = "Fréquences* simulées des graines d'AR",
 border = "red")

# On poursuit par le nuage de points
plot(taillEch, FreqBino,
 col = "red",
 main = "Distributions* simulée des fréquences d'AR\npar taille d'échantillon",
 xlab = "Tailles d'échantillons",
 ylab = "Fréquences* simulées des graines d'AR")
```

Ce qui donne les graphiques suivants :



Les diagrammes en boite fournissent un résumé graphique permettant de comparer facilement les distributions des échantillons de différentes tailles. Par contre l'échelle horizontale n'est pas numérique, les tailles d'échantillons étant prises comme modalités d'un facteur (variable catégorielle).

Dans le graphique en nuage de points les deux axes sont numériques. À la précision du graphique près, tous les points sont représentés, donnant une idée plus précise de la distribution des fréquences en fonction de la taille des échantillons. On peut ainsi donner du sens à la définition mathématique de la loi des grands nombres.

Cette présentation a d'ailleurs été reprise par Annette Corpart et Nelly Lassalle de la CII statistique et probabilité, de l'IREM de Clermont Ferrand (http ://www.irem.univ-bpclermont.fr/spip.php ?article366).

ACTIVITÉ 3 : LES INTERVALLES DE FLUCTUATION DE LA SECONDE A LA TERMINALE ; DES PROBABILITES BINOMIALES AUX ABAQUES – PROBABILITE D'UN INTERVALLE DE FLUCTUATION IF1 D'UNE VARIABLE BINOMIALE (PROGRAMME DE PREMIERE)

Le langage **R** permet de mettre directement en œuvre la méthode de calcul, sans passer par les boucles « tant que » qui constituent un obstacle supplémentaire :

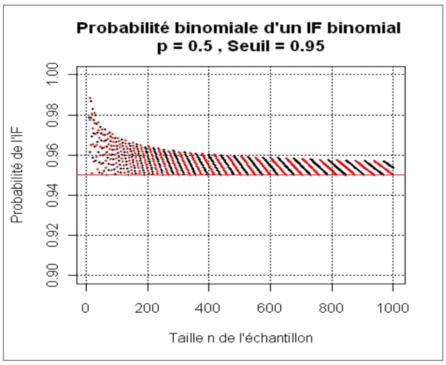
L'intervalle de fluctuation bilatéral au seuil minimal de probabilité s d'une variable binomiale X de paramètres n et p, défini dans le programme de première, est l'intervalle [a ; b] où

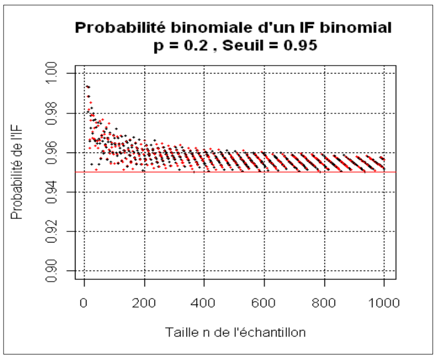
a est la plus petite valeur de X telle que P(X <= a) > (1 – s) / 2)
b est la plus petite valeur de X telle que P(X <= b) >= (1 – (1 – s) / 2)

[a/n ; b/n] est l'intervalle de fluctuation de la variable fréquence (de succès) X/n.

```
# Calcul de l'IF1 et de sa probabilité “exacte”, pif.
PIF_Bino <- function(n, p, s){
 repartX <- pbinom(0 :n, n, p)
 rang_a <- min(which(repartX > (1 - s) / 2))
 a <- rang_a - 1
 rang_b <- min(which(repartX >= (1 + s) / 2))
 b <- rang_b - 1
 pif <- sum(dbinom(a :b, n, p))
 return(pif)
}
```

```
# Représentation graphique de pif en fonction de la taille n de l'échantillon.
GrafPifBino <- function(N = 5 :1000, p = .5, s = .95){
 SeriePif <- NULL
 for (i in N) {SeriePif <- c(SeriePif, PIF_Bino(i, p, s))}
 plot(N, SeriePif, pch = 19, col = c("black", "red"), cex = .4,
   ylim = c(.9, 1),
   main = paste("Probabilité binomiale d'un IF binomial",
      "\np =", p, ", Seuil =", s),
   xlab = "Taille n de l'échantillon",
   ylab = "Probabilité de l'IF")
  abline(h = p, col = "red")
  grid(col = "black")
}
```



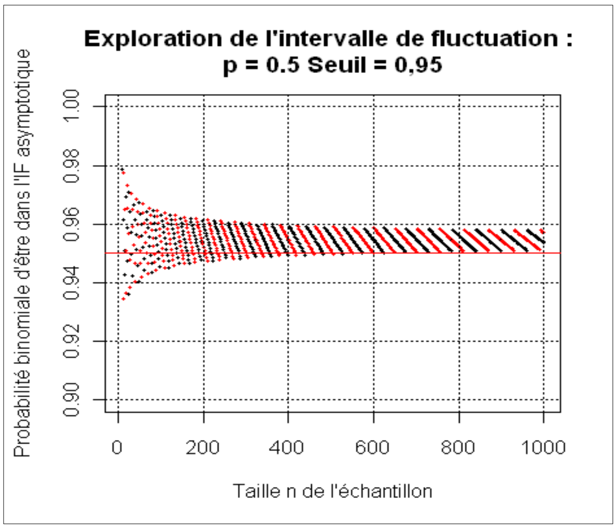


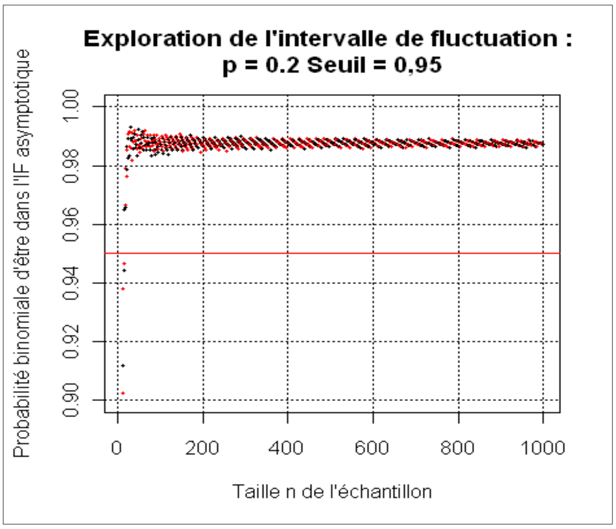
II – Probabilité d'un intervalle de fluctuation asymptotique IFasymp2 d'une fréquence (programme de seconde)

Il s'agit de représenter graphiquement la probabilité binomiale de l'intervalle de fluctuation asymptotique du programme de seconde, d'une variable fréquence. Le principe consiste à passer des valeurs de la variable fréquence aux valeurs correspondantes de la variable binomiale X, et à calculer la probabilité binomiale de l'intervalle ainsi obtenu. C'est cette « discrétisation » qui explique la forme particulière du nuage de points obtenu.

```
# Probabilité binomiale de l'IF asymptotique Gaussien de seconde : p +- 1/racine(n) en
fonction de n
pIFasy1_1 <- function(N = 5 :1000, p = .5){
 P <- function(n, p) {
  binf <- max(floor(n * p - sqrt(n)), 0)
  bsup <- min(floor(n * p + sqrt(n)), n)
  sum(dbinom((binf + 1) :bsup, n, p))
 }
 y <- NULL
 for (i in N) {y <- c(y, P(i, p))}
 #-----Affichage des graphiques-----
 plot(N, y, pch = 19, cex = .4, col = c("black", "red"),
   ylim = c(.9, 1),
   xlab = "Taille n de l'échantillon",
   ylab = "Probabilité binomiale d'être dans l'IF asymptotique",
```

```
  main = paste("Exploration de l'intervalle de fluctuation :",
     "\np =", p, ", Seuil = 0,95"))
  abline(h = .95, col = "red")
  grid(col = "black")
}
```





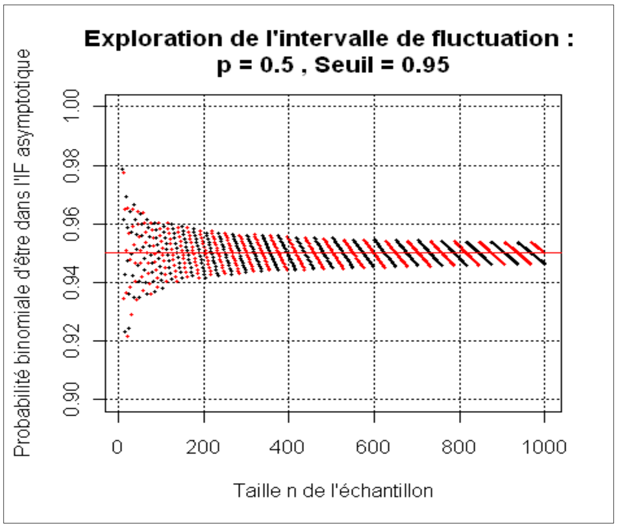
Pour p = 0,5 on observera qu'il existe une valeur n_0 de n telle que la probabilité de l'IFasymp2 soit toujours supérieure à 0,95. La détermination de cette valeur, qui se situe vers 600, peut être l'occasion de la recherche d'un algorithme ad-hoc. Il est aussi intéressant d'observer que cette valeur seuil est différente pour p = 0,2 et que dans ce cas la probabilité binomiale de l' IFasymp2 se stabilise autour de 0,99, pour un seuil nominal de 0,95.

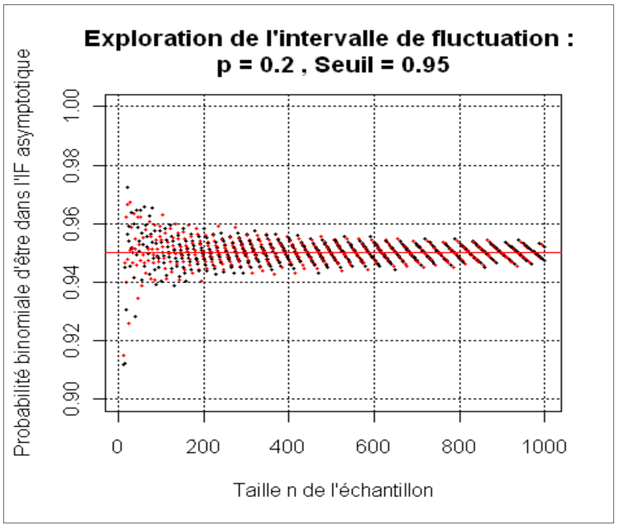
L'alternance des couleurs noire et rouge correspond à la parité de n.

III – Probabilité d'un intervalle de fluctuation asymptotique IFasympT d'une fréquence (programme de terminale)

Il s'agit de représenter graphiquement la probabilité binomiale de l'intervalle de fluctuation asymptotique du programme de terminale, d'une variable fréquence. Le principe est le même que pour l'IF1.

```
# Probabilité binomiale de l'IF asymptotique Gaussien de terminale en fonction de n, (p
+- 1,96*racine(p(1-p)/n))
La fonction R correspondante, pIFasy2_1(...), très peu différente de pIFasy1_1(...)
figure dans le document ArticleA4.pdf en couleur et dans le fichier AtelierA4_CodesR.zip
des codes des fonctions R, proposés sur le site
http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique298.
```





L'importante particularité que permet d'observer ces graphiques c'est que les valeurs de la probabilité semblent osciller autour de 0,95, même pour des valeurs de n allant jusqu'à 10^6 que nous avons essayées.

Il semble donc qu'il ne sera pas possible de trouver une valeur minimale n_0 de n telle que la probabilité binomiale de l'IFasympT soit toujours supérieur à 0,95.

IV – Construction d'abaques d'intervalles de fluctuation binomiaux d'une variable fréquence

On cherche à déterminer les intervalles de confiance d'une proportion. Cet algorithme tracera les abaques des intervalles de fluctuation suivants :

- asymptotique du programme de seconde, noté **IFasymp2 (tiretés noirs sur le graphique).** Cet intervalle n'apparaîtra que pour le seuil de 95 %.
- « exact » du programme de première, noté **IF1 (traits pleins verts sur le graphique).**
- asymptotique du programme de terminale, noté **IfasympT (tiretés points rouges sur le graphique).**

On a les paramètres suivants en entrée :

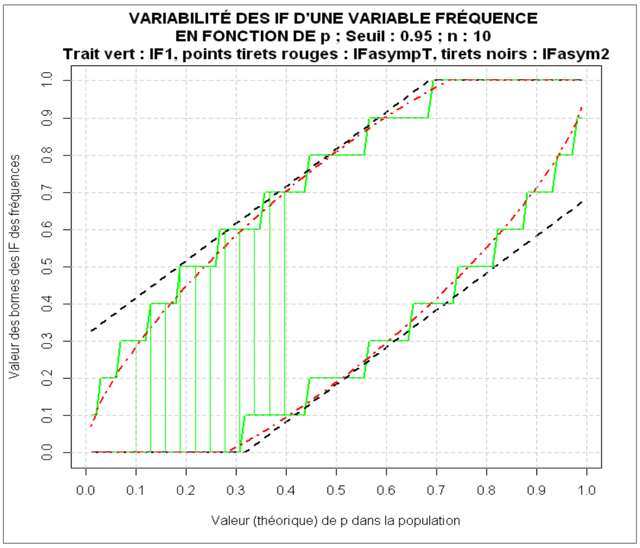
- n : la taille de l'échantillon (le nombre d'épreuves indépendantes)
- seuil : le seuil de probabilité de l'I.F.
- nbvalp : la subdivision de valeurs de p, proportion dans la population ou probabilité de succès
- NumIF : série des rangs des valeurs de p pour lesquelles l'I.F. est représenté graphiquement.

Détermination d'un intervalle de confiance d'une proportion à l'aide des abaques

Il suffit de lire l'abaque en sens « inverse » : pour une valeur de la fréquence f lue sur l'axe des ordonnées, on détermine les deux valeurs de p sur l'axe des abscisses...

L'utilisation de l'abaque de l'**IF1** nécessite des précautions particulières...

Les fonctions R correspondantes, IF_Bino(...) et abak_IF(...), figurent dans le document complet ArticleA4.pdf en couleur et dans le fichier AtelierA4_CodesR.zip des codes des fonctions R, proposés sur le site XXXX.



Les traits verticaux verts représentent l'étendue de quelques intervalles de fluctuation « exacts » IF1.

Il est intéressant d'observer et de comparer la position relative des différents intervalles de fluctuation en fonction de p. Lorsque p s'approche de 0 ou de 1, les approximations asymptotiques perdent de la précision, elles s'éloignent des valeurs de l'IF1.

Il existe un algorithme spécifique qui permet de déterminer l'intervalle de confiance « exact » d'une proportion, c'est la méthode de CLOPPER-PEARSON qui peut donner lieu à bel exercice d'algorithmique, utilisant simplement des répartitions binomiales.

V – Prolongement possible : l'intervalle de confiance « exact » d'une proportion p, par la méthode de CLOPPER-PEARSON

Les données consistent en t succès à la fin de n épreuves de Bernoulli indépendantes, de paramètre p. X est la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de succès à la fin des n épreuves. On supposera qu'elle suit une loi binomiale de paramètres n et p.

L'intervalle de confiance « exact » de p au niveau de confiance s (par exemple 0,95), est l'intervalle $[p_{inf} \,;\, p_{sup}]$ où :

p_{inf} est tel que $p_{inf} = 0$ si $t = 0$ et tel que $P_{p\,=\,p_{inf}}(X \geq t) = (1 - s) / 2)$ si $0 < t \leq n$.

p_{sup} est tel que $p_{sup} = 1$ si $t = n$ et tel que $P_{p\,=\,p_{sup}}(X \leq t) = (1 - s) / 2)$ si $0 \leq t < n$.

Un excellent exemple à mettre en œuvre avec un algorithme et un programme. À paraître bientôt, programmé en **R**, sur le site de mathémaTICE (http://revue.sesamath.net/).

CONCLUSION

Ces trois exemples nous montrent comment les activités algorithmiques et les activités mathématiques s'enrichissent mutuellement. L'algorithmique permet de mettre en œuvre, d'illustrer, de donner du sens à des notions délicates comme le théorème de MOIVRE-LAPLACE et le passage du discret au continu pour les variables aléatoires, les suites de distributions dans la loi des grands nombres, la probabilité binomiale de certains intervalles de fluctuation asymptotiques d'une variable fréquence, la construction des abaques pour déterminer des intervalles de fluctuation d'une variable fréquence et des intervalles de confiance d'une proportion dans une population. Cet enrichissement passe aussi par un outil logiciel capable de faire sans technicité excessive, des représentations graphiques de qualité. **R** nous permet d'obtenir cette qualité.

ATELIER B1 : MODELISATION MATHS-PHYSIQUE : UN EXEMPLE EN CLASSE DE SEGPA

Gilles Aldon, EA S2HEP Université Lyon1-ENS de Lyon

Karine Bécu-Robinault, EA S2HEP Université Lyon1-ENS de Lyon

Dans une séance de classe de physique ou de mathématiques, les professeurs peuvent mettre en place des situations de modélisation mettant en jeu des concepts mathématiques ou physique et des modes de représentation partagés ou non s'appuyant sur ces concepts. Quels sont les éléments qui permettent de comprendre la mise en place d'un modèle explicatif, quels sont les freins ou les difficultés pour partager les représentations d'une discipline à l'autre ? L'objet de cet atelier sera, en partant d'exemples concrets de réfléchir aux ponts qu'il est possible de construire d'une discipline à l'autre.

INTRODUCTION

L'atelier présenté se place dans le cadre plus large d'une recherche collaborative, impliquant des chercheurs de l'IFÉ et des professeurs des écoles et de collèges, dont l'objectif est de promouvoir l'accès à la culture scientifique et numérique pour tous dans la continuité de la maternelle au collège dans le cadre du Léa Côte d'Or, Développement de la culture scientifique et numérique, égalité des chances (http://ife.ens-lyon.fr/sciences21/). Un des aspects de cette recherche (Aldon & Bécu-Robinault, à paraître) nous a conduit à nous intéresser à la manière dont des enseignants de sciences des sections SEGPA mobilisent des concepts et des méthodes initialement conçus pour des élèves de filières traditionnelles. Plus particulièrement, nous avons suivi une séquence de classe visant à construire un modèle explicatif des différents états de l'eau. Cette séquence a été élaborée par le professeur de la classe de SEGPA, en collaboration avec des professeurs du collège enseignant dans des classes traditionnelles. L'objet de l'atelier est d'étudier cette séquence de classe sous l'angle de la construction d'un modèle explicatif combinant des concepts de mathématiques et de physique et des règles d'utilisation de représentations de ces concepts. Les cadres théoriques sur lesquels est construite l'analyse de la situation proviennent à la fois de la didactique des mathématiques : théorie des situations didactiques (Brousseau, 2004), et plus particulièrement la notion de milieu et sa structure (Margolinas, 2004), et de la didactique des sciences : modélisation (Tiberghien, 1994, Bécu-Robinault, 2004, Coquidé & Le Maréchal, 2006). Enfin, les représentations sémiotiques et multimodales (Duval, 1995, Ainsworth, 2006, de Vries, 2007) constituent un cadre fondamental pour comprendre les éléments essentiels de la situation présentée.

LE SENS DE LA SITUATION

La classe

Les SEGPA (Section d'enseignement général et professionnel adapté) accueillent des élèves en grande difficulté ; les élèves de ces sections suivent des enseignements adaptés dans des classes à effectif réduit permettant un suivi individualisé important. En revanche, les programmes de ces classes sont identiques aux programmes de quatrièmes et troisième et visent l'acquisition du socle commun de connaissances et de compétences. Dans notre cas, la classe suivie comptait dix élèves. L'enseignante (Martine dans la suite), professeur des écoles, ayant suivi une formation universitaire en philosophie, enseigne dans cette classe les mathématiques et les sciences. La séquence étudiée a été conçue pour amener les élèves à pratiquer une démarche d'investigation et Martine souhaitait à travers la conceptualisation des objets, faire un lien entre les enseignements de sciences et de mathématiques. Les observations en classe se sont déroulées sur deux années consécutives. C'est, dans un premier temps, la séance de la première année qui est analysée pour déboucher, dans un deuxième temps, sur les modifications apportées en fonction de cette analyse.

La séquence

Dans une première séance de physique, les élèves ont versé de l'eau dans trois tubes à essai (Figure 1) dont le premier a été placé dans un congélateur, le second laissé à l'air libre dans la classe et le troisième également laissé dans la classe a été bouché. Les élèves ont ainsi pu observer ce qu'il advient de l'eau liquide lors de son passage à l'état solide ou de gaz. L'objectif initial de la séquence était d'expliquer l'augmentation du volume de l'eau dans le passage de l'état liquide à l'état solide. Il s'agissait en outre de maîtriser les règles de représentation d'une information dans un système sémiotique particulier et de savoir passer d'un registre de représentation à un autre. Martine a donc imaginé plusieurs types de représentations des particules d'eau en s'appuyant sur un mime, et sur l'agencement de formes planes sur papier ou sur TBI. Dans la séance de mathématiques, Martine a fait travailler ses élèves sur la construction d'un triangle équilatéral en utilisant règle et compas, puis a partagé le triangle initial de 10 cm de côté en 100 triangles équilatéraux par des tracés de parallèles aux trois côtés. L'activité s'est terminée par le découpage des 100 petits triangles équilatéraux (Figure 2).

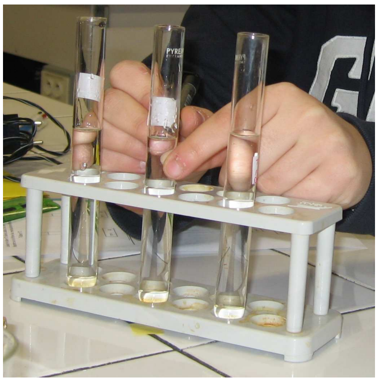


Figure 1 Trois tubes à essai pour trois états de l'eau

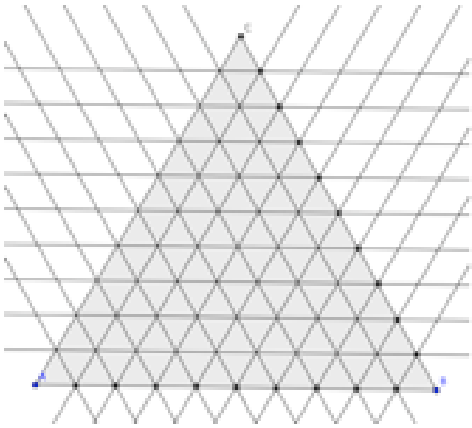


Figure 2 Triangles

La séance de physique observée présente différentes activités, la première, en classe entière, est un mime des particules d'eau (Figure 3), la deuxième est un travail de groupes pendant laquelle les élèves ont à manipuler une représentation des particules d'eau (particule-triangle, particule-tétraèdre, particule-disque sur le tableau interactif (Figure 4)). La situation se termine par une phase de mise en commun des productions des élèves visant à faire ressortir la pertinence des représentations utilisées en lien avec les propriétés constatées dans la première expérience.

Le mime

Les élèves doivent mimer les trois états de l'eau sur la base d'un mime déjà partiellement réalisé avec quelques élèves de cette classe. L'enseignante souhaite également que les élèves explicitent les règles d'arrangement des particules dans les trois états. Dans l'état gazeux, les élèves sont invités à utiliser tout l'espace mis à leur disposition, et se déplacer dans cet espace ; dans l'état liquide, les « élèves-particules » doivent permettre à un « élève-poisson » de se déplacer et dans l'état solide, ils forment une structure géométrique rigide : il s'agit donc d'une représentation dynamique des états de l'eau et même si l'espace considéré, et les corps des élèves eux-mêmes évoluent dans un espace à trois dimensions, le mime propose une représentation en deux dimensions horizontales, les mouvements verticaux (sauter, se coucher,...) n'étant pas prévus ni d'ailleurs utilisés. Remarquons également que la confusion entre le microscopique (les élèves comme particules) et le macroscopique (un élève comme poisson) est inhérente à la situation. Il est ainsi prévisible que la confusion entre les niveaux microscopiques et macroscopiques se propage dans les autres représentations.

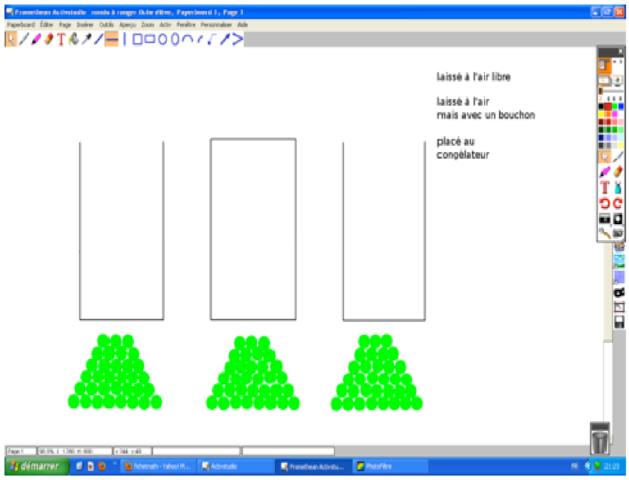


Figure 3 Le mime des particules dans l'eau liquide

Figure 4 les particules d'eau sur le tableau interactif

Le collage

Dans les groupes travaillant sur le collage des triangles équilatéraux construits dans le cours de mathématiques, Martine distribue des feuilles sur lesquelles sont dessiné trois béchers sur lesquels les élèves ont à disposer les triangles de carton. Les représentations construites sur la base de propriétés mathématiques ne sont pas initialement liées aux propriétés physiques des particules. Le lien matériel pensé par Martine entre les activités mathématiques et physique porte en lui une difficulté dans le transfert de propriétés mathématiques du triangle aux propriétés physiques des particules.

Les disques et le TBI

Martine propose au dernier groupe de travailler en autonomie sur le tableau blanc interactif. Le dessin initial des béchers et des particules d'eau est présent au tableau (Fig. 4) et Martine ne donne comme consigne initiale que des conseils matériels de manipulation des disques :

Martine : Voilà, vous avez différentes étiquettes qu'il faudra remettre par rapport à votre situation. D'accord ? Et vous déplacez avec.. (Martine prend le stylo optique du TBI et montre). OK ?

Les élèves doivent trouver un arrangement des formes mises à disposition de manière à représenter les trois états de l’eau, mettant en évidence l’augmentation de volume de l’eau lorsqu’elle passe de l’état liquide à l’état solide. Les particules sont représentées sur le TBI par des disques, initialement placés sous chacune des représentations, et qui peuvent être déplacés sur le tableau. Ces disques peuvent également être déformés, comme on le verra dans la suite, sans que cette déformation n'ait été anticipée par Martine. Le TBI permet une manipulation directe mais ne permet pas une réflexion sur la disposition construite puisqu'aucune rétroaction n'est prévue.

LA MISE EN ŒUVRE DE LA SITUATION

Description

Dans ce paragraphe, nous présentons ce qu'il s'est réellement passé dans la classe à travers l'activité des élèves et les interactions avec le milieu et les ajustements réalisés par Martine au cours de la séance.

Dans la situation du mime, la confusion entre les descriptions aux niveaux microscopiques et macroscopiques est très présente d'une part par la présence du poisson mais aussi par les formes représentées par les élèves ; l'eau liquide est représentée en rond comme une goutte d'eau et l'eau solide en carré, comme un glaçon. En revanche, les propriétés de formes propres ou contraintes de l'eau dans les différents états sont bien mises en œuvre dans le mime. A l'issu de cette phase, Martine reconstruit la consigne avec la classe :

Martine : Alors, pourquoi l'eau gonfle-t-elle ? Oui, je l'avais peut-être formulé autrement.. Pourquoi,...(P prend un stylo et écrit sur le tableau). Alors, pourquoi... Quand on parle de place, hein ? (P fait des gestes avec les bras pour embrasser un grand volume)

Élève : de volume ! (P se retourne en acquiesçant)

Martine : Pourquoi… l'eau... augmente de volume... lorsque, lorsque on la ?

E : congèle

Martine : euh, lorsque, alors, j'ai mis elle, alors, lorsqu'elle a été congelée ? Voilà, hein ! Je vous rappelle, c'est notre question de départ.

Dans l'activité de collage un groupe reprend l'organisation spatiale construite lors du mime pour l'état solide et place les particules en carré alors que l'autre groupe utilise les propriétés mathématiques de pavage du plan pour construire des hexagones à partir des triangles équilatéraux (Figure 5).

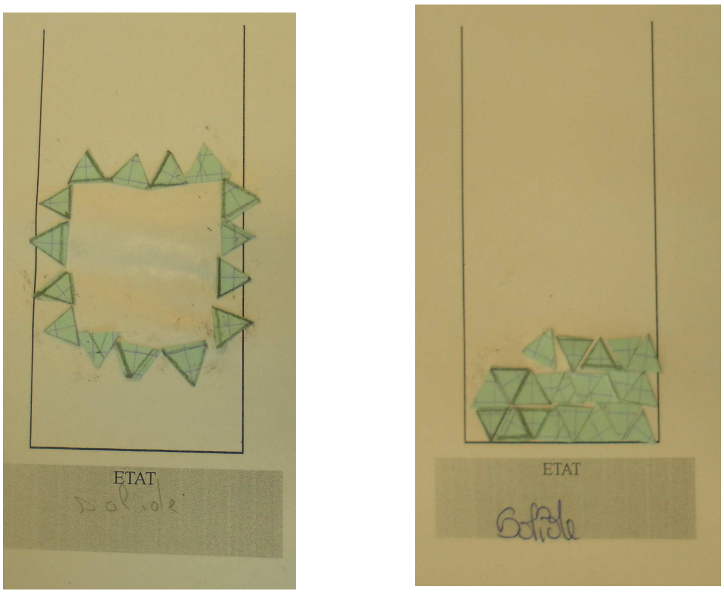


Figure 5 Représentations en hexagone et en carré de l'état solide de l'eau

Dans cette activité, l'indéformabilité des particules est bien respectée : les triangles ayant été découpés dans la séance de mathématiques, il apparaît tout à fait inopportun de redécouper ces formes. En revanche, les analogies avec les « formes » de l'eau solide et liquides sont bien observées rajoutant à la confusion entre les niveaux microscopiques et macroscopiques.

En ce qui concerne le groupe travaillant sur le TBI, on peut parler de phase a-didactique de la situation puisque, après avoir donné les conseils techniques de manipulation des objets, Martine précise qu'elle n'interviendra plus dans la recherche :

Martine : Quand vous avez terminé, vous m'appelez et j'enregistre le travail.

Cependant, un des élèves, n’ayant pas compris la consigne, la rappelle et Martine replace la situation 1 dans le milieu matériel :

Martine : Ce que vous avez fait tout à l'heure, vous, je vous ai demandé de représenter les trois états, maintenant c'est plus vous, c'est les petits ronds qui sont là.

Martine incite ainsi à traduire la représentation issue du mime dans la représentation des particules par les disques sur le tableau blanc. Or une caractéristique essentielle du mime est son aspect dynamique qui ne peut pas être reproduit à l'identique sur ce nouveau support. Un incident didactique (Aldon, 2011) est à l'origine de la réponse que les élèves vont proposer pour effectuer cette traduction : en attrapant un disque sur le TBI, un élève le déforme ; à partir de là, la dynamique des particules dans l'état gazeux, puis la surface de l'eau sont représentées par les disques déformés (Figure 6). Un élève note : « fais y monter.. Comme si ça s'évapore ». A partir de ces manipulations, les élèves déplacent le problème et cherchent à représenter l'image macroscopique de l'eau dans les différents états ; les rétroactions du TBI, au lieu d'invalider cette démarche ne font que la renforcer et l'encourager du fait de la possibilité laissé par le milieu de la déformation des particules.

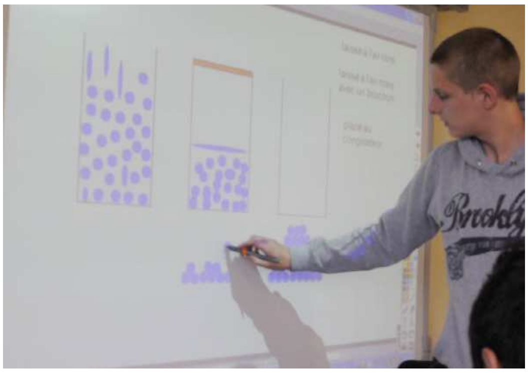


Figure 6 Les particules « déformées »

La séance se termine par une mise en commun et une institutionnalisation visant à disqualifier la forme circulaire des particules au profit de la forme triangulaire pour construire l'explication de l'augmentation du volume de l'eau dans l'état solide. Martine conclut pour la situation des triangles :

Martine : Oui, on dirait que l'eau liquide a un plus grand volume que l'eau solide, d'accord ?

Élève : Ouais, ouais, voilà !

Martine : Alors, soit S s'est trompé, ce qui est tout à fait possible aussi, soit les ronds, est-ce que c'est la forme de notre eau ? »

Pour la production collage, elle conclue au contraire :

Martine : Alors, si je fais comme ça ! P mesure au tableau avec ses doigts les hauteurs d'eau liquide et solide, si je fais comme ça, et comme ça ! Ça est-ce que c'est plus grand ? Ou pas ? Est-ce que ça prend plus de place ? Ce qu'elle a fait ? Ou pas ?

Elève : Oui

Martine : Là on est dans une configuration où elle, elle a réussi à mettre ses particules d'eau et que ça prenne plus de place. »

Quelques éléments d'analyse

La signification des objets (triangles, disques) n'est pas identique suivant la discipline considérée. Les objets embarquent des propriétés et des significations liées à la discipline de référence. Ainsi, les triangles construits en appliquant des propriétés mathématiques ont conservé ces propriétés et n'ont pu que très partiellement représenter des particules dans le travail des élèves. Lorsque les propriétés physiques des représentations ne sont pas suffisamment explicitées, ou ne sont pas suffisamment prégnantes dans la situation, elles échappent aux élèves et un glissement se produit vers les propriétés mathématiques, d'autant plus que la construction est explicite et naturalisée. Ce phénomène est en contradiction avec le modèle physique à construire.

Les situations peuvent conduire les élèves à inventer ou modifier des propriétés en lien :

- avec le contrat didactique : trois états de l'eau signifie trois arrangements différents,
- avec les rétroactions du milieu : la superposition des particules autorisée par le TBI n'apparaît pas comme légitime avec les triangles cartonnés, l'indéformabilité des particules disparaît si le milieu l'autorise comme on l'a vu sur le TBI,...

Le modèle explicatif construit par les élèves dans les différentes représentations ne permet pas de rendre compte de l'augmentation du volume de l'eau dans le passage de l'état liquide à l'état solide et apparaissent contradictoires comme en témoigne cet échange après l'institutionnalisation :

S : Mais elle va pas s'organiser l'eau !

Martine : Mais, vous, vous vous êtes bien organisés tout à l'heure quand vous avez fait les particules d'eau...

S : Oui, mais c'est pas la même chose !

Martine : Tu penses que vous vous êtes organisés parce que vous êtes capables de réfléchir...

S : Ben ouais !

Cette observation et l'analyse qui en découle nous a permis de proposer des modifications de la situation pour éviter les bifurcations observées : il ne s’agira plus de choisir parmi différentes formes de molécule celle qui rend compte de l’augmentation de volume, mais le modèle particulaire serait introduit pour proposer des organisations différentes selon les états de l'eau. Ainsi, les propriétés initiales seraient données *a priori* et le modèle pourrait être complété et enrichi dans la situation. Les éléments de la situation renforçant la confusion entre les niveaux microscopiques et macroscopiques seraient contrôlés *a priori*, et pendant les interactions.

MODIFICATIONS DE LA SITUATION

La nouvelle séquence

La séquence a donc été reconstruite en tenant compte de l'analyse et découpée en plusieurs séances dont la trame est reproduite ci-dessous. L'observation en classe a porté sur la même séance que l'année précédente.

Séance 1 :

Expérience avec l'eau dans les tubes à essai. A l'issu de cette expérience, Martine a institutionnalisé, à partir des remarques des élèves :

– l'eau dans le tube numéro 1 (dans le congélateur) : a gelé, est froide, a gardé la même masse, son volume a augmenté, la couleur a un peu blanchi, elle a une forme propre ; l'eau est dans l'état solide,
– l'eau dans le tube numéro 2 (tube à essai bouché) : là aussi a gardé la même masse, mais aussi le même volume et n'a pas de forme propre ; l'état liquide,
– l'eau dans le tube numéro 3 (tube à essai laissé à l'air libre) : s'est évaporée, sa masse et son volume ont diminué ; la partie qui n'est plus visible est l'état gazeux.

Séance 2 :

En mathématiques, les triangles ont été construits ainsi que des tétraèdres avec un système astucieux de ficelles permettant de les attacher ensemble (Figure 7).

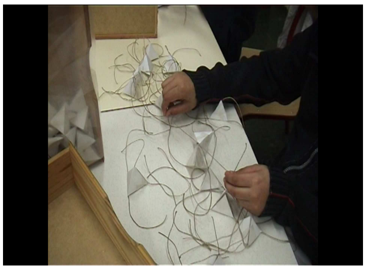


Figure 7 Tétraèdres

Séance 3 :

Le mime a été mis en œuvre dans des conditions semblables de celles de l'année précédente. En revanche, une institutionnalisation des résultats obtenus a été réalisée et proposée sur une affiche qui a été le point de départ de la séance suivante. En particulier les propriétés des particules ont été rappelées : les particules sont indéformables, invisibles à l’œil nu, et gardent toujours les mêmes dimensions. En s'appuyant sur les photographies prises dans la séance de mime, Martine redéfinit les états de l'eau :

- état solide : compact, ordonné et lié,
- état liquide : compact, non lié et désordonné,
- état gazeux : dispersé, et occupe tout l'espace disponible.

Le côté dynamique du mime n'est pas repris et l'illustration sur les photographies met en arrière plan la dynamique des particules. La consigne est alors de représenter, en trois ateliers, les liaisons des particules dans les trois états. Un groupe travaille avec les triangles découpés, un autre groupe manipule au TBI des triangles que Martine a prévu indéformables et enfin un troisième groupe travaille avec les tétraèdres. Les liens sont alors expliqués en fonction des propriétés rappelées des liaisons des particules dans les différents états. La mise en commun est alors de confronter les différentes représentations à ces propriétés.

CONCLUSION

La signification des objets manipulés (triangles, disques, tétraèdres) n'est pas identique selon la discipline considérée, les objets embarquant des propriétés et des significations étroitement liées avec la discipline de référence. Ainsi, lorsque les propriétés physiques des représentations ne sont pas explicitées, elles sont difficilement accessibles aux élèves et le type de représentation masque les objectifs qui lui étaient assignés. Les spécificités disciplinaires soulèvent la question du travail en interdisciplinarité qui semble être une source de complexification des tâches assignées aux élèves.

Même si la difficulté entre les représentations microscopiques et macroscopiques ne sont pas entièrement prises en compte par la nouvelle situation, l'évolution du scénario de la séquence de classe permet aux élèves de préciser un modèle déjà partiellement construit. L'objectif initial « expliquer l'augmentation de volume » a progressivement laissé la place à une construction de sens des représentations manipulées et à leurs règles d'agencement. Une analyse plus poussée de l'activité et des interactions est en cours et fera l'objet d'une publication sur le site du plan sciences Côte d'Or (http://ife.ens-lyon.fr/sciences21/).

REFERENCES

AINSWORTH, S. E., (2006). *DeFT : a conceptual framework for considering learning with multiple representations*. Learning and Instruction, 16(3), 183-198.

ALDON, G., BÉCU-ROBINAULT, K. (à paraître). *Élaboration de règles d'utilisation de représentations par des élèves de SEGPA lors d'activités de modélisations des états de l'eau.* RDST n°8

ALDON, G. (2011). Interactions didactiques dans la classe de mathématiques en environnement numérique : construction et mise à l'épreuve d'un cadre d'analyse exploitant la notion d'incident. *Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.*

BECU-ROBINAULT, K. (2004). Raisonnements des élèves en sciences physiques. In E. Gentaz & P. Dessus (Éd.). *Comprendre les apprentissages, sciences cognitives et éducation.* Paris : Dunod, p. 117-132.

BROUSSEAU, G. (2004). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage Grenoble (332 p.).

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine***.** Berne, Peter Lang**.**

MARGOLINAS, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur : Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Habilitation à diriger les recherches en sciences de l'éducation, Université de Provence.

TIBERGHIEN, A. (1994) Modeling as a basis for analyzing teaching – learning situations. *Learning and Instruction,* vol 4, p.71-87.

ATELIER B2 : MESURES ET INCERTITUDES : UN POINT DE RENCONTRE ENTRE SCIENCES EXPERIMENTALES ET MATHEMATIQUES

Valérie Munier, LIRDEF-Universités Montpellier 2 et Montpellier 3, IREM de Montpellier[1]

INTRODUCTION

L'importance de la mesure pour le scientifique est indéniable et de la même manière les concepts de grandeur et mesure sont essentiels dans l'enseignement. Or s'il est bien un domaine à l'interface entre mathématiques et physique, c'est celui de la mesure des grandeurs, et l'enseignement des grandeurs et de la mesure concerne ainsi l'ensemble des enseignants, en physique comme en mathématiques, de la maternelle à l'université. Dans cet atelier nous nous intéressons à l'enseignement/apprentissage de la mesure et des incertitudes de mesure au lycée dans une perspective de transition lycée université. Nous nous intéressons à l'articulation entre mathématiques et sciences physiques dans ce domaine et en particulier nous cherchons à faire le point sur les savoirs en jeu concernant le traitement des mesures et les incertitudes de mesure dans les deux disciplines. Nous étudions tout d'abord la place que les programmes de physique du secondaire accordent à cette question depuis le début du vingtième siècle jusqu'à nos jours. Nous mettons en relation les préconisations concernant le traitement de la mesure en physique et les programmes de mathématiques. Nous discutons ensuite le document ressource « Mesure et incertitudes » mis en ligne par le ministère pour accompagner la mise en œuvre des nouvelles instructions par les enseignants de mathématiques et de sciences physiques et chimiques (SPC). Pour finir nous présentons une synthèse de la littérature sur les difficultés des élèves et des étudiants sur la mesure et les incertitudes avant de proposer des pistes de réflexion pour penser un enseignement de la mesure qui permette d'articuler mathématiques et physique au lycée et à l'université.

INSTRUCTIONS OFFICIELLES

Historique de l'enseignement de la mesure

En sciences physiques, on a assisté au cours des cent dernières années dans l'enseignement Français à une évolution des pratiques, des enjeux mêmes du mesurage et de l'importance qu'on lui donne par rapport à l'observation lors de l'expérimentation. Cette évolution de la place de la mesure dans l'enseignement des sciences physiques au lycée depuis 1902 a été retracée par Séré (2007, 2008). Elle montre que durant la première moitié du vingtième siècle, le mesurage a été enseigné en tant que savoir-faire, les mesures étant peu (ou pas) utilisées, mais qu'une centration s'est faite ensuite progressivement sur le traitement des données et sur l'évaluation de la qualité de la mesure, en lien avec les théories statistiques. Cette évolution des pratiques et des enjeux du mesurage est liée notamment aux objectifs attribués aux activités expérimentales, qui ont considérablement évolué avec le passage d'un enseignement basé sur la monstration et l'induction à un enseignement fondé sur l'investigation des élèves.

[1] L'atelier B2 a été aussi animé par Brigitte Chaput et Christine Ducamp

Séré distingue trois grandes étapes dans l'histoire de l'enseignement du mesurage : passage de la « valeur vraie » et de l'erreur (années 1907-1945) à l'incertitude (jusqu'en 1968) puis à la mesure considérée comme variable aléatoire, ce dernier passage constituant un véritable tournant dans l'histoire de l'enseignement du mesurage. Elle montre que l'introduction de ce raisonnement statistique modifie profondément le traitement des mesures. Les incertitudes sont estimées et le *« dogme des encadrements est abandonné »* au profit de l'intervalle de confiance associé à un taux de confiance. Séré souligne que cette évolution de l'enseignement de la mesure a suivi l'évolution de la métrologie avec un certain décalage. Ainsi c'est une approche probabiliste du traitement de la mesure qui est préconisée à l'heure actuelle dans l'enseignement français, comme nous le développons ci-dessous dans l'analyse des programmes en vigueur. Nous nous limitons ici aux programmes de la filière scientifique (MEN, 2010a et b et 2011 pour les SPC, MEN, 2009, 2010c et 2011 pour les mathématiques).

Programmes de physique-chimie

En seconde, lorsqu'ils mettent en œuvre des démarches expérimentales, les élèves doivent pouvoir « réaliser et analyser les mesures, en estimer la précision et écrire les résultats de façon adaptée » (MEN, 2010a). Le programme de première S souligne le rôle fondamental des activités expérimentales dans l'enseignement de la physique et de la chimie et insiste sur le fait que lors de ces activités les questions de mesure et d'incertitudes sont cruciales : « Elles établissent un rapport critique avec le monde réel […] où les mesures - toujours entachées d'erreurs aléatoires ou systématiques - ne permettent de déterminer des valeurs de grandeurs qu'avec une incertitude qu'il faut pouvoir évaluer au mieux » (MEN, 2010b). On trouve dans ces programmes des références au rôle fondamental de la précision des mesures, à la fois dans l'enseignement et pour le progrès scientifique. Ils citent en particulier des exemples issus de l'histoire des sciences dans lesquels l'augmentation du degré de précision des mesures a permis d'établir de nouvelles lois. La liste des notions et des compétences expérimentales exigibles dans le programme de terminale S est très développée (MEN, 2011), et on citera par exemple :

« Identifier les différentes sources d'erreur (de limites à la précision) lors d'une mesure : variabilités du phénomène et de l'acte de mesure (facteurs liés à l'opérateur, aux instruments…) ;

Évaluer et comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreur ;

Expression et acceptabilité du résultat ;

Exprimer le résultat d'une opération de mesure par une valeur issue éventuellement d'une moyenne, et une incertitude de mesure associée à un niveau de confiance ;

Déterminer les mesures à conserver en fonction d'un critère donné ;

Commenter le résultat d'une opération de mesure en le comparant à une valeur de référence. »

Pour pouvoir fournir aux élèves les outils nécessaires à l'évaluation des incertitudes sans qu'ils soient conduits à entrer dans le détail des outils mathématiques, les programmes suggèrent d'utiliser l'outil informatique pour « l'automatisation de l'acquisition et du traitement des données expérimentales », de façon à « permettre de dégager du temps pour la réflexion, en l'ouvrant aux aspects statistiques de la mesure et au dialogue entre théorie et expérience ».

On constate que les programmes accordent une place importante à la question de la mesure et des incertitudes, avec l'introduction dans les enseignements de sciences d'éléments de métrologie et d'épistémologie.

Même si l'outil informatique permet d'en prendre en charge une partie, l'approche préconisée nécessite la maîtrise de compétences mathématiques complexes dans le domaine des statistiques et probabilités puisqu'il s'agit de mettre en œuvre un traitement probabiliste des résultats de mesure. Dans le paragraphe qui suit, nous nous intéressons donc à la partie statistiques et probabilités des nouveaux programmes de mathématiques, en retenant les éléments de ces programmes en lien avec la question qui nous intéresse ici.

Programmes de mathématiques

Concernant les statistiques, après avoir abordé au collège les notions d'effectif, de fréquence, de classe, de médiane et quartiles, les élèves rencontrent en seconde les notions de moyenne, d'effectifs et de fréquence cumulée, et en première celles de variance et d'écart type. Les objectifs relèvent à la fois :

- de l'analyse des données : « les élèves doivent être capables de déterminer et interpréter des résumés d'une série statistique et de réaliser la comparaison de deux séries statistiques à l'aide d'indicateurs de position et de dispersion »
- de l'échantillonnage : « il s'agit de les sensibiliser à la fluctuation d'échantillonnage, aux notions d'intervalle de fluctuation et d'intervalle de confiance et à l'utilisation qui peut en être faite » (MEN, 2009).

Pour ce qui est de la représentation des données les élèves utilisent au collège les diagrammes en bâtons et les graphiques cartésiens, puis les histogrammes sont introduits en seconde et les diagrammes en boîte en première.

Les probabilités sont introduites au collège. Au lycée les objectifs affichés par les programmes sont les suivants : « les élèves doivent être capables […] de proposer un modèle probabiliste à partir de l'observation de fréquences dans des situations simples et de mener à bien des calculs de probabilité » ; En seconde sont abordées les probabilités sur un ensemble fini et la notion d'évènement. En première les programmes introduisent les variables aléatoires discrètes, les notions de variance, d'espérance et d'écart type. En terminale ils abordent les probabilités conditionnelles et les variables aléatoires à densité sur un intervalle. Les lois de probabilités discrètes sont introduites en première (lois de Bernoulli, lois binomiales, etc.) et une première approche de la loi des grands nombres est réalisée. En terminale les lois de probabilité à densités sont introduites (lois uniformes, lois normales, lois exponentielles) pour traiter les champs de problèmes associés aux données continues, en particulier la loi normale « qui permet notamment d'initier les élèves à la statistique inférentielle par la détermination d'un intervalle de confiance pour une proportion à un niveau de confiance de 95 %. ».

Les programmes intègrent ainsi des éléments de statistiques inférentielles concernant l'échantillonnage, la prise de décision et l'estimation, synthétisés dans le tableau ci-dessous :

Seconde	Première	Terminale
Echantillonnage		
Intervalle de fluctuation	Intervalle de fluctuation binomiale	Intervalle de fluctuation asymptotique
	Prise de décision	
	Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation binomiale	Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation asymptotique égalité de deux proportions
		Estimation
		Intervalle de confiance

Il est précisé que « L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées […] » (MEN, 2009, 2010c). Les programmes de terminale pointent aussi le fait que cette partie se prête particulièrement à l'étude de problèmes issus d'autres disciplines, et nous considérons que les sciences physiques et le traitement de données issues du mesurage s'y prêtent de façon privilégiée. Notons que les programmes de 3ème mentionnent explicitement le fait que « La notion de dispersion est à relier, sur des exemples, au problème posé par la disparité des mesures d'une grandeur, lors d'une activité expérimentale, en particulier en physique et chimie » (MEN, 2008).

Ces programmes de mathématiques accordent une place croissante aux probabilités et statistiques, et introduisent un certain nombre de nouveautés, notamment les intervalles de fluctuation asymptotique de la fréquence d'échantillonnage et les intervalles de confiance. Des notions de statistiques inférentielles sont ainsi introduites pour la première fois en France dans les programmes du secondaire, la compréhension de ces notions, jusqu'alors enseignées dans différents cursus de l'enseignement supérieur uniquement, passant par une maîtrise des fondements de la théorie des probabilités.

En mathématiques comme en sciences physiques les programmes en vigueur sont ainsi très ambitieux sur les questions liées à la mesure et aux probabilités et statistiques. Comment ces deux questions s'articulent-elles plus précisément ? Dans la partie qui suit, nous analysons le document « Mesure et incertitudes » édité par le MEN en 2012 et disponible sur le site eduscol[1], de façon à délimiter les savoirs en jeu sur la mesure et les incertitudes à l'heure actuelle au lycée et les compétences mathématiques nécessaires pour un traitement

[1]http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/12/7/LyceeGT_ressources_MathPC_Mesure_et_incertitudes_218127.pdf

probabiliste de l'erreur. Il ne s'agit pas ici de faire une synthèse de ce document mais d'en donner quelques éléments clefs.

DOCUMENT « MESURE ET INCERTITUDE » DU MEN

Ce long document (une quarantaine de pages) est destiné à la fois aux enseignants de mathématiques et de physique. Il s'agit d'une clarification à la fois disciplinaire et épistémologique à destination des enseignants des deux disciplines et un des objectifs est de donner « une connaissance partagée sur un sujet qui relève des deux disciplines ». Ce document présente la vision probabiliste de l'erreur développée par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), en accord avec l'approche préconisée par l'organisation internationale pour la standardisation (international organization for standardization) dans sa publication « Guide to the expression of uncertainty in measurement » (GUM). Dans cette vision « *il ne suffit […] pas d'un nombre pour exprimer la mesure, il en faut deux : l'estimation la plus probable de la grandeur et l'amplitude de l'intervalle à l'intérieur duquel elle a de grandes chances de se trouver, ce qu'on appelle un intervalle de confiance* » (Perdijon, 2012, p. 43). L'incertitude peut être liée à des erreurs aléatoires (quelle que soit la précision du mesurage, la répétition de la mesure d'une grandeur donnera des résultats qui se répartissent autour d'une valeur moyenne) et à des erreurs systématiques de mesurage. Les erreurs peuvent avoir diverses origines : l'observateur, l'instrument de mesure et la grandeur qui fait l'objet du mesurage.

Jusqu'alors on utilisait un cadre fréquentiste dans lequel on opérait une description statistique de grands ensembles de données, l'analyse utilisait des procédures liées aux erreurs aléatoires et des outils mathématiques tels que la moyenne. Dans le cadre probabiliste qui est celui dans lequel on se positionne actuellement, on utilise les probabilités pour le traitement des données, l'ensemble des données étant représentées sous la forme de fonctions de densité de probabilité. Pour cela on explique la variabilité de résultats déterministes par le fait qu'il sont considérés comme des réalisations d'une variable aléatoire, c'est-à-dire qu'on remplace la notion d'erreur accidentelle par celle d'incertitude aléatoire : si l'on répète un mesurage, on obtient une série de valeurs que l'on considère comme les valeurs prises par une variable aléatoire Y et une série de valeurs qui sont les erreurs définies sur chacune des observations. Ces valeurs sont considérées comme celles prises par une variable aléatoire et on peut ainsi modéliser le mesurage par : $Y = y_0 + E$ où y_0 est la « valeur vraie » du mesurande.

L'hypothèse fondamentale du traitement probabiliste de l'erreur est que la variable E obéit à une loi de probabilité « bien définie ». L'objet du calcul d'incertitude est alors de déterminer les paramètres de la loi de probabilité de E et un intervalle dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.

Le document « Mesure et incertitudes » présente ensuite le détail de la démarche et les outils mathématiques permettant de déterminer une incertitude sur un mesurage, qui sont résumés dans le document comme suit :

« • *Choisir une méthode de mesurage.*

• *Modéliser le mesurage :*

Déterminer les différentes variables qui entrent dans le mesurage.

Déterminer les grandeurs d'influence.

Déterminer la fonction mathématique qui lie ces variables.

• *Déterminer les composantes de l'erreur sur chacune des variables.*

Lister les composantes aléatoires et les composantes systématiques.

• *Déterminer les incertitudes-types sur chacune des variables.*

Estimations de type A (statistiques) ou de type B (probabilistes)

Éventuelle Incertitude – type composée sur chaque variable

• *Déterminer l'incertitude – type composée sur le mesurage.*

• *Déterminer le facteur d'élargissement (associé à la loi supposée représenter la répartition des valeurs prises par le mesurande).*

• *Donner l'incertitude élargie sur le mesurage avec ses caractéristiques.* »

Le traitement des mesures en physique fait ainsi appel à nombre des notions mathématiques abordées par les programmes de probabilités et statistiques décrits ci-dessus, d'où l'intérêt de penser une articulation entre mathématiques et physique sur ce sujet. Or cette nouvelle approche du traitement des incertitudes est mal connue de nombreux enseignants. En effet nombre d'enseignants de SPC ont été formés à une époque où la manière d'aborder ces questions était très différente, et de ce fait ce document doit leur « donner à comprendre les raisons et les mécanismes mis en œuvre derrière les formules qui sont appliquées dans les estimations de mesures de grandeur. », comme le pointe l'introduction du document. De la même manière de nombreux enseignants de mathématiques n'ont pas suivi d'enseignements de probabilités et statistiques dans leur formation initiale, et du fait de l'organisation de la formation initiale actuelle des enseignants de mathématiques, certains d'entre eux n'ont encore à l'heure actuelle qu'une formation très limitée dans ces domaines. Ce document doit leur permettre de prendre connaissance des méthodes préconisées actuellement pour le traitement des résultats de mesure et doit donner « des exemples d'utilisation des notions probabilistes enseignées au lycée, en particulier en liant la notion d'erreur à celle de variable aléatoire, celle d'incertitude-type avec celle d'écart-type ». Les auteurs pointent le fait que « ce domaine du calcul d'incertitude devrait donner la possibilité de travaux communs développés par les enseignants de mathématiques et de sciences physiques. ». Cependant ce document n'est en aucun cas un document pédagogique, en particulier il ne donne aucune indication sur la façon dont on doit aborder ces questions avec les élèves, sur les enjeux précis en classe, sur les difficultés des élèves sur ces questions, et on peut penser que les enseignants risquent d'être démunis pour les aborder avec leurs élèves : Qu'en est-il réellement dans les classes ? Les enseignants sont-ils en mesure de travailler les compétences élaborées visées pour les élèves ? Nous abordons ces questions dans la partie qui suit.

ELEVES ET ENSEIGNANTS FACE A LA MESURE

Difficultés des élèves et étudiants sur la mesure en sciences

De nombreux travaux, en particulier ceux de Séré, se sont penchés en France dans les années 90 sur les conceptions et les raisonnements des élèves et des étudiants sur la mesure en physique. Ces recherches ont mis en évidence des difficultés liées au traitement des données et montré que les étudiants ont du mal à passer d'une vision déterministe de la science à la vision probabiliste, imposée par la dispersion des mesures, prescrite dans les instructions officielles (Séré, 1992). Les étudiants ont une notion de la mesure qui correspond à la recherche d'une « bonne » valeur en comparaison à une valeur de référence détenue par l'enseignant et, pour eux, les écarts correspondent à des erreurs de mesure, de manipulation (Séré *et al*., 1995). Le jugement effectué par l'étudiant à propos de la valeur se restreint donc à savoir s'il doit la garder ou l'éliminer (Séré *et al*., 1995).

Plus récemment le projet européen « Labwork in Science Education » portant sur les travaux pratiques dans l'enseignement des sciences en Europe a aussi questionné, entre autres, les difficultés des lycéens et des étudiants concernant la mesure. Cette recherche montre « a lack of explicit understanding of the bases of estimating values from data sets » et le fait que « many students (between 30% et 60%) appeared to think that with good enough apparatus and enough care it is possible to make a perfect measurement of a quantity ».

D'autres chercheurs (on citera par exemple Lubben & Millar, 1996, Allie *et al.*, 1998 ; Lubben *et al.*, 2001 ; Evangelinos *et al.*, 2002 ; Lehrer, 2003, Volkwyn *et al.*, 2004, 2008, Buffler *et al*., 2001, Buffler *et al*., 2008, Maisch *et al*., 2008, Maisch, 2010) ont cherché à caractériser les raisonnements liés à la mesure et aux incertitudes en physique. Lubben *et al*. (1996) puis Buffler *et al.* (2001) ont catégorisé les raisonnements mis en œuvre par des élèves et des étudiants lorsqu'ils recueillent des données (nombre de valeurs à recueillir…), puis lors du traitement de ces données. Ces catégorisations ont été reprises et affinées par Volkwyn *et al*. (2004) qui identifient chez les étudiants trois types de raisonnement :

- raisonnement « point » : pour l'étudiant, il existe une « vraie valeur » (donnée par la littérature ou détenue par le professeur), une mesure qui est différente de cette bonne valeur est fausse, signe d'une erreur au sens péjoratif du terme. On peut accéder à cette « vraie valeur » en réduisant à zéro les erreurs dues au système de mesurage. Une seule mesure est alors considérée comme suffisante et le résultat est donné sous forme d'une valeur unique.
- raisonnement « mixte » : l'étudiant a conscience que la valeur de référence n'est pas possible à atteindre car il existe toujours des erreurs de manipulation, cependant il pense que cette valeur existe et il cherche à obtenir une mesure de la grandeur la plus proche possible de cette valeur de référence ou « bonne valeur ».
- raisonnement « ensemble » : l'étudiant entrevoit que toutes les mesures sont entachées d'incertitudes et qu'un grand ensemble de données est nécessaire pour pouvoir réaliser une étude statistique donnant une bonne approximation du mesurande et un intervalle

de confiance. Le résultat de mesure s'exprime sous forme d'une valeur accompagnée d'un intervalle dans lequel se situe probablement cette valeur.

Cette catégorisation a été utilisée dans différentes recherches, par exemple Maisch et al. (2008) ont précisé les critères de catégorisation de Volkwyn *et al.* et montré que les raisonnements des étudiants français de première année universitaire dépendent du contexte (TD ou TP).

Ces différents auteurs ont ainsi montré que la majorité des étudiants ont des idées très éloignées du modèle scientifique actuel qui met en jeu une vision probabiliste de l'acte de mesurage. Ils ne disposent donc que de très peu des outils conceptuels permettant de raisonner sur la dispersion des résultats de mesure.

Pratiques des enseignants de physique

Dans plusieurs pays des chercheurs se sont intéressés à la prise en charge par les enseignants de physique de la notion d'incertitude et ont pointé leurs difficultés. Par exemple, chez les enseignants français de lycée, Séré *et al*. (1998) soulignent « une résistance certaine à aborder avec leurs élèves le problème des incertitudes » en partie par crainte que leurs étudiants deviennent sceptiques vis-à-vis de l'expérience, comme le souligne le bilan du projet européen « Labwork in Science Education » (Séré *et al.*, 2001). L'étude des questions de variabilité de la mesure et la prise en compte des incertitudes a de fait une place réduite dans les pratiques des enseignants, malgré leur importance dans les programmes, en particulier la confiance qu'on peut avoir dans une mesure est un sujet très largement absent ou jugé trop problématique pour être évoqué à ce niveau (Séré et al., 1998). Séré et al. (1998) pointent que « la situation des enseignants n'est pas confortable […] », ils « peuvent « dire » une attitude raisonnable, différenciée d'une situation à l'autre, et exprimer ce qu'il faudrait « faire », en se gardant cependant de le faire par manque de temps et aussi des concepts indispensables. ». Il y a donc un décalage important entre les prescriptions et les pratiques des enseignants, en partie lié à une maîtrise insuffisante des concepts en jeu (Munier et al., 2012).

Des propositions pour l'enseignement

Les différentes recherches citées mettent en avant les difficultés des élèves et étudiants concernant le traitement des données et la compréhension des mesures et font aussi un certain nombre de propositions pour l'enseignement (Journeaux *et al.*, 1995, Séré, 2001, Buffler *et al.*, 2009, pour plus de précisions voir Munier et al. 2012). Parmi ces propositions on peut citer :

- Assigner des objectifs clairs aux activités de mesurage.
- Travailler sur des données de mesure vraiment réalisées par les élèves (N mesures de la même grandeur)
- Développer le fait que la qualité de la mesure à effectuer dépend de la question posée et donc de la décision à prendre
- Travailler sur les instruments et sur certaines de leurs qualités pour aider les élèves à envisager que tout instrument engendre des incertitudes.

- Étudier le principe de certains instruments pour en comprendre les limites, comparer des instruments différents.
- Comparer des protocoles de mesure différents
- Faire effectuer des traitements statistiques des valeurs pour « essayer de faire sentir intuitivement que toutes les valeurs, si elles ont été obtenues de la même façon, sont porteuses d'information » (Journeaux *et al*., 1995).
- Utiliser l'outil informatique pour le traitement statistique des données.

De façon générale les différents chercheurs en didactique de la physique s'accordent sur l'intérêt d'utiliser les activités de mesurage lors des séances de TP pour introduire des savoirs d'ordre épistémologique (Buffler *et al*., 2009, Séré) : « le traitement des données et les conclusions qui en découlent, peuvent participer à des acquisitions autant conceptuelles qu'épistémologiques. » (Séré *et al*., 2001). Le travail sur la mesure est donc un enjeu important pour la physique puisqu'il peut aider les élèves à mieux comprendre la nature de l'activité scientifique. Evangelinos et al. (2002) et Buffler et al. (2008) insistent sur la nécessité de situer l'apprentissage de la mesure dans un cadre probabiliste et non dans un cadre fréquentiste comme c'est souvent le cas. Outre son importance pour la physique, le traitement probabiliste des résultats de mesure a un intérêt pour les mathématiques. Cette approche peut permettre à la fois de réinvestir les notions mathématiques abordées dans le partie probabilités et statistique et de leur donner du sens : par exemple comparer deux séries statistiques correspondant à des séries de N mesures de la même grandeur avec deux instruments de mesure ou deux méthodes de mesure différentes permet de donner du sens aux indicateurs de position et de dispersion d'une distribution. Discuter du compromis à faire entre précision et certitude lorsqu'on choisit un taux de confiance en fonction de la décision à prendre permet de donner du sens à la notion d'intervalle de confiance.

Concernant l'utilisation de l'outil informatique, Séré *et al*. (2001) pointent que si l'ordinateur et les capteurs sont des moyens puissants de gagner du temps lors des mesurages « il faut alors leur donner tout leur sens et ne pas laisser les étudiants se retrancher derrière des routines sans signification ». L'interprétation que peuvent faire les élèves des données informatiques dépend en effet de leur maîtrise des outils mathématiques qui permettent de leur donner du sens, d'où l'intérêt de développer les articulations entre physique et mathématiques sur ces questions.

CONCLUSION

Il y a du point de vue de la physique un enjeu fort à travailler avec les élèves sur la mesure et les incertitudes de mesure, d'autant plus que nous sommes assaillis en permanence, via les différents médias, de multiples données numériques. Un des objectifs de l'enseignement est de doter les élèves d'outils cognitifs leur permettant d'analyser de façon critique toutes ces données et cela passe entre autres par la prise en compte de la notion d'incertitude et du taux de confiance associé et par une réflexion épistémologique sur le statut de la mesure. Si on veut que les enseignants puissent introduire des éléments d'épistémologie et de métrologie dans leurs enseignements comme cela est préconisé par les différents auteurs cités dans les parties précédentes, ils doivent maîtriser de nombreuses compétences. Les compétences disciplinaires bien évidemment, ce qui est loin d'être évident comme nous l'avons vu précédemment, mais il faut également que les enseignants aient cette culture épistémologique et qu'ils disposent d'éléments didactiques concernant la transmission de ces savoirs.

De la même manière, concernant les mathématiques, les enseignants pourraient se saisir, au lycée comme à l'université, de situations de mesurages en physique pour introduire des concepts mathématiques ou leur donner du sens, mais pour cela il est nécessaire a minima qu'ils sachent comment on traite les résultats de mesure en physique à l'heure actuelle, ce qui est un des objectifs du document « mesure et incertitude ». Cependant il est bien évident que la mise en ligne d'un tel document a des limites, et qu'une diffusion sur le site *eduscol* ne peut pas avoir le même impact qu'une réelle formation initiale et continue. En particulier un certain nombre des enseignants ayant assisté à l'atelier considéraient que ce document ne concernait que les enseignants de physique et ont été très surpris du niveau élevé des connaissances mathématiques que les élèves devaient mobiliser pour le traitement des résultats de mesure.

Il nous semble donc nécessaire de développer la formation des enseignants de mathématiques et de physique sur les questions liées à la mesure pour qu'ils soient en mesure de mener à bien le traitement probabiliste des résultats de mesure préconisé par les instructions officielles et d'avoir du recul sur les enjeux de ces instructions qui sont, nous l'avons vu, très ambitieuses sur ces questions. Cela passe par une formation épistémologique et didactique des enseignants des deux disciplines qui doivent pouvoir identifier les enjeux d'une réflexion sur la mesure avec les élèves, notamment pour pouvoir faire évoluer leurs conceptions (d'un raisonnement « point » vers un raisonnement « ensemble » par exemple). Or les recherches sur les questions didactiques que posent la mesure et les incertitudes de mesure sont peu nombreuses et fournissent encore peu d'indications sur les moyens à mettre en œuvre en classe. On pourrait en particulier s'interroger sur les objectifs visés aux différents niveaux ou tout au moins penser de façon plus précise et étayée une progression sur ces questions qui soit plus explicite de l'école à l'université (Munier et al., 2013). Une clarification du rôle des disciplines dans l'enseignement de la mesure serait aussi à mener. Il nous semble qu'il y a là un champ ouvert pour les recherches en didactiques des mathématiques et de la physique.

RÉFÉRENCES

Allie, S., Buffler, A., Kaunda, L., Campbell, B. & Lubben, F. (1998). First-year physics students' perceptions of the quality of experimental measurements. *International Journal of Science Education*. 20(4), 447-459.

Buffler, A., Allie, S., Lubben, F. (2001). The development of first year physics students' ideas about measurement in terms of point and set paradigms. *International Journal of Science Education*. 23(11), 1137-1156.

Buffler, A., Allie, S., Lubben, F. (2008). Teaching measurement and uncertainly the GUM way. *The Physics Teacher*, 46, 539-543.

Buffler, A., Lubben, F., & Ibrahim, B. (2009). The relationship between student's viewsof the nature of science and their views of the nature of scientific measurement. *International Journal of Science Education*. 31(9), 1137-1156.

Evangelinos, D., Psillos, D. & Valassiades, O. (2002). An Investigation of Teaching and Learning about Measurement Data and their Treatment in the Introductory Physics Laboratory., In D. Psillos and H. Niederer (Eds.), *Teaching and Learning in the Science Laboratory* (pp. 179-190). Dordrecht, Kluwer Academic.

Journeaux, R., Séré, M.G. & Winther, J. (1995). La mesure en terminale scientifique. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 779(1), 1925-1945.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kipatrick, W.G. Martin, & D.E. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 197–192). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Lubben, F. & Millar, R (1996). Children's ideas about the reliability of experimental data. *International Journal of Science Education*, 18(8), 955-968.

Lubben, F., Campbell, B., Buffler, A. & Allie, S. (2001). Point and Set Reasoning in Practical Science Measurement by Entering University Freshmen. *Science Education*, 85(4), 311-327.

Maisch, C., Ney, M. & Balacheff, N. (2008). Quelle est l'influence du contexte sur les raisonnements d'étudiants sur la mesure en physique ? *Aster*, 47, 43-70.

Maisch, C. (2010). *Etude des raisonnements d'étudiants sur la mesure en TP de physique de première année universitaire : influence du contexte et effet de rétroaction*, Thèse de didactique, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Ministère de l'éducation nationale (France). (2009). Bulletin officiel spécial n° 30 du 23 juillet 2009 (programme de mathématiques de seconde).

Ministère de l'éducation nationale (France). (2010a). Bulletin officiel spécial n° 4 du 29 avril 2010 (programme de physique-chimie de seconde).

Ministère de l'éducation nationale (France). (2010b). Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010 (programme de physique-chimie de première S).

Ministère de l'éducation nationale (France). (2010c). Bulletin officiel spécial n° du 2010 (programme de mathématiques de première S)

Ministère de l'éducation nationale (France). (2011). Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011 (programme de physique-chimie et de mathématiques de terminale S).

Munier, V. & Passelaigue, D. (2012). Réflexions sur l'articulation entre didactique et épistémologie dans le domaine des grandeurs et mesures dans l'enseignement primaire et secondaire. *Tréma*, 38.

Munier, V., Merle, H. et Bréhelin, D. (2013). Teaching Scientific Measurement and Uncertainty in Elementary School. À paraître dans *International journal of science education.*

Perdijon, J. (2012). *La mesure, histoire, sciences et technique*. Paris : Vuibert.

Séré, M.G. (1992). Le déterminisme et le hasard dans la tête des élèves ou de l'utilité d'un traitement statistique des séries de mesures. *Bulletin d'Union des Physiciens*, 740, 87-96.

Séré, M.-G., & Journeaux, R. (1995). Le traitement statistique des mesures en travaux pratiques de physique de DEUG : Une innovation à Orsay. *Didaskalia*, 6, 165–177.

Séré, M.G., Journeaux, R. & Winther, J. (1998). Enquête sur la pratique des enseignants de lycée dans le domaine des incertitudes. *Bulletin d'Union des Physiciens*, 801, 247-254.

Séré, M.-G., Winther J., Le Maréchal J.F. & Tiberghien A. (2001). Le projet européen "Labwork in Science Education" [Les Travaux pratiques dans l'enseignement des sciences en Europe] Bilan et perspectives. *Bulletin de l'Union des Physiciens*. 839, 1727-1740.

Séré, M.G. (2007). La mesure dans Le Bup 898 (1).

Séré, M.G. (2008). La mesure dans l'enseignement des sciences physiques. Evolution au cours du temps. *Aster*, 47, 25-42.

Volkwyn, T.S., Allie, S., Buffler, A., Lubben, A. & Campbell, B. (2004). First year physics students' understanding of the measurement in the context of laboratory practicals. In A. Buffler & R.C. Laugksch (Ed). *Proceedings of the 12th Annual Conference of the South African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education*, p. 1011-1017.

Volkwyn, T.S., Allie, S., Buffler, A. & Lubben, A. (2008). Impact of a conventional introductory laboratory course on the understanding of measurement. *Physical Review Special Topics Physics Education Research*, 4 (1), 10.

ATELIER B3 : LES REELS A LA TRANSITION SECONDAIRE - SUPERIEUR DU DISCRET AU CONTINU - QUELLE ELABORATION ?

Viviane Durand-Guerrier, C2IU, IREM de Montpellier, I3M[1] UMR 5149

Martine Vergnac, IREM de Montpellier, Lycée Jean Lurçat, Perpignan

Depuis 2009, le chapitre sur les ensembles de nombres a disparu des programmes français de lycée, ainsi que le théorème sur les suites adjacentes en terminale. Nous montrerons sur une étude de cas auprès d'enseignants et d'élèves que ceci induit de fait une quasi disparition des rationnels au lycée. En nous appuyant sur des éléments d'une étude épistémologique et didactique, nous nous interrogerons sur les effets possibles de cette disparition pour une conceptualisation des nombres réels adaptée à l'apprentissage de l'analyse, en particulier à la compréhension du théorème des valeurs intermédiaires. En appui sur des extraits d'entretiens avec des enseignants de lycée et sur quelques réponses de leurs élèves à un questionnaire posé en seconde, ainsi qu'à un questionnaire posé en terminale et en Licence, nous identifions des opportunités pour préparer la transition et proposons quelques pistes de travail avec les élèves.

INTRODUCTION

De par les relations étroites entretenues entre la construction des nombres réels et les fondements de l'analyse, on peut faire l'hypothèse qu'une appropriation adéquate du concept de nombre réel est nécessaire pour une bonne compréhension de l'analyse enseignée dans les cursus universitaires mathématiques. Nous montrons dans ce qui suit que la fréquentation de ces nombres tout au long du cursus secondaire ne suffit pas à elle seule à permettre aux élèves une telle appropriation. En particulier, la distinction essentielle entre la propriété de densité, satisfaite par Q, D et R et la propriété de continuité non satisfaite par Q et D et qui caractérise R, n'est pas identifiée. Les entretiens auprès d'enseignants mettent en évidence le fait que la disparition depuis 2009 du chapitre sur les ensembles de nombres ainsi que du théorème sur les suites adjacentes en classe terminale des programmes français de lycée tend à faire disparaître un travail effectif sur ces questions, et ce bien que l'on puisse identifier des opportunités pour le faire. Les résultats des questionnaires proposés aux élèves de lycée et à quelques étudiants de licence montrent que la plupart d'entre eux ne développent pas des conceptions adéquates pour une poursuite d'étude dans le domaine de l'analyse.

DES ENTIERS AUX REELS AU COURS DE LA SCOLARITE EN FRANCE

L'élaboration du concept de nombre se fait tout au long de la scolarité depuis l'école maternelle jusqu'à la fin du lycée. A l'école maternelle (enfants de 3 à 6 ans) et au début de l'école élémentaire (enfants de 6 à 11 ans), la construction du nombre entier se fait en appui sur les collections discrètes et sur la suite ordonnée des nombres : les élèves rencontrent en acte la notion de collections équipotentes, et commencent à apprendre la suite ordonnée des nombres et poursuivent par la mise en correspondance biunivoque entre une collection à

[1] Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier

dénombrer et une section commençante de la suite ordonnée des nombres, ce qui conduit au schème du dénombrement par identification du dernier mot nombre prononcé avec le cardinal de la collection (Vergnaud, 1990).

Au cours de l'école élémentaire, la nécessité d'introduire les fractions et les décimaux émerge de la mesure des grandeurs dites *continues*, ce qui n'exclut pas un traitement arithmétique de ces nouveaux nombres. Les fractions apparaissent comme des opérateurs ; le lien entre décimaux et fractions décimales est établi ; les opérations sur les entiers se prolongent aux décimaux. Les décimaux sont utilisés dans le mesurage ; dans ce contexte de mesurage, les élèves rencontrent essentiellement des décimaux ayant un format donné (deux chiffres après la virgule, ou trois chiffres après la virgule) ; ils ont rarement l'occasion de travailler sur la propriété de densité de l'ensemble des décimaux ; il est rare également que soit posée en classe la question de l'idécimalité, bien que ceci puisse être abordé dès le début du collège (Bronner, 1997). La droite numérique joue un rôle important au cours de l'apprentissage à l'école élémentaire.

Au collège (élèves de 11 à 15 ans) et au lycée (élèves de 15 à 18 ans), les élèves sont sensibilisés à la nécessité de considérer des irrationnels, en particulier pour les racines carrées d'entiers qui ne sont pas des carrés parfaits, et pour quelques nombres emblématiques comme le nombre π, ou la base du logarithme népérien *e* et apprennent à les manipuler via leurs représentations. Ils rencontrent des valeurs approchées, essentiellement sous forme décimale, en particulier via les calculatrices.

Au collège, ils sont éventuellement sensibilisés à la notion d'écriture décimale illimitée des nombres réels; et au fait que les rationnels sont caractérisés par une écriture périodique, et les décimaux par une écriture limitée. Dans les anciens programmes, ceci était repris en seconde avec le travail sur les ensembles de nombres. Ce type de travail est moins présent depuis que les programmes de lycée ont été modifiés, comme le montrent les deux extraits de programmes ci-dessous.

Contenus	Capacités attendues	Extraits des commentaires
Nature et écriture des nombres. Notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathcal{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Représentation des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. Décomposer un entier en produit de nombres premiers.	On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. On travaillera sur les ordres de grandeur. On donnera un ou deux exemples de limites d'utilisation d'une calculatrice. On fera quelques manipulations de nombres en écriture scientifique. On se limitera à des exemples (du type 56 x 67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit.
Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre.	Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a, a^2, et a^3 lorsque a est positif. Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.	La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.

Figure 1 : extrait du programme de Seconde générale 2002

Notations mathématiques
Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.
Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités A

Figure 2 : Extrait du programme de Seconde générale 2009-2010

DU CONTINU INTUITIF DE LA DROITE A SA FORMALISATION THEORIQUE

Pour éclairer les enjeux de conceptualisation du nombre réel, nous proposons un bref détour épistémologique sur les relations entre aspects empiriques et théoriques de l'élaboration du concept de continu[1].

Comme le souligne Longo (1999) l'expérience la plus commune du continu est celle du tracé d'une ligne sur une feuille de papier, sans lever le crayon. Les points *disparaissent* dans la trace obtenue ; ils réapparaissent, comme points isolés, lorsque deux lignes se coupent. Cette intuition est mobilisée par Cauchy dans sa première preuve du théorème des valeurs intermédiaires.[2]

Bolzano (1817), dans son mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires souhaite donner une preuve du théorème ne faisant pas appel à l'intuition géométrique. Il considère qu'aucune des preuves existantes à son époque (dont celles de Cauchy) n'est satisfaisante. Pour cela, il donne une définition précise de la notion de fonction continue, mais dans sa preuve, il utilise le théorème de la borne supérieure, comme une évidence. De fait, le théorème des valeurs intermédiaires met en jeu deux notions de continu : la continuité de l'ensemble des réels appelé aussi parfois complétude et la notion de fonction continue. Or, en 1817, aucune construction des nombres réels n'est disponible. Il faudra en effet attendre Dedekind et Cantor, cinquante ans plus tard, pour une définition précise de l'ensemble des nombres réels. Dedekind (1872) propose une formalisation du continu intuitif de la droite.

> « Mais il est un fait de la plus haute importance : sur la droite *L* il existe une infinité de points qui ne correspondent à aucun point rationnel. (…) nous pouvons affirmer : la droite *L* est infiniment plus riche en individus ponctuels que le domaine R[3] des nombres rationnels en individus numériques. (…) il devient alors absolument nécessaire d'affiner substantiellement l'instrument R, construit par la création des nombres rationnels, en créant de nouveaux nombres de telle sorte que le domaine des nombres acquière la même complétude, ou disons le tout de suite la même *continuité* que la ligne droite. » (op. cit. p.69)

---

1 Ceci est développé plus longuement dans Durand-Guerrier 2012

2 « Si une fonction f de la variable x est continue sur un intervalle $[a, b]$, alors pour toute valeur u comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$. »

3 Notons ici l'utilisation de la lettre *R* pour désigner l'ensemble des nombres rationnels.

Dedekind note qu'un point sur une droite opère une partition de cette droite en deux parties telles que tous les points de l'une soient à gauche de tous les points de l'autre[1], et que la réciproque est vraie, ce qui constitue pour lui en l'essence de la continuité. Par analogie avec la droite, Dedekind définit des coupures dans Q[2] : deux classes A_1 et A_2 telles que tout nombre a_1 de la première classe est plus petit que tout nombre a_2 de la seconde classe. Il note que tout nombre rationnel opère une coupure de Q, et prouve qu'il existe une infinité de coupures de Q qui ne sont pas opérées par des nombres rationnels[3].

Le nouveau système R ainsi construit est un ensemble totalement ordonné unidimensionnel, qui possède la continuité. L'ensemble ainsi construit est en outre complet au sens où la réitération du procédé des coupures ne produit pas de nouveaux nombres. Il possède la propriété de la borne supérieure. La construction de Dedekind est un exemple de l'élaboration d'un concept théorique qui s'appuie sur une intuition empirique. Cette construction s'inscrit dans la tradition euclidienne qui compare les grandeurs, commensurables ou non, à l'aide des équimultiples (en termes modernes de rationnels); son innovation consiste en la création de nouveaux nombres, qui permettent en une seule fois de combler toutes les lacunes de l'ensemble des rationnels, considéré comme déjà créé, ceci en évitant le cercle vicieux qui consisterait à opérer sur des nombres non encore créés. La complétude ainsi obtenue est une propriété remarquable de l'ensemble des nombres réels, qui ne peut plus être étendu par un procédé de ce type.

Il est possible de proposer à des élèves de fin de lycée ou de début d'université des activités leur permettant de se questionner sur la notion de continu telle qu'elle a été formalisée par Dedekind (Pontille & al. 1996). Nous proposons en fin d'article d'autres pistes en appui sur les programmes actuels.

CONCEPTIONS D'ELEVES DE SECONDE A PROPOS DES NOMBRES REELS

Nous nous sommes attachées au travers d'une étude de cas menée dans l'académie de Montpellier en 2012/2013 à tenter de cerner quelles sont les connaissances des élèves de lycée à propos des nombres réels. Nous avons mené cette étude dans le cadre d'un mémoire de master[4] en cherchant tout d'abord à repérer ce qu'il en est à l'entrée en seconde, puis à observer les évolutions éventuelles de la seconde à la terminale scientifique, et enfin à déterminer si certains points du programme actuel pouvaient permettre d'aborder des activités facilitant la transition du lycée à l'université en ce qui concerne les nombres réels et les débuts de l'analyse. Notre hypothèse, que nous avons testée dans cette étude, était que les connaissances des élèves sur les nombres réels n'étaient pas stabilisées à l'entrée à l'université

---

[1] En fait, deux coupures peuvent être définies, selon que la partie dans laquelle on met le point.

[2] A partir de maintenant, nous notons Q l'ensemble des nombres rationnels selon la notation habituelle.

[3] Il prouve que, étant donné un entier n qui n'est pas un carré parfait, la coupure (A_1, A_2) avec $A_1 = \{x \in Q+/\ x^2 \leq n\}$ et $A_2 = \{x \in Q+/\ x^2 > n\}$ n'est pas opérée par un rationnel.

[4] Mémoire de recherche réalisé par M. Vergnac sous la direction de V. Durand-Guerrier dans le cadre du master 2 HPDS (Histoire, philosophie et didactique des Sciences) co-habilité entre les université Lyon 1 et Montpellier 2

et que certaines conceptions pouvaient faire obstacle à un apprentissage de l’analyse dans les premières années de l’université.

Nous avons dans un premier temps déterminé les conceptions d’un certain nombre d’élèves de seconde de l’académie de Montpellier en analysant tout d’abord sept entretiens menés auprès d’enseignants de lycée et ensuite les réponses à un questionnaire[1] posé dans les huit classes de seconde de ceux-ci. Parmi les points abordés dans les entretiens auprès des enseignants interrogés, nous avons cherché en particulier à savoir si la disparition dans les nouveaux programmes du chapitre sur les ensembles de nombres avait modifié leurs pratiques et dans l’affirmative de quelle façon se traduisait cette modification. Pour la quasi-totalité[2] des enseignants interrogés, cela avait pour conséquence un moindre travail sur les nombres et en particulier aucun travail sur l’irrationalité des nombres ; selon eux, le concept de nombre rationnel a disparu du lycée. Les nombres réels en seconde ne sont abordés que lorsque les enseignants introduisent les notations des intervalles, en général au début de l’introduction de la notion de fonction. Les intervalles ne sont que des outils permettant en particulier d’écrire les solutions des inéquations et les ensembles de définition des fonctions étudiées, mais ils ne sont pas objets d’étude. Pour tous les enseignants interrogés, à l’entrée en seconde les élèves ne distinguent que deux types de nombres : les entiers et les « autres ». L’usage de la calculatrice amène selon eux les élèves arrivant en lycée à identifier un nombre à son affichage à la calculatrice. L’analyse des questionnaires posés dans les classes de seconde montre que les réponses apportées par les élèves correspondent pour une grande part aux perceptions de leurs enseignants. Pour les élèves de seconde interrogés, la nature des nombres qu’ils rencontrent et/ou utilisent, est liée à l’écriture de ceux-ci. Sans donner de manière exhaustive toutes les données recueillies, nous pouvons relever deux résultats notables : pour plus de deux tiers des élèves interrogés, 5/3 n’est pas un nombre rationnel mais un nombre décimal et seulement la moitié des élèves interrogés, considèrent explicitement que est un nombre. Parmi eux, un tiers se le représente comme un décimal, et une moitié ne se le représente pas. Pour ces élèves, les nombres ont toujours une écriture décimale et il y a identification du nombre avec son écriture décimale. Une fraction est un nombre décimal car on peut l’écrire à l’aide d’un nombre « à virgule ». Les racines carrées ne sont pas des nombres pour la moitié des élèves interrogées : ce sont des fonctions ou des opérateurs. Elles ne deviennent des nombres pour une partie de ces élèves que lorsqu’ils en proposent une écriture décimale à l’aide de la calculatrice. Il est remarquable que pour certains de ces élèves, soit considéré comme un nombre dans certains cas et pas dans d’autres. Ceci nous amène à conclure que pour la quasi-totalité des élèves de seconde interrogés, la nature du nombre est liée à son écriture. La question : « *Comment peux-tu définir un nombre réel ?* », est de manière évidente une question très difficile pour un élève de seconde, et à laquelle il ne peut apporter aucune réponse qui soit une définition formelle, mais nous attendions que conformément aux pratiques de classe décrites par les enseignants interviewés, un certain nombre d’entre eux identifient l’ensemble des nombres réels à une droite représentant l’axe réel. Or cette réponse n’a été proposée par aucun des 252 élèves interrogés ; dans un certain nombre de cas,

1 Donné en annexe1

2 6 enseignants sur 7, le septième étant un enseignant dont c’est la première année d’enseignement

l'ensemble des nombres réels a été défini comme étant l'intervalle]–□ ; +□[mais cela ne signifie en aucune façon que cet intervalle puisse être identifié par ces élèves à l'axe réel. Aucune de ces réponses n'était accompagnée d'une figure de droite ; l'intervalle]-∞ ; +∞[est un symbole qui n'est associé à aucune représentation comme dans l'exemple qui suit :

Non, un nombre réel c'est l'ensemble de définition : R
[−∞ ; +∞]

Bien que l'absence de réponses à la question sur les nombres réels soit qualitativement importante et que les réponses proposées soient très variées, nous avons proposé de classer celles-ci en trois catégories qui nous semblent représentatives des conceptions de ces élèves de seconde à propos des nombres réels :

- Une conception *ensemble de tous les nombres* : elle correspond à une habitude du travail, une approche pratique des nombres.
- Une conception « *réaliste* » ***:*** l'écriture du nombre est liée à sa dénomination, elle est déconnectée du concept du nombre, comme dans les deux réponses ci-dessous :

ils ne sont pas virtuels

C'est un nombre que l'on peut dire et écrire

- Toutes les conceptions qui identifient l'ensemble des nombres réels à un de ses *sous-ensembles* ou à une partition erronée de l'ensemble *R.*

QUELLES EVOLUTIONS DE LA SECONDE A LA TERMINALE SCIENTIFIQUE ET EN LICENCE ?

Afin d'observer s'il y a une évolution des conceptions à propos du nombre réel de la seconde à la terminale S, nous avons soumis à deux classes de terminale S un questionnaire[1], qui a également été proposé à quelques étudiants de Licence 1, 2 et 3. Les deux classes de terminale S ont été choisies dans deux lycées différents de Perpignan, qui étaient toutes les deux considérées comme des classes d'assez bon niveau : l'une d'entre elles avait un effectif de 24 élèves et était composée aux deux tiers d'élèves ayant choisi la spécialité mathématiques et un tiers la spécialité physique-chimie ; dans la deuxième classe qui comportait 32 élèves, étaient regroupées des élèves des trois spécialités : mathématiques, physique-chimie et sciences de la vie et de la terre. Même si l'échantillon observé est moindre que pour les élèves de seconde, il permet de dégager un paysage des conceptions sur les nombres à l'entrée de l'université. Nous avons proposé une classification plus fine qu'en seconde afin de comparer les réponses des élèves de terminale S et des étudiants de licence[2] : nous avons identifié dix conceptions indiquées dans le tableau récapitulatif ci-dessous :

Catégorie	Pourcentage TS	Pourcentages L

[1] Donné en annexe 2

[2] Le questionnaire a été proposé à un petit nombre d'étudiant en avril 2013 (14 en L1 ; 11 en L2 ; 13 en L3) ; les résultats ne sont donc pas significatifs ; ils sont donnés à titre indicatif.

1.	Conception « Ensemble de tous les nombres »	13%	12,5%
2.	Conception « Vision géométrique – axe réel »	7%	
3.	Conception « Intervalle]-∞ ; +∞[»	11%	8%
4.	Conception « Complexes » non « imaginaires »	14,5%	6%
5.	Conception « Réaliste »	7%	0%
6.	Conception « Ecriture décimale illimitée »	0%	14,5%
7.	Conception « Partition Q ou I »	4%	14,5%
8.	Conception « Partition incorrecte »	14,5%	14,5%
9.	Reformulation	13%	10,5%
10.	Autres	13%	20%
11.	Non réponses	16%	4%

Tableau 1 : classification des réponses et pourcentages obtenus en TS et en Licence

Dans la classification opérée en seconde, les conceptions 1 et 3 étaient regroupées. Nous avons pu observer que la conception *« intervalle »* reste solidement ancrée probablement parce qu'elle est la seule à être travaillée explicitement de la seconde à la terminale, en particulier dans la résolution d'inéquations. On peut noter des évolutions significatives par rapport à la seconde. Il y a beaucoup moins de non réponses : cela semble signifier que les élèves de terminale S expriment plus aisément leurs conceptions d'un nombre réel, en particulier les élèves ayant choisi la spécialité mathématique. Les conceptions « *Ensemble de tous les nombres* » et « *réaliste* » prévalent moins qu'en seconde même si on peut encore observer des réponses telles que : « *Un nombre pur* » ou « *Un nombre qui existe, que l'on peut toucher* ». De nouvelles conceptions émergent : *« Complexes non imaginaires»* et *« Vision géométrique »*. On peut penser que la manipulation des graphiques en analyse favorise la construction de cette conception. En outre il nous paraît important de signaler que les quelques élèves ayant exprimé des conceptions correctes des nombres réels sont tous des élèves ayant choisi la spécialité mathématiques, qui ont donc travaillé davantage que les autres sur les nombres dans la partie arithmétique du programme. D'autre part, il faut noter que pratiquement aucun de ces élèves ne va intégrer l'université mais plutôt les classes préparatoires. Quand on compare les réponses des élèves de lycée à celles des étudiants de licence, on voit apparaître une nouvelle conception liée aux cours dispensés à l'université qui est celle liée à l'écriture décimale illimitée. Mais nous pouvons noter que beaucoup de conceptions observées au lycée restent présentes et pour les conceptions « *Ensemble de tous les nombres* » et « *Partition incorrecte* » quasiment dans les mêmes proportions. Même en ayant travaillé les limites et la continuité de manière formelle, des conceptions erronées sur les nombres réels subsistent jusqu'en troisième année de licence.

DU LYCEE A L'UNIVERSITE : OBSTACLES ET PERSPECTIVES.

Dans l'étude que nous avons menée, nous avons repéré quelques obstacles aux apprentissages de l'analyse à l'université :

- Beaucoup d'élèves ne distinguent pas le nombre de son écriture. Le nombre réel n'est qu'un outil dans le calcul algébrique ou un symbole vide de sens. Il n'est pas un objet mathématique pour la plupart des élèves de lycée.
- Même parmi ceux qui les écrivent formellement, peu d'élèves comprennent les inclusions « successives » des sous-ensembles de ***R***. Ceci peut être mis en lien avec les difficultés des étudiants à propos des implications et avec l'usage des quantificateurs.
- La notion de densité leur est complètement étrangère : pour la plupart des élèves de lycée, l'ensemble des nombres réels est un ensemble discret. Ils accèdent à la notion de continuité pour certains d'entre eux en terminale S, mais on peut émettre l'hypothèse que pour eux, il n'y a rien entre le discret et le continu.

D'autre part, à la fois l'analyse des programmes et celle des interviews des enseignants interrogés nous amènent à conclure qu'il y a une quasi-absence de travail sur les nombres réels au lycée. Nous avons vu que ceci pose problème à l'entrée à l'université et nous nous sommes interrogées sur les possibilités éventuelles d'y remédier, tout en restant dans le cadre des programmes du lycée. Quels endroits dans les programmes de terminale scientifique pourraient permette de faire évoluer les conceptions des nombres réels ? Les constructions historiques par Dedekind et Cantor de l'ensemble ***R*** montrent que les concepts de borne supérieure, de limite et de continuité dans ***R*** sont indissociablement liés à la structure de corps ordonné complet de ***R***. Ces concepts mettent en jeu la construction de ***R*** « sans sauts ni trous ». Nous avons, en considérant ces éléments, repéré trois thèmes qui nous semblent ouvrir des perspectives pour travailler sur les nombres réels au lycée :

- les suites : « *Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre. Approximations de réels (π, e, nombre d'or,…)* »
- la continuité : « *Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires.* »
- les lois à densité sur un intervalle : « *On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans **R**, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de **R**.* ».

Nous avons choisi d'observer deux séances d'introduction au théorème des valeurs intermédiaires dans une des deux classes de terminale S à laquelle nous avions soumis le questionnaire. L'objectif était d'une part de faire émerger les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte énoncés par les élèves dans une situation d'apprentissage faisant intervenir l'ensemble des nombres réels, et d'autre part d'utiliser l'algorithmique pour une approche du concept de densité. La première séance était articulée autour du problème suivant : *a et b sont deux nombres ; soit une fonction f telle que f(a)<0 et f(b)>0.Peut on toujours trouver un nombre c entre a et b tel que f(c)=0 ?* Aucun graphique n'était fourni aux élèves et il s'agissait pour cette classe d'une première rencontre avec la notion de continuité et le théorème des valeurs intermédiaires. Nous avons repéré à la fois dans les travaux des groupes et dans la mise en commun les conceptions suivantes :

- Une fonction est toujours définie sur ***R*** ou sur un intervalle de ***R*** bien que cela ne soit pas donné dans l'énoncé : la nature de l'ensemble de définition de *f* n'est pas mise en question.
- Une fonction n'est définie que si elle peut être exprimée par une formule explicite.
- Le mot ***continu*** émerge spontanément des débats dans les groupes.

Il nous semble que l'on peut conclure que pour ces élèves comme pour Bolzano, ***R*** est bien pour les élèves observés dans cette classe l'ensemble sur lequel la propriété de la valeur intermédiaire est vraie. Mais deux points posent problème :

- la continuité de ***R*** n'est pas questionnée.
- Pour la majorité des groupes observés, il y équivalence entre la continuité de la fonction et l'existence de solutions.

Il nous semble important que ces deux derniers points soient remis en question par exemple en travaillant avec des fonctions définies avec une variable qui est un rationnel. La deuxième activité observée répondait au problème :

Soit f la fonction définie sur R par f (x) = x^3*-7.*

1. Montrer en appliquant le théorème énoncé que l'équation f(x)=0 admet une solution unique c dans] 1 ; 2[. Quelle est la nature de la solution c obtenue

2. Proposer une méthode qui permette de déterminer un encadrement de c avec une amplitude « aussi petite que l'on veut » ?

Les conceptions et les pratiques produites par les élèves observées furent alors :

- L'expression « *nature du nombre* » n'est pas comprise par les élèves.
- Pour une grande majorité des élèves, ***c*** était un nombre décimal.
- Le procédé dichotomique n'est pas spontanément mobilisé. Il nécessite une intervention importante de l'enseignant aussi bien pour l'initier que dans sa réalisation
- L'habitude de manipuler les racines cubiques dans la classe de physique rend la deuxième question sans objet pour les élèves.
- La majorité des élèves associent l'ensemble ***R*** à l'axe des abscisses, mais l'identification à celui des ordonnées n'est pas immédiate.

CONCLUSION.

Les résultats de notre étude, bien que celle-ci soit limitée, montrent que les connaissances des élèves sur les nombres sont essentiellement opératoires et ne leur permettent pas d'accéder à la compréhension de ce qu'est un nombre réel. Néanmoins, des activités peuvent être proposées au lycée pour approcher le concept de nombre réel. En particulier, des activités sur les registres d'écriture d'un nombre pourraient aider à dissocier la nature du nombre de son écriture. L'accent dans les programmes est mis sur la résolution de problèmes : cela devrait inciter à introduire des fonctions définies avec des variables qui prennent leurs valeurs dans l'ensemble des entiers, l'ensemble des décimaux ou l'ensemble des rationnels (cf. par exemple Pontille & al., 1996) et ainsi travailler avec les ensembles de nombres en acte afin que ceux-ci ne soient pas seulement des symboles vides de sens. Une construction du concept de nombre réel peut être amorcée au lycée mais elle ne peut se faire que dans le long terme et ne peut faire l'économie de moments d'institutionnalisation. La connaissance opératoire ne suffit pas à elle seule pour asseoir le processus de conceptualisation. Dans l'enseignement secondaire français actuel, les activités qui favorisent cette construction sont complètement laissées à la charge des enseignants. Il est à craindre que, sans une incitation de l'institution, les contraintes horaires et les hétérogénéités des parcours ne dissuadent de nombreux enseignants de les proposer. Les observations empiriques mettent en évidence des difficultés récurrentes dans l'appropriation par les étudiants des concepts fondamentaux de l'analyse. Dans leurs travaux de recherche Bloch et Ghedamsi (2005) ont mis en évidence des raisons liées aux différences entre le travail en analyse dans le secondaire et dans le supérieur. Au moment de la transition lycée - post bac, on passe d'un travail de type algébrique en analyse, reposant sur une approche intuitive du continu (*les nombres réels sont tous les nombres qu'on connaît*) à un point de vue théorique (*axiomatique*) sans prise en compte explicite des changements conceptuels que cela représente. On peut faire l'hypothèse que les étudiants qui ne construisent pas de manière adéquate la signification des nombres réels en début de formation risquent de rencontrer des difficultés dans l'apprentissage des concepts de l'analyse, ceci étant étroitement relié aux difficultés déjà bien repérées en analyse à la transition Lycée - Université (Chellougui, 2003, Bloch & Ghedamsi, 2005). On peut également supposer que la fragilité des connaissances sur les liens entre aspects pratiques et aspects théoriques en analyse aura des effets sur l'application des outils de l'analyse à d'autres domaines.

REFERENCES

Bolzano (1817) Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation. (Traduction de J. Sebestik) In : *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. 1964, Tome 17 n°2*. pp. 136-164.

Bloch I., Ghedamsi I., 2005 Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie, *Petit x 69*, pp.7-30

Bronner A., (1997) *Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée*, thèse de doctorat de l'université Grenoble

Chellougui F., (2003) Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien. *Petit x, 61*, pp.11-34

Dedekind R. (1872) Continuité et nombres rationnels, dans *Richard Dedekind, La création des nombres, introduction, traduction et notes par H. Benis Sinaceur, Vrin, 2008.*

Durand-Guerrier V. (2012) Sur la question du nombre et du continu dans les apprentissages mathématiques, dans M. Ouelbani (ed.) *Des mathématiques à la philosophie. Regards croisés : didactique, Histoire, Philosophie,* Université de Tunis.

Pontille M.C. & al, 1996 Et pourtant, Ils trouvent, *Repères IREM n°24*, 10-34

Vergnaud G (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.2, 133-170.

Annexe 1

Ce questionnaire n’est pas une évaluation. Tu disposes de 15 minutes pour le compléter et tu ne peux pas utiliser ta calculatrice.

1) 5/3 est-il un nombre décimal ?
a. Oui □ b. Non □ c. Je ne sais pas.□

2) Peux tu donner un nombre décimal qui appartienne à l'intervalle]0,666 ; 0,667[?
a. Oui □ et c'est.................. b. Non □

3) Peux tu donner un nombre qui ne soit pas décimal et qui appartienne à l'intervalle]0,666 ; 0,667[?
a. Oui □ et c'est.................. b. Non □

4)Y a-t-il un plus grand nombre dans l'intervalle [0 ; 1[
a. Oui □ et c'est........ b. Non □ c. Je ne sais pas □

5) Combien peux tu écrire de nombres entre 0 et 1 ?
………

6) $\sqrt{7}$ est-il un nombre ?
a. Oui □ . Si oui , peux-tu l'écrire autrement ?...
b. Non □ . Si non , pourquoi ?.. ………….

7) Connais -tu plusieurs ensembles de nombres ? Si oui, lesquels ?
…………………………………………………………………………

8) Dans la liste qui suit , coche les écritures qui sont des nombres :
2π :□; $2{,}5+3^{\times 2-1}$:□ ; 1/3 :□ ; 0 :□ ; $-\sqrt{3}$:□ ; 0,9999<u>9</u>.... :□

9) Comment peux tu définir un nombre réel ?

Annexe 2

Lycée :…………………………

Indiquez votre spécialité :…………………….

TEST

Ce questionnaire n'est pas une évaluation

Merci de bien vouloir répondre sur cette feuille aux questions suivantes
(utiliser le verso si besoin pour répondre, y compris comme brouillon) :

<u>Si vous utilisez une calculatrice merci de cocher cette case</u>

Question 1 :

1. $\sqrt{2}$ est :

   un nombre décimal
   un nombre rationnel
   un nombre irrationnel
   autre (préciser) :

2. e est :

   un nombre décimal
   un nombre rationnel
   un nombre irrationnel
   autre (préciser) :

3. $\sqrt{13,21}$ est :

   un nombre décimal
   un nombre rationnel
   un nombre irrationnel
   autre (préciser) :

   <u>Justifier</u> votre réponse pour $\sqrt{13,21}$:

Question 4 : Qu'est-ce qu'un nombre :

1. décimal :

2. rationnel :

3. irrationnel :

4. réel :

ATELIER B4 : UN ENSEIGNEMENT D'INFORMATIQUE AU LYCEE : POUR QUELS APPORTS ?

Emmanuel Beffara (C2I Lycée, IREM de Marseille)

Philippe Marquet (Université Lille 1, vice-président de la Société informatique de France)

Denis Pinsard, Lycée Jean Macé de Rennes

En quoi le retour de l'enseignement de l'informatique au lycée apparait-il essentiel et indispensable ? Quels liens entre les notions abordées en ISN et les différentes orientations Post-Bac ? Quelles répercussions sur l'enseignement des mathématiques avant et après le bac ?

ISN : UN ENSEIGNEMENT D'INFORMATIQUE AU LYCEE

La spécialité Informatique et Sciences du Numérique (ISN) a été introduite en classe de terminale S à la rentrée 2012, ce qui permet de tirer quelques enseignements et d'apporter des éléments de réflexion.

Pourquoi introduire la science informatique dans le secondaire ?

Plusieurs éléments plaident pour la nécessité d'un enseignement d'informatique en lycée :

- les besoins du monde économique et de l'industrie numérique en spécialistes ;
- les besoins dans la formation des scientifiques ;
- une culture informatique, au delà des usages, nécessaire dans notre société d'aujourd'hui.

Cette réflexion est partagée, comme en témoignent les rapports récents de l'Académie des sciences, de la Royal Society ou autres. Se reporter infra en fin d'article pour les références.

Un programme pour ISN ambitieux

Cet enseignement de deux heures par semaine aborde les problèmes liés à l'information, l'algorithmique, les langages, les machines et les enjeux sociétaux. La pédagogie et les évaluations mises en place doivent être adaptées. L'accent est mis sur la réalisation et la soutenance de projets par les élèves. Le programme de l'ISN est très large et ambitieux, il apparait donc essentiel de tenir compte des objectifs principaux de cet enseignement, à savoir :

- former des citoyens responsables et acteurs dans une société numérique ;
- initier aux concepts de base de l'informatique ;
- préparer une orientation vers les études supérieures.

Des enseignants pour ISN

L'informatique ne possède pas de corps d'enseignants dans le secondaire, aussi cet enseignement est assuré par certains professeurs de mathématiques, sciences physique, sciences et techniques de l'industrie et SVT. Chaque académie a eu en charge la formation de ses enseignants en mettant en place un partenariat rectorat université.

Une première rentrée en septembre 2012

L'ISN a été proposé dans 30% des lycées avec une disparité importante en fonctions des académies et des départements (de 10% à plus de 60%). Environ 10 000 élèves ont suivi cette spécialité, avec un public majoritairement masculin (8 000 garçons). 3 000 élèves viennent de la filière SI dans laquelle cette spécialité est facultative. Les effectifs des groupes varient en moyenne autour de 12 élèves mais ont pu monter bien plus dans certains cas. Si on s'intéresse plus particulièrement à la série TS-SVT, on a pu constater que la spécialité, lorsqu'elle était proposée, a été choisie dans 11% des cas. Avec toute la prudence qui s'impose, il semble que ce choix se soit fait plutôt au détriment de la spécialité physique-chimie.

Perspectives

L'introduction d'ISN en classe de Terminale S doit être considérée comme une étape vers une généralisation de l'enseignement de l'informatique au lycée. Parmi les évolutions attendues, on peut citer :

- la rénovation des programmes d'informatique en CPGE informatique pour tous (MPSI-PCSI-PTSI-TSI-TPC-TPT) avec l'option informatique en MP dès la rentrée 2013,
- dans les sections L et ES de terminale, probable introduction de l'informatique et sciences du numérique à court terme avec une expérimentation dès la rentrée 2013.

Si la pérennité de l'ISN semble dorénavant assurée, les modalités de formation des enseignants doivent maintenant être questionnées. La Société Informatique de France (SIF) a analysé cette situation dans un rapport publié en juin 2013.

L'ISN DE FAÇON CONCRÈTE

Cette partie, au travers de ce qui a été fait dans l'académie d'Aix-Marseille, illustre ce qui a pu être mené dans le cadre de l'enseignement de l'ISN.

Des exemples de projets

1er projet : Reconnaissance de caractères

L'objectif du projet mené par les élèves consistait à reconnaître l'immatriculation d'une voiture sur une vidéo. Ce travail a débouché sur la réalisation d'un site web et d'un logiciel.

Plusieurs notions ont été mises en jeu :

- Algorithmique : définition d'une méthode de classification, établissement d'une base d'échantillons d'entraînement, notion d'efficacité

- Codage de l’information : représentation et traitement des images, extraction de l’information pertinente, représentation de la base de connaissances
- Programmation (Python) : entrées et sorties, manipulation d’une base de données, utilisation de bibliothèques

2nd projet : un jeu éducatif

L'objectif du projet mené par les élèves consistait à réaliser un petit jeu éducatif avec des questions et des épreuves d'adresse. Ce travail a débouché sur la réalisation d'un rapport.

Notions mises en jeu :

- Notions mathématiques : utilisation de l’aléatoire, avec expérimentation, un peu de géométrie (détection des collisions)
- Algorithmique : comportement du jeu
- Codage de l’information : manipulation d’images, formalisation d’une base de questions
- Programmation : programmation événementielle, interfaces graphiques

D'autres projets ont été menés comme : aide au parking automatique, pilotage d’un robot en wifi avec cryptage des données, drone piloté en aveugle (groupe où un élève fait du modélisme), site web qui présente des photos, couleur du jour tempo chez EDF, étude de CSS et influence sur les diﬀérents supports, filtrage d’images, stéganographie, correcteur orthographique...

Effets relevés dans la pédagogie de projet

Les expériences varient d’une classe à l’autre, mais de façon générale on peut noter :

- Peu de cours magistral

Les contraintes de temps l’imposent et l’attention des élèves est portée sur le projet.

- Démarche d’apprentissage guidée par le besoin

Un problème en cours de projet déclenche une séquence de cours sur un point général, appuyée sur un exemple fourni par les élèves.

- Tout projet fait intervenir le cœur des notions abordées par ISN

La réalisation des projets aboutit à une pratique de la programmation, représentation et traitement de l’information, algorithmique

- Investissement très fort de la part des élèves

Les élèves s'approprient leur projet, et l'idée de réaliser un objet concret les poussent très loin dans leur implication.

Interaction avec les autres disciplines

- Développement de la démarche d’expérimentation

En mathématiques, beaucoup d’élèves préfèrent ne rien faire que d’écrire quelque chose d’éventuellement incorrect. En informatique, ce n’est pas envisageable.

- Les maths apportent la précision nécessaire en programmation et les premiers éléments d’algorithmique
- L’utilisation de notions mathématiques dans un cadre appliqué

LE BILAN D'UNE PREMIERE ANNEE D’ISN AU LYCEE JEAN MACE DE RENNES

Le texte ci-dessous retrace l'exposé que Denis Pinsard a tenu lors de l'atelier. Ces propos n'engagent que son auteur.

Le bilan de cette première année est très positif dans le sens où les élèves ont le plus souvent eu du plaisir à travailler ensemble lors de ces deux heures hebdomadaires.

De nombreux facteurs ont été favorables. L’une de mes interrogations : parmi ces facteurs favorables, quels sont ceux qui sont transposables dans un cours de mathématiques ?

Un contexte très favorable

Un groupe de 13 élèves. Deux heures par semaine (le mercredi après-midi). Des profils variés qui contribuent à créer une très bonne dynamique de classe. Moins de la moitié envisagent des études orientées vers l’informatique.

Une première année qui peut être vue comme expérimentale. Une évaluation sous la forme d’une soutenance de projets. Un programme suffisamment conséquent pour se sentir autoriser à respecter son esprit plutôt que sa lettre. Tout ceci concourt à une grande liberté pédagogique.

Ce contexte favorable ne pourra pas perdurer. Si l’informatique s’installe solidement au lycée il faudra aussi qu’elle trouve sa pédagogie dans une classe ayant des effectifs et des contraintes semblables à celles que connaissent les autres disciplines.

Mes objectifs

- Donner aux élèves une bonne vision des grands principes sur lesquels reposent les technologies informatiques (culture générale). Machine informatique, information, langage, algorithme.
- Mettre en évidence la variété de l’informatique : objectifs pratiques mais aussi science de l’abstraction, informatique embarquée dans du petit matériel mais aussi informatique distribuée qui manipulent de gigantesques volumes de données.
- Relier les savoirs à des questions sociétales :
    - Persistance de l’information / droit à l’oubli.
    - Routage, neutralité du net.
    - Indexation d’une page web, pertinence des moteurs de recherche.
- Susciter des vocations. Contribuer à l’orientation des élèves.

- Développer l’autonomie des élèves.

Développer l’autonomie des élèves

Réussir à rendre les élèves autonomes est sans doute l’objectif essentiel de tout apprentissage. L’apprentissage d’un langage de programmation m’a semblé particulièrement adapté à un travail en autonomie.

Plutôt que de faire un cours structuré sur Python, je fournis aux élèves des ressources pour un auto-apprentissage interactif. De nombreux sites interactifs et de ressources en ligne existent. Ils s’auto-évaluent, rendent compte de leur avancement dans leurs apprentissages et savent qu’ils devront mettre en pratique leurs savoirs quelques semaines plus tard dans des mini-projets. L’auto-évaluation est assez facile : le programme tourne ou pas. Ceci fonctionne plus ou moins bien selon les élèves. Mais chacun au final en tire des leçons.

La programmation

La capacité à utiliser un langage de programmation est centrale pour pouvoir mener à bien les projets. Les difficultés éprouvées dans ce domaine par les élèves de seconde et de première ont pu être pour moi des motifs d’inquiétude. La plupart s’en sont pourtant relativement bien tirés et ont bien progressé, surtout en fin d’année.

Question aux élèves d’ISN : « Pourquoi à votre avis de nombreux élèves éprouvent des difficultés pour apprendre l’algorithmique en classe de mathématiques ? »

Plusieurs réponses évoquent le manque de logique. Plusieurs élèves disent qu’en mathématiques les algorithmes apparaissent un peu magiques car fournis par le professeur sans explications suffisantes. L’enseignement de la programmation demande du temps. Un temps dont nous ne disposons pas suffisamment en mathématiques au lycée. Il faudrait pouvoir laisser chercher les élèves à leurs rythmes.

Mais il faut aussi que les problèmes posés soient motivants pour les élèves et il est plus motivant pour un élève d’apprendre la programmation pour transformer une image ou manipuler un robot que pour calculer par dichotomie la solution approchée d’une équation.

L’apprentissage de la programmation dès le collège serait un atout précieux pour faire des mathématiques au lycée.

Bilan côté élèves

Les élèves ont particulièrement apprécié les phases de travail en groupe sur les projets.

Plusieurs d’entre eux ont mis en avant le fait que la spécialité ISN leur a permis de développer leur autonomie. L’un des élèves a évoqué une meilleure confiance en lui.Seuls quatre ou cinq élèves s’orientent vers des études d’informatique (IUT) ou d’ingénieur. Pour l’un d’eux le suivi de la spécialité ISN a été décisif.

Pour la majorité des élèves la spécialité ISN ne constitue donc pas une propédeutique pour des études d’informaticiens. Cette spécialité n’est pas réservée aux « geek » mais est une formation généraliste destinée à tous les lycéens.

Bilan côté professeur

Les élèves se sont tous montrés curieux et intéressés. J'ai constaté une très bonne implication dans les projets pour la grande majorité d'entre d'eux.

Le contenu théorique du programme ne peut guère être approfondi en raison du faible volume horaire.

La démarche de projet consomme également du temps.

Toutefois les idées essentielles ont été transmises.

Divers

L'INRIA est souvent disposé à contribuer d'une façon ou d'une autre à cette introduction de l'informatique dans les lycées. Il ne faut pas hésiter à les contacter.

Par exemple, trois ingénieurs de l'INRIA de Rennes sont intervenus pour encadrer des mini-projets dans ma classe d'ISN.

Les élèves ont eu chacun une clé bootable Ubuntu qui leur a permis de travailler avec le même environnement chez eux et à l'école. Un environnement libre tel qu'Ubuntu est plus pédagogique que des environnements tels que Windows ou Mac. Il permet d'interagir plus facilement avec le système qui est ouvert et qui est très bien documenté sur l'internet. Par ailleurs on peut trouver de l'aide sur de nombreux forums. Un des objectifs est de faire découvrir aux élèves l'esprit du logiciel libre et qu'ils puissent apprendre par eux mêmes en s'appuyant sur cette communauté.

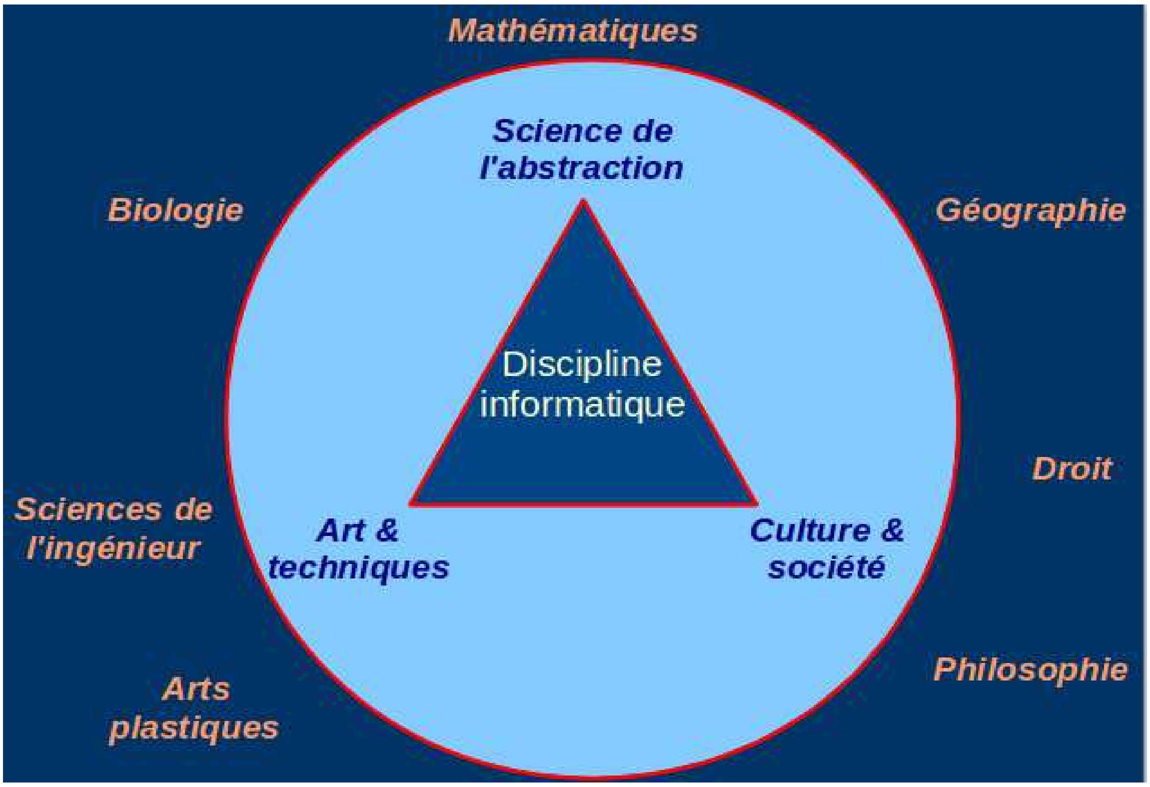
Le choix du langage de programmation est laissé à l'initiative de l'enseignant d'ISN. Plusieurs se sont tournés vers Javascool, une version simplifiée du langage Java. J'ai de mon côté retenu le langage Python qui a la réputation d'être bien adapté pour débuter. Il est utilisé dans des domaines très variés : programmation système (Linux), développement de serveurs web, prototypage de logiciels applicatifs. Des bibliothèques additionnelles permettent d'en faire un environnement de calcul scientifique (scipy ou sage). La prochaine version de GeoGebra contiendra un interpréteur Python. Le nouveau programme ISN des classes préparatoires fait explicitement référence à Python.

Une visite du Fab Lab de Rennes a eu lieu au mois de novembre. Des personnes réunissent localement leurs compétences dans le but de concevoir et réaliser des objets artisanaux. L'idée originale est que ces objets et les plans de fabrication sont ensuite mis à disposition de tous dans l'esprit du logiciel libre. Ceci est rendu possible par la disponibilité d'outils tels que des imprimantes 3D à des prix abordables. Les objets réalisés ont souvent une dimension interactive rendue possible grâce à l'embarquement d'un micro-contrôleur Arduino, matériel libre et facilement programmable.

Cette visite a été aussi l'occasion d'assister à une conférence sur le thème « Vie privée / vie publique ou comment le web redéfinit les frontières ». Ce type de problématique me semble faire complètement partie de l'esprit du programme.

UNE DISCIPLINE INFORMATIQUE AU LYCEE

En tant que discipline, l'informatique au lycée pourrait se caractériser par sa manifestation selon trois dimensions.



L'informatique poursuit d'abord un but pratique. Il s'agit de réaliser un objet technique.

Il s'agit d'une certaine façon de faire du bricolage. De détourner certains objets pour imaginer et réaliser des objets techniques qui soient fonctionnels ou simplement amusants.

Les réalisations informatiques nécessitent peu de matériels (un simple ordinateur peut souvent suffire). La force pédagogique de l'informatique est qu'il est possible d'imaginer, concevoir et réaliser des objets complexes en un temps relativement court. De multiples problèmes peuvent surgir qui nécessitent de conceptualiser, de réfléchir de façon méthodique. Les apports théoriques deviennent vite incontournables.

Science de l'abstraction

C'est un point commun avec les mathématiques. Lorsque l'on programme une machine on se place à un certain niveau d'abstraction. On travaille avec une machine abstraite qui doit être pensée. On manipule des concepts à travers un langage de programmation : information, codage, objets abstraits, type, variables, espaces de noms, portée, flux de contrôle, structure de données, listes, arbres, etc.

L'algorithmique n'est qu'un des aspects de cette abstraction qui caractérise l'informatique. Au lycée il est artificiel de séparer l'algorithmique de la programmation. La programmation, par définition, n'est pas mécanisable. C'est une activité intellectuelle complexe.

Culture et société

Il est banal de dire que les technologies numériques envahissent notre quotidien et modifient la société en profondeur. Mais ces technologies ne déterminent pas en elles mêmes la direction vers laquelle évolue la société. Notre usage des technologies numériques doit être pensé. L'école est le lieu où doit être amorcée cette pensée en l'étayant par des connaissances informatiques qui doivent faire partie de la culture générale.

Quelques exemples de thèmes de réflexion :

- Chiffrement. Vie privée.
- Authentification. Usurpation d'identité.
- Routage. Neutralité du net.
- Automate. Calcul et créativité.
- Analogique / numérique. Persistance de l'information. Droit à l'oubli.
- Compression. Droit d'auteur.
- Réseaux sociaux. Identité numérique.
- Œuvre, licence libre. Partage / piratage.
- Indexation d'une page web. Pertinence des moteurs de recherche.
- Langage informatique / langue. Syntaxe / sémantique.

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

La frontière entre l'algorithmique et la programmation est une question qui revient fréquemment et qui a surgi à nouveau lors de l'atelier consacré à l'algorithmique.

Pour ma part, je considère que l'algorithmique consiste à chercher à résoudre un problème donné de façon constructive. S'il n'y a pas de problème, il n'y a pas d'algorithme. Le terme algorithme est employé de façon abusive dans les manuels lorsque l'exercice ne consiste qu'à reformuler l'énoncé dans un langage plus ou moins formalisé, dans un pseudo-code ou dans un langage informatique. L'idée d'algorithme est très générale. Elle est omniprésente en mathématiques mais elle se manifeste aussi dans bien d'autres domaines.

La programmation consiste à faire exécuter des tâches spécifiques à une machine informatique. Pour programmer une machine il est nécessaire de connaître le langage de programmation. C'est un apprentissage complexe qui nécessite un sens de l'abstraction et qui demande du temps. Beaucoup d'exercices proposés aux élèves en seconde vise à cet apprentissage. Ceci est bien normal mais il me paraît abusif de parler ici d'algorithmique.

Même lorsque l'on sait programmer, écrire un programme ne va pas forcément de soi car des problèmes algorithmiques plus ou moins difficiles se manifestent constamment. C'est ici que se rejoignent les deux notions, lorsque l'on résout des problèmes algorithmiques appliqués à la programmation des machines informatiques.

RÉFÉRENCES

Rapport de l'Académie des sciences, *L'enseignement de l'informatique en France – Il est urgent de ne plus attendre*, mai 2013
http ://www.academie-sciences.fr/activite/rapport/rads_0513.pdf

Royal Society, *Computing in Schools, Shut down or restart ?*, janvier 2012
http ://royalsociety.org/education/policy/computing-in-schools/report/

Informatics Europe et ACM Europe, Join Report on Informatics Education in Schools, *Informatics education : Europe cannot afford to miss the boat*, avril 2013
http ://www.informatics-europe.org/services/reports.html

Société informatique de France, *Rapport de la SIF sur la Formation des Enseignants d'ISN*, juin 2013
http ://www.societe-informatique-de-france.fr/actualite/2013/Rapport_SIF_sur_ISN.pdf

ATELIER C1 : L'INTEGRALE, DE LA PHYSIQUE AUX MATHEMATIQUES

Anne-Amandine Decroix et Marc Rogalski

Laboratoire de Didactique André Revuz, université Paris Diderot

INTRODUCTION

L'intégrale d'une fonction continue positive f est définie en terminale S par l'aire (notion admise) sous le graphe de la courbe. C'est un premier pas dans la reconnaissance du lien profond entre intégrale et mesure des grandeurs (l'origine historique de l'intégrale). C'est mieux que la définition d'avant 2002 : l'intégrale était définie par F(b) – F(a), où F est une primitive de la fonction f, définition totalement impropre à mesurer des grandeurs !

L'idée est que dès la terminale, et encore plus en L1, il est essentiel de lier intégrale et mesure des grandeurs, pour plusieurs raisons.

(a) D'abord, sans ce lien, les élèves et les étudiants ont bien du mal à modéliser une mesure de grandeur par une intégrale, par exemple en physique. Ainsi, le problème de la barre qu'on va étudier dans cet atelier a été posé à 114 étudiants en fin de L1 ayant vu la définition classique de l'intégrale de Riemann (limite de sommes de Riemann). Seuls 12% d'entre-eux ont vu qu'il fallait une intégrale pour résoudre le problème. La difficulté n'est pas de savoir calculer une intégrale, mais de savoir reconnaître que dans un problème physique il y aura une intégrale.

(b) Ensuite, parce que l'intégrale est, historiquement et du point de vue épistémologique, une co-construction entre mathématiques et physique, propre à illustrer les rapports entre ces deux disciplines, et en particulier les différences d'approches justifiées par des paradigmes différents.

LES NOUVEAUX PROGRAMMES DE PHYSIQUE AU LYCEE

Le ministère de l'éducation national s'est engagé dans une ambitieuse reforme du programme de physique-chimie au Lycée. Les nouveaux programmes ont été mis en place progressivement depuis la rentrée 2010 (rentrée 2010 : seconde ; rentrée 2011 : première et rentrée 2012 : terminale)

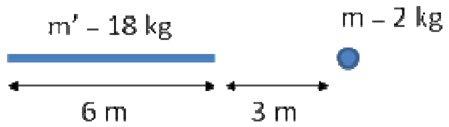
Ces programmes ont pour vocation l'apprentissage de la démarche scientifique, déjà initiée à l'école primaire et au collège. « Les programmes de terminale de la série scientifique comme ceux de première s'articulent autour des grandes phases de la démarche scientifique : Observer, Comprendre, Agir et s'appuient sur des entrées porteuses et modernes introduites à partir de questionnements ». Deux compétences occupent une place centrale, « extraire » et « exploiter » l'information, l'objectif est d'apprendre aux élèves à avoir un regard critique sur des textes et des résultats scientifiques. La partie « connaissances exigibles » est diminuée et remplacée par davantage de « compétences ou de capacités exigibles ». En terminale, le programme donne une vision plus « moderne » de la physique et de la chimie (détecteur de particules, spectres RMN, etc.) au détriment de l'enseignement de l'électricité notamment et de la radioactivité. Il y a moins de modélisation demandée et moins de recours à l'outil mathématique. Il est clairement stipulé dans le BO du nouveau programme de terminale S que « le recours à des outils mathématiques n'est pas le but premier de la formation de l'élève en physique-chimie »...

VERS LA PROCEDURE INTEGRALE : L'EXEMPLE DE LA SITUATION DIDACTIQUE DE LA BARRE

L'exemple qui va être présenté a pour objectif de dégager des idées directrices donnant une signification propre au concept d'intégrale. L'idée est de placer l'élève ou l'étudiant face a une situation constitutive du concept d'intégrale permettant ainsi l'émergence de ces idées directrices.

Le problème choisi a pour avantage de ne pas nécessiter de grandes connaissances en physique puisque la seule formule nécessaire à sa réalisation est vue des la classe de seconde générale.

Présentation du problème : Déterminer la norme de la force d'attraction F entre une masse ponctuelle m de 2 kg et une barre fine de 6 mètres de long et de masse m' égale à 18 kg dans la disposition suivante :



On rappelle la relation $F = G\dfrac{m.m'}{r^2}$

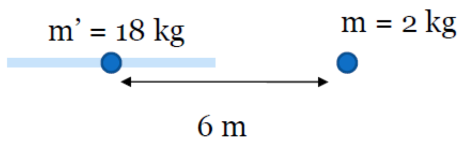
qui donne l'attraction entre deux masses **ponctuelles**. Dans cette formule, G est la constante de gravitation : $G=6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$.

On a demandé aux participants à l'atelier de prévoir ce que feraient des élèves qui n'ont pas encore vu l'intégrale, avec leurs connaissances de physique de terminale S.

L'accord unanime se fait sur l'estimation que la seule méthode utilisable par des élèves de terminale S ou des étudiants de L1 pour résoudre ce problème est d'appliquer une « règle du centre de gravité » (on concentre toute la masse de la barre en ce point), d'autant plus qu'on rappelait la version ponctuelle de la loi.

Première approche : règle du centre de gravité, puis principe de découpage

Les élèves assimilent la barre à un point ponctuel situé en son centre de masse.

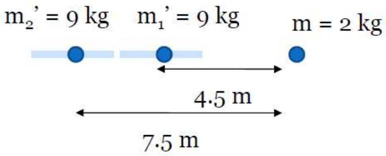


On a donc deux masses ponctuelles de masses 18 kg et 2 kg distantes de 6 m.

$$F = G\frac{m.m'}{r^2} = G\frac{2*18}{6^2} = G$$

Remarque : Pour que le résultat soit homogène, on ne s'intéresse qu'à la valeur numérique de G, le résultat est en Newton : F = 6,67.10^{-11} N. Il en sera de même pour la suite.

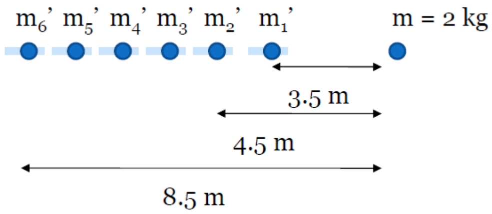
Comment déstabiliser cette approche ? En fait, il y a toujours un élève qui propose de couper la barre en deux, en appliquant la règle du centre de gravité à chaque morceau.



$$F = G\frac{m.m_1'}{{r_1}^2} + G\frac{m.m_2'}{{r_2}^2} = G\left[\frac{2*9}{4.5^2} + \frac{2*9}{7.5^2}\right] = \frac{272}{225}G \approx 1.21G$$

Cette valeur est différente de celle obtenue en assimilant la barre à un point ponctuel situé en son centre de masse. Cette différence incite les élèves à raffiner la méthode en coupant la barre en morceaux plus petits.

Découpage de la barre en 6 en appliquant toujours la règle du centre de gravité.



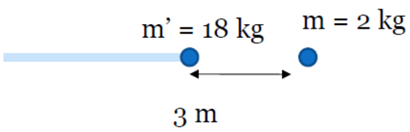
$m_1' = m_2' = m_3' = m_4' = m_5' = m_6' = 3$ kg

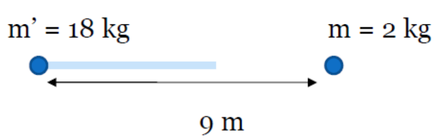
$$F = G\frac{m.m_1'}{{r_1}^2} + G\frac{m.m_2'}{{r_2}^2} + \cdots + G\frac{m.m_6'}{{r_6}^2} = G\left[\frac{2*3}{3.5^2} + \frac{2*3}{4.5^2} + \cdots + \frac{2*3}{8.5^2}\right] =\approx 1.32G$$

Cette valeur est différente de celles précédemment obtenues. La croissance des résultats peut inciter les élèves à se demander s'ils sont majorés a priori, mais cette question peut être suggérée par l'enseignant. Cela amène à des encadrements.

Deuxième étape : articuler le principe du découpage avec celui de l'encadrement

On assimile la barre à un point, que l'on positionne à l'une ou l'autre extrémité de la barre. La force dépend de la distance, la valeur exacte se situe entre les deux cas extrêmes présentés ci-dessous.

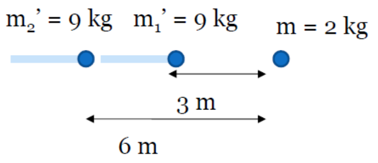


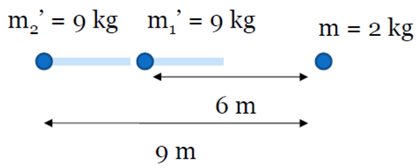


$$F_+ = G\frac{m.m'}{r^2} = G\frac{2*18}{3^2} = 4G \qquad F_- = G\frac{m.m'}{r^2} = G\frac{2*18}{9^2} = \frac{4}{9}G$$

On a donc $F_- < F < F_+ \rightarrow 4/9\ G < F < 4\ G \rightarrow 0.44\ G < F < 4\ G$

On coupe la barre en 2 et on refait des majorations et des minorations.



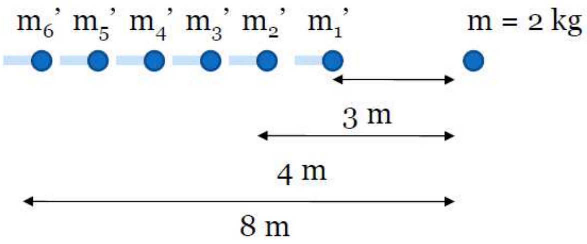


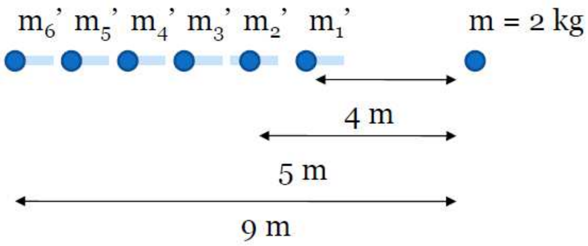
$$F_+ = G\frac{m.m_1'}{r_1{}^2} + G\frac{m.m_2'}{r_2{}^2} = G\left[\frac{2*9}{3^2} + \frac{2*9}{6^2}\right] = \frac{5}{2}G \qquad F_- = G\frac{m.m_1'}{r_1{}^2} + G\frac{m.m_2'}{r_2{}^2} = G\left[\frac{2*9}{6^2} + \frac{2*9}{9^2}\right] = \frac{13}{18}G$$

On a donc $F_- < F < F_+ \rightarrow 13/18\ G < F < 5/2\ G \rightarrow 0.72\ G < F < 2.5\ G$.

Avec un découpage de la barre en 6 :

$m_1' = m_2' = m_3' = m_4' = m_5' = m_6' = 3$ kg





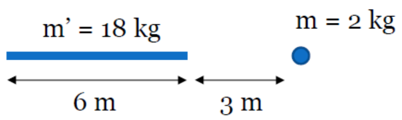
$$F_+ = G\frac{m.m_1'}{r_1{}^2} + G\frac{m.m_2'}{r_2{}^2} + \cdots + G\frac{m.m_6'}{r_6{}^2} = G\left[\frac{2*3}{3^2} + \frac{2*3}{4^2} + \cdots + \frac{2*3}{8^2}\right] \approx 1.66G$$

$$F_- = G\frac{m.m_1'}{r_1{}^2} + G\frac{m.m_2'}{r_2{}^2} + \cdots + G\frac{m.m_6'}{r_6{}^2} = G\left[\frac{2*3}{4^2} + \frac{2*3}{45^2} + \cdots + \frac{2*3}{9^2}\right] \approx 1.07G$$

On a donc $F_- < F < F_+ \rightarrow 1.07\ G < F < 1.66\ G$

Remarque importante. Bien entendu, au-delà de l'objectif de faire concevoir par les élèves eux-mêmes la nécessité de la procédure découpage-encadrement (qui mènera à l'intégrale), l'un des autres objectifs (second pour ce moment de la situation) est aussi de faire apparaître la procédure dérivée-primitive pour calculer la force demandée. Le but (qui sera précisé ultérieurement) est que, à l'issue de la construction de l'intégrale, les élèves soient capables de reconnaître qu'il faut une intégrale pour calculer (définir ?) la grandeur cherchée, et puissent écrire directement la solution suivante :

La barre a une masse linéaire de 3kg.m^{-1}



$$F = \int_3^9 G\frac{m.m_l'}{r^2}dr = \int_3^9 G\frac{2.3}{r^2}dr = \int_3^9 6G\frac{1}{r^2}dr = -6G\left[\frac{1}{r}\right]_3^9 = 6G\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right] = \frac{4}{3}G$$

Mais bien sûr ce n'est pas à ce moment de la situation didactique qu'on peut atteindre cet objectif. Il faut avant tirer le bilan théorique qui se profile derrière les procédures utilisées par les élèves.

DE LA BARRE A LA CO-CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE ENTRE MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

La décontextualisation de l'exemple de la barre se fait au moyen de **la mesure des grandeurs « produits » en physique**.

Les formules usuelles suivantes sont valables quand les premiers facteurs sont **constants** :

(densité *constante*) $\times$ volume = masse ;

(hauteur *constante*) $\times$ (longueur de la base) = aire ;

(hauteur *constante*) $\times$ (aire de la base) = volume ;

(vitesse *constante*) $\times$ temps = distance parcourue ;

(force *constante*) $\times$ déplacement (colinéaire) = travail ;

(pression *constante*) $\times$ (surface plane) = force ;

(distance *constante* à un axe)$^{\mathbf{2}}$ $\times$ (masse ponctuelle) = moment d'inertie ;

(inverse de la distance *constante*)$^{\mathbf{2}}$ $\times$ (produit des masses ponctuelles) = attraction.

Certaines de ces formules, en fait, définissent **une grandeur physique « produit »** à partir d'autres quand les premiers facteurs sont constants. D'autres cherchent à calculer de telles grandeurs « produits » à partir d'une formule d'une théorie physique (qui définit d'abord une grandeur quotient, comme la pression, par exemple).

Généralisons : les deuxièmes facteurs sont associés à des « domaines » Ω sur lesquels sont définis les premiers facteurs, supposés maintenant être des fonctions f non constantes : densité ou pression en un point d'un volume Ω, hauteur au-dessus d'un point de la base Ω, pression en un point d'une surface Ω, distance d'un point de Ω à l'axe, etc.

De plus on peut définir la mesure m(A) d'une partie A de Ω, ou du moins d'une classe de parties de Ω : aire, volume, masse, distance parcourue, temps entre deux instants, sont supposés définis pour ces parties de Ω.

On se propose donc de savoir **à quelles conditions on peut mesurer, ou même définir une grandeur** $I(\Omega, f, m)$ ou $\int_\Omega f\,dm$ attachée à une grandeur physique décrite par le domaine Ω avec la mesure m et la fonction f. Les conditions raisonnables pour parler de la grandeur cherchée sont les 3 principes qui suivent, issus de considérations physiques ; le premier renvoie à la définition du type de grandeur étudiée, les deux autres en sont des propriétés, dont le sens est immédiat sur les exemples cités :

(1) *si f est constante* (f = C), $\int_\Omega f\,dm = C \text{ x mesure}(\Omega)$ [les formules ci-dessus !] ;

(2) *l'additivité par rapport au domaine* (une «relation de Chasles») : si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\Omega_1 \cap \Omega_2$ de mesure nulle (par exemple vide), alors $I(\Omega, f, m) = I(\Omega_1, f, m) + I(\Omega_2, f, m)$;

(3) *la croissance* : si $f \leq g$, $I(\Omega, f, m) \leq I(\Omega, g, m)$.

Pour calculer une grandeur de la forme I(Ω, f, m) vérifiant les principes (1), (2), (3) :

* on **découpe l'ensemble** Ω en un nombre fini de «petits» morceaux $\Omega_\mathbf{i}$;

* on **encadre la fonction** f entre m_i et M_i sur Ω_i (par exemple par ses bornes inférieures et supérieures sur l'ensemble Ω_i) ;

* par **sommation**, on **encadre** I(Ω, f, m) par des «sommes inférieures» et «supérieures» :

$$\sum_i m_i\, m(\Omega_i) \quad \text{et} \quad M_i\, m(\Omega_i);$$

* enfin, **on essaie de passer à la limite** en prenant des Ω_i de plus en plus petits.

La procédure intégrale est donc formée de ces 4 étapes :

découpage, encadrement, sommation, passage à la limite.

Les sommes inférieures et supérieures qui encadrent la mesure cherchée de la grandeur sont en fait les intégrales des fonctions « en escalier » $\sum_i \lambda_i \mathbf{1}\Omega_i$, et on souhaite passer à la limite pour obtenir l'intégrale d'autres fonctions, par exemple de fonctions continues … si cela marche !

Mathématiquement, il faut préciser un peu plus la nature des ensembles $\Omega_\mathbf{i}$ et la nature de leur mesure, d'une part, et quel type de limite on souhaite prendre, de l'autre.

En se bornant au cas Ω = [a, b], seul envisageable en terminale S et en L1, on a deux choix « raisonnables » pour chacune de ces deux questions :

(a1) les $\Omega_\mathbf{i}$ sont des intervalles, et leur mesure est leur longueur ;

(a2) les $\Omega_\mathbf{i}$ sont les éléments d'une tribu, avec pour mesure la mesure de Lebesgue ;

(b1) l'approximation se fait en approchant uniformément f par des fonctions en escalier (on prend une condition de Cauchy pour la norme uniforme, en supposant f bornée) ;

(b2) l'approximation se fait directement au moyen de l'intégrale (la condition de Cauchy dit que l'intégrale d'une certaine fonction en escalier doit être petite).

En recoupant ces deux choix, et en abandonnant dans le premier et le quatrième cas la condition d'encadrement, qui n'est plus utile, on trouve alors 4 théories classiques de l'intégration :

(a1b1) : l'intégrale des fonctions réglées ;

(a1b2) : l'intégrale de Darboux des fonctions bornées Darboux-intégrables (c'est aussi l'intégrale de Riemann) ;

(a2b1) : l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables bornées (c'est la définition initiale de Lebesgue) ;

(a2b2) : l'intégrale de Lebesgue générale.

La notion physique d'intégrale (la procédure intégrale) peut donc se traduire de façon polysémique en mathématiques ! Il reste à faire le lien avec la définition de l'intégrale en terminale S : l'aire sous le graphe, et avec la notion de primitive. C'est ce que nous allons faire avec deux nouveaux exemples, qui mettront de plus en valeurs quelques problèmes dans les rapports entre mathématiques et physique.

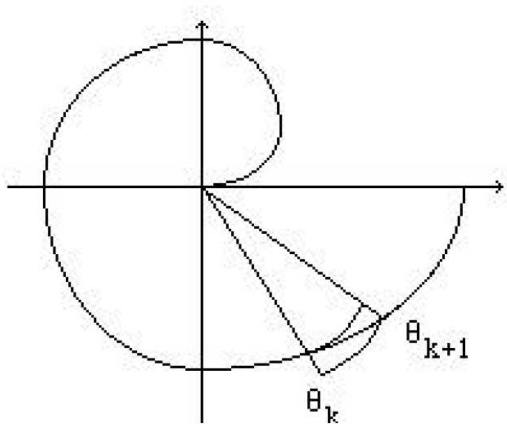
DEUX AUTRES EXEMPLES PROTOTYPIQUES TRAITABLES EN TERMINALE

L'aire de la spirale d'Archimède

On considère la courbe d'équation en coordonnées polaires $\rho = c\theta$, où c est une longueur et où on a $0 \leq \theta \leq 2\pi$. On se propose de calculer son aire S, d'une part par ***la procédure intégrale,*** de l'autre par ***la procédure dérivée-primitive***.

Calcul par la procédure intégrale

Comme sur le dessin ci-dessous, on découpe l'intervalle de variation de l'angle **[0, 2π]** en **n** parties égales par les points $\theta_k = 2k\pi/n$, $0 \leq k \leq n$.



On encadre l'aire $\Delta_k S$ du morceau de spirale entre θ_k et θ_{k+1} par les aires des deux secteurs de cercles de rayons $c2k\pi/n$ et $c2(k+1)\pi/n$ et de même angle $2\pi/n$, c'est-à-dire par les inégalités

$$4c^2\pi^3/n^3]\ k^2 \leq \Delta_k S \leq 4c^2\pi^3/n^3]\ (k+1)^2.$$

On en déduit en sommant l'encadrement

$$[4c^2\pi^3/n^3]\sum_{0\leq k\leq n-1} k^2 \leq S \leq [4c^2\pi^3/n^3]\sum_{0\leq k\leq n-1} (k+1)^2,$$

soit en renommant les indices à droite (technique à apprendre en terminale !)

$$(1/n^3)\ \sum_{1\leq k\leq n-1} k^2 \leq S/4c^2\pi^3 \leq (1/n^3)\ \sum_{1\leq k\leq n} k^2.$$

Mais on a la formule

(*) $$\sum_{1\leq k\leq n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6 = (n^3/3)(1+1/n)(1+1/2n).$$

Cette formule peut être parachutée et se prouver par récurrence en terminale, soit se prouver géométriquement en découpant le rectangle $[0,1+2+3\ldots+n] \times [0,n]$ en bandes horizontales et avec les carrés de côtés 1, 2,…, n.

On en déduit en passant à la limite

$$S = 4c^2\pi^3/3.$$

Calcul par la procédure dérivée-primitive

On note $S(\theta)$ l'aire de la spirale entre les angles 0 et θ, et on encadre son accroissement ΔS entre θ et $\theta+\Delta\theta$. Par le même raisonnement que ci-dessus on obtient

$$(\Delta\theta/2)c^2\theta^2 \leq \Delta S \leq (\Delta\theta/2)c^2(\theta+\Delta\theta)^2.$$

On en déduit que $c^2\theta^2/2 \leq \Delta S/\Delta\theta \leq c^2(\theta+\Delta\theta)^2/2$, et **en passant à la limite quand $\Delta\theta \to 0$ on obtient la dérivabilité de la fonction $\theta \to S(\theta)$ et la relation**

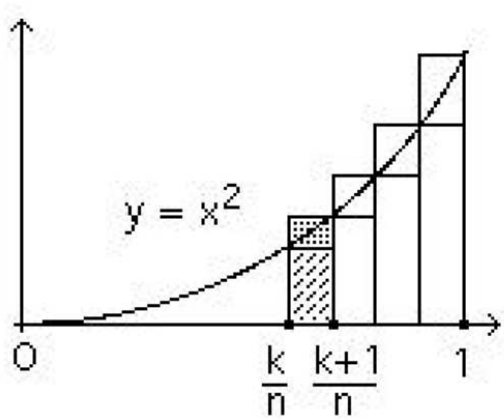
$$dS/d\theta = c^2\theta^2/2.$$

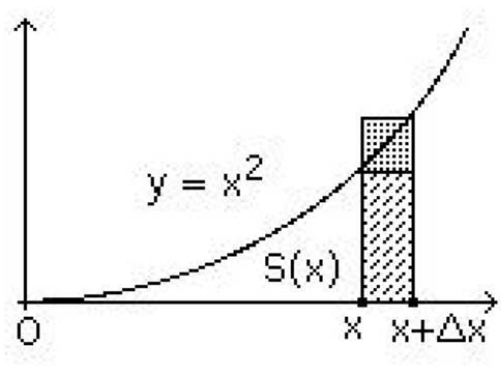
Par suite $S = S(2\pi)$ est la primitive de la fonction $\theta \to c^2\theta^2/2$ entre 0 et 2π, soit $S = 4c^2\pi^3/3$.

On retrouve le même résultat et on peut comparer la difficulté des deux procédures.

Et on peut interpréter au moyen de l'aire sous le graphe de la fonction $\theta \to c^2\theta^2/2$ entre 0 et 2π, c'est-à-dire faire le lien avec la définition de l'intégrale donnée en terminale.

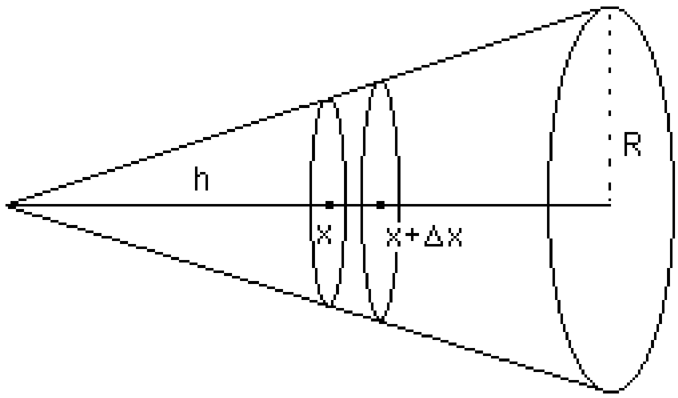
Cela peut se faire, soit avec la procédure intégrale, en montrant que la somme $\sum_{1\leq k\leq n} k^2$ est précisément celle qu'on obtient par la méthode des rectangles pour encadrer l'aire sous la courbe graphe de la fonction $x\to x^{\mathbf{2}}$, soit avec la procédure dérivée primitive, en montrant que si on prend la dérivée de l'aire $S(x)$ sous le graphe de la fonction $x\to x^2$, entre les abscisses 0 et x, on trouve $x^{\mathbf{2}}$, comme avec la spirale.





Le volume du tronc de cône

On se donne un tronc de cône de révolution de hauteur h dont la base est un disque de rayon R. Déterminer son volume.



Première méthode : procédure dérivée-primitive

On note V(x) le volume entre le sommet et le plan d'abscisse x. On évalue l'accroissement $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$ par encadrement entre les volumes de deux cylindres de hauteur Δx, et on montre que l'on a $dV/dx = \pi(xR/h)^2$, d'où le résultat par une primitive simple (de la fonction $x \dashrightarrow x^2$).

Deuxième méthode : procédure intégrale

On découpe en $\Delta x = h/n$, on encadre chaque petit volume et on somme. On obtient

$$\sum_{0\leq k\leq n-1} \pi((k/n)R)^2 h/n \leq V \leq \sum 1\leq k\leq n\ \pi((k/n)R)^2 h/n,$$

soit

$$(1/n^3)\sum_{1\leq k\leq n-1} k^2 \leq V/\pi hR^2 \leq (1/n^3)\sum_{1\leq k\leq n} k^2.$$

En utilisant la formule (*)

$$\sum_{1\leq k\leq n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6,$$

on obtient le résultat.

Quelques problèmes entre mathématiques et physique

La spirale d'Archimède et le volume du tronc de cône de révolution sont très analogues, et posent tous deux les mêmes problèmes très intéressants sur la notion d'intégrale.

1/ Pourquoi a-t-on affaire à une intégrale ? C'est là le point délicat, que les élèves et les étudiants ne savent pas reconnaître, en général. L'idée clé, est de **découper en tranches fines**. C'est ce que font les physiciens pour le cône, mais **de façon trop « naturelle »** : pour eux, cela va de soi, alors que ce n'est pas le cas pour les élèves et étudiants. C'est ce dont il faut convaincre les enseignants (les « dénaturaliser »).

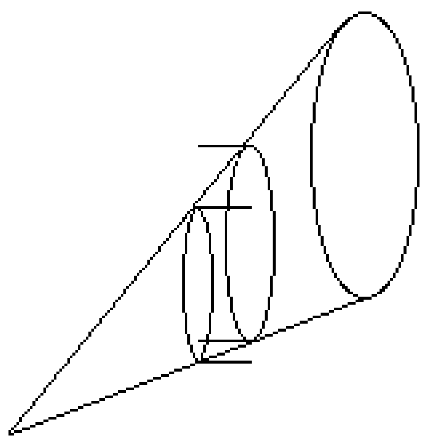
La meilleure méthode est de comparer avec ce qu'on ferait pour le cylindre, et pourquoi il faut faire autrement : dans le tronc de cône, le rayon n'est pas constant ! Dans le cas de la spirale, il faut comparer avec la même chose pour le disque…

2/ Dès lors que le découpage s'est imposé, il faut savoir si l'erreur commise sur chaque tranche est suffisamment négligeable pour que la procédure intégrale, ou la procédure « dérivée-primitive » (c'est celle souvent utilisée, là encore comme étant « naturelle »…) soit applicable.

Par exemple, être sûr que c'est par une primitive de $\pi(Rx/h)^2$ qu'on va calculer le volume du tronc de cône, revient à dire que, si on note V(x) le volume entre le sommet et le point d'abscisse x sur l'axe, alors dV/dx est bien $\pi(Rx/h)^2$, c'est à dire que quand on assimile $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$ au volume du cylindre de hauteur Δx et rayon Rx/h, c'est-à-dire $\pi(Rx/h)^2\Delta x$, on commet une erreur qui est négligeable devant Δx. Ce point est crucial à débattre avec les élèves, il renvoie à la notion même de dérivée et l'éclaire.

3/ Traditionnellement, les physiciens ne vérifient jamais ce point, qui a pourtant un sens physique, puisqu'il signifie que c'est l'erreur relative qui tend vers 0 quand Δx tend vers 0 (et non seulement une erreur absolue). Attention : il s'agit là de *l'erreur de méthode* dans la technique d'approximation de la grandeur, *pas d'une erreur de mesure* ! Les physiciens se contentent de penser (et rarement de dire) : « on a supposé quelque chose de négligeable, et le résultat obtenu montre qu'on avait raison » (ou bien, autre version : « …l'expérience montre qu'on avait raison »). Et à mon avis ce type de raisonnement est propre à l'épistémologie de la physique, les mathématiciens n'ont pas à le contester.

Mais fondamentalement ce mode de raisonnement n'est pas accepté en mathématiques : si on a $P \Rightarrow Q$ et que Q redonne P, cela ne prouve pas que P soit vrai (sinon, les mathématiques ne tiendraient plus debout, et on plaint les physiciens qui s'en serviraient !). Il faut donc montrer a priori, ici, que l'erreur commise est bien négligeable devant Δx (c'est-à-dire, dès qu'il s'agit de calculs algébriques, du deuxième ordre en Δx). La bonne méthode pour ce faire est d'encadrer physiquement le volume ΔV, entre les volumes des deux tranches de cylindres, de rayon Rx/h et $R(x+\Delta x)/h$, et de passer à la limite dans le quotient $\Delta V/\Delta x$ quand Δx tend vers 0. Cela marche très bien… parce que la tranche du cône est comprise entre les deux tranches de cylindre (l'argument est analogue avec la spirale). Mais pour un cône dont le sommet se projeterait orthogonalement sur le plan de la base en dehors de la base, cette double inclusion serait fausse, et alors le problème se compliquerait… Montrer que le calcul par la même intégrale reste vrai n'est plus du niveau de la terminale.



4/ Si on veut, non pas directement calculer une primitive, mais utiliser la procédure intégrale, on se trouve devant une somme d'un grand nombre de termes $\Delta_k V$ qu'on a remplacés par $\pi(Rx_k/h)^2\Delta_k x$, en commettant chaque fois une « petite » erreur e_k, et on fait la somme globale $\sum_{1\leq k\leq n} \pi(Rx_k/h)^2\Delta_k x$, avec une erreur totale $e = \sum_{1\leq k\leq n} e_k$ par rapport à la vraie somme visée $V = \sum_{1\leq k\leq n} \Delta_k V$. Si on ne contrôle pas bien les n erreurs, la somme e peut être très grande, ou ne pas tendre vers 0. Par exemple, si on prend les $\Delta_k x = 1/n$ (en supposant h=1 pour simplifier), si l'erreur e_k est de l'ordre de 1, de 1/n ou de $1/n^2$, on a une erreur globale e de l'ordre de , de 1 ou de 1/n… Seul le dernier cas tend vers 0 quand n tend vers l'infini, c'est le cas où chaque erreur $e_k \approx 1/n^2$ est bien négligeable devant $\Delta_k x = 1/n$.

5/ De plus, un point est intéressant à dégager, et est bien mis en valeur par la comparaison du cas de la spirale avec celui du cône. Il s'agit de mettre en évidence que dans les deux cas **on fait apparaître la même fonction $x\to x^2$, et que ce qu'on calcule n'est rien d'autre que l'aire sous le graphe de cette fonction**, entre 0 et 2π dans un cas, entre 0 et h dans l'autre. **C'est en effet la définition donnée en terminale de l'intégrale, et il faut bien s'y raccrocher**.

Ce passage d'une méthode de découpage en morceaux, faisant apparaître selon les cas des sommes du type 1+ 2 +…+ n, ou $1^2 + 2^2 +\ldots+ n^2$ ou $1^3 + 2^3 +\ldots+ n^3$, etc est ce qui historiquement a fait passer du calcul laborieux, chaque fois ad hoc, de la mesure d'une certaine grandeur, à la découverte que **ce qui compte est la fonction qui y intervient** : $x\to x$ (voir le § VI.) ou $x\to x^2$ ou $x\to x^3$ ou $x\to 1/x^2$ (cas de l'attraction de la barre) …et ainsi à la notion d'intégrale d'une fonction. C'est pourquoi il est souhaitable d'utiliser dans le cas de la spirale et du cône les sommes $1^2 + 2^2 +\ldots+ n^2$.

6/ C'est enfin, le moment propice pour revenir sur la procédure dérivée-primitive appliquée à l'attraction de la barre, c'est-à-dire d'introduire la méthode proposée dans la remarque importante à fin de la partie III. Pour ce faire, on note F(x) la contribution à la force de la partie de la barre entre les abscisses 3 et x ($3 \leq x \leq 9$), et on évalue $\Delta F/\Delta x$, comme on l'a fait pour le cône et la spirale.

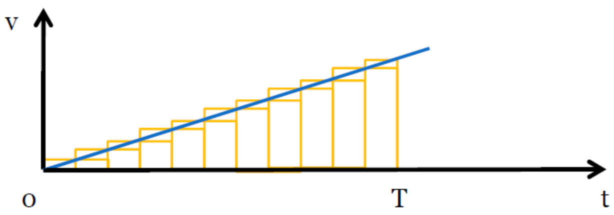
Dans une dernière partie, nous allons évoquer deux précurseurs historiques à la détermination de ce que nous appelons maintenant une intégrale, à travers l'aire située sous le graphe d'une fonction linéaire.

LA CHUTE DES CORPS : DE NICOLE ORESME A GALILEE

Deux méthodes numériques modernes.

La méthode des rectangles

Pour un mouvement uniformément accéléré, de vitesse initiale nulle, on a v = at. Si on trace v=f(t), on a une droite passant par l'origine

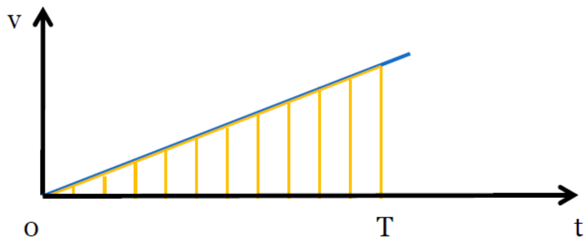


La distance parcourue est comprise entre deux sommes d'aires de rectangles

On partage le segment [0 ; T] en n intervalles de même longueur T/n. On a

$\frac{T}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) < I < \frac{T}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1})$ car la fonction est croissante et continue.

La méthode des trapèzes :

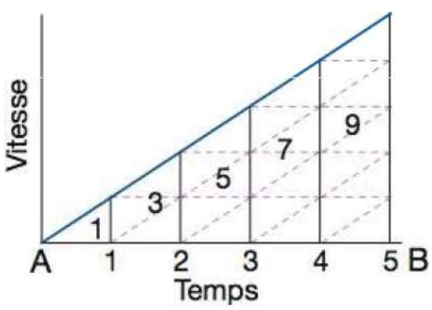


La méthode des trapèzes n’est autre que la moyenne entre la méthode des rectangles à gauche et des rectangles à droite.

$$S = \frac{T}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(t_{i+1}) + f(t_i)}{2}$$

Nicole Oresme au XIV^{ème} siècle

Au XIV^{ème} siècle, Oresme étudie le mouvement uniformément accéléré. Il adopta la représentation suivante : il situe le temps sur une droite horizontale et élève à chaque instant une perpendiculaire de longueur proportionnelle à la vitesse du mobile en cet instant. Il observe ainsi que l'aire de la surface balayé par ces perpendiculaires est proportionnelle à la distance parcourue par le mobile.



André Ross Cégep de Lévis-Lauzon

Il indiquait alors : *« comme l’a remarqué le grand mathématicien grec Pythagore, on a :*

*1 = 1 * 1,*

*1 + 3 = 4 = 2 * 2,*

*1 + 3 + 5 = 9 = 3 * 3,*

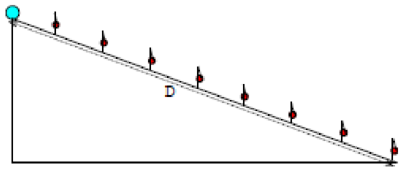
*1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 * 4,*

*1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5 *5, etc*

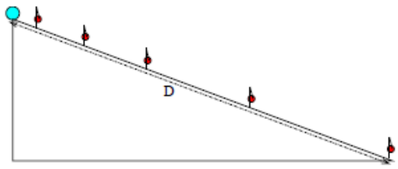
on obtient toujours un nombre carré. Par ce moyen on peut déterminer les rapports mutuels des quantités totales » (c'est l'expression pour dire l'aire).

En d'autre terme, il aboutit à la relation suivante : $d(t) = k\ t^2$ ou d est la distance parcourue pendant un temps t.

Galilée et la chute des corps : l'expérience du plan incliné XVII^{ème} siècle :



Galilée suppose que la bille roule à vitesse constante : Dans ce cas, des grelots disposés régulièrement tinteraient de manière régulière.



Comme les grelots sonnent à intervalles irréguliers, Galilée modifie leur disposition.

Remarque : Il semblerait en réalité que Galilée réalisa une expérience similaire, mais sans utiliser de grelots.

Dans son *Discours concernant deux sciences nouvelles* (1638), Galilée déclare : « Dans ces expériences répétées une bonne centaine de fois, nous avons toujours trouvé que les espaces parcourus étaient entre eux comme les carrés des temps, et cela quelle que soit l'inclinaison du plan ».

Galilée obtient donc *expérimentalement* le même résultat qu'Oresme, soit : $d(t) = k\ t^2$.

Mais en fait Galilée donne aussi des développements théoriques s'appuyant sur le graphe de la fonction $t \rightarrow at$, avec une démarche revenant à admettre implicitement que la distance parcourue est représentée par l'aire sous la courbe. Mais il ne le dit pas explicitement…

Historiquement, la problématique de l'intégrale est avant tout celle du calcul d'aires, volumes, distances parcourues… alors que la problématique de la primitive ne se formule que bien plus tard. Le lien entre les deux, introduit à propos, aussi, du calcul d'une distance parcourue connaissant la vitesse fonction du temps, et démontré par Barrow en dérivant l'aire sous la courbe entre les abscisses a et x, est fondateur du calcul différentiel et intégral. Ce lien est d'ailleurs nommé dans les pays anglo-saxons : « le théorème fondamental de l'analyse ».

CONCLUSION

Nous avons proposé un ensemble de situations didactiques, traitables en terminale S et en L1 (avec des adaptations à ces niveaux), aptes à dégager un sens de l'intégrale commun à la physique et aux mathématiques. Nous pensons que cette manière de faire permet, d'une part de rendre les élèves ou étudiants capables de reconnaître quand on a besoin d'une intégrale pour évaluer une grandeur en physique, et de l'autre de donner à l'intégrale mathématique une épaisseur épistémologique essentielle à sa compréhension.

ATELIER C2 : UN « RETOUR » DE LA LOGIQUE DANS LES PROGRAMMES DU LYCEE : UNE OCCASION A NE PAS MANQUER !

Geneviève Bouvart, IREM de Lorraine, Emmanuelle Forgeoux, IREM de Rennes,

Charlotte Fabert, Denise Grenier, IREM de Grenoble, Zoé Mesnil, IREM de Paris,

Groupe logique de la Commission Inter-IREM Lycée[1]

Les nouveaux programmes pour le lycée comportent des objectifs explicites concernant certaines notions de logique. Mais la logique étant partie intégrante de l'activité mathématique, est-ce que les professeurs n'intégraient pas déjà un travail sur l'expression et le raisonnement mathématiques dans les activités proposées aux élèves ? Est-ce que ce nouveau programme va changer quelque chose ? Nous gageons que malgré ses imperfections, notamment le manque de précisions sur les connaissances en jeu, malgré d'éventuelles difficultés pour les professeurs liées au manque de formation et de ressources, dont nous trouvons trace dans les propositions des manuels, ce retour d'un accent sur les questions de logique et de raisonnement ouvre la porte à un apprentissage spécifique qui peut être continué dans le supérieur.

RAPIDE HISTORIQUE DE LA PLACE DE LA LOGIQUE DANS LES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DU LYCEE

À partir de 1960, la logique mathématique, ou du moins certains de ses éléments, va servir de référence pour l'apprentissage du langage et du raisonnement mathématiques. Les mathématiques dites « modernes », d'inspiration bourbakiste, ont déjà fait leur entrée à l'université depuis le milieu des années 50. Dans l'enseignement secondaire, une entrée timide dans les textes officiels s'accompagne d'expérimentations sur le terrain et d'une prise de conscience d'une nécessité de formation. La commission Lichnerowicz propose en 1969 des programmes pour la classe de Seconde dans lesquels la logique a une place explicite. Associée à la théorie des ensembles, elles fournissent un cadre pour la mathématique. On trouve dans le programme et dans les manuels un premier chapitre intitulé « Langage des ensembles » contenant des définitions et propriétés de notions logiques et ensemblistes. Les instructions de 1970 qui accompagnent ce programme précisent que ce chapitre « fera beaucoup moins l'objet d'un préambule dogmatique que d'une insertion pratique, *à tout moment*, dans la suite du cours ». Mais la plupart des professeurs ne sont pas formés eux-mêmes à ces notions, et il est difficile dans ce cas qu'elles soient suffisamment disponibles pour une telle insertion. La réforme des mathématiques modernes a été l'objet de vives critiques, et en 1981, de nouveaux programmes sont proposés, desquels la logique est exclue, rejetée avec tout ce qui a été jugé d'un formalisme excessif et inutile. Cette exclusion perdure jusqu'à un timide retour dans les programmes de 2001, puis un retour plus marqué dans les récents programmes.

Ces allers-retours de la présence de la logique dans les programmes du lycée font que nous manquons aujourd'hui de recul en ce qui concerne la place et le rôle de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée, il n'y a pas eu le temps de mettre nécessaire pour mettre des choses en place et les expérimenter dans la durée. Par ailleurs, les professeurs actuels ont reçu

[1] http ://www.univ-irem.fr/spip.php ?rubrique275

des formations différentes selon l'époque à laquelle ils ont été élèves et selon leur cursus dans le supérieur (la logique mathématique ne fait pas partie de la formation initiale des enseignants du secondaire, certains n'en n'ont jamais entendu parler, d'autres ont suivi certains modules spécifiques).

NOUVEAUX PROGRAMMES ET REACTION DES ENSEIGNANTS

Le bandeau du programme de la classe de seconde précise :

> « Le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée. […] Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme. »

A l'issue de la classe de seconde, l'élève devra avoir « acquis une expérience » : est-ce suffisant d'être en présence de textes mathématiques pour qu'un élève sache repérer les quantifications implicites dans des propositions conditionnelles, par exemple ? Quelques compétences logiques peuvent se développer en actes mais l'expérience est-elle suffisante pour pouvoir comprendre les structures des propositions ? Quelle formation en logique les enseignants ont-ils reçue ? N'ont-ils pas construit, pour la plupart, leurs connaissances de logique uniquement comme des compétences en actes ? Cela peut leur paraître suffisant pour leur apprentissage propre et pour celui de leurs élèves mais ont-ils conscience de tous les implicites dans la quantification par exemple, implicites qui peuvent être la source d'incompréhensions ?

Comme en classe de seconde, les capacités d'argumentation, de rédaction d'une démonstration et de logique font partie intégrante des exigences du cycle terminal. Cependant, le bandeau du programme du cycle terminal contient des ajouts :

> « Il importe toutefois de prévoir des moments d'institutionnalisation de certains concepts ou types de raisonnement, après que ceux-ci ont été rencontrés plusieurs fois en situation (en série S). Il convient de prévoir des temps de synthèse, l'objectif étant que ces éléments soient maîtrisés en fin de cycle terminal (dans le cycle terminal des autres séries) »

La nécessité de consacrer des temps spécifiques à l'apprentissage de la logique a donc été précisée entre la seconde et la première. Mais qu'en est-il dans les pratiques des professeurs ?

Sur 45 professeurs du second degré interrogés, on constate une très légère accentuation de la pratique de l'apprentissage de la logique. Quelle forme d'enseignement de la logique est adoptée par les enseignants ? S'agit-il de synthèses, des moments d'institutionnalisation préconisés par les textes après plusieurs rencontres en situation ? Pas vraiment. Les professeurs seraient-ils plus attachés à dispenser un cours de logique en amont ? Non il n'y a aucun changement quantitatif de ce point de vue. On distingue trois « attitudes » de professeurs par rapport à l'enseignement de la logique au lycée :

- Ceux qui ressentent le besoin d'un cours de logique a priori et qui le font contre vents et marées : « En première S, les deux ou trois première heures de l'année sont consacrées à un cours de logique » ou qui regrettent de ne pas pouvoir le faire : « j'avais bien préparé un petit *topo* pour les secondes mais que je n'ai pas présenté par peur que tous n'accrochent pas. »
- Ceux qui respectent « l'esprit du programme » : « Dans la mesure où j'utilise le débat scientifique en classe l'utilisation de la logique est quotidienne pour mes élèves. Cela signifie que très tôt dans l'année, les principes de base de la logique sont établis en classe à

partir de situations qui font apparaitre l'impossibilité de trancher sans se mettre d'accord sur les règles du jeu »

- Ceux qui trouvent que cela se fait naturellement et qui n'éprouvent pas le besoin d'expliciter davantage les notions de logique. : « Dans presque toutes les séances on utilise la logique et il me semble préférable de la rendre *naturelle* aux élèves, plutôt que d'en faire une notion supplémentaire à apprendre. »

Une écrasante majorité de professeurs pensent que la logique doit être enseignée lors de la formation des professeurs. Est-ce justement parce qu'ils ne se sentent pas assez armés pour l'enseigner eux-mêmes ?

Quels sont les travaux réalisés avec les élèves ? Une préférence est donnée aux exercices des manuels mais les 2/3 des professeurs ayant répondu au questionnaire donnent très peu d'exercices étiquetés logique et encore moins de situations de recherche permettant de travailler la logique. La logique est loin d'être une priorité !

Dans quel(s) cadre(s) peut-on apprendre la logique ? Des séances d'accompagnement personnalisé peuvent être utilisées pour un apprentissage de la logique : d'une part il est possible d'y envisager des situations de recherche sans lien avec un apprentissage mathématique en cours ; d'autre part ces séances permettent aussi de travailler avec des collègues d'autres disciplines comme le français par exemple. La démonstration par récurrence, qui est explicitement au programme de terminale S, est depuis longtemps enseignée en tant que telle par les professeurs alors que la démonstration par l'absurde, par exemple, n'est souvent illustrée que par des exemples.

Quelle progression de la logique peut-on envisager au cours des trois années ? Qu'est-ce qui est inscrit dans les programmes de collège ? Le mot « équivalence » apparaît en classe de quatrième dans le cadre de l'analyse : « l'équivalence entre $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ et $ad = bc$ (b et d étant non nuls) ; l'équivalence entre $a \geq b$ et $a - b \geq 0$; l'équivalence entre $a > b$ et $a - b > 0$. » Le mot « caractéristique » apparaît également plusieurs fois : « justifier des propriétés **caractéristiques** du parallélogramme » ; « Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit » ; …

En seconde on peut envisager de travailler, en lien avec tous les chapitres, les notions de propositions, valeurs de vérité, connecteurs « ou », « et », négation, implication, quantificateurs. Les élèves de seconde rencontrent d'importantes difficultés langagières ; il est intéressant de travailler les conjonctions de coordination, en parallèle avec les connecteurs logiques « et » et « ou ». Il est préférable de bien comprendre la négation d'une proposition avant d'aborder la contraposée. L'essentiel des propriétés étudiées avant la classe de seconde étant exprimé sous la forme « Si …alors », on peut travailler sur l'implication et étudier la validité de propriétés réciproques. En première, l'élève peut se poser la question de l'équivalence. Au fil de son année, il rencontre diverses démonstrations qu'il va classer par genres : raisonnement direct ou par contraposée à partir d'une implication, disjonction des cas (démonstration de l'égalité des différentes expressions du calcul du produit scalaire ; démonstration de la propriété des coefficients binomiaux…). En terminale, on attend une certaine maîtrise des quantificateurs et une mobilisation de raisonnement type comme le raisonnement par récurrence. En fait cet apprentissage n'est pas aussi linéaire qu'il y parait. Par exemple, on peut (re)découvrir le raisonnement par contraposée et l'énoncer en seconde, utiliser une contraposée pour montrer un résultat en première et bâtir une démonstration en prenant l'initiative d'une contraposée en terminale.

Pour une bonne mise en œuvre de la logique au lycée, il semble nécessaire, d'une part, d'établir des progressions communes au sein d'un établissement et d'autre part de proposer des formations aux enseignants.

QUELQUES DIFFICULTES CONCERNANT L'IMPLICATION

Dans le programme et les manuels

L'implication est sans doute la notion logique la plus complexe, et elle est bien sûr au coeur de l'activité mathématique, car elle est présente dans de nombreux énoncés de théorèmes et sous-jacentes à la plupart des étapes de nos raisonnements hypothético-déductifs. Dans le tableau des objectifs des nouveaux programmes, il est demandé que les élèves soient « entraînés, sur des exemples, à distinguer dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ». Quelques remarques sur cet objectif. Tout d'abord, il y est question de *proposition conditionnelle*, et pas d'*implication*, sans que soit vraiment expliqué si les auteurs considèrent qu'il y a une différence. Et dans les manuels et les propos des professeurs, c'est essentiellement le terme *implication* qui est utilisé. Ensuite, attention, cette liste comporte d'abord 3 implications (proposition directe, réciproque, contraposée), mais la négation d'une implication ne se présente pas sous forme d'une implication ! Or, c'est une erreur fréquente chez les étudiants de proposer comme négation de $A \Rightarrow B$ une des combinaisons possibles obtenues en combinant implication et négation de *A* ou de *B*, erreur que l'on retrouve parfois en formation continue. Par ailleurs, c'est une tâche classique et assez répandue, dès le collège, de demander aux élèves d'écrire la réciproque d'une proposition conditionnelle, puis de les interroger sur la valeur de vérité de cette réciproque, en faisant bien remarquer que la proposition réciproque peut être vraie ou fausse indépendamment de la valeur de vérité de la proposition directe. En revanche, interroger sur la valeur de vérité de la contraposée quand on connaît la valeur de vérité d'une proposition conditionnelle n'est pas d'un grand intérêt puisqu'elles sont équivalentes. La contraposée n'est donc mobilisée que dans des tâches spécifiques d'écriture, mais qui sont alors surtout techniques et peu courantes, ou dans des raisonnements par contraposée, là aussi pas si courant que ça. D'où une difficulté : on peut faire l'hypothèse que pour avoir recours facilement à un raisonnement par contraposée, il est important de pouvoir la formuler facilement, mais comment s'y entraîner ?[1]

Dans les manuels, une implication est une phrase (ou parfois proposition, mais ce terme n'est pas très utilisé, les propositions sont pourtant à la base du langage mathématique) de la forme « si … alors … » Mais la plupart du temps en mathématiques, ces propositions comportent une quantification universelle implicite qui, nous le verrons plus loin, n'est pas toujours vue par les élèves. Ce ne sont donc pas des propositions de la forme $A \Rightarrow B$, mais des propositions de la forme $\forall x \quad A[x] \Rightarrow B[x]$, et cette présence d'une variable et d'un quantificateur universel est essentielle. C'est pour cela, et parce que la négation de $\forall x \quad P[x]$ est $\exists x \quad NON(P)[x]$, et celle de $A \Rightarrow B$ est

1 Cette question se pose bien sûr pour toute la dimension technique de l'activité mathématique, mais si il est encore courant de voir des exercices d'entraînement technique, par exemple à la manipulation d'expressions algébriques, le travail de manipulation syntaxique des propositions mathématiques est loin d'être une pratique répandue.

$A \; ET \; NON(B)$, que pour montrer qu'une proposition en « si … alors … » est fausse, il suffit d'UN contre-exemple, c'est-à-dire un élément qui vérifie la prémisse et pas la conclusion. Mais ces liens entre négation d'une proposition universelle, d'une implication et contre-exemple ne sont pas faits. Le contre-exemple est donné comme une technique isolée, non reliée à des connaissances logiques qui pourraient être réinvesties ailleurs. Sans être une erreur, cette absence de propos sur les variables en général, et notamment par rapport à l'implication, nous parait être un manque bien dommageable.

Mais peut-être plus grave, il y a dans plusieurs manuels une confusion entre « si … alors … » et « donc » qui pour le coup relève d'une méconnaissance de ces objets. Une phrase de la forme « si *A* alors *B* » est une proposition mathématique, on peut s'interroger sur sa vérité, et la savoir vraie ne nous permet pas de connaître la valeur de vérité de A et de B[1]. Une phrase de la forme "*A* donc *B*" n'est pas une proposition, je ne peux pas m'interroger sur sa vérité mais plutôt sur la validité de l'inférence qu'elle sous entend. Dire « *A* donc *B* » c'est dire 3 choses : que A est vraie, que B est vraie, et que j'ai de bonnes raisons de penser qu'il y a un lien entre ces deux informations, la plupart du temps le fait que je sais que « si *A* alors *B* » est vraie.

Au-delà de la difficulté de toutes façons d'enseigner la notion d'implication, due en partie à la complexité de cette notion, nous voyons qu'il y a dans les manuels une méconnaissance de cet objet préjudiciable à ce qui est écrit à son propos.

Un questionnaire proposé à des élèves de lycée et des étudiants de première année

C. Fabert a soumis un questionnaire mathématique à une centaine d'élèves de lycée et à une cinquantaine d'étudiants de première année (classes préparatoires et L1 scientifique)[2]. Les problèmes 1 et 3 (voir annexe 1) traitent de la notion de *proposition conditionnelle* dans le registre de la logique du langage courant puis dans le cadre mathématique de la résolution d'inéquations. Le problème 4 traite des notions d'*implication*, d'*équivalence*, et des *connecteurs logiques «et» et «ou»* dans le cadre mathématique de la résolution d'équation. La proposition conditionnelle a été un des points principaux traités dans ce questionnaire.

Le problème 4 a permis de mettre en évidence les faibles connaissances de la plupart des élèves sur l'implication et l'équivalence logique. Une conception rencontrée dans les copies des élèves de Seconde concerne la proximité des symboles d'équivalence et d'égalité : nous avons relevé des substitutions incorrectes entre ces deux symboles. Les problèmes 1 et 3 ont permis de distinguer différentes conceptions des élèves sur les deux formulations de propositions conditionnelles : « si A alors B », ou « B si A ». En particulier, il s'agissait de voir si les changements de cadre ou de formulation avaient une influence sur la compréhension des propositions conditionnelles, et éventuellement de remarquer des confusions entre proposition directe et réciproque, ou encore équivalence. Le problème 1 a montré que, dans une situation de la vie courante, les propositions conditionnelles sont le plus souvent interprétées selon le contexte de la situation, en particulier pour les élèves de Seconde – ce qui n'a rien d'étonnant. Cette interprétation diverge souvent de l'interprétation mathématique de la phrase. De plus, l'étude croisée des problèmes 1 et 3 a montré

1 On sait seulement qu'il n'est alors pas possible d'avoir *A* vraie et *B* fausse.

2 Une analyse des réponses est proposée dans l'article de D. Grenier et C. Fabert, « une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique », Petit x n°87 (p31-52), 2011

que cette interprétation différente des propositions conditionnelles dans une situation de la vie courante avait une influence sur l'interprétation de propositions dans le cadre mathématique.

Enfin, cette étude a montré que la conception causale-temporelle de l'implication, qui entraîne une compréhension de l'expression « B si A » comme la réciproque de la proposition conditionnelle « si A alors B », est souvent effective dans les deux cadres.

Plus généralement, les résultats de cette enquête montrent que les connaissances des élèves de lycée et des étudiants sur le raisonnement mathématique et la logique sont peu stables, voire absentes, et sont sources d'obstacles. On peut donc supposer qu'un travail au fil des chapitres, sans construction théorique des notions de logique mathématique, comme il est préconisé dans le programme actuel de lycée, ne permettra pas d'enseigner correctement ces notions. Il nous semble qu'il faudrait organiser l'enseignement de ces notions de manière à croiser les différents registres qui leur donne du sens (raisonnement déductif, logique formelle, registre ensembliste) dans les différents cadres mathématiques (algèbre, géométrie et analyse).

Une activité proposée en classe de 1S

L'IREM de Rennes a publié en 2000 une brochure intitulée « Apprentissage des structures logiques », dans laquelle était proposée une activité concernant l'implication (nous donnons une version légèrement modifiée en annexe 2). Les séances décrites dans la brochure montrent des débats autour du « vrai », du « faux », notion reliée pour certains élèves au total de points attribués par le professeur (d'où l'idée qu'une proposition peut être partiellement vraie ou partiellement fausse). Les auteurs précisent que l'absence de quantification explicite dans les propositions ne semble pas modifier les réponses. C'est pourtant notamment pour cela qu'E. Forgeoux et C. Hache ont voulu la re-proposer dans une classe de 1S. Le tableau suivant montre que les réponses étaient suffisamment variées pour qu'un débat riche s'ensuive :

	1)	**2)**	**3)**	**4)**	**5)**	**6)**	**7)**	**8)**	**9)**	**10)**	**11)**	**12)**
VRAI	11	20	24	5	13	29	16	21	14	12	17	10
FAUX	6	8	3	14	7	1	13	9	16	16	10	14
AUTRE	19	2	3	15	12	0	1	2	3	3	15	15
Total	*36*	*30*	*30*	*34*	*32*	*30*	*30*	*32*	*33*	*31*	*42*	*39*

Nombre total de copies : 30

Les extraits suivants des débats montrent qu'effectivement, la quantification implicite a posé problème :

Élève 1 : oui mais ça montre quand même que c'est pas vrai ou faux, c'est pas blanc ou noir. C'est un peu entre les deux. Il manque quelque chose mais dans le fond c'est un peu vrai. C'est pas complètement faux (…)

Élève 2 : En fait, moi ça me fait penser : qu'est-ce que c'est que ce soit vrai, qu'est-ce que c'est que ce soit faux ? Est-ce que c'est vrai parce que c'est pas faux ? Ou est-ce que c'est faux parce que c'est pas vrai ? Ou est-ce que c'est vrai parce que y'a rien où c'est faux ?

Puis plus tard :

Professeur : Si je vous dis (…) que tout rectangle est un carré, vous me dites quoi ?

Élèves : Faux. […]

Élève 1 : Vous dites tous, vous dites clairement que c'est tous, (…) mais eux ils disent jamais …

Élève 2 : Mais en maths on sait bien que ça veut dire tout.

Élève 1 : Mais là, ils disent pas tous tout le temps, c'est pas clair.

L'activité et le débat qui ont suivi ont permis de questionner avec les élèves cette pratique de quantification implicite, et de prendre le parti de l'explicitation des quantifications. Cette activité a aussi été l'occasion de reparler du contre-exemple, du domaine de quantification qui peut changer la valeur de vérité d'une proposition. Le débat est bien sûr essentiel, car c'est lui qui permet de chercher les mots pour se mettre d'accord, accord qui se fait sur l'acceptation de certaines « règles » concernant les notions de logique.

LA LOGIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES DANS LE SUPERIEUR

Positions d'enseignants

Dans le supérieur, plusieurs enseignants, notamment en classe préparatoire, font en début d'année un petit topo sur les notions de logiques classiques : connecteurs, quantificateurs, types de raisonnement. Il se présente la plupart du temps de manière plus formelle que ce qui est proposé dans les nouveaux manuels pour le lycée, on y trouve par exemple souvent les tables de vérité des connecteurs, l'équivalence entre $A \Rightarrow B$ et $NON(A)\,OU\,B$… Dans les réponses à un questionnaire élaboré par C. Fabert[1], des enseignants du supérieur associent la logique à l'idée de règles et de rigueur. La maîtrise des éléments du langage mathématique, notamment des quantificateurs, est un élément essentiel pour pouvoir comprendre définitions et théorèmes qui sont rédigés dans un langage plus formel qu'au lycée. Les démonstrations se complexifient, portent sur des objets plus abstraits (sur une classe de fonctions plutôt que sur une fonction particulière par exemple), et cela représente une réelle difficulté pour les étudiants. Là aussi, plusieurs universités proposent dans leur cursus mathématique un cours de « méthodologie » consacré à la démonstration, proposant ainsi aux étudiants non seulement d'acquérir une pratique de la démonstration (pratique qui reste limitée par le peu d'heures qui peuvent y être consacrées) mais également de réfléchir sur cette pratique afin de dégager d'une démonstration particulière des outils, notamment logiques, qui pourront être réinvestis. Par ailleurs, pour les enseignants du supérieur, la maîtrise des notions ensemblistes est essentielle, mais elles ne sont malheureusement étudiées que rapidement dans le secondaire.

Une proposition d'un cours Langage Mathématique en première année d'université

À l'Université Paris Diderot, depuis 4 ans, un cours Langage Mathématique[2] est proposé au premier semestre des filières math, math-info et info. L'idée de ce cours est de prendre le temps de réfléchir et d'étudier le langage mathématique, notamment symbolique, qui va être de plus en plus utilisé en mathématiques. Nous y étudions des expressions mathématiques, présentées comme des assemblages de signes obéissant à certaines règles et à certaines conventions, qui sont divisées en

---

[1] Dans le cadre d'une recherche en didactique des mathématiques sur la logique à la transition lycée/supérieur.

[2] http ://didel.script.univ-paris-diderot.fr/claroline/course/index.php ?cid=LM1

deux catégories, celle des noms d'objets mathématiques, et celle des propositions qui affirment des faits concernant ces objets. Dans ces expressions, une attention particulière est accordée au statut des variables : muette comme dans l'expression $\int_0^1 xdx$ qui « ne parle pas de x », et qui est équivalente à $\frac{1}{2}$, ou parlante[1] comme dans l'expression $x^2 \geq 1$, qui « parle de x » et qui est équivalente, lorsque la variable x est de type réel, à $(x \leq -1 \quad ou \quad x \geq 1)$. Nous étudions ensuite les connecteurs, qui permettent de construire des propositions plus complexes, ainsi que les quantificateurs avec une attention particulière sur l'exhibition des quantifications dans les propositions. Des liens sont faits entre structure logique d'une proposition et structure de sa preuve. Ce cours n'est pas un cours de logique mathématique, mais des définitions et propriétés des objets qu'elle étudie sont données, non pas pour un traitement formel, mais pour être illustrées par une utilisation dans des contextes particuliers. Par exemple, différentes formulations de la propriété « Toute fonction réelle périodique qui admet une limite en $+\infty$ est constante » sont reliées à différentes propositions équivalentes à $(A\ ET\ B) \Rightarrow C$. Ce travail semble aider les bons étudiants à avoir une attitude réflexive sur ce qu'ils écrivent, semble trop loin des étudiants les plus faibles, et notre impression est mitigée sur le gros des étudiants. Le problème, de toutes façons, c'est que ce travail n'étant pas poursuivi, les questions que nous essayons de les habituer à se poser sont bien vite oubliées !

UNE ACTIVITE EN CLASSE DE TS

Lors de la résolution d'un exercice, des élèves ont appliqué un théorème-élève de « conservation de l'ordre par dérivation », en déduisant de la proposition $(Pour\ tout\ réel\ x\ de\ l'intervalle\ [-3\ ;\ -1], f\ (x)\ >\ -1)$ la proposition $(Pour\ tout\ réel\ x\ de\ l'intervalle\ [-3, -1], f'(x)\ >\ 0)$. L'idée d'intégrale étant associée à l'idée de primitive, le glissement de « l'intégrale conserve l'ordre » à « la dérivée conserve l'ordre » s'est opéré par analogie. Ce théorème-élève est à l'origine de l'exercice donné en annexe 3 dont l'objectif est double : analyser les erreurs de ce « théorème-élève » mais aussi travailler la quantification et les connecteurs logiques. Pour ne pas ajouter aux difficultés de compréhension des notions d'analyse celles de compréhension de logique, l'exercice est bâti à partir de l'herbier des fonctions usuelles de Terminale S. Les fonctions à étudier ont été données pour gagner du temps, pour revisiter les fonctions incontournables de TS et pour l'exhaustivité des cas à analyser.

Première séance : (durée 1 heure)

La première partie de l'activité consiste à comparer deux fonctions sur un intervalle donné puis à comparer leurs dérivées sur le même intervalle. Une observation des premières productions montrait que les élèves écrivaient des inégalités « au flair » sans aucune justification et avec un taux de réussite très faible. Il était nécessaire que les élèves disposent de résultats exacts pour envisager l'étude des propositions conditionnelles dans la partie suivante; un temps de recherche en groupes puis une synthèse collective ont permis de valider les résultats des comparaisons de f et g puis de f' et g'. Cette phase était intéressante pour revisiter des notions fondamentales : comparer deux fonctions, résoudre une inéquation avec des démarches différentes, observer les graphiques sur la

---

[1] On dit aussi libre/liée

calculatrice, dessiner des représentations graphiques. Elle était aussi importante pour légitimer le travail ; plusieurs fonctions étudiées sont nouvelles en terminale et c'est important de les utiliser dans des contextes différents.

L'objectif de la deuxième partie du travail était d'établir d'éventuels liens logiques entre les propositions énoncées. Les élèves devaient d'abord compléter seul le tableau de la question 2 mais la plupart ne comprenait pas la différence entre les propositions 3 et 4. Le temps de travail restant n'étant plus suffisant pour réfléchir à ce problème, la tâche s'est limitée à compléter les colonnes pour les propositions 1, 2 et 3. La consultation des copies a révélé énormément d'erreurs même sur les premières colonnes où il fallait décider si *f* était ou non inférieur à *g*.

Deuxième séance : (durée 1 heure)

En visualisant les représentations graphiques des fonctions f, g, f' et g', les réponses pour les propositions 1, 2 et 3 ont été explicitées collectivement. Pour les propositions 1 et 2, il était facile d'exhiber un bon candidat ou de montrer que l'on ne pouvait pas en trouver. Lors du débat pour justifier la valeur de vérité de la proposition 3 du deuxième exemple, les élèves ont cherché à écrire la négation de la proposition 3 et certains ont remarqué que la proposition 2 était la négation de la 3. A partir de là, la proposition 3 n'a plus posé de problème. La proposition 3 a été écrite sous la forme : « Pour tout $x, P[x] \Longrightarrow Q[x]$ ». Puis sa négation sous la forme : « Il existe x tel que $P[x]$ et non $Q[x]$.» La proposition 4 ne prenant pas de sens pour les élèves, ils ont écrit sa négation par analogie avec le travail réalisé précédemment. Ils ont alors complété la dernière colonne. Pour le dernier exemple une utilisation de la négation s'est révélée nécessaire. En fin de séance, les élèves ont été invités à refaire le même travail pour deux fonctions, choisies de façon à ce que les valeurs de vérité des propositions 3 et 4 soient différentes, en argumentant par écrit leurs réponses. Le taux de réponses exactes pour les trois premières propositions était proche de 80%. Il n'atteignait que 50% pour la proposition 4.

CONCLUSION ET DISCUSSIONS

Les discussions qui ont suivi ont porté sur l'intégration des notions de logiques à d'autres activités : comment faire pour qu'elle ne semble pas « factice » ? Quelle proportion d'un travail « technique » ? Notre parti dans les activités proposées ici est de provoquer un travail spécifique, tout en contextualisant les propositions étudiées pour que d'autres notions du programme soient abordées. Les questions portant spécifiquement sur des notions de logique peuvent alors paraître un peu artificielles, mais l'expérience montre que les élèves s'y intéressent. Il est par contre important que les notions mathématiques en jeu soient bien comprises, afin qu'elles ne constituent pas un obstacle à la réflexion sur les notions de logique. Une autre possibilité que nous défendons est de travailler la logique et le raisonnement dans des activités spécifiquement conçues pour cela, comme dans les problèmes ouverts ou les Situations de Recherche pour la Classe.

Annexe 1 : Extrait du questionnaire mathématique proposé par C. Fabert :

Problème 1. *Répondre aux questions par oui (O), non (N) ou ne peux pas savoir (NPPS).*

Une mère dit à son enfant : « Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert. »
L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ?
S'il ne la mange pas ?
Si la mère avait dit : « Tu auras un dessert si tu manges ta soupe »,
vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.)

Problème 3. *Indiquer si les propositions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) et justifier.*

Propositions	*V/F*	*Justifications*
Si $x^2 > 1$ *alors* $x > 1$		
Si $x < -1$ *alors* $x^2 > 1$		
$x^2 > 1$ *si* $x < -1$		
$x > 1$ *si et seulement si* $x^2 > 1$		

Problème 4. *a et b désignent deux nombres réels. On donne cinq propositions numérotées de 1 à 5.*

1/ $a^2=b^2$ *2/* $a=b$ *3/* $a=b$ *ou* $a=-b$ *4/* $a=b$ *et* $a=-b$ *5/* $a=0$ *et* $b=0$

(Nota bene : L'implication **1** $\Rightarrow$ **2** *signifie «* $a^2=b^2$ *implique* $a=b$ *»)*
Quelles sont les implications vraies du type **1** $\Rightarrow$ *.. ?*
Quelles sont les implications vraies du type ... $\Rightarrow$ **1** *?*
Quelles sont les propositions équivalentes ?

Annexe 2 : Activité proposée en 1S :

Pour chaque ligne cocher la ou les cases qui conviennent.

		VRAI	FAUX	AUTRE
1)	Si $(x-1)(x-2)=0$ alors $x=1$			
2)	Si $x=1$ alors $(x-1)(x-2)=0$			
3)	Si la droite d a pour équation $y=2x-7$ alors d passe par le point $A(5,3)$			
4)	Si la droite d passe par le point $A(5,3)$ alors d a pour équation $y=2x-7$			
5)	La condition $x^2=4$ entraine $x=2$			
6)	Si $x=2$ alors $x^2=4$			
7)	Si $x<2$ alors $x^2<4$			
8)	La condition $x^2<4$ entraine la condition $x<2$			
9)	$MA=MB$ entraine que M est le milieu de $[AB]$			
10)	Si A, B et C sont alignés alors $AC+CB=AB$			

On considère maintenant une figure où A est un point d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r.

11)	Si $AM=2r$ alors M appartient au cercle $\mathcal{C}$			
12)	Si $AM=2r$ alors M n'appartient pas au cercle $\mathcal{C}$			

Annexe 3 : Exercice proposé en TS

Exercice 1 :

1. Dans chacun des cas comparer, sur l'intervalle donné, les fonctions f et g puis les fonctions f' et g'.

I	$f(x)$	$g(x)$	Comparer f et g sur I	Comparer f' et g' sur I
$\mathbb{R}$	e^x	e^{x+1}		
$\mathbb{R}$	x	e^x		
$]0;+\infty[$	$ln(x)$	x		
$\mathbb{R}$	x^2	x^2+2x		

2. Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes dire si elle est vraie ou fausse en justifiant les réponses.
Proposition 1 : "Il existe un réel a de I tel que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f'(a) \leqslant g'(a)$."
Proposition 2 : "Il existe un réel a de I tel que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f'(a) > g'(a)$."
Proposition 3 : "Pour tout réel x de I, $(f(x) \leqslant g(x) \Longrightarrow f'(x) \leqslant g'(x))$."
Proposition 4 : "(Pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant g(x)$) $\Longrightarrow$ (Pour tout réel x de I , $f'(x) \leqslant g'(x)$)"

Résumer les réponses obtenues en complétant le tableau ci-dessous par **V** si la proposition est vraie et **F** si la proposition est fausse.

I	$f(x)$	$g(x)$	$f \leqslant g$	$f' \leqslant g'$	Prop 1	Prop 2	Prop 3	Prop 4
$\mathbb{R}$	e^x	e^{x+1}	**V**	...	...	...	...	...
$\mathbb{R}$	x	e^x	...	...	...	...	...	...
$]0;+\infty[$	$ln(x)$	x	...	...	...	...	...	...
$\mathbb{R}$	x^2	x^2+2x	...	...	...	...	...	...

3. Proposer un intervalle I sur lequel la proposition 3 est vraie.

Quelques extraits de réponses d'élèves :

Les négations des propositions sont correctement formulées, c'est le connecteur « et » qui est ici mal exploité.

$f(x) = x^2$ et $g(x) = x+2$
$\mathbb{R}$ $f \leq g$ → Faux car $f \leq g$ sur $[-1;2]$ et $f \geq g$ sur $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$
$f' \leq g'$ → Faux car $f' \leq g'$ sur $]-\infty; 0{,}5]$ et $f' \geq g'$ sur $[0{,}5;+\infty[$.
Prop 1 → Vrai pour $a = 0{,}2$
Prop 2 → Vrai pour $a = 1$
Prop 3 → Faux car la négation est vraie (prop 2)

Terminale S

Prop 4 → Faux car pour tt réel x de I, $f(x) \leq g(x)$ et il existe x de I tel que $f'(x) \geq g'(x)$
$x = 1$ par exemple

$f(x) = x^2$ rouge et $g(x) = x + 2$ bleu

P1 : $f(a) \leq g(a)$ sur $[-1;2]$
$f'(a) \leq g'(a)$ sur $]-\infty;\frac{1}{2}]$
Donc VRAI pour 0,5 par exple.

P2 : $f(a) \leq g(a)$ sur $[-1;2]$
$f'(a) > g'(a)$ sur $]\frac{1}{2};+\infty[$
donc vrai pour 1 par ex.

P3 : néga^{tion} = P2 or P2 vrai
donc P3 FAUX

P4 : néga^{tion} = Pour tout x de I, $f(x) \leq g(x)$ et il existe x de I
tq $f'(x) > g'(x)$
$f(x) \leq g(x)$ UNIQT sur $[-1;2]$
et pas pour tout x de I.
Néga^{tion} fausse → P4 VRAIE

① $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$

P1 Vrai car sur l'intervalle $]-1;0]$
$f(x) \leq g(x)$ et $f'(x) \leq g'(x)$

P2 Vrai car sur l'intervalle $[1;2[$
$f(x) \leq g(x)$ et $f'(x) \geq g'(x)$

P3 Faux car il existe un réel x tel que $f(x) \leq g(x)$ et $f'(x) \geq g'(x)$
par exemple pour $x = 1,2$

P4 Vrai car c'est faux que pour tout réel ~~de~~ x de I, $f(x) \leq g(x)$

Remarques : le fait de travailler à l'aide de représentations graphiques est une aide efficace ; cela permet de se libérer des problèmes d'analyse et de se mobiliser sur des problèmes de logique. L'utilisation de la négation de la proposition étudiée s'est révélé un bon outil pour résoudre cet exercice et un très bon support pour comprendre la structure des propositions. Le fait que la négation de la proposition 2 est la proposition 3 a été réinvesti sans difficulté. Tous les élèves se sont bien impliqués dans cette activité, n'ayant plus la barrière de connaissances antérieures non acquises pour résoudre les problèmes posés.

ATELIER C3 : STAGES HIPPOCAMPE EN MATHEMATIQUES : DES LYCEENS A LA RENCONTRE DE LA RECHERCHE UNIVERSITAIRE

Sylvie Larras-Bouchamma, Lycée Pasquet, Arles

Lionel Vaux, Institut de Mathématiques de Luminy & IREM d'Aix-Marseille

Un stage Hippocampe en mathématiques consiste à accueillir une classe de lycéens pendant trois jours consécutifs, à l'université, pour une initiation à la recherche. Encadrés par des chercheurs, les élèves réfléchissent sur des problèmes de mathématiques, ils posent des questions et élaborent des hypothèses, puis ils expérimentent, discutent, débattent et communiquent, comme le font quotidiennement les chercheurs dans leur activité. Enfin, ils présentent leurs travaux à d'autres chercheurs lors d'une séance de posters.

À PROPOS DE L'ATELIER ET DE CE COMPTE-RENDU

Après une présentation générale, et un retour d'expérience du point de vue de l'enseignant, les discussions de cet atelier se sont orientées à la fois vers les questions d'organisation pratique des stages, et vers les possibles effets des stages pour les acteurs en présence.

Dans le présent compte-rendu, on reprend la présentation du concept mais, considérant que les questions d'organisation pratique sont déjà documentées au moins par les rapports d'activité des IREM concernés, on oriente la deuxième partie seulement vers quelques éléments d'évaluation, en fournissant des références bibliographiques.

PRESENTATION DES STAGES HIPPOCAMPE EN MATHEMATIQUES A MARSEILLE

Initié en biologie par des chercheurs de l'INSERM, le format des stages Hippocampe a été adapté aux mathématiques depuis 2005 par l'IREM d'Aix-Marseille (une quinzaine de stages Hippocampe-Math ont lieu chaque année à Marseille) et ce dispositif diffuse depuis à travers le réseau des IREM, avec des stages réguliers à Brest, occasionnels à Lyon et Nice, et un démarrage très important à Toulouse.

Historique

L'équipe à l'origine des stages Hippocampe en mathématiques était constituée de Xavier Bressaud (alors président du département de mathématiques de Luminy), Marie-Renée Fleury, Jean-Louis Maltret, Christian Mauduit et Robert Rolland (alors directeur de l'IREM d'Aix-Marseille).

Le premier stage, dirigé par Christian Mauduit, a eu lieu en juin 2005. Les retours furent très positifs, tant pour les élèves et leur professeur que pour les tuteurs. Il fut suivi par trois nouveaux stages dont un sur une thématique informatique, en 2005-2006. Cette activité a rapidement atteint un rythme de croisière d'une quinzaine de stages par an (voir la liste des stages sur le site dédié : http ://pytheas.irem.univ-mrs.fr/hippocampe).

Les stages Hippocampe étaient initialement destinés aux sections scientifiques du lycée. Très tôt, ils se sont ouverts à d'autres publics du secondaire : collèges, classes de seconde, sections non scientifiques. Dès 2006, un effort particulier a été fait pour encourager l'accès aux stages pour des classes d'éducation prioritaire : cet effort a été reconnu et soutenu par une subvention « Promouvoir l'égalité des chances à l'université » (ministère délégué à la Promotion de l'Égalité des Chances, et ministère délégué à l’Enseignement Supérieur et à la Recherche) en 2006. Depuis 2007, des stages accueillent des groupes d’élèves de l’École de la Deuxième Chance de Marseille.

Déroulement

Chaque stage mobilise une petite équipe d’encadrants scientifiques : un responsable qui détermine la thématique du stage et propose des pistes de recherche, et des tuteurs (souvent des doctorants, de jeunes enseignants-chercheurs, ou des étudiants d’une spécialité de formation à l'enseignement dans un master de mathématiques) qui accompagnent les élèves tout au long du stage.

La première partie du stage consiste en une information sur le déroulement du stage et la présentation du thème par le scientifique responsable. Les élèves forment ensuite de petits groupes, typiquement de quatre élèves. Chaque tuteur accompagne deux groupes au cours des trois jours, ce qui incite à alterner moments de discussion et moments de réflexion.

Chaque groupe s’oriente vers une piste de recherche, préétablie ou non. La première tâche des élèves est de s’approprier le thème de travail, de développer et de préciser les questions qui les intéressent, les approches qu’ils envisagent. La simple définition des objets mathématiques en jeu est souvent un problème en soi.

Le travail de recherche se poursuit ensuite avec les premières conjectures, les tests et expérimentations qui les mettent à l’épreuve, les ébauches d’argumentation. On est rapidement confronté aux erreurs, aux hypothèses erronées, aux fausses évidences. C’est l’occasion de découvrir le caractère non linéaire du développement de nouvelles mathématiques, en contraste avec le déroulement classique d’un cours ou d’un exposé. C’est aussi l’occasion de découvrir la difficulté, et l’importance, de donner une bonne définition d’un concept apparemment simple, ou d’écrire un énoncé cohérent.

Dès le deuxième jour, le travail de recherche à proprement parler est mené en parallèle d’un travail sur la formalisation et la présentation à la fois de la problématique abordée et des possibles résultats déjà établis. Souvent, une courte présentation du sujet traité par chaque groupe, devant les autres participants, est l’occasion de réaliser la difficulté d’un tel exercice. Le responsable du stage passe régulièrement dans les groupes pour discuter avec eux, voir où en est leur travail, et poser des questions (c’est en particulier surtout à lui qu’il incombe d’éviter le risque toujours présent de voir l’activité du groupe se tourner vers une voie trop évidemment sans issue).

L’après-midi du troisième et dernier jour est consacrée à la présentation de posters, élaborés dans les heures précédentes, parfois dès la veille et jusqu’en début d’après-midi. Tous les chercheurs intéressés sont conviés à cette séance au cours de laquelle ils peuvent découvrir les travaux des élèves, leur faire préciser certains points, les interroger sur leurs conjectures, leur proposer d’autres pistes.

Les élèves sont accueillis dans les locaux de l’IREM. Ils y disposent d’une salle informatique équipée de logiciels utiles à l’expérimentation mathématique. Ils ont aussi accès aux bibliothèques universitaires et du CIRM (qui restent cependant sous-utilisées). L’enseignant de la classe, ou en tout cas un enseignant responsible, est généralement présent, sans toutefois participer à l’encadrement scientifique ou pédagogique du stage.

Variantes

Ce canevas, aussi détaillé soit-il, est en réalité susceptible de subir certains aménagements. En particulier, la phase initiale se déroule assez différemment suivant les stages ; dans certains, le parcours est bien balisé, et les élèves choisissent entre plusieurs tâches proposées. Dans d'autres, la présentation est à dessein relativement floue, illustrée d'exemples peu théorisés et de questions imprécises ; il revient aux élèves de construire une question et de trouver, à l'aide des tuteurs, les outils pour la résoudre. Ils se trouvent ainsi vraiment dans la position d'un chercheur, et découvrent que poser une bonne question peut être plus difficile que donner une bonne réponse !

Ce type de stage peut être, au début, assez perturbant pour les élèves, qui se trouvent loin de l'univers encadré qu'ils connaissent habituellement. Le bon équilibre (s'il existe !) entre encadrement et non-directivité n'est pas clair pour nous, et c'est le plus souvent la personnalité du chercheur responsable du stage, sa propre approche de la recherche, qui détermine ce curseur.

Si le responsable du stage est généralement un chercheur permanent en mathématiques, il peut également être doctorant ou encore issu d'une autre discipline, notamment l'informatique. Et bien que de nature mathématique, les thèmes abordés peuvent être issus de questions liées à la physique, à l'informatique, aux sciences humaines, à la biologie, *etc.*

Et on n'a cité là que les variations qui ont cours à l'IREM d'Aix-Marseille : la transposition du concept par d'autres équipes a donné et donnera sans doute lieu à d'autres expérimentations encore. Par exemple l'IREM de Brest a organisé des stages en physique et en chimie.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Dominique Barbolosi a publié dans le numéro 71 de Repères–IREM (2008) une description détaillée et commentée d'une série de stages qu'il a coordonnés sur le thème Mathématiques et Médecine. Notons ici qu'en plus des stages qu'il a animés à l'IREM d'Aix-Marseille, il pratique régulièrement des stages « hors les murs », généralement sur un ou deux jours seulement, dans des établissements scolaires un peu partout en France… preuve supplémentaire de la flexibilité du concept.

Sur la base de cette expérience, il propose dans un second article paru dans le numéro 83 de Repères-IREM (2011) de réintroduire une chronologie naturelle dans l'enseignement des mathématiques, du concret vers l'abstrait.

Dans une communication au colloque Espace Mathématique Francophone 2012, Arnoux et Vaux détaillent le déroulement des stages tels qu'organisés à Marseille : l'essentiel de la section précédente en est repris. Ils présentent également les motivations qui ont présidé à la création des stages Hippocampe en mathématiques, et celles qui sous-tendent leurs évolutions les plus récentes : ils insistent notamment sur le rôle que peuvent jouer de tels stages dans la formation initiale des enseignants. Ils pointent par ailleurs la nécessité d'une évaluation sérieuse et scientifiquement recevable des effets que produisent ces stages sur ceux qui y participent : à la fois les classes, mais également leurs enseignants, et les chercheurs qui les encadrent.

Les premiers jalons d'une telle étude ont été posés dans le cadre d'une collaboration entre l'équipe ADEF (Apprentissage, didactique, évaluation, formation : IFÉ / université d'Aix-Marseille) et le CeDEC (Centre pour le développement et l'évaluation des compétences, École de la Deuxième

Chance de Marseille) : une équipe de didacticiens a suivi le travail d'un groupe de jeunes « décrocheurs » issus de l'É2C au cours d'un stage Hippocampe. Assude, Dunand, Feuilladieu, et Mercier ont publié les résultats de cette étude dans une communication au colloque Sociologie et Didactiques à la HÉP Vaud à Lausanne (2012) :

- d'une part ils tempèrent le caractère de véritable « recherche » pour qualifier l'activité menée par le groupe, en mettant en évidence des postures d'enseignement récurrentes de la part des tuteurs ;

- d'autre part ils confirment la mobilisation de connaissances et compétences antérieures en mathématiques, y compris chez ce public *a priori* en difficulté.

Plus récemment, une étude dirigée par Teresa Assude est en cours, comparant le déroulement d'un stage pour un groupe d'élèves de l'É2C et un groupe de lycéens de filière scientifique, auxquels est proposé le même sujet de recherche (basé sur la résolution d'un casse-tête). Coïncidence avec l'atelier sujet de ce compte-rendu : la classe de lycée concernée était une classe de première S du lycée Pasquet à Arles accompagnée par Sylvie Larras, le chercheur responsable était Lionel Vaux, et le stage a eu lieu du 27 au 29 mai, soit la semaine suivant notre intervention au colloque.

L'exploitation des données recueillies pour cette enquête est en cours, et l'étude comparative prévue n'est pas encore publiée. Une partie des données a cependant déjà fait l'objet d'un travail de recherche en didactique : dans son mémoire de master, Olivier Schettino se base sur les captations du stage du groupe de première S pour mettre en évidence le rôle des changements de représentation sémiotique (au sens de Duval) dans la progression des élèves vers une réponse à une question de recherche.

Enfin, le lecteur intéressé par les résultats les plus concrets et immédiatement tangibles des stages Hippocampe est invité à venir admirer les posters créés par les stagiaires, dont les photos (malheureusement pas toujours bonnes) sont systématiquement publiées sur le site : http ://pytheas.irem.univ-mrs.fr/hippocampe.

RÉFÉRENCES

Barbolosi, D. (2008). *Un exemple de démarche scientifique.* Repères-IREM, 71.

Barbolosi, D. (2011). Du concret à l'abstrait, de l'heuristique à la rigueur : un nouvel espoir pour l'enseignement des mathématiques ? Repères-IREM, 83.

Arnoux, P. & Vaux, L. (2012). Recherche en mathématiques pour les élèves de Lycée : l'exemple des stages Hippocampe. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone 2012, G.T. 10 : La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques : fondements et pratiques. Université de Genève, 3-7 février 2012.

Assude, T., Dunand, C., Feuilladieu, S. & Mercier, A. (2012). Un dispositif pédagogique et didactique pour les jeunes « décrocheurs » : quel fonctionnement, quels effets ? Contribution au colloque Sociologie et didactiques : vers une transgression des frontières. Haute École Pédagogique Vaud, Lausanne, 13 et 14 septembre 2012.

Schettino, O. (2013). En quoi l'analyse des changements de représentation sémiotique dans la résolution d'un problème ouvert lors d'un stage Hippocampe peut aider à la compréhension des difficultés des élèves en classe de mathématiques ? Mémoire de recherche pour l'obtention du master de Mathématiques et Applications de Marseille, parcours Didactique des Mathématiques, Université d'Aix-Marseille. Teresa Assude et Lionel Vaux, directeurs. Soutenu le 11 septembre 2013.

ATELIER C4 : MATRICES AU LYCEE : DE NOUVELLES POSSIBILITES, POUR LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR ?

Anne Balliot, Lycée Victor et Hélène Basch, IREM de Rennes

Ghislaine Gueudet, IUFM Bretagne UBO, IREM de Rennes

Cet atelier concerne l'enseignement des matrices, prévu par le nouveau programme de TS spécialité, et ses apports possibles au niveau post-bac. Nous nous sommes basées sur les textes officiels, sur des manuels scolaires, et sur un enseignement réalisé en 2012-2013. Le programme concernant cet enseignement souligne la nécessité de proposer la résolution de problèmes, dans lesquels les matrices apparaissent comme outils, et d'utiliser divers logiciels. Il laisse beaucoup de liberté, concernant les contenus mathématiques. Ceci pose question aux professeurs. Une grande importance est accordée au contexte des probabilités, alors que la géométrie joue un rôle moindre. Nous posons la question de l'appui possible sur cet enseignement en post-bac, en particulier pour l'enseignement de l'algèbre linéaire. Nous examinons en détails l'exemple du thème « pertinence d'une page web ».

Cet atelier concerne l'enseignement des matrices, prévu par le nouveau programme de TS spécialité, et ses apports possibles au niveau post-bac. Ce que nous présentons peut être considéré comme une première réflexion sur ce thème, qui demande à être suivie de recherches plus approfondies. Nous nous sommes basées sur les textes officiels : programme paru au Bulletin Officiel (B.O. 2011), document ressource « Matrices » ; sur des manuels scolaires (Math'x 2012, Transmath 2012, Odyssée 2012 en particulier), et sur un enseignement réalisé en 2012-2013 par l'une des auteures de cet article.

PRESENTATION DU PROGRAMME, ORIENTEE PAR DES QUESTIONS

Nous remarquons d'emblée que le programme ne fixe pas d'objectif très clair, en termes de contenus théoriques qui pourront être exigibles des élèves. En cette première année de mise en place de cet enseignement, alors qu'aucun sujet de Baccalauréat n'est disponible, cela peut être déstabilisant pour les enseignants et les élèves. Ce manque de repères clairs peut poser problème en particulier pour les élèves moins à l'aise. Pour le détail des contenus, nous renvoyons le lecteur aux textes officiels.

Nous retenons ici qu'il s'agit de proposer un enseignement basé sur la résolution de problèmes, dans lequel les matrices, et les opérations sur les matrices apparaissent comme des outils. Cet enseignement doit mobiliser un certain nombre de logiciels : logiciels de calcul formel, GeoGebra, tableur, et la calculatrice.

La plupart des manuels choisissent d'introduire les matrices avec des problèmes de coût, ou de graphes probabilistes. Dans ces problèmes, les matrices apparaissent comme des tableaux de nombres, des représentations économiques en temps pour effectuer certains calculs. Les puissances d'une matrice, le produit d'une matrice par un vecteur, apparaissent assez naturellement dans ces contextes ; ce qui permet d'introduire en cours la formule du produit, comme un prolongement « naturel » de ces cas particuliers. Les suites de matrices sont aussi introduites, et leur étude amène à un calcul de puissances, qui sert de support à l'introduction de la diagonalisation. Certains manuels introduisent les notions de valeur propre et vecteur propre.

Plusieurs points nous semblent intéressants à souligner, à ce propos.

Matrices et nombres réels : analogies, différences, et conséquences

D'abord l'introduction des matrices comme tableaux de nombres amène des questions portant sur les conséquences du jeu possible sur les analogies et différences entre matrices et nombres réels.

A propos des propriétés du produit, la matrice nulle O, et la matrice identité I sont associées par analogie avec les nombres 0 et 1. Cela n'est pas sans soulever des difficultés, puisque les élèves peuvent se tromper sur la taille de la matrice O ; quant à la matrice I, ils peuvent croire qu'elle n'est composée que de 1. De plus les confusions matrice-réel sont fréquentes, dans les copies des élèves : il n'est pas rare de voir écrit, par exemple A-I = I*(A-1), ou des opérations comme celle qui apparaît ci-dessous (figure 1).

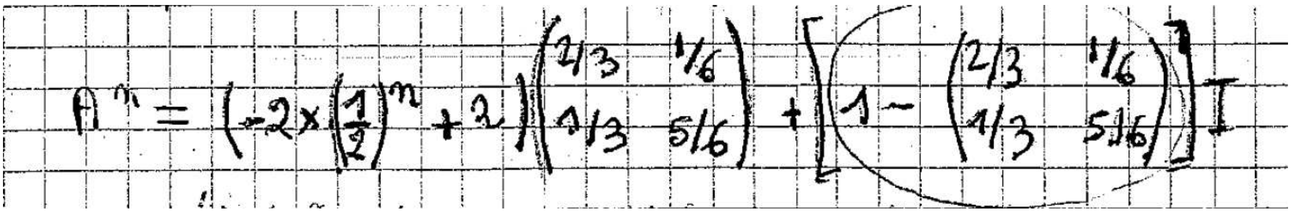


Figure 1 : Opérations avec des nombres réels et des matrices 2x2, des confusions !

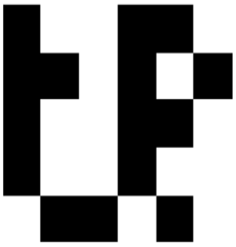
Souligner les différences entre produit de matrices et produit de nombres réels offre toutefois des pistes intéressantes : le produit n'est pas commutatif, certaines matrices non nulles n'ont pas d'inverse. Ces constats permettent de mettre en évidence l'idée de loi de composition, et le fait que de telles lois peuvent avoir différentes propriétés.

A propos des suites, la limite d'une suite de matrice est une notion qui semble naturelle aux élèves, en prolongement de ce qu'ils savent sur les suites de réels. Il s'agit ensuite de bien souligner que l'analogie reste limitée : on ne peut pas parler de suite croissante de matrices !

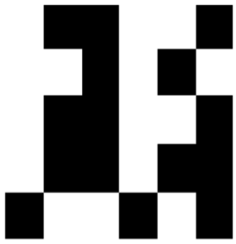
Beaucoup de visualisation, et peu de géométrie

Le document ressources « Matrices » (MEN, 2012) propose de nombreux thèmes et problèmes exploitant l'idée d'image numérique, ou les possibilités de visualisation offertes par certains logiciels. Ainsi, une image numérique formée de pixels blancs ou noirs est associée à une matrice de 0 et de 1 (figure 2) ; l'objet matrice prend alors un autre sens, comme forme de représentation, sur laquelle on va opérer des échanges, entre 0 et 1 pour obtenir le négatif d'une certaine image en noir et blanc, par exemple.

2. Opérations sur les images



$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&0\\0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1\\1&0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$



On transforme la matrice A associée à l'image de gauche en remplaçant 1 par 0 et 0 par 1, on obtient la matrice B, associée à l'image de droite, qui est le négatif de l'image de gauche.

Figure 2. Matrices et images numériques, extrait du document ressource « matrices ».

La construction de la Fougère de Barnsley, utilisant un logiciel de calcul formel, dans lequel quatre matrices agissent de manière aléatoire sur des points, est un autre exemple de visualisation susceptible de motiver les élèves. Cependant, il amène un travail qui relève essentiellement de la programmation informatique, et non de la géométrie.

Il est cependant question de géométrie, dans le document ressources comme dans certains manuels. Des problèmes abordent la notion de rotation, de symétrie, et les matrices associées. Certains manuels (Transmath 2012) font calculer aux élèves les coordonnées de l'image d'un point, par exemple par une rotation d'angle Θ, et en déduisent que l'on peut représenter cette transformation par l'action d'une matrice. Cette méthode est proche de ce qui pourrait être fait à l'université – notons que l'on attend le plus souvent à l'université, pour parler de rotation, d'avoir introduit les espaces euclidiens, ce qui est généralement pratiqué en deuxième année. Dans d'autres manuels en revanche (Math'x 2012), on observe l'effet d'applications géométriques sur des images, en utilisant GeoGebra. Le logiciel agit comme « boîte noire » : une matrice est entrée, et on observe comment elle agit sur des points. Ainsi le lien entre matrice et transformation géométrique est fait à l'inverse de la méthode précédente : on fait agir une matrice, par le biais du logiciel, et on observe que son action est la même que celle d'une rotation. En conséquence, on admet que la matrice en question « représente » une rotation.

Cela pourrait être un premier pas vers des usages géométriques des matrices, susceptibles de faire un lien avec l'algèbre linéaire. Toutefois, l'obstacle du passage d'applications agissant sur des points, à des transformations qui opèrent sur des vecteurs, est bien connu (Gueudet, 2004).

Quelle évaluation, pour cet enseignement ?

La mise en place d'un enseignement fondé sur la résolution de problèmes soulève immédiatement la question de l'évaluation qui peut suivre. Ici, plusieurs aspects interrogent : sera-t-il possible de pratiquer la résolution de problèmes, l'emploi de logiciels, dans l'évaluation qui sera faite au baccalauréat ? Quelles connaissances, savoir-faire seront requis des élèves, pour un enseignement ne fixant pas clairement de connaissances théoriques exigibles ? Le sujet de baccalauréat de Pondichéry (le seul dont nous disposions au moment de l'atelier, et qui a été présenté aux participants), ne semble pas aller dans le sens de la résolution de problèmes.

PRESENTATION DE LA PROGRESSION SUIVIE EN 2012-2013 DANS UNE CLASSE DE TS SPECIALITE

Le programme sur les notions de matrices a été découpé en trois parties intercalées par de l'arithmétique. Cela a permis aux élèves de revenir sur des notions (en particulier en arithmétique) et à l'enseignante de s'approprier le nouveau programme. Le volume horaire consacré à l'enseignement des matrices a été d'environ 26 h (pour 30 h d'arithmétique).

Le premier chapitre, (12h) en novembre, avait comme objectif d'introduire les matrices, avec la notion de graphe et de suite de matrices, les calculs (somme, produit, puissance) et de travailler sur des marches aléatoires. On a étudié par exemple le problème du collectionneur et le modèle d'Erhenfest à 2 boules (problèmes extraits de Math'x) avec utilisation de logiciels pour visualiser et simuler.

Le deuxième chapitre (6h en février) a traité de l'inverse de matrice, déterminant, systèmes et applications sur des exemples de la diagonalisation. Exemples de problèmes traités : matrice et rotation (extrait de Transmath), chiffrement de Hill (qui permet de réinvestir des notions apprises en arithmétique, extrait de Math'x, partie arithmétique).

Le dernier chapitre (8h en mai) a concerné les suites de matrices du type $U_{n+1}=AU_n+B$, de la convergence des suites de matrices et du comportement asymptotique d'une marche aléatoire. Un exemple de problème étudié est celui de la pertinence d'une page web, activité proposée dans cet atelier.

Une autre approche (d'une collègue) serait à partir d'un premier problème, « le funambule », de rencontrer une grande partie des notions à appréhender, peut-être est-ce davantage dans l'esprit du programme.

Les évaluations données sur ces chapitres ont été bien réussies.

Commentaires et discussions au cours de l'atelier, sur le programme

Quelques éclaircissements ont été apportés, sur les intentions des concepteurs du programme (de notre point de vue, il serait utile à tous les professeurs de connaître ces intentions !).

Il semblerait qu'il n'y ait pas d'objectif imposé, en termes de contenu théorique exigible des élèves, à la suite de cet enseignement. En particulier, celui-ci ne devrait pas donner lieu à une évaluation de type « restitution organisée de connaissances ». La liberté, laissée à l'enseignant (programme très bref, mentionnant des « exemples de problèmes »), est un choix délibéré. Les concepteurs de programmes souhaiteraient que le document ressource, très riche, soit encore complété par d'autres exemples de problèmes.

L'une des intentions du programme est de proposer une première initiation à l'algèbre linéaire. Ce point a fait débat : est-ce que les choix faits permettent réellement une telle initiation, alors même que les matrices sont présentées comme des tableaux de nombres, et qu'il ne peut pas être question d'espace vectoriel. Un autre changement majeur dans le nouveau programme est la réduction de la place accordée à la géométrie. Or celle-ci fournit également un mode d'approche de l'algèbre linéaire...

Autre point délicat : l'évaluation. Les concepteurs du programme souhaitaient que soit associée à cet enseignement une évaluation spécifique, sous forme de Travaux Pratiques. Ceci n'a pas été possible à organiser, dans les conditions actuelles.

Une nécessité de formation spécifique des professeurs est soulignée !

FOCUS SUR UN THEME : « PERTINENCE D'UNE PAGE WEB »

Nous avons testé en classe une activité portant que le thème « pertinence d'une page web », thème qui figure parmi les exemples donnés dans le document ressources « matrices » (texte de l'activité en annexe). Pour cette activité, l'enseignante s'est inspirée des manuels Math'x et Odyssée, tout en effectuant des modifications destinées en particulier à limiter à 1h30 le temps consacré à ce travail.

À propos du thème « pertinence d'une page web », nous notons que celui-ci soulève d'emblée des questions de définition. Qu'est-ce que la pertinence ? Il faut supposer au préalable qu'une recherche par mots-clés a été faite, souligner qu'on est obligé de présenter les pages obtenues dans un certain ordre, et qu'il faut donc faire un choix, pour cet ordre. Il peut d'ailleurs être intéressant de faire effectuer aux élèves une telle recherche, pour rendre plus concrète la question posée. Nous n'avons pas fait ce choix ici, par manque de temps, et il a sans doute manqué aux élèves. Le document ressource introduit très soigneusement la notion de pertinence, en faisant compter les liens entrants sur une page, puis en justifiant pourquoi le seul décompte des liens entrants n'est pas un bon modèle de pertinence. Il introduit plusieurs modèles possibles, et montre finalement comment on en arrive à l'idée d'un « surfeur aléatoire ».

Selon les manuels, la réflexion sur la notion même de pertinence est plus ou moins approfondie, avant l'introduction du modèle du « surfeur aléatoire ». Un Internaute se déplace sur un certain ensemble de pages, associées par des liens. L'indice de pertinence d'une page est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité que le surfeur soit sur cette page après n clics. Deux types de « surf » sont envisagés, dans le document ressource et dans les manuels : le surf « sans saut » (déplacement en suivant les lignes, considérés comme équiprobables) et déplacement « avec saut » (associant le déplacement selon les liens et le choix aléatoire d'une page donnée).

Pour cette activité, nous avons choisi un intitulé : « procédé de classement » qui ne fait pas référence à la notion de pertinence qui nous semblait ambigüe. Nous avons également choisi d'introduire directement le modèle du surfeur « avec saut », ce qui était sans doute rapide, pour les élèves. Le travail de modélisation, avec un arbre, et la recherche de deux matrices a dû être guidé. En revanche, le calcul des probabilités de fréquentation, avec la calculatrice n'a pas posé de problème aux élèves ; et le fait de constater que, quelque soit l'état initial, on convergeait toujours vers la même probabilité limite a retenu leur attention.

Commentaires et discussions au cours de l'atelier, sur l'activité et le thème « pertinence d'une page web »

Dans cette activité, les élèves sont amenés à manipuler des matrices lignes. Dans le programme, on travaille essentiellement sur des matrices colonnes, mais les matrices ligne sont aussi abordées, dans le cas des marches aléatoires. Cela a donné lieu à des discussions, sur la pertinence de ce choix : ne vaut-il pas mieux s'en tenir aux colonnes, notamment dans un objectif de préparation à l'enseignement supérieur ? Les spécialistes de probabilités connaissent le lien entre Chaîne de Markov et matrice ligne (matrice d'une forme linéaire), mais ceci n'est pas évident, pour des professeurs non spécialistes ; et le document ressource ne donne pas d'éclairage sur ce point.

A propos du texte même de l'activité qui a été testée en classe, il semble moins guidé que les propositions faites dans les manuels. Notamment, le fait de leur proposer d'observer ce qui se passe pour plusieurs états initiaux peut susciter un vrai questionnement. Cependant, des évolutions du texte actuel (suppression de certaines questions intermédiaires) pourraient enrichir la recherche menée par les élèves.

Qu'est-ce que les élèves apprennent, à propos des matrices, dans cette activité ? Ils doivent d'abord modéliser, et donc effectuer une représentation sous forme d'arbre, puis passer aux matrices. Ceci leur permet ensuite de traiter le problème.

RETOUR SUR LES APPORTS POSSIBLES, POUR LE POST-BAC.

Seuls certains élèves suivent la spécialité mathématique. Il n'est donc pas possible, au niveau post-bac, de s'appuyer sur ces contenus comme si ils étaient connus des étudiants.

L'apport post-bac est donc plutôt à considérer en terme d'appui sur les principes retenus pour ce programme :

- résolution de problèmes ;
- emploi des TICE ;
- travail associant algèbre linéaire et probabilités.

La question se pose différemment selon les filières : CPGE, IUT, Université. Dans le cas de la première année d'université, on peut imaginer proposer des travaux de groupe, de type exposé, à propos de thèmes extraits du programme de spécialité TS.

Est-il possible d'expérimenter un tel dispositif, dans les conditions actuelles de l'enseignement universitaire ?

Compléments issus des discussions lors de l'atelier

Le nouveau programme des DUT informatique prévoit un enseignement de modélisation mathématique, dont le contenu est libre. Ceci peut offrir un espace propice pour ce type de travail.

Approfondir ces questions demanderait un réel travail, au sein de groupes de type IREM.

REFERENCES

B.O. (2011). *Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011*. Programme de l’enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques.

Gueudet, G. (2004). Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24/1, 81-114, la Pensée Sauvage, Grenoble.

MEN/DEGESCO (2012). *Ressources pour la classe Terminale générale et technologique. Matrices.* http ://eduscol.education.fr/cid45766/mathematiques-pour-le-college-et-le-lycee.html

Math'x : Le Yaouanq, M.-H. (dir.) (2012). *Collection Math'x. Enseignement de spécialité* Term. S. Paris : Didier.

Odyssée : Sigward, E. et al. (2012). *Odyssée Maths Terminale S éd. 2012 - Livre de l'élève, enseignement de spécialité*. Paris : Hatier.

Transmath : Bénizeau, P., Barros, J.-M., Morin, J. (dir.) (2012). *Transmath. Enseignement de spécialité Term. S.* Paris : Nathan.

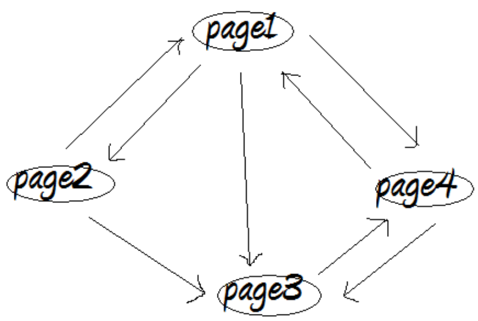
ANNEXE

TS1/2/3 Spe Math 2013 **Classement de pages web par un moteur de recherche**

Références : Document d'accompagnement+manuels Odyssée+Math'x

---

Le graphe ci-dessous représente les liens existant entre quatre pages web numérotées de 1 à 4. Un internaute surfe sur ces pages, et on s'intéresse à la probabilité qu'il soit sur une page donnée après *n* clics.



Cet internaute surfe de manière aléatoire de la façon suivante :

Il utilise deux onglets F et G : Dans 75% des cas, il est sur l'onglet F ; sur cet onglet il suit, de façon équirépartie, les liens proposés par le graphe. Dans 25% des cas il est sur l'onglet G ; sur cet onglet il choisit au hasard de façon équirépartie une page quelconque y compris la page en cours.

1) Modélisation du phénomène d'évolution

a) Pondérer le graphe donné, correspondant donc aux déplacements du surfeur sur l'onglet F, et donner la matrice de transition *T* associée.

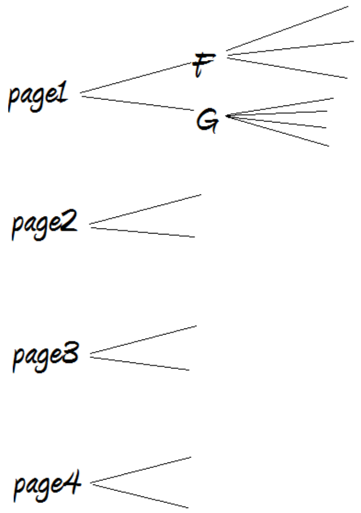
b) Pour *n* entier positif, on note X_n la matrice ligne donnant la répartition des probabilités de fréquentation des quatre pages après *n* clics.

Montrons que le processus d'évolution peut se modéliser par cette suite (X_n) qui vérifie la relation $X_{n+1} = X_n \times A + B$, les matrices *A* et *B* étant à déterminer.

Notons Y_n la variable aléatoire qui représente la page sur laquelle on se trouve après *n* clics.

On a alors $X_n = \left(P(Y_n = 1) \quad P(Y_n = 2) \quad P(Y_n = 3) \quad P(Y_n = 4) \right)$

Compléter l'arbre ci-contre pour exprimer $P(Y_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(Y_n = k)$ pour *k* allant de 1 à 4.



$P(Y_{n+1}=1)=\ldots\ldots\times\ldots\ldots\ldots P(Y_n=1)+\ldots\ldots\times\ldots\ldots\ldots P(Y_n=2)+\ldots$

$P(Y_{n+1}=2)=\ldots\ldots\times\ldots\ldots\ldots P(Y_n=1)+\ldots\ldots\times\ldots\ldots\ldots P(Y_n=2)+\ldots$

$P(Y_{n+1}=3)=\ldots\ldots\times\ldots\ldots\ldots P(Y_n=1)+\ldots\ldots\times\ldots\ldots\ldots P(Y_n=2)+\ldots$

$P(Y_{n+1}=4)=\ldots\ldots\times\ldots\ldots\ldots P(Y_n=1)+\ldots\ldots\times\ldots\ldots\ldots P(Y_n=2)+\ldots$

Conclure.

2) Convergence

a) On pose $X_0=(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$. Déterminer X_1 , X_5 , X_{10} et X_{20} à l'aide de la calculatrice. Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite (X_n) ?

b) Que se passe-t-il avec une autre répartition initiale ?

c) On suppose maintenant que quelle que soit la page de départ, la suite des matrices lignes (X_n) converge vers une matrice ligne X (état stable du système) vérifiant $X = XA+B$.

A quelle condition peut-on trouver X de manière unique ?

Déterminer X puis comparer avec vos conjectures précédentes.

Si on effectue sur un moteur de recherche une recherche par mots-clés, ce moteur va trouver un ensemble de pages correspondant à ces mots-clés. Etant donné le grand nombre possible de ces pages, il faut les fournir dans un certain ordre.

On peut chercher à associer à chaque page un nombre, sa pertinence, qui permettra ensuite le classement.

Une manière de calculer la pertinence d'une page est de considérer qu'elle correspond à la probabilité de visite de cette page par un surfeur comme celui que nous avons étudié ici.

Dans notre exemple, l'état stable trouvé nous donne alors la pertinence de chaque page. En pratique la recherche de l'état stable ne se fait pas par la résolution de l'équation matricielle (les dimensions sont trop importantes rendent les calculs trop longs). On approche l'état stable très rapidement comme dans 2a).

Cet algorithme est adapté de l'algorithme de PageRank(PR), inventé par Larry Page, cofondateur de Google. (Lire point info p173 de votre manuel.)

SYNTHESE

Trois conférences et douze ateliers nous ont permis de faire un point général sur la réforme des programmes du lycée, en mathématique et en physique, et leurs conséquences pour l'entrée de nouveaux étudiants à l'université.

CONTEXTE

Il convient tout d'abord de rappeler le contexte institutionnel sans cesse dégradé dans lequel se fait cette nouvelle réforme des programmes. Au lycée, les évolutions s'accompagnent de nouvelles réductions des grilles horaires, en mathématiques comme en physique, globalement, sur les deux années du cycle terminal. En outre, ces évolutions laissent maintenant un volume non négligeable d'heures d'enseignement à l'initiative des établissements scolaires : certains mettent l'accent sur l'appronfondissement, d'autres sur la remédiation ou l'orientation, ce qui accentue les disparités entre les élèves du secondaire. A l'Université, l'autonomie des universités, tant au niveau administratif qu'au niveau de la structure et des contenus des diplômes, était déjà une réalité combattue par les communautés. Voilà qu'elle menace de s'étendre au niveau de l'enseignement secondaire.

L'adoption du système LMD avait déjà vu s'installer un morcellement préjudiciable des enseignements universitaires, avec une augmentation afférente des périodes d'examen et un raccourcissement des périodes d'enseignements : l'année universitaire ne compte plus, au mieux, que 26 semaines d'enseignement (souvent 24 et contre 32 dans l'enseignement secondaire) avec, le plus souvent, un découpage de l'enseignement d'une même discipline en plusieurs unités distinctes.

Enfin les flux d'étudiants du lycée vers l'enseignement supérieur ont considérablement changé dans les vingt dernières années. Le public entrant dans les licences scientifiques à l'université est très hétérogène et loin d'être majoritairement composé d'étudiants issus des filières scientifiques du lycée.

Le système éducatif français conduit, plus que jamais, beaucoup des élèves scientifiques, non pas vers l'Université, mais d'abord vers des filières sélectives : les nombreuses classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE), les études de santé, les instituts universitaires de technologie (IUT), voire les sections de techniciens supérieurs (STS). Les effectifs dans les licences scientifiques ont mécaniquement tendance à baisser, mais ce n'est pas le fruit d'une désaffection des étudiants pour les sciences. Les élèves peuvent envisager des études scientifiques longues mais ils préfèrent s'orienter vers des structures plus rassurantes et plus proches de celles du lycée. La conjoncture économique pousse aussi à s'assurer un diplôme intermédiaire à Bac + 2. De fait, même si l'Université forme une bonne partie des étudiants scientifiques aux niveaux master et doctorat, une majorité d'entre eux ne provient pas d'une licence scientifique effectuée à l'université.

Pierre Arnoux relie ce phénomène de flux à celui du faible taux de réussite en Licence : par exemple, la courbe ascendante du chômage chez les jeunes est directement liée à l'inscription croissante de bacheliers professionnels dans les licences. Leur proportion est en nette augmentation mais leur taux de réussite reste très proche de 0%. Des étudiants s'inscrivent aussi à l'université pour tenter d'améliorer leur CV et ils peuvent disparaître dans l'année pour des raisons x ou y, un travail trouvé par exemple. Beaucoup ont aussi des conditions sociales très dégradées, avec un emploi qui ne leur permet pas d'assurer une assiduité aux enseignements ou de dégager du temps personnel pour l'étude. Cette grande hétérogénéité des publics en licence est devenue un problème sans doute bien plus difficile à gérer que l'évolution du programme de lycée scientifique. Elle contribue à expliquer des taux relativement bas de réussite en licence scientifique.

Dans ces conditions, les universités ont mis en place des dispositifs pour accueillir ces publics hétérogènes. Il s'agit en particulier de prendre en main les bacheliers techniques ou professionnels dont nous venons de parler plus haut. Pour eux, l'impact de ces dispositifs reste limité. L'université reste difficile, elle n'est pas à la portée de tous, contrairement à ce que l'on pourrait croire. Après avoir suivi les remises à niveau, ces bacheliers se réorientent vers des IUT, des STS ou des Diplômes d'Universités (DU).

Ces différents flux d'élèves et d'étudiants révèlent des situations paradoxales : par exemple les filières courtes accueillent des étudiants scientifiques qui viennent ensuite poursuivre des études dans les universités, tandis que ces dernières remettent à niveau des élèves faibles qui iront ensuite vers des IUT ou des STS. D'où les questions : l'université doit-elle accepter la mise en place de ces filières de remise à niveau ? L'université doit-elle accueillir tous les élèves ? C'est finalement la place de l'Université dans ce paysage éducatif (lycée, CPGE, différentes filières courtes…) qui serait à questionner. Signalons ici qu'en principe, les IUT et les STS devraient maintenant réserver une partie de leurs recrutements à des bacheliers technologiques et professionnels.

La comparaison avec la situation en Belgique est intéressante. L'Université en Belgique est l'institution qui donne les formations de plus haut niveau. Il n'y a pas de structures analogues aux CPGE, et les élèves, ayant moins de choix, s'orientent « correctement » entre les filières courtes (hautes écoles belges) et la filière longue (universités). Les dispositifs proposés et décrits dans la conférence 3 jouent vraiment leur rôle de favoriser la transition entre le lycée général et l'université. Des remises à niveaux existent mais les dispositifs sont variés et proposés à différentes périodes de l'année. Ils permettent aux étudiants de développer leur autonomie et les incitent à travailler de façon régulière.

Cependant, comme tous les contributeurs le soulignent, accompagner les élèves du lycée vers l'Université demande un fort investissement pédagogique et cela nécessite de s'en donner les moyens. A Mons, par exemple, l'université a consacré un poste à temps plein pour la bonne mise en œuvre des dispositifs de remédiation. Jamais en France le Plan Réussite en Licence, éphémère et dont on a rappelé les effets très incertains, n'a permis la création de postes dans les universités afin qu'ils se consacrent prioritairement aux étudiants en difficulté. L'action d'aide à la réussite des étudiants se déroule donc surtout à un niveau local, indépendamment du Plan Réussite en Licence : par exemple, l'année 0, à Limoges, permet aux étudiants qui la suivent intégralement d'envisager la licence en trois années avec de bonnes chances de réussite. La filière d'excellence, à Strasbourg, permet quant à elle de reconquérir un nouveau public d'étudiants. C'est une classe préparatoire intégrée à l'université. Les étudiants ne se dirigent donc plus vers les CPGE pour revenir après vers l'Université. Ils y sont accueillis dès la première année mais c'est aussi un dispositif très coûteux et qui est financé dans ce cas précis sur un IDEX. Ces dispositifs ont le mérite d'exister. D'autres modes de fonctionnement sont donc possibles en licence sous réserve de s'en donner les moyens.

La première priorité de l’Université ne semble pas être la réussite des étudiants. Les enseignants chercheurs doivent consacrer prioritairement du temps à leurs activités de recherche, seules garantes de leurs bonnes évaluations. Suite à la réforme des lycées qui nous occupe, et dans le contexte que nous venons de décrire plus haut, ils doivent reconstruire rapidement l’ensemble de leurs enseignements. Cela se fait sans cadrage national du contenu de ces enseignements, contrairement à ce qui se passe en CPGE, en STS ou en IUT. Cette reconstruction doit s’opérer dans le cadre du système d’habilitation quadriennale des diplômes, auquel sont soumises les universités. Les contraintes sont fortes car le public attendu est plus que jamais hétérogène mais aussi car le niveau attendu en fin de L3 ou en Master reste élevé, pour former correctement des ingénieurs en concurrence avec leurs homologues en provenance des grandes écoles, pour préparer d’éventuels futurs doctorants et aussi pour former de bons enseignants. Autant dire que la situation est très complexe, voire contradictoire.

ET LA REFORME DES PROGRAMMES AU LYCEE SCIENTIFIQUE ALORS ?

Les contenus d’enseignement en mathématiques ont été réduits en analyse et en géométrie, rendant difficile la cohérence de ces parties des mathématiques et accentuant la rupture entre le lycée et l’université.

En Analyse, on avait déjà relevé, à l’occasion des programmes de 2002, l’incohérence à devoir présenter aux élèves la notion de dérivée avant celle de limite de fonction. La nouvelle réforme entraîne maintenant la suppression de notions jugées essentielles par la réforme de 2002, tout particulièrement la notion d’équation différentielle, qui est fondamentale pour l’étude de phénomènes évolutifs en physique. La disparition des moindres méthodes d’approximations globales ou locales, propres au champ de l’Analyse, au profit d’une algébrisation massive, repousse totalement au niveau du supérieur la rupture Algèbre / Analyse indispensable.

En géométrie, les différentes transformations ne sont plus étudiées alors qu’elles permettent de modéliser de nombreux phénomènes physiques et qu’elles constituent un levier important pour l’apprentissage, dès la première année de l’université, des concepts d’algèbre et d’application linéaire, apportant une vision géométrique importante. Les nombres complexes sont essentiellement étudiés pour eux-mêmes et ils ne sont plus abordés comme des outils au carrefour de l’algèbre, de l’analyse et de la géométrie.

Les programmes voient par contre une place grandissante faite aux probabilités et à la statistique, jusqu’à des notions délicates qui créent une difficulté réelle pour les élèves et les enseignants. Les élèves sont supposés réfléchir, à partir de l’observation d’évènements, à des hypothèses de travail pour dégager des choix de modèles probabilistes à implanter dans leurs machines (ordinateurs, calculatrices). Les notions afférentes aux intervalles de fluctuations sont introduites afin de permettre des prises de décisions statistiques. Les notions introduites, qui vont jusqu’à l’énoncé du théorème de Moivre-Laplace, sont difficiles à maitriser pour les élèves et même pour les enseignants. En effet, une grande partie d’entre eux n’a pas suivi d’enseignement universitaire de statistique inférentielle et de probabilités. La situation n’a d’ailleurs pas lieu de changer puisque les probabilités et la statistique restent les parents pauvres des programmes actuels des concours de recrutements, toujours insuffisamment renouvelés.

Pour les universitaires, les bases mathématiques des élèves à l'entrée en L1 ne sont pas assez solides. D'où une volonté, dans les nouvelles maquettes, de reprendre tout à zéro avec les outils mathématiques jugés nécessaires pour comprendre les probabilités et la statistique, souvent à partir de la L2 voire la L3. La grande disparité dans les programmes des universités, l'absence des cadrages nationaux et l'autonomie sont là encore très préjudiciables à une évolution des pratiques. Selon le sondage relaté par Jean Pierre Raoult, seules deux universités semblent vraiment vouloir s'appuyer sur des acquis du lycée. Quand bien même il existe des programmes nationaux, c'est encore pire dans les CPGE scientifiques. Les programmes en consultation pour la seconde année vont explicitement dans le sens d'une exclusion des variables à densité, pourtant abordées au lycée. Ce n'est que dans les grandes écoles que les étudiants réutiliseront ces notions, après deux années d'interruption.

Les programmes de STS ou d'IUT informatiques prennent mieux en compte les acquis des élèves tout en mettant en lumière des incohérences des programmes du lycée : en effet, ces programmes renouvelés éclairent ce qui pourrait manquer au lycée pour que l'enseignement de la statistique et des probabilités puisse entrer en cohérence avec le reste du programme mathématique : les limites de fonctions, l'intégration par partie, les équations différentielles, qui permettraient de consolider les manipulations de lois à densité et inversement, les contextes probabilistes présentant des applications concrètes des concepts d'analyse.

La question des probabilités et de la statistique dans les nouveaux programmes du lycée rebondit donc sur celle des contenus proposés en Analyse, accentuant la visibilité des incohérences du nouveau programme mathématique scientifique.

En physique, c'est un bouleversement encore plus profond qui s'est opéré, dans la mesure où le nouveau programme bouleverse la conception que les enseignants eux-mêmes peuvent avoir de leur propre discipline. Les sujets qui s'appuyaient sur les mathématiques et en permettaient le travail, tels que l'électricité par exemple, ont été supprimés au profit de sujets de science « moderne » tels que la relativité ou la mécanique quantique. Les nouveautés de contenus et surtout les nouveautés de pratiques, associées aux nouveaux programmes, constituent des changements profonds de l'enseignement de la physique et de la chimie.

On comprend donc finalement que ces nouveaux programmes scientifiques tendent à dissocier les deux disciplines, encore plus que ne l'étaient déjà, tant du point de vue des contenus disciplinaires et que des logiques d'enseignement. L'ouverture interdisciplinaire, à laquelle les programmes et les dispositifs invitent, est rendue plus difficile qu'avant car les intersections entre les deux programmes de mathématique et de physique sont réduites. Les concepts mathématiques qui se prolongeaient en physique, ou les notions physiques qui utilisaient pleinement les mathématiques du lycée, ont pratiquement disparu. Seul subsiste le thème de la mesure expérimentale dans le programme de physique chimie qui se marie potentiellement avec l'entrée de la statistique et des probabilités en mathématiques. Encore faut-il qu'un travail de fond soit mené pour penser cette co-disciplinarité. Cela ne peut pas s'inventer instantanément pour les enseignants du secondaire, sans ressources et formations continues de qualité.

La question de l'introduction de ces contenus « modernes » est-elle similaire à celle de l'introduction de la mécanique Newtonienne au lycée au $19^{\text{ème}}$ siècle ? On peut penser que oui, car la physique se doit de donner une vision contemporaine des phénomènes du monde. Cependant, que ce soit dans le cadre de la physique ou dans le cadre des mathématiques, il est raisonnable de se demander si les connaissances apprises par les élèves peuvent se constituer autrement qu'en un « vernis » non maitrisable par eux. La suppression de notions fondamentales de l'analyse et de la géométrie en vaut-elle le prix ?

La volonté de ces nouveaux programmes en mathématiques et physique est paradoxalement de placer le questionnement scientifique au cœur de l'enseignement, ce qui va de pair avec le développement de l'accent sur la dimension expérimentale des sciences, y compris les mathématiques. Y contribue une part croissante pour les activités algorithmiques, la production et l'exploitation de simulations, l'utilisation des nouvelles technologies et la production de textes argumentatifs en physique. C'est en ce sens que les programmes se présentent comme une avancée qui permettraient par exemple de faire avec les élèves de la physique centrée sur les concepts. Mais y a-t-il pour autant besoin de rogner les contenus scientifiques en jeu pour travailler le questionnement scientifique ? Peut-on légitimement se questionner scientifiquement sur des contenus qui ne sont pas maitrisables ? Difficile de répondre oui.

Ces nouveaux programmes de filière scientifique ont été finalement pensés pour donner une culture scientifique à une majorité d'élèves, qui n'étudieront pas nécessairement les sciences après le lycée. L'approfondissement serait repoussé aux enseignements scientifiques post baccalauréat. Cependant le développement des capacités attendues à la fin de la terminale S ne permet plus, sauf aux très bons élèves, d'envisager sereinement des études scientifiques. Cela renforce donc le caractère généraliste de la filière S et cela accentue son caractère socialement sélectif. Il y a déjà longtemps que de nombreuses organisations (l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public – APMEP - par exemple) demandent que la filière S soit plus centrée sur les sciences. C'est tout l'inverse qui se passe. Un large consensus se dégage donc à l'issue de ce colloque pour estimer que ces programmes rendent encore plus rude qu'elle ne l'était déjà la transition entre le lycée et le supérieur.

Les universités doivent en particulier repenser l'ensemble de leurs formations pour s'adapter aux profils des nouveaux bacheliers qu'elles accueillent. Mais il est hélas probable que ces étudiants vont rencontrer des difficultés accrues pour réussir leurs cursus. Il est à craindre que seul les étudiants qui bénéficieront de bonnes conditions d'études et qui pourront se faire accompagner réussiront. En ce sens, ces nouveaux programmes vont probablement aggraver la sélection sociale.

LISTE DES PARTICIPANTS

ALDON	Gilles	gilles.aldon@ens-lyon.fr
ARNOUX	Pierre	arnoux@iml.univ-mrs.fr
ARTIGUE	Michèle	michele.artigue@gmail.com
ATHANAZE	Guy	Guy.Athanaze@insa-lyon.fr
AUDUSSE	Emmanuel	audusse@math.univ-paris13.fr
BÄCHTOLD	Manuel	manuel.bachtold@montpellier.iufm.fr
BALLIOT	Anne	anne.balliot@wanadoo.fr
BARKA	Odile	odile.barka@univ-reims.fr
BEAUGHON	Marie-france	marie-fran.beaughon@ac-grenoble.fr
BÉCU-ROBINAULT	Karine	karine.robinault@ens-lyon.fr
BEFFARA	Emmanuel	emmanuel.beffara@univ-amu.fr
BERNARD	Dominique	dma.bernard@wanadoo.fr
BENZONI	Sylvie	benzoni@math.univ-lyon1.fr
BLACHE	Régis	rblache@iufm.univ-ag.fr
BOURQUI	David	david.bourqui@univ-rennes1.fr
BOUVART	Geneviève	gbouvart@wanadoo.fr
BOYER	Jean-yves	jean-yves.boyer@math.u-bordeaux1.fr
BRIDOUX	Stéphanie	stephanie.bridoux@umons.ac.be
BUSAC	Pascal	bupas@free.fr
CLUZEL	Valerie	valerie.cluzel@ac-lyon
CORI	René	cori@math.univ-paris-diderot.fr
CORPART	Annette	annette.corpart@wanadoo.fr
DAMAMME	Gilles	gilles.damamme@unicaen.fr
DE VLEESCHOUWER	Martine	mdv@math.unamur.be
DÉCAMP	Nicolas	nicolas.decamp@univ-paris-diderot.fr
DECROIX	Anne-amandine	aamandine.decroix@lille.iufm.fr
DERONNE	Mélanie	melanie.deronne@hotmail.com
DUCAMP	Christine	christine.ducamp@educagri.fr
DUDERMEL	Olivier	olivier.dudermel@ac-lyon.fr
DUMONTET	Monique	moniquedumontet@free.fr
DURAND-GUERRIER	Viviane	vdurand@math.univ-montp2.fr
DUTARTE	Philippe	philippe.dutarte@ac-creteil.fr
ESBELIN	Alex	alex.esbelin@univ-bpclermont.fr
FORGEOUX	Emmanuelle	eforgeoux@yahoo.fr
FRÉTIGNÉ	Patrick.	patrick.fretigne@univ-rouen.fr
GARDES	Denis	denis.gardes@wanadoo.fr
GEORGES	Joelle	joelle.georges@univ-reims.fr
GERMONI	Jérôme	germoni@math.univ-lyon1.fr
GIRARD	Jean claude	jcg.girard@laposte.net
GOICHOT	François	fgoichot@univ-valenciennes.fr
GRENIER	Denise	denise.grenier@ujf-grenoble.fr
GRIHON	Pierre	pgrihon@free.fr
GRIPAY	Pierre	pierre-emmanuel.gripay-guo@ac-lyon.fr

GUEUDET	Ghislaine	ghislaine.gueudet@bretagne.iufm.fr
GUILLOU	Patrick	Patrick.Guillou@ac-limoges.fr
HAIRAULT	Jean pierre	hairault@wanadoo.fr
HAUSBERGER	Thomas	Thomas.Hausberger@univ-montp2.fr
HENRY	Michel	michel.henry@univ-fcomte.fr
HERAULT	Françoise	herault.francoise@orange.fr
LAC	Philippe	philippe.lac@ac-clermont.fr
LACOMBE	Michèle	mlacombe@free.fr
LAMBRE	Thierry	thierry.lambre@math.univ-bpclermont.fr
LAMPLE	Hélène	hlample@hotmail.fr
LANCO	Loïc	loic.lanco@lpn.cnrs.fr
LAPOTRE	Pierre	lapotre.pierre@sfr.fr
LARRAS	Sylvie	sylvie.larras@ac-aix-marseille.fr
LARRIBAU	Isabelle	isabelle.larribau@univ-pau.fr
LASSALLE	Nelly	lassalle.nelly@gmail.com
LEMONON	Isabelle	ilemonon@gmail.com
LOZANO	Andrea	
MAC ALEESE	Jacqueline	macaleese@math.univ-paris-diderot.fr
MADEC	Gwenola	madec@math.univ-paris13.fr
MAMMERI	Kamal	mammeri06@live.fr
MARQUET	Philippe	Philippe.Marquet@lifl.fr
MASSELIN	Blandine	blandine.masselin@ac-rouen.fr
MERCAT	Christian	christian.mercat@math.univ-lyon1.fr
MERLE	Pierre	
MESNIL	Zoé	zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr
MICHEL	Isabelle	isabelle.michel.basket@wanadoo.fr
MICHEL	Julien	julien.michel@math.univ-poitiers.fr
MODESTE	Simon	simon.modeste@ujf-grenoble.fr
MUNIER	Valérie	valerie.munier@montpellier.iufm.fr
NERVI-GASPARINI	Josiane	nervi@math.unistra.fr
PEDRI	Paolo	paolo.pedri@univ-paris13.fr
PERRUT	Anne	Anne.Perrut@univ-lyon1.fr
PIEDNOIR	Jean-Louis	amjl.piednoir@orange.fr
PICHOFF	Antoine	antoine.pichoff@m4x.org
PINSARD	Denis	denis.pinsard@ac-rennes.fr
PIRONNEAU	Agnes	agnespouzancre @yahoo.fr
RAOULT	Jean-pierre	jpraoult@orange.fr
RAOUX	Thierry	thierry.raoux@univ-reims.fr
RAYMONDAUD	Hubert	hubert.raymondaud@educagri.fr
ROGALSKI	Marc	marc.rogalski@upmc.fr
ROUSSEAU	David	david.rousseau@univ-lyon1.fr
SABY	Nicolas	saby@math.univ.montp2.fr
SANGARÉ	Mamadou Souleymane	mamadoussangare@yahoo.fr
SAUVAGE	Pascal	sauvage_pascal@yahoo.fr
SENECHAUD	Pascale	pascale.senechaud@unilim.fr
SOUCAZE	Sébastien	soucaze.lycee@laposte.net
STEPHAN	Pascale	Pascale.Stephan@insa-lyon.fr
TERRACHER	Pierre	p.terracher@irem.u-bordeaux.fr

UBÉRA	Chloé	chloe.ubera@hotmail.fr
VANDEBROUCK	Fabrice	vandebro@univ-paris-diderot.fr
VASSEUR	Hervé	herve.vasseur@ac-orleans-tours.fr
VAUX	Lionel	lionel.vaux@univ-amu.fr
VERGNAC	Martine	martine.vergnac@wanadoo.fr
WALTER	Olivier	olivier.walter@ac-lyon.fr
WAMBST	Marc	wambst@math.unistra.fr

Actes du colloque inter IREM « La réforme des programmes des lycées : et alors ? »

COMITE SCIENTIFIQUE :

Fabrice Vandebrouck (CI2U, IREM de Paris)
Nicolas Décamp (Université Paris Diderot, UFR de Physique)
Françoise Hérault (C2I Lycée, IREM de Paris)
Philippe Lac (C2I Lycée, IREM de Clermont-Ferrand)
Gwenola Madec (CI2U, IREM Paris-Nord)
Hubert Raymondaud (C2I Proba-Stat, IREM de Toulouse)
Hervé Vasseur (C2I Proba-Stat, IREM d'Orléans)

COMITE D'ORGANISATION :

Patrick Frétigné (CI2U, IREM de Rouen)
Christian Mercat (IREM de Lyon)

RESUME :

La Commission Inter IREM Université (CI2U), avec la collaboration des C2I Lycée et C2I Statistique et Probabilités, a organisé à Lyon les 24 et 25 mai 2013 un colloque sur la transition lycée–post baccalauréat et plus particulièrement sur la réforme des programmes scientifiques de Lycée, en mathématiques et en physique, avec son impact potentiel dans l'enseignement supérieur à partir de la rentrée 2013.

Il s'agissait d'aider les collègues du secondaire et du supérieur à identifier les pertes et les nouveautés dans les derniers programmes de terminale en mathématique et en physique, avec leurs conséquences possibles sur les connaissances des étudiants entrant dans le supérieur en 2013. Plus précisément, il s'agissait

- d'aider les collègues du secondaire à s'appuyer sur les nouveaux programmes, à identifier les opportunités s'y trouvant pour travailler correctement les notions dans la perspective de la transition ;
- d'aider les collègues du supérieur à mieux connaître le travail accompli par leurs élèves quand ils étaient au lycée et les aider à identifier ce sur quoi ils pouvaient s'appuyer raisonnablement pour concevoir leurs enseignements à partir de la rentrée 2013.

Les 3 conférences et les 12 ateliers étaient co-animés par des enseignants de mathématiques et de physique ou des enseignants du secondaire et du supérieur. Ce colloque souhaitait aider à la connaissance des programmes de chaque ordre et de chaque discipline. Cette brochure en rassemble les actes.

MOTS CLES :

Mathématiques, physique, probabilités, statistique, enseignement supérieur

IREM de Paris – Université Paris Diderot
Directeur de publication Fabrice Vandebrouck
www.irem.univ-paris-diderot.fr
Dépôt légal : 2013 – ISBN : 978-2-86612-350-5

IREM de Paris – Université Paris Diderot
Directeur de publication Fabrice Vandebrouck
www.irem.univ-paris-diderot.fr
Dépôt légal : 2013 – ISBN : 978-2-86612-350-5