# Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques

## Année 2013


Édités par

Sylvie Coppé

*UMR ICAR, ESPE de Lyon*

*Université Lyon 1*

Mariam Haspekian

*Laboratoire EDA*

*Université Paris Descartes*

# Actes du
# Séminaire National
# de Didactique
# des Mathématiques

## Année 2013

**Éditrices**

**Sylvie Coppé , Mariam Haspekian**

Le mot des éditrices

Le séminaire national de didactique des mathématiques, organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques ARDM, est l'occasion d'échanges entre chercheurs ; c'est un moment fort auquel sont attachés les membres de la communauté didactique francophone.

Comme les années précédentes, les deux séminaires de 2013 ont été l'occasion de donner la parole à des chercheurs confirmés et à des jeunes chercheurs qui ont pu présenter leurs travaux dans le cadre des rubriques usuelles du séminaire.

La rubrique « Présentation de thèse » a ainsi permis à de jeunes chercheurs de faire connaître leurs recherches ; ce fut le cas de Stéphanie Bridoux sur les premières notions de topologie, de Nicolas Giroud sur les situations de recherche et de Céline Maréchal sur l'enseignement spécialisé. En octobre, ont été présentées les thèses de Pierre Job sur la notion de limite, de Nicolas Pelay sur les animations scientifiques et de Julia Pilet sur les parcours différenciés en algèbre.

La rubrique « Présentation de travaux ou travaux en cours » a été l'occasion pour des chercheurs confirmés de mettre en discussion leurs avancées avec l'ensemble de la communauté : ainsi, en mars, Rémi Brissiaud d'une part et Brigitte Grugeon, Françoise Chenevotot et Elisabeth Delozanne d'autre part ont accepté ce défi. En octobre, c'est Christiane Mangiante qui a présenté ses travaux.

Enfin, nous avons accueilli, dans la rubrique « Ouverture sur », Michèle Gandit et Michel Grangeat pour exposer leur travail commun sur la collaboration entre professeurs et chercheurs.

La quasi totalité des présentations fait l'objet d'un texte dans ce volume. Merci aux différents intervenants, la qualité des présentations contribue à faire de ce séminaire un moment clé de notre activité de chercheur en didactique des mathématiques. Merci à tous ceux qui ont, d'une façon ou d'une autre, contribué au bon fonctionnement de ce séminaire.

Merci à Christophe Hache dont l'extrême disponibilité nous a permis d'organiser ces journées dans de bonnes conditions ainsi qu'à l'IREM de Paris 7, en particulier Nadine Locufier, qui assure la publication de ces actes.

*Enfin merci aux responsables de l'association ARDM qui nous ont fait l'honneur de nous confier la responsabilité du séminaire. Ce fut, pour nous, un moment d'échanges très enrichissant.*

SOMMAIRE

SEMINAIRE NATIONAL MARS 2013

Vendredi 22 mars et samedi 23 mars 2013

## Travaux en cours

**REMI BRISSIAUD** (Laboratoire Paragraphe, Université Paris 8)

L'effondrement des performances en calcul entre 1987 et 1999 : quelle « épidémiologie » ?

**BRIGITTE GRUGEON ALLYS** (LDAR, Université Paris Diderot-Paris7)
**FRANCOISE CHENEVOTOT** (LDAR, Université Paris Diderot-Paris7)
**ELISABETH DELOZANNE** (LIP6, UPMC – Sorbonne Universités)

De la conception aux usages de ressources dédiées à l'enseignement différencié en algèbre élémentaire

## Thèses

**STEPHANIE BRIDOUX** (Université de Mons, Belgique, et LDAR, Université Paris Diderot)

Enseignement des premières notions de topologie à l'université – Une étude de cas

**NICOLAS GIROUD** (Maths à Modeler)

Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe

**CELINE MARECHAL VENDEIRA** (Université de Genève)

Effets des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé. Une analyse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition.

SEMINAIRE NATIONAL OCTOBRE 2013

Vendredi 18 octobre et samedi 19 octobre 2013

## Ouverture sur…

**MICHELE GANDIT** (Université Joseph Fourier)
**MICHEL GRANGEAT** (Université Joseph Fourier, Laboratoire LSE)

Coopération entre enseignants, formateurs et chercheurs : des modalités et des effets.

## Travaux en cours

**CHRISTINE MANGIANTE** (Université d'Artois, Laboratoire LML)

Une étude du processus d'appropriation par des enseignants de situations produites par la recherche pour l'enseignement de la géométrie

## Thèse

**PIERRE JOB** (Facultés universitaires St-Louis, Belgique)

Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques

**NICOLAS PELAY** (Université de Genève, Laboratoire LDAR)

Élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique

**JULIA PILET** (Université de Paris Est Créteil, Laboratoire LDAR)

Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation

STEPHANIE BRIDOUX

# ENSEIGNEMENT DES PREMIERES NOTIONS DE TOPOLOGIE A L'UNIVERSITE. UNE ETUDE DE CAS.

Stephanie.BRIDOUX@umons.ac.be

**Université de Mons (Belgique) – LDAR, Université Paris Diderot**

**Résumé**
Notre travail de thèse trouve son origine dans un constat d'échec ressenti aux évaluations concernant un enseignement de topologie donné en première année d'université et dans lequel nous prenons une part active. Dans cet article, nous avons choisi de montrer de manière assez globale la démarche méthodologique qui nous a guidée dans notre recherche d'une part pour élaborer un dispositif d'enseignement que nous avons expérimenté dans nos classes et d'autre part pour approcher les apprentissages en topologie réalisés par les étudiants après expérimentation.

## Contexte du travail et questions de recherche

Notre intérêt pour l'enseignement de la topologie trouve son origine dans notre expérience d'enseignante. Nous avons en effet donné pendant plusieurs années les travaux dirigés d'un cours d'analyse mathématique dans lequel un chapitre était consacré à la topologie dans l'espace $R^N$. Au fil du temps, nous avons constaté que les questions les moins bien réussies par les étudiants aux évaluations portaient spécifiquement sur cette partie du cours. Plus précisément, des erreurs étaient repérées dès la restitution des définitions. Les étudiants donnaient souvent des définitions incomplètes ou encore des définitions vérifiées par tous les objets. Un autre aspect frappant était qu'ensuite, les étudiants parvenaient à utiliser ces définitions erronées dans les exercices sans s'apercevoir qu'elles menaient à des conclusions incohérentes.

Notre travail de thèse (Bridoux, 2011) s'est tout d'abord attaché à mieux comprendre ce constat d'échec puis à élaborer un dispositif d'enseignement visant à améliorer les apprentissages des étudiants, tout en tenant compte des contraintes institutionnelles qui délimitent le cours de topologie en question. Dans cette contribution, nous avons choisi de montrer quels types d'analyses didactiques ont été menées d'une part en amont de l'élaboration de notre dispositif pour mieux comprendre les difficultés des étudiants et dégager des pistes d'amélioration et d'autre part en aval pour évaluer les apprentissages réalisés par les étudiants après avoir expérimenté le dispositif dans nos classes. Notre objectif consiste donc à montrer la démarche méthodologique qui nous a guidée dans notre recherche tout en présentant de manière assez globale les résultats importants issus de chaque analyse et comment ceux-ci ont permis pas à pas d'apporter des sources de réponses à notre questionnement. Avant de présenter nos questions de recherche, nous décrivons plus précisément l'enseignement de topologie visé dans notre travail, en mettant en évidence les contraintes institutionnelles qui lui sont associées.

Le cours de topologie qui nous intéresse est suivi par des étudiants en première année universitaire à l'Université de Mons (Belgique), issus de trois filières : mathématique, physique et informatique. Le cours porte sur la topologie de l'espace $R^N$ et les notions visées sont celles d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble ainsi que celles d'ensemble ouvert ou fermé. Chaque notion est caractérisée en termes de boules et en termes de suites à partir du formalisme suivant. Pour un ensemble *A* inclus à $R^N$, l'intérieur et l'adhérence de *A*, notés respectivement int *A* et adh *A*, sont définis de la manière suivante :

$\operatorname{int} A = \left\{x \in R^N : \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A\right\}$, où $B(x,r)$ désigne la boule ouverte de centre *x* et de rayon *r*;

$\operatorname{int} A = \left\{x \in R^N : \forall (x_n) \subseteq R^N, (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathrm{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in A)\right\}$ ;

$\operatorname{adh} A = \left\{x \in R^N : \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing\right\}$;

$\operatorname{adh} A = \left\{x \in R^N : \exists (x_n) \subseteq A, x_n \to x\right\}$.

Les notions d'ouvert et de fermé sont alors définies comme suit:

A est ouvert ssi $\forall x \in A, \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A$ ;

A est ouvert ssi $\forall x \in A, \forall (x_n) \subseteq R^N, (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathrm{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in A)$ ;

A est fermé ssi $\forall x \in R^N, (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow x \in A$ ;

A est fermé ssi $\forall x \in R^N, \forall (x_n) \subseteq A, (x_n \to x) \Rightarrow (x \in A)$.

Ces notions sont introduites par leurs définitions, sans réelle motivation. Des propriétés classiques sur les ouverts et les fermés (par exemple les résultats concernant l'intersection ou la réunion d'une famille quelconque d'ensembles ouverts ou fermés) sont également démontrées à partir de ces définitions. Du côté des exercices, le principal objectif est que les étudiants soient capables de déterminer si des sous-ensembles classiques de $R$ et de $R^2$ sont ouverts ou fermés et de justifier leur choix en manipulant les caractérisations étudiées dans le cours magistral. Les exercices de manipulation des définitions sont très présents dans le cours. Il s'agit d'une contrainte à prendre en compte. De plus, la manipulation du symbolisme contenu dans les définitions s'associe à une autre contrainte institutionnelle qui concerne la rigueur attendue dans les productions des étudiants. Ceux-ci doivent en particulier citer les résultats qu'ils utilisent, détailler leurs calculs et expliciter rigoureusement leur démarche. Cet aspect de l'enseignement sera exemplifié un peu plus loin dans ce texte.

Comme cela a été expliqué, des difficultés récurrentes sont observées aux évaluations. L'une d'elles concerne la restitution des définitions. La majorité des étudiants n'est pas capable de définir correctement les notions. Par exemple, la définition suivante d'ensemble fermé, qui est en fait vérifiée par tout ensemble *A*, est donnée par 80% des étudiants :

$\forall x \in A, \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

En ce qui concerne la résolution des exercices, il est frappant de constater que beaucoup d'étudiants parviennent à manipuler correctement des écritures symboliques erronées, ce qui illustre bien le manque de sens donné aux notions, comme en témoigne la solution suivante, recopiée telle qu'elle a été proposée par un étudiant pour montrer que l'ensemble $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}^*\right\}$ est fermé, alors que ce n'est pas le cas.

$\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathrm{N}^*\right\}$ est-il fermé ?

C'est-à-dire $\forall x\in\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathrm{N}^*\right\},\forall r>0,B(x,r)\cap\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathrm{N}^*\right\}\neq\varnothing$ ?

Soit $x\in\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathrm{N}^*\right\}$, c'est-à-dire $x=\frac{1}{n_1},n_1\in N^*$.

Soit $r>0$. A-t-on $B(x,r)\cap\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathrm{N}^*\right\}\neq\varnothing$ ?

C'est-à-dire $]x-r,x+r[\cap\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathrm{N}^*\right\}\neq\varnothing$ ?

C'est-à-dire $\left]\frac{1}{n_1}-r,\frac{1}{n_1}+r\right[\cap\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathrm{N}^*\right\}\neq\varnothing$ ?

Oui, car $\frac{1}{n_1}\in\left]\frac{1}{n_1}-r,\frac{1}{n_1}+r\right[$ et $\frac{1}{n_1}\in\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathrm{N}^*\right\}$.

Donc $\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathrm{N}^*\right\}$ est fermé.

Prenant en compte les contraintes sur les notions à enseigner et le type d'exercices visés, nous nous sommes donnée comme objectif de réfléchir à des pistes d'enrichissement, voire de modification, de cet enseignement pour tenter de surmonter les difficultés répertoriées chez les étudiants. Nous avons choisi d'aborder ce questionnement général avec des outils empruntés à la théorie de l'activité. Cette théorie, qui prend appui sur les travaux de Piaget et Vygotsky concernant la construction de connaissances, a été spécifiée à l'enseignement des mathématiques et à la situation scolaire dans les travaux de Vergnaud puis dans ceux de Robert et Rogalski. La théorie est détaillée dans Vandebrouck (2008) mais nous rappelons très schématiquement quelques éléments fondateurs que nous utilisons par la suite. Nous retenons tout d'abord deux notions importantes qui sont celles de tâche et d'activités. La tâche désigne ce qui est à faire, par exemple l'énoncé d'un exercice. Les activités désignent ce que l'étudiant développe lors de la réalisation de la tâche, en particulier tout ce qu'il pense, dit, fait… ou non en classe. Les activités peuvent donc être vues comme ce que la tâche déclenche et qui va permettre le développement de connaissances. À partir des hypothèses générales issues des travaux de Piaget, Vygotsky et Vergnaud, les activités des étudiants sont l'intermédiaire choisi pour approcher les apprentissages réalisés par les étudiants en relation avec l'enseignement correspondant. Les analyses qui en découlent vont donc s'attacher à essayer de reconstituer les activités des étudiants. Bien entendu, nous n'aurons accès qu'à des traces de ces activités mais nous étudions néanmoins les activités possibles en relation avec les choix de conceptualisation et de gestion réalisés par l'enseignant. Nous y avons accès en croisant les analyses des tâches proposées aux étudiants avec les analyses de déroulements. En ce sens, la théorie de l'activité permet de donner de l'importance à la fois aux contenus et aux déroulements.

Deux questions de recherche ont alors émergé de ce choix théorique. En amont de l'enseignement, il s'agit d'étudier comment nous pouvons élaborer un enseignement de topologie mettant en jeu des activités supposées « favorables » aux apprentissages ? Et en aval de l'enseignement, l'enjeu est de savoir comment nous pouvons décrire les apprentissages effectivement réalisés par les étudiants ? Comme nous l'avons expliqué, notre objectif consiste à montrer quels types d'analyses ont contribué à l'étude de chaque question. Nous allons donc les expliciter au fil de ce texte.

## Diagnostic d'un enseignement de topologie

### *Caractéristiques de l'enseignement initial*

Les caractérisations des notions de topologie visées dans l'enseignement initial mènent d'emblée aux constatations suivantes. Les notions sont caractérisées dans un formalisme dont nous pouvons tout d'abord dire qu'il mélange différents symbolismes. En effet, des symboles relevant des domaines de la logique (quantificateurs, implication) et de la théorie des ensembles (inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide) sont utilisés. De plus, ces caractérisations s'appuient sur des connaissances en cours d'acquisition telles que la convergence d'une suite et la notion de boule de centre $x$ et de rayon $r$ (celles-ci sont étudiées dans les chapitres qui précèdent la topologie).

Concernant le choix des exercices proposés en travaux dirigés, nous avons expliqué qu'il s'agissait principalement de tâches de manipulation des définitions données dans le cours magistral. Cet aspect apparaît comme une contrainte à respecter dans notre travail où ce type d'exercices doit perdurer dans l'enseignement. Une autre contrainte forte de l'institution concerne la rigueur attendue dans la rédaction des solutions. Les étudiants doivent en effet justifier en détail tous leurs arguments, en citant les résultats utilisés et en développant tous les calculs. Nous donnons ci-dessous un exemple de solution exigée pour montrer que l'intervalle]-1,2[ est un ensemble ouvert.

À prouver: $\forall x \in \left]-1,2\right[, \exists r > 0, B(x,r) \subseteq \left]-1,2\right[$.

Soit $x \in \left]-1,2\right[$. Prenons $r = \min\{x+1, 2-x\}$.

On a bien $r > 0$ car $x \in \left]-1,2\right[$.

On a $B(x,r) \subseteq \left]-1,2\right[$. En effet, soit $y \in B(x,r)$, c'est-à-dire $x - r < y < x + r$.

Si $r = x+1$, alors on a, en remplaçant, $x-(x+1) < y < x+(x+1)$.

La première inégalité donne $-1 < y$. Comme $x+1 \leq 2-x$ par définition du minimum, la deuxième inégalité implique $y < x+(2-x)$, c'est-à-dire $y < 2$.

Donc $y \in \left]-1,2\right[$.

Si $r = 2-x$, on démontre de manière analogue que $y \in \left]-1,2\right[$.

### *Premières explications de l'échec des étudiants*

Pour mieux comprendre le constat d'échec auquel mène cet enseignement de topologie, une première entrée consiste à étudier les spécificités de ces notions, telles qu'elles sont introduites et travaillées dans le cours. En effet, l'enseignement d'une nouvelle notion, et plus précisément son introduction et la nature des exercices proposés aux étudiants, dépend fortement du type de la notion (Robert in Vandebrouck et al., 2008). Celui-ci est notamment caractérisé par la distance entre les connaissances déjà travaillées auparavant par les étudiants et les nouvelles connaissances. Robert distingue trois caractères que peuvent présenter les nouvelles notions par rapport aux anciennes. Le caractère généralisateur des notions apparaît quand le nouveau étend l'ancien, en ayant une portée plus large que ce qui était déjà à la disposition des étudiants. Le caractère unificateur des notions apparaît lorsque la nouvelle notion remplace plusieurs éléments anciens qui étaient, jusque là, traités de manière isolée. Le caractère formalisateur d'une notion apparaît quand un nouveau formalisme est introduit, celui-ci ne se limitant pas nécessairement à l'utilisation de symboles mathématiques. C'est la combinaison de ces caractères qui amène à définir différents types de notions.

Suivant cet angle d'attaque, les notions de topologie ont les caractéristiques des notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices, notées notions FUG par la suite, au sens de Robert (1998). Il s'agit de notions qui unifient des notions antérieures en les généralisant à partir d'un formalisme souvent nouveau pour les étudiants. Les notions de topologie étudiées ici apportent effectivement un aspect unificateur autour de notions antérieures telles que les intervalles et des ensembles classiques étudiés dans $R$ et $R^2$, et le formalisme utilisé pour généraliser les notions dans $R^N$ s'appuie sur des symboles mathématiques qui ont été peu travaillés par les étudiants au lycée. Cette interprétation des notions enseignées en termes de notions FUG semble donc légitime.

Nous nous sommes ensuite tournée du côté de la nature des tâches proposées aux étudiants. Nous avons pour cela utilisé les outils d'analyse des contenus développés par Robert (1998). Il s'agit de décrire, pour chaque exercice, le travail mathématique à réaliser a priori, par les étudiants, dans les tâches de manipulation de définitions, en regardant les connaissances sollicitées (anciennes et nouvelles) et en détectant comment ces connaissances doivent être adaptées pour résoudre la tâche. Robert distingue des grands types d'adaptations telles l'organisation du raisonnement, les changements de point de vue, l'introduction d'intermédiaire, les changements de cadres, les mélanges de registres…

Nous avons montré que les tâches proposées consistent en un travail dans le registre symbolique qui requiert des adaptations complexes et qui ne nécessite finalement pas de réelles connaissances en topologie mais des connaissances sur la manipulation d'inégalités (dans R) ainsi que des connaissances en logique et en théorie des ensembles. Ces aspects sont selon nous bien illustrés dans l'exemple présenté précédemment où il s'agit de montrer que l'intervalle $]-1,2[$ est un ensemble ouvert.

Cette première partie du travail révèle donc que l'enseignement de topologie étudié ici est presque exclusivement centré sur le caractère formalisateur des notions à partir d'un travail dans le registre symbolique. Il n'y a donc pas, dans cet enseignement, de dynamique productive entre le sens et la technique mise en œuvre dans les exercices. Tout se passe alors comme si les étudiants manipulaient des symboles qui ne représentent rien pour eux puisqu'ils n'ont pas les moyens de mettre du sens sur les notions.

Ce premier diagnostic nous renseigne donc sur le fonctionnement du savoir et sur les connaissances mises en jeu. Il nous a permis de repérer certaines caractéristiques des notions dans le paysage mathématique des étudiants. Cependant, cette étude reste spécifique à un système d'enseignement précis soumis à des contraintes strictes. Il s'agit donc d'adopter un point de vue plus général pour interroger ce qui peut contribuer à l'élaboration du sens des notions à enseigner.

## Spécificités des notions de topologie

### *Un questionnement élargi*

Suivant un angle d'attaque plus général, nous avons fait l'hypothèse que parvenir à préciser les spécificités des notions de topologie en nous dégageant de notre système d'enseignement pourrait éclairer notre propos. Plus précisément, nous nous sommes donnée comme objectif de caractériser plus finement leurs caractères formalisateur, unificateur et généralisateur. Des travaux antérieurs sur les notions FUG ont fourni un premier éclairage sur les spécificités de telles notions. Il est tout d'abord difficile d'introduire une notion FUG avec un problème initial où la notion apparaîtrait comme l'outil de résolution optimal en permettant aux étudiants de faire fonctionner seuls la nouvelle notion. Robert (1982) a identifié la notion de convergence d'une suite numérique comme un exemple de notion FUG. Elle propose alors une introduction mixte de la notion s'appuyant sur l'utilisation de dessins et alternant les phases de recherche des étudiants avec des phases d'institutionnalisation de l'enseignant. D'autre part, les caractéristiques épistémologiques des notions FUG tiennent à une genèse longue et souvent sinueuse. Cet aspect est bien illustré par Dorier (Dorier et al., 1997) lorsqu'il retrace la genèse historique des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire. Prenant en compte les spécificités de ces concepts, il intègre dans son enseignement des commentaires méta-mathématiques, au sens de Robert et Robinet (1996), pour introduire la notion d'espace vectoriel. Comme cela a déjà été dit précédemment, une autre difficulté d'enseignement des notions FUG est celle de parvenir à leur donner du sens.

Nous retenons de ces travaux des éléments à prendre en compte pour tenter d'agir sur l'enseignement de topologie décrit ici. Prenant appui sur les travaux de Dorier, il y a certainement lieu d'éclairer la question du sens en interrogeant la genèse et l'épistémologie des notions. Dans notre thèse, nous avons approfondi la question de l'introduction des notions par l'étude de quelques manuels. En d'autres termes, nous nous sommes intéressée au phénomène de transposition didactique des notions de topologie, au sens de Chevallard (1991). Nous n'évoquons ici que les aspects historiques de notre travail.

Notre démarche consiste donc maintenant à comprendre le cœur et la fonction des notions de topologie dans l'histoire dans des perspectives d'enseignement. En situant notre questionnement dans le cadre de la théorie de l'activité, nous nous focalisons sur deux moments clés de l'enseignement susceptibles de déclencher des activités chez les étudiants : l'introduction des notions et les tâches proposées. C'est suivant ces deux axes que nous orientons notre propos. Ce choix a des conséquences méthodologiques sur nos analyses que nous précisons dans ce qui suit.

Les interactions entre la didactique, l'histoire et l'épistémologie des mathématiques ont notamment été étudiées par Dorier (2000). Comme il le souligne,

> Une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution du savoir historique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du savoir enseigné (ibid.).

Mais notre objectif reste avant tout piloté par la didactique des mathématiques. Par conséquent, nous rejoignons le point de vue suivant, développé par Robert (2007), concernant la nature d'un travail historique et épistémologique dans le cadre d'une recherche en didactique des mathématiques :

> Ce travail diffère fondamentalement de celui de l'historien ou de l'épistémologue : nous ne faisons pas avancer les réflexions sur le sujet, nous cherchons à tirer des travaux déjà faits des éléments assez globaux sur ce qui a pu mener les découvertes et notamment les problèmes éventuels ou les projets à l'origine des avancées, sur les difficultés qui se sont présentées, sur l'ordre dans lequel les notions sont apparues, etc. (ibid.).

Le récit d'éléments historiques concernant l'émergence et l'évolution de la topologie, en tant que domaine des mathématiques, existe déjà dans divers travaux (voir par exemple Dieudonné (1978), Manheim (1964) ou James (1999)). Sur un plan méthodologique, nous cherchons à retirer des travaux existants des éléments pertinents pour reconstituer une synthèse historique permettant de mettre du sens sur les caractères FUG actuels des notions de topologie. Nous avons donc opéré une sélection personnelle de travaux en lien avec nos objectifs tout en adaptant la méthodologie développée par Dorier (2000). C'est précisément cette vue sélective qui nous amène à incorporer une composante épistémologique dans l'histoire retracée. Nous pointons ici quelques travaux marquants qui montrent l'émergence de certaines notions de topologie, quels types de problèmes ont motivé leur introduction et avec quel formalisme celles-ci ont émergé. Nous décrivons ensuite quelques pistes d'enseignement qui ont découlé de cette partie historique du travail.

***Genèse et développement historiques : les caractères FUG des notions de topologie***

Vu a posteriori, au début du 19ème siècle, certaines théories font encore défaut. Par exemple, les notions de limite, de continuité, de dérivée et d'intégrale ne sont pas définies de manière précise. Il n'y a pas non plus de construction de l'ensemble des nombres réels. Les séries trigonométriques, les séries de fonctions et les questions de convergence associées ne sont pas traitées rigoureusement. Deux types de questionnements vont donc occuper les mathématiciens du 19ème siècle : d'une part la volonté de définir rigoureusement les notions de base de l'analyse et d'autre part l'étude des séries. La genèse et le développement historique des premières notions de topologie touchent une majeure partie des travaux menés au 19ème siècle et au début du 20ème siècle.

En 1817, Bolzano utilise dans son mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires un procédé d'emboîtement d'intervalles qui peut être rapproché d'une démarche très fréquente en topologie qui consiste à recouvrir un ensemble par des intervalles. Les travaux de Bolzano ne font pas émerger de notions de topologie en tant que telles mais ils témoignent néanmoins de la présence de raisonnements de nature topologique et montrent le besoin de recourir à ces notions pour démontrer rigoureusement un résultat majeur en analyse. Dans son *Cours d'analyse* donné à l'École Polytechnique de Paris, Cauchy (1821) énonce un résultat faux. Il affirme que si une série de fonctions continues est convergente dans le voisinage d'un point $x_0$, alors sa limite est une fonction continue dans le même voisinage. La démonstration donnée par Cauchy met toutefois en relief l'idée de convergence uniforme d'une série de fonctions. Cauchy mentionne son erreur quelques années plus tard et donne une définition correcte de la convergence uniforme, sans la qualifier de cette manière. L'existence de différents types de convergence, notamment pour les suites de fonctions, jouera un rôle dans l'émergence de certaines notions de topologie.

Dans un cours sur le calcul différentiel, Weierstrass (1894) définit la notion de continuité. Il démontre également des résultats de topologie élémentaire comme le théorème qui affirme, dans le langage actuel, que si $f$ est une fonction continue et si $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$, alors quel que soit $y_3$ appartenant à $[y_1, y_2]$, il existe $x_3$ appartenant à $[x_1, x_2]$ tel que $f(x_3) = y_3$. Weierstrass introduit des notions de topologie qu'il utilise ensuite pour démontrer des résultats sur les séries entières. Par exemple, un voisinage d'un point $x_0$ est constitué de tous les $x$ « pour lesquels la différence $x - x_0$ en valeur absolue ne dépasse pas une borne déterminée ». Un voisinage est donc un disque de centre $x_0$. Aussi, un point $a$ appartient à l'ouvert $O$ « s'il existe un voisinage de $a$ qui est contenu dans $O$ » ou encore $a$ appartient à la frontière de $O$ « si dans tout voisinage de $a$ il y a des points de $O$ et des points qui n'appartiennent pas à $O$ ».

Cantor est au cœur des deux questionnements que sont l'étude des séries et l'élucidation des notions de base de l'analyse. L'étude d'un résultat sur la convergence des séries trigonométriques (1883) l'amène à donner une construction rigoureuse de l'ensemble des nombres réels. Il s'intéresse ensuite aux liens entre les nombres réels et la géométrie de la droite. Il définit, à cette occasion, les notions de topologie suivante :

- Un voisinage d'un point est un intervalle dans lequel ce point est contenu ;

- Un point limite d'un système de points P est un point de la droite tel que dans son voisinage, il y ait un nombre infini de points du système P ;
- Un point isolé d'un système de points P est un point qui, appartenant à P, n'est pas en même temps point limite de P.

Le traité de Jordan paru en 1893 (seconde édition) est l'un des premiers textes qui globalise des notions de topologie dans $R$. Pour un ensemble donné E, Jordan classe tous les points de l'espace en trois catégories : les points intérieurs à E, les points extérieurs à E et intérieurs à son complémentaire et les points frontières. C'est à partir de la notion d'écart (la taxi-distance dans le langage actuel) que ces notions sont définies. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est également démontré.

Ainsi, comprendre, caractériser et définir rigoureusement l'ensemble des réels amène à étudier les sous-ensembles de la droite réelle et à catégoriser des types de points en fonction de leur position occupée dans les sous-ensembles (point isolé, point limite, point frontière…). Il y a donc une première unification d'un certain nombre de notions à partir d'un langage commun qui fournit un arsenal d'outils pour démontrer des résultats classiques d'analyse.

À la fin du 19ème siècle, la volonté de développer des théories abstraites est de plus en plus présente, notamment en travaillant avec des ensembles dont les éléments ne sont pas des nombres. Hausdorff (1914) introduit le concept d'espace topologique qui unifie les notions topologiques antérieures. Cette seconde unification est de nature différente de la première. Ici, il ne s'agit plus de catégoriser les objets mais bien d'utiliser une même notion, celle d'espace topologique, pour unifier les notions précédentes.

Ainsi, les premières définitions des notions topologiques sont données dans R sous la forme d'une catégorisation des types de points. Elles n'amènent pas de généralisation à proprement parler. Les définitions se généralisent dans $R^N$ avec le concept de boule ou de sphère (Baire, 1904) puis dans les espaces métriques avec les travaux de Fréchet (1906). La généralisation est liée à l'espace dans lequel on travaille. Une fois encore, le concept d'espace topologique est la source majeure de généralisation. Son émergence amène un déplacement de l'attention des éléments d'un espace vers les sous-ensembles puisque la structure des espaces est donnée à partir des conditions sur ces sous-ensembles « privilégiés » que sont les ouverts.

Bien que très général (le lecteur pourra consulter la thèse pour une étude détaillée des travaux évoqués), ce panorama montre que les notions de topologie sont utilisées dans différents buts. Ainsi, les notions de topologie élémentaire, c'est-à-dire la topologie des espaces $R, R^2$ et $R^N$ sont introduites pour fonder l'analyse sur des bases rigoureuses. Ce sont en fait les questions de convergence qui sont les éléments déclencheurs pour l'introduction de ces notions. Ces travaux montrent une unification des notions sous la forme d'une caractérisation des sous-ensembles de $R$ à partir de la position des points. Le passage de $R$ à $R^N$ se fait de manière très naturelle, sans rupture. Nous trouvons rapidement une généralisation des notions dans $R^N$ et tout comme l'unification des notions, celle-ci se déroule elle aussi sans accident. Les mêmes notions définies dans le cadre de la topologie métrique ou générale permettent quant à elles de travailler dans des espaces généraux. C'est le besoin de travailler dans des espaces de fonctions qui est ici à l'origine de l'introduction des notions. Par ailleurs, historiquement parlant, c'est un vaste réseau de notions qui apparaît puisque l'étude retracée montre l'émergence des notions de voisinage, de point intérieur, point limite, point isolé, ouvert, fermé, intérieur, fermeture…

L'histoire montre aussi que la formalisation des notions est associée à des choix de caractérisation très variés. Nous trouvons des expressions précises et spécifiques qui traduisent les choix des mathématiciens dans leurs travaux. Ces caractérisations sont principalement écrites dans la langue naturelle, les symboles utilisés sont essentiellement des lettres pour nommer les ensembles et les points ainsi que des inégalités. Le registre symbolique utilisé pour écrire les définitions telles qu'elles sont données actuellement apparaît avec les avancées dans les domaines de la logique et de la théorie des ensembles, c'est-à-dire au début du 20$^{\text{ème}}$ siècle.

### *Confrontation à l'enseignement initial*

Même s'ils sont présentés ici brièvement, ces quelques faits historiques nous permettent de développer des leviers à prendre en compte dans l'élaboration de notre projet d'enseignement pour introduire les notions de topologie en tentant de surmonter l'obstacle du formalisme.

En premier lieu, il apparaît que les problèmes qui ont motivé l'introduction des premières notions de topologie (séries trigonométriques, théorie des fonctions…) ne sont pas accessibles au niveau d'enseignement visé ici. Néanmoins, la réalité historique montre que les notions à enseigner s'insèrent dans un réseau plus vaste dans lequel sont intégrés des types de points ou encore la notion de voisinage. Nous retenons donc l'idée d'un travail en réseau de notions. Les premières notions en lien direct avec notre travail qui émergent dans l'histoire sont celles de point intérieur et de point adhérent (dans le langage actuel) à un sous-ensemble de $R$ . D'où l'idée de commencer par définir ces types de points pour déplacer ensuite l'attention sur les sous-ensembles. Un itinéraire de la forme suivante peut être envisagé pour introduire les notions. La notion d'ouvert, par exemple, pourrait émerger à partir d'un travail en réseau sur les notions de point intérieur et d'intérieur d'un ensemble. Un itinéraire semblable peut être défini pour la notion d'ensemble fermé à partir de celle de point adhérent.

Une autre piste concerne un travail sur les registres d'écritures. Les premières définitions qui émergent sont écrites dans la langue naturelle. D'autre part, l'histoire montre un appui sur des mots du langage courant (isolé, extérieur, écart…) qui peuvent aider au développement d'une certaine intuition géométrique à associer aux notions. D'où l'idée de mélanger le registre de la langue naturelle avec un registre d'écriture permettant aux étudiants de s'appuyer sur l'intuition géométrique, par exemple en proposant des dessins mettant en jeu des objets géométriques accessibles aux étudiants à ce niveau d'enseignement.
Enfin, pour amener les étudiants à comprendre ce qui est en jeu dans l'enseignement de la topologie, une piste à creuser est l'élaboration de commentaires non strictement mathématiques ou méta-mathématiques (Robert et Robinet, 1996) à proposer aux étudiants sur ces notions au fil de l'enseignement. D'autres pistes sont étudiées dans la thèse.
Nous allons maintenant montrer comment ces différents aspects se sont intégrés dans la conception de notre dispositif.

## Élaboration et expérimentation d'un dispositif didactique

### *Le dispositif: quelques éléments méthodologiques*

Dans le cadre de la théorie de l'activité, les apprentissages mathématiques sont décrits en termes de conceptualisation et sont étudiés via les activités des étudiants. La conceptualisation est selon nous associée à la prise de sens des notions en tant qu'outil et en tant qu'objet, au sens de Douady (1986). Cela implique d'avoir accès aux notions dans différents cadres et avec différents registres d'écritures, au sens de Duval (1995), pour les mettre correctement en fonctionnement dans les exercices proposés, même quand les notions à utiliser ne sont pas indiquées dans l'énoncé. Les entraînements techniques et la construction d'automatismes participent également à cette prise de sens. La conceptualisation est donc « une notion relative, et n'est jamais achevée » (Robert et Rogalski, 2004), qui s'associe à une certaine flexibilité entre les diverses représentations des notions en termes de cadres de travail et de registres d'écritures. L'insertion des notions dans le bagage mathématique des étudiants contribue elle aussi à ce nous englobons dans la conceptualisation et à la mise en place d'une dynamique productive entre les dialectiques outil/objet d'une part et sens/technique d'autre part.

Après avoir défini ce que nous englobons sous le terme « conceptualisation », il s'agit d'élaborer un enseignement susceptible de favoriser les apprentissages en topologie des étudiants et de pouvoir apprécier leurs activités pour étudier si elles mènent à la conceptualisation visée. Dans cet article, nous nous focalisons sur l'introduction des notions et la nature des tâches proposées qui sont deux phases de l'enseignement pouvant amener de la variabilité dans les activités. Bien entendu, les modalités d'organisation du travail en classe et les interventions de l'enseignant peuvent elles aussi influencer les activités des étudiants. De ce fait, les accompagnements langagiers du professeur peuvent être pris en compte pour étudier les liens entre les activités des étudiants et leurs apprentissages. Pour reconstituer les activités possibles des étudiants et les mettre en regard avec les activités prévues à partir des analyses a priori, le chercheur s'appuie sur les interventions de l'enseignant durant le travail des étudiants. Deux types d'aides ont été distingués dans les phases d'interactions entre le professeur et les étudiants. Les aides « à fonction procédurale » sont données par l'enseignant avant ou pendant le travail des étudiants. Elles peuvent conduire au découpage de la tâche en plusieurs sous-tâches simples et isolées. Ces aides modifient donc les tâches prévues et par conséquent les activités possibles. Les aides « à fonction constructive » concernent les reprises du travail déjà réalisé, les bilans, les interventions pouvant amener les étudiants à revenir sur leur activité. Ces aides ajoutent donc quelque chose entre « l'activité stricte de l'élève et la construction (espérée) de la connaissance qui pourrait en résulter » (Pariès, Robert, Rogalski, 2008).

Compte tenu de nos choix, nous regardons maintenant la tâche qui a servi d'introduction aux notions de topologie dans notre dispositif ainsi que quelques exercices délimités par les contraintes de l'institution. Pour chacun, nous donnons des éléments d'analyse a priori et concernant les déroulements en classe. Nous intégrons aussi dans notre propos des aspects plus globaux qui permettent une vue comparative entre l'enseignement initial et notre dispositif.

L'expérimentation du dispositif a pris environ 16 heures durant lesquelles la théorie et les exercices étaient intégrés. L'enseignement a été proposé à un groupe de 23 étudiants de première année universitaire dans une filière mathématique. Avant l'enseignement, les étudiants ont travaillé sur la convergence des suites numériques, la notion de norme, les limites et la continuité des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Après le cours sur la topologie viennent les notions de dérivée et de compacité, notamment. Il nous semble également important de préciser que nous étions dans la double posture d'enseignant-chercheur pour mener cette expérimentation.

***L'introduction des notions***

Suite aux analyses didactiques, historiques et épistémologiques menées dans notre travail, nous avons choisi d'élargir le réseau de notions à enseigner aux notions de point intérieur et de point adhérent avant d'introduire les notions visées par l'institution qui sont celles d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble, d'ensemble ouvert ou fermé.

Alors que, dans l'enseignement initial, l'introduction des notions se faisait immédiatement dans le registre symbolique, nous avons élaboré une séquence d'introduction appuyée par un travail dans les registres du dessin et de la langue naturelle. Nous donnons l'énoncé tel qu'il a été proposé aux étudiants.

Voici 4 propriétés mettant en relation un ensemble $A \subseteq R^2$ et un point $p \in R^2$ .

1. *A* contient une boule ouverte de centre *p*.
2. *A* contient toutes les boules ouvertes de centre *p*.
3. Il y a une boule ouverte de centre *p* qui intersecte *A*.
4. Toutes les boules ouvertes de centre *p* intersectent *A*.

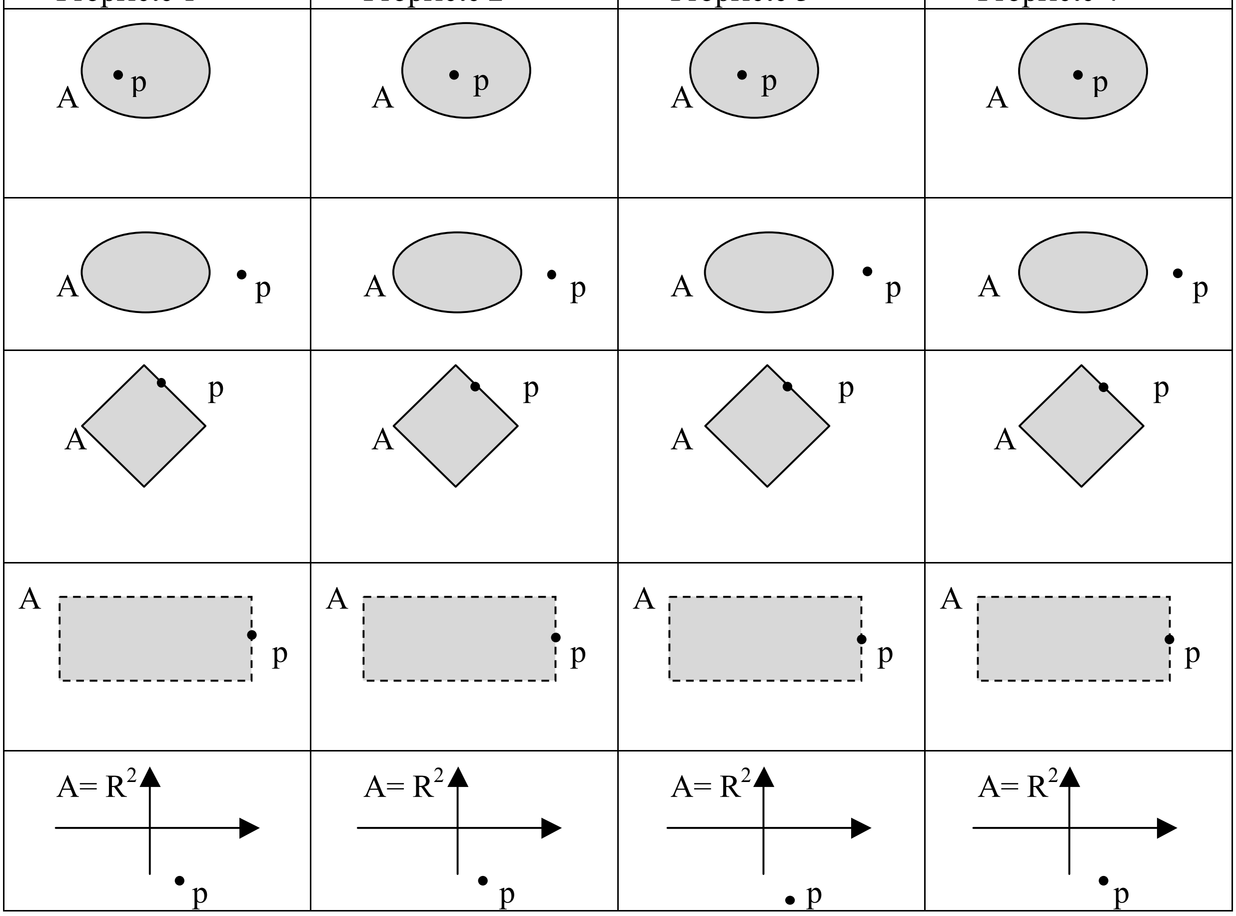
Dans chacune des situations suivantes, dites

- Si *p* est un point de *A* ou non ;
- Si *p* et *A* vérifient ou non les propriétés 1, 2, 3 et 4. Pour chaque propriété, justifiez votre réponse sur le dessin.

Selon vous, quelle est la propriété qui traduit l'idée que

*p* est un point intérieur à *A* : ……………..
*p* est un point adhérent à *A* : ……………..

| Propriété 1 | Propriété 2 | Propriété 3 | Propriété 4 |
|---|---|---|---|




Pour élaborer cette séquence, nous nous sommes appuyée sur des leviers qui sont selon nous susceptibles d'amener les étudiants à donner du sens aux nouvelles notions. Nous pensons que le recours à l'intuition géométrique, avec un travail sur des dessins grâce à la notion de boule, associé au vocabulaire utilisé (« être à l'intérieur », « être adhérent » sont des expressions du langage courant) peuvent aider les étudiants à choisir la caractérisation correcte. L'absence du registre symbolique permet aussi aux étudiants de se focaliser sur les dessins et les mots et de construire une image mentale plus robuste que celle qui pourrait se construire avec des symboles.

Du côté des activités attendues, les étudiants doivent réaliser la tâche en autonomie, il n'est pas prévu que l'enseignant intervienne durant sa réalisation. Il nous semble aussi important d'insister sur le changement de point de vue à apporter sur le type de justification attendu. Les étudiants sont habitués à devoir expliciter leur raisonnement en travaillant dans le registre symbolique, donc en manipulant des écritures quantifiées dont on sait qu'ils leur donnent peu de sens alors qu'ici ce sont au contraire des dessins qui sont attendus. Comment les étudiants vont donc s'emparer de cette consigne ?

Cette séquence a été testée trois fois : une fois dans le dispositif et deux fois auparavant. Les activités observées ont à chaque fois été conformes aux activités attendues. Tous les étudiants ont à chaque fois retenu la caractérisation correcte pour la notion de point intérieur et un seul étudiant a choisi une caractérisation erronée pour la notion de point adhérent.

Après avoir travaillé sur cette tâche, les étudiants ont donc caractérisé les notions de point intérieur et de point adhérent dans la langue naturelle à partir de la notion de boule. C'est là un autre choix didactique que nous avons fait par rapport à l'enseignement initial. Ici, le début de l'enseignement ne sollicite que la notion de boule pour caractériser les notions, celle de suite intervient plus tard dans l'enseignement. Avec l'aide de l'enseignant, ces caractérisations sont ensuite traduites dans le registre symbolique. Du point de vue de la syntaxe formelle, démarrer l'enseignement par l'introduction de types de points permet de manipuler une écriture contenant un unique quantificateur (par exemple, $p$ est un point intérieur à $A$ si $\exists r > 0, B(p,r) \subseteq A$).

Ces premières notions permettent ensuite d'introduire les notions visées dans l'enseignement avec un questionnement justifié. Prenons comme exemple l'itinéraire qui découle de la notion de point intérieur. Un cheminement tout à fait semblable est envisagé à partir de la notion de point adhérent. Au terme de l'activité, l'étudiant a tout d'abord l'image qu'un point $p$ est intérieur à l'ensemble $A$ si $p$ a un peu de place autour de lui dans $A$. Cette image est tout d'abord formalisée de la manière suivante : $p$ est un point intérieur à $A$ si $A$ contient une boule ouverte de centre $p$ puis dans le registre symbolique. La notion de point intérieur amène alors l'idée naturelle de considérer, pour un ensemble $A$, l'ensemble des points qui lui sont intérieurs, ce qui permet de définir l'intérieur de $A$ à partir du formalisme suivant : $\operatorname{int} A = \{p \in A : B(p,r) \subseteq A\}$. Une fois cette notion introduite, une question qui émerge tout aussi naturellement est de se demander si un ensemble peut coïncider avec son intérieur et d'introduire ainsi la notion d'ensemble ouvert en disant qu'un ensemble $A$ est ouvert si $A = \operatorname{int} A$. Un cheminement équivalent peut être suivi à partir de la notion de point adhérent pour parvenir à la notion de fermé.

Dans le dispositif, le début de l'enseignement ne sollicite que la notion de boule pour caractériser les notions ; celle de suite apparaît plus tard dans le cours, contrairement à l'enseignement initial où les deux notions étaient d'emblée utilisées dans les définitions.

***Les tâches de manipulation des définitions***

Concernant les exercices, nous avons respecté la contrainte de proposer des tâches de manipulation des définitions. Dans l'enseignement initial, ces tâches étaient complètement laissées à la charge des étudiants. Nous avons précédemment montré la complexité du travail mathématique engendré par ce type d'exercices, nous amenant à penser que de laisser chercher les étudiants de manière autonome pour résoudre ces exercices ne leur permet pas de dépasser les difficultés repérées.

Ainsi, un autre aménagement de l'enseignement initial consiste à intégrer de nombreux exemples, tant au niveau des types de points que des types d'ensembles étudiés. Nous pensons que l'exemplification peut au moins contribuer à enrichir le stock de référence des étudiants et à mieux se représenter la structure topologique des ensembles en repérant les ressemblances et les différences dans les exemples traités. Mais nous faisons également l'hypothèse que la multiplication des exemples peut favoriser les apprentissages des étudiants en topologie moyennant une gestion adaptée du travail de l'enseignant en classe.

Nous avons donc intégré des phases durant lesquelles c'est l'enseignant qui prend en charge la résolution des exercices de manipulation des définitions en montrant aux étudiants le fonctionnement des connaissances mathématiques en jeu, par le biais de commentaires méta-mathématiques. Ces commentaires concernent notamment l'utilisation des connaissances en logique et en théorie des ensembles sollicitées dans ces exercices. Le choix fait ici ne consiste donc pas à prévoir un cours avant l'enseignement portant sur ces connaissances mais bien de les expliciter et de les travailler au fur et à mesure qu'elles apparaissent dans l'enseignement de topologie.

Pour illustrer notre propos, nous donnons deux exercices proposés à différents moments de l'enseignement. L'exercice 1 est donné juste après l'introduction des notions de point intérieur et de point adhérent, l'exercice 2 apparaît quant à lui à la fin de l'enseignement.

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, on donne un point $p$ et un ensemble $A$. Dites si le point $p$ est intérieur à $A$ ou non, adhérent à $A$ ou non. Justifiez votre réponse.

1) $p=\frac{1}{3}, A=[0,1]\subseteq R$

2) $p=-\sqrt{2}, A=[-2,1]\subseteq R$

3) $p=1, A=[0,1[\subseteq R$

4) $p=\frac{1}{2}, A=\left\{\frac{1}{n}: n\in N^*\right\}\subseteq R$

5) $p=0, A=\left\{\frac{1}{n}: n\in N^*\right\}\subseteq R$

6) $p=(2,4), A=\left\{(x,y)\in R^2 : y=x^2\right\}\subseteq R^2$

7) pour $x,y\in R$ et $r>0$, $p=\left(x,y-\frac{r}{3}\right), A=B\left((x,y),r\right)\subseteq R^2$

Exercice 2

Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez votre réponse.

1) $[\pi,+\infty[\subseteq R$

2) $]-\infty,-2[\subseteq R$

3) $\{3\}\subseteq R$

4) $\left\{\frac{1}{n} : n \in N^*\right\} \subseteq R$

5) $\left\{(x,y) \in R^2 : 3x + 2y = 6\right\} \subseteq R^2$

L'exercice 1 a pour objectif la manipulation des caractérisations en termes de boule qui ont émergé de la tâche d'introduction et du symbolisme associé. La nature des nombres et des ensembles se complexifie au fur et à mesure de l'exercice. Aux points 6) et 7) par exemple, un changement de cadres apparaît (on passe de $R$ à $R^2$) qui nécessite d'adapter les raisonnements précédents dans $R$ sur des couples de nombres réels. L'exercice 2 porte sur la structure topologique de sous-ensembles classiques de $R$ et de $R^2$ (intervalles, singleton, droite du plan…). Nous choisissons de rendre compte de l'analyse a priori des exemples 4) dans chaque exercice et du déroulement en classe qui a été observé.

Dans l'exercice 1, l'exemple 4) nécessite tout d'abord de savoir si le point *p* est intérieur ou non à l'ensemble. Il faut alors montrer que la négation de la caractérisation en terme de boule est vérifiée par le point *p*, c'est-à-dire $\forall r > 0, B\left(\frac{1}{2}, r\right) \not\subset A$. Une connaissance du cours est alors sollicitée : dans $R$, la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$ est l'intervalle $]x-r, x+r[$. Le raisonnement qui en découle consiste à trouver un réel $y$ tel que $y \in B\left(\frac{1}{2}, r\right)$ et $y \notin A$. Il convient ensuite de justifier que le choix de $y$ convient en manipulant des inégalités (utilisation de connaissances anciennes).

Dans l'exercice 2, l'exemple 4) requiert en premier lieu de savoir si l'ensemble est ouvert ou non. L'ensemble, que nous notons *A*, n'est pas ouvert, ce qui revient à prouver que nous avons $A \not\subset \operatorname{int} A$. Cette non-inclusion d'ensembles se traduit en la recherche d'un réel $y$ tel que $y \in A$ et $y \notin \operatorname{int} A$. Le travail de justification attendu pour montrer que le choix fait pour $y$ convient engendre un travail mathématique semblable à celui réalisé décrit précédemment dans l'exercice 1.

Concernant le déroulement de l'exercice 1, nous (le « nous » s'associe ici à notre posture d'enseignant qui mène l'expérimentation) avons tout d'abord organisé un temps de recherche individuelle pour que les étudiants prennent connaissance des différents exemples à traiter. Ensuite, prenant appui sur les difficultés répertoriées dans la réalisation de ce type de tâches, nous avons corrigé l'exercice sous la forme d'une discussion collective durant laquelle nous avons insisté sur le type de justifications et la rigueur attendus en mettant en évidence les connaissances logiques et ensemblistes qui apparaissent dans chaque exemple. Rappelons que ces connaissances ne sont pas disponibles chez un grand nombre d'étudiants à ce stade de l'enseignement, d'où l'intérêt d'expliciter comment celles-ci sont adaptées ici.

La gestion en classe de l'exercice 2 est différente. Celui-ci commence par une recherche individuelle assez longue, pour que les étudiants aient le temps de traiter chaque exemple. C'est donc en autonomie qu'ils doivent cette fois réaliser les adaptations nécessaires à l'étude de chaque ensemble. Compte tenu des analyses a priori, nous faisons l'hypothèse que la gestion envisagée à l'exercice 1 permettra aux étudiants « d'imiter » le travail montré par l'enseignant. Alors que la gestion prévue a priori envisageait 25 minutes de travail individuel, c'est un temps de recherche de 40 minutes qui a été observé en classe. Aucun blocage particulier n'a toutefois été repéré chez les étudiants pendant la réalisation de la tâche.

Les étudiants ont travaillé individuellement tout en discutant entre eux mais nous nous sommes déplacée auprès d'eux pour maintenir les conditions de travail. Nous avons ainsi pu repérer que la majorité des étudiants parvenait à conjecturer si les ensembles étaient ouverts, fermés ou non. Quelques justifications incomplètes ont été repérées dans certaines productions (par exemple une inclusion d'ensembles non prouvée) et celles-ci ont pu être complétées à notre demande. Le travail réalisé semble donc conforme à celui prévu dans l'analyse a priori mais il est bien sûr impossible d'avoir accès à la production de chaque étudiant en classe. La correction de cet exercice a pris une forme identique à celle de l'exercice 1, c'est-à-dire celle d'une discussion collective entre les étudiants et l'enseignant, ce dernier présentant au tableau les réponses dictées par les étudiants, en les ajustant au besoin.

**Apprentissages des étudiants**

Pour caractériser les apprentissages des étudiants réalisés après l'expérimentation de notre dispositif, nous nous sommes appuyée sur le dépouillement de leurs copies aux évaluations. Dans les universités belges francophones, une première évaluation est organisée au mois de juin. Les étudiants qui échouent ont la possibilité de se prêter à une deuxième évaluation au mois d'août. Nous regardons ici la question portant sur la manipulation des définitions proposée à la deuxième évaluation. Une question similaire a été donnée en juin. En voici l'énoncé :

Soit $A \subseteq R^N$.

1) Définissez « $A$ est un ensemble ouvert ».
2) Définissez « $A$ est un ensemble fermé ».
3) À partir des définitions précédentes, dites, pour chacun des ensembles suivants, s'il est ouvert ou fermé :

- $E_1 = \{(x,y) \in R^2 : |x| \leq y\} \subseteq R^2$
- $E_2 = \left\{\frac{n+1}{n} : n \in N^*\right\} \subseteq R$
- $E_3 = \{x \in R : x^3 + x^2 + x + 1 < 1\} \subseteq R$

Dans notre thèse, nous présentons une analyse a priori de cet exercice et nous montrons que le travail mathématique à réaliser est identique à celui réalisé dans des exercices proposés durant l'expérimentation, tant du point de vue des connaissances à utiliser que des adaptations à réaliser sur celles-ci. Ainsi, un aspect important du travail attendu chez l'étudiant est de particulariser des variables communes à cet exercice et à ceux réalisés au cours, telles que la nature des nombres, le choix du rayon d'une boule, etc. Ainsi, pour inférer des éléments sur les apprentissages des étudiants, notre démarche consiste à analyser, sur la base de leurs copies, comment ils étudient la nature topologique de quelques ensembles présentant des traits communs avec ceux étudiés dans le cours et les difficultés rencontrées dans la manipulation du symbolisme.

Le dépouillement des copies montre que les étudiants ont progressé tant dans la restitution des définitions que dans les tâches de manipulation de ces dernières puisque nous avons un taux de réussite de 80%, au terme des deux évaluations, sur ce type de questions. Les erreurs observées sont désormais très ponctuelles. Par exemple, un étudiant définit l'intérieur d'un ensemble $A$ par $\forall x \in A, \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A$. Un autre étudiant définit un ensemble fermé par $\forall x \in A, \forall (x_n) \subseteq A$, si $x_n \to x$ alors $x \in A$. Concernant la manipulation du registre symbolique utilisé dans les définitions, nous avons rencontré un « principe du tout ou rien ».

En effet, soit l'étudiant répond correctement à la question soit il est bloqué au démarrage de l'exercice et n'écrit pratiquement rien sur sa copie et il est donc presque impossible de comprendre quelles sont ses difficultés. Voici quelques exemples d'erreurs observées dans les copies. Pour montrer que l'ensemble $E_2$ n'est pas ouvert, deux étudiants ne parviennent pas à trouver un réel *y* tel que $y \in B(2,r)$, pour un certain *r,* et $y \notin E_2$. Pour l'ensemble $E_3$, deux étudiants ne s'intéressent pas à la résolution de l'inéquation pour remarquer que $E_3$ est un intervalle et ne parviennent pas à conjecturer si l'ensemble est ouvert ou non, fermé ou non. Enfin, deux étudiants traduisent la non-inclusion $E_1 \not\subset \operatorname{int} E_1$ de la manière suivante : « soit $z \in E_1$. Montrons que $z \notin \operatorname{int} E_1$ ».

**Conclusion**

C'est tout d'abord en tant qu'enseignante que nous nous sommes intéressée au domaine de la topologie, voulant comprendre pourquoi les questions posées aux évaluations étaient mal réussies alors que, de notre point de vue, il s'agissait de restituer des définitions et de les manipuler sur des exemples simples. Pour aborder cette problématique avec un point de vue didactique, nous avons choisi comme premier point d'entrée d'étudier les spécificités des notions de topologie dans le cours en question. Nos analyses nous ont amenée à interpréter ces notions en termes de notions FUG et nous avons montré que les exercices de manipulation des définitions proposés à nos étudiants, dans lesquels la formalisation devrait apporter de la simplification, s'avèrent être des tâches très difficiles pour eux. Ce type d'exercices, qui apparaît comme une contrainte stricte délimitant l'enseignement, met également en jeu un travail exclusivement syntaxique, ne nécessitant finalement pas de réelles connaissances en topologie. Cet enseignement ne permet donc pas aux étudiants de donner du sens aux notions étudiées.

Partant de ce premier diagnostic, une partie de notre recherche a ensuite été consacrée à l'élaboration d'un scénario d'enseignement (cours, exercices et évaluation) respectant les contraintes institutionnelles et pour lequel nous avons fait le pari qu'il pouvait mener aux apprentissages visés tout en amenant les étudiants à travailler davantage sur le sens des notions de topologie.

De manière à nous dégager de l'institution, une étude du phénomène de transposition didactique a alors été réalisée à partir d'une étude historique de la genèse et du développement de certaines notions de topologie complétée par une analyse de quelques manuels. En orientant nos investigations historiques et épistémologiques par cette idée que les notions de topologie sont des notions FUG, nous avons pu reconstituer des éléments qui ont enrichi notre compréhension de ces différents caractères. En confrontant cette partie du travail aux difficultés précédemment répertoriées chez les étudiants, nous avons pu développer des leviers didactiques à intégrer dans l'enseignement initial de manière à l'enrichir pour mener les étudiants aux acquisitions visées. En ce sens, ces analyses menées en amont de l'élaboration de notre dispositif ont contribué à mettre une forme de relief sur les notions à enseigner (au sens de Robert, 2007) en donnant des éléments qui peuvent donner une certaine intelligibilité aux notions à enseigner, à leur fonction et à leurs enjeux.

Pour motiver l'introduction des notions, nous avons choisi de rendre visible aux étudiants un questionnement tel que l'objet à définir présente un intérêt, notamment en recourant au levier méta. Du côté des tâches de manipulation des définitions, nous avons montré comment leur réalisation en classe a été associée à un rôle spécifique de l'enseignant. Le travail d'introduction qui a été ménagé et nos choix de gestion montrent bien de quelle manière nous avons à la fois pris en compte le caractère FUG des notions et les contraintes institutionnelles.

Le dépouillement des copies des étudiants aux évaluations après expérimentation montre que la restitution des définitions est correcte chez la majorité des étudiants et l'organisation attendue, en termes d'adaptations, dans les exercices de manipulation des définitions et des écritures symboliques est réalisée correctement par 80% des étudiants.

Dans l'élaboration de notre dispositif, nous nous sommes toutefois privée de certains éléments, compte tenu des contraintes institutionnelles que nous ne nous sommes pas autorisée à franchir. Par exemple, alors que notre étude historique montre bien l'émergence des notions de topologie dans leur caractère outil pour résoudre des problèmes liés à des questions de convergence, notre dispositif ne prend pas en compte cette dimension et propose un travail sur les notions qui reste du côté de leur caractère objet. Cette limite montre toute l'importance de l'inscription des contraintes institutionnelles dans une recherche en didactique des mathématiques.

Concernant les apprentissages réalisés par les étudiants, des questions restent ouvertes, comme par exemple la question de savoir comment faire travailler sur le sens des notions, tout en ne négligeant pas la technique tout comme la question de savoir par où commencer dans l'enseignement. Ces problématiques offrent des perspectives pour poursuivre le travail entrepris sur l'enseignement des notions de topologie.

## Bibliographie


Bridoux S. (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas.* Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00660249/

Cantor G. (1883). Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math Ann.,* 5, 123-132, 1872, *Gesamm.Abh.,* 92-101, Springer, Berlin, 1932, trad. Française *Acta Mathematica* , 2, 336-348, 1883.

Cauchy A.L. (1821). *Œuvres complètes,* Gauthier-Villars, Paris.

Chevallard Y. (1991). *La transposition* didactique, 2ème édition, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dieudonné J. (dir.) (1978). *Abrégé d'histoire des mathématiques,* 2 volumes, Hermann, Paris.

Dorier J.-L. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en* question, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dorier J.-L. (2000). Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire-Perspectives théoriques sur leurs interactions, *Les cahiers du Laboratoire Leibniz,* Numéro 12, Laboratoire Leibniz-IMAG.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet, Recherches en Didactique des Mathématiques, 7/2, 5-31.

Duval R. (1995). Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Berne, Peter Lang.

Fréchet M. (1906). Sur quelques points du Calcul Fonctionnel, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22, 1-74.

Hausdorff F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre,*Veit, Leipzig.

James I.M. (1999). *History of Topology,* Elsevier.

Jordan C. (1893). *Cours d'analyse, tome 1,* seconde édition, Gauthier-Villars, Paris.

Manheim J.H. (1964). *The Genesis of Point Set Theory,* Pergamon Press.

Pariès M., Robert A., Rogalski J. (2008). Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré, *Educational Studies in Mathematics,* 68, 55-80.

Robert A. (1982). L’acquisition de la notion de convergence des suites dans l’enseignement supérieur, Thèse d’État, Université Paris 7.

Robert A. (1998). Outils d’analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l’université, *Recherches en Didactique des mathématiques,* 18/2, 138-190.

Robert A. et al. (2007). Mettre du relief sur les mathématiques au collège et au lycée – Quelques exemples, *Document pour la formation des enseignants,* Numéro 7, Université Paris 7.

Robert A., Robinet J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 16/2, 145-175.

Robert A., Rogalski J. (2004). Problèmes d’introduction et autres problèmes de recherche au lycée, *Repère IREM,* 54, 77-103.

Vandebrouck F. (dir.) (2008). La classe de mathématiques, activités des élèves et pratiques des enseignants, Toulouse : Octarès.

Weierstrass K. (1894). *Mathematische Werke,* Band I.Berlin : Layer une Müller.

REMI BRISSIAUD

# L'EFFONDREMENT DES PERFORMANCES EN CALCUL ENTRE 1987 ET 1999 : QUELLE EPIDEMIOLOGIE ?

**remi.brissiaud@univ-paris8.fr**

**Laboratoire Paragraphe (Université Paris 8 – Saint-Denis), Équipe « Compréhension, Raisonnement et Acquisition de Connaissances »**

**Résumé**
Les performances en calcul des élèves de CM2 se sont effondrées entre 1987 et 1999 (Rocher, 2008). Des arguments issus de l'histoire des discours et des pratiques pédagogiques, de la psychologie des apprentissages numériques, de la psychologie clinique et différentielle et de la psychologie interculturelle, conduisent à incriminer un basculement dans les choix didactiques de l'école française à partir de 1986. Alors que l'enseignement du comptage-numérotage (Brissiaud, 1989, 2007) était honni avant cette date, il s'est généralisé après. La fin du texte est consacrée à une analyse didactique du concept de numérotation. Elle est fondamentale parce que, sans une telle analyse, il est difficile de prendre conscience du fait que le comptage-numérotage est un « schème dangereux ».

## Introduction

Ce texte rapporte ce qui a été présenté au séminaire national de didactique des mathématiques de mars 2013 et il s'articule autour d'une notion fondamentale : celle de comptage-numérotage ou encore de numérotation (Brissiaud, 1989, 2007). Dans sa dernière partie, il contient également une réponse aux (rares) objections émises lors de ce séminaire ainsi que le développement d'une partie qui, faute de temps, n'avait pas pu être présentée de façon détaillée ce jour là : la notion de comptage-numérotage n'a guère été étudiée jusqu'ici dans les travaux de didactique des mathématiques, et cela doit vraisemblablement être considéré comme une faiblesse de l'approche didactique des premiers apprentissages numériques.

## Un effondrement des performances en calcul qui se produit entre 1987 et 1999

Les performances en calcul des élèves de CM2 français étaient bonnes en 1987 mais elles se sont effondrées entre 1987 et 1999 (Rocher, 2008). Ensuite, entre 1999 et 2007, elles ont stagné à ce très bas niveau (en fait, elles baissent encore, mais de manière non significative). Ainsi, une multiplication telle que 247 x 36 était réussie par 84% des élèves de CM2 en 1987 ; l'addition en colonnes de trois nombres 19 786 + 215 + 3 291 était réussie par 94% de ces mêmes élèves. Dans un cas comme dans l'autre, il sera difficile de faire mieux à l'avenir parce que de tels taux de réussite sont élevés et, à partir d'un certain score, il est difficile de progresser encore (cf. la notion *d'effet plafond*). En 1987, les élèves calculaient encore bien et ce serait déjà un beau progrès de retrouver les performances d'alors. En 2007, en effet, le taux de réussite à la même multiplication n'est que de 68% (84% auparavant) et celui de la même addition de 83% (94% auparavant) : même les additions, une opération dont les élèves de CM2 répètent l'exécution depuis bien longtemps, sont moins bien réussies.

Parler d'*effondrement* ne relève en rien d'une rhétorique catastrophiste : entre 1987 et 1999, la moyenne des performances des élèves de CM2 a baissé de 66% de l'écart-type initial. Or, il est légitime de s'inquiéter à partir de 20% et, dans d'autres enquêtes du même type, une année d'apprentissage correspond à environ 50%. Ainsi, c'est donc l'équivalent de plus d'une année d'apprentissage que les élèves de CM2 ont perdu entre 1987 et 1999.

**À l'école maternelle, un basculement des choix didactiques s'effectue en 1986**

Le basculement qui va être évoqué dans ce texte est daté de 1986 parce que son premier jalon est la publication cette année-là d'une circulaire pour l'école maternelle (MEN, 1986) dans laquelle on lit : « *Progressivement, l'enfant découvre et construit le nombre. Il apprend et construit la comptine numérique.* » La présence d'une telle phrase dans un texte institutionnel constituait une rupture importante. En effet, les élèves qui étaient en CM2 en 1987, ceux qui calculaient bien mieux qu'aujourd'hui, eux n'avaient eu aucun apprentissage numérique avant novembre au CP : ni à l'école maternelle, ni au début du CP. Ils avaient fréquenté une école maternelle très influencée par les travaux de Jean Piaget et les pédagogues d'alors pensaient qu'enseigner les nombres à l'école maternelle ne pouvait conduire qu'à une sorte de dressage.

Cette position était fondée sur des observations telles que celle qui est rapportée ci-après. Jean Piaget et Bärbel Inhelder (1963) proposent une « tâche de conservation » à un enfant : 5 jetons rouges sont alignés et 5 bleus sont mis en correspondance terme à terme avec les rouges avant que l'expérimentateur écarte les bleus afin de former une rangée plus longue. Un enfant, interrogé sur la rangée la plus nombreuse après cette transformation, se met à compter les jetons. Jean Piaget et Bärbel Inhelder rapportent les propos de cet enfant avant de les analyser :

> « Ça fait 1, 2 , 3 , 4 , 5 ici », nous dit un sujet de 4 ans et : « 1, 2, 3, 4, 5 là, mais ça fait quand même plus là. (en montrant la rangée la plus longue) » Dans cet exemple, les noms de nombre 1 à 5 ne constituent qu'un moyen pour individualiser les éléments, mais n'entraînant ni la conclusion que le tout est égal à la somme des parties, ni par conséquent la conservation de ce tout. Or, sans additivité ni conservation, on ne saurait parler de nombres ! »

Ainsi le comptage, parce qu'il n'a pas la propriété d'être « additif » chez les jeunes enfants (2 = 1 + 1 ; 3 = 2 + 1 ; 4 = 3 + 1 ; 5 = 4 + 1, etc.), et parce qu'il ne conduit pas à la conservation, s'est trouvé banni de l'école maternelle jusqu'en 1986.

En revanche, aujourd'hui, les élèves apprennent à compter à l'école dès la petite section, à 3 - 4 ans. Dans les programmes de 2008 pour l'école maternelle, on lit qu'à la fin de Grande Section, l'enfant est capable de :

- mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30 ;
- dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ;
- associer le nom des nombres connus avec leur écriture chiffrée ;

Afin que leurs élèves apprennent à lire et écrire les nombres dès l'école maternelle, les enseignants de GS de maternelle utilisent presque tous aujourd'hui une file numérotée jusqu'à 30[1]. Ce sont ces élèves-là qui, arrivés en CM2, calculent beaucoup moins bien que leurs prédécesseurs.

[1] Dans le rapport n°2011-108 de l'inspection générale consacré à l'école maternelle, il est indiqué qu'à cette date (2011) une file numérotée est affichée dans presque toutes les classes dès la petite section de maternelle.

**Le basculement concernant les additions élémentaires**

Rappelons que les élèves qui, en 1987, calculaient encore bien en CM2, n'avaient eu aucun apprentissage numérique en maternelle. Or, même au CP, leurs apprentissages numériques commençaient tardivement. Dans l'ouvrage Ermel (1977), il était recommandé de les faire commencer vers février au CP et dans le fichier le plus utilisé à l'époque (Eiler, 1977) la leçon sur les nombres 1, 2 et 3 s'effectuait en novembre au CP et celle sur le nombre 10, en janvier au CP. Et dans cet ouvrage, les nombres étaient étudiés l'un après l'autre entre 4 et 10 en mettant l'accent sur leurs décompositions : 4 = 3 + 1 ou 4 = 2 + 2 ou… ; 5 = 4 + 1, etc.

En fait, vers le milieu du siècle dernier, le rejet du comptage et l'accent mis sur les décompositions des nombres, constituaient un choix didactique fondamental de l'école française. On s'en rend compte en lisant un extrait d'un rapport rédigé sous la direction de Gaston Mialaret, l'un des fondateurs des Sciences de l'Éducation en France, ex président du GFEN et, plus généralement, très engagé dans le mouvement de l'Éducation Nouvelle. Il a été publié sous l'égide de l'UNESCO, suite à ce que Gaston Mialaret (1955) présente comme une « *réunion d'experts chargés d'étudier et de résumer les principes pédagogiques fondamentaux de l'initiation au calcul* » (page 3). Soyons encore plus précis : la citation qui suit est d'Henri Canac, sous-directeur de l'ENS de Saint-Cloud. On retrouve en effet le même extrait dans plusieurs de ses écrits précédents (par exemple : Canac, 1955). Il s'exprime ainsi à propos des élèves dont on dit aujourd'hui qu'ils sont fragiles, ceux qui mettent particulièrement en difficulté notre école :

> « Dans de nombreux cours élémentaires, ou même cours moyens, on trouve souvent de grands benêts qui comptent sur leurs doigts (en cachette lorsque M. l'Inspecteur est là) ou qui, sommés de résoudre une simple opération, comme 8 + 5, se récitent intérieurement à eux-mêmes : 8, 9, 10, 11, 12, 13 en évoquant des doigts imaginaires. Au vrai, avec ces élèves mal débutés … »

Aujourd'hui, dès décembre au CP, les enfants disposent le plus souvent d'un moyen leur permettant d'obtenir le résultat d'une addition élémentaire (quand le nombre ajouté < 10) dans le domaine des 30-50 premiers nombres. On trouve dans la figure 1, un exemple de leçon correspondante, extraite d'un fichier dont la collection n'existe plus aujourd'hui mais qui est représentatif de ce qui se fait encore le plus couramment, du moins concernant l'usage de la file numérotée.

Ce type de séquence ne figurait dans aucun manuel ou fichier de CP français avant 1986[2] ; aujourd'hui, l'usage de la file numérotée qui y est décrit figure dans presque tous les manuels, fichiers, logiciels, etc. C'est celui qui est véhiculé par la Kahn Academy, un cours en ligne états-unien (MOOC), récemment traduit en français et dont la parution a eu beaucoup d'échos dans les médias. La préconisation d'un comptage sur les mains est également présente dans diverses aides pédagogiques mais elle est moins fréquente ; en fait, cela importe peu : lorsqu'un enfant a appris à trouver le résultat d'une addition à l'aide d'une file numérotée et lorsqu'il n'a plus cet outil à disposition, il le remplace par ses doigts.

Dans une très large majorité de CP français, aujourd'hui, une file numérotée est affichée dans la classe et les enfants l'utilisent comme c'est indiqué dans la leçon précédente pour trouver le résultat d'une addition. Cet usage de la file numérotée faisait même partie du contenu des programmes de 2002. Ainsi, l'un des objectifs du cycle 2, était rédigé ainsi :

> Déterminer, par addition ou soustraction, la position atteinte sur une ligne graduée après un déplacement en avant ou en arrière.

---

[2] Ceci a été vérifié sur l'ensemble du fond du musée de l'Éducation de Saint-Ouen l'Aumône dans le Val d'Oise. En fait, le premier fichier comportant une telle file date de 1985 et ses auteurs font partie de l'équipe Ermel qui va promouvoir son usage.

On est donc face à un phénomène peu banal : en commençant leurs apprentissages numériques bien plus tardivement qu'aujourd'hui, les élèves de 1987 calculaient bien mieux qu'aujourd'hui. Et les pratiques pédagogiques des enseignants reposent souvent aujourd'hui sur des choix didactiques honnis vers le milieu du siècle dernier. On est évidemment conduit à penser que les pédagogues du milieux du siècle dernier, ceux qui étaient influencés par l'Éducation Nouvelle, avaient plutôt raison. Si c'est le cas, cela s'explique-t-il ?

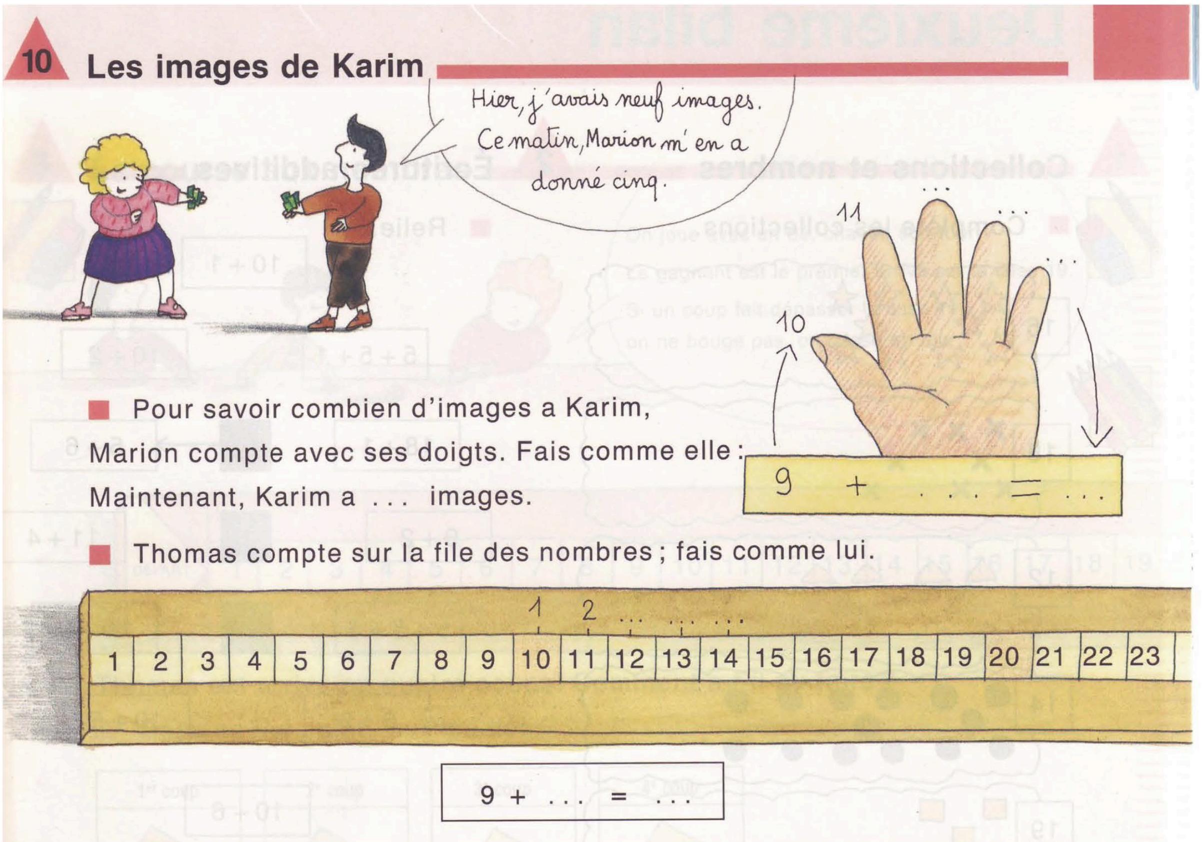



Figure 1 : exemple de leçon explicitant l'usage d'une file numérotée

## Pourquoi le basculement de 1986 est susceptible d'expliquer l'effondrement des performances en calcul

Une description très détaillée des conditions de ce basculement se trouve dans Brissiaud (2013). Signalons seulement qu'il provient de l'utilisation, par une seconde équipe Ermel, des travaux d'une psychologue états-unienne, Rochel Gelman (Gelman & Gallistel, 1978 ; Palanque et col, 1987 ; Ermel, 1990). Cette chercheuse pensait que l'usage de ce qu'elle appelait les « *principes* » du comptage, relevait d'une compétence extrêmement précoce, voire innée. Or, le comptage qu'elle a analysé ainsi en divers *principes*, est le comptage tel qu'il s'enseigne dans les familles, celui où l'on insiste sur la correspondance 1 mot – 1 unité.

### *La notion de comptage-numérotage*

Enseigner le comptage « à la Gelman » ou selon le sens commun est loin de permettre aux enfants d'accéder facilement au nombre. Ainsi, en PS et en MS, on observe très fréquemment le dialogue suivant (Schaeffer & col, 1974) :

> Adulte : Combien y a-t-il de jetons ?
> Enfant (en comptant les jetons) : « un », « deux », « trois », « quatre ».

Adulte : Oui, alors combien y a-t-il de jetons ?
Enfant (recompte les jetons) : « Un », « deux », « trois », « quatre ».
Adulte : Je suis d'accord, mais ce que je t'ai demandé, c'est combien il y a de jetons ?
Enfant (recompte encore) : « Un », « deux », « trois », « quatre ».

Cet enfant met bien en correspondance terme à terme les mots-nombres et les jetons de la collection (il respecte le « principe » de correspondance terme à terme), mais il n'isole pas le dernier mot-nombre prononcé pour répondre à la question posée. L'enfant reste apparemment incapable d'exploiter ce comptage pour répondre à la question : « Combien… ? ». Son comptage ne lui permet pas d'accéder au nombre. On peut dire : *son comptage n'est pas un dénombrement*.

Pour comprendre ce phénomène, il suffit d'imaginer un autre contexte où l'enfant pointe des objets en disant des mots tous différents : «cube», «table», «fenêtre», «toboggan», par exemple. Le dernier mot prononcé, «toboggan», réfère à l'objet qui est pointé au moment où ce mot est prononcé (le toboggan), il ne dit rien des autres objets, ni de l'ensemble des objets. Or, lors d'un comptage «à la Gelman», le dernier mot, «quatre», est prononcé alors que l'enfant pointe le dernier objet, comme dans l'exemple précédent, mais dans ce cas l'enfant devrait comprendre que «quatre», pour l'essentiel, ne réfère pas à cet objet parce qu'il désigne une propriété de l'ensemble des objets : ce mot précise quelle est la pluralité que l'enfant a devant lui, il dit le nombre d'unités de la collection. Pointer un objet tout en prononçant un mot, alors que celui-ci désigne pour l'essentiel une propriété d'autre chose, correspond à un fonctionnement du langage complètement atypique (Markman, 1989 ; 1990). À vrai dire, on ne l'observe que dans le contexte de l'enseignement du comptage «à la Gelman».

C'est donc l'insistance des pédagogues sur la correspondance 1 mot - 1 élément qui explique l'incompréhension des enfants : elle les conduit à concevoir les éléments successivement pointés comme «*le un, le deux, le trois, le quatre…*». Les mots prononcés sont alors des sortes de numéros renvoyant chacun à un élément et un seul ; le dernier mot prononcé est lui aussi un numéro, comme les autres. Ainsi, enseigner le comptage «à la Gelman», selon la pédagogie de sens commun, c'est enseigner ce que j'ai appelé un comptage-numérotage (Brissiaud, 1989 ; 2007).

On dispose de nombreuses preuves empiriques du fait qu'un enseignement du comptage basé sur une théâtralisation de la correspondance 1 mot – 1 objet, conduit les enfants à considérer les mots-nombres comme des sortes de numéros. Ainsi, lorsque des enfants de 4 ans et demi environ viennent de compter 7 objets et lorsqu'on leur demande de montrer les 7 objets, en insistant sur la marque du pluriel (les), 75% d'entre eux montrent quand même un seul objet : le dernier pointé (Fuson, 1988). Lorsqu'on demande à des élèves de GS de rédiger un message écrit afin de ne pas oublier combien il y a d'objets dans une collection de 7 objets qu'ils viennent de compter, ils dessinent : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, c'est-à-dire l'ensemble des numéros qu'ils viennent d'utiliser (Sinclair & col, 1988 ; Brissiaud, 1989).

***L'enseignement du comptage-numérotage permet de résoudre de nombreux problèmes mais il éloigne du calcul***

Nous verrons dans la dernière partie de ce texte que l'usage d'un comptage-numérotage permet de réussir les diverses tâches correspondant à ce qu'en didactique des mathématiques, on appelle, improprement à mon sens, la « *situation fondamentale du dénombrement* ». En fait, le comptage-numérotage permet de réussir des tâches encore plus générales : celles de comparaison. Ainsi, s'il s'agit de comparer deux collections de 4 et 5 unités respectivement, on observe certains enfants qui comptent la première en disant : 1, 2, 3, 4 , sans être capable de dire le nombre correspondant ; mais cela ne les empêche pas de se tourner vers l'autre collection en disant : 1, 2, 3, 4, 5, sans non plus dire le nombre. Dans l'un et l'autre cas, ils ne savent pas répondre à la question « Combien y a-t-il… ? » et pourtant, ils concluent correctement en disant que la collection « 1, 2, 3, 4, 5 » est plus nombreuse que la collection « 1, 2, 3, 4 » : ils ont compris que lorsque le comptage numérotage « va plus loin » ou « dure plus longtemps », on peut dire : « Il y a plus là que là » (Droz & Paschoud, 1981). Cet exemple montre que le comptage-numérotage est un outil culturel qui permet de résoudre de nombreux problèmes.

Cependant, l'enseignement du comptage-numérotage renforce la signification des mots-nombres en tant que numéros et, donc, ne favorise pas l'accès à leur signification en tant que noms de nombres, désignant des pluralités. Or, seule cette dernière signification permet d'accéder au calcul. En effet, l'entrée dans le calcul est évidemment impossible tant que les enfants n'ont pas compris que les mots qu'ils utilisent pour compter désignent des pluralités successivement engendrées par l'ajout d'une unité : «*deux, c'est un et encore un*» ; «*trois, c'est un, un et encore un*» ou bien : «*trois, c'est deux et encore un*», «*quatre, c'est trois et encore un*», «*cinq, c'est quatre et encore un*», etc. L'entrée dans le calcul est impossible tant que le comptage n'a pas la propriété d'additivité, c'est-à-dire tant qu'il n'est pas un authentique comptage-dénombrement (Brissiaud, 2004). Faire le choix d'enseigner le comptage numérotage, c'est contraindre les enfants à s'approprier les nombres et le calcul alors que l'on fait un usage des mots qui masque ce qu'il est crucial d'apprendre, la propriété d'additivité du comptage. C'est contraindre les enfants à un apprentissage implicite des nombres et du calcul.

***L'enseignement du comptage-numérotage est à l'origine d'effets Jourdain***

Une preuve du fait qu'un tel apprentissage n'est pas toujours guidé par la compréhension est qu'il conduit à des absences de généralisation tout à fait surprenantes : même lorsque deux tâches semblent de difficultés équivalentes parce qu'elles ne diffèrent que très légèrement, il ne suffit pas que l'une ait été entraînée et, donc, soit bien réussie, pour que la seconde le soit également. Ainsi, dans une recherche récente, Sarnecka & Carey (2008) s'adressent à des enfants qui ont entre 2 ans 10 mois et 4 ans 3 mois ; elles leur demandent combien il y a d'objets dans une collection de 10 objets. Sur les 67 enfants interrogés, 53 comptent correctement les 10 objets et répètent le dernier mot prononcé : «dix». On pourrait donc croire que ces 53 enfants comprennent les 10 premiers nombres. Or, plus d'un tiers d'entre eux, face à un stock de cubes, échouent la tâche «Donne moi 5 cubes» ; ils en donnent une poignée au hasard, par exemple (certains échouent lorsqu'on leur demande de donner 3 cubes !). La réussite à la tâche « Combien… » est loin d'assurer celle à la tâche « Donne moi… »..

Ainsi, dans un premier temps, lorsque les enfants répètent le dernier mot de leur comptage-numérotage pour le fournir comme réponse à la question « Combien… », certains utilisent ce que Karen Fuson (1988) a appelé une « *règle du dernier mot prononcé* » : l'enfant répète le dernier numéro parce qu'on lui a fait comprendre qu'il fallait le faire. C'est le genre de phénomène que Guy Brousseau a appelé un « effet Jourdain » : l'enfant semble utiliser des connaissances de haut niveau (les nombres) alors qu'il ne fait que répondre en répétant le numéro attendu. Certains enfants se comportent ainsi sans même avoir compris que ce numéro, parce qu'il signale la fin du comptage-numérotage, permet de coder « en acte » la taille de la collection.

Et quand l'enfant réussit la tâche « Donne-moi N éléments », peut-on en déduire qu'il a compris les N premiers nombres ? Pas plus ! Considérons en effet cette autre tâche qui est un moyen d'évaluer une certaine connaissance de l'additivité du comptage (cf. la citation précédente de Jean Piaget et Bärbel Inhelder) : après qu'un enfant a réussi la tâche « Donne-moi 3 cubes », par exemple, l'adulte ajoute un autre cube et demande : « Et maintenant, il y a 4 cubes ou 5 cubes ? ». Elle est réussie plus tardivement encore (Davidson & col., 2012). Cela se comprend : il est possible de réussir la tâche « Donne-moi N éléments » à l'aide du seul comptage-numérotage. Il suffit que l'enfant comprenne qu'il doit bien garder à l'esprit le numéro prononcé par l'adulte (N) et qu'il doit arrêter son comptage-numérotage des objets tout de suite après ce numéro. De plus, cela s'exerce.

Ainsi, le comptage-numérotage permet de réussir un grand nombre de tâches par adaptations successives aux attentes des adultes, de sorte qu'on est souvent face à une sorte d'effet Jourdain : l'enfant se comporte comme s'il dénombrait, il réussit des tâches qui semblent nécessiter un dénombrement alors qu'il ne fait que numéroter.

***Le comptage-numérotage crée l'illusion que des élèves très faibles savent calculer les additions élémentaires***

Rappelons la différence entre numéros et nombres. Un numéro renvoie à *une seule entité* alors qu'un nombre, lui, renvoie à une pluralité et il est clair qu'un numéro ne véhicule pas nécessairement l'idée du nombre correspondant : lorsqu'on a la chambre d'hôtel « 407 », par exemple, il n'y a généralement pas autant de chambres dans l'hôtel parce que le premier chiffre renvoie à l'étage. Même dans les contextes où tous les numéros sont présents dans l'ordre, comme c'est le cas du contexte de la file numérotée, on utilise le plus souvent les numéros sans évoquer les nombres correspondants. Pour comprendre le fonctionnement cognitif d'un adulte dans un tel contexte, il suffit de s'imaginer un théâtre dont les sièges sont numérotés avec des lettres plutôt qu'avec des chiffres : sachant que « j'ai le siège R », par exemple, je n'ai nullement besoin de penser à la pluralité correspondant à R pour retrouver mon siège. Nous sommes d'ailleurs complètement incapables de répondre de manière précise à la question : « C'est combien R ? » Nous en sommes incapables et cela ne nous empêche pas de retrouver notre siège.

Concernant l'obtention du résultat d'une addition, c'est à ce niveau que le « piège pédagogique » correspondant à un phénomène d'effet Jourdain, continue à produire ses effets : la leçon décrite au début de ce texte, celle des images de Karim, permet en effet aux élèves de répondre correctement en raisonnant sur des numéros et non sur des nombres. On s'en rend bien compte en imaginant que dans cette leçon, la file est numérotée avec les lettres de l'alphabet plutôt qu'avec les écritures chiffrées et que la tâche proposée à l'élève consiste à compléter R + C = ?, par exemple. Même des élèves très faibles peuvent se comporter comme c'est indiqué dans la leçon : l'enfant commence par mettre le doigt sur la case R (c'est celle de départ), puis il dit A au-dessus de la case suivante (la case S), il dit B au-dessus de la suivante (la case T) et enfin C au-dessus de la suivante : c'est la case U, celle d'arrivée. Et l'élève complète l'égalité avec le numéro de la case d'arrivée, comme cela lui a été indiqué : R + C = U.

Cette égalité ressemble à une addition. Au plan formel, l'addition correspondante est d'ailleurs juste et elle sera considérée comme telle par l'enseignant qui devra donner une bonne appréciation. Sauf que pour réussir, il n'est absolument pas nécessaire d'évoquer mentalement les pluralités correspondant à R et U. Dans un tel contexte, les élèves sont susceptibles de donner les bonnes réponses en utilisant la « recette » qu'on leur a montrée (repérer la case de départ, etc.) alors que dans leur tête, ils ne mettent pas en relation des pluralités, ils ne calculent pas. Les élèves donnent les bonnes réponses mais ils ne progressent pas comme ils devraient : comme ils ne mettent pas en relation des pluralités, ils ne mémorisent pas les relations correspondantes, ils ne mémorisent pas les résultats d'additions élémentaires et restent prisonniers du comptage. Ce sont, comme disait Henri Canac, des « *élèves mal débutés* » qui ne mémorisent pas les résultats d'additions élémentaires.

**Des arguments en faveur du statut causal du basculement de 1986**

On ne donnera ci-dessous que quelques-uns des résultats ou des prises de position de chercheurs qu'il serait possible de citer. Un exposé beaucoup plus complet se trouve dans Brissiaud (1989, 2004, 2007, 2013)

***Des arguments issus de l'histoire des textes et des pratiques pédagogiques***

Certains ont déjà été donnés. Donnons-en deux autres. Signalons ainsi que l'analyse des progrès permis par l'enseignement du comptage-numérotage et des limites d'un tel enseignement, figure déjà dans un texte de 1966 (Fareng et Fareng, 1966) : «… *cette façon empirique fait acquérir à force de répétitions la liaison entre le nom des nombres, l'écriture du chiffre, la position de ce nombre dans la suite des autres, mais elle gêne la représentation du nombre, l'opération mentale, en un mot, elle empêche l'enfant de penser, de calculer*» et que l'alternative trouvée était présenté en 1955 par Henri Canac comme une « *méthode nouvelle* » qui « *forme à* (son) *sens, une des meilleures conquêtes de la pratique pédagogique au cours du dernier quart de siècle.* » Elle consistait à découvrir les nombres dans l'ordre afin de : « *construire (définir, poser), le nouveau nombre par adjonction de l'unité au nombre précédent, puis à étudier ses diverses décompositions en nombres moins élevés que lui.* »

Ainsi, concernant les 10 premiers nombres, l'accent était mis sur l'appropriation de leurs décompositions. Et concernant la mémorisation des résultats d'additions dont le résultat dépasse 10 ? Dès 1928, dans un rapport des inspecteurs généraux Marijon et Leconte (cf. Savard, 1940), la recommandation était très claire : « *Il convient, selon nous, d'arriver très vite à la formation, par voie purement mentale, de 8 + 7 = 15, au moyen de 8 + 2 = 10, 10 + 5 = 15, étant entendu que ces exercices auraient été précédés de nombreuses réalisations manuelles et visuelles* ». Ainsi, ces pédagogues recommandaient-ils l'usage de ce qu'on appelle fréquemment aujourd'hui un « *calcul pensé* » où l'on prend appui sur 10 pour trouver le résultat. À aucun moment, l'usage d'une file numérotée n'était considéré comme une propédeutique aux stratégies de décomposition-recomposition : il n'était tout simplement pas envisagé.

***Des arguments issus de la recherche en psychologie des apprentissages numériques***

Aujourd'hui, l'ensemble des chercheurs en psychologie considèrent que Rochel Gelman avait largement sous-estimé la difficulté d'interpréter de manière cardinale le comptage tel qu'on l'enseigne habituellement. Ils sont de plus en plus nombreux à souligner l'importance de ce qui distingue un comptage-numérotage et un comptage dénombrement : la propriété que Piaget appelait l'additivité de ce comptage (Gréco, 1962, parlait de *l'itération de l'unité*). De manière récente, Sarnecka et Carey (2008) s'expriment ainsi :

> Connaître le principe cardinal signifie avoir une connaissance implicite de la fonction de succession, c'est-à-dire la compréhension du fait que la cardinalité de chaque nombre résulte de l'ajout d'une unité au nombre précédent.

Eux, donc, parlent de la « fonction de succession ».

Concernant la mémorisation des résultats d'additions élémentaires, j'ai essayé de montrer en 1989 que l'apprentissage par cœur des tables d'additions ne peut pas se substituer à un manque de connaissances concernant les décompositions des premiers nombres, en argumentant que :

> La mémoire n'est pas un sac dans lequel sont retenues des informations isolées et statiques ; il convient mieux de se la représenter comme un réseau où les informations sont reliées entre elles par des liaisons complexes, structurées et organisées de manière dynamique et plastique. C'est ainsi que la détermination d'un résultat par un calcul pensé est l'occasion de construire de telles

liaisons. Cette pratique du calcul pensé est en elle-même un élément du processus de mémorisation. La mémorisation ne suit pas, elle accompagne et, peut-être même, résulte.

Ce point de vue est aujourd'hui celui défendu par le chercheur le plus influent au États-Unis auprès du NCTM (National Concil of Teachers of Mathematics), Arthur Baroody. En 2009, il a rédigé un article dont le titre s'inspire de celui du célèbre livre «*Why Can't Johnny Read ?* ». Ce que Johnny échoue, dans l'article de Baroody, c'est ce qu'échouent de manière caractéristique les enfants que l'on qualifie de dyscalculiques ou, si l'on adopte un autre point de vue théorique, de « mal débutés » : ces enfants ne mémorisent pas les résultats d'additions élémentaires. L'article s'intitule : « *Why Can't Johnny Remember the Basic Facts ?* » (Baroody et col, 2009). Il consacre la plus grande partie de l'article au rôle joué par la connaissance des décompositions des nombres (par exemple : 8 = 5 + 3 ou encore : 7 = 1 + 6) et par l'usage de ces décompositions au sein de stratégies de décomposition-recomposition (par exemple : 5 + 8 = 5 + 5 + 3, ou encore : 9 + 7 = 9 + 1 + 6). Il considère que l'usage de telles stratégies joue un rôle crucial dans la mémorisation des résultats élémentaires d'additions et que l'absence d'usage de telles stratégies est l'une des principales explications du fait que « *Johnny Can't Remember the Basic Facts* ».

Il faut encore citer les travaux de Jean-Paul Fischer qui, dans une théorie générale de la mémorisation, argumentait dès 1992 en faveur de la supériorité de l'usage des stratégies de décomposition-recomposition sur celles de comptage.

***Des arguments issus de la recherche en psychologie interculturelle***

Les différences de performances entre élèves de différents pays apparaissent tôt dans la scolarité. Ainsi, en Chine (Taïwan) les résultats d'additions élémentaires sont mémorisés dans 86% des cas en fin de 1ère année d'école alors qu'ils ne le sont que dans 26% des cas aux États-Unis (Geary et al, 1992). Il faut insister : en psychologie expérimentale, de telles différences sont exceptionnelles. Ainsi, en fin de 1ère année d'école, la mémorisation n'a pratiquement pas commencé chez les enfants états-uniens quand elle est presque achevée chez les enfants chinois. Que font les élèves états-uniens pour donner le résultat d'une addition ? Ils comptent, évidemment, et ceci dans 64% des cas (4% des cas en Chine). Mais comment s'en étonner puisque c'est ce qu'on leur a appris à faire ! En 1982, un psychologue japonais (Hatano, 1982) découvrant l'emploi que font les pédagogues états-uniens d'une file numérotée, faisait part de sa surprise : jamais les pédagogues japonais ne s'y prennent ainsi, ils favorisent systématiquement l'usage de stratégies de décomposition-recomposition. Les raisons de la différence de performances entre enfants états-uniens et enfants asiatiques sont nombreuses (façon de dire les nombres après dix, notamment) mais il y en a une qui joue nécessairement un rôle majeur : lorsqu'ils comptent, les élèves états-uniens font ce que leurs maîtres leur ont demandé de faire, ce qu'ils ont valorisé.

***Des arguments issus de la recherche en psychologie différentielle***

Toutes les études concernant les enfants en grande difficulté dans leurs apprentissages numériques soulignent une caractéristique commune : ils « *continuent à utiliser préférentiellement les stratégies de comptage verbal et même parfois de comptage sur les doigts* » (INSERM, 2007, p. 305). Ainsi, Jordan et collègues (2003) ayant sélectionné des élèves de milieu de CE1 parce qu'ils sont faibles en mémorisation des faits numériques, ils observent qu'un an et demi plus tard (fin de CE2), ceux-ci n'ont pratiquement pas progressé parce qu'ils utilisent systématiquement le comptage pour trouver le résultat. Ils sont enfermés dans la façon de faire que leurs enseignants ont initialement privilégié. Ajoutons à cela que ce phénomène est observé chaque année par les professeurs des écoles, y compris ceux de Cours Moyen. Sur cette question, on peut aussi se reporter à Fayol (2012).

**Aucune autre cause n'émerge**

L'analyse qui vient d'être présentée doit être complétée : en effet, avant d'incriminer le basculement de 1986 et l'enseignement du comptage-numérotage qui l'accompagne, il est nécessaire de s'assurer qu'aucune autre cause n'émerge. Là encore, ce complément d'analyse est présentée très détaillée dans Brissiaud (2013) et il conduit à penser que c'est effectivement le cas. Ici, faute de place, disons simplement que la baisse s'effectue dans les mêmes proportions quelle que soit la catégorie sociale du chef de famille : que celui-ci soit agriculteur, cadre ou profession intellectuelle, employé, inactif… il n'y a pas d'interaction entre l'évolution des performances et cette catégorie sociale. C'est un résultat très rare et Thierry Rocher souligne dans sa note qu'il suggère « *un effet principalement lié à l'apprentissage scolaire* ». En effet, on aurait pu avancer comme facteur explicatif à l'effondrement des performances, le fait que la condition sociale de certains enfants se dégrade durant cette période, suite au phénomène de ghettoïsation des banlieues, par exemple. Or, une explication de ce type ne tient pas.

Un autre résultat obtenu par Rocher (2008) mérite d'être souligné : l'effondrement des performances en calcul se produit entre 1987 et 1999 alors que la même étude de la DEPP montre qu'il n'y a pas de baisse des performances en lecture et en dictée durant la période 1987-1997. Là encore, cela permet d'avancer dans la recherche des causes de la baisse, parce que la plupart des facteurs généraux tels que l'augmentation du temps passé devant la télé ou la console de jeu, la diminution du temps de sommeil des enfants, une évolution des rapports éducatifs au sein des familles… ne peuvent pas être retenus non plus. On comprendrait mal en effet que de tels phénomènes affectent de manière spécifique le calcul et non la lecture ou la dictée ; on comprendrait mal également qu'ils aient eu un effet fulgurant durant les deux années de non recouvrement des périodes d'étude (1987-1999 pour le calcul et 1987-1997 pour la lecture et la dictée).

Terminons cette partie en répondant à une question posée lors du séminaire national de mars 2013. La suggestion a été faite que la façon d'enseigner la numération décimale ayant changé avant et après 1986, cela pourrait être un facteur de baisse des performances. Avant cette date, en effet, les enseignants étaient encore nombreux à enseigner le codage d'un nombre en base autre que 10, par exemple, alors que ce choix didactique a complètement disparu ensuite. On dispose d'une étude assez précise de certains des effets de cet enseignement, celle de Jean-François Perret (1985). Son principal résultat est que les enfants les plus fragiles ne font guère de lien entre les codages qu'ils produisent lorsqu'ils écrivent les nombres « au pays du 4 », par exemple, et les « vrais nombres », ceux en base 10, qui sont les seuls à pouvoir s'oraliser comme dans la vie courante, c'est-à-dire autrement qu'en disant successivement chacun des chiffres (par exemple : deux, zéro, trois au pays du 4). Mais plus fondamentalement, comprendre la numération décimale, c'est en comprendre diverses décompositions : *deux-cent-trente-quatre*, par exemple, c'est 200 + 30 + 4 mais c'est aussi 23 dizaines + 4 (Brissiaud, 2005 ; Chambris, 2008 ; Mounier, 2010 ; Tempier, 2010). Comme le basculement de 1986 s'est traduit de manière générale par une moindre attention aux décompositions des nombres, il est effectivement possible que cela ait influé sur les choix didactiques effectués concernant les décompositions précédentes, celles qui importent pour comprendre la numération décimale. Auquel cas, de moindre connaissances en numération n'ont pu qu'avoir des répercussions négatives sur le calcul. Si tel fut le cas, on peut considérer cela comme venant conforter la thèse générale défendue ici.

## La distinction comptage-numérotage vs. dénombrement et la didactique des mathématiques

Lors du séminaire de mars 2013, j'ai conclu en attirant l'attention sur ce qui m'apparaît comme une faiblesse d'un grand nombre de textes de didactique des mathématiques qui mettent en avant la complémentarité à l'école des « *conceptions cardinales et ordinales des nombres* ». Nous allons voir qu'une telle distinction ne tient pas : il n'y a pas, à l'école, d'approche du nombre qui serait celle de sa conception ordinale. Nous examinerons également comment l'opposition la plus pertinente d'un point de vue didactique, celle entre numéro et nombre, est traitée dans la théorie des situation.

### *À l'école primaire, le nombre se construit à partir des actions d'ajout et de retrait*

De nombreux textes pourraient être analysés comme celui qui va l'être ci-dessous et celui-ci doit donc être considéré comme le parangon de tout un ensemble de textes à visée didactique largement diffusés en formation des professeurs d'écoles.

Il s'agit d'un extrait d'un livre récent (Margolinas & Wozniak, 2012) qui, d'une part, s'intitule « *Le nombre à l'école maternelle* » et, donc, traite du sujet qui est le nôtre et, d'autre part, se présente comme une introduction aux savoirs didactiques nécessaires aux professeurs des écoles. Le passage suivant (page 116) est un paragraphe figurant dans le chapitre de conclusion et il est extrait d'un sous-chapitre intitulé : « *Commencer par le cardinal ou l'ordinal ?* »

> D'un point de vue didactique, ce qui paraît essentiel est d'appréhender la dualité de ces deux conceptions du nombre et pour les professeurs, d'identifier clairement les situations mathématiques que ces deux aspects modélisent. De la notion de collection se déduit celle de quantité d'où nait le concept de nombre cardinal via le processus de dénombrement. De la notion de liste se déduit celle de position d'où nait le concept de nombre ordinal via le processus de repérage. La comptine numérique nait de ce besoin de recourir à une liste ordonnée et immuable pour dénombrer, repérer ou plus généralement mesurer une grandeur.

Nous allons essayer de montrer que cette organisation des savoirs, à partir de la « *dualité des conceptions* (cardinale et ordinale) *du nombre* » n'est pas pertinente d'un point de vue didactique.

Prenons comme point de départ l'affirmation : « *De la notion de liste se déduit celle de position d'où nait le concept de nombre ordinal* ». Elle passe sous silence le fait que pour traiter de la position dans une liste finie, le nombre ordinal n'a aucune espèce de nécessité, la *numérotation* suffit. Les symboles utilisés pour numéroter les divers éléments peuvent être divers et ils dépendent évidemment de la taille de l'ensemble : système utilisé dans les hôtels, lettres de l'alphabet munies de l'ordre alphabétique, etc. Les lettres conviennent particulièrement bien pour les ensembles de petite taille. Elles sont d'un usage courant, comme dans l'exemple des fauteuils de théâtre. Le concept de nombre ordinal va-t-il naître d'une telle numérotation ? On voit mal comment. Dans leur ouvrage (chapitre 3), les auteurs le font naître d'une prise de conscience du fait que si j'ai le fauteuil R, pour atteindre ce fauteuil à partir du couloir, il faut que je passe R fois d'un fauteuil à l'autre (attention : le couloir compte comme une « case départ »). Mais comment cela serait-il possible sans une très bonne maîtrise du nombre puisqu'il faut l'utiliser pour dénombrer des actions ?

Il faut l'affirmer : il est impossible de passer de la numérotation au nombre ordinal si l'on ne dispose pas du nombre. Le nombre ordinal est un nombre, comme d'ailleurs son nom l'indique : *nombre* ordinal. Et l'intelligence des nombres résulte de la maîtrise des relations construites à partir des actions d'ajout et de retrait et non à partir de la relation de succession qui structure un ensemble numéroté. Pour en prendre conscience, il suffit d'imaginer que dans la situation des sièges de théâtre, on décide de remplacer les lettres par la suite habituelle des écritures chiffrées. Quelles conséquences cela a-t-il ? En remplaçant la lettre R par l'écriture chiffrée 18, on ne fait pas que remplacer un système de numéros par un autre, parce que le second est un système numérique et il est évidemment bien plus informatif qu'un système de numérotation qui ne l'est pas : quand on est passé devant le siège 9, on était à mi-chemin ; quand on est passé devant le siège 15, on en était à 3 rangs de celui visé, etc. On aurait été incapable d'accéder à de telles connaissances avec les numéros que sont les lettres I (9) et O (15) respectivement. En remplaçant un système de numérotation quelconque par un autre qui, lui, est numérique, on récupère toutes les connaissances numériques qu'il véhicule. Or, on n'a jamais vu quiconque acquérir l'intelligence des nombres, c'est-à-dire la maîtrise de telles relations, en apprenant à maîtriser, au sein d'un système de numérotation, les relations entre chaque élément et son successeur, le successeur de son successeur, etc. Quand les auteurs de l'ouvrage écrivent que : « *De la notion de liste se déduit celle de position d'où nait le concept de nombre ordinal* », ils commettent une erreur : de la notion de liste, la notion de position se déduit via une numérotation et, sans connaissance préalable du nombre, jamais cette numérotation ne conduit à un usage ordinal du nombre. Ainsi, le nombre est nombre avant d'être utilisé dans un contexte ordinal et il se construit nécessairement dans un contexte cardinal (nous allons voir qu'il vaut mieux parler de « contexte cardinal » que de « nombre cardinal »). Et comme il n'est pas difficile de récupérer toutes les propriétés du nombre qui ont été établies à partir des actions d'ajout et de retrait, dans cette autre sorte de sorte de contexte qu'est le contexte ordinal, la thématique la plus pertinente en didactique n'est pas celle où l'on débat de ces deux contextes d'usage des nombres mais la thématique où l'on pense les relations entre nombres et numéros.

***La même analyse, d'un point de vue mathématique***

D'un point de vue mathématique, numéroter les éléments d'un ensemble revient à le munir d'un ordre total et même, de ce que l'on appelle en mathématiques un « bon ordre » : non seulement, étant donnés deux éléments quelconques, il faut pouvoir décider que l'un des deux est avant l'autre, mais, de plus, il est nécessaire que la numérotation ait un commencement. Dans un ensemble bien ordonné, l'ordre est tel que toute partie finie de l'ensemble a un plus petit élément.

En fait, on démontre que la propriété d'être un bon ordre implique que celui-ci est un ordre total et, dans la définition précédente, la référence à n'importe quelle partie de l'ensemble concerné, n'est importante que dans le cas d'un ensemble infini. Il est en effet essentiel de le souligner : sur les ensembles finis, le nombre est nombre, il n'est ni cardinal, ni ordinal parce qu'il est les deux indistinctement. C'est très bizarre de parler de nombre cardinal et de nombre ordinal concernant les nombres utilisés à l'école primaire parce qu'on n'y traite pas de l'infini et, conséquemment, ils sont indistinctement l'un et l'autre. C'est encore plus bizarre d'organiser l'analyse didactique des premiers apprentissages numériques autour d'une telle distinction.

En revanche, on comprend bien ce que veut dire utiliser les nombres dans un contexte cardinal, lorsque ceux-ci réfèrent à des pluralités, et les utiliser dans un contexte ordinal, lorsqu'on profite de toute les connaissances numériques qui sont les nôtres, pour faire des nombres un système de numérotation hors du commun. Ce système de numérotation est tellement intéressant que les hommes ont inscrit sa spécificité dans leur langue : ils parlent du « 18$^{\text{ème}}$ élément » et non plus de « l'élément 18 ». En effet, cette façon d'en parler permet de transférer par morphisme, les propriétés du groupe des entiers muni de la relation « +1 » itérée, vers l'ensemble bien ordonné des numéros muni de la relation de succession. *De facto*, l'ensemble des numéros devient lui aussi un groupe, celui des rangs. Et ce dernier bénéficie des propriétés construites dans un contexte cardinal, dont la commutativité : le x$^{\text{ème}}$

élément après le $y^{ème}$ est aussi le $y^{ème}$ après le $x^{ème}$. Il existe de nombreux contextes cardinaux dans lesquels la commutativité est presque évidente : lorsqu'on réunit une équipe de garçons et une équipe de filles, a-t-on ajouté les filles aux garçons ou les garçons aux filles ? Appliquée aux rangs, la commutativé n'est jamais évidente.

***Le comptage-numérotage et la théorie des situations***

Jamais, évidemment, Guy Brousseau n'a développé un « *point de vue didactique* » dans lequel il importerait d'articuler des soi-disant conceptions cardinales et ordinales du nombre alors qu'on ne traite que de nombres finis. En revanche, il lui est arrivé de parler de « *situation fondamentale du dénombrement* » alors que cette situation nécessite seulement un usage performant du comptage-numérotage et, donc, ne nécessite pas de maîtriser l'additivité du comptage. Rappelons ce qu'est cette situation en se référant au texte connu sous le titre : « *La théorie des situations didactiques. Le cours de Montréal* » (Brousseau, 1997). Il y décrit la situation suivante :

> "Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher là-bas les pinceaux et en mettre un et un seul dans chaque pot. Tu dois porter tous les pinceaux en un coup et il faut qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau. Si tu te trompes, tu reprends tous les pinceaux, tu les ramènes là-bas et tu essaies à nouveau. Tu sauras compter quand tu pourras faire ça, même quand il y a beaucoup de pots".
> Plus précisément, l'enfant saura dénombrer lorsqu'il pourra jouer les deux rôles : demander (émetteur) à quelqu'un (récepteur), oralement ou par écrit, la quantité de pinceaux nécessaires en vérifiant l'opération, et inversement fournir à la demande la quantité voulue.

Cette situation est qualifiée de « fondamentale » parce que les diverses tâches qui conduisent un enfant à compter : la tâche « Combien… » ou « Donne-moi N éléments », par exemple, s'obtiennent lorsque l'adulte prend en charge certains éléments de cette situation qui, donc, se présente comme la plus générale. Pour l'enfant, comprendre, c'est maîtriser la situation dans toutes ses dimensions alors que la réussite aux sous tâches précédentes (qualifiées de *formes « dégénérées »* de la situation) pourrait résulter d'un conditionnement ou, du moins, d'une compréhension plus partielle de ce qu'il fait.

Cependant, le comptage-numérotage suffit à traiter cette situation dans toute sa généralité et, dès lors, qualifier cette situation de « *situation fondamentale du dénombrement* » se révèle particulièrement malheureux. En fait, cela se trouve presque décrit dans le même texte, à partir d'une observation de Blanca Quevedo de Queveda (1986) :

> L'élève va chercher une poignée de pinceaux et les distribue dans les pots.
> - "Ah, il en reste trois !"
> - Tu as réussi ?
> - Non parce qu'il m'en reste trois !
> - Bon, reprends-les tous et essaie une autre fois.
>
> Les autres élèves de la classe lui suggèrent :
> "compte !, compte !"
> L'élève compte les pots, repart, saisit une poignée de pinceaux et revient. Le fait de compter ne lui a servi à rien. Les autres élèves continuent à l'aider :
> - Non ! non ! tu dois compter les pinceaux.
>
> L'enfant part, compte tous les pinceaux et revient...

Pour résoudre ce problème, il suffit de savoir qu'on peut compter-numéroter les pots (1, 2, 3, 4, 5) puis compter-numéroter « pareil de pinceaux ». Il aurait suffit que dans l'épisode de classe précédent, les enfants (ou l'enseignant) disent à l'élève qu'il doit « *compter pareil de pinceaux que de pots* » pour qu'il dispose d'une procédure permettant de résoudre le problème dans toute sa généralité. De plus, le fait d'utiliser une communication écrite entre deux élèves n'apporterait que peu de progrès. Ce serait susceptible d'amener les enfants à expliciter que la suite 1, 2, 3, 4, 5 peut être remplacée par le seul chiffre 5 qui indique le moment où le récepteur doit arrêter son comptage-numérotage lorsqu'il réalise la commande. Mais comprendre l'additivité du comptage n'a aucune espèce de nécessité.

Dans le même texte, Guy Brousseau écrit :

> L'usage purement numéral des nombres (pour seulement identifier ou désigner un objet : numéro de chaîne TV, de téléphone, ou d'automobile) ne semble présenter, lui, aucun problème. Sans doute parce que la difficulté principale réside moins dans l'apprentissage des automatismes que dans la connaissance des propriétés des collections, des nombres et de leurs opérations. Celles-ci doivent être obligatoirement "connues" de l'élève pour qu'il puisse contrôler leurs usages complexes.

Il n'aborde malheureusement pas la question suivante : l'enseignement du comptage-numérotage, en installant des automatismes qui permettent de répondre aux sollicitations des adultes et même à celles du milieu dans un grand nombre de situations (cf. la situation « fondamentale » précédente), ne ferait-il pas obstacle à l'appropriation des propriétés des nombres ?

**Conclusion : le comptage-numérotage est un « schème dangereux »**

L'expression « schème dangereux » a été avancée par Janine Rogalski lors du séminaire national de mars 2013. Elle semble particulièrement bien convenir. En effet, même chez les élèves qui n'apprennent pas par conditionnements successifs dans chacune des situations, mais en réfléchissant leur usage du comptage-numérotage, les réussites successives qui sont les leurs dans un grand nombre de situations, ne nécessitent pas qu'ils s'engagent dans une explicitation des décompositions des nombres. En fait, l'ensemble des problèmes que, dans un article récent, nous avons qualifiés de Si-problèmes (où Si signifie simulation ou situation) peuvent être traités ainsi (Brissiaud & Sander, 2010). Ces problèmes sont tels qu'une simulation mentale de la situation, en agissant souvent sur les numéros plutôt que les objets eux-mêmes, conduit de façon assez économique à la solution numérique. Or ces problèmes sont les plus fréquents à l'école. À chaque fois que les élèves apprennent à résoudre ainsi un problème, c'est une situation de perdue pour l'enseignant qui souhaiterait que les enfants découvrent les propriétés des nombres dans cette situation.

On comprend donc le choix didactique des « experts » réunis autour de Gaston Mialaret : n'enseigner les nombres que progressivement à l'école, sans s'appuyer sur la comptine numérique, mais en faisant émerger les propriétés des nombres. On comprend également que du temps de la première équipe Ermel (Ermel, 1977), à une époque où les pédagogues de l'INRP s'inspiraient des premiers écrits de Guy Brousseau (1972), les élèves apprenaient encore bien à calculer (voir Brissiaud, 2013). En effet, à l'époque, il appuyait ses analyses sur une activité connue à l'époque comme celle des « boîtes – nombres » et il résumait ainsi son projet :

> Les enfants, à la conquête du nombre, ont le plus grand désir de manier des naturels aussi grands que possible. Suivons-les dans cette voie : les naturels et l'addition servent à construire de nouveaux naturels.
>
> L'enfant utilise toutes ses connaissances non pour réciter mais pour bâtir. Nous avons constaté combien cette motivation puissante favorise les découvertes et les apprentissages. Dans les méthodes traditionnelles les enfants n'écrivaient 8 + 6 que lorsqu'ils connaissaient 14. L'addition servait à décomposer ce que l'on connaissait déjà et, de ce fait, perdait de son intérêt, d'autant plus que l'on s'arrangeait pour que les enfants manipulent en suivant ce qu'ils énonçaient. A quoi peut bien servir de s'arrêter après avoir compté jusqu'à 8, recommencer à compter jusqu'à 6, écrire 8 + 6 et enfin recommencer à compter les mêmes objets mais cette fois, sans s'arrêter, de 1 à 14? Il suffisait de commencer par là (écrire 8 + 6).

Le projet est différent de celui des pédagogues réunis autour de Gaston Mialaret mais ils ont en commun que les enfants ne découvrent pas les nombres à l'école en s'appuyant sur la comptine numérique, mais en explicitant leurs propriétés, dont l'additivité du comptage.

La première fois que j'ai tenté de présenter l'analyse de l'effondrement des performances en calcul avancée ici, c'était dans un texte préparatoire au séminaire national sur l'enseignement des mathématiques qui s'est tenu à l'IFE en mars 2012 (Brissiaud, 2012). Moins de 2 ans se sont passés depuis, donc. Or, l'idée qu'il faudrait renoncer à l'enseignement du comptage-numérotage et renouer avec les choix didactiques qui étaient les nôtres vers le milieu du siècle dernier ou dans les années 70-85, a fait beaucoup de progrès. Pour s'en rendre compte, il suffit de lire un autre des textes préparatoires au séminaire national sur l'enseignement des mathématiques qui s'est tenu à l'IFE en mars 2012, un collègue écrivait (Emprin, 2012) :

> Une controverse existe en ce qui concerne l'enseignement du comptage. Cette procédure qui consiste à dénombrer en numérotant les objets un à un : « un, deux, trois, quatre, il y en a quatre » est considérée par certain (Brissiaud) comme néfaste et ne devant pas être enseignée à des jeunes enfants.

Ainsi, j'apparaissais à l'époque très isolé dans la défense de cette thèse. Aujourd'hui, il n'est plus sûr que ce collègue tiendrait le même propos : l'analyse présentée ici l'a été début 2013 au séminaire des archives Piaget à Genève, puis au séminaire national de didactique des mathématiques à Paris, et enfin au Journées mathématiques de Lyon 2013, sans qu'aucune objection majeure ne lui ait été adressée. Une recherche engageant 3 laboratoires de psychologie ainsi que le laboratoire dirigé par Gérard Sensevy et l'IFE (recherche ACE) est, pour ce que l'on en sait (Baumard, M., 2013), engagée sur cette base. Mais il ne faut pas se leurrer : l'enseignement du comptage-numérotage correspond à son enseignement selon le sens commun et il est toujours plus facile de diffuser des pratiques pédagogiques correspondant au sens commun que d'autres qui rompent avec celui-ci.

## Bibliographie


Baroody A. Bajwa, N. & Eiland M. (2009) Why Can't Johnny Remember the Basic Facts ? *Developmental disabilities research reviews* ; 15, 69-79.

Baumard, M. (2013) *La France enfin première de la classe.* Paris : Fayard

Brissiaud R. (1989) *Comment les enfants apprennent à calculer – Au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles.* Paris : Retz

Brissiaud R. (2003) *Comment les enfants apprennent à calculer – Le rôle du langage, des représentations figurées et du calcul dans la conceptualisation des nombres.* Paris : Retz

Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale: Les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. Actes du Congrès scientifique international de la Fédération Nationale des Orthophonistes : "Comprendre". *Rééducation Orthophonique, 223*, pp. 225–238.

Brissiaud R. (2007) *Premiers pas vers les maths – Les chemins de la réussite à l'école maternelle.* Paris : Retz.

Brissiaud R. (2013) *Apprendre à calculer à l'école – Les pièges à éviter en contexte francophone.* Paris : Retz.

Brissiaud, R. (2012) Quelles pratiques pédagogiques faut-il éviter à l'école maternelle et au CP ? – Les réponses d'une expérimentation menée à l'échelle de la nation. Disponible sur internet :http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/resolveUid/bee2b5fe6e15f2b770a4c39891061a1e (consulté le 9 décembre 2013).

Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving : a Situation Strategy First framework. *Developmental Science*, 13 (1), 92-107.

Brousseau, G. (1972) Processus de mathématisation. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, 57-84

Brousseau, G. (1997) *La théorie des situations didactiques. Le cours de Montréal.* Disponible sur internet : http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/ (consulté le 9 décembre 2013).

Canac, H. (1955) L'initiation au calcul entre 5 et 7 ans. In F. Brachet, H. Canac & E. Delaunay (ed.), *L'enfant et le nombre*, p.9-27. Paris : Didier.

Chambris, C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques à l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de l'Université Paris 7.

Davidson, K., Eng, K. & Barner, D. (2012) Does learning to count involve a semantic induction? *Cognition* ; 123-1 ; p. 162-173.

Eiler, R. (1977) *Math et calcul*. Paris : Hachette

Emprin, F. (2012) Éléments d'analyse d'observation et d'analyse sur l'enseignement à l'école maternelle. Disponible sur internet : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/conference-nationale-textes-1 (consulté le 9 décembre 2013).

Ermel (1977) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle préparatoire.* Paris : SERMAP-OCDL.

Ermel (1990) *Apprentissages numériques, cycle des apprentissage, Grande Section de maternelle.* Paris : Hatier.

Fareng R. & Fareng, M. (1966) *Comment faire ? L'apprentissage du calcul avec les enfants de 5 à 7 ans.* Paris, Fernand Nathan.

Fischer, J.-P. (1992) *Les apprentissages numériques.* Nancy, Presses Universitaires de Nancy

Fuson, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York : Springer.

Geary, D.C. (2005) Les troubles d'apprentissage en arithmétique : rôle de la mémoire de travail et des connaissances conceptuelles. In M.-P. Noël (Ed) : *La dyscalculie.* Marseille : Solal.

Geary D.C., Fan L. & Bow-Thomas C.C. (1992). Numerical cognition: Loci of ability differences comparing children from China and the United States. *Psychological Science,* 3,180-185.

Gelman R. & Gallistel C.R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge : Harvard University Press.

Hatano G. (1982) Learning to Add and Sustact : A Japonese Perspective. In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds) : *Addition and Substraction : A Cognitive Perspective.* Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates

INSERM (2007) Dyslexie, Dysorthographie, Dyscalculie – Bilan des données scientifiques. Paris : Les éditions INSERM

Jordan N., Hanish L & Kaplan D. (2003) Arithmetic fact mastery in youn children. A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85, 103-119.

Markman, E.M. (1989) : *Categorisation and naming in children.* Cambridge, MA: MIT Press.

Markman, E.M. (1990) : *Constraints children place on word meanings.* Cognitive Science, 14, 57-77

MEN (1986). *L'école maternelle, son rôle, ses missions*. CNDP

Mialaret, G. (1955) *Pédagogie des débuts du calcul.* Fernand Nathan, Paris (avec la collaboration de l'Unesco).

Mounier, E. (2010) *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.* Thèse de didactique des mathématiques. Université Paris Diderot (Paris 7).

Palanque R., Cambrouse E. & Loubet E. (1987) *Prépa-math – Maternelle/grande section – Dossier pédagogique.* Paris : Hachette.

Perret, J.-F. (1985) *Comprendre l'écriture des nombres.* Berne : Peter Lang.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1963). Les opérations intellectuelles et leur développement. In P. Fraisse et J. Piaget (Eds). *Traité de psychologie expérimentale*, VII, L'intelligence, 109-155.

Quevedo de Villegas B. (1986) *Le rôle de l'énumération dans l'apprentissage du dénombrement*, Thèse de 3e cycle, Bordeaux 1.

Rocher T. (2008) Lire, écrire, compter : les performances des élèves de CM2 à vingt ans d'intervalle 1987-2007. *Note 08.38 de la DEPP* ; décembre 2008.

Sarnecka, B.W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, 108(3), 662-674.

Savard, C. (1940) *Pages choisies de pédagogie contemporaine.* Paris : Delagrave.

Schaeffer, B., Eggleston, V.H. & Scott, J.-L. (1974). « Number development in young children », *Cognitive Psychology,* 6, p. 357-379.

Tempier, F. (2010) *Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2.* Grand N, 86, 59-90.

**MICHELE GANDIT**

DEUX EXEMPLES DE COOPERATION ENTRE ENSEIGNANTS, FORMATEURS ET CHERCHEURS, EN MATHEMATIQUES : DES MODALITES ET DES EFFETS

**michele.gandit@ujf-grenoble.fr**

**ESPE, Université Grenoble-Alpes**

**Résumé**
S'insérant dans le cadre général présenté par M. Grangeat sur le travail collaboratif dans l'enseignement, les deux exemples que nous présentons illustrent des modalités différentes de coopération. Dans les deux exemples, les élèves sont mis en situation d'investigation. Le premier est un exemple de coaction en classe, enseignant(e) et chercheur(e). Il s'agit du modèle d'atelier Maths à modeler. Nous décrivons ce dispositif et l'illustrons au travers d'un problème qui relève des mathématiques discrètes, dont la recherche est menée avec une classe de cinquième. Nous présentons quelques effets induits chez les élèves par ce mode de travail. Le second exemple relève d'une recherche collaborative entre enseignants, formateurs et chercheurs, qui se situe dans le LéA (lieu d'éducation associé à l'Institut français de l'éducation) EvaCoDICE (Evaluation par compétences dans les démarches d'investigation au collège et à l'école), présenté dans le texte de M. Grangeat (dans ces actes). Nous pointons dans cet exemple des effets de ce travail sur les élèves, mais surtout sur les enseignants.

## Exemple 1 – Le modèle d'atelier *Maths à modeler*, un exemple d'effet sur les élèves

### *Le dispositif*

Un *atelier Maths à modeler* (nous dirons *atelier MaM* dans la suite) est un dispositif didactique, qui s'adresse à des élèves de tous âges (école, collège, lycée, université) ou des enseignants en formation (voir aussi Pastori, 2013). Il permet, à partir d'un problème – plus exactement d'une situation de recherche pour la classe (Grenier & Payan, 2002 ; Grenier, 2009) – présenté sous la forme d'un jeu (sur plateau, avec pièces), la pratique d'une démarche expérimentale en mathématiques (Giroud, 2011, p. 11). Dans les premier ou second degrés, un atelier *MaM* s'organise, dans l'emploi du temps normal de la classe, en une suite de six séances, une par semaine, et se clôt par un séminaire, à l'université, où les élèves présentent le problème et les résultats qu'ils ont obtenus, à un public, composé de chercheurs, d'enseignants, d'élèves, de leurs parents…, public qui ne connaît donc pas nécessairement le problème (Pastori, 2013).

Ce dispositif est ainsi une modalité d'enseignement qui permet d'engager les élèves dans une pratique scientifique qui va au-delà de ce qui se passe usuellement dans les classes. Par exemple, l'élève est amené à formuler ses propres questions, alors qu'on lui demande habituellement de répondre à celles qui lui sont posées par le professeur, à définir des objets parce qu'ils lui sont nécessaires au cours de sa recherche, alors qu'usuellement il se contente d'utiliser des définitions qui lui ont été données auparavant, à communiquer ses propres résultats, à une communauté extérieure à la classe, alors qu'habituellement il doit seulement rédiger sa solution pour le(la) professeur(e).

Plus généralement, dans ce dispositif, chaque élève est amené à produire des mathématiques et à acquérir des connaissances *par* et *sur* la pratique mathématique. Outre cette posture d'apprenti-chercheur, dans laquelle les élèves sont amenés à se placer, il coexiste dans la classe deux autres postures, inhabituelles, celle du(de la) chercheur(e) – en mathématiques ou en didactique des mathématiques – et celle de l'enseignant(e). Le(la) chercheur(e) est celui qui mène la situation : il(elle) assure la dévolution du problème, donne les consignes, repère les résultats obtenus, les raisonnements des élèves, questionne sur la validation, relance les groupes, propose un étayage, des compensations (dans le cas d'élèves en situation de handicap) (Gandit & *al*, *à paraître*), fait l'institutionnalisation sur le problème, aide à préparer le séminaire final. L'enseignant(e), quant à lui(elle), gère l'organisation, le matériel, propose la constitution des groupes, fait le bilan sur ce qui a été appris, aide à la préparation du séminaire.

Les rôles du(de la) chercheur(e) et de l'enseignant(e) sont différenciés. Même si certains enseignants participent à la mise en œuvre en classe de la situation de recherche choisie, la plupart d'entre eux ne se sent pas en confiance (certains demandent des formations) pour gérer l'incertitude et le doute liés aux investigations des élèves, alors que cela fait partie de l'activité habituelle du (de la) chercheur(e). Il est bien sûr envisageable qu'un(e) enseignant(e) puisse mener seul(e) dans sa classe un *atelier MaM*. Il faudra dans ce cas qu'il(elle) sache faire coexister, de façon visible pour les élèves, les deux postures décrites ci-dessus. Cette coexistence ou alternance du rôle de gestionnaire de la recherche, capable de repérer les pistes à poursuivre et les impasses, d'accepter les directions de recherche prises par les élèves…, et du rôle d'enseignant qui a des objectifs d'apprentissages est une condition nécessaire à la réussite d'un enseignement fondé sur l'investigation des élèves.

***Un exemple de problème, au centre du dispositif, les Caisses de dynamite***

Nous présentons le problème[3], ainsi qu'une entrée dans sa recherche, pour permettre au(à la) lecteur(lectrice) de mieux appréhender le déroulement d'un *atelier MaM*, ainsi que les savoirs en jeu. L'analyse didactique repose sur plusieurs expérimentations menées avec des élèves de collège ou lycée, des étudiants, des professeurs stagiaires en mathématiques et des publics divers (lors de manifestations visant à vulgariser les mathématiques) (Gandit & *al*, 2011).

*Le problème*

Dans un bâtiment, on cherche à entreposer le maximum de caisses de dynamite de sorte que, si une caisse explose, elle n'endommage aucune autre caisse. Quel est ce maximum ?
Le bâtiment est une surface quadrillée, de forme quelconque, à cases carrées identiques. A chaque caisse, posée sur une seule case, est attachée une zone de sécurité qui dépend du mode d'explosion : une caisse peut donc interdire un certain ensemble de cases (figure 1).

Tout élève-chercheur est amené à prendre en charge les variables de recherche, que constituent la forme du bâtiment et le mode d'explosion (ou la forme de la zone de sécurité). Il peut ainsi se fabriquer ses propres questions (nous avons évoqué ci-dessus la phase Proposer de nouveaux problèmes). Une question résolue renvoyant à de nouvelles questions, la recherche n'a pas de fin, son arrêt résulte d'une décision arbitraire liée à la fin du temps de l'atelier (fixé au départ).

[3] Il est inspiré du *Problème des huit reines*, posé au XIXème siècle : Comment placer huit reines sur un échiquier (une reine « mange » toute pièce située sur la ligne, la colonne et les deux diagonales qui contiennent la case sur laquelle elle est posée) sans qu'aucune ne puisse être mangée par une autre.

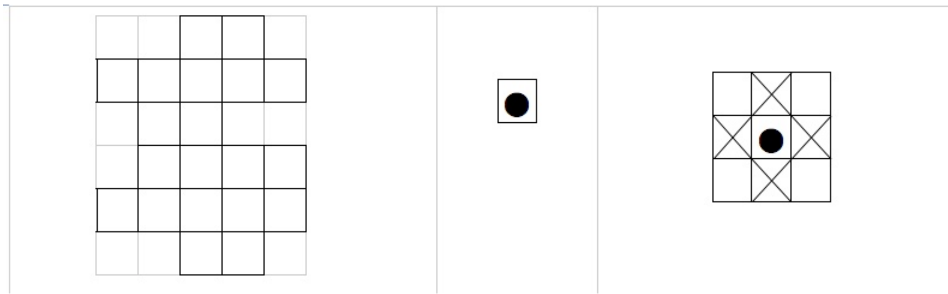


*Figure 1 – Un exemple de forme de bâtiment, une caisse occupe une seule case, un exemple de zone de sécurité (en croix) (ou de mode d'explosion).*

Entrons dans le problème avec les mêmes choix qu'à la figure 1 (phase Expérimenter-observer-valider). Dans toute la suite, nous nommerons *B* le bâtiment de la figure 1.

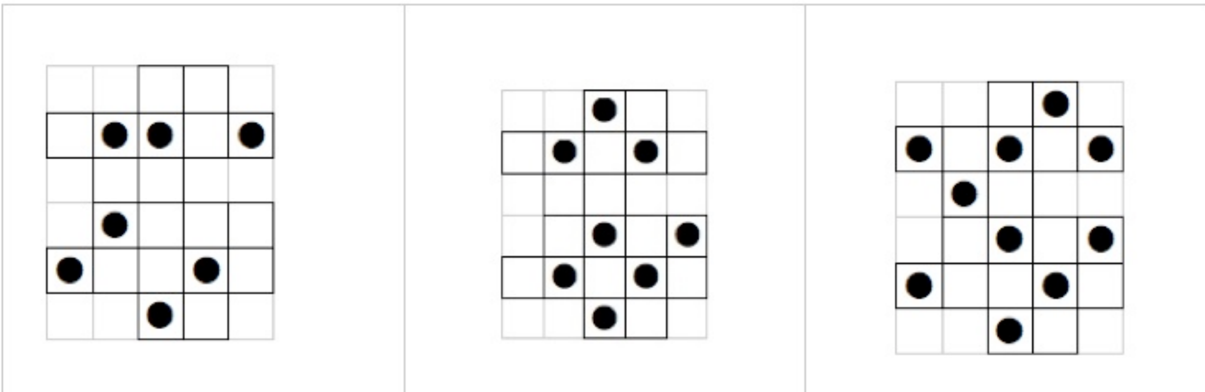


*Figure 2 – A gauche, une configuration non valide puisqu'à la 2ème ligne, 2 caisses se détruisent (si l'on en enlève une, la configuration devient une solution) ; ensuite, 2 solutions à 8, puis à 10 caisses.*

La configuration centrale de la figure 2 est une solution localement maximale en ce sens que l'on ne peut pas ajouter de pièce dans les cases vides, sans enfreindre la contrainte de sécurité. Mais cela ne signifie pas que 8 soit le nombre maximum cherché, comme le montre la solution de droite, qui est aussi localement maximale, mais de cardinal 10. Ainsi, l'exhibition d'une solution implique un minorant du maximum $M$ cherché[4] : ici $M \geq 10$. La tentative de placement d'une onzième caisse n'aboutissant pas, on s'engage dans une preuve qu'il est impossible de faire mieux que 10 en recourant à une majoration de $M$. Celui-ci est clairement inférieur au nombre de cases du bâtiment, donc $M \leq 20$. Comment obtenir une majoration meilleure, au sens où le majorant soit plus proche du minorant 10 ? Nous poursuivons cette preuve plus loin.

Ce problème peut ainsi se décomposer en deux *nouveaux problèmes* : comment construire une solution localement maximale, menant à un minorant de M, et comment obtenir un majorant de *M*. Pour permettre au lecteur *d'entrer dans un atelier MaM* et de voir les savoirs en jeu, nous étudions ces deux problèmes sur les modes d'explosion *en croix* et *en carré.*

Pour trouver une solution, on peut placer des pièces (caisses), sans méthode ordonnée, puis vérifier sa validité en marquant la zone de sécurité de chacune d'elles. On peut aussi adopter une stratégie *locale*, qualifiée de *gloutonne*, qui consiste à poser une caisse sur une case, accompagnée de sa *zone de sécurité*, ces zones de sécurité pouvant se superposer en partie.

[4] Cet optimum *M* dépend de la forme de l'entrepôt et du mode d'explosion.

*Concernant le mode d'explosion en croix*, cette stratégie gloutonne, appliquée au bâtiment *B*, si elle permet de construire une solution localement maximale, ne permet d'aboutir qu'à une minoration de *M*, comme le montre la figure 3.

*Figure 3 – Deux solutions localement maximales, de cardinal 9, puis 10, obtenues par stratégie gloutonne, pour le mode d'explosion en croix.*

Pour faciliter l'entrée dans le problème, le *meneur du problème* – nous nommons ainsi dans la suite le chercheur ou l'enseignant qui dirige l'atelier – doit confronter les élèves-chercheurs à des solutions qui soient à la fois localement maximales et de cardinaux différents (comme à la figure 3). L'argument, souvent avancé, que « c'est la meilleure solution car on ne peut pas mettre une pièce de plus » peut ainsi être mis en défaut. Cependant *la régularité* de certaines solutions (voir figure 4) peut redevenir un obstacle à la nécessité de prouver *qu'on ne peut pas faire mieux.*

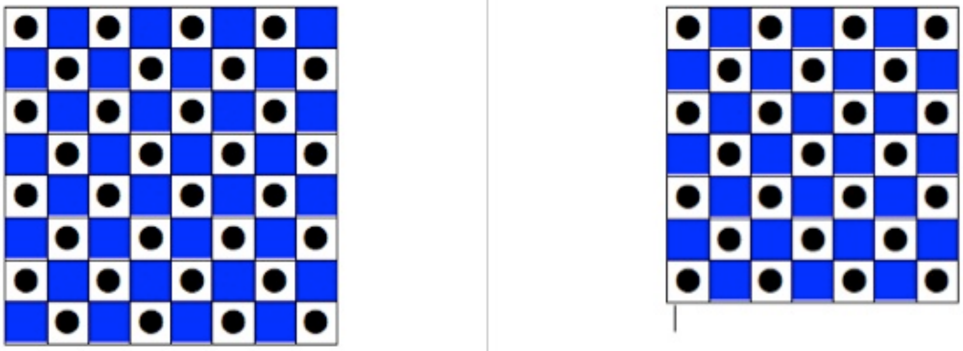


*Figure 4 – En considérant le mode d'explosion en croix, la stratégie gloutonne construit des solutions localement maximales, régulières, à 32 caisses sur le carré de côté 8, à 25 sur le carré de côté 7.*

Au vu de la figure 4, un élève-chercheur admet difficilement que cette solution, localement maximale, ne soit pas aussi globalement maximale : on a en effet vraiment l'impression que, localement, autour de chaque caisse, l'occupation est maximisée. Le meneur du problème n'a que le recours à la question « Pourquoi ne pourrait-on pas en placer 33 (ou 26) ? », conduisant à la preuve d'une impossibilité. Il est alors utile de changer de regard sur l'environnement de chaque caisse. Celui-ci était vu jusque-là comme un bloc de 5 cases – on le nomme *bloc-croix* – comportant la case centrale supportant la caisse et les 4 cases en croix de la zone de sécurité. Peut-on partitionner ce *bloc-croix* en *motifs* plus petits – mais plus grands qu'une case – sur chacun desquels on soit sûr qu'on ne puisse pas placer plus d'une caisse, et qui permette de paver, entièrement (ou presque), le bâtiment ? Une réponse est donnée par la figure 5.

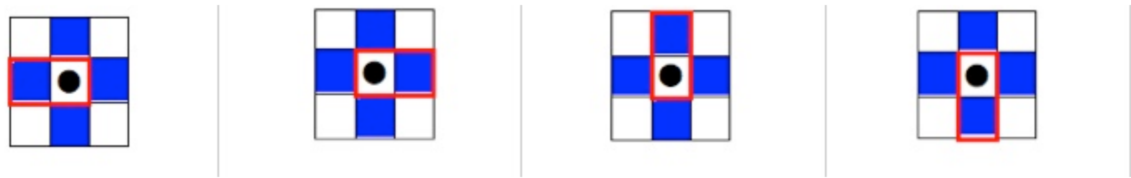


*Figure 5 – Partition du bloc-croix en dominos, chacun d'eux ne pouvant contenir plus d'une caisse.*

L'étude des entrepôts carrés, $3 \times 3$ et $2 \times 2$, aide à adopter cet autre point de vue sur le voisinage d'une caisse. Ainsi, sous réserve qu'on puisse paver le bâtiment par $k$ dominos, comme un domino ne peut contenir plus d'une caisse, on peut majorer par $k$ le nombre de caisses dans l'entrepôt (figure 6).

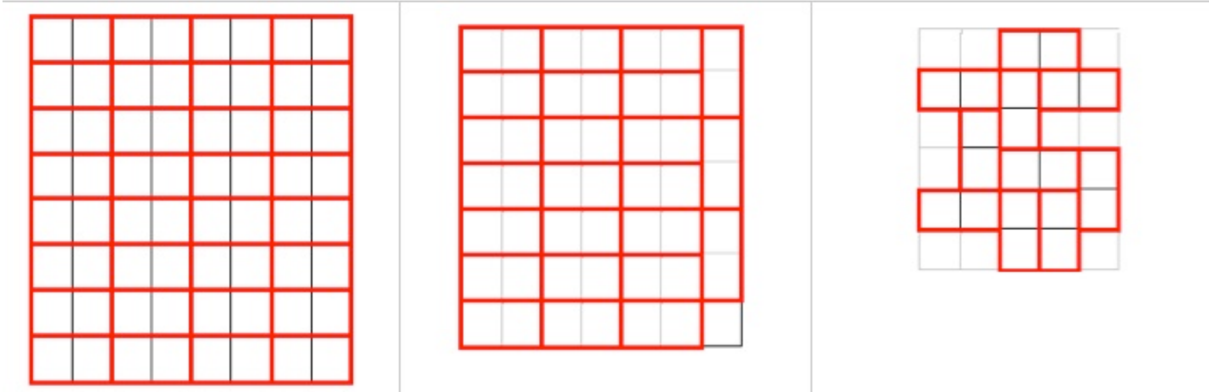


*Figure 6 – D'après ce recouvrement par des dominos, on conclut que, sur le carré $8 \times 8$, on ne peut pas placer plus de 32 caisses, sur le carré $7 \times 7$, pas plus de $24 + 1$, soit 25 caisses (la case seule pouvant être recouverte par une caisse) et, sur l'entrepôt B, pas plus de 10 caisses.*

Ce pavage est d'autant plus efficace pour la preuve de l'optimum $M$ que cette valeur de $k$ est égale au minorant trouvé par construction d'une solution. En effet, $k$ étant à la fois minorant et majorant de $M$, on en déduit alors que $M = k$. C'est le cas pour les trois formes d'entrepôts de la figure 6.

On peut remarquer que cette *stratégie par motifs*, outre l'obtention d'un majorant du nombre de caisses, permet aussi la construction d'une solution localement maximale : il suffit en effet de placer une caisse par domino sans que deux cases voisines, de dominos voisins, ne contiennent toutes deux une caisse. Elle est donc beaucoup plus efficace que la *stratégie gloutonne*.

*Pour le mode d'explosion en carré*, la zone de sécurité attachée à une caisse posée sur une case est constituée des 8 cases qui l'entourent (figure 7, à gauche). Cette figure donne des solutions localement maximales à 16, pour le carré $8 \times 8$, d'où la minoration de l'optimum par 16 ( $M \geq 16$).

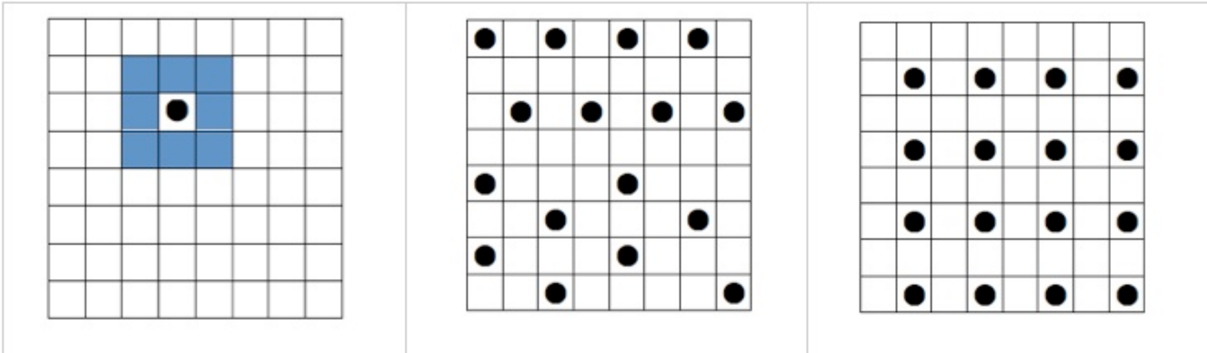


*Figure 7 – L'optimum cherché, suivant le mode d'explosion en carré (figure de gauche) est supérieur à 16. Mais pourquoi ne pourrait-on pas en placer une dix-septième ?*

La régularité de la solution de droite (figure 7), outre qu'elle permet la généralisation au carré $n \times n$, favorise la détection d'un *motif* qui se répète (voir figure 8), à savoir le carré $2 \times 2$.

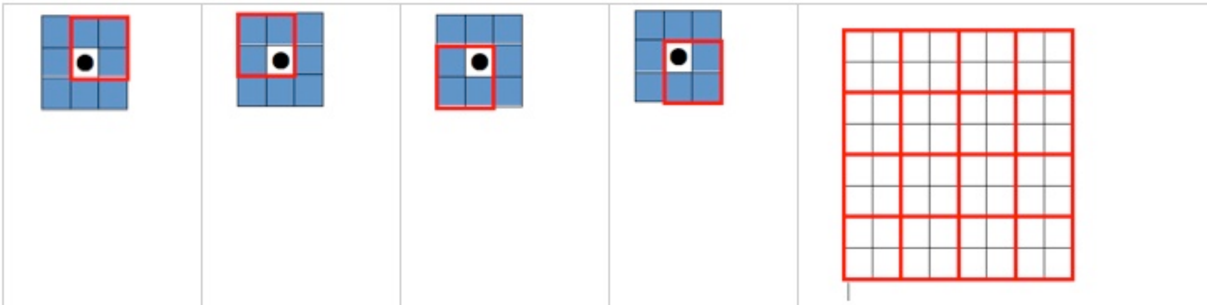


*Figure 8 – Il faut regarder autrement le bloc-carré (zone coloriée en bleu et case centrale) pour détecter que le carré 2 × 2 (le motif) ne peut contenir plus d'une caisse.*

Le pavage de la figure 8 par 16 *motifs* permet de conclure que, puisqu'on ne peut pas avoir plus d'une caisse par motif, l'optimum $M$ est inférieur (ou égal) à 16. Donc il est finalement égal à 16.

Il ne va pas de soi de passer du *bloc-croix* au *motif domino* ou du *bloc-carré* au motif carré $2 \times 2$. C'est un passage difficile dans la recherche du problème, que le meneur du problème doit gérer. Il doit en effet amener les élèves-chercheurs à *casser* la représentation naturelle du *bloc-croix* ou du *bloc-carré* pour arriver à celle des *motifs*. L'étude des carrés de côtés 2 et 3 peut être une aide. Comme nous allons le voir, ces motifs sont plus simples à repérer pour d'autres modes d'explosion, comme en *ligne-colonne*.

*Suivant le mode d'explosion en ligne-colonne*, la zone de sécurité qui correspond à une case est constituée de la ligne complète et de la colonne complète, qui contiennent toutes deux cette case. La figure 9 montre deux solutions sur carré $8 \times 8$.

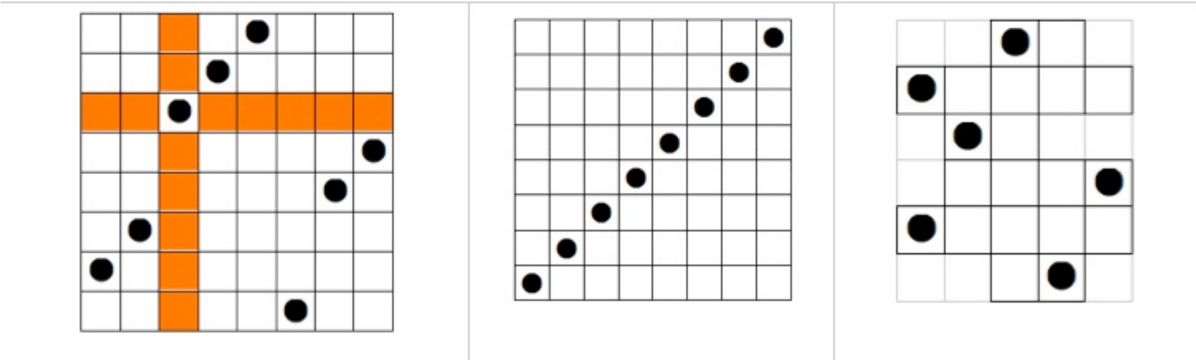


*Figure 9 – Solutions localement maximales, sur le carré 8 × 8 et sur B (explosion ligne-colonne).*

Pour le carré 8 × 8, on obtient souvent rapidement la solution constituée des 8 caisses disposées sur une grande diagonale (au centre de la figure 9). Cette solution se construit dès lors qu'on commence par placer une caisse dans l'un des coins du carré. Cependant, comme pour le mode d'explosion *en croix*, la régularité de cette solution diagonale, bloque souvent les élèves-chercheurs, alors persuadés qu'ils ne peuvent ajouter une caisse de plus. C'est l'accès à d'autres solutions, moins régulières, (à gauche, sur la figure 9, par exemple) qui amène à douter que 8 soit le maximum cherché. Le meneur du problème doit insister : « Peut-être que si l'on dispose les pièces autrement, on pourra mettre une neuvième caisse. Prouvez-moi qu'il est impossible d'en mettre 9, quelle que soit la disposition des 8 premières. » Pour cette preuve, le *motif* pertinent à repérer, sur lequel on est sûr d'avoir au maximum une caisse, est soit la ligne, soit la colonne. Pour un entrepôt carré, on peut utiliser l'une ou l'autre ; pour le bâtiment *B*, on choisira la ligne qui amène à une majoration plus forte, que la colonne, puisque *B* comporte 6 lignes et 8 colonnes (figure 10).

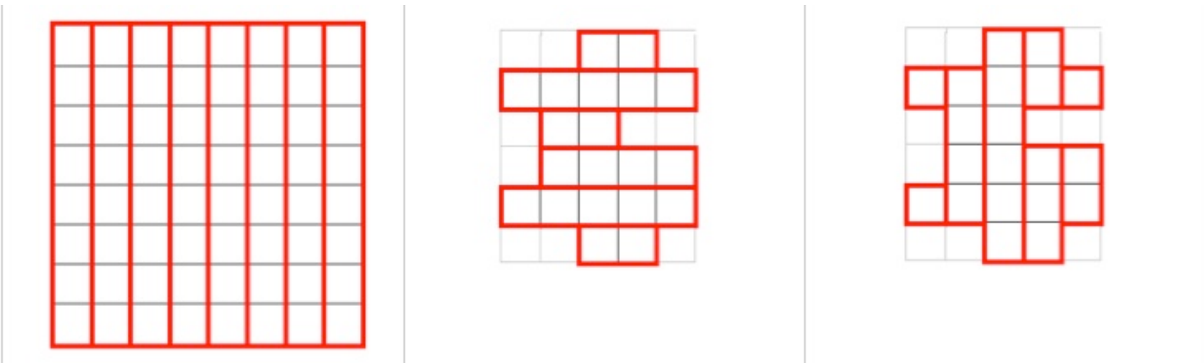


*Figure 10 – Le pavage du carré 8 × 8 par 8 colonnes et le fait que le nombre de caisses par colonne soit inférieur (ou égal) à 1, ces deux arguments amènent à une majoration de l'optimum :* M ≤ *8. On aurait pu utiliser les lignes à la place des colonnes pour le carré 8 × 8, ce qui n'est pas le cas pour* B *(pavé, soit par 8 colonnes, soit par 6 lignes) : l'optimum est inférieur ou égal à 8 et à 6, donc à 6.*

Des deux raisonnements, exhibition d'une solution (entraînant une minoration de l'optimum par l'entier naturel *k*) et pavage par motifs (induisant une minoration de cet optimum par ce même *k*), on déduit que l'optimum est *k* : soit 8 pour le carré 8 × 8 et 6 pour l'entrepôt *B*. Sur un carré, l'appréhension du motif, ligne ou colonne, est plus simple dans ce cas que pour les modes d'explosion précédents. Une des difficultés de la preuve réside néanmoins dans le fait qu'on n'ait à considérer que les lignes ou bien que les colonnes, « cassant » ainsi le *bloc-ligne/colonne*.

*Un déroulement possible pour un atelier MaM*

Le déroulement qui est brièvement proposé ci-dessous concerne des élèves de collège ou lycée[5] (de 11 ans à 16 ans). En première séance, le problème est présenté de façon générale (figure 1), l'enrôlement de la classe, répartie en groupes, est facilité par la mise à disposition de matériel : plateaux quadrillés en bois et jetons (figure 14). Les élèves choisissent un mode d'explosion et construisent des solutions, sur des carrés 7 × 7 ou 8 × 8. Ils rédigent, dans le cahier de recherche du groupe, ces premiers résultats.

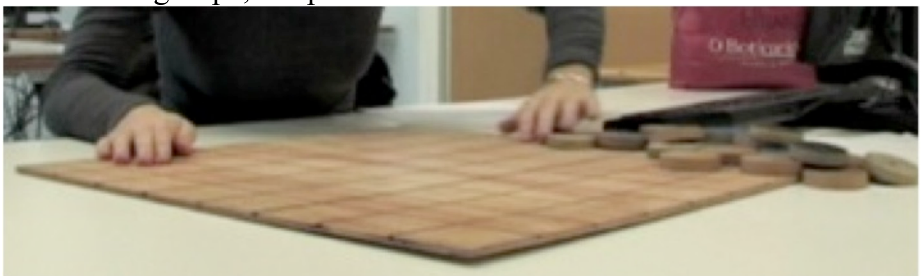


Figure 11– Chaque groupe dispose d'un plateau carré en bois et de jetons.

La deuxième séance est consacrée à l'étude du mode d'explosion *en ligne-colonne*, sur ces mêmes carrés. Le doute concernant l'optimum devra être entretenu par le meneur du problème, suscité, d'abord, par la recherche de différentes configurations localement maximales, ensuite, par celle d'une solution à 9 pièces sur le carré 8 × 8 (ou d'une solution à 8 pièces sur le carré 7 × 7). On peut éventuellement aller jusqu'à une généralisation au carré de côté *n*. Lors de la troisième séance, on étudie le mode d'explosion *diagonales*, sur les carrés 8 × 8 ou 7 × 7. Dans ce cas, le doute est important sur la valeur du maximum, car on trouve facilement des solutions localement maximales de cardinaux différents. Cette incertitude facilite l'engagement dans une preuve. Un récapitulatif des divers types de raisonnement mis en œuvre peut être proposé au début de la quatrième séance. Celle-ci se poursuit par l'étude du mode d'explosion *en carré*, puis *en croix* à la cinquième séance. L'idée du pavage par *motifs* peut être suggérée par l'étude des carrés 2 × 2 ou 3 × 3, ou encore par la construction d'une solution généralisable au carré $n \times n$. La dernière séance est consacrée à la préparation du séminaire. Le cahier de recherche est complété à chaque séance.

Ainsi les temps forts d'un *atelier MaM* sont *les relances*, *les institutionnalisations*, *la préparation du séminaire* et *le séminaire*. Nous décrivons brièvement les trois premiers et un peu plus longuement le dernier, qui montre des effets de ce type de travail en *atelier MaM*.

Chaque groupe travaillant sur une question qu'il a choisie, le chercheur questionne sur l'avancement dans sa résolution. Les solutions sont validées ou invalidées par les élèves eux-mêmes. Les relances du chercheur concernent davantage le caractère maximal de la solution proposée. Il questionne les élèves (« Etes-vous sûrs que… ? Pourquoi… ? », il lève les malentendus en reprécisant la règle du jeu, le vocabulaire (ce qu'on appelle une diagonale, sens peu commun aux élèves), il ne donne pas de réponse, il relève les résultats, il pointe les arguments de preuve intéressants, il incite à prendre des notes pour pouvoir argumenter devant un public.

[5] Pour des élèves-chercheurs d'un niveau mathématique plus élevé, on pourrait réduire le nombre de séances, si l'on veut traiter les mêmes questions, ou bien aller beaucoup plus loin dans le problème, si l'on souhaite garder le même temps de recherche.

Chaque séance se clôt par un bilan faisant état de l'avancée de la recherche dans chaque groupe. Cette phase d'institutionnalisation sur le problème amène les élèves à formuler eux-mêmes les résultats de leurs recherches, à préciser le statut de leurs énoncés (conjecture ou théorème), à comprendre ce qu'on appelle un *résultat* en mathématiques. Elle montre aux élèves l'importance de la preuve et, surtout, que celle-ci ne consiste pas en un exercice formel de rédaction. Un nouveau point sur l'avancée des recherches a lieu au début de la séance suivante. L'appropriation par les élèves des résultats institutionnalisés, phase qui a rarement lieu en classe, se fait lors de la préparation du séminaire et de sa présentation à un public extérieur.

La préparation du séminaire fait l'objet d'une séance, en général, la dernière de l'atelier avant le séminaire lui-même. Il est expliqué aux élèves qu'ils vont avoir à présenter le problème et leurs résultats à l'université, devant un public de chercheurs et d'autres élèves, qui ne connaîtront pas le problème. Il faut donc d'abord le présenter, puis construire l'exposé des résultats, distinguant bien ce qui relève de la conjecture ou du résultat. Ce type de séance est peu présent habituellement dans les classes. Ainsi, lors d'une séance de préparation de séminaire, dans une classe de cinquième, une élève pose au chercheur la question suivante : « Au niveau de toutes les solutions, vous savez ce que c'est ? ». Il reformule ainsi : « Tu veux dire si je sais si elles sont justes vos solutions ? ». L'élève acquiesçant, le chercheur répond : « C'est vous qui savez si vous avez démontré… Il faut que vous sachiez à quel moment, c'est une propriété démontrée, à quel moment c'est une conjecture… ». La responsabilité scientifique est ainsi renvoyée aux élèves.

Le séminaire enfin comporte en général la présentation de deux ateliers, qui ont eu lieu à des endroits différents. Chaque élève de la classe participe à cette présentation. L'exposé est suivi de questions, posées soit par des chercheurs, soit par d'autres élèves. Afin de montrer un effet sur les élèves de ce travail en *atelier MaM*, nous avons choisi un exemple d'extrait de séminaire, présenté par une classe de cinquième (élèves de 12 ans).

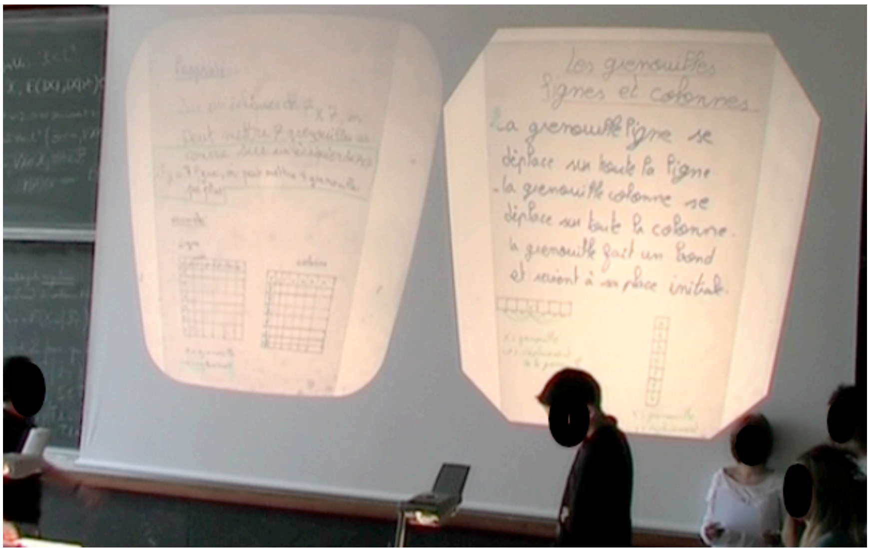



*Figure 12 – Lors du séminaire, chaque élève de la classe, à tour de rôle, présente les questions étudiées et les résultats obtenus, à un public constitué de chercheurs en mathématiques, d'enseignants, d'élèves d'un autre établissement, de parents d'élèves…*

Nous n'évoquons ci-dessous qu'un seul épisode. La question étudiée porte sur un bâtiment carré 7 × 7 et le mode d'explosion *ligne-colonne*. Un élève présente le raisonnement suivant : « Sur un échiquier 7 × 7, on a réussi à mettre 7 caisses, donc on sait qu'on peut en mettre au moins 7, et là, on a séparé le terrain en 7 parties (voir figure 13), et sur une partie, on peut mettre que une caisse, donc, au final, on peut mettre que 7 caisses. ». A la fin de l'exposé, un chercheur du public demande à un élève de revenir sur le raisonnement correspondant au transparent comportant la figure 13. L'élève reprend : « On a séparé le terrain en sept zones et, dans chaque zone, on peut mettre qu'une seule caisse. ».

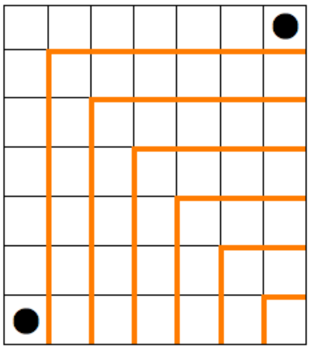


*Figure 13 – La figure proposée sur transparent par un élève et les deux caisses « ajoutées par le chercheur »*

Le chercheur fait remarquer à l'élève que, si l'on place une pièce sur la case en haut à droite (voir figure 13) et sur la case en bas à gauche (voir figure 13), celles-ci ne se détruisent pas et que, par conséquent, sur la zone *1ère ligne du haut – 1èrecolonne à gauche* de la figure 13, on peut mettre plus d'une caisse. L'élève insiste cependant, sûr de son affaire ; il répète qu'on ne peut mettre qu'une caisse sur chacune des zones. Plusieurs élèves, persuadés qu'on ne peut mettre que 7 caisses, répètent l'argument, malgré l'invalidation proposée par le chercheur. L'un d'eux, qui semble avoir compris la question du chercheur, tente de donner un dernier argument malgré l'insistance de l'organisateur du séminaire à laisser la place à l'autre groupe. Il prend tout de même la parole, changeant de stratégie de preuve : « Il y a 7 lignes et 7 colonnes et, la caisse de dynamite, elle peut prendre qu'une ligne et qu'une colonne, donc on peut mettre que 7 caisses. ». Le chercheur lui dit alors qu'il s'approche d'un argument plus pertinent que le précédent. Il suffirait en effet de dire que chaque ligne ne peut contenir plus d'une pièce et que, le quadrillage étant recouvert par 7 lignes, il ne peut contenir plus de 7 pièces (on pouvait faire le même raisonnement avec les colonnes à la place des lignes).

Ce que nous soulignons dans cet exemple, c'est que les élèves sont convaincus que l'optimum [6] est égal à 7 et qu'ils ne se laissent pas intimider par le public, même si certains de ses membres sont savants. *Cette attitude d'élève, qui consiste à défendre sa preuve, est assez rare dans les classes. On peut penser que c'est un effet du travail d'investigation et d'appropriation des résultats trouvés, celle-ci étant forcée par la nécessité de les présenter à l'extérieur de la classe.* Ce dernier point est tout à fait central – il permet d'évaluer les acquisitions des élèves – et peut difficilement se réaliser s'il n'y a pas intervention dans la classe d'une (ou deux) personnes autres que l'enseignant(e).

[6] Même si leur preuve est erronée.

**Exemple 2 – Les débuts d'une recherche collaborative en mathématiques dans le cadre du LéA[7] EvaCoDICE**

Nous renvoyons au texte de M. Grangeat (dans ces Actes) pour une description générale de l'équipe de recherche pluridisciplinaire[8] et de son projet. Nous présentons ici ce que nous nommons *l'équipe de mathématiques*, ainsi que des résultats issus de cette première année de recherche, concernant les premiers effets de cette recherche collaborative. Outre l'auteure de cet article, cette équipe est constituée de cinq enseignants, quatre professeurs de mathématiques en collège, enseignant en classe de sixième (élèves de 11 ans) et deux professeurs des écoles, enseignant en CM2 (élèves de 10 ans) et souhaitant travailler en mathématiques.

Les données sur lesquelles nous nous appuyons sont constituées de vidéos, réalisées dans les classes[9] de certains de ces enseignants (entre octobre et mai 2013), lors de séances relevant de la démarche d'investigation, ainsi que des éléments recueillis au cours des réunions de recherche, de copies d'élèves données par les enseignants et de documents élaborés en commun avec les équipes des autres disciplines. Nous n'avons, à ce jour, exploité qu'une petite partie de ces données.

*L'équipe de mathématiques* est constituée de quatre professeurs de collège, de deux professeurs des écoles, qui ont choisi de travailler en mathématiques, ainsi que de l'auteure de cet article.

Le projet de recherche comprend l'élaboration d'outils d'évaluation formative à mettre en place dans les enseignements scientifiques fondés sur l'investigation. Précisons d'abord ces deux points.

***Les enseignements de mathématiques fondés sur l'investigation et l'évaluation***

Il sera ici question essentiellement de l'évaluation du travail de l'élève en tant que mesure du degré de sa réussite par rapport à un objectif lié à la situation d'investigation (par exemple, choisir un cas particulier pertinent par rapport au problème posé et l'étudier, émettre une conjecture, s'engager sur une piste originale, …). Cette mesure peut être effectuée par l'enseignant(e) ou par l'élève lui-même. Nos premiers constats se rapportent à la façon dont les enseignants font ces mesures dans les productions orales ou écrites des élèves, ainsi qu'aux effets qu'elles induisent dans leurs pratiques. L'évaluation est ainsi essentiellement vue comme un moyen permettant, d'une part, dans le contexte d'une séance relevant de l'investigation, une régulation de l'action du (de la) professeur(e), d'autre part, dans le contexte de la préparation du cours, une anticipation de la séance.

S'inscrivant dans le modèle à six dimensions proposé par Grangeat (voir le texte dans ces Actes), ainsi que dans d'autres travaux sur la démarche expérimentale en mathématiques (Giroud, 2011 ; Triquet, Gandit & Guillaud, 2012), les propriétés que nous attribuons à un enseignement de mathématiques fondé sur l'investigation sont de permettre aux élèves une authentique recherche d'explications et d'informations à partir de questions problématiques, ainsi que la recherche de questions à partir d'une situation donnée, mais aussi de faire vivre le doute et l'incertitude dans la classe. Il s'agit de favoriser quatre blocs d'actions : expérimenter, observer, (in)valider ; conjecturer, en dégageant le généralisable du particulier et prouver la vérité de la conjecture ; proposer de nouveaux problèmes, induits par les étapes précédentes ; communiquer et débattre scientifiquement de ses résultats (Legrand, 1990). Par

[7] Lieu d'éducation associé à l'Ifé.

[8] Elle est constituée d'enseignants de collège ou d'école élémentaire, de chercheurs en didactique des sciences et en sciences de l'éducation, de formateurs.

[9] Nous remercions Céline Lepareur et David Cross pour la réalisation des vidéos que nous avons utilisées.

rapport à un objectif d'apprentissage donné – notionnel ou plus transversal – enjeu d'une situation donnée, et en fonction de la richesse du milieu de l'élève relatif à la pratique scientifique, il peut être important de savoir privilégier un bloc d'actions par rapport aux autres.

De façon générale, les résultats d'apprentissage attendus d'une séance relevant de l'investigation sont à formuler en termes de connaissances ou de compétences, mais aussi d'attitudes face aux questions du monde. « Students cannot learn in school everything they will need to know in adult life. What they must acquire is the prerequisites for successful learning in future life. These prerequisites are of both a cognitive and a motivational nature. Students must become able to organise and regulate their own learning, to learn independently and in groups, and to overcome difficulties in the learning process. This requires them to be aware of their own thinking processes and learning strategies and methods. » (OECD, 2000, p. 90). Nous faisons l'hypothèse qu'en mathématiques l'investigation pratiquée par les élèves (au sens précisé ci-dessus) peut susciter l'émergence de différents types de connaissances, d'attitudes, de compétences qui leur permettront, d'une part, de mieux saisir certains modes de pensée, mais aussi de mieux appréhender d'autres contenus mathématiques que ceux qui sont en jeu dans la situation sur laquelle ils mènent des investigations. On espère des changements d'attitude face aux questions, pas seulement celles qui relèvent des mathématiques.

Les savoirs en jeu dans les enseignements fondés sur l'investigation ont déjà été explicités dans l'exemple des *ateliers MaM*. D'autres savoirs, notionnels, peuvent s'y ajouter.

Au début de la recherche, nous choisissons de caractériser une séquence qui relève de la démarche d'investigation par les valeurs de trois variables (qui ne sont pas nécessairement indépendantes) : 1) la problématisation proposée par l'enseignant(e) des savoirs ou savoir-faire visés dans la séance (son existence, sa pertinence par rapport au niveau du public, l'ampleur du doute laissé à l'élève) ; 2) le niveau de responsabilité scientifique dévolue à la classe, sur le plan de la démarche et de la communication des résultats (élevé, s'appuyant sur un contrat où l'élève peut réellement s'exprimer et être entendu de ses pairs, (in)valider les réponses des autres, ou bien faible car l'enseignant(e) intervient pour diriger, (in)valider…) ; 3) la richesse du milieu didactique relativement à la pratique scientifique (les connaissances qu'il contient sur le vrai / faux, l'engagement dans un problème nouveau…). Ce milieu est considéré comme *pauvre* par les enseignants de l'équipe. Il s'agit dans un premier temps de l'enrichir petit à petit, au travers des premières séances favorisant l'investigation des élèves.

Nous notons des évolutions, concernant les pratiques des enseignants, résultant de ce travail collectif, ainsi que des effets sur les élèves. Les préparations des séances relevant de démarches d'investigations deviennent plus approfondies, une attention particulière étant portée aux raisonnements des élèves, ce que relèvent aussi Gueudet & Lebaud (2013). Il apparaît également la nécessité d'une analyse fine des savoirs en jeu dans les recherches sur les problèmes choisis. Ceci a aussi été constaté par Coppé (2013). Un des comptes-rendus de réunion de recherche atteste d'une prise de conscience collective de la *nécessité de communiquer aux élèves sur leurs apprentissages* (réalisés ou à réaliser). On remarque également un *changement de regard sur l'évaluation*. Cependant, même si les séances sont conçues à partir de problèmes pertinents par rapport à la mise en investigation des élèves, il apparaît une *difficulté importante de la part des enseignants à gérer la complexité* introduite par les élèves. Ces trois points sont développés ci-dessous.

***Une prise de conscience de la nécessité de communiquer aux élèves sur leurs apprentissages (réalisés ou à réaliser), de façon plus précise qu'avec une grille générale***

En février 2013 (le projet a débuté en septembre 2012) une enseignante de collège apporte, à l'équipe de mathématiques, l'énoncé qu'elle a proposé aux élèves de sa classe de troisième (figure 14).

**Démarche scientifique - février 2013 – Classe de 3ème**
Je suis capable de comprendre l'énoncé et de commencer des recherches
Je suis capable de mener un raisonnement cohérent

Je suis capable de faire des calculs adaptés
Je sais communiquer ma démarche par écrit
Je fais preuve d'autonomie, d'initiative, d'originalité

Pour un quart de pomme, la surface de peau est égale à la surface de chair apparente. Vrai ou faux ? Explique ta démarche.

*Figure 14 – Une grille d'évaluation est distribuée à chaque élève en même temps que l'énoncé du problème*

La professeure nous décrit oralement le fonctionnement de sa classe : les élèves étaient répartis en groupe, ils pouvaient disposer de matériel (pommes, un couteau…), de dictionnaires, de manuels scolaires et avaient accès à Internet ; elle avait pour objectif que les élèves découvrent comment calculer l'aire d'une sphère ; chacun devait rendre une copie à la fin de la séance. Les copies ont ensuite été rendues aux élèves, annotées et accompagnées de la grille d'évaluation, complétée par l'enseignante suivant quatre niveaux symbolisés par des points rouges ou verts. Après échanges dans l'équipe de mathématiques, on conclut à la nécessité de : 1) évaluer les compétences des élèves en les regardant aussi fonctionner lors de la recherche – insuffisance de l'évaluation de l'écrit – 2) faire en classe un retour collectif sur les démarches des élèves, à partir de leurs productions – insuffisance du retour par quelques annotations sur la copie – 3) nécessité de communiquer aux élèves, de façon plus précise que par la grille, les apprentissages réalisés et ceux à réaliser.

Ainsi l'enseignante aurait pu[10] regrouper les copies en catégories permettant de faire sortir des points essentiels sur la démarche d'investigation, dans le but d'enrichir le milieu par rapport aux savoirs permettant de s'engager dans une démarche scientifique. Il aurait fallu faire une institutionnalisation sur des points essentiels, rencontrés par les élèves, tels que la nécessité de faire des hypothèses de modélisation (le passage d'une pomme à une sphère est discutable…), l'incohérence avec le problème de certaines formules trouvées sur Internet, la nécessité de faire un raisonnement dans un cas général…, mais aussi valoriser les démarches originales de certains élèves qui avaient épluché un quart de pomme, aplati la peau sur une feuille, puis comparé cette surface de peau avec celle de l'empreinte des morceaux de « chair apparente » du quart de pomme. *Faire une institutionnalisation de ce type nécessite une réflexion sur les apprentissages possibles, avant la séance, et réalisés, après la séance*. Notre propre analyse des dix-huit copies permettait de les regrouper suivant quatre catégories. La première catégorie (4 copies) correspondait à une absence d'argument, des réponses qui comportaient des éléments incohérents, dont certains avaient été récoltés sur Internet ; les auteurs n'étaient pas entrés dans une démarche scientifique. Dans la deuxième (6 copies), une argumentation était développée, mais sur un exemple, traité sans allusion à une modélisation

[10] Les propositions de ce paragraphe n'ont pas été communiquées à l'enseignante.

(la pomme était considérée directement comme une sphère). La troisième catégorie (5 copies) regroupait des réponses montrant une entrée dans le problème par un protocole expérimental, plus ou moins développé (voir ci-dessus). Enfin, dans la quatrième catégorie (3 copies), on notait des réponses où l'idée de modélisation était présente, un raisonnement développé dans le modèle de la sphère.

Les préparations évoluent, avons-nous dit, nous n'avons cependant à ce jour aucun élément qui permet d'affirmer que ces intentions (collectives) de communiquer aux élèves sur leurs apprentissages, grâce à un travail construit de retour sur leurs productions (orales ou écrites), se sont traduites par des faits en classe. Nous notons par contre une évolution de la réflexion, allant dans ce sens, ce qu'atteste l'exemple de préparation de cours, proposé à la figure 15 : ce cours concerne une classe de troisième, en octobre 2013. On note une volonté de la professeure d'enrichir le milieu de l'élève relativement à la preuve du vrai ou du faux. Les compétences, visées et requises, sont explicitées, ainsi que les objectifs de la séquence et des éléments de mise en œuvre.

[Des questions]

1) Quel que soit le nombre entier n choisi, $n^2 - n + 11$ n'a que deux diviseurs.

2) La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Compétences visées :

- être capable de comprendre un énoncé,
- être capable de commencer un travail à partir d'une situation ouverte sans question,
- être capable de proposer une conjecture,
- être capable de donner un « contre-exemple »,
- être capable de mener un raisonnement avec du calcul littéral pour justifier une affirmation.

Objectifs de la séquence :

- se faire une opinion sur une affirmation,
- défendre son point de vue avec des arguments valables,
- écouter et comprendre le raisonnement d'un autre élève,
- aborder la notion de VRAI et FAUX en mathématiques,
- aborder la notion de preuve: comment prouver que c'est FAUX, que c'est VRAI,

Compétences requises :

- être capable d'utiliser une formule,
- maîtriser la notion de multiples et diviseurs.

Plan de séquence :

1) Donner la 1ère affirmation : Quel que soit le nombre entier n choisi, $n^2 - n + 11$ n'a que deux diviseurs.

Recherche personnelle,

remontée des opinions,

argumentations,

débat,

conclusion.

2) Donner la 2ième affirmation : La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Recherche personnelle

remontée des opinions,

argumentations,

débat,

conclusion.

Evaluation …

*Figure 15 – Une fiche de préparation, incluant précisément des objectifs d'apprentissage et des compétences, décrites dans le contexte de la séquence envisagée*

### *Une amorce de changement de regard sur l'évaluation*

Un premier outil d'évaluation est d'abord élaboré au sein de l'équipe de recherche pluridisciplinaire (elle est constituée de toutes les équipes de recherche disciplinaires, en mathématiques, en sciences de le vie et de la Terre, en sciences physiques et chimiques, en technologie et en éducation physique et sportive ainsi que de chercheurs et formateurs en sciences de l'éducation). C'est une grille d'évaluation, commune aux différentes disciplines, constituée de sept « compétences », chacune pouvant être située suivant quatre niveaux : correctement mise en œuvre, mise en œuvre mais avec des manques qui n'oblitèrent pas la démarche, mise en œuvre mais avec des manques qui rendent la démarche non valable, non mise en œuvre. Cette grille, destinée à devenir un outil pour les élèves, est ainsi rédigée : « 1) Je suis capable de comprendre le problème, de commencer les recherches et de formuler des questions, de modéliser ; 2) Je suis capable d'émettre des hypothèses, des conjectures ; 3) Je suis capable de proposer un protocole et de mettre en œuvre une expérience ; 4) Je suis capable de mener un raisonnement cohérent, de faire une preuve ou de valider une hypothèse ; 5) Je sais communiquer ma démarche par écrit ou par oral ; 6) Je fais preuve d'initiative, d'originalité, d'autonomie ; 7) Je suis capable de rester concentré, de travailler dans le calme. ». L'équipe pluridisciplinaire décide que cette grille constitue un outil à fournir à chaque élève, qui peut ainsi s'autoévaluer, cette autoévaluation étant ensuite validée ou invalidée par l'enseignant(e), qui peut éventuellement ajouter des indicateurs de réussite, compréhensibles par l'élève.

L'équipe de mathématiques décide d'utiliser cette grille, légèrement aménagée, au cours d'une séquence en classe (classes de sixième ou de CM2, élèves de 10 ans et de 11ans) relevant de la démarche d'investigation. L'aménagement évoqué de la grille d'évaluation est léger : le mot d'hypothèse est enlevé du deuxième item, seul le mot de conjecture est conservé ; le quatrième item, excluant la validation en sciences expérimentales, est reformulé en « je suis capable de mener un raisonnement cohérent, de faire une preuve » ; les autres items sont conservés. Nous allons voir que la décision prise collectivement d'utiliser cet outil ne sera pas suivie par tous les enseignants.

En effet, des vidéos de séances, réalisées dans les classes des enseignants de l'équipe de mathématiques, montrent que quatre d'entre eux communiquent aux élèves cette grille d'évaluation, le cinquième dit qu'il la prend en compte dans son enseignement, mais ne la fournit pas aux élèves. Plus précisément, parmi les quatre enseignants qui donnent cette grille aux élèves, deux d'entre eux (nous les appelons Mathilde et Solène) prennent du temps au cours de la séance pour expliciter les différentes compétences en jeu, comme nous le développons ci-dessous, les deux autres la font coller sur la copie, mais ne la commentent pas.

Dans sa classe (de sixième), Mathilde introduit la séance d'investigation en projetant le document de la figure 16, au tableau.

Mathilde accompagne le document projeté du commentaire suivant : « Je vous laisse lire dans vos têtes les six compétences sur lesquelles je vais mettre mon regard particulier par rapport à ce travail que vous allez faire. » Aux élèves qui posent la question, « C'est une évaluation ? », la professeure répond : « C'est pas une évaluation, c'est un travail, une démarche de recherche où on s'entraîne, et je vais voir où vous en êtes. »

Dans sa classe de CM2, Solène, ayant choisi de mettre ses élèves en démarche d'investigation sur le même problème que Mathilde, introduit l'explicitation des compétences par le discours suivant : « Je vais avoir un petit papier pour chacun d'entre vous et je vais regarder plusieurs choses, d'accord ? Donc c'est un petit tableau comme ça [Solène montre le tableau aux élèves, c'est le même que celui de la figure 1]. Je vais regarder si… ». Elle poursuit alors en détaillant chacune des compétences, illustrées par des exemples issus de l'histoire de la classe. A la fin de cette présentation, elle ajoute : « 1, 2, 3, 4 : c'est comme d'habitude, sauf que c'est pas un résultat d'évaluation » : au travers de cette phrase un peu *étrange*, on voit l'amorce d'un changement de point de vue sur l'évaluation. Ainsi explicitée aux élèves, la grille d'évaluation devient un moyen de communiquer aux élèves des savoirs relatifs à la pratique scientifique.

**Démarche de recherche.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Je suis capable de comprendre le problème, de commencer des recherches | | | | |
| Je suis capable d'émettre des hypothèses, des conjectures | | | | |
| Je suis capable de mener un raisonnement cohérent, de faire une preuve | | | | |
| Je sais communiquer ma démarche par écrit ou par oral | | | | |
| Je fais preuve d'initiative, d'autonomie | | | | |
| Je suis capable de rester concentré, de travailler dans le calme | | | | |

Enoncé:

Quel est le nombre de diagonales d'un polygone?
Autrement dit, donne un moyen qui permette, dès que l'on connait le nombre de sommets d'un polygone, de trouver le nombre de ses diagonales.
Explique ta démarche. (tu laisseras toutes tes recherches)

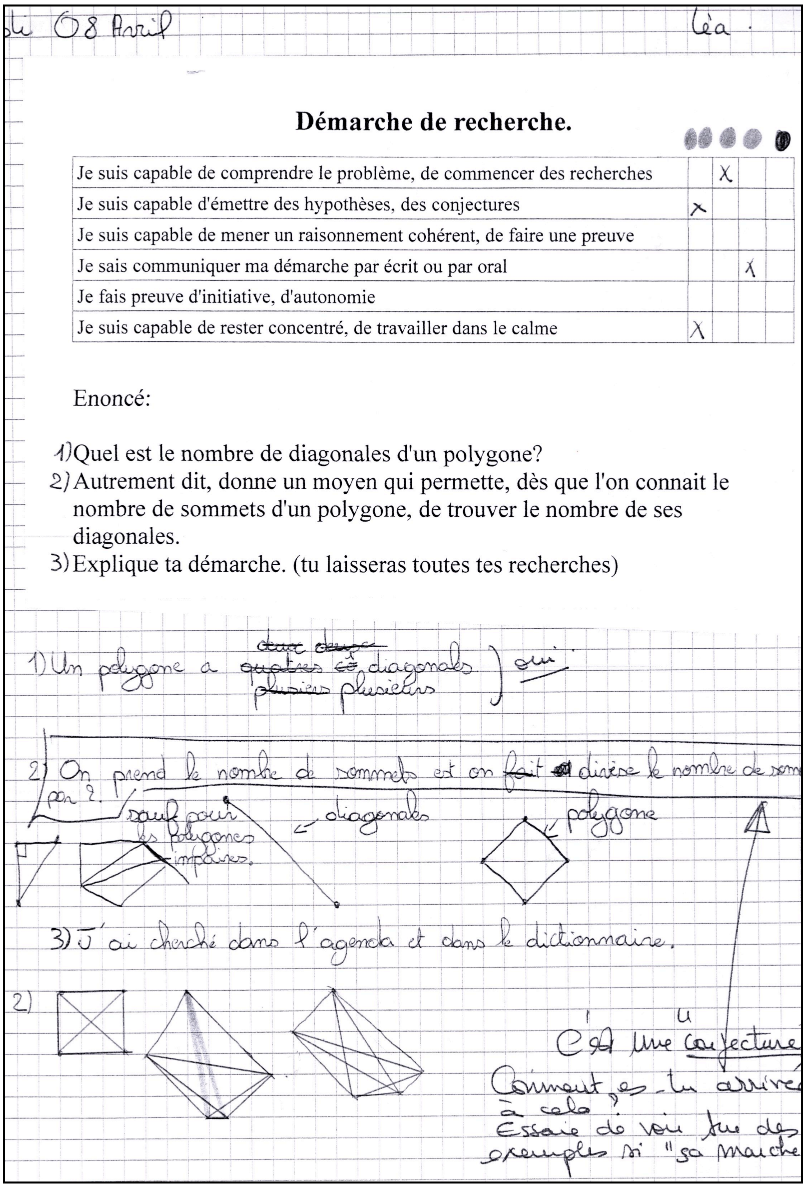
*Figure 16 – La grille d'évaluation est communiquée aux élèves en même temps que l'énoncé. Le mot de conjecture est expliqué.*

Nous notons cependant une contradiction entre les intentions affichées de ces enseignantes et leurs discours qui montrent leur positionnement par rapport à l'évaluation : ce sont bien elles qui s'attribuent le rôle d'évaluatrice et rien ne montre que les élèves peuvent être associés à cette évaluation. Ceci apparaît contradictoire avec le fait que la grille (figure 16) affiche le pronom « je » dans la formulation de chacune des compétences, forçant ainsi, de manière naïve, l'enrôlement de chaque élève dans sa propre évaluation. Ceci nous conduit à dire qu'il y a détournement de l'outil d'évaluation, puisque cette grille, initialement destinée à l'élève, est, dans les faits, utilisée exclusivement par le professeur. Ceci concerne chacun des enseignants de l'équipe qui donnent la grille aux élèves. Nous pensons que cette contradiction entre intentions pédagogiques et actions en classe est la marque d'une certaine déstabilisation de ces enseignants qui, pensons-nous, ont eux-mêmes des difficultés à repérer des indices leur permettant d'évaluer ces compétences. Mettre en place en classe une évaluation de ces compétences par les élèves eux-mêmes les amènerait nécessairement à un débat sur le sens des savoirs et savoir-faire sous-jacents tels que comprendre un problème[11], commencer des recherches, émettre des conjectures… ; débat qu'ils ne se sentent pas capables d'animer, peut-être par manque d'assurance sur le plan épistémologique.

Un tel débat permettrait en effet de lever certains *malentendus* comme le montre la production de Léa (figure 17). Cette copie comporte des annotations de la part de l'enseignante ; on peut penser que celle qui concerne « la conjecture » ne suffira pas à faire comprendre à Léa ce qu'est une conjecture, ni le statut d'un tel énoncé dans la pratique en mathématiques. C'est plutôt un retour en classe, de manière construite, comme nous en avons parlé précédemment à propos du « quart de pomme », qui aurait pu permettre de lever ces malentendus, visibles dans la copie, sur la nature de l'activité mathématique. Léa a distingué trois questions dans le problème posé (elle les a numérotées) et elle répond consciencieusement à chacune d'elles. Pour elle, la démarche consiste à « chercher dans l'agenda et dans le dictionnaire ». Au cours d'un tel débat, engagé au cours de la séance, on aurait pu renvoyer à toute la classe l'idée de Léa concernant la question posée, à savoir

[11] Ce qui n'est pas la même chose que comprendre un énoncé.

« diviser le nombre de sommets par deux », et dégager ainsi une preuve du faux avec un contre-exemple.



**Démarche de recherche.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Je suis capable de comprendre le problème, de commencer des recherches | | X | | |
| Je suis capable d'émettre des hypothèses, des conjectures | X | | | |
| Je suis capable de mener un raisonnement cohérent, de faire une preuve | | | | |
| Je sais communiquer ma démarche par écrit ou par oral | | | X | |
| Je fais preuve d'initiative, d'autonomie | | | | |
| Je suis capable de rester concentré, de travailler dans le calme | X | | | |

Enoncé:

1) Quel est le nombre de diagonales d'un polygone?
2) Autrement dit, donne un moyen qui permette, dès que l'on connait le nombre de sommets d'un polygone, de trouver le nombre de ses diagonales.
3) Explique ta démarche. (tu laisseras toutes tes recherches)



*Figure 17 – Une copie d'élève de sixième, sur le problème du nombre de diagonales d'un polygone.*

***Des situations pertinentes pour la mise en investigation des élèves, mais des difficultés à gérer la complexité introduite naturellement par les élèves***

Les enseignants ayant choisi de mener une séance d'investigation sur le problème du nombre de diagonales d'un polygone (voir, figure 17, le problème tel qu'il a été posé), nous avons constaté, à partir des vidéos réalisées dans cinq classes, que la plupart des élèves entrent, de façon naturelle, dans le problème, *par la complexité*, en tentant de compter les diagonales de polygones non convexes ou comportant un grand nombre de côtés. Nous donnons des exemples ci-dessous (figure 18).

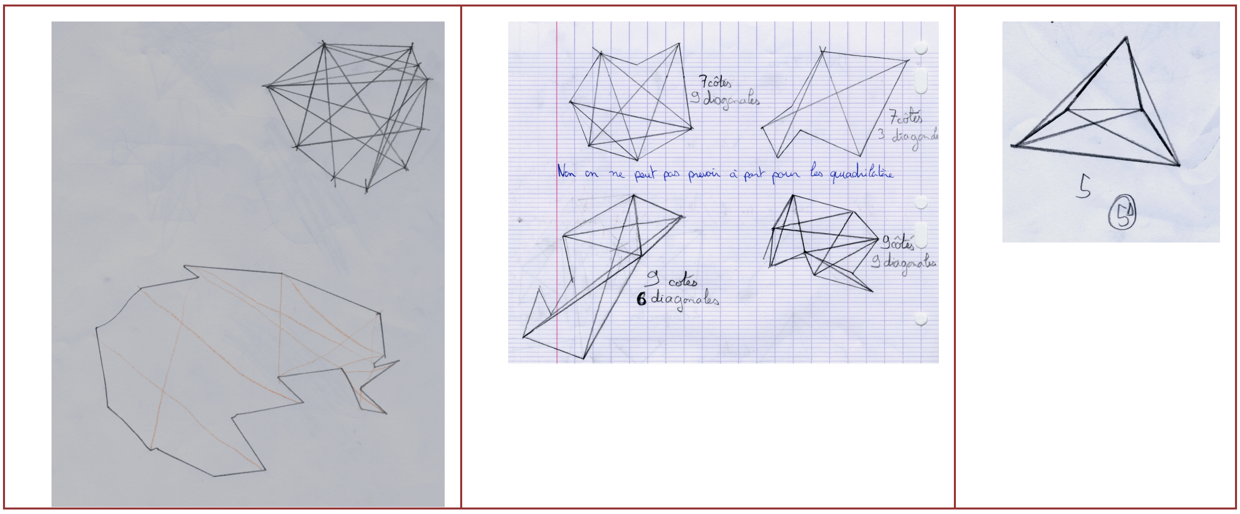



*Figure 18 – Trois extraits de copies d'élèves de CM2 : les élèves introduisent naturellement de la complexité.*

Nous insistons sur le fait que cette entrée par la complexité est naturelle et normale pour les élèves qui débutent dans la démarche expérimentale en mathématiques. Sur ce plan en effet, étant donnée la faible potentialité du milieu didactique de l'élève (dans chacune des classes), l'élève ne peut pas saisir ce qu'est un *cas simple, pertinent dans ce problème*.

Or on note, dans chacune des séances, la difficulté du professeur à gérer cette complexité, qu'il cherche à éliminer en fermant la situation, comme en témoigne cet extrait de la séance de Solène, dans sa classe de CM2. La professeure fait la remarque suivante à un élève qui a dessiné un hexagone non convexe : « Alors ceux-là, tu vois, euh, de polygones, on va pas s'en occuper parce que ceux-là, ils sont un peu particuliers, parce que, tu vois…, là, je peux faire une… euh… diagonale, là, entre là et là… Non, c'est pas une diagonale d'ailleurs… Si, c'est une diagonale, là, il y a un point… là, il y a un point, là il y a un point, là, tu peux faire une diagonale, mais elle est pas dans la figure. Ça, c'est un polygone, un peu particulier. On va pas faire avec ceux-là. Nous, on va faire que… avec des polygones, tu vois, qui sont comme ça, et les diagonales, elles sont à l'intérieur du polygone. D'accord ? » Cette remarque sera réitérée à destination d'autres élèves de la classe qui ont considéré aussi des polygones non convexes. Ainsi Solène tente d'éliminer, dans les cas étudiés par les élèves, ceux des polygones non convexes, qui sont effectivement plus complexes, mais qui sont néanmoins pris en compte dans la preuve générale. De la même façon, Tom dans sa classe, tente de dissuader une élève d'étudier un polygone à douze sommets : « Pourquoi tu passes pas par des choses plus simples ? ». Jean, quant à lui, dit à toute la classe : « Commencez par des polygones simples… ». Il écrit cette phrase au tableau et dessine également un triangle, un quadrilatère, un pentagone… Plus tard dans la séance, il essaie de dissuader un groupe de filles qui se lance dans l'étude d'un polygone à dix-huit sommets : « Arrêtez les filles de faire compliqué… ». Il ne cesse ensuite de dire aux élèves qu'ils rendent les choses *encore plus compliquées*. Ces injonctions et ces remarques ne peuvent pas être comprises par les élèves. Dans l'action, les enseignants ne se rendent pas compte que, d'une part, les élèves ne peuvent pas comprendre cette injonction de *faire simple*, d'autre part, qu'ainsi ils *tuent la situation,* puisqu'ils disent comment faire. Leurs gestes professionnels vont ici à l'encontre de l'objectif d'apprentissage qui est de faire comprendre l'intérêt de réfléchir au type de cas particuliers que l'on va étudier en premier. Les enseignants auraient pu engager un débat, en confrontant, pour toute la classe, *des études de cas compliqués, sans recherche de méthode (généralisable)* et des *indices de méthodes intéressantes*, relevés dans les productions des élèves (figures 19 et

20). Beaucoup d'élèves, en effet, n'avaient pas encore compris qu'ils cherchaient une généralité. Celle-ci pouvait se dégager, soit du repérage d'une régularité dans la suite, dont le terme général est le nombre de diagonales d'un polygone en fonction du nombre de ses sommets (figure 20), soit de la découverte d'une méthode de comptage des diagonales, elle-même liée à l'observation des diagonales *issues d'un même sommet* (figure 19).

Or il est clair que la plupart des élèves ne peuvent acquérir *ce savoir-faire de choix pertinent des cas particuliers à étudier*, sans que cette connaissance heuristique ait été *construite* et *institutionnalisée*, au moins partiellement dans le contexte de ce problème. Cette institutionnalisation aurait pu être faite dans chacune des classes, en conclusion d'un débat s'appuyant sur des productions d'élèves.

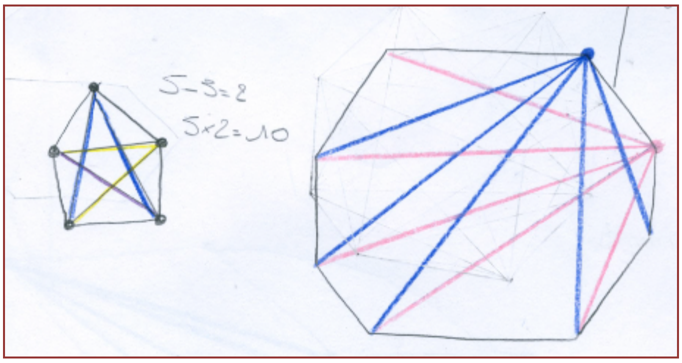



*Figure 19 – On peut repérer dans cette production d'élève de CM2 une utilisation de la couleur comme une méthode de raisonnement, qu'il aurait été pertinent de faire partager à toute la classe.*

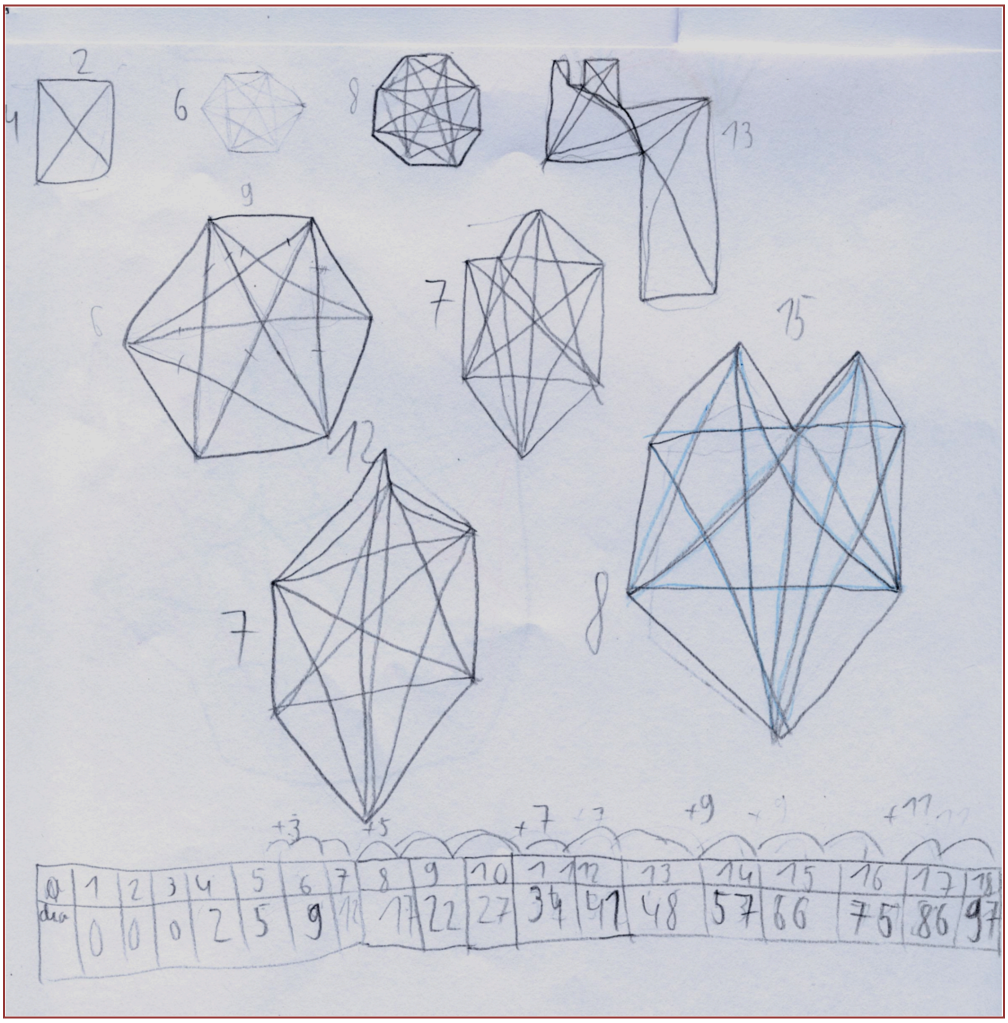



*Figure 20 – On peut relever dans cette production d'élève de CM2 l'idée de repérer une généralité derrière les différents cas particuliers observés.*

## Conclusion

Ces deux exemples de modalités de travail collaboratif entre enseignants et chercheurs, rassemblés autour du projet de permettre aux élèves une pratique d'investigation scientifique, ont montré des effets sur les élèves, mais aussi sur les enseignants.

Dans un *atelier MaM*, les élèves sont amenés à présenter un problème et *défendre* les résultats qu'ils ont obtenus, devant un public extérieur à la classe. Ils reconnaissent eux-mêmes qu'au cours d'un tel atelier ils sont sans cesse confrontés à la preuve, à la question « Pourquoi ? ». Les bilans faits avec les élèves sont positifs (Pastori, 2013). La complexité engendrée par les investigations des élèves est, dans ce cas, gérée par le chercheur, accoutumé à l'incertitude. Certains enseignants demandent des formations sur la gestion de cette complexité.

Celle-ci revient complètement aux enseignants lorsqu'ils engagent leurs élèves dans des démarches d'investigation, dans un dispositif de cours habituel. C'est ce cas qui est au cœur du deuxième exemple que nous avons présenté, avec le LéA EvaCoDICE. Le travail de réflexion sur ce type d'enseignement, de préparation et d'analyse de séances, en collaboration avec d'autres enseignants, de chercheurs et de formateurs, contribue à une évolution de leurs pratiques. Même si ce deuxième exemple montre que les actions des enseignants en classe ne sont pas encore en adéquation avec leurs intentions, des avancées sont toutefois constatées dans la capacité des enseignants à innover et *ouvrir* certaines séances aux investigations des élèves. Il semble que la façon de mener les réunions avec les enseignants, à la manière d'une démarche d'investigation, ait une influence sur leur ressenti positif par rapport à ce projet de recherche et aux expérimentations dans leurs classes. Le travail sur l'évaluation est cependant à poursuivre pour que ces séances d'investigation soient efficaces concernant les apprentissages des élèves. Les points à travailler particulièrement sont, d'une part, l'interprétation par les enseignants des données produites par les élèves au cours de la séance, d'autre part, leur utilisation de cette interprétation, par rapport aux objectifs d'apprentissage, à viser dans la séance d'investigation. Enfin il faut également rendre opérationnelle la communication aux élèves de cette interprétation opérée par les enseignants, afin de favoriser l'autoévaluation des élèves.

## Bibliographie


Coppé S. (2013), « Effets du travail collaboratif sur la pratique d'enseignement : étude de cas d'une enseignante de mathématiques en collège. », *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation, Des formations et des pratiques de classe*, M. Grangeat (dir.), Grenoble, Presses Universitaires de Grenoble, p.115-125.

Gandit M., Balicco M.-P., Gravier S. & Modeste S. (*à paraître*) Petits cubes et baguettes, instruments de compensation du handicap ou inducteurs de résolution, *Actes des Journées de Chamonix « Jouer ou apprendre ? Les jeux dans l'éducation et la médiation scientifiques*, 21-24 mai 2013.

Gandit M., Giroud N. & Godot K. (2011), « Les situations de recherche en classe : un modèle pour travailler la démarche scientifique en mathématiques », *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisition des élèves*, M. Grangeat (dir.), Lyon, Ecole normale supérieure, p.38-51.

Gandit M., Triquet E. & Guillaud J.-C. (2012), « Des représentations sur les démarches d'investigation aux pratiques de classe : le cas d'enseignants débutants en mathématiques et en sciences expérimentales », *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF)* 2012, Groupe de Travail n°10 : La démarche d'investigation dans la classe : fondements et pratiques. Genève, 3-7 février 2012, **http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012**, consulté le 20 juillet 2013.

Gandit M., Triquet E. & Guillaud J.-C. (2013), « Séances d'investigation en classe en mathématiques et en sciences expérimentales », *Symposium Pratiques enseignantes et démarches d'investigation en sciences*, In G. Gueudet (dir.), *Actes du colloque Formes d'éducation et processus d'émancipation*, mai 2012. Rennes, **http://python.bretagne.iufm.fr/recace/fepe_2012/plage_4.html**, consulté le 20 juillet 2013.

Giroud, N. (2011). Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe, thèse de doctorat, Université de Grenoble, 381 p.

Grenier D. (2009), « Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes », In L. Coulange & C. Hache (dirs.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris, ARDM et IREM de Paris7.

Grenier D. & Payan C. (2002), « Situations de recherche en classe : essais de caractérisation et proposition de modélisation », *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Gueudet G. & Lebaud M.-P. (2013), « Démarches d'investigation en sciences, collectifs dans la formation des enseignants : enquête sur un lien complexe. », *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation, Des formations et des pratiques de classe*, M. Grangeat (dir.), Grenoble, Presses Universitaires de Grenoble, p.95-113.

Legrand M. (1990), « Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique », *Recherches en didactique des mathématiques*, 9/3, p.365-406.

OECD (2000), Measuring Student Knowledge and Skills: A new Framework for Assessment, Paris, OECD.

Pastori M. (2013), « Faire pratiquer une démarche d'investigation en classe en mathématiques : un exemple de coopération entre enseignants et chercheurs », *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation, Des formations et des pratiques de classe*, M. Grangeat (dir.), Grenoble, Presses Universitaires de Grenoble, p.45-58.

Triquet E, Gandit M & Guillaud J.-C. (2012), « Démarches scientifiques, démarches d'investigation en sciences expérimentales et en mathématiques. Evolution des représentations d'enseignants débutants de l'IUFM à l'issue de la formation. », *Didactique des sciences et démarches d'investigation. Références, représentations, pratiques et formation*, B. Calmettes (dir.), L'Harmattan, p.119-150.

**NICOLAS GIROUD**

ETUDE DE LA DEMARCHE EXPERIMENTALE DANS LES SITUATIONS DE RECHERCHE POUR LA CLASSE

**nico.grd@gmail.com**

**Maths à Modeler**

**Résumé.**
Cet article porte sur une partie du travail de thèse que nous avons effectué sur la démarche de recherche en mathématique et plus particulièrement sur le rôle de l'expérimental. La problématique est centrée sur la transmission aux élèves du savoir-faire « démarche expérimentale en mathématiques » et sur le rôle que celui-ci joue dans la résolution de problèmes de recherche. Nous présentons des conditions épistémologiques et didactiques favorisant la mise en pratique de la « démarche expérimentale ». Nous présentons aussi les résultats d'expérimentations que nous avons menées. Ce travail a été mené en utilisant le modèle de situation de recherche pour la classe (Grenier et Payan, 2002 ; Godot, 2005) ainsi que des éléments de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998).

## Introduction

Cet article porte sur la recherche que nous avons menée sur la démarche expérimentale en mathématiques, qui a été l'objet d'une thèse (Giroud, 2011). Ce travail s'inscrit dans les projets de l'équipe de recherche Maths à Modeler. En particulier dans celui portant sur les situations de recherche en classe (Grenier et Payan, 2002 ; Ouvrier-Buffet, 2003 ; Godot, 2005 ; Cartier 2008 ; Modeste 2012). Cette étude est centrée sur l'aspect expérimental de la démarche de recherche en mathématiques.

Un des postulats fondateur de notre recherche est que savoir faire des mathématiques, c'est savoir résoudre partiellement des problèmes de recherche, la résolution de tels problèmes nécessitant de passer par des phases expérimentales.

Notre problématique porte donc sur la transmission aux élèves du savoir-faire « démarche expérimentale en mathématiques » et sur le rôle que celui-ci joue dans la résolution de problèmes de recherche. Considérant que ce savoir-faire ne peut s'apprendre qu'à travers sa pratique en situation de résolution de problèmes, l'objectif de notre recherche a été la détermination de conditions épistémologiques et didactiques favorisant la mise en pratique de la « démarche expérimentale ». En plus de la construction d'un modèle de situation pour la « démarche expérimentale », nous avons construit, analysé et expérimenté des situations se référant à ce modèle.

Pour mener à bien notre étude, nous avons utilisé le modèle de situation de recherche pour la classe (Grenier et Payan, 2002 ; Godot, 2005), ainsi que des éléments de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), en particulier validation a-didactique, contrat didactique et milieu. Nous avons aussi défini un modèle de « démarche expérimentale en mathématiques » qui a servi de référant à notre recherche.

Après avoir observé que la «  démarche expérimentale en mathématiques », telle que nous l'entendons, n'est pas proposée par l'institution scolaire, les expérimentations et les analyses, que nous avons menées, ont montré que, dans une certaine mesure, il est possible de la faire pratiquer à des élèves. De plus, cette pratique a permis aux élèves de progresser dans la résolution grâce à un enrichissement des conceptions qu'ils portaient sur le problème à résoudre. Ces expérimentations nous ont aussi permis d'affiner les situations que nous avons construites.

Dans la section suivante, nous présentons un problème de mathématique qui va nous servir à illustrer notre cadre théorique.

## Un problème de mathématique : chercher la frontière

*Chercher la frontière* est un jeu à 2 joueurs de mathématiques discrètes. Les objets du problème sont des frontières et des territoires. Un territoire est un ensemble de cases connexes (voir figure 1).

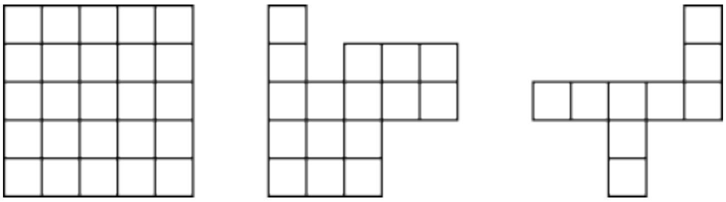


*Figure 1. Exemples de territoires*

Les frontières sont des segments de cases qui peuvent être horizontaux, verticaux, diagonaux ou vide (voir figure 2).

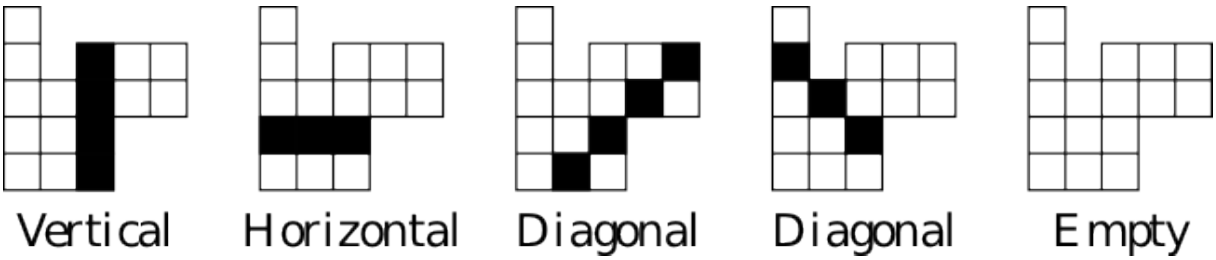



*Figure 2. Les différentes frontières*

De plus, une frontière sépare un territoire en deux sous-territoires: l'un avec des croix dans chaque case et l'autre avec des cercles (voir figure 3). Dans le cas de la frontière vide, le même symbole est utilisé dans toutes les cases.

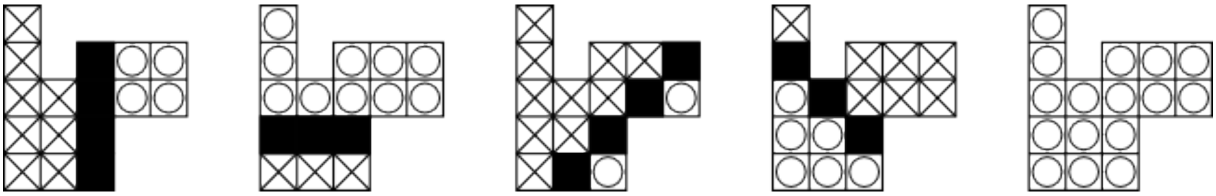


*Figure 3. Exemples de séparations d'un territoire par une frontière*

***Règles du jeu***

Etant donné un territoire vierge, l'objectif du joueur 1 est de trouver la frontière qui est cachée par le joueur 2. Les règles sont les suivantes :

- Le joueur 1 peut demander au joueur 2 la couleur de chaque case du territoire.
- L'objectif du joueur 1 est de trouver la frontière en utilisant le moins d'interrogations possibles.
- L'objectif du joueur 2 est de faire réaliser le plus d'interrogations possibles au joueur 1.

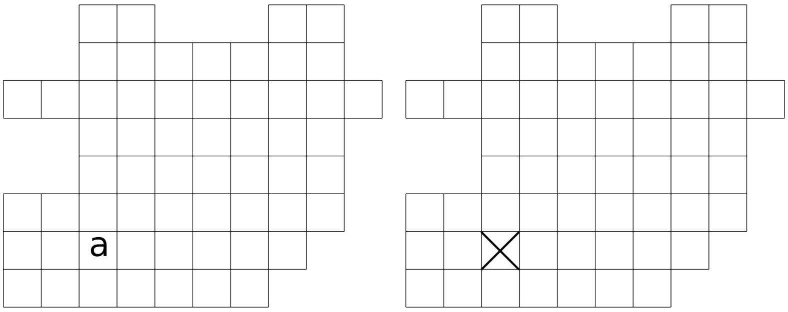



*Figure 4. Joueur 1 demande la couleur de la case a, joueur 2 répond croix*

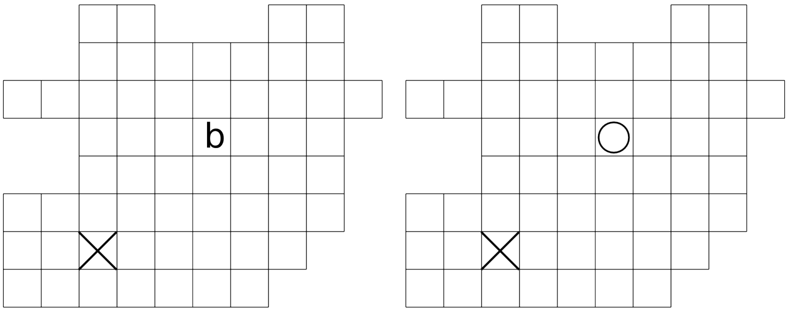



*Figure 5. Joueur 1 demande la couleur de la case b, le joueur 2 répond cercle*

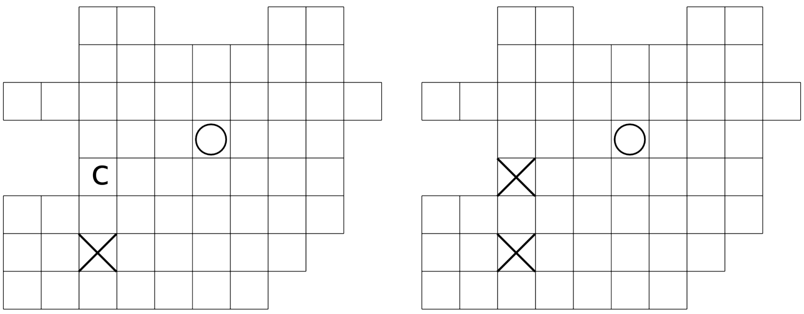



*Figure 6. Joueur 1 demande la couleur de la case c, joueur 2 répond croix*

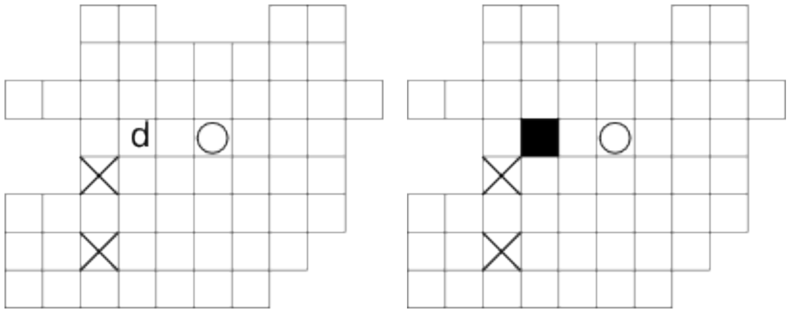



*Figure 7. Joueur 1 demande la couleur de la case d, le joueur 2 répond noire*

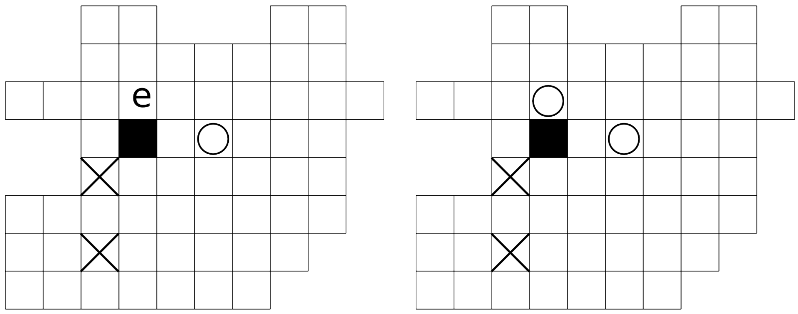



*Figure 8. Joueur 1 demande la couleur de la case e, le Joueur 2 répond cercle*

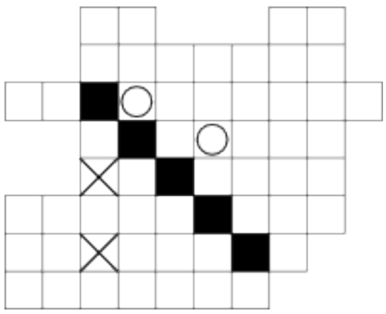


*Figure 9. Joueur 1 a trouvé la frontière en 5 interrogations*

Les figures de la page précédente représentent un exemple de partie durant laquelle le joueur 1 a trouvé la frontière en 5 interrogations.

Ce problème peut être décomposé en deux sous-problèmes :

- Trouver la frontière en utilisant le nombre minimal d'interrogations ;
- Maximiser le nombre d'interrogations utilisées par le joueur 1.

Dans la sous-section suivante, nous utilisons ce problème pour illustrer ce que nous entendons par démarche expérimentale en mathématiques.

**Un modèle de démarche expérimentale**

Nous prendrons la définition suivante de démarche expérimentale : *pratiquer la démarche expérimentale en mathématiques* consiste à essayer de résoudre un problème, qui est donc l'objet central de la démarche. Pour ce faire, des actions sont effectuées de façon non nécessairement ordonnée et à, éventuellement, répéter. Nous distinguons les types d'actions suivants :

- Proposer de nouveaux problèmes ;
- Expérimenter-observer-valider ;
- Tenter de prouver.

Le processus de succession entre les actions s'interprète en termes d'interactions, le résultat d'une action entraînant la réalisation d'une autre action.

Cette définition reprend des éléments de Perrin (2008) et Dias (2009). Nous retrouvons l'articulation entre formulation (proposer un nouveau problème), validation (tenter de prouver et valider) et expérimentation, qui est, selon Dias (2009, p. 25), ce qui « donne du sens » à l'expérimental en mathématiques. Par rapport à Perrin, nous retrouvons le point de départ de la démarche qui doit être un « problème de mathématiques » et le côté itératif de la démarche.

***Proposer de nouveaux problèmes***

En référence à la théorie de la complexité (Garey et Johnson, 1979), nous utilisons la définition suivante : *un problème de mathématique* est un couple (instance, question). Nous considérons que proposer de nouveaux problèmes consiste à :

- Modifier les instances ;
- Modifier la question ;
- Modifier les instances et la question.

Nous allons illustrer cela à l'aide du problème de *chercher la frontière*. Le joueur 1 peut être confronté au problème suivant : étant donné une coloration de cases, quelles sont les cases dont on peut déduire la couleur ? (voir la figure 9). Ici, nous posons un nouveau problème avec une nouvelle question. Ce problème est lié à la convexité, ce qui peut nous amener à étudier la convexité générée par les frontières.

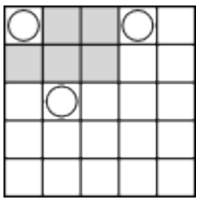


*Figure 9. Les cases grises sont nécessairement de la couleur cercle*

Le joueur 1 peut aussi essayer de trouver la frontière sur des rectangles d'une dimension donnée. Il spécifie alors le problème. Il peut aussi généraliser le problème en cherchant la frontière sur des territoires en 3 dimensions. Dans chaque cas, il modifie les instances du problème et pose un nouveau problème.

Une fois que le joueur 1 a construit un algorithme pour trouver la frontière, il doit évaluer cet algorithme en déterminant le nombre d'interrogations maximal réalisé par l'algorithme. La question et les instances du problème ont changé, l'objet d'étude est maintenant un algorithme. Ensuite, il est confronté au problème suivant : est ce que $X$ est le plus petit nombre d'interrogations possibles ?

***Expérimenter-Observer-Valider***

Nous considérons que l'action d'expérimenter consiste à construire ou utiliser une stratégie pour résoudre un problème. Nous différencions utiliser de construire par le fait que lorsque nous utilisons une stratégie, elle préexiste alors que lorsque nous la construisons, elle est construite au cours de l'action.

Nous définissons une stratégie comme un ensemble ordonné d'opérations sur des objets du problème ou sur leurs représentations (voir figure 10)

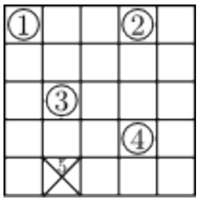


*Figure 10. Un exemple de stratégie.*

L'action d'expérimenter produit des faits observables, sur la figure 17, c'est un ensemble de cases coloriées qui génère une unique frontière possible. De plus, une observation est effectuée après chaque étape de la stratégie réalisée. De ce fait, l'observation est un élément d'une démarche expérimentale.

Réaliser une expérimentation nécessite aussi d'effectuer des choix, certaines variables doivent être fixées :

- Les variables du problème : par exemple, pour chercher la frontière, il faut choisir la forme du territoire ou ses dimensions. Mais nous pouvons aussi choisir d'expérimenter sur un carré quelconque en utilisant seulement ses propriétés structurelles (même longueur des côtés, angles droits…). D'après Perrin (2007), un expert choisit le premier cas non-trivial, il souligne aussi que la trivialité dépend de l'expérimentateur.
- Les variables de la stratégie : par exemple, dans le cas d'une stratégie pour trouver la frontière qui laisse le choix entre plusieurs cases.

L'action de valider intervient au cours de l'action d'expérimenter pour vérifier que les opérations effectuées sont correctes. Par exemple, le joueur 2 doit trouver une stratégie qui donne les couleurs de manière consistante. Nous appelons ce type de validation : *validation de la stratégie*. Cela consiste donc à vérifier que chaque opération est autorisée par les règles du problème et est conforme à la stratégie utilisée. L'identification d'une stratégie générale peut mener à l'étude de son domaine de validité.

De plus, l'action de valider intervient à la fin de l'expérimentation lorsque le résultat de la stratégie apparaît. Par exemple, le joueur 1 doit vérifier que les couleurs des cases engendrent une seule frontière possible. Nous appelons ce type de validation : *validation du produit de la stratégie*. Cela consiste en vérifier que le résultat de la stratégie est conforme à ce que l'on attendait. Cela permet de donner le statut d'exemple ou de contre-exemple au résultat d'une stratégie.

***Tentative de preuve***

Lorsqu'une conjecture est formulée, nous pouvons essayer de la prouver. Cette étape peut aussi comporter une part d'expérimentale, car cette tentative peut amener à poser de nouveaux problèmes (lemmes) et ainsi mener à la réalisation de nouvelles expérimentations. Par exemple, pour prouver qu'une frontière ne peut pas être trouvée avec $X$ interrogations, nous pouvons essayer de résoudre le problème suivant : combien de questions sont nécessaires pour trouver un type de frontière (horizontale, verticale, diagonale, vide) ? La réponse du nouveau problème est un minorant de la réponse au premier.

Nous allons maintenant voir, les conditions favorables à la pratique d'une démarche expérimentale en mathématique telle que nous l'avons décrite.

### Conditions favorables à la pratique de la démarche expérimentale

Nous avons cherché à construire un *milieu a-didactique* permettant de réaliser les trois actions caractéristiques de la démarche expérimentale. Dans cette section, nous présentons les différents éléments du *milieu* que nous avons identifiés.

#### *L'élève doit prendre l'expérimentation à sa charge*

Par cela, nous entendons que l'élève doit effectuer des expériences qu'il a construites lui même afin d'avancer dans la résolution du problème. L'élève doit pouvoir faire ses propres choix expérimentaux. En particulier, l'élève doit prendre à sa charge le problème de la validation du produit de l'expérimentation. Pour réaliser cela, l'enseignant devra donc dévoluer cette responsabilité aux élèves. D'autre part, nous faisons l'hypothèse que fournir du matériel aux élèves va les inciter à effectuer des expériences (utilisant ce matériel) pour avancer dans la résolution du problème.

#### *Les outils matériels contenus dans le milieu doivent être maîtrisés par les élèves.*

Nous faisons l'hypothèse que le milieu doit contenir des outils expérimentaux maîtrisés par les élèves. Nous proposons donc d'utiliser les médians suivants :

- Support matériel : plateau en bois ou en carton, jetons…
- Papier et crayon ;
- Outils de construction géométrique ;
- Logiciel informatique simple d'accès ne retranscrivant que les actions des élèves.

Dans le cas où les élèves maîtrisent d'autres outils que ceux mentionnés ci-dessus, ils peuvent, évidemment, être utilisés.

#### *Les instances du problème initial doivent être des objets apparaissant comme non-usuels pour les élèves.*

Cette condition est surtout valable, selon nous, lors des premières mises en situation de pratique de la démarche expérimentable[12]. Nous préconisons cela en référence aux travaux de Lithner (2000). En effet, il a montré que l'utilisation de problèmes éloignés de ceux que les élèves ont l'habitude de traiter favorise l'utilisation du « raisonnement plausible » que nous considérons comme étant au cœur de la pratique de la démarche expérimentale.

Lithner (2000) identifie deux types de raisonnements : le raisonnement « *PR* », en référence au « Plausible Reasonning » de Polya (1990) et le raisonnement « *EE* », pour «Established Experiences ». Pour Lithner, le raisonnement *PR* est fondé sur les propriétés mathématiques des objets alors que le raisonnement *EE* est fondé sur l'expérience personnelle concernant les objets du problème.

Un exemple de raisonnement *EE*, sur une tâche *T* donné par Lithner est le suivant :

> The solutions to all maximisations tasks I have solved have been found where $f'(x)=0$. So *T* is solved by finding where $f'(x)=0$.

Un exemple de raisonnement *PR*, sur la même tâche, est le suivant :

[12] L'objectif de l'apprentissage de la démarche expérimentale étant aussi de pouvoir appliquer ce savoir-faire sur les objets habituellement utilisés en classe.

> If one sees the graph of a function as hills and valleys, a maximum is found at the top of a hill. At the top slope is zero, and the slope is described by the derivative. So *T* is solved by examining the points where $f'(x)=0$.

Même si le raisonnement *EE* n'est pas sans intérêt au cours d'une recherche, le raisonnement *PR* nous semble être au cœur de la démarche expérimentale. Lithner (2000) remarque qu'en situation de résolution d'un problème d'optimisation continu, les élèves, qui n'ont pas réussi à résoudre le problème, ont utilisé le raisonnement *EE* dans la construction de leur stratégie de résolution. Le raisonnement *PR* étant seulement utilisé de manière locale.

De plus, dans un article plus récent, Lithner (2010) montre que lorsque les élèves sont confrontés à des problèmes qui sont proches de ceux rencontrés dans leurs manuels, ils utilisent principalement le raisonnement « Imitative Reasonning » alors que confronté à des tâches qui s'éloignent de celles données par les manuels, ils vont utiliser des raisonnements basés sur le raisonnement plausible et les propriétés mathématiques des objets, créant par la même de nouvelles démarches de résolution.

Cela nous amène ainsi à faire l'hypothèse qu'utiliser, pour les instances, des objets proches de ceux que les élèves ont travaillé ou travaillent va les amener à favoriser l'utilisation de raisonnement *EE* au détriment du raisonnement *PR*, ce qui va être un obstacle à la construction de nouveaux objets mathématiques et à la formulation de nouveaux problèmes.

Nous pourrions aussi nous demander pourquoi ne pas simplement considérer des problèmes avec des instances usuelles et des questions différentes. Nous faisons l'hypothèse que les instances, notamment à travers leurs représentations favorisent l'utilisation du raisonnement *EE*, bien plus que la question. Toutefois, il se peut aussi que si la tâche est identifiée comme étant proche d'une tâche que les élèves ont l'habitude de réaliser (même si les instances sont différentes) , cela entraîne les élèves à utiliser du raisonnement *EE*, cela peut par exemple être le cas dans le problème d'optimisation, *chercher la frontière*, que l'on pourrait essayer de résoudre en cherchant à dériver une fonction…

Pour cela, nous préconisons, en début d'apprentissage de la démarche expérimentale, l'utilisation de problèmes issues des mathématiques discrètes, car ils existent de nombreux problèmes faciles d'accès dont les instances ne sont pas usuelles pour les élèves.

***Le milieu doit permettre la construction de nouveaux objets mathématiques***

Cette caractéristique a pour but de « forcer » les élèves a effectué un réel travail de modélisation d'objets mathématiques. Le milieu doit donc permettre la construction de tels objets et faire apparaître l'expérimental comme une aide. Nous considérons qu'une construction de nouveaux objets mathématiques est possible à travers l'expérimentation lorsque l'expérimental amène à formuler de nouveaux problèmes dont la résolution peut entraîner la construction de nouveaux objets.

Par exemple, concernant *chercher la* frontière, la recherche d'une frontière sur un segment peut entraîner la construction de l'algorithme dichotomique.

***Un grand nombre de propositions doivent être vérifiables expérimentalement sur des cas particuliers.***

Selon Bernard (2008), les hypothèses effectuées dans une « méthode expérimentale » doivent être vérifiable expérimentalement. En reprenant cette idée, le problème proposé aux élèves doit pouvoir permettre la formulation de propositions et conjectures vérifiables expérimentalement.

***Mais la validation expérimentale doit apparaître comme insuffisante…***

Toutefois, afin que la vérification expérimentale ne soit pas un obstacle à la preuve, la situation doit comporter une incertitude suffisamment élevée pour justifier une validation théorique.

***Le milieu doit permettre l'étude de cas particuliers.***

Les cas particuliers jouent un rôle important dans l'avancée de la recherche, que cela soit pour établir des propriétés sur des objets mathématiques ou pour faire des preuves. Un milieu favorable à la démarche expérimentale produit des objets mathématiques qui peuvent servir d'exemples ou de contre-exemples.

Pour permettre aux élèves d'étudier des cas particuliers, nous proposons d'utiliser des *variables de recherche* (Godot, 2005 ; Grenier et Payan, 2002) portant sur les instances du problème.

***Le modèle de SiRC.***

Le modèle de situation que nous préconisons pour l'apprentissage de la démarche expérimentale se rapproche de celui des situations de recherche en classe (Grenier et Payan, 2002). Dans une SiRC, les élèves sont en position de chercheur et ont pour tâche de produire des résultats nouveaux pour eux. Tandis que l'enseignant est « dans une bouble position de chercheur et de gestionnaire de la situation ». Nous reprenons ainsi les caractéristiques du milieu associé à une SiRC et en particulier les points suivants :

- Les apprentissages en jeu sont ceux qui sont constitutifs de l'activité de recherche mathématiques : argumenter, formuler et étudier des conjectures, prouver, modéliser, etc ;
- Pour l'élève, un critère de réussite « provisoire » est l'émission d'une conjecture forte ou la résolution d'un cas particulier ;
- Pour l'enseignant, le critère de réussite est la reconnaissance d'apprentissages liés au triplet (question, conjecture, preuve).

***Le rôle des élèves et de l'enseignant***

L'enseignant doit créer des conditions qui mettent les élèves dans une position, la plus proche possible, de celle d'un chercheur, il ne doit donc pas apparaître comme ayant toutes les réponses et, s'il connaît des solutions, il ne doit pas les donner.

Nous allons dans la suite de cet article essayer de répondre à la question suivante : les conditions énoncées dans cette section permettent-elles la pratique de la démarche expérimentale ? Et si oui, la pratique de la démarche expérimentale permet-elle aux élèves d'avancer dans la résolution d'un problème ?

Pour répondre à ces questions, nous avons effectué des expérimentations en utilisant le problème *chercher la frontière*. Avant de présenter le résultat de ces expérimentations, nous allons présenter une brève analyse mathématique et didactique de ce problème.

## Analyse mathématique et didactique de *chercher la frontière*

### *Analyse mathématique*

#### *Définition de l'optimalité*

Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que l'optimalité n'est pas définie. Nous considérons une optimalité au pire des cas. Le *nombre d'interrogations utilisées au pire* par un algorithme de recherche est le nombre d'interrogations maximal utilisé par cet algorithme. Pour un algorithme de défense, le *nombre d'interrogations au pire* que fait faire un algorithme de défense est le nombre d'interrogations minimal utilisé par tout algorithme de recherche jouant contre lui.

*Différents modèles*

Nous avons identifié différentes modélisations du problème :

- Géométrique : dans ce modèle, ce sont les propriétés géométriques des objets qui sont utilisées pour avancer dans la résolution. Par exemple, une droite est caractérisée par 2 points ou un point et une direction.
- Densité de zone : nous cherchons à interroger les zones qui sont les plus « denses » en nombre de frontières. En particulier, ce type de stratégie entraîne à jouer en priorité au centre du rectangle.
- Points : en tant que chercheur, nous sommes confrontés au problème suivant : quelle est la case à interroger qui va permettre de minimiser le nombre de cases de couleurs inconnues restantes ? En tant que donneur, nous cherchons la couleur qui va maximiser le nombre de cases de couleur inconnue restantes.
- Frontières : il est analogue au modèle point, sauf qu'au lieu de maximiser ou minimiser le nombre de cases de couleur inconnue, nous cherchons à maximiser ou minimiser le nombre de frontières possibles.

La résolution du problème peut passer par l'utilisation de différents modèles, la modélisation la plus efficace pour trouver un algorithme de recherche quasi-optimal est le modèle géométrique. Par contre, il ne permet pas de démontrer ou de savoir si l'algorithme est optimal, pour cela, le modèle le plus intéressant est le modèle « frontière ». Nous allons maintenant présenter, un exemple de démarche expérimentale qui permet de déterminer un algorithme quasi-optimal sur un carré.

*Un algorithme de recherche quasi-optimal sur un carré*

En jouant, en tant que chercheur, nous pouvons faire l'observation suivante : interroger les cases qui sont au « centre » du carré ne permet pas de trouver les frontières « coins » ou la frontière vide. Cela amène à se confronter au problème suivant : comment jouer contre une frontière vide ou coins ? Pour répondre à ce problème, une stratégie que nous pouvons utiliser est de commencer par interroger les coins du carré. L'utilisation de cette stratégie peut mener à l'observation suivante : les couleurs des coins donnent le type de frontière (voir figure 11). Plus qu'une observation, l'affirmation précédente est un théorème qu'il est facile de démontrer à l'aide d'une preuve par disjonction des cas.

Une fois que ce résultat est connu, nous sommes confronté au problème suivant : comment trouver la frontière sur un segment dont les extrémités sont de couleur différente. Nous pouvons alors chercher à minimiser le nombre de frontières restantes après chaque interrogation. L'utilisation de cette stratégie mène à la construction de l'algorithme dichotomique.

Nous obtenons ainsi l'algorithme coins puis dichotomie :

1. Interroger les 4 coins. Si possible conclure, sinon passer à 2.
2. Faire une dichotomie sur un segment dont les extrémités sont l'une rouge et l'autre bleue.

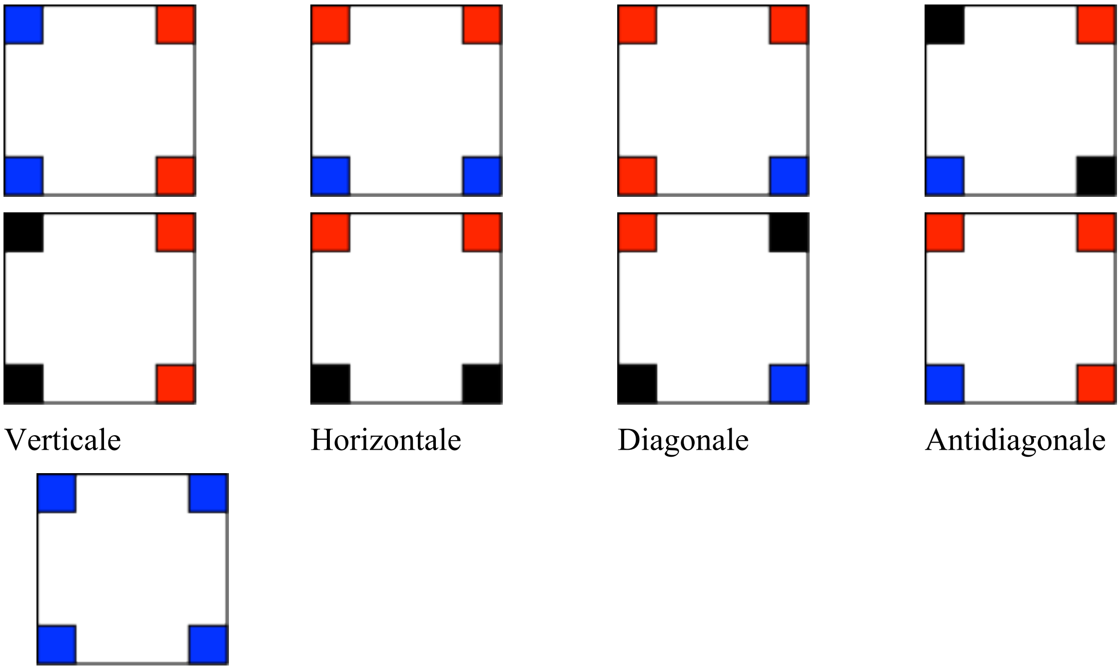



*Figure 11. Vide*

Il nous reste maintenant à évaluer l'optimalité au pire de cet algorithme. Pour déterminer le nombre d'interrogations au pire utilisé, nous pouvons remarquer que cet algorithme « divise » par 2 le nombre de frontières possibles après la quatrième interrogation. Pour déterminer un minorant « efficace » du nombre d'interrogation optimal, il suffit de remarquer que tout algorithme peut au plus « diviser » par 2 le nombre de frontières possibles après chaque interrogation. Cela donne le théorème suivant : l'algorithme coins puis dichotomie est optimal à 2 interrogations près sur un carré.

***Analyse didactique***

*Une double dévolution*

Cette situation entraîne une double dévolution : dévolution du jeu et dévolution du problème mathématiques. Nous faisons l'hypothèse que les connaissances requises pour la compréhension du jeu sont des connaissances que tout élève de niveau primaire ou supérieur possède. La différence entre les deux dévolutions se fait au niveau des critères de réussite :

- Pour le jeu : battre l'adversaire ;
- Pour le problème : déterminer l'optimum et le prouver.

*Principaux savoirs notionnels en jeu*

Nous avons identifié des savoirs liés à :

- L'optimisation discrète : définition de l'optimalité, minorant, majorant, MinMax, MaxMin…
- L'algorithmique : formulation et écriture d'algorithme, algorithme dichotomique…
- La convexité : enveloppe convexe, demi-plans, points extrêmaux…

*Exemple de savoirs transversaux en jeu*

Voici quelques exemples de savoirs transversaux :

- Modélisation par changement de problèmes : étude du lien entre deux problèmes, par exemple : étudier le lien entre le problème de recherche d'un algorithme minimisant le nombre de frontières restantes à chaque interrogation et le problème du joueur 1 ;
- Formulation de conjectures ;
- Preuves : preuve par exhibition d'un algorithme de recherche (majorant) ou de défense (minorant), preuve par exhaustivité des cas pour des objets de petites dimensions, contre-exemples…
- Définition de nouveaux objets : demi-plans, enveloppe convexe…

*Variables de la situation*

Les variables de la situation sont la forme et les dimensions des territoires ainsi que le type de frontières que l'on considère. La variable qui apparaît comme la plus pertinente pour être une variable de recherche est celle portant sur la forme et les dimensions. En effet, modifier cette variable permet l'apparition de nouveaux problèmes dont les résolutions peuvent utiliser différents types de preuve.

*Conditions favorables à la démarche expérimentale*

Ce problème vérifie les conditions favorables à l'apprentissage de la démarche expérimentale :

- La validation expérimentale apparaît comme insuffisante car, les résultats trouvés de manière expérimentale dépendent de la stratégie utilisée par l'autre joueur ;
- Instances non-usuelles ;
- Le problème peut être une SiRC.

## Présentation et résultats des expérimentations

### *Présentation des expérimentations*

Nous avons effectué deux expérimentations en classe de seconde. Pour chaque expérimentation, 4 séances d'1h30 ont été réalisées. Les élèves travaillaient par groupe de 2 ou 3. Nous avons fourni des plateaux en bois et des jetons de couleurs avec lesquels les élèves pouvaient « jouer » des parties de *chercher la frontière*.

### *Synthèse de ce que les élèves ont fait*

*Au niveau des algorithmes*

Les élèves ont construits les algorithmes suivants :

- Algorithme dichotomique ;
- Algorithme coins puis dichotomie ;
- Stratégie de maximisation des frontières possibles ;
- Algorithmes de défenses locaux[13].

Les élèves ont essentiellement cherché à construire et améliorer des algorithmes de recherche. Mis à part l'algorithme coins puis dichotomie, les élèves n'ont pas construit d'autres algorithmes de recherche, selon nous, cela provient du fait que cet algorithme est très efficace et qu'il est trouvable « rapidement » de manière expérimentale, notamment lorsqu'on expérimente contre une frontière vide ou coins.

[13] Algorithmes de défense qui ne peuvent jouer que contre un algorithme de recherche.

Les élèves ont construit des algorithmes de défense locaux mais n'ont pas cherché à construire d'algorithmes de défense plus globaux même s'ils utilisaient la stratégie de maximisation des frontières possibles lorsque le nombre de frontières possibles leur paraissait facilement déterminable. Une conséquence de cela est la non-détermination d'un minorant à l'optimum pour des objets de grandes dimensions (autre que 4).

*Exemples de résultats obtenus*

Voici une liste des résultats que les élèves ont obtenus :

- La couleur des 4 coins d'un carré donne la direction de la frontière (prouvé) ;
- Des optimums pour des carrés de petite dimension (prouvé) ;
- Sur un carré de 8 cases de côté, l'algorithme coins puis dichotomie trouve la frontière en, au plus, 6 interrogations (argumenté mais non prouvé) ;
- Pour des segments dont le nombre de cases est entre $2^{c-1}$-1 et $2^{c}$-1, il faut utiliser $c$ interrogations (argumenté et obtenu que par un seul groupe).

Les élèves ont obtenu peu de résultats généraux notamment, comme mentionné précédemment, ils n'ont pas obtenu de minorant à l'optimum. De plus, ils n'ont pas cherché à déterminer le nombre d'interrogations qu'utilise l'algorithme coins puis dichotomie de manière générale. Nous faisons l'hypothèse que cela est dû au fait que les élèves se sont restreints aux dimensions des plateaux que nous leur avions fournis : ils n'ont pas cherché à généraliser le problème.

***Au niveau de la démarche expérimentale***

Les élèves ont pratiqué la démarche expérimentale, car ils ont, par exemple, expérimenté pour :

- Construire des algorithmes de recherche ;
- Déterminer le nombre d'interrogations au pire effectué par un algorithme ;
- Répondre au problème d'existence d'algorithme trouvant la frontière en un certains nombre d'interrogations.

L'expérimentation les a aussi conduit à proposer de nouveaux problèmes comme :

- Que se passe-t-il si la frontière vide n'est plus autorisée ?
- Comment faire pour jouer contre une frontière vide ?
- Est-ce que cet algorithme est optimal ?
- Est-ce que je peux déduire la couleur de cette case ?

Comme nous pouvons le voir par rapport à cette liste, les nouveaux problèmes qui ont été posés sont surtout liés à la problématique du joueur 1, c'est-à-dire, à la problématique liée à la recherche de la frontière.

Les élèves ont aussi effectué des tentatives de preuves. Toutefois, ils n'ont pas d'eux-mêmes effectué des tentatives de preuve « positive »[14]. Les tentatives de preuve « positive » n'ont été obtenues que par intervention du gestionnaire.

Le fait d'expérimenter a permis aux élèves d'avancer dans la résolution du problème :

[14] Une tentative de preuve « négative » est une tentative de preuve où l'on cherche à montrer qu'un résultat est faux alors que dans une tentative de preuve « positive », nous allons chercher à montrer que ce résultat est vrai.

- Expérimenter contre une frontière vide ou coin a permis l'apparition des algorithmes qui commencent par interroger les coins. Ce qui a permis la construction de l'algorithme coins puis dichotomie ;
- Expérimenter a permis aux élèves de formuler, d'affiner et de réfuter des conjectures ;
- Expérimenter a aussi permis aux élèves de mettre en place des plans de preuve par exhaustivité des cas.

***Bilan des expérimentations et perspectives***

*Bilan des expérimentations*

Le problème bien qu'apparaissant comme complexe a été accessible aux élèves de seconde. Ces élèves ont pratiqué la démarche expérimentale mais de manière incomplète puisqu'ils n'ont pas d'eux même effectué des tentatives de preuves « positives ». De plus, comme constaté par Godot (2005), il est apparut que le matériel a été un frein à l'utilisation de variables de recherche. Cela a provoqué l'absence de nouveaux problèmes « généraux » ainsi qu'une restriction de l'ensemble des exemples dont ont disposé les élèves. Toutefois, le matériel a favorisé la pratique de la démarche expérimentale.

*Perspectives*

Par rapport au bilan des expérimentations que nous avons fait, l'un des problèmes majeurs est l'absence de tentative de preuve « positive ». L'hypothèse que nous faisons est que l'obtention de tentative de preuve « positive » ne peut avoir lieu qu'avec des élèves qui ont une certaine expérience de l'activité de recherche mathématique. Sous cette hypothèse, l'apprentissage de la démarche expérimentale nécessite l'utilisation de plusieurs situations. Le problème est alors de construire une telle séquence.

De plus, nous avons vu que les élèves n'ont pas généralisé leurs résultats, ce qui a eut pour conséquence de restreindre l'ensemble des exemples dont ils disposaient. Cet ensemble est essentiel, car c'est celui dans lequel il est possible de trouver des contre-exemples. De ce fait, certains arguments proposés par les élèves n'ont pas été invalidés par eux-mêmes, car sur les dimensions avec lesquelles ils travaillaient, il n'était pas possible de trouver un contre-exemple. Cela pose la question de l'étude du domaine de validité des arguments (Durrand-Guerrier, 2008) et de comment faire pour que les élèves puissent d'eux-mêmes se poser cette question.

## Bibliographie


Cartier, L. (2008). *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Dias T. (2009) *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse de doctorat. Lyon : Université Claude Bernard.

Durrand-Guerrier V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics Education* 40, p. 373–384.

Giroud N. (2011) *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université de Grenoble.

Godot K. (2005) *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Grenier D., Payan C. (2002) Situation de recherches en « classe » : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In Durand-Guerrier V., Tisseron C. (eds) (pp. 189-205) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris : IREM de Paris 7, ARDM.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educationnal Studies in Mathematics* 41, p. 165–190.

Lithner, J. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educationnal Studies in Mathematics* 75, p. 89–105.

Modeste S. (2012) *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat. Grenoble : Université de Grenoble.

Ouvrier-Buffet, C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Perrin D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Petit x* 73:6–34.

Polya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning. T.1 induction andanalogy in mathematics*. Princeton University Press.

**MICHEL GRANGEAT**

# COOPERATION ENTRE ENSEIGNANTS, FORMATEURS ET CHERCHEURS: DES MODALITES ET DES EFFETS.

**michel.grangeat@ujf-grenoble.fr**

**Université Grenoble Alpes**

**Résumé**
Ce texte traite du travail collectif des enseignants et de ses effets sur les connaissances professionnelles. Nous décrirons une modalité de coopération entre enseignants, formateurs et chercheurs dans le but de développer l'évaluation formative dans l'enseignement scientifique. Nous préciserons le rôle de cette coopération dans le développement des connaissances et des compétences professionnelles des enseignants. Nous tracerons des perspectives pour la formation

Ce texte[15] traite des modalités de travail collectif des enseignants et de leurs effets. Nous préciserons une approche de l'activité enseignante utilisée en sciences de l'éducation. Nous la mobiliserons pour étudier les effets du travail collectif enseignant sur les connaissances professionnelles des personnes. Nous décrirons une modalité de coopération entre enseignants, formateurs et chercheurs dans le but de développer l'évaluation formative dans l'enseignement scientifique. Nous préciserons le rôle de cette coopération dans le développement des connaissances et des compétences professionnelles des enseignants. Nous tracerons des perspectives pour la formation.

## Du cadre conceptuel et de la méthodologie de recherche

Dans une première partie, nous définissons le travail collectif enseignant (TCE), nous jalonnons le champ de recherche qu'il génère et nous proposons une méthodologie pour identifier le développement professionnel des personnes engagées dans des collectifs. Nous terminons en présentant quelques résultats de recherche.

### *Comprendre le travail collectif*

Nous définissons le travail collectif enseignant puis nous identifions deux modalités de mise en œuvre.

#### *Délimiter le champ*

Le travail collectif n'implique pas nécessairement une équipe, une communication en face-à-face ou même une régularité : il est déterminé par l'existence d'une mission ou d'un projet commun ou par la nécessité de partager des connaissances ou des ressources. Le plus souvent,

[15] Ce texte est à mettre en relation avec celui de Michèle Gandit dans le même recueil. Pour la clarté de lecture, nous avons choisi de séparer en deux articles différents le contenu de notre présentation commune.

il traverse les frontières des spécialités et comporte des partenariats avec l'extérieur. Dans la plupart des cas, les relations entre les acteurs sont explicitement établies mais elles peuvent aussi se construire dans l'action elle-même (Grangeat, 2011).

Le travail collectif enseignant (TCE) représente l'ensemble des tâches conduites collectivement par les personnels du système éducatif en vue d'atteindre les missions qui leur sont attribuées. Lorsque ces missions consistent à garantir l'atteinte d'un certain niveau d'acquisition par tous les apprenants – en référence à un socle commun de connaissances et de compétences – alors le TCE recouvre une grande part des activités enseignantes durant la scolarité obligatoire. Néanmoins, le TCE ne représente pas un ensemble indifférencié et inorganisé d'actions diverses et variées.

*Identifier les modalités du travail collectif*

Dans un des articles pionniers des études sur le sujet dans le cadre de la psychologie ergonomique, Rogalski (1994) précise les modalités du travail collectif sur le plan général ; nous les avons décrites dans le cadre de l'enseignement (Grangeat, 2011). Ces modalités peuvent se définir selon la fonction du collectif (augmenter le personnel, varier les intervenants, partager des ressources) et sa structure (hiérarchisation, échange, distribution, etc.). Nous retiendrons deux modalités fréquentes en établissement scolaire.

La *coopération distribuée* intervient lorsque les buts immédiats des acteurs sont distincts, que leurs tâches sont différentes, mais que leurs activités convergent vers l'atteinte d'un même objectif, vers l'accomplissement d'une même mission. C'est le cas des enseignants d'un même établissement ou d'un même secteur scolaire qui sont censés contribuer ensemble aux progrès des mêmes apprenants. L'enjeu de ces situations, c'est la distribution et la synchronisation des tâches entre des personnes qui doivent se sentir responsables de l'activité collective et comprendre la fonction de leur activité dans le processus de travail global. Ces acteurs sont donc amenés à construire une représentation partagée de la tâche, un référentiel commun, qui permet de coordonner au mieux les actions individuelles.

La *coaction* ou *coprésence* caractérise les situations de partage d'un espace de travail ou d'un ensemble de ressources. Les activités s'effectuent en parallèle mais une forte dépendance existe cependant entre les acteurs. En éducation, on pense aux activités en salles spécialisées (e.g. gymnase, salle TIC) dans lesquelles plusieurs enseignants exercent en même temps ou partagent du matériel mais une activité de classe co-conduite par deux personnes correspond également à cette modalité. La salle des professeurs représente aussi un des lieux de cette coaction en établissement. Le partage d'une plateforme d'échanges sur Internet en est une autre. L'enjeu consiste, pour chaque acteur, à comprendre et contrôler les effets de sa propre action sur celle d'autrui, à déterminer s'il s'agit d'une aide ou d'une gêne et, dans ce cas-là, à tenter de la minimiser.

*Repérer les effets du travail collectif sur les personnes*

Le TCE peut être modélisé selon une double boucle de régulation (cf. figure 1) : une boucle de régulation productive concerne la part observable de l'activité, les réalisations ; une boucle constructive concerne les conceptualisations des acteurs quant à leurs actions en situation, les connaissances. Un tel modèle rejoint et s'inspire de ceux qui ont été proposés pour étudier d'autres métiers et qui sont reconnus pertinents pour comprendre, à la fois, les activités individuelles et collectives (Rogalski, 2003 ; Samurçay, & Rabardel, 2004).

La figure 1 présente ces deux boucles en les inscrivant dans l'activité des personnes et dans le processus d'élaboration des connaissances professionnelles. Les acteurs et la situation influent sur la nature de l'action. Celle-ci produit des résultats et des conceptualisations qui en retour transforment les acteurs et la situation. Les acteurs n'étant pas isolés, ces processus génèrent des débats et des échanges qui participent de la construction de nouvelles connaissances professionnelles.

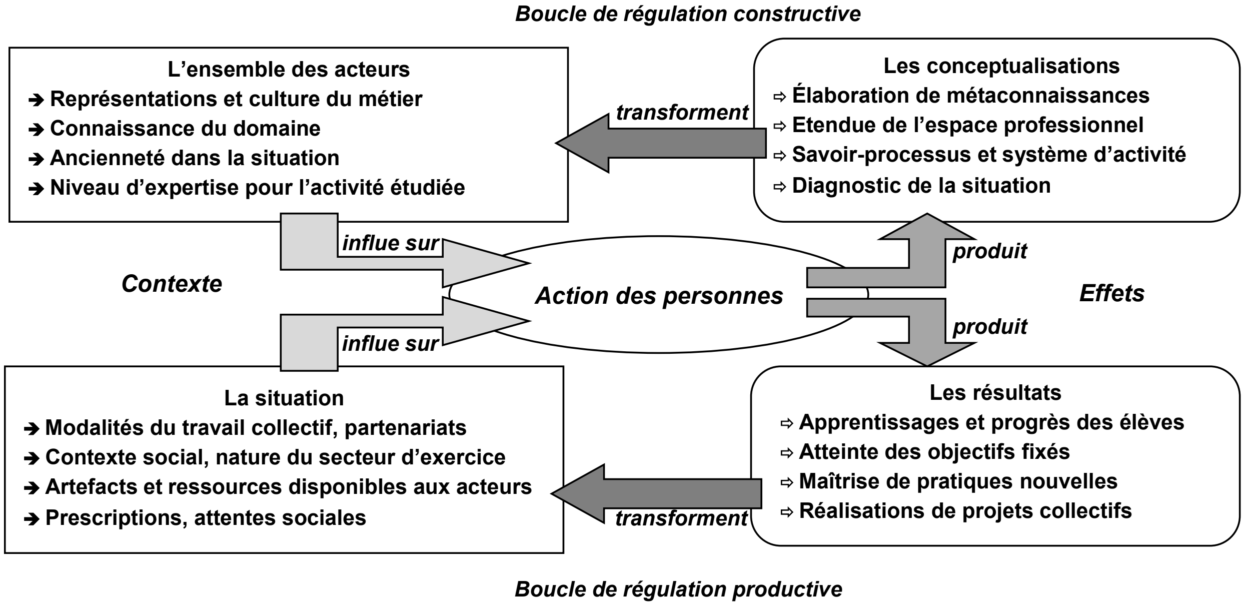



Figure 1: La double boucle de régulation de l'activité professionnelle

Le travail collectif conduit les intervenants à expliciter et à transmettre, au moins en partie, les informations qu'ils détiennent et les conclusions qu'ils en tirent. Ces échanges provoquent l'élaboration de connaissances qui sont relatives au processus de travail et qui permettent à l'individu de franchir les limites de sa propre tâche afin de prendre en considération celle de ses collègues et de ses partenaires dans un processus global. Ces connaissances, Fisher et Boreham (2004) les appellent *Work Process Knowledge* car elles concernent l'activité dans sa globalité.

Ces connaissances sont actives dans la mesure où elles sont directement mobilisables pour améliorer la pertinence de l'action. Elles sont construites collectivement durant le travail. Elles sont issues de la résolution de problèmes professionnels et notamment des efforts des acteurs pour dépasser les contradictions qui surgissent entre ce que prédit la théorie, ce que stipulent les prescriptions et ce que montre la réalité à laquelle ils sont confrontés.

Ces connaissances du processus de travail sont donc, à la fois, composites et partagées. De ce fait, elles ne peuvent pas être supportées uniquement par les représentations mentales des individus : ces connaissances sont, à la fois, incluses dans les interactions sociales entre les acteurs, dans leur manière de parler du travail, de donner sens aux événements professionnels du quotidien, et inscrites dans les artefacts qui structurent ces interactions, les comptes rendus d'activité, les bases de données, les forums thématiques sur intranet, etc.

Ces connaissances sont adossées à la culture professionnelle de la communauté. Celle-ci représente un premier appui pour l'élaboration des connaissances professionnelle. Par l'intermédiaire des verbalisations, des échanges, des discussions et des débats, les acteurs construisent une réalité qui a du sens pour eux, collectivement. Ces référentiels communs (Gibouin, 2004), ces représentations opératives partagées (Rogalski, 2005), sont en interaction avec les conceptualisations individuelles et sous-tendent l'activité des professionnels.

Ces connaissances sont supportées par des artefacts. Les outils du travail constituent un deuxième appui pour le développement professionnel qui est appuyé sur ces artefacts qui gardent trace des réflexions, des projets et des réalisations des acteurs (e.g. des bases de données, des cahiers de bord). Sous certaines conditions, ces artefacts peuvent constituer progressivement des instruments, incorporés à l'activité, appropriés par les acteurs (Rabardel, 2005). Ils forment ainsi des ressources partagées dans lesquelles les acteurs, individuellement ou collectivement, pourront puiser pour surmonter des problèmes nouveaux pour eux. Ces ressources participent à l'élaboration des connaissances professionnelles dans la mesure où elles permettent aux acteurs de se référer, à la fois, à leurs propres savoir-faire, individuels ou collectifs, à l'expérience collective telle qu'elle est conservée dans les artefacts et aux savoirs académiques, dont l'accès peut être facilité par ces mêmes artefacts (Gueudet, Trouche Aldon, 2011).

Les connaissances professionnelles des enseignants combinent, entre autres éléments, ces représentations partagées par le collectif et les conceptualisations que les personnes construisent à partir de leur activité.

*Réduction et extension de l'espace professionnel*

Ce développement des connaissances professionnelles conduit chaque acteur à construire, en quelque sorte, un monde qui lui est propre mais qu'il doit partager avec le collectif (Béguin, 2005), à élaborer son espace professionnel, dans ses dimensions spatiales et temporelles (Marcel, 2005). Dans les situations de travail complexe – dont l'enseignement fait partie – Leplat (2000) observe que les professionnels peuvent élargir ou rétrécir l'espace pris en compte pour conduire leur activité.

L'activité peut alors s'inscrire dans trois régions contiguës, dans trois espaces pouvant être repérés dans l'activité enseignante :

- Le noyau dur du métier, qui correspond au fait de se limiter à enseigner une discipline à une classe et à interagir, quasi exclusivement, lors des réunions obligatoires relatives au suivi trimestriel des élèves.
- La région périphérique, qui conduit à tenir compte des disciplines proches, de quelques partenaires de l'établissement et du devenir immédiat des apprenants, sur la durée d'un cycle par exemple.
- L'environnement étendu, qui connecte l'activité enseignante avec celle d'autres acteurs qui exercent dans la zone d'influence de l'établissement et qui tient compte du parcours scolaire des apprenants.

Parvenir à étendre l'espace à partir duquel sont tirées les informations utiles à la conduite de l'action caractérise le professionnel compétent. L'action individuelle est plus pertinente lorsque l'acteur peut l'inscrire dans l'environnement étendu, dans la continuité du processus de travail général (Boreham, Fisher et Samurçay, 2002). Un rôle important est donc joué par le rapport des acteurs à la situation de travail, et notamment par la manière dont ils peuvent, ou non, s'impliquer dans un réseau d'interactions professionnelles dans lequel sont conduits des projets communs et sont abordées les questions rencontrées dans le travail.

Cependant, l'extension de l'espace professionnel pris en considération par l'acteur ne peut pas suffire à caractériser le développement des connaissances professionnelles. En effet, selon Pastré, Mayen et Vergnaud (2006), ce développement n'est pas une simple accumulation. Premièrement, les professionnels experts se montrent capables de jouer, à la fois, sur une conduite de l'activité fondée sur une large prise en compte de l'environnement et, lorsque la situation le réclame, sur un repli sur le cœur du métier et ses procédures de base. Ainsi, ce qui marquerait la compétence dans le travail collectif enseignant, serait de parvenir, tout à la fois, à interagir avec de nombreux partenaires et à rester concentré sur les apprentissages des élèves de la classe, à jouer de manière équilibrée à la fois sur l'environnement étendu et sur le noyau dur du métier. Deuxièmement, du côté des débutants, les études mettent en évidence une sorte d'engluement dans le faire, une dépendance aux conditions nominales, procédurales, de l'action ; à l'opposé, les professionnels les plus compétents paraissent suffisamment détachés de l'action pour parvenir à distinguer les différents éléments de la situation de travail afin d'ajuster leur activité aux événements présents ou probables. Ce qui marquerait le développement professionnel, l'accès à l'expertise, serait alors la distanciation à l'action qui permet d'identifier les dimensions essentielles de la situation et de se positionner de telle sorte qu'aucun aspect important de ces dimensions ne soit oublié (Grangeat, 2010, Grangeat & Besson, 2006, Grangeat & Gray, 2007).

*Une recherche sur les effets du travail collectif*

Nous avons cherché à comprendre les effets du travail collectif sur les connaissances professionnelles enseignantes (Grangeat, Rogalski, Lima et Gray, 2008). L'étude porte sur 96 entretiens avec des enseignants de fin d'école primaire et de début de collège. Elle porte sur la compétence dans les activités collectives à partir d'une variable CC qui prend en compte les différents éléments de l'activité enseignante : suivi des programmes, acquisitions des élèves, séquencement des enseignements, activité réflexive sur le métier, inscription dans des activités collectives.

Les résultats montrent, premièrement, que l'étendue et l'organisation des connaissances professionnelles depuis le noyau dur jusqu'à l'environnement élargi – tel que le score CC les prend en compte – suit une courbe en bosse en fonction de l'expérience. L'âge influe sur les conceptualisations, d'abord positivement puis négativement : c'est entre 35 et 45 ans que les scores des sujets traduisent des conceptualisations qui sont, à la fois, plus étendues et mieux organisées.

Ils montrent, deuxièmement, que l'engagement des acteurs, leur rapport à la situation, agit très fortement sur les conceptualisations. Ce facteur semble compenser les effets négatifs de l'âge, pour les jeunes par déficit de références pratiques, comme pour les anciens par repli sur l'individuel. De fait, lorsque les enseignants ont l'opportunité de s'impliquer dans le travail collectif et non de le subir, lorsqu'ils veulent et peuvent s'engager dans un réseau d'interactions professionnelles, leur niveau de conceptualisation est supérieur, sans plus aucun impact de l'âge. Au cours des entretiens, ces professionnels, jeunes ou non, disent comment les activités collectives, initiées par les instances du système éducatif ou les acteurs locaux, constituent des ressources pour développer leurs compétences professionnelles, dans le sens d'une meilleure attention portée à la diversité des apprenants et à la multiplicité des intervenants de l'éducation.

L'étude confirme ainsi le continuum entre les régions de l'espace professionnel élaboré, construit, par les enseignants. L'expertise consisterait ainsi à savoir de mieux en mieux prendre en compte, à la fois, la centration sur les acquisitions scolaires et les interactions avec les divers intervenants de l'éducation. C'est ce que note Tardif (in Marcel & al. 2007) : plutôt que d'opposer la classe et le travail collectif, il s'agit de comprendre comment s'articulent les connaissances et les pratiques relatives à ces deux facettes du métier enseignant.

Deux facteurs de développement professionnel, de transformation des conceptualisations dans le sens d'une prise en compte plus pertinente des différents éléments de la situation, apparaissent donc au sortir de cette étude : l'expérience et l'implication (Grangeat, & Gray, 2008). Cependant, l'implication des acteurs dans un travail collectif joue un rôle plus important que celui de la durée de l'expérience : quel que soit leur âge, les acteurs impliqués dans des projets collectifs ont les conceptualisations les plus expertes –c'est-à-dire plus aptes à prendre en compte à la fois les exigences d'acquisition de savoirs et celles de construction de connaissances par tous les élèves. C'est aussi ce que conclut Tardif (in Marcel & al. 2007) : les pratiques collectives, et les conceptualisations afférentes, sont portées par les organisations scolaires et leur évolution.

Il est alors important de comprendre comment l'implication  travail collectif contribue à modifier les conceptualisations et les pratiques réelles.

***Comprendre le système d'activité des acteurs***

Comprendre les pratiques réelles conduit à se poser la question de l'unité d'activité prise en compte. La section précédente a montré, en effet, que ni l'observation des résultats de l'action ni l'analyse des propos de la personne sur son action ne peuvent suffire. Pour dépasser ce problème, nous nous référons à la théorie de l'activité qui étudie l'activité professionnelle comme un système.

*La théorie de l'activité*

L'activité d'une personne peut être vue comme étant organisée selon un ensemble de facteurs qui représentent son système d'activité (Engeström, 2001). Ce système est organisé autour d'un premier axe qui met en relation la personne, les buts qu'elle se fixe et les effets sur l'objet de l'action qui donnent sens à cette action (cf. Figure 2). Cet axe est d'abord modulé par les artefacts, notamment informatiques, dont la personne dispose pour agir : l'action varie selon la nature de ces artefacts et la manière dont ils sont intégrés par la personne. Cet axe est également modulé par le collectif qui est représenté par la communauté à laquelle appartient la personne, par l'organisation collective (la division du travail notamment), par les règles qui sont imposées aux acteurs ou que ceux-ci se donnent. Ces trois éléments modifient les acteurs et leurs buts et, donc, les effets de l'action.

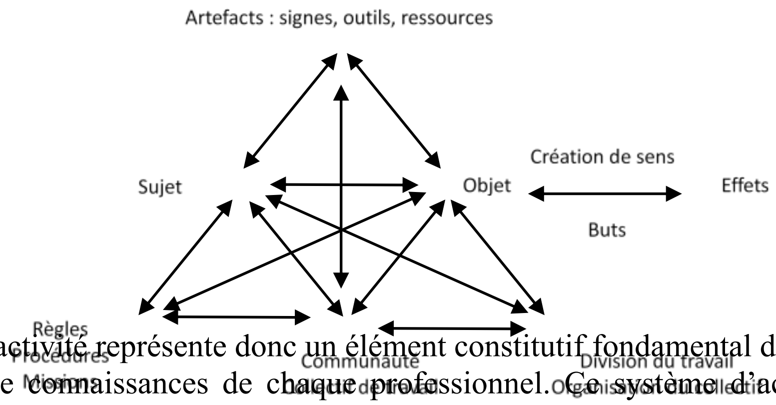



Figure 2 : Le système d'activité de la personne ou du collectif au travail (d'après Engeström, 2001).

Ce système d'activité représente donc un élément constitutif fondamental dans le processus de construction de connaissances de chaque professionnel. Ce système d'activité articule une situation, des ressources, un but, des règles d'action et des connaissances. Chaque personne construisant son propre système, le travail collectif, lorsqu'il est pertinent, conduit à un rapprochement des points de vue individuels afin d'élaborer une représentation partagée de la situation, de bâtir un référentiel commun permettant de partager le sens des situations vécues dans et par le collectif.

Attachons-nous, tout d'abord, à identifier l'élément constitutif de base permettant de comprendre l'organisation des connaissances professionnelles des acteurs, et notamment des enseignants.

*Identifier les composants des connaissances professionnelles des enseignants.*

Les sections précédentes conduisent à identifier les unités élémentaires des systèmes de connaissances qui contribuent à guider les actions des individus, isolément ou collectivement, comme des unités qui combinent, d'un côté, des savoirs théoriques, des savoir-faire et des savoirs procéduraux, qui comprennent l'utilisation des artefacts, des ressources matérielles inscrites dans la situation, et, de l'autre, des buts qui sont issus des prescriptions et des mobiles personnels. A la suite de Boreham (2002), je suggère de les nommer savoir-processus.

Le savoir-processus, qui est une unité identifiable du système de représentations de l'activité du sujet, est constitué de quatre éléments (Grangeat, 2011) :

- *Un indice* : l'information tirée de la situation par le sujet est qui est jugée pertinente en fonction du but fixé, individuellement ou collectivement, et du moment de l'action. Il concerne le *quoi* repérer dans la situation (*e.g.* l'attention des apprenants décroche).
- *Un but et des sous-buts* : les anticipations qui représentent les mobiles de l'activité des acteurs, individuellement ou collectivement. Ils concernent le *pour quoi* de l'action (*e.g.* pour maintenir la concentration).
- *Une ou des règles d'action* : les stratégies d'action pratiques, déclenchées par l'indice et orientées par le but fixé, qui consistent à décider de l'action, à prendre de l'information sur son déroulement et à contrôler son aboutissement. Elles concernent le *comment* de l'action (*e.g.* organiser un travail en binômes).
- *Des connaissances de référence* : les connaissances, individuelles ou collectives, qui permettent de rapprocher une situation d'une autre, en tenant compte des similitudes et des singularités, afin de décider et de justifier une stratégie d'action. Elles concernent le *pourquoi* de l'action (*e.g.* changer d'activité relance souvent l'intérêt).

Cet élément constitutif des compétences représente bien un savoir car il peut se verbaliser, se discuter et se transmettre. L'élaboration de tels savoirs est au cœur des échanges entre pairs ou entre stagiaires et tuteurs, lorsque se posent entre eux des questions pratiques (e.g. dis-moi ce que je dois regarder et faire pour que cette séance marche bien). Cet élément concerne bien les processus car les savoirs en question ne sont pas uniquement des savoir-faire qui ne seraient utiles que pour une conjoncture pratique donnée, mais prennent en compte la dynamique de la situation, son passé et son devenir, même sur un empan assez court (e.g. alors la séance d'avant, j'avais fait ça, donc là, je vais commencer par…).

Ce savoir-processus est fort proche du concept de schème élaboré par Vergnaud (1996) ; il s'en distingue essentiellement par l'importance donnée aux indices pris dans la situation par l'acteur. Il s'inscrit également dans la perspective de la théorie de l'activité puisque chaque élément constitutif du savoir-processus est un élément du système d'activité de la personne dans une situation donnée (cf. figure 3).

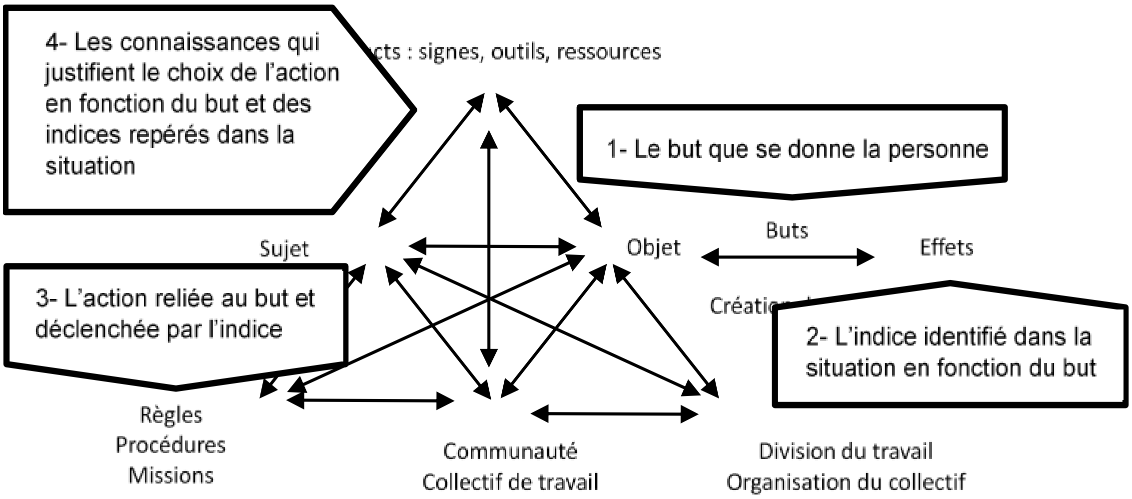



Figure 3 : Les éléments du savoir-processus dans le système d'activité de la personne ou du collectif

*Un exemple de système d'activité*

Pour comprendre l'utilité de ce modèle pour identifier les éléments constitutif des connaissances professionnelles et analyser une situation de travail collectif, nous prendrons l'exemple de l'étude de Prieur, Sanchez et Aldon (2011).

Les sujets, les acteurs, sont une équipe d'enseignants de sciences en classe de 2d. L'organisation du travail les conduit à mettre en place un enseignement commun (Module de Pratiques Scientifiques). Leur objet commun, c'est de faire comprendre aux élèves le lien entre cycle du carbone et réchauffement climatique. Dans la communauté, une enseignante de SVT avait déjà conduit une expérience semblable avec une équipe de l'Institut Français de l'Education. L'équipe a des savoir-faire en termes de modélisation et d'investigation en classe. Les ressources de l'équipe vont donc s'étoffer par une nouvelle coopération avec les chercheurs de l'IFE et des outils communs vont être construits (diagramme pour représenter la place de chaque discipline dans le projet, carnet de bord de l'élève pour suivre les progressions, plateforme de mutualisation des supports de cours et des références scientifiques). Les effets de l'action sont de deux ordres. Premièrement, les enseignants étoffent leur répertoire d'actions : ils identifient des concepts communs à toutes les disciplines, ils utilisent des grilles communes pour la conception et l'observation des situations de classe. Deuxièmement, sur les élèves, qui dans leur grande majorité disent qu'ils ont identifié la complémentarité et l'articulation des disciplines scientifiques.

***En bref : travail collectif et développement professionnel***

En résumé, le travail collectif peut prendre différentes modalités qui ont des fonctions différentes. La coopération et la coaction sont étudiées ici.

Le travail collectif contribue à la construction de connaissances professionnelles des acteurs à travers deux processus reliés : l'élaboration de conceptualisations sur l'action et la production de résultats par l'action. Ces deux processus transforment les acteurs et la situation dans laquelle s'inscrivent leurs actions.

Les connaissances professionnelles sont ainsi un élément du système d'activité de la personne. Elles peuvent être identifiées sous forme d'un savoir processus qui est composé des buts de la personne, des indices repérés dans la situation pour déclencher l'action, du répertoire des actions potentielles et des connaissances de références (ressources, concepts, outils) qui justifient le choix de l'action. Ces savoirs-processus sont identifiables par la recherche.

Ces connaissances professionnelles ne sont ni isolées ni strictement individuelles. Elles se constituent en systèmes autour des dimensions essentielles de l'activité. Elles nourrissent les représentations opératives partagées, les référentiels communs, les mondes, qui se construisent dans les collectifs de manière à réguler l'action des différents acteurs.

Ces référentiels sont modulables en fonction de l'espace professionnel pris en compte. Ils peuvent se fermer sur le noyau dur du métier ou s'ouvrir à la prise en compte de la variabilité des situations. L'expertise consiste à jouer à la fois sur ces deux modalités : la centration sur les tâches fondamentales du métier et l'ouverture vers les points de vue des partenaires et les différences entre les destinataires de l'action.

Cette ouverture difficile et complexe est encouragée par la participation à des projets collectifs.

## Comprendre les activités des enseignants face aux démarches d'investigation

Nous allons maintenant mobiliser ces concepts pour mieux comprendre une situation particulière : les connaissances requises par les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation.

### *Le modèle issu du projet européen S-TEAM*

L'enseignement des sciences fondé sur les démarches d'investigation (ESFI) se développe dans de nombreux pays, notamment en Europe depuis la publication du rapport *Science Education Now!* (Rocard et al. 2007). Ce type d'enseignement combine quatre caractéristiques principales :

- une activité de résolution de problèmes ouverts ;
- une part significative d'expérimentation et de recherche d'information ;
- une possibilité d'autorégulation des apprentissages, laissant plus d'autonomie aux élèves ;
- un appui sur les débats scientifiques entre pairs.

A l'évidence, l'ESFI ne consiste pas en une procédure linéaire que les enseignants pourraient appliquer, en suivant une démarche toujours identique. Suite à la série de séminaires organisée dans les quinze pays participant au projet S-TEAM, il n'apparaît aucune définition claire des ESFI. En fait, l'ESFI est défini à partir d'une combinaison de caractéristiques qui représentent des lignes directrices et laissent une place importante à l'autonomie des acteurs, les professeurs comme les élèves (Larcher & Peterfalvi, 2006). Cette définition n'est pas pour autant compliquée car l'on conçoit assez bien comment pourraient jouer ces différentes caractéristiques, afin de permettre aux élèves de s'engager dans des apprentissages scientifiques. Ces stratégies d'enseignement sont cependant complexes dans la mesure où elles mettent en jeu plusieurs variables qui interagissent entre elles, parfois de manière indépendante des acteurs principaux. Cette complexité est toujours difficile à aborder, par la recherche, par la formation ou par la pratique.

Nous avons donc cherché des critères permettant d'identifier l'ESFI. Il ne s'agit pas de figer une définition qui aboutirait à une procédure normée que les enseignants devraient appliquer mais de proposer une modélisation de ces stratégies d'enseignement en tenant compte de leur inhérente complexité. Ces modélisations devraient permettre de conduire des recherches plus précises. Elles devraient aussi permettre aux enseignants et aux formateurs de situer leur activité dans un éventail de possibles et ceci de manière réfléchie, raisonnée, justifiée. Il s'agit bien de rendre ces acteurs plus experts en leur fournissant des outils qui sont issus des recherches en éducation et qui leur permettent de conduire leur activité et de l'améliorer en prenant en considération la complexité des stratégies d'enseignement reconnues comme efficaces.

Puisque la situation est complexe, nous avons d'abord cherché à déterminer les dimensions critiques – les axes structurants – qui permettent d'identifier une stratégie ESFI parmi d'autres manières d'enseigner. Dans un premier temps, deux types de textes ont été analysés. Il s'agit, d'abord, de l'ensemble des productions du projet européen S-TEAM. D'une manière complémentaire, ont été pris en compte des écrits destinés aux enseignants de sciences et qui présentent ou discutent les stratégies d'enseignement fondées sur l'investigation.

Ces analyses conduisent à proposer un modèle en six dimensions critiques, en six axes représentant des continuums sur lesquels les acteurs de l'enseignement scientifique peuvent situer des pratiques réalisées ou observées. Ces dimensions représentent des continuums sur lesquels se situent des pratiques de plus en plus complexes : au départ, c'est la transmission d'une notion qui prime ; à l'autre bout du continuum, c'est l'apprentissage de tous les élèves qui organise en priorité l'activité de classe. Présentons succinctement ces six dimensions et leur continuum (pour plus de précisions, voir Grangeat, 2013a) :

La première dimension concerne l'origine du questionnement. Elle correspond au premier moment de la démarche d'investigation proposée par les programmes officiels français pour le collège. À un premier pôle du continuum, l'enseignant propose le questionnement initial et fait en sorte qu'il devienne celui des élèves ; à l'autre extrémité, l'enseignant construit une situation qui permettra aux élèves d'élaborer des problèmes, par exemple à partir d'un thème commun ou d'une sorte d'intrigue.

La deuxième dimension correspond à la nature du problème qui motive l'investigation. Elle correspond au deuxième moment de la démarche d'investigation des programmes. D'un côté du continuum, ce problème est fermé et les élèves suivent un protocole alors qu'à l'autre extrémité de cet axe, le problème est ouvert et les élèves ont à déterminer leur protocole et à choisir le matériel pour tester leurs hypothèses.

La troisième dimension est relative à la responsabilisation des élèves dans la conduite de la démarche d'investigation. Elle comprend des éléments des troisième et quatrième moments du programme français. Le premier mode du continuum est caractérisé par un fort guidage de l'enseignant. L'opposé est défini par une plus grande part laissée à l'autorégulation de leurs apprentissages par les élèves.

La quatrième dimension concerne la prise en considération de la diversité des élèves. Elle se retrouve dans le quatrième moment de la démarche d'investigation. Le premier mode consiste à gérer le comportement de certains élèves pour les rendre actifs dans la démarche d'investigation. L'autre consiste à adapter la situation de manière à prendre en compte leurs spécificités.

La cinquième dimension concerne le développement de l'argumentation scientifique. Elle recoupe les moments cinq et six du canevas proposé par le programme français. Le premier mode du continuum consiste à faciliter la communication entre élèves dans les petits groupes de travail. Le mode ultime consiste à leur permettre de justifier leur point de vue en référence à des résultats ou à des savoirs.

La sixième dimension concerne l'explicitation des savoirs découlant de l'investigation. Elle correspond aux dernières étapes du canevas officiel français. Le premier mode consiste pour les enseignants à énoncer leurs attentes pour la séance en cours. Le mode ultime comporte l'explicitation des savoirs et des métaconnaissances nécessaires à un réinvestissement des acquis de la séance et, plus largement, de la séquence.

Les recherches sur le développement professionnel conduisent à compléter ce modèle par deux modes intermédiaires. Ces modes de réalisation des ESFI sont obtenus à la suite de l'étude de vingt séances de classe. La population de l'étude est composée de six enseignants ordinaires n'ayant pas récemment suivi de formation aux ESFI, de six enseignants de sciences débutants ayant participé à une formation spécifique (Leroy, 2011), ainsi que de huit enseignants dits « impliqués » car ils participent à la conception et à la réalisation d'actions de formation en direction de leurs collègues. L'analyse des vidéos et des entretiens avec les enseignants a permis de préciser le modèle tiré de l'analyse des prescriptions et des recherches internationales. Les deux études se complètent.

Nous avons identifié l'ensemble des savoirs-processus des 20 enseignants. Tous ces savoirs-processus extraits des observations et des entretiens [N=446] ont pu être associés à un des quatre modes de l'une des six dimensions du modèle. Les quatre modes des dimensions de ce modèle ont ainsi été précisés par l'analyse de l'activité effective. Cette étude permet donc de définir un cadre de 24 éléments, organisé en 6 dimensions comportant chacune 4 modes (voir Annexe 1). Ces 24 modes d'enseignement permettent de décrire l'enseignement observé.

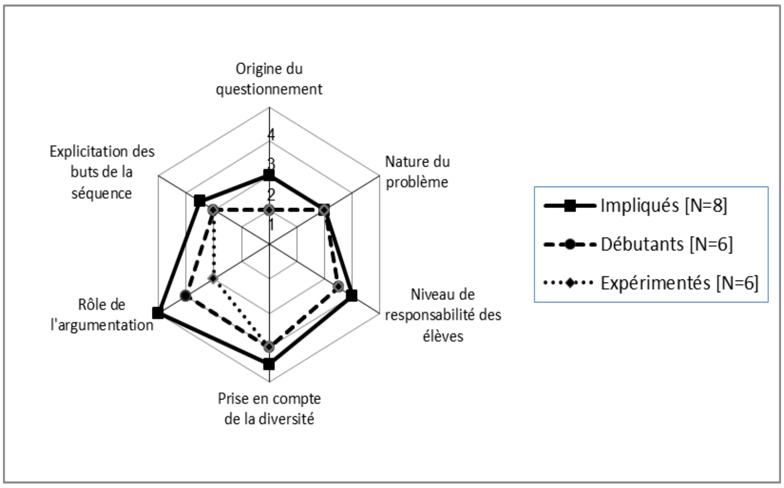



Figure 3 : Score médian de chaque groupe d'enseignants selon chaque dimension des ESFI

L'activité des enseignants de l'étude peut être positionnée dans ce modèle ESFI à six dimensions. Sur chaque dimension, nous avons cherché le palier maximum sur lequel se situait chaque acteur de l'étude. Ces résultats peuvent permettre de répondre à plusieurs questions et notamment à celle des écarts entre les trois catégories d'enseignants étudiées (impliqués, ordinaires, débutants) et des effets de l'inscription dans un travail collectif.

Les enseignants qui participent à un travail collectif autour de questions professionnelles précises adoptent plus de modes ouverts vers les apprentissages et les élèves que les autres (cf. figure 3). Ceci est flagrant pour les enseignants impliqués dont les scores médians sont toujours plus du côté « apprentissage » que ceux des autres groupes. Ce résultat s'observe aussi pour les débutants de l'étude qui opèrent selon des modes au moins semblables aux enseignants expérimentés ; rappelons que ces débutants ont suivi des modules de formation initiale développant l'argumentation (Leroy, 2011).

### *En bref : une modélisation des ESFI selon six dimensions*

En résumé, l'activité enseignante dans une situation ESFI peut être organisée selon six dimensions critiques :

- l'origine du questionnement ;
- la nature du problème ;
- la responsabilisation des élèves dans l'investigation ;
- la prise en compte de leur diversité ;
- le rôle de l'argumentation ;
- l'explicitation des savoirs découlant de l'investigation.

Chacune de ces dimensions constitue un continuum sur lequel les stratégies d'enseignement peuvent être positionnées. Les premiers modes de ce continuum correspondent à des stratégies caractérisées prioritairement par une centration sur l'enseignant et une prépondérance accordée à la transmission de contenus. À l'inverse, les modes terminaux correspondent à des stratégies plus complexes, centrées sur les apprenants et la maîtrise de connaissances et de compétences spécifiques par tous les élèves. Ces modes ne sont ni exclusifs ni opposés : se positionner sur un mode ouvert aux apprentissages nécessite de prendre en compte la transmission de contenus ; une personne peut se situer sur un premier mode « transmission » pour une dimension et sur un mode « apprentissage » pour une autre.

Les différentes études montrent que, sous certaines conditions, l'inscription des enseignants dans un travail collectif soutient et stimule le développement professionnel. Deux conditions sont importantes.

La première, c'est que le travail collectif vise à résoudre une question professionnelle précise. Mettre ensemble des personnes pour traiter de généralités est rarement productif en termes de changement des pratiques ; à notre connaissance les recherches n'étayent pas cette idée. La seconde, c'est que des ressources existent pour permettre au collectif de se développer ; ces ressources peuvent être documentaires, à travers des plateformes d'échanges (Gueudet, Trouche, Aldon, 2011), ou personnelles, à travers des interactions avec des partenaires de l'école, des chercheurs ou des formateurs (Grangeat, 2008). Ceci est cohérent avec ce que nous avons présenté dans la première section et se retrouve dans de nombreuses études internationales (Gueudet et Lebaud, 2013 ; Grangeat, 2013b).

Ce développement s'organise selon les dimensions principales de l'activité et il suit des continuums. Aucun enseignant ne peut agir en étant tout le temps au maximum : l'expertise consiste plutôt à trouver la pratique la plus efficace en jouant sur la totalité de ces sortes d'échelles et de se positionner de manière réfléchie sur le mode le plus convenable en fonction de la notion enseignée, des difficultés envisagées, de la place de la séquence dans la progression et de la classe concernée.

Deux conséquences pour la formation découlent de ces résultats. Il s'agit, d'une part, d'instaurer des collectifs d'enseignants et d'experts pour résoudre des questions professionnelles ; certaines interactions pouvant se dérouler à distance. Il s'agit, d'autre part, de conduire les enseignants à faire des choix de positionnement réfléchis, en fonction de l'expérience qu'ils ont du métier (« ce qui marche ») et surtout en fonction des savoirs sur l'activité qui ont été accumulés par la recherche (mode de questionnement, type de problème, activité d'argumentation, institutionnalisation des acquis visés, etc.). C'est ce que nous avons tenté à travers le LéA EvaCoDICE, un projet de coopération à propos de l'évaluation dans les démarches d'investigation.

**Un projet de coopération à propos de l'évaluation en sciences**

Les Lieux d'éducation Associés (LéA) sont des établissements qui conduisent une recherche en conventionnement avec l'institut Français d'Education (IFE). A l'intérieur de thématiques larges, chaque LéA traite une question spécifique, celle du LéA EvaCoDICE concerne l'évaluation par compétences dans les démarches d'investigation au collège et à l'école (d'où son intitulé). Il regroupe 15 enseignants de deux collèges et de quatre écoles, des inspecteurs, des formateurs de l'ESPE et des enseignants-chercheurs (L.S.E, Grenoble ; S2HEP, Lyon).

Le LéA EvaCoDICE se caractérise par une articulation forte entre trois entités : les écoles et les collèges, l'inspection et le rectorat (CARDIE) et enfin l'équipe de recherche et de formation. Le projet a été impulsé par l'équipe de recherche et le CARDIE, puis relayé et soutenu par les chefs d'établissement et l'Inspectrice de circonscription du 1er degré. Les enseignants associés ont répondu très favorablement à cette proposition.

***Objectifs et fonctionnement***

Les objectifs du LéA EvaCoDICE s'organisent autour de trois questions :

- Les effets de différents outils d'évaluation sur les élèves (motivation, autorégulation).
- Les conditions de mise en œuvre des enseignements scientifiques fondés sur l'investigation (ESFI) et des évaluations formatives qui favorisent l'autorégulation des apprentissages.
- Les modalités de coopération dans une dynamique école-collège.

Le travail entre les enseignants et l'équipe de recherche repose sur deux modalités de travail : trois journées de regroupement en présentiel et des interactions à distance grâce à une plateforme.

Les journées de regroupement ont été fondées sur les principes d'une DI-formation identifiés par Gueudet et Lebaud (2013) : chaque journée est orientée par un problème commun ; les participants ont accès à des ressources partagées ; la session met en avant les débats argumentatifs à régulation épistémique ; les résultats des travaux des groupes sont publiés ; chaque session comporte une synthèse finale et une précision des buts pour les activités à venir.

La plateforme est utilisée pour partager du matériel de classe et garder trace des journées de regroupement.

Un des objectifs du LéA EvaCoDICE est de produire des situations d'enseignement. Pour chaque discipline, plusieurs séquences ont été discutées sur la plateforme ou lors de réunions puis testées. Ces situations seront partagées par la suite.

De plus, l'ingénierie des journées de regroupement, en forme de DI-Formation, pourrait alimenter des formations de formateurs. Il s'agirait de concevoir des ingénieries de formation qui engagent les formés dans une transformation de leurs approches et de leurs pratiques.

Enfin, une thèse[16] étudie les effets, sur les apprentissages, des dispositifs testés dans le LéA. Il s'agit de comprendre en quoi les modalités de l'évaluation formative influent sur les processus d'autorégulation de leurs apprentissages par les élèves.

[16] Conduite par Céline Lepareur et dirigée par Michel Grangeat, cette thèse bénéficie d'une allocation doctorale de recherche de la région Rhône-Alpes (Arc5). Elle est intégrée au projet européen ASSIST-ME (FP7-SiS-321428).

### *Effets en cours de projet*

A la fin de la première année, les enseignants ont été interrogés quant au fonctionnement et aux apports du LéA EvaCoDICE. Le recueil de données est sous forme de focus groupe : trois réunions, une par établissement et une pour les écoles, ont permis de répondre aux questions d'un questionnaire portant sur les différents éléments du système d'activité (cf. section précédente).

Selon les enseignants, le LéA est un levier pour échanger avec d'autres personnes, collègues, formateurs, chercheurs, étudiants et inspecteurs. Il génère un phénomène de groupe qui permet de s'impliquer dans le processus : on se parle des contenus des cours. Il adopte une forme qui libère vis-à-vis des démarches d'investigation : on pose un problème commun et on y répond. Il permet d'anticiper les réactions des élèves face à une tâche par l'apport des savoirs didactiques sur ces questions. Le fait d'être filmé encourage à améliorer les séquences : l'un essaie une séquence, après on l'a fait évoluer, un autre essaie à nouveau.

## Conclusion : le travail collectif, une ressource potentielle

Au terme de ce texte, le travail collectif apparaît comme une ressource potentielle pour le développement des compétences professionnelles.

Ce travail peut prendre plusieurs formes parmi lesquelles la coopération apparaît comme particulièrement fructueuse dans la mesure où elle associe des personnes aux compétences variées pour atteindre un but qui leur est commun. La coaction ouvre des perspectives fructueuses mais qui restent à explorer.

Un des déterminants de la réussite du travail collectif est donc d'identifier ce but commun : le fait de chercher à résoudre ensemble un problème professionnel délimité apparaît comme efficace, dans la mesure où ce type de résolution correspond à ce que l'on sait de la construction des connaissances professionnelles.

Le développement professionnel n'est pas linéaire. Il apparaît plutôt comme un positionnement sur les dimensions principales de l'activité, selon des continuums allant de pratiques centrées prioritairement sur la transmission de contenus jusqu'à des pratiques ouvertes à la variabilité des processus d'apprentissage des différents élèves de la classe. L'expertise consiste à jouer sur l'ensemble des continuums, à équilibrer les modes « transmission » et « apprentissages ».

La formation aurait donc à se focaliser sur deux points essentiels. Premièrement, permettre de connaître, pour chaque notion, les difficultés d'apprentissage des élèves telles qu'elles sont identifiées par la recherche en didactique : il s'agit d'aider les enseignants à préparer les séances de manière plus prospective, à poser des diagnostics pertinents sur les situations de classe et à identifier les indices précis qui déclencheront les actions efficaces. Deuxièmement, permettre de connaître, pour chaque type d'activité de classe, ce que sont les modes d'action des enseignants de différentes disciplines : en confrontant les cultures disciplinaires, il s'agit de créer des référentiels communs qui permettent aux acteurs d'un même collectif de partager des répertoires d'action plus larges et plus souples de manière à mieux soutenir les processus d'apprentissage de tous les élèves, d'une section ou d'un établissement, dans toute leur diversité.

## Références bibliographiques


Boreham, N. (2002). Professionalization and Work Process Knowledge in the UK's national health service. In N. Boreham, M. Fisher & R. Samurçay (Eds.), *Work Process Knowledge* (pp. 171-182). London: Routledge.

Boreham, N., Samurçay, R., & Fischer, M. (Eds) (2002). *Work process knowledge*. London: Routledge.

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14 (*1*), 133-156.

Fischer, M., & Boreham, N. (2004). Work process Knowledge: origins of the concept and current development. In M. Fischer, N. Boreham & B. Niham (Éds), *European perspectives on learning at work – The acquisition of work process knowledge* (pp. 12-53). Luxembourg: CEDEFOP.

Gibouin, A. (2004). Construction de référentiels communs dans le travail coopératif. In J.M. Hoc & F. Darses (Eds.), *Psychologie ergonomique : tendances actuelles* (pp. 119-140). Paris : PUF.

Gueudet, G., Trouche, L., & Aldon, G. (2011). La conception et les usages de ressources en ligne comme moteur et révélateur du travail collectif des enseignants. In M. Grangeat (Éd.), *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves* (pp. 151-182). Lyon: École Normale Supérieure.

Grangeat, M. (2008). *Coopérations et partenariats pour enseigner. Pratiques de l'éducation prioritaire*. Créteil : CRDP-SCEREN.

Grangeat, M. (2010). Les régulations métacognitives dans l'activité enseignante : rôle et modes de développement. *Revue des sciences de l'éducation*, *36*(1), 233-253.

Grangeat, M. (2011). Le travail collectif enseignant : éléments de modélisation du développement professionnel. In M. Grangeat (Ed.). *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves* (pp. 79-106). Lyon : Ecole Normale Supérieure.

Grangeat, M. (2013a). Modéliser les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : développement des compétences professionnelles, apport du travail collectif. In M. Grangeat (Ed.), *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation* (p. 155-184). Grenoble : Presses Universitaires.

Grangeat, M. (2013b). Elaborating a Model for a better Understanding of Science Teachers' Approaches and Practices towards Inquiry Based Science Teaching and Learning. In M. Honerød Hoveid and P. Gray (Eds.). *Inquiry in Science Education and Science Teacher Education* (p. 55-82). Trondheim: Tapir.

Grangeat, M., & Besson, C. (2006). Analyse du métier d'enseignant sous l'angle des activités réflexives : conduite empirique ou proactive de l'activité ? *Formation et pratiques d'enseignement en questions, Revue des Hautes Écoles Pédagogiques,* 3, 17-31

Grangeat, M., & Gray, P. (2007). *Factors influencing teachers' professional competence development. Journal of Vocational Education & Training*, 59(4), 485-501.

Grangeat, M., & Gray, P. (2008). Teaching as a collective activity: analysis, current research and implications for teacher education. *Journal of Education for Teaching*, *34* (3), 177-189

Grangeat, M., Rogalski, J., Lima, L., & Gray, P. (2009). Analyser le travail collectif des enseignants : effets du contexte de l'activité sur les conceptualisations des acteurs. *Revue Suisse des Sciences de l'Éducation, 31* (1), 151-168.Leplat, J. (2000). L'environnement de l'action en situation de travail. In J.M. Barbier, & al., *L'analyse de la singularité de l'action* (pp.107-132). Paris : PUF.

Larcher, C., & Peterfalvi, B. (2006). Diversification des démarches pédagogiques en classe de sciences. *Le Bulletin de l'Union des Physiciens*, (886), 825-835.

Leroy, N. (2011). Le volet français du projet S-TEAM : évaluation des effets d'un dispositif de formation incitatif à la mise en œuvre des démarches d'investigation en classe. In M. Grangeat (Éd.), *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves* (pp. 213-225). Lyon: École Normale Supérieure.

Marcel, J.F. (2005). Analyse de l'espace professionnel de l'enseignant du primaire en France. In J.F. Marcel & T. Piot*, Dans la classe, hors de la classe. L'évolution de l'espace professionnel des enseignants* (pp. 129-142). Paris : INRP.

Marcel, J.F., Dupriez, V., Périsset Bagnoud, D., & Tardif, M. (2007). *Coordonner, collaborer, coopérer : de nouvelles pratiques enseignantes*. Bruxelles : De Boeck.

Pastré, P., Mayen, P., & Vergnaud, G. (2006). La didactique professionnelle. *Revue Française de Pédagogie*, *154*, 145-198.

Prieur, M., Sanchez, E., Aldon, G. (2011) Enseignement scientifique co-disciplinaire en classe de seconde : éléments à prendre en compte pour sa mise en œuvre. in M. Grangeat *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique - Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves* (pp. 107-122). Lyon : ENS.

Rabardel, P., (2005). Instrument subjectif et développement du pouvoir d'agir. In P. Rabardel & P. Pastré (Eds.), *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement* (pp. 11-30). Toulouse : Octarès.

Rocard, M., Cesrmley, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Herniksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe*. Bruxelles: European Commission.

Rogalski, J. (1994). Formation aux activités collectives. *Le Travail Humain, 57* (4), 425-443.

Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherche en didactique des mathématiques, 23* (3)*,* 343-388.

Samurçay, R., & Rabardel, P. (2004). Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences, propositions. In R. Samurçay & P. Pastré (Eds.), *Recherches en didactique professionnelle* (pp. 163-180). Toulouse : Octarès.

Rogalski, J. (2005). Le travail collaboratif dans la réalisation des tâches collectives. In J. Lautrey & J. F. Richard (Éds), *L'intelligence* (pp. 147-159). Paris: Hermès.

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. In J.M. Barbier (Eds.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 275-292). Paris : PUF.

## Annexe 1 : Le modèle à 6 dimensions des enseignements scientifique fondés sur l'investigation

| Dimension 1 : qui est à l'origine du questionnement ? | | | |
|---|---|---|---|
| Mode 1.1 | Mode 1.2 | Mode 1.3 | Mode 1.4 |
| L'enseignant apporte le questionnement initial | L'enseignant propose un questionnement initial en lien avec l'expérience des élèves | Les élèves construisent un questionnement à partir d'une situation proposée par l'enseignant | Les élèves construisent un questionnement à partir d'un thème qui dépasse la seule séance en cours |

| Dimension 2 : quelle est la nature du problème ? | | | |
|---|---|---|---|
| Mode 2.1 | Mode 2.2 | Mode 2.3 | Mode 2.4 |
| L'enseignant propose un protocole à suivre étape par étape | L'enseignant propose une situation connue permettant aux élèves de concevoir un protocole | Les élèves disposent d'un matériel limité pour répondre à une consigne ouverte | Les élèves disposent d'un matériel libre pour répondre à une consigne ouverte |

| Dimension 3 : quelle responsabilité ont les élèves ? | | | |
|---|---|---|---|
| Mode 3.1 | Mode 3.2 | Mode 3.3 | Mode 3.4 |
| L'enseignant met en place les étapes de la démarche d'investigation | L'enseignant amène les élèves à concevoir plusieurs procédures | Les élèves sont responsables du processus d'investigation | Les élèves disposent d'outils d'auto-évaluation conçus par ou avec l'enseignant |

| Dimension 4 : que faire de la diversité des élèves ? | | | |
|---|---|---|---|
| Mode 4.1 | Mode 4.2 | Mode 4.3 | Mode 4.4 |
| L'enseignant gère le comportement de certains élèves pour les rendre actifs | L'enseignant modifie la tâche pour maintenir l'engagement de certains élèves | Chaque groupe ou un nombre significatif d'élèves bénéficie du guidage de l'enseignant | Certains élèves, ayant des besoins spécifiques, bénéficient d'une adaptation de la situation |

| Dimension 5 : quelle est la place de l'argumentation ? | | | |
|---|---|---|---|
| Mode 5.1 | Mode 5.2 | Mode 5.3 | Mode 5.4 |
| L'enseignant facilite la communication entre les élèves dans les groupes ou la classe | L'enseignant fait communiquer à la classe les propositions des élèves | Les élèves sont encouragés à prendre en compte les arguments d'autrui | Les élèves sont encouragés à justifier leurs réponses par des connaissances ou des résultats |

| Dimension 6 : quel niveau d'explicitation des savoirs visés par l'enseignant ? | | | |
|---|---|---|---|
| Mode 6.1 | Mode 6.2 | Mode 6.3 | Mode 6.4 |
| L'enseignant énonce ses attentes pour la séance en cours | L'enseignant fait le bilan de la séance à propos des savoirs | Les élèves expliquent ce qu'ils ont appris durant la séance | Les élèves disposent explicitement des savoirs nécessaires à un réinvestissement des acquis |

**Brigitte Grugeon-Allys**

brigitte.grugeon@orange.fr , **LDAR, université Paris Diderot, ESPE, UPEC**

**Françoise Chenevotot-Quentin**

chenevotot.francoise@neuf.fr , **LDAR, Université Paris Diderot, ESPE, Université d'Artois**

**Elisabeth Delozanne**

elisabeth.delozanne@upmc.fr , **LIP 6, UPMC-Paris-Universitas**

# De la conception aux usages de ressources dédiées à l'enseignement différencié en algèbre élémentaire

**Résumé.**
Cet article porte sur la problématique et les résultats issus de projets pluridisciplinaires en EIAH (Environnement Informatique d'Apprentissage Humain), les projets Pépite, Lingot et PépiMep[17], fruits d'une longue collaboration entre chercheurs en didactique des mathématiques du LDAR (Université Paris Diderot – Paris 7), chercheurs en informatique du LIUM (Université du Maine) et de l'équipe Mocah du LIP6 (UPMC-Sorbonne Universités), enseignants et formateurs des IUFM de Créteil, Rennes et d'Amiens, du groupe IREM de Paris Diderot « Différenciation de l'enseignement de l'algèbre » (Delozanne & al, 2010). Ces projets visent d'une part à concevoir des outils à destination des enseignants pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages des élèves en algèbre élémentaire, en fin de scolarité obligatoire et, d'autre part, à en évaluer les usages réels en classe par les enseignants et leur influence sur l'activité des élèves en algèbre. Après un historique rapide des travaux, nous aborderons les fondements théoriques de nos recherches. Puis nous illustrerons, par des exemples précis, la démarche de conception itérative et participative de PépiMep, montrant ainsi l'apport et l'importance des échanges entre les communautés de chercheurs en didactique, en informatique, les développeurs de l'association Sésamath18 et les enseignants.

## Introduction

Cet article propose une synthèse d'une recherche pluridisciplinaire en EIAH, menée depuis 1995, sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire dans la transition entre le collège et le

[17] Le projet *Pépite* a débuté à la fin des années 1990. Le projet *Lingot* a suivi de 2002 à 2005. Puis le projet *PépiMep* a bénéficié du soutien financier de la région Ile de France de 2010 à 2012.
[18] Site de l'association Sésamath : http://mathenpoche.sesamath.net/

lycée. Les objectifs globaux de cette recherche concernent, d'une part, la conception d'environnements informatiques à destination des enseignants pour faciliter la gestion de la diversité cognitive des élèves en classe, en particulier grâce à des outils de diagnostic et de régulation et, d'autre part, l'évaluation de leurs usages réels en classe par les enseignants et leur influence sur l'activité des élèves en algèbre. Ces travaux se situent au croisement des recherches en Didactique des Mathématiques, en Interaction Homme Machine (informatique) et ont mis en oeuvre une démarche de recherche spécifique en EIAH : une démarche itérative de conception. Il s'agit de s'appuyer sur l'expertise de chercheurs en didactique (L.D.A.R., université Paris Diderot-Paris 7)[19], en informatique (L.I.U.M, université du Maine[20] puis L.I.P.6, université Pierre et Marie Curie, Sorbonne universités)[21] mais aussi en psychologie et ergonomie cognitive (Laboratoire Cognition et Activités Finalisées, Université Paris 8)[22], de l'expertise de communautés de pratique (d'enseignants d'un Groupe IREM et de l'association Sésamath, de formateurs d'IUFM), pour concevoir des modèles informatiques en appui sur des modèles didactiques et développer des logiciels, tester les prototypes obtenus dans des classes réelles et en retour enrichir l'expertise didactique, l'expertise des communautés, l'expertise de conception d'EIAH. Cette démarche vise à obtenir des retombées tant sur les pratiques des professeurs que sur les apprentissages des élèves. Trois axes de recherche structurent les projets de recherche Pépite[23], Lingot[24] et PépiMep[25] : l'axe diagnostic, l'axe apprentissage et l'axe instrumentation de l'activité de diagnostic et de régulation.

L'enjeu de cet article est d'éclairer le jeu dialectique entre modélisations didactiques et modélisations informatiques et réciproquement en quoi une démarche itérative de conception en EIAH et des expérimentations en classe ont permis de faire évoluer les questions posées à la didactique des mathématiques. Nous dégageons des résultats de ces apports réciproques, tant en ce qui concerne la modélisation du diagnostic (tâches diagnostiques, profil de l'élève, géographie de la classe) que celle de familles de situations d'apprentissage ou de parcours d'enseignement différencié. Pour cela, nous présentons d'abord le positionnement scientifique, puis nous définissons quatre cycles de recherche liés à l'évolution des questions de recherche portant sur la conception du diagnostic et de parcours que nous illustrons, puis nous terminons par une conclusion et des perspectives de recherche.

## Positionnement théorique

Nous commençons par définir notre positionnement scientifique à la fois pour le champ de la didactique des mathématiques et pour celui de l'informatique. Tout d'abord, nous précisons nos choix concernant l'évaluation diagnostique.

### *Pratiques d'évaluation et diagnostic*

Qu'entend-on par évaluation diagnostique ? Quels types de pratiques d'évaluation fournissent des informations permettant un diagnostic plus opérationnel des connaissances mobilisées par les élèves pour résoudre des problèmes dans un domaine mathématique donné ?

[19] F. Chenevotot-Quentin, B. Grugeon-Allys, M. Artigue, C. Cazes, J. Pilet
[20] E. Delozanne, P. Jacoboni, D. Prévit
[21] E. Delozanne, N. El Kechaï
[22] J. Rogalski
[23] Projet *Pépite* mené en collaboration entre le L.I.U.M. de l'université du maine et le L.D.A.R. (ex DIDIREM) de l'université Paris Diderot-Paris 7 à partir de 2000
[24] Projet *Lingot* réalisé suite à l'appel à projet *Ecole et sciences cognitiques* 2003 "Les apprentissages et leur dysfonctionnement" de 2002 à 2005.
[25] Projet *PépiMep* réalisé suite à l'appel à projet PICRI 2009 soutenu par la région Ile de France de 2010 à 2012.

*Une évaluation multidimensionnelle*

L'article de Ketterlin-Geller, Leanne et Yavonoff (2009) compare les pratiques d'évaluation diagnostique portant sur l'analyse des procédures et des erreurs. Les auteurs en distinguent deux types : d'une part, des analyses de solutions d'élèves à des tests dédiés et, d'autre part, des évaluations diagnostiques cognitives utilisant des méthodes plus standardisées et des méthodes psychométriques. La première approche, unidimensionnelle, est peu propice à une analyse de la complexité de l'apprentissage et des relations entre les connaissances mobilisées. La seconde fournit des informations sur des attributs multidimensionnels caractérisant les processus cognitifs. Dans les deux cas, les pratiques d'évaluation s'appuient sur l'étude locale de conceptions erronées sur des tests isolés dans le but de les déstabiliser. Ces pratiques ne mettent pas en jeu une étude globale des cohérences de fonctionnement des élèves dans un domaine donné, ce qui nécessiterait l'analyse de réponses d'élèves à des tâches dans un champ conceptuel organisé (Grugeon, 1997).

Le diagnostic développé dans le cadre des projets pluridisciplinaires *Pépite*, *Lingot* et *PépiMep* vise au contraire une analyse globale multidimensionnelle des connaissances et de l'activité des élèves dans le domaine de l'algèbre élémentaire. Il s'appuie sur un diagnostic cognitif global et une évaluation des réponses des élèves (erreurs et procédures). Il n'utilise pas de modèles psychométriques mais se fonde sur une étude cognitive, épistémologique de l'algèbre élémentaire élargie à des études empiriques (Cf. § 1.2).

*Instrumentation de l'activité de l'enseignant*

Pour étudier les usages possibles d'un outil de diagnostic, nous nous situons dans le cadre de l'instrumentation et des travaux développés autour de la théorie de l'activité (Rogalski, 2008). Pour analyser l'instrumentation de l'activité de l'enseignant et les usages possibles d'outils de diagnostic en classe, nous envisageons deux contextes d'usage possibles : soit le diagnostic organisé par l'enseignant concerne la classe comme entité, soit il concerne les élèves en tant qu'individus ou en tant que groupes. Selon le contexte, le but du diagnostic est différent.

Lorsque le diagnostic est orienté vers la classe, sa visée concerne la régulation de l'activité de l'enseignant relativement au savoir à enseigner, soit dans la temporalité courte de la séance, soit dans la temporalité longue de la séquence.

Lorsque le diagnostic est orienté vers les élèves, sa visée concerne l'évaluation des apprentissages des élèves et le choix de situations d'apprentissage ou de remédiation, de parcours d'enseignement, adaptés aux besoins repérés de l'élève ou de groupes d'élèves. Le diagnostic articule alors une évaluation globale de la classe et une évaluation différentielle des élèves qui prend soit la forme d'une catégorisation d'élèves en sous classes "faibles", "moyens", "forts", soit la forme de notes.

Dans le cadre de la recherche présentée, nous nous situons dans le cas d'un diagnostic orienté vers les élèves.

*Analyse du diagnostic*

L'étude instrumentale distingue différents aspects du diagnostic qui correspondent à des étapes de l'élaboration et de l'exploitation du diagnostic :

- Définition des items du test de l'évaluation diagnostique et recueil des réponses des élèves,
- Analyse des réponses des élèves pour modéliser leurs connaissances et les cohérences de leur activité dans un domaine mathématique donné,
- Présentation des résultats du diagnostic en lien avec le but visé.

Au début de la recherche, nous avons privilégié un outil de diagnostic qui présente les principales caractéristiques de l'activité de l'élève appelé profil cognitif dans un domaine mathématique donné : nous parlons alors de diagnostic individuel. Par la suite, au vu des limites de ce choix pour sélectionner des situations dans le contexte d'une progression au sein de la classe, nous avons développé un diagnostic collectif avec deux objectifs :

- Situer l'activité d'un élève par rapport à l'activité de référence dans un domaine mathématique donné, à un niveau scolaire donné,
- Catégoriser le profil des élèves au sein d'une classe pour constituer des groupes ayant des besoins d'apprentissage proches. En effet, pour le professeur, le but du diagnostic est d'organiser des parcours d'enseignement prenant appui sur les besoins d'apprentissage repérés des élèves.

Nous allons montrer comment la collaboration de recherche entre des informaticiens et des didacticiens des mathématiques rend possible l'expérimentation des prototypes dans des classes "ordinaires" avec des enseignants et permet de faire évoluer les modélisations retenues pour organiser des parcours d'enseignement différencié adaptés aux besoins d'apprentissage d'élèves.

- Comment modéliser une évaluation diagnostique en algèbre élémentaire, en fin de scolarité obligatoire, sur les connaissances et cohérences de l'activité algébrique d'un élève, pour permettre à un enseignant son exploitation en classe ?
- Comment présenter le diagnostic à l'enseignant en fonction de son but ?
- Comment accompagner les enseignants à organiser un enseignement prenant en compte des outils de diagnostic et des ressources de régulation ?

### *Positionnement en didactique des mathématiques*

Quels éléments théoriques mobiliser en didactique des mathématiques pour modéliser les connaissances et les cohérences de l'activité d'un élève en algèbre élémentaire, en fin de scolarité obligatoire ?

#### *Une double approche cognitive et anthropologique*

Prenons appui sur l'analyse de la tâche diagnostique ci-dessous.

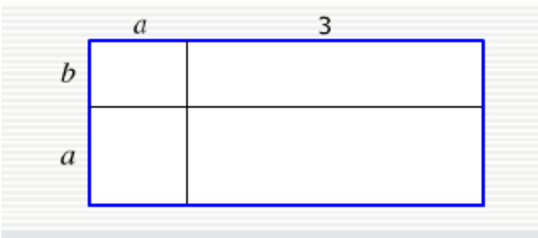



*Figure 1 : calcul de l'aire d'un rectangle*

L'objectif de cette tâche est d'étudier comment un élève exprime l'aire d'un domaine plan au moyen d'une expression algébrique. L'analyse des réponses correctes ou erronées donne accès aux règles de traduction et de transformation utilisées par les élèves pour passer d'une représentation géométrique à une expression algébrique. La pertinence de cette tâche diagnostique dépend des programmes et donc du niveau scolaire. Les réponses : $3a^2b$, $ab \times 3a$, $a+3 \times a+b$, $(a+b)(a+3)$ et $a^2+3a+ab+3b$ dénotent clairement des pratiques de calcul qui ne mettent pas en jeu les mêmes connaissances ni la même activité "algébrique".

Nous situons l'étude d'abord dans une approche cognitive dans la lignée des travaux de Vergnaud (1991). Pour étiqueter des aspects du développement conceptuel des objets de l'algèbre chez les élèves et organiser le diagnostic de leur compétence algébrique (Grugeon, 1997), nous postulons que ces objets appartiennent au champ conceptuel de l'algèbre élémentaire caractérisé par les types de problèmes donnant du sens aux concepts, les propriétés des objets (en particulier le double aspect sémantique et syntaxique des objets, leurs aspects procédural et structural) et leurs différentes représentations sémiotiques. Nous nous appuyons sur une synthèse des travaux internationaux de didactique de l'algèbre pour spécifier les caractéristiques du champ conceptuel (Cf. § 2.2).

Nous inscrivons aussi la recherche dans le cadre de la théorie anthropologique et les travaux de Grugeon (1997) qui visaient à étudier les difficultés des élèves lors de la transition entre deux institutions. Chaque élève apprend dans une institution donnée et le savoir, ici le savoir algébrique, lui est transmis à l'intérieur de celle-ci. Les rapports personnels que chaque élève développe vis-à-vis de l'algèbre élémentaire dans une institution donnée sont le résultat de divers assujettissements liés aux emplois (Chevallard, 1989) du calcul algébrique développés dans cette institution et reflètent les rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire qui peuvent être différents d'une institution à une autre. L'approche anthropologique à travers l'étude de la transposition didactique de l'algèbre (Chevallard 1985, 1989) vise à caractériser le champ de problèmes algébriques du domaine algébrique privilégiés dans une institution donnée et donc les emplois de l'algèbre, dans des contextes intra ou extra mathématiques, l'algèbre n'étant pas une arithmétique généralisée (Gascon, 1995).

Nous postulons que la pratique de diagnostic doit tenir compte de l'institution dans laquelle l'élève apprend et des praxéologies mathématiques (Chevallard, 2002) impliquées dans la résolution des problèmes proposés dans l'institution[26]. Les évaluations doivent permettre de situer l'activité algébrique des élèves lors de la résolution des types de tâches travaillés à un niveau scolaire donné et les éléments technologiques investis dans leur résolution par rapport à ceux attendus. Pour étudier le rapport personnel d'un élève à l'algèbre, nous montrerons la nécessité de construire une référence indépendante des institutions (Cf. § 2.2).

*De nouveaux éléments théoriques et méthodologiques en cours de recherche*

Au cours de l'avancée des projets depuis la thèse de Grugeon (1995), l'usage de nouveaux éléments théoriques développés dans la communauté après 1995 nous a permis de faire évoluer le questionnement sur le modèle de l'élève, sur l'organisation de parcours d'enseignement différencié au sein du collectif classe et sur les modélisations didactiques et informatiques impliquées.

En didactique de l'algèbre, nous nous sommes appuyées sur le modèle G.T.G.[27] (Kieran 2007) distinguant trois types d'activité en algèbre élémentaire pour étayer notre choix du modèle de géographie de la classe (Cf. § 4.2), puis sur le modèle de l'algèbre élémentaire comme processus d'algébrisation des programmes de calcul (Bosch 2012) pour justifier certaines étapes des parcours d'enseignement différencié (Cf. § 5.2).

En ce qui concerne l'approche anthropologique, la mobilisation du modèle des praxéologies mathématiques ($T$, $\tau$, $\theta$, $\Phi$) (Chevallard, 1999) a joué un rôle important dans la formalisation du modèle didactique des tâches diagnostiques et celle du profil puis des

[26] Les praxéologies sont définies à partir de l'étude des programmes, des documents d'application et des principaux manuels utilisés dans les classes.
[27] Generational / Transformational / Global-meta level

modèles informatiques correspondants. La référence au niveau de convocation des types de tâches (Castela, 2008) a permis d'étendre le modèle du diagnostic en algèbre de 3$^{ème}$ en 5$^{ème}$ et 4$^{ème}$ (Cf. § 4.3.1). La référence à l'incomplétude des praxéologies (Bosch, Fonseca & Gascon, 2004) et aux besoins d'apprentissage ignorés par l'institution (Castela, 2008) a conduit Pilet (2012) à problématiser les parcours d'enseignement différencié en fonction des besoins d'apprentissage repérés des élèves (Cf. § 5.4).

Réciproquement les nouveaux questionnements nous ont amenées à réinterroger des cadres théoriques mobilisés.

***Positionnement en Informatique***

Quels sont les éléments méthodologiques sur lesquels repose une démarche de conception itérative et participative en informatique ?

*Une démarche de conception itérative et participative*

Delozanne (Delozanne, Prévit, Grugeon-Allys & Chenevotot-Quentin, 2010) s'appuie sur les travaux de Mackay et Fayard (1997) pour définir la démarche de conception itérative et participative utilisée.

Un cycle de recherche débute par l'étude d'un objet de recherche, ici le diagnostic en algèbre élémentaire dans l'environnement papier-crayon, puis la modélisation didactique en lien avec les cadres théoriques mobilisés pour le diagnostic. Une modélisation informatique est ensuite conçue en interprétant le modèle didactique, ce qui permet de développer un prototype. Le(s) prototype(s) est (sont) ensuite évalué(s) au cours d'expérimentations dans différents contextes : en laboratoire puis en classe. L'analyse des données recueillies conduit à poser de nouvelles questions et à faire évoluer les modélisations didactiques. Un cycle de recherche se termine donc en interrogeant l'évolution des modélisations didactiques relatives au diagnostic.

Pour montrer l'évolution des modélisations didactiques définies au cours de cette recherche, nous présentons les quatre cycles de recherche développés sur une période de quinze ans. Nous organisons la présentation de chaque cycle à partir du plan ci-dessous : 1. Questions de recherche ; 2. Eléments théoriques en didactique ; 3. Modélisation intermédiaire : didactique, informatique, prototypes ; 4. Expérimentations : en laboratoire, en classes puis recueil des données et résultats ; 5. Reformulation des questions.

*Quatre cycles de recherche*

Chaque cycle de recherche a permis de développer et de faire évoluer des prototypes informatiques fondés sur des modèles didactiques intermédiaires. Dans le cadre du projet *Pépite*, nous avons centré nos questions de recherche sur la modélisation du diagnostic individuel ; dans le cadre du projet *Lingot*, sur la modélisation du diagnostic générique et collectif ; dans le cadre du projet *PépiMep*, sur la modélisation de groupes d'élèves et de parcours d'enseignement différencié.

Nous allons montrer que les changements de point de vue liés à la convocation de différents cadres théoriques et au poids relatif de chacune des approches cognitive et anthropologique ont joué un rôle important dans l'évolution des modèles. C'est le cas, en particulier, pour le passage de tâches diagnostiques spécifiques à des tâches génériques puis à des tâches prédictives, pour le passage du profil de l'élève à la géographie de la classe, pour le passage de situations d'apprentissages à des parcours d'apprentissage.

### Diagnostic individuel Papier / Crayon

Nous exposons dans ce paragraphe les travaux de recherche conduits durant le premier cycle de recherche, c'est à dire les modalités du diagnostic individuel Papier / Crayon (P/C) pour décrire les rapports personnels de l'élève à l'algèbre élémentaire.

#### *Questions de recherche*

Nous nous appuyons sur les travaux de Grugeon (Grugeon, 1997) qui visaient à étudier les problèmes de transition institutionnelle dans le système éducatif. Plus précisément, il s'agissait d'étudier les rapports institutionnels et personnels à l'algèbre élémentaire qui se développent dans la transition entre les filières d'enseignement professionnel et les filières correspondantes de l'enseignement général de lycée. Deux questions de recherche ont émergé. Tout d'abord, comment identifier et mettre en relation le rapport personnel d'un élève et le rapport institutionnel à l'algèbre élémentaire (Q1.1) ? Puis, comment déterminer des leviers pour l'apprentissage (Q1.2) ?

#### *Eléments théoriques*

Les éléments théoriques articulent les approches cognitive et épistémologique d'une part et l'approche anthropologique d'autre part.

Grugeon (1997) a défini une référence, consistant en un modèle multidimensionnel de la compétence algébrique pour mettre en relation les rapports personnel et institutionnel à l'algèbre au niveau de la fin de la scolarité obligatoire en France. Ce modèle prend en compte différents aspects de la compétence algébrique. En particulier, les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions, dépendantes l'une de l'autre et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet*, termes pris selon l'acception de (Douady, 1986).

La dimension *objet* comprend d'une part les objets de l'algèbre (incluant les expressions, les formules, les équations) et d'autre part les systèmes de représentation associés à ces objets (le système de représentation symbolique algébrique en articulation avec d'autres systèmes de représentation tels que les registres du langage naturel, des écritures numériques, des figures, des représentations graphiques).

La dimension *outil* de l'algèbre est mobilisée comme outil de résolution de problèmes *via* leur modélisation (problèmes arithmétiques formulés en langue naturelle, modélisés sous forme d'équations et d'inéquations, problèmes intra ou extra mathématiques, modélisés sous forme de relations fonctionnelles entre données et variables), comme outil de généralisation et de preuve dans le cadre numérique, comme outil de calcul dans les cadres algébrique et fonctionnel.

#### *Modèle didactique*

*Le test*

Le modèle didactique utilisé pour produire le diagnostic individuel P/C s'appuie sur la structure d'analyse multidimensionnelle de l'algèbre qui a permis de construire à la fois les items du test diagnostic et leur analyse *a priori*.

Le test diagnostique fait intervenir les différents types de problèmes du domaine algébrique. Il est constitué de 22 tâches « figées ». A titre d'exemple, nous suivrons l'évolution, au fil des trois premiers cycles de recherche, de la tâche diagnostique 3 (figure 1 en annexe) du test déjà étudiée au paragraphe 1.2.1. C'est une tâche de production d'expression visant à étudier si un élève sait exprimer l'aire d'un domaine plan par une expression algébrique.

Dans notre approche, les réponses des élèves ne sont pas seulement analysées en termes de réussite/échec mais aussi codées en termes de cohérences définies par une analyse *a priori*. En effet, nous recherchons les cohérences en ce qui concerne la mobilisation des objets de l'algèbre pour résoudre les problèmes du domaine, le niveau technique et d'adaptabilité pour le calcul algébrique, le niveau de flexibilité pour l'articulation entre les différents registres de représentation et le niveau de la rationalité algébrique. Le profil cognitif d'un élève résulte ensuite du codage de ses réponses au test selon deux niveaux d'analyse.

*L'analyse a priori du test*

Le premier niveau d'analyse concerne le codage des réponses de l'élève par tâche. Tout d'abord, le codage évalue la validité de la réponse de l'élève et le type de traitement algébrique (codage T). Ensuite, le codage évalue la cohérence de la réponse de l'élève selon plusieurs dimensions :

- les types d'utilisation des lettres (codage L) ;
- les types de manipulation formelle des expressions algébriques (codage M) ;
- les types de conversion pour traduire des expressions d'un registre à un autre (codage C) ;
- les types de rationalité mathématique (codage R).

Pour la tâche 3 citée ci-dessus, deux démarches correctes (figure 2 en annexe) sont possibles selon que l'élève procède en appliquant la définition de l'aire d'un rectangle comme le produit $(a+3) \times (a+b)$, ou en sommant les aires de chacun des quatre rectangles qui composent le grand rectangle pour obtenir $ab+3b+a^2+3a$. Les démarches incorrectes (figure 2 en annexe) peuvent résulter de l'omission de parenthèses $a+3\times a+b$, d'une confusion entre aire et périmètre $2(a+3+a+b)$, de la production d'une expression abréviative du type $3a\times ab$ *ou* $3a^2b$ soit au cours de la conversion ou au cours de l'application des transformations lors du calcul. L'analyse des réponses à la tâche 3 donne accès à la validité de la réponse ainsi qu'aux règles de traduction et/ou de transformation utilisées par les élèves pour passer d'une représentation géométrique à une écriture algébrique.

Le deuxième niveau d'analyse consiste en une analyse transversale des réponses de l'élève sur l'ensemble des tâches dans le but de repérer des cohérences de fonctionnement de son activité algébrique.

*Profil cognitif en algèbre*

Le résultat du diagnostic constitue le profil cognitif de l'élève et s'appuie sur trois types de description :

- Une description quantitative (1er type) correspondant à un résumé des compétences algébriques en termes de réussite et d'échec par rapport au niveau attendu et sur les différentes catégories de tâches (technique, mathématisation, reconnaissance[28]) ;
- Une description qualitative (2ème type) des cohérences de fonctionnement selon l'usage des lettres, le calcul algébrique, la traduction, les types de justification ;
- L'articulation entre différents registres de représentation (3ème type) en termes de flexibilité.

Deux figures (Grugeon, 1997, p 97) présentent le profil cognitif en algèbre élémentaire de Mérième, une élève scolarisée en classe de Première d'adaptation (15/16 ans). Concernant le

[28] Le réseau RESEIDA est un regroupement interdisciplinaire de chercheurs issus de plusieurs laboratoires français et francophones. Piloté par Elisabeth Bautier et Jean-Yves Rochex, il porte sur la socialisation, l'enseignement, les inégalités et les différenciations dans les apprentissages.

traitement algébrique, Mérième manipule des expressions très simples. Pour la rationalité algébrique, Mérième a recours à des preuves pragmatiques et des raisonnements peu élaborés. Le profil cognitif de Mérième indique aussi sa faible flexibilité dans l'articulation entre les différents registres de représentation (numérique, algébrique, graphique, géométrique).

***Expérimentations***

Des expérimentations ont été réalisées en 1995 auprès de 600 élèves. Nous avons obtenu un riche spectre de réponses permettant de caractériser les profils. Concernant les usages des enseignants, elles ont révélé des difficultés importantes pour coder les réponses et pour les interpréter transversalement en termes de profils (Lenfant, 1997). Par ailleurs, l'outil fournit des informations nouvelles sur l'activité algébrique et sur les erreurs des élèves, informations didactiques inhabituelles que les enseignants ne sont pas habitués à traiter. Enfin, l'outil est apparu trop complexe pour une utilisation habituelle en classe, ce qui conduit à la nécessité d'une automatisation.

***Résultats du premier cycle de recherche***

Au cours de ce premier cycle de recherche, nous avons mené une analyse didactique des cohérences de fonctionnement d'un élève en algèbre élémentaire (question de recherche Q1.1).

Les informaticiens ont perçu l'intérêt de ces résultats du point de vue des Environnements Informatique d'Apprentissage Humain (EIAH). En effet, cette modélisation du profil cognitif d'un élève en algèbre, en appui sur la didactique des mathématiques, présente des descriptions ayant un niveau de structuration qui rend possible la modélisation informatique. Ainsi, les deux niveaux d'analyse produisent respectivement, pour le codage des réponses par tâche, un vecteur de codes et, pour l'analyse transversale sur l'ensemble des tâches, une agrégation de codes, qui constituent une modélisation didactique « semi-formalisée » du diagnostic P/C exploitable par les informaticiens.

**Diagnostic individuel informatisé**

Les expérimentations réalisées au cours du premier cycle de recherche ont montré la nécessité d'une automatisation. Mais peut-on passer d'un modèle descriptif à un modèle exécutable ? Cette question soulève le difficile problème de l'analyse automatique des réponses des élèves et de leurs raisonnements. En effet, le test diagnostic comprend des questions fermées mais aussi des questions ouvertes.

***Questions de recherche***

De nouvelles questions de recherche émergent. Le recueil des réponses avec un logiciel va-t-il limiter le spectre de réponses aux questions ouvertes ? Seront-elles suffisamment fiables et riches pour détecter les cohérences de fonctionnement mises en évidence par Grugeon (Q2.1) ? Est-il possible d'automatiser au moins partiellement le codage des réponses des élèves pour élaborer leurs profils en algèbre (Q2.2) ? L'usage des profils élaborés par le logiciel aide-t-il les enseignants à réguler leur enseignement (Q2.3) ?

***Eléments théoriques***

Les fondements didactiques restent inchangés : l'analyse didactique a permis d'élaborer un profil cognitif d'un élève au moyen d'un codage structuré qui rend envisageable l'informatisation.

La démarche en EIAH repose sur une méthodologie de recherche itérative fondée sur l'utilisation de prototypes. Un prototype est un outil méthodologique qui joue le rôle de modèle intermédiaire manipulable à la fois par des utilisateurs et par des chercheurs. Il rend possible la modélisation informatique car son implémentation en machine exige qu'il soit explicite et contraint donc à formuler les implicites. Cette démarche permet alors d'entrer dans un cycle de perfectionnement du prototype, *via* des expérimentations, conduisant à « pousser à bout » les modèles didactiques pour les rendre opérationnels en machine. C'est cette mise à l'épreuve des modèles qui permet alors d'avancer sur les questions de recherche.

***Le prototype Pépite***

Le prototype informatique *Pépite* (Jean, 2000) constitue un modèle didactique intermédiaire exploitable par les informaticiens. Il s'articule autour de trois logiciels (figure 3).

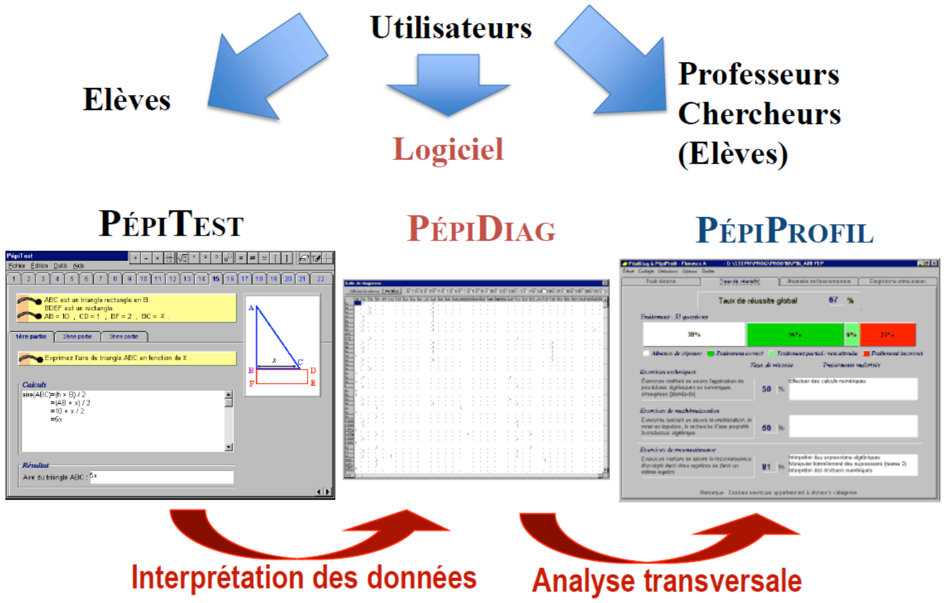



*Figure 3 : Prototype Pépite développé par Stéphanie Jean en 2000*

Le logiciel *PépiTest* propose le test aux élèves. Celui-ci comprend les 22 tâches diagnostiques « figées » composées aussi bien de QCM que de questions ouvertes.

Le logiciel *PépiDiag* réalise une automatisation partielle de la construction du profil cognitif de l'élève. Il procède tout d'abord au codage des réponses par tâche. Pour les QCM, la démarche est complétement identique à l'outil P/C. En revanche, l'analyse des réponses aux questions ouvertes s'effectue par comparaison avec des réponses anticipées. Pour les réponses en langage naturel, des techniques de recherche de mots clés sont utilisées. PépiDiag procède ensuite à l'analyse transversale sur l'ensemble des tâches.

Le Logiciel *PépiProfil*, destiné principalement aux chercheurs et aux professeurs, présente le profil cognitif selon les trois types de description indiqués au paragraphe 2.3.3.

Le profil cognitif d'un élève proposé par le logiciel *PépiProfil* comprend tout d'abord une description quantitative en termes de taux de réussite et de traitements maîtrisés (1$^{er}$ type de description, figure 4 en annexe). Dans la partie supérieure figure la réussite de l'élève en pourcentage. La barre horizontale donne une description de la réussite globale de l'élève sur le test entier. En dessous figure la réussite seulement pour les questions traitées. Dans la partie inférieure apparaissent les taux de réussite puis les traitements maîtrisés par l'élève par types d'exercices.

*PépiProfil* propose ensuite une description qualitative en termes de modes de fonctionnement (2$^{ème}$ type de description, figure 5 en annexe). La présentation s'appuie ici sur les critères évaluant la cohérence de la réponse de l'élève (premier niveau d'analyse) : utilisation des lettres (codage L) ; manipulation formelle des expressions algébriques (codage M) ; conversion pour traduire des expressions d'un registre à un autre (codage C) ; rationalité mathématique ou justification (codage R).

Enfin *PépiProfil* présente le diagramme d'articulation entre les différents cadres (3ème type de description, figure 6 en annexe). Le diagramme montre la flexibilité dans l'articulation entre les différents cadres. Celle-ci est également faible ici comme en témoignent les flèches en pointillés.

***Expérimentations***

Des expérimentations ont été conduites à partir de 2000 dans différents contextes allant de classes ordinaires à des situations de formation initiale d'enseignants ou de formation de formateurs.

Une équipe composée de psychologues et d'ergonomes (Rogalski, 2005) a mené une étude approfondie de l'activité d'enseignants utilisant *Pépite*. Les expérimentations ont d'abord permis de préciser la terminologie. Les expérimentations montrent que le test (composé de 22 tâches) est trop long et que le temps de passation est trop important. Cette équipe a relevé des usages de *Pépite* comme support à des situations d'apprentissage en classe et en formation. Par ailleurs, l'utilisation du logiciel créé deux tâches nouvelles pour les enseignants : coder les réponses aux questions ouvertes non analysées par le logiciel et interpréter le profil de l'élève.

Mais l'interface de *PépiProfil* reste peu exploitée par les enseignants car elle donne une description complexe du profil de l'élève en algèbre, inadaptée aux pratiques enseignantes bien qu'elle soit utile aux chercheurs. Elle n'est pas du tout conforme à la façon dont les enseignants expérimentés regardent leurs élèves. En particulier, le 3ème type de description (articulation entre les différents registres de représentation) est rarement utilisé par les enseignants même s'il apporte des informations importantes pour les didacticiens. Cela pose la question de la prise en compte des pratiques enseignantes dans la conception des outils pour l'enseignant.

***Résultats du deuxième cycle de recherche***

*Pépite* permet de repérer des compétences et des fragilités en algèbre chez les élèves. L'ensemble des réponses aux questions ouvertes, recueillies par *Pépite*, couvre de façon analogue le spectre des réponses prévues par l'analyse didactique *a priori* ; le logiciel ne diminue donc pas l'éventail des réponses. *Pépite* permet de construire des profils cohérents par rapport à l'outil P/C même si cela reste à confirmer sur une étude systématique (question de recherche Q2.1).

Malgré les difficultés dans la saisie et l'analyse des questions ouvertes, le logiciel *Pépite* analyse automatiquement (question de recherche Q2.2) les réponses aux questions fermées (42% des items du test) ainsi que les expressions algébriques simples (23% des items du test). Les réponses en langage naturel (3% des items du test) sont très partiellement analysées par des techniques de recherche de mots clés. Enfin, les raisonnements algébriques ne sont pas analysés dans le premier prototype *Pépite* de 2000 mais le seront dans les versions postérieures à 2002.

## Diagnostic collectif et diagnostic générique

Les expérimentations du prototype *Pépite* ont permis de pointer les besoins des enseignants concernant le diagnostic et son usage.

Le test *Pépite*, figé, est spécifique pour le niveau fin de 3ème / début de 2nd. Comment adapter ce test à différents moments de l'année scolaire et à d'autres niveaux scolaires ? Comment réduire le temps de passation du test ?

Les enseignants soulignent qu'une géographie cognitive de la classe serait plus opérationnelle qu'une description du profil cognitif de chaque élève. Comment effectuer des regroupements d'élèves ? Selon quels critères ?

En fonction des profils diagnostiqués, quelles situations d'apprentissage proposer pour faire évoluer les compétences des élèves ou pour remédier aux difficultés repérées ?

***Questions de recherche***

Les expérimentations réalisées avec le premier prototype informatique *Pépite* ont fait émerger de nouvelles questions de recherche. Est-il possible de gérer la variété des profils potentiels en regroupant des profils voisins pour leur associer le même objectif d'apprentissage commun (Q3.1) ? Quelle modélisation du diagnostic permettrait d'effectuer des diagnostics à différents moments de la scolarité et à d'autres niveaux scolaires (modèle générique) (Q3.2)? Quelles situations d'apprentissage proposer aux élèves en fonction de leurs profils individuels (Q3.3) ? Nous allons garder le fil conducteur du diagnostic et c'est pourquoi la 3ème question ne sera pas abordée ici (Grugeon-Allys, Pilet, Chenevotot-Quentin & Delozanne, 2012) ou (Grugeon, Coulange & Larue, 2003).

***Eléments théoriques***

Nous empruntons des éléments théoriques issus des approches cognitive et épistémologique. Grugeon a défini le modèle de la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire, référence pour y organiser un diagnostic. Ce modèle est réifié par le modèle GTG (Generational / Transformational / Global-meta level) de Kieran (Kieran, 2007) qui différencie trois aspects complémentaires de l'activité algébrique. L'activité générative concerne la génération des différents objets de l'algèbre : expressions algébriques (généralisant des règles numériques), formules (traduisant des relations entre des variables dans différents cadres) et équations (à une ou plusieurs inconnues modélisant un problème), identités. L'activité transformationnelle concerne l'utilisation de règles de transformation (règles relatives à la substitution de valeurs numériques dans des expressions, à la factorisation, au développement, à la résolution d'équations et d'inéquations). L'activité globale au niveau méta concerne la mobilisation et l'usage de l'outil algébrique pour résoudre différents types de problèmes (de modélisation, de généralisation, de preuve).

Nous nous appuyons aussi sur l'approche anthropologique. L'approche cognitive mentionnée ci-dessus ne prend pas en compte l'institution dans laquelle l'élève apprend et les praxéologies mathématiques (Chevallard, 2002) impliquées dans la résolution des problèmes proposés dans l'institution. Pour une institution donnée, nous cherchons à décrire le rapport institutionnel à l'algèbre à partir des praxéologies ($T$, $\tau$, $\theta$, $\Phi$) convoquées dans l'institution. Au-delà de la recherche des conceptions sur les notions en jeu, les pratiques d'évaluation doivent permettre de situer la praxis ($T$ et $\tau$) des élèves dans la résolution des types de tâches travaillés à un niveau scolaire donné et les éléments technologiques investis dans leur résolution par rapport aux praxéologies mathématiques idoines. Plus précisément, nous allons faire le lien avec nos questions de recherche.

***Modélisation du diagnostic générique***

Disposer de tests génériques est un enjeu fort pour dresser le profil cognitif d'un élève à différents moments de la scolarité afin de suivre son évolution. Nous illustrons notre démarche en prenant appui sur la tâche 3 (figure 7 en annexe) « Expression littérale de l'aire d'un rectangle » déjà abordée précédemment.

*Modélisation didactique des tests génériques*

La mobilisation des outils de l'approche anthropologique permet de passer d'un test diagnostic figé à un test générique en paramétrant le test diagnostic et son analyse en termes de types de tâches et d'objets en jeu. La modélisation didactique des tâches des tests génériques consiste à instancier les variables didactiques identifiées selon le niveau scolaire considéré :

- Nature du type de tâches : liée à ceux intervenant dans l'Organisation Mathématique (OM) globale de l'algèbre des programmes ;
- Technique(s) attendue(s) : celle(s) du niveau scolaire ;
- Nature et complexité des expressions en jeu ;
- Niveau de convocation des types de tâches ;
- Cadres et registres de représentation.

Concernant la tâche 3, le codage des réponses (figure 8 en annexe) ressemble fort à ce que nous avons déjà présenté pour les deux premiers cycles de recherche. Cette démarche produira d'abord un nouveau prototype P/C de diagnostic pour le niveau scolaire $5^{\text{ème}}/4^{\text{ème}}$ (Chenevotot, Grugeon & Delozanne, 2009). Cette modélisation didactique permettra aussi la réduction du nombre de tâches composant le test (passage d'un test composé de 22 tâches à un test composé de 10 tâches) reposant sur une analyse didactique et une analyse combinatoire.

Le test initial composé de 22 tâches a volontairement été conçu avec des redondances. Ainsi, la détermination de chaque élément du profil repose sur les réponses de l'élève à plusieurs tâches. Cette stratégie présente des avantages évidents pour la fiabilité du diagnostic. Mais, en raison de sa longueur excessive, le test initial peut ne pas être complètement renseigné par les élèves. Grâce à l'analyse *a priori* des tâches composant le test initial de 22 tâches, l'analyse didactique a permis de quantifier les potentialités de chaque tâche sur le plan du diagnostic et de retenir celles qui ont une valeur prédictive importante. L'analyse combinatoire (Darwesh, 2010) repose sur la comparaison des stéréotypes obtenus, d'une part, avec le test complet composé de 22 tâches et, d'autre part, par des combinaisons de 15 tâches, sur un corpus de 361 élèves. Darwesh a ensuite déterminé les 13 tâches qui interviennent le plus souvent dans les meilleures combinaisons composées de 15 tâches. L'analyse didactique (Chenevotot & al, 2011) a validé la pertinence du choix de ces 13 tâches et a permis d'estimer que leur nombre pouvait être réduit à 10 tâches. La comparaison des stéréotypes obtenus, d'une part, avec le test complet composé de 22 tâches et, d'autre part, avec le test réduit composé de 10 tâches, donne un pourcentage d'égalité de 74%.

*Modélisation informatique des tests génériques*

La modélisation informatique des tests génériques s'appuie sur le modèle conceptuel de classes de tâches paramétrées développé par Dominique Prévit (Prévit, 2008). Cette modélisation résulte d'une démarche ascendante pour généraliser les tâches de *Pépite* en produisant un modèle de classes paramétrées de tâches de diagnostic.

Elle repose sur la conception de deux logiciels. Le logiciel *PépiGen* (système auteur) permet de générer automatiquement la tâche et sa grille de codage (raisonnements corrects ou erronés fréquemment observés et la grille d'analyse multidimensionnelle des réponses). Le logiciel *Pépinière* (composant de calcul formel) traite les expressions algébriques nécessaires à la génération des exercices, à la génération automatique des réponses anticipées et à l'analyse automatique des réponses des élèves.

Nous revenons sur l'exemple de la tâche 3. Celle-ci fait partie de la classe de tâches « expression littérale de l'aire d'un rectangle ». L'indexation didactique de cette classe de tâche (figure 9 en annexe) précise :

- Les objectifs de la tâche : rechercher si un élève sait associer une expression algébrique à un domaine plan qui a pour aire cette expression ;
- La composante : traduire algébriquement dans différentes représentations (algébrique, arithmétique et en langage naturel) en lien avec le diagnostic collectif et le modèle des stéréotypes qui seront présentés dans le paragraphe suivant ;
- La capacité : traduire une expression algébrique comme une aire d'une surface ;
- Les types de tâche : calculer l'aire d'un domaine plan ; associer une expression algébrique à l'aire d'un domaine plan ;
- Les critères de validation : codage des réponses de la tâche.

Les codes utilisés ici pour le 3$^{ème}$ cycle de recherche (T pour la validation, C pour la conversion et M pour les manipulations algébriques) sont très légèrement différents de ceux présentés pour deux premiers cycles (V pour la validation, T pour la traduction et EA pour le calcul avec des expressions algébriques).

Jusqu'ici, le logiciel de diagnostic *Pépite* analysait correctement les réponses des élèves aux questions fermées mais beaucoup plus aléatoirement aux questions ouvertes pour lesquelles il procédait par comparaison avec une liste de solutions anticipées. L'enjeu est d'améliorer les performances d'analyse des réponses aux questions ouvertes par typage (figure 10 en annexe). Les réponses anticipées ont été typées en respectant des concordances entre les différentes tâches. Si nous retrouvons les grandes lignes du codage des réponses précédemment exposé, il s'agit néanmoins d'une avancée importante visant à une description plus fine permettant d'optimiser la catégorisation des réponses ouvertes des élèves. L'amélioration des performances de l'analyse des questions ouvertes résulte de l'enrichissement successif de la base des solutions anticipées grâce aux chercheurs en didactique des mathématiques et en informatique. Ces solutions bénéficient au préalable de l'analyse de *Pépinière*, logiciel de calcul formel qui compare les expressions algébriques.

#### ***Modélisation du diagnostic collectif***

Pour les enseignants, dont l'objectif est d'exploiter le diagnostic pour réguler les apprentissages des élèves, une photographie de groupes d'élèves ayant des praxis voisines en algèbre semble plus opérationnelle.

##### *Modélisation didactique du stéréotype*

Le passage d'un diagnostic individuel à un diagnostic collectif pour la classe repose sur l'approche cognitive et épistémologique. Plus précisément, en situant l'activité algébrique de chaque élève, repérée grâce au diagnostic individuel, selon trois composantes directement en lien avec les trois aspects de l'activité algébrique déjà présentés, nous avons construit un nouveau modèle, le modèle des stéréotypes.

Un stéréotype est défini comme une classe de profils « équivalents », c'est-à-dire un ensemble de profils pour lesquels les compétences algébriques des élèves peuvent être jugées suffisamment proches pour bénéficier de situations ayant les mêmes objectifs prioritaires d'apprentissage. Classer un élève selon un stéréotype revient à lui attribuer un niveau sur une échelle de développement conceptuel comportant trois composantes.

La première composante (4 niveaux) concerne l'Usage de l'Algèbre (UA). Il s'agit d'étudier la capacité de l'élève à mobiliser l'algèbre pour traduire algébriquement les différents types de problèmes via les équations ou via des relations fonctionnelles, les problèmes pour généraliser, prouver ou démontrer.

La deuxième composante (3 niveaux) concerne la Traduction d'une représentation Algébrique dans une autre (TA). Il s'agit d'étudier la capacité de l'élève à interpréter des écritures algébriques en articulation avec les autres registres de représentation (langage naturel, graphique, figure géométrique).

La troisième composante (3 niveaux) concerne le Calcul Algébrique (CA). Il s'agit d'évaluer le degré de maîtrise en calcul algébrique et la nature des techniques de calcul mises en jeu par l'élève.

Christian Vincent (Vincent & al, 2005) a développé le prototype informatique *PépiStéréo* qui met en œuvre les stéréotypes.

*Bilan cognitif d'un élève*

Le bilan cognitif d'un élève comprend deux éléments.

Le premier élément consiste en le stéréotype de l'élève qui représente le niveau de son activité algébrique selon les trois composantes. Ce stéréotype est obtenu grâce à un algorithme calculant le niveau de compétence algébrique sur une échelle de développement conceptuel relatif aux trois composantes définies ci-dessus. L'algorithme de calcul a émergé d'un consensus issu des analyses des profils construits par *Pépite*, sur le corpus des réponses recueillies, menées de façon indépendante à partir de stratégies distinctes, par trois didacticiens (Grugeon-Allys, 2008).

Le deuxième élément consiste en les caractéristiques personnelles de l'élève dont ses leviers d'apprentissage (compétences déjà construites sur lesquelles s'appuyer : « les pépites »), ses fragilités (connaissances non construites ou à consolider en priorité) et ses erreurs récurrentes (à déstabiliser).

Voici, à titre d'exemple, le bilan cognitif de Jules (tableau 1), un élève de seconde.

| | | |
|---|---|---|
| **Usage de l'Algèbre UA**<br>Niveau 3 | UA3<br>Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation. | Exercices de mathématisation<br>Taux de réussite : **18 %**<br>**Fragilités**<br>Encore des démarches arithmétiques |
| **Traduction d'une représentation à une autre TA**<br>Niveau 2 | TA2<br>Traduction ne prenant pas en compte la reformulation des relations. | Exercices de reconnaissance et de traduction<br>Taux de réussite : **50 %**<br>**Leviers**<br>Traduction algébrique correcte pour modéliser (e=6P ; x-2=y+2) |
| **Calcul Algébrique CA**<br>Niveau 3 | CA3<br>Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation. | Exercices techniques<br>Taux de réussite : **14 %**<br>**Fragilités**<br>Rôle des opérateurs non maîtrisé ($4a^3+3a^2=7a^5$)<br>Utilisation de règles de transformation fausses<br>($(a+2)^2=a^2+4$ ; $a^m a^n=a^{m.n}$ ; $ax=b \rightarrow x=-b/a$) |

*Tableau 1 : Bilan cognitif de Jules*

Nous pouvons voir que Jules est en difficulté en calcul algébrique (il est classé en CA3). En effet, des fragilités ont été repérées concernant le rôle non maîtrisé des opérateurs et l'utilisation de règles de transformation fausses. Jules est également en difficulté dans l'usage de l'algèbre dans la résolution de problèmes (il est classé en UA3). Il présente une fragilité : il utilise encore des démarches arithmétiques. En revanche, Jules traduit algébriquement, sans reformulation, des relations mathématiques entre variables dans un cadre donné (il est classé en TA2) ; c'est un levier d'apprentissage.

***Expérimentations***

Les expérimentations réalisées pour le diagnostic collectif ont été conduites en 2005 et portent sur un corpus de 361 élèves. La restitution du stéréotype aux enseignants a donné lieu à de nombreux échanges concernant la terminologie employée. Parmi les trente six stéréotypes possibles, on relève au plus 13 stéréotypes différents dans une classe et bien souvent moins de six. Cela reste cependant un nombre trop grand pour permettre à un enseignant de mettre en place des stratégies d'enseignement différencié. Ceux-ci souhaitent disposer d'un faible nombre de groupes (3 ou 4 groupes) d'élèves qui travailleraient sur des situations d'apprentissage adaptées.

Par exemple, la géographie cognitive de cette classe de seconde (figure 11), établie en début d'année, témoigne d'une classe homogène mais faible avec plus des deux tiers de la classe en UA3-TA3-CA3.

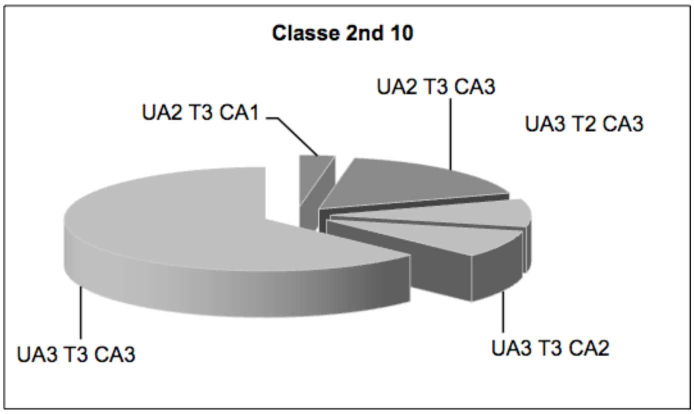



*Figure 11 : Géographie cognitive de la classe de seconde 10*

***Résultats du troisième cycle de recherche***

Le troisième cycle de recherche a produit, d'une part, un modèle de tâches diagnostiques génériques (question de recherche Q3.2) qui permet de disposer de plusieurs tests diagnostiques (clones), à différents moments de la scolarité et, d'autre part, un modèle de stéréotypes (question de recherche Q3.1) pour permettre aux enseignants de disposer d'un diagnostic collectif afin de situer l'activité de chaque élève par rapport à l'ensemble des élèves de leur classe.

Il a également produit deux logiciels : un logiciel permettant de générer les tâches et leur grille de codage (*PépiGen*) ainsi qu'un logiciel de calcul formel permettant le traitement des expressions algébriques (*Pépinière*) puis l'analyse automatique des réponses de l'élève (Prévit, 2008, Delozanne & al., 2010). Le logiciel de calcul formel *Pépinière* a permis d'améliorer considérablement les performances du diagnostic. Pour les questions ouvertes, sur un corpus de 361 réponses au test *Pépite*, nous codons actuellement entre 70 et 92% des réponses selon les tâches.

### Modélisation des groupes et des parcours d'enseignement différencié

Ce quatrième cycle de recherche a pour objectif le transfert de l'outil de diagnostic, conçu et développé en laboratoire puis expérimenté dans des classes, sur la plateforme en ligne *LaboMep* développée par l'association Sésamath. Ce transfert vise à étendre la recherche à grande échelle, dans des conditions réelles d'enseignement. Un premier enjeu est de fiabiliser l'outil de diagnostic pour passer à l'échelle et d'étudier son utilisabilité, son utilité et son acceptabilité par les enseignants (Tricot & Plégat-Soutjis, 2003). Un autre enjeu concerne l'accès à de vastes données par le biais de la plateforme en ligne *LaboMep* pour tester la validité des modèles didactiques et informatiques de diagnostic en algèbre, en particulier le modèle de stéréotype, à partir d'analyses statistiques complétant les analyses qualitatives *a priori* déjà réalisées. Ce quatrième cycle vise aussi à développer une démarche collaborative et participative avec un groupe d'enseignants du groupe IREM[29] et de l'association Sésamath pour concevoir et expérimenter les ressources de diagnostic et de différenciation en classes « ordinaires ».

#### *Questions de recherche*

Le transfert sur une plateforme en ligne a confronté l'équipe pluridisciplinaire des chercheurs à de nouvelles questions.

Sur le plan du transfert : quelles sont les conditions permettant d'assurer la viabilité du transfert du diagnostic vers une plateforme en ligne largement utilisée par les enseignants de mathématiques de collège (Q5.1) ?

Sur le plan de l'usage du diagnostic : comment réduire le nombre de groupes d'élèves d'une classe ayant des besoins d'apprentissage proches en algèbre (Q5.2) ? Pour un objectif d'apprentissage donné, comment concevoir, modéliser, développer, des exercices adaptés aux besoins d'apprentissage des élèves (Q5.3) ?

Sur le plan de l'analyse des usages : quels usages les enseignants font-ils de ces ressources et quels sont les impacts sur l'activité algébrique des élèves (Q5.4) ?

#### *Eléments théoriques*

Nous précisons les choix théoriques qui fondent la catégorisation en groupes d'élèves et la modélisation des parcours d'enseignement différencié.

Au-delà du point de vue cognitif, nous interrogeons le processus de transposition didactique pour intégrer les conditions et les contraintes sous lesquelles les élèves apprennent en tenant compte de l'hétérogénéité des apprentissages. Quelle est la complétude des praxéologies apprises ? Comment s'y agrègent les organisations mathématiques ponctuelles ? Quels sont les praxis et niveaux technologiques envisageables du côté élève dans la résolution des tâches ? Il s'agit de faire des hypothèses sur les éléments technologiques mobilisables par les élèves pour résoudre les tâches diagnostiques convoquant les types de tâches représentatifs de l'organisation praxéologique en algèbre dans une institution donnée.

En reprenant la méthodologie utilisée par Bosch et Gascon (2005), Pilet a construit une praxéologie de référence relative aux expressions algébriques pour la fin de la scolarité obligatoire (Pilet, 2012) comme unité d'analyse. L'objectif est de caractériser les besoins

[29] Groupe IREM « Enseignement différencié de l'algèbre élémentaire dans la transition $3^{\text{ème}}$ / $2^{\text{nde}}$ » de l'université Paris Diderot.

d'apprentissage ignorés (Castela, 2008) dans les programmes, en mettant en relation les écarts entre les praxéologies à enseigner ou enseignées et les praxéologies apprises. Au delà des technologies développées du côté des institutions, il s'agit aussi de caractériser des catégories de « justifications inadaptées », repérées de façon régulière dans les données expérimentales, qui laissent vivre des classes d'erreurs récurrentes lors de l'activité algébrique des élèves.

On dépasse les usages classiques de la TAD qui en sont faits à travers d'une part la prise en compte du cognitif et d'autre part l'étude de la différenciation des apprentissages. Ces choix théorique et méthodologique permettent de :

- Catégoriser les praxéologies apprises *a priori* selon des niveaux technologiques et théoriques dominants dans une institution donnée et des classes d'erreurs identifiés en relation avec les besoins d'apprentissages ignorés,
- Modéliser des parcours d'enseignement différencié en lien avec des questions et sous questions génératrices identifiées pour travailler les savoirs et savoir-faire implicites.

***Modélisation didactique de groupes d'élèves ayant des besoins d'apprentissage proches***

Au cours de ce quatrième cycle de recherche, nous avons transféré le diagnostic sur *LaboMep*. La présentation a bénéficié de la collaboration entre les chercheurs et les enseignants du groupe IREM utilisant cet outil informatique dans leur classe. Les tâches diagnostiques conservent la présentation existante mais l'interface prend en compte la gestion des interactions inhérentes à *LaboMep* (figure 12).

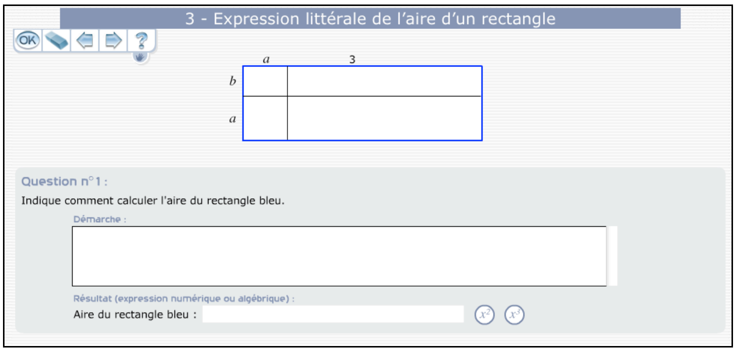



*Figure 12 : Tâche diagnostique 3 – Production d'une expression littérale*

De plus, nous sommes passés d'une modélisation de type « diagnostic individuel » conduisant à proposer à des élèves des situations d'apprentissage ou de remédiation « isolées » (Grugeon, Coulange, Larue, 2003), à une modélisation de type « diagnostic collectif » visant à organiser des parcours d'enseignement différencié au sein d'une séquence d'enseignement donnée, pour des groupes d'élèves ayant des praxis et des besoins d'apprentissage proches. Nous avons aussi mis en cohérence le modèle du profil cognitif décrit en termes de stéréotypes avec le modèle de tâche diagnostique décrit en terme praxéologique.

Pour ceci, nous regroupons d'abord les stéréotypes à partir des niveaux sur la composante « Calcul Algébrique ». Nous distinguons trois groupes, A, B, C, correspondant à des « technologies élèves » dominantes mobilisées dans la résolution de tâches diagnostiques de calcul algébrique (développement, factorisation, résolution d'équations mais aussi reconnaissance d'expressions algébriques en articulation avec d'autres registres de représentation sémiotique) :

Groupe C : usage de démarches arithmétiques, laissant vivre des erreurs liées à des règles de concaténation $a+b \rightarrow ab$ ou de duplication $a^2 \rightarrow 2a$ (CA3 : niveau 3 sur la composante CA) ;

Groupe B : usage d'arguments syntaxiques formels faiblement articulés au numérique, laissant vivre l'usage incorrect des parenthèses, l'usage de règles fausses, par exemple du type $(a+b)^2 \rightarrow a^2+b^2$ (CA2 : niveau 2 sur la composante CA) ;

Groupe A : usage d'arguments sémantiques et syntaxiques, prenant en compte la structure et l'équivalence des expressions et la technologie attendue (CA1 : niveau 1 sur la composante CA).

Chaque groupe est subdivisé en deux sous-groupes selon la composante « Usage de l'Algèbre » : un sous-groupe « - » pour les niveaux UA3 et UA4 et un sous-groupe « + » pour les niveaux UA1 et UA2. Ce modèle est une réponse à la question Q5.2.

Nous illustrons cette modélisation pour le groupe C. Le groupe C est caractérisé par : un calcul encore peu ou pas guidé par l'équivalence des expressions algébriques et la dialectique entre numérique et algébrique et vice versa ; s'appuyant fortement sur une technologie arithmétique laissant vivre des erreurs liées à des règles de concaténation $a+b \rightarrow ab$ ou de duplication $a^2 \rightarrow 2a$ ; peu de raisons d'être sont données aux objets de l'algèbre. Le groupe C se subdivise en deux sous groupes C- et C+ :

C- : peu ou usage inadapté de l'outil symbolique et mobilisation majoritaire de démarches arithmétiques ;

C+ : faible mobilisation de l'outil symbolique conduisant à l'usage de règles de conversion abréviatives.

Dans l'exemple présenté en figure 12, les bilans cognitifs des élèves de la classe se répartissent selon deux groupes.

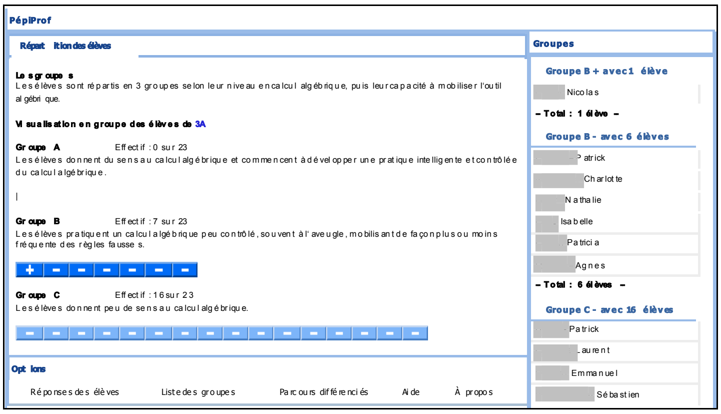
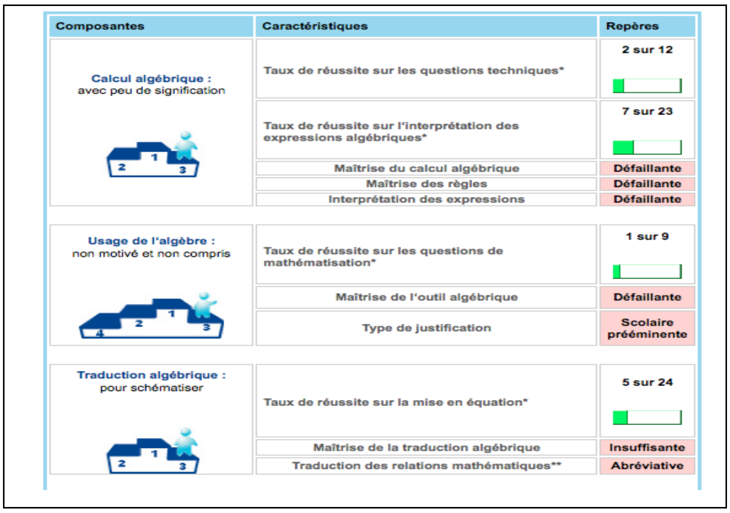



*Figure 12 : Bilan de la classe*

La liste des élèves de chaque groupe est affichée à droite. En cliquant sur le nom d'un élève, l'enseignant a accès à son bilan (figure 13) cognitif présenté en trois parties : le niveau sur chaque composante du stéréotype (cf. § 4.4.2), les caractéristiques personnelles, des repères quantitatifs quant à la réussite de chaque genre de tâches. Cette présentation est le résultat d'une négociation avec les enseignants du groupe IREM : le langage utilisé pour présenter le diagnostic de l'élève est simplifié et adapté aux pratiques des enseignants.



| Composantes | Caractéristiques | Repères |
|---|---|---|
| Calcul algébrique : avec peu de signification | Taux de réussite sur les questions techniques* | 2 sur 12 |
| | Taux de réussite sur l'interprétation des expressions algébriques* | 7 sur 23 |
| | Maîtrise du calcul algébrique | Défaillante |
| | Maîtrise des règles | Défaillante |
| | Interprétation des expressions | Défaillante |
| Usage de l'algèbre : non motivé et non compris | Taux de réussite sur les questions de mathématisation* | 1 sur 9 |
| | Maîtrise de l'outil algébrique | Défaillante |
| | Type de justification | Scolaire prééminente |
| Traduction algébrique : pour schématiser | Taux de réussite sur la mise en équation* | 5 sur 24 |
| | Maîtrise de la traduction algébrique | Insuffisante |
| | Traduction des relations mathématiques** | Abréviative |

*Figure 13 : Bilan cognitif d'un élève*

***Modélisation des Parcours d'Enseignement Différencié (PED) (Pilet, 2012)***

Un des enjeux du projet *PépiMep* a été de concevoir des ressources de régulation pour l'apprentissage de l'algèbre, en fin de scolarité obligatoire, afin d'outiller les enseignants à gérer l'hétérogénéité des connaissances et compétences algébriques des élèves.

*Modélisation didactique*

Pilet a défini un modèle didactique de parcours d'enseignement différencié visant une avancée collective du temps didactique pour le groupe classe. Pour un objectif d'enseignement commun à la classe, il s'agit de caractériser une question génératrice visant à travailler les principales propriétés de notions algébriques, ici les expressions algébriques[30] et de proposer :

- des tâches différenciées qui relèvent de cet objectif d'enseignement commun et sont adaptées aux besoins d'apprentissage des élèves repérés au préalable par un diagnostic dans un domaine donné,
- une gestion didactique visant à organiser un contrat didactique adapté aux objectifs visés et une institutionnalisation des savoirs en jeu.

Ce modèle didactique s'appuie sur l'identification préalable de questions génératrices qui fondent les objectifs à travailler dans les Parcours d'Enseignement Différencié (PED) en croisant les besoins d'apprentissage ignorés par l'institution et les besoins d'apprentissage repérés par le diagnostic (Pilet, 2012).

Pour compléter la réponse à la question (Q5.3), Pilet a spécifié un modèle didactique d'exercices de PED. Une tâche est caractérisée par :

- la composante (UA, TA, CA) travaillée,
- le type de tâche mis en jeu,
- le genre de tâche (mise en relation avec les capacités dans les programmes),
- l'objet de d'algèbre,
- la nature et la complexité des expressions en jeu (en lien avec le groupe A, B ou C auquel l'élève est affecté),

[30] Des exemples de questions génétraices relatives aux expressions algébriques (Pilet 2012) :
Deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
Comment conduire et contrôler le s transformations dans le calcul algébrique ?

- les cadres d'entrée et de sortie en jeu (numérique, algébrique, langage naturel, géométrique, grandeurs, graphique, fonctionnel),
- la nature de la tâche (t-convoqué ou r-convoqué) (Castela, 2008).

Nous illustrons ce modèle à partir d'un exemple développé par Pilet (2012). Une des questions génératrices identifiée par Pilet concerne l'équivalence de programmes de calcul qui conduit à l'étude de l'équivalence des expressions algébriques. Pour cet objectif d'apprentissage, l'enseignant propose des tâches aux élèves des groupes A, B et C. Ces tâches diffèrent par le choix des variables didactiques : nature des programmes de calcul et des expressions algébriques résultats, forme des énoncés qui conduit soit à une tâche guidée (travailler la dialectique entre le numérique et l'algébrique), soit à une tâche dont la résolution revient à la charge de l'élève. Des aides sont prévues pour chaque parcours. Voici un exemple en classe de troisième :

L'enseignant peut cliquer sur le bouton « parcours différenciés » (figure 12) pour définir les exercices d'une séance de parcours d'enseignement différencié selon le moment de la séquence (première rencontre, introduction, entraînement, réinvestissement) et les objectifs d'apprentissage visés.

*Modélisation informatique*

Le quatrième cycle de recherche a permis d'automatiser la génération des parcours d'enseignement différencié dans la plateforme *LaboMep*. Quelle formalisation du modèle informatique faut-il envisager pour caractériser les parcours d'enseignement différencié, les exercices et le choix des variables didactiques ? L'équipe informatique du LIP6[31] a défini une ontologie du calcul algébrique (Delozanne & al, 2012) en adaptant des démarches développées dans le cadre du projet européen Geoskills[32] et du projet allemand ActiveMath[33]. Une collaboration entre les didacticiennes[34] et les informaticiennes a permis une indexation des exercices des parcours fondée sur une ontologie du domaine algébrique.

Groupe C

Les trois programmes de calcul suivants sont-ils égaux ?

| Programme 1 | Programme 2 | Programme 3 |
|---|---|---|
| - Choisir un nombre.<br>- Multiplier ce nombre par 4.<br>- Ajouter 3 au produit. | - Choisir un nombre.- Multiplier ce nombre par 7. | - Choisir un nombre.<br>- Multiplier ce nombre par 4.<br>- Ajouter au produit le triple du nombre de départ. |

1. Choisis trois nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres. Tu peux utiliser une calculatrice.
2. Quels programmes semblent égaux ?
3. Ecris une expression algébrique pour chaque programme.
4. Avec ces trois expressions, écris une égalité

Groupe B

Les trois programmes de calcul suivants sont-ils égaux ?

| Programme 1 | Programme 2 | Programme 3 |
|---|---|---|
| - Choisir un nombre.<br>- Multiplier ce nombre par 2.<br>- Elever le résultat au carré. | - Choisir un nombre.<br>- Elever ce nombre au carré.<br>- Multiplier par 2. | - Choisir un nombre.<br>- Multiplier ce nombre par 4.<br>- Multiplier le résultat par le nombre choisi au départ. |

1. Choisis trois nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres. Tu peux utiliser une calculatrice.
2. Quels programmes semblent égaux ?
3. Ecris une expression algébrique pour chaque programme.
4. Démontrer quels sont les programmes égaux ?

---

[31] E. Delozanne, D. Prévit et N. El-Kechaï.
[32] Geoskills : http://i2geo.net/comped/mainMenu.html
[33] ActiveMath, développé par Melis (2008, 2010) est un environnement d'apprentissage adaptatif pour les mathématiques, appuyé sur une ontologie générale
[34] F. Chenevotot, B. Grugeon-Allys, J. Pilet.

toujours vraie. Justifie.
5. Utilise cette égalité pour vérifier ta réponse à la question 2. et démontrer quels sont les programmes égaux ?

*Figure 14 : Exercices différenciés pour les groupes B et C (Pilet, 2012)*

L'équipe des informaticiennes a ainsi développé le logiciel *PépiPad* (Parcours d'apprentissage Différencié – figure 15) qui propose à un enseignant ayant fait passer un test diagnostic en algèbre aux élèves de sa classe de troisième ou de seconde, des séances différenciées en fonction des groupes identifiés dans sa classe et de l'objectif d'enseignement visé. Les développeurs de Sésamaths, en particulier A. Rommens, ont permis l'intégration du logiciel sur *LaboMep*.

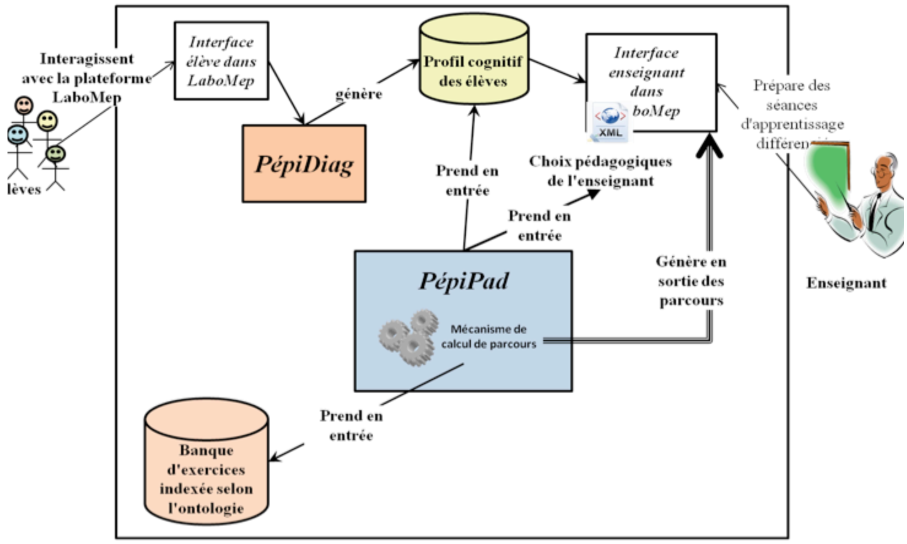



Figure 15 : Le logiciel PépiPad

***Expérimentations***

Pour tester les modélisations et les logiciels développés dans *LaboMep* lors du quatrième cycle de recherche, nous avons réalisé des expérimentations en 2011 et 2012. Celles-ci ont porté sur les élèves de six classes (quatre classes de troisième et deux classes de seconde) ainsi que sur des données recueillies via la plateforme *LaboMep*.

*Travail collaboratif au sein d'un groupe IREM*

L'expérimentation a pris appui sur le travail collaboratif entre chercheurs des équipes de recherche en informatique et en didactique, enseignants de collège et de lycée et membres de Sésamath. Le groupe IREM « Enseignement différencié de l'algèbre » a été créé à l'université Paris Diderot - Paris 7 en septembre 2010 pour permettre à cinq enseignants et trois chercheurs en didactique de travailler ensemble, à une fréquence d'environ une séance par mois.

Du côté des chercheurs en informatique, cette collaboration a permis d'analyser les interfaces sur *LaboMep* et de faire évoluer la présentation de la répartition des élèves en groupes, des bilans des élèves, de la terminologie utilisée. Ces analyses ont été l'occasion de réinterroger des outils présents dans la première version du logiciel *Pépite* (accès aux réponses des élèves par exercice).

Du côté des chercheurs en didactique, le travail accompli dans le cadre du groupe IREM a permis d'interroger les ressources d'évaluation et de différenciation d'une ingénierie didactique, d'accompagner des enseignants de collège et de lycée à sélectionner des objectifs d'enseignement peu travaillés au regard des besoins d'apprentissage repérés par le diagnostic et d'intégrer des PED relatifs aux expressions algébriques à leurs séquences habituelles d'enseignement sur le calcul algébrique. Deux doctorantes ont participé à ce groupe IREM. Pilet (Pilet, 2012) a étudié l'évolution de l'activité algébrique et des raisonnements des élèves, en lien avec les usages des ressources de régulation par chaque enseignant. Bedja a commencé l'étude des usages par les enseignants des ressources de diagnostic et de différenciation mises à disposition sur la plateforme en ligne.

*Méthodologie*

Dans le cadre du groupe IREM, les enseignants et les chercheurs en didactique ont travaillé autour de plusieurs questions :

- l'interprétation et la catégorisation d'erreurs en algèbre, en lien avec la méthodologie de constitution des groupes,
- le choix de séances différenciées à intégrer en cohérence avec des séquences « habituelles » dans le but de travailler des aspects implicites de l'activité algébrique (la dialectique numérique / algébrique, le rôle de l'équivalence des expressions dans le contrôle d'un calcul algébrique),
- la forme des énoncés pour les différents groupes d'élèves dans la classe,
- la gestion didactique à mettre en place, en particulier pendant les phases de travail de groupe, de mises en commun et d'institutionnalisation.

Le travail au sein du groupe IREM a permis d'organiser l'observation des séances différenciées dans la classe des enseignants et le recueil des données (productions d'élèves et vidéos). Nous avons développé plusieurs types de situations de formation à l'IREM : analyse de productions d'élèves, de l'activité et des raisonnements des élèves en algèbre, analyse de vidéos autour de la gestion des phases de mise en commun et d'institutionnalisation avec un focus sur les techniques et technologies développées au sein des interactions dans les classes.

***Résultats du quatrième cycle de recherche***

Ce quatrième cycle de recherche a permis d'étudier les conditions pour assurer la viabilité du transfert du diagnostic sur la plateforme *LaboMep* largement utilisée par les enseignants de mathématiques de collège. Il a aussi permis de mettre à l'épreuve la robustesse du diagnostic (Q5.1). L'usage des ressources de diagnostic sur *LaboMep* a favorisé la dissémination des résultats de recherche auprès des enseignants : 106 séances de tests diagnostiques ont été créées entre septembre et novembre 2012, plus de 1500 élèves ont effectué le test et 62 séances différenciées ont été menées sur *LaboMep*.

L'analyse comparée des stéréotypes des élèves des classes engagées dans l'expérimentation, en début et en fin d'année scolaire (grâce à l'implémentation de plusieurs versions du test sur LaboMep), a mis en évidence une évolution des praxéologies apprises des élèves, pour 30% sur la composante « Calcul Algébrique » (Pilet, 2012). Mais ces résultats sont à confirmer sur des études à plus grande échelle (Q5.2).

Le travail collaboratif au sein du groupe IREM a permis de faire évoluer les interfaces, en particulier à travers la présentation des groupes et le discours utilisé, plus adapté aux besoins des enseignants. Les enseignants du groupe IREM ont éprouvé l'intégration de séances différenciées au sein de leurs séquences habituelles d'enseignement en algèbre pendant deux ans. Ils ont modifié de façon mineure l'usage des parcours d'enseignement différencié au niveau de la sélection des objectifs d'apprentissage mais ont fait évoluer la gestion des mises en commun et d'institutionnalisation (Q5.3). Ces évolutions sont à mettre en relation avec l'analyse des préparations et des épisodes de vidéos des séances différenciées lors du groupe IREM. Au delà de l'intérêt éprouvé par les enseignants pour le dispositif de différenciation proposé, appuyé sur un diagnostic et une avancée du temps didactique au niveau du collectif de la classe, les enseignants réalisent peu de synthèses sur les objectifs d'apprentissage travaillés et décontextualisent peu les savoirs travaillés dans des exercices d'entraînement ou de réinvestissement.

Les bilans des enseignants du groupe IREM insistent sur les apports des parcours d'enseignement différencié mais aussi sur les différences avec leurs pratiques habituelles d'évaluation et de différenciation. Ils mettent en évidence la nécessité de créer des ressources complémentaires (séquences et conditions de mise en oeuvre) sur la plateforme *LaboMep* pour accompagner les enseignants dans la mise en œuvre des parcours d'enseignement différencié.

## Résultats et perspectives

Nous présentons les principaux résultats obtenus au cours des différents projets.

### *Résultats en EIAH*

Depuis une vingtaine d'années, les projets de recherche pluridisciplinaire en EIAH *Pépite*, *Lingot* et *PépiMep* témoignent de l'opérationnalité et de la richesse d'une démarche itérative et participative qui commence à disséminer des ressources de diagnostic et de différenciation à grande échelle via la plateforme *LaboMep* de Sésamath.

Cet article présente l'évolution des modélisations didactiques et informatiques au cours de quatre cycles de recherche dans le cadre d'une démarche itérative de conception en EIAH nourrie par des expérimentations en classe. La démarche de recherche itérative et participative a favorisé le jeu dialectique entre les modélisations didactiques et informatiques, le développement de prototypes, l'organisation de l'analyse des données recueillies en laboratoire puis en situation de classes réelles pour réinterroger les modélisations didactiques conçues au cours des différents cycles. Le développement des prototypes de diagnostic et de parcours d'enseignement différencié, puis leur transfert dans *LaboMep*, ont permis de valider les modèles développés.

### *Résultats en didactique*

Cette recherche renouvelle les questions étudiées et mobilise de nouveaux concepts et outils théoriques développés au cours des années 2000. L'équipe des chercheurs en didactique a fait évoluer la prise en compte des approches cognitive et anthropologique pour étudier des questions d'évaluation et de différenciation. Pilet (2012) a ainsi construit une nouvelle praxéologie épistémologique de référence des expressions algébriques pour mettre en relation les écarts entre praxéologies à enseigner, praxéologies enseignées et praxéologies apprises. Cette recherche a étendu le domaine des usages classiques de la TAD à travers la prise en compte du cognitif et l'étude de la différenciation de l'enseignement appuyée sur les besoins d'apprentissage repérés par un diagnostic. Cette extension a permis de modéliser des groupes d'élèves et des parcours d'enseignement différencié.

### *Perspectives*

Cette recherche montre l'intérêt d'une démarche itérative et participative que nous allons maintenant élargir à la modélisation de parcours d'enseignement différencié au-delà des expressions algébriques et dans d'autres domaines mathématiques. D'autres objectifs seront poursuivis :

- la conception d'ontologies de domaines plus larges,
- la conception de ressources interactives pour peupler les parcours d'enseignement différencié,
- l'analyse quantitative à grande échelle de l'évolution des praxéologies apprises des élèves suite à l'utilisation des parcours d'enseignement différencié à partir de l'analyse des traces recueillies sur *LaboMep*.

Cette recherche témoigne de la richesse d'une démarche collaborative dans le contexte d'un groupe IREM. La confrontation entre des ingénieries didactiques et des séquences dans des classes « ordinaires » amène à réinterroger les processus de conception de ressources, l'accompagnement des enseignants dans les usages de ces ressources pour favoriser l'évolution des pratiques enseignantes concernant l'évaluation et la différenciation. Nous pensons, en particulier, aux questions relatives aux processus de dévolution, de décontextualisation et d'institutionnalisation.

Mais cette recherche montre aussi les limites d'un tel dispositif, non inscrit dans un contexte institutionnel, pour favoriser la diffusion de nouvelles pratiques d'évaluation et de régulation. Le projet ANR « Néopraéval », retenu suite à l'appel à projet de l'ANR « Apprentissages », sera l'occasion de poursuivre ces pistes de recherche de 2014 à 2016.

## Bibliographie


Bosch M. (2012). Doing research within the anthropological theory of the didactic : the case of school algebra. In *Proceedings du 12ème International Congress on Mathematical Education*, du 8 au 15 juillet 2012, COEX, Séoul, Korea.

Bosch M., Gascon J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier A., Margolinas C. (Eds), Balises pour la didactique : cours de la 12ème école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble : La pensée sauvage.

Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2/3) 205–250.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2) 135–182.

Chevallard Y. (2002) Structures & fonctions. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.3–32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2) 221–265.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Seconde partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x (19)*, 43-72.

Chevallard Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution didactique. *Petit x (5)*, 51-94.

Chenevotot-Quentin F., Grugeon B., Delozanne E. (2011) Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation* (pp.827−842). Dakar.

Chenevotot-Quentin F., Grugeon B, Delozanne B. (2009) Diagnostic cognitif en algèbre élémentaire à différents niveaux de la scolarité. In Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.-J. (Eds.) *Actes du colloque DIDIREM. Approches plurielles en didactique des mathématiques - Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : Quoi de neuf ?* (pp. 141-149). Paris : Université Paris Diderot - Paris 7 - L.D.A.R.

Darwesh A. (2010) Diagnostic cognitif en EIAH : le système PépiMep. *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris 6.*

Delozanne E., Prévit D., Grugeon-Allys B., Chenevotot-Quentin F. (2010) Vers un modèle de diagnostic de compétence. *Revue Techniques et Sciences Informatiques* 29(8/9) 899−938.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) 5–32.

Gascon J. (1994) Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». Petit x, 37, 43-63.

E-Kechaï N., Delozanne É, Prévit D., Grugeon B., Chenevotot F., (2011), Evaluating the performance of a Diagnosis System in School Algebra, in H. Leung et al. (Eds), ICWL 2011, LNCS 7048, Springer 263-272.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F., Delozanne E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.-P., Dorier J.-L., Robert A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (137-162). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Grugeon-Allys B. (2008) Quelques apports de l'analyse multidimensionnelle : activités des élèves et pratiques des professeurs de mathématiques ; Vers une modélisation. *Habilitation à diriger des recherches, Université Paris–Diderot.*

Grugeon B., Coulange L., Larue V. (2003) Familles de situations d'interactions en algèbre élémentaire : deux exemples. In IUFM de Reims (Eds) *Colloque ITEM juin 2003*. http://www.reims.iufm.fr/Recherche/ereca/itemcom

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(2) 167–210.

Grugeon B. (1995) Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G. *Thèse de l'Université Paris 7*.

Jean (2000) Pépite : un système d'assistance au diagnostic de compétence. *Thèse de l'Université du Maine.*

Ketterlin-Geller, Leanne R., Yovanoff P. (2009) Diagnostic Assessments in Mathematics to support Instructional Decision Making. *Practical Assessment, research and Education* 14(16).

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels : Building meaning for symbols and their manipulation. In Frank K. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.707–762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lenfant A. (1997) Etude sur la transposition d'un outil de recherche destiné aux enseignants. *Mémoire de DEA de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 7.*

Mackay W.E. et Fayard A.-L. (1997) HCI, Natural Science and Design: A framework for Triangulation Across Disciplines. *In Designing Interactive Systems, ACM* (pp. 223-234). Amsterdam.

Pilet J. (2012) Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation. *Thèse de l'Université Paris Diderot-Paris 7.*

Prévit D. (2008) Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes. *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris 6*.

Rogalski J. (2005) Rapport d'activité sur l'axe instrumentation de l'activité des enseignants. Projet de recherche « Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT ». *Projet Cognitique 2002, Programme « Ecole et sciences cognitives : les apprentissages et leurs dysfonctionnements » du MRT, Rapport de fin de projet*, 91-107, mars 2005.

Ruiz-Munzon N. (2010) La introduccion del algebra elemental y su desarollo hacia la modelizacion funcional. *Thèse de l'Université Autonome de Barcelone*.

Tricot A., Plégat-Soutjis F. (2003) Compositions graphiques et parcours des pages écrans. Essai de lecture sémiotique. *Actes du 8ème Congrès International d'AIS/IASS*. Lyon.

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2/3) 133–170.

Vincent C., Delozanne E., Grugeon B., Gelis J.-M., Rogalski J., Coulange l. (2005) Des erreurs aux stéréotypes : des modèles cognitifs de différents niveaux dans le projet Pépite. Actes de la Conférence Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH2005) (pp.297-308). Montpellier.

**Annexe**

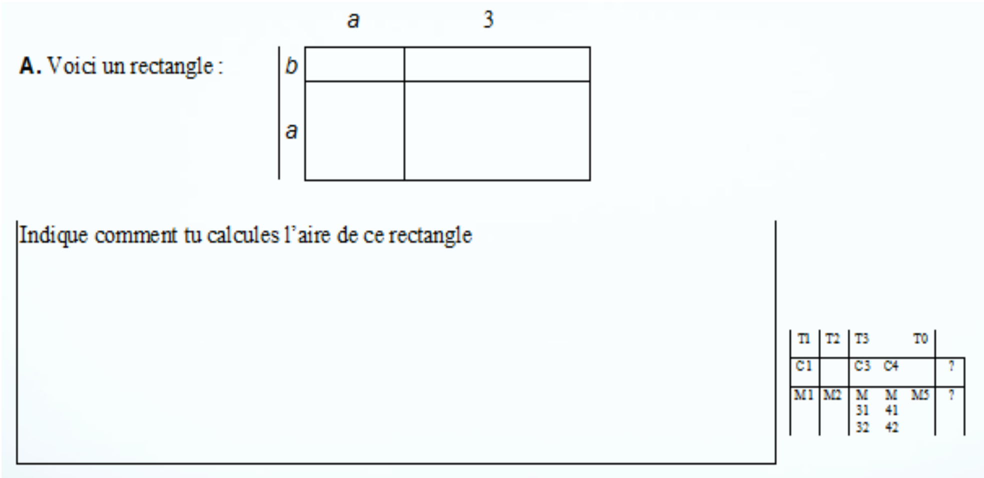



*Figure 1 : La tâche 3 du diagnostic P/C*

| | Analyse | Codage |
|---|---|---|
| **Solution correcte** | Deux démarches sont attendues :<br>1) les côtés du rectangle ont pour longueurs respectives $a + 3$ et $a + b$ ; l'aire du rectangle est égale à $(a + 3)(a + b)$ | **T1** C1 |
| | 2) le rectangle est la réunion de rectangles disjoints :<br>l'aire du rectangle est égale à la somme des aires, soit $ab + 3b + a^2 + 3a$, soit $(a + 3) \times b + (a + 3) \times a$, soit $(a + b) \times a + (a + b) \times 3$, soit ... | **T2** C1 |
| | Si un calcul algébrique correct est réalisé (développement ou factorisation selon les cas) pour obtenir une autre forme de l'expression | M1 |
| **Solutions incorrectes** | Solutions envisageables : | **T3** |
| | Expression non parenthésée : $a + 3 \times a + b$ | C3 M31 |
| | Confusion entre le périmètre et l'aire : $2(a + 3 + a + b)$ | C3 M41 |
| | Expression abréviative du type : $3a \times ab$ | C4 M42 |
| | Si un calcul algébrique est réalisé (développement ou factorisation selon les cas) pour obtenir une autre forme de l'expression, on retient le type de manipulation formelle mis en jeu (cf. analyse ci-dessous) | C M (cf ci-dessous) |
| **Absence de solution** | | **T0** |

*Figure 2 : Codage des réponses de la tâche 3*

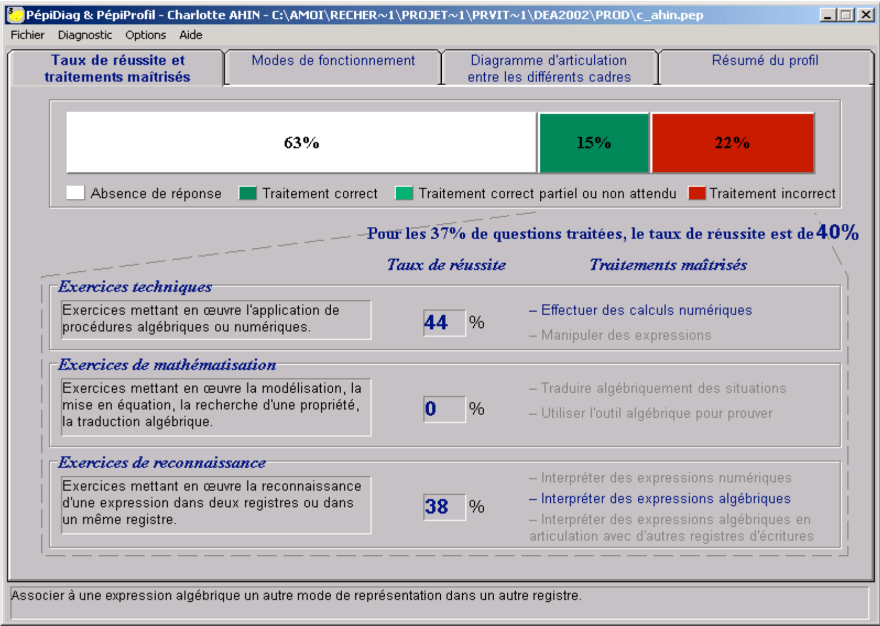



*Figure 4 : PépiProfil (1) description quantitative en termes de taux de réussite et de traitements maîtrisés*

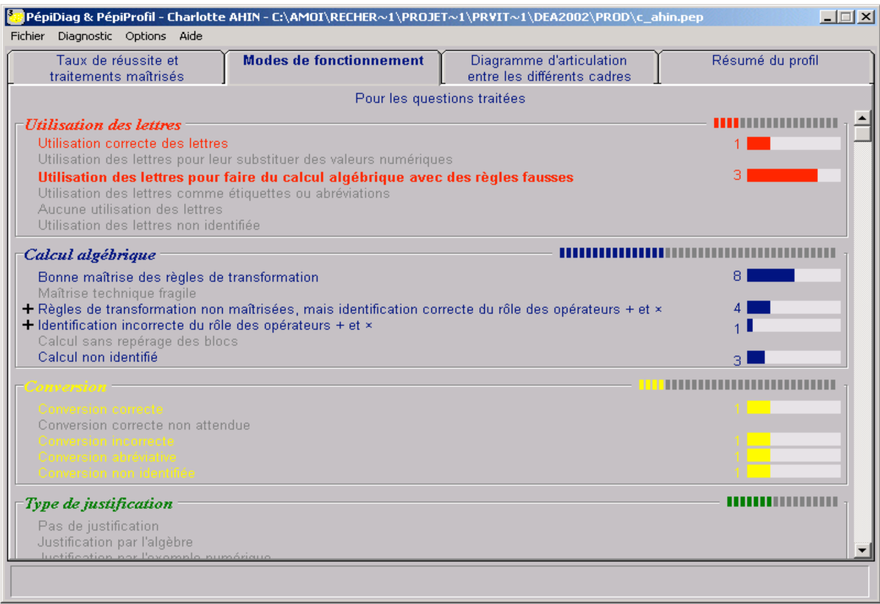



*Figure 5 : PépiProfil (2) description quantitative en termes de modes de fonctionnement*

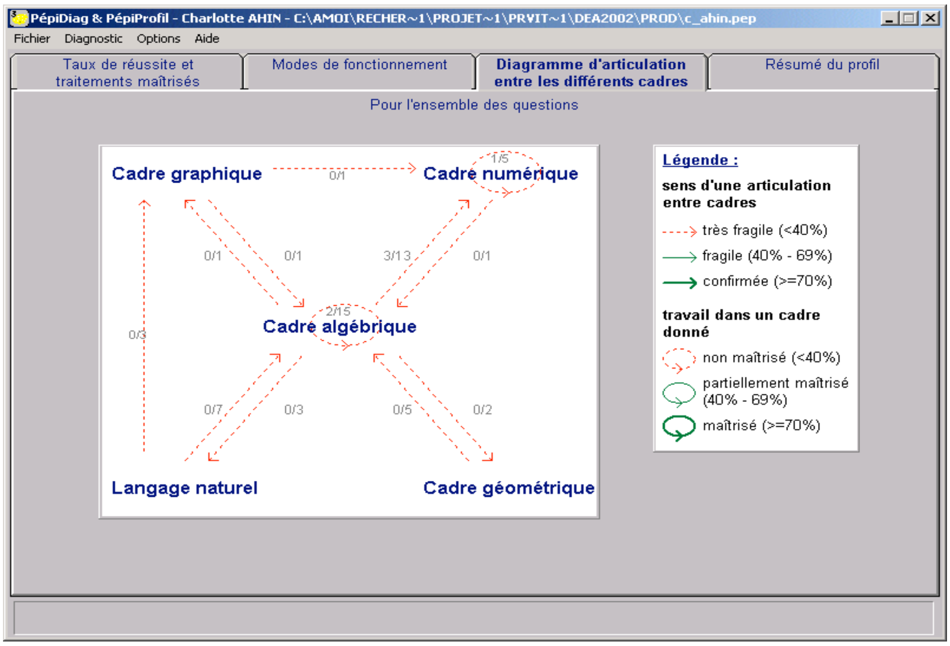



*Figure 6 : PépiProfil (3) diagramme d'articulation entre les différents cadres*

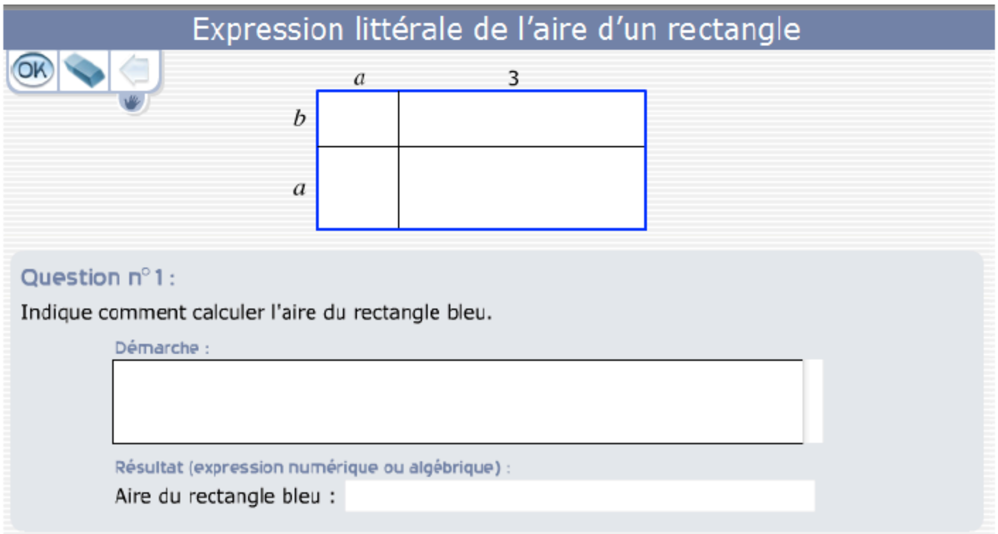



*Figure 7 : La tâche « Expression littérale de l'aire d'un rectangle »*

| | Analyse | Codage |
|---|---|---|
| **Solution correcte** | Deux démarches sont attendues :<br>1) les côtés du rectangle ont pour longueurs respectives $a + 3$ et $a + b$ ; l'aire du rectangle est égale à $(a + 3)(a + b)$<br>2) le rectangle est la réunion de rectangles disjoints :<br>l'aire du rectangle est égale à la somme des aires, soit $ab + 3b + a^2 + 3a$, soit $(a + 3) \text{ x } b + (a + 3) \text{ x } a$, soit $(a + b) \text{ x } a + (a + b) \text{ x } 3$, soit …<br>Si un calcul algébrique correct est réalisé (développement ou factorisation selon les cas) pour obtenir une autre forme de l'expression | V1 T1<br>V2 T1<br>EA1 |
| **Solutions incorrectes** | Solutions envisageables :<br>Expression non parenthésée : $a + 3 \text{ x } a + b$<br>Confusion entre le périmètre et l'aire : $2(a + 3 + a + b)$<br>Expression abréviative du type : $3a \text{ x } ab$<br>Si un calcul algébrique est réalisé (développement ou factorisation selon les cas) pour obtenir une autre forme de l'expression, on retient le type de manipulation formelle mis en jeu (cf. analyse ci-dessous) | V3<br>T3 EA31<br>T3 EA41<br>T4 EA42<br>T4 EA (cf ci - dessous) |
| **Absence de solution** | | V0 |

*Figure 8 : Codage des réponses pour la tâche 3*

<table>
<tr><th colspan="4">Caractérisation didactique</th></tr>
<tr><td>Objectifs</td><td colspan="3">Rechercher si un élève sait associer une expression algébrique à un domaine plan qui a pour aire cette expression</td></tr>
<tr><td>Composante</td><td colspan="3">Traduire algébriquement dans différentes représentations (algébrique, arithmétique et langage naturel)</td></tr>
<tr><td>Capacité</td><td colspan="3">Traduire une expression algébrique comme une aire d'une surface</td></tr>
<tr><td>Type de tâche</td><td colspan="3">- Calculer l'aire d'un domaine plan<br>- Associer une expression algébrique à l'aire d'un domaine plan</td></tr>
<tr><td>Critères de</td><td colspan="3">V1, V2, V3 : critères d'évaluation de la dimension « Validité »</td></tr>
<tr><td rowspan="6">validation</td><td>V1 : correct</td><td>V2 : correct partiel ou non attendu</td><td>V3 : incorrect</td></tr>
<tr><td colspan="3">EA1, EA31, EA33, EA41, EA42 : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Écriture et de réécriture Algébrique »</td></tr>
<tr><td colspan="3">EA1 : Utilisation correcte des règles de transformation<br>EA31 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat correct<br>EA33 : Utilisation de règles de transformation fausses identifiées<br>EA41 : Les règles de transformation utilisées linéarisent les expressions :<br>EA42 : Les règles de transformation utilisées « assemblent » les termes</td></tr>
<tr><td colspan="3">T1, T3, T4 : critères d'évaluation de la dimension « Traduction »</td></tr>
<tr><td>T132 : Traduction correcte de la géométrie vers l'algèbre</td><td>T332 : Traduction incorrecte de la géométrie vers l'algèbre</td><td>T432 : Traduction abréviative de la géométrie vers l'algèbre</td></tr>
</table>

*Figure 9 : Indexation didactique de la tâche « Expression littérale de l'aire d'un rectangle »*

| Type | Label | Code | Forme (à une Pépinière-équivalence près) |
|---|---|---|---|
| **1** | expressions correctes de l'aire sous la forme d'un produit Longueur × Largeur | V1, T132 | $(a + 3) \times (b + a)$ |
| **2** | expression de l'aire obtenue en additionnant les aires des différents rectangles | V2, T132 | $ab+a^2+3b+3a$<br>$(a\times(a+b))+(3\times(a+b))$<br>$a(a+3)+b(a+3)$ |
| **3** | Reconnaissance de sous-figures avec erreur de transformation | | |
| **3.1** | reconnaissance de sous-figures mais erreur de traduction au niveau des parenthèses (e.g. $a+3 \times a+b$) | V3, EA3, T332 | $(a+3)\times b+a$<br>$a+3\times(b+a)$<br>$a+3\times b+a$ |
| **3.2** | reconnaissance de sous-figures avec transformation par assemblage | V3, EA42, T332 | $(a+3)(ab)$<br>$(b+a)\times(3a)$<br>$a+3 \times ab$ ; $ab\times a+3$<br>$3a\times a+b$ ; $a+b\times 3a$ |
| **3.3** | reconnaissance de sous-figures Avec transformation par linéarisation $a^2$->2a (e.g. $ab+a^2+3b+3a$ ->$ab+2a+3b+3a$) | V3, EA41, T332 | $5a+ab+3b$<br>$ab+2a+3b+3a$ |
| **4** | confusion entre aire et périmètre | V3, T432 | $(a+b)+(a+3)$ ;<br>$(a+b+a+3)\times 2$ |
| | 4.1 transformation avec assemblage | V3, EA42, T432 | $6a + 4b$ ; $a^2+3b$<br>$ab+3a$ ; $ab+4a$<br>$a(3+b)$;$2a+3b$ ;$2ab+3$ |
| **5** | traduction par assemblage des désignations de la figure | V3, EA42, T432 | $a^2 b + 3 ab$ ;<br>$3a^2b$; $3a^2+3b$<br>$3a^2+3ab$ |
| | | | $a^2+ 4 ab$ ; $a^2+3ab$<br>$3ab$; $3+a^2+b$<br>$3+a^2b$; $a^2+ 7 ab$ |
| **6** | traduction de l'aire avec confusion entre les opérateurs + et × (e.g. $3a \times 3b \times a2 \times ba$) | V3, EA4, T432 | $3a \times 3b \times a^2 \times ba$<br>$ab+a^2\times 3b+3a$<br>$(a^2+3a)x(ba+3b)$<br>$ba\times b\times 3+a^2+a\times 3$ |
| **7** | Erreur de formules | | |
| | 7.1 Formule partielle | V3 T332 | $a(b+a)$ ; $3a+3b$ ;<br>$b(a+ 3)$ ; $ba+3b$<br>$3(b+a)$ ; $ab+a^2$ ; $a(a+3)$ ;<br>$a^2+3a$ |
| | 7.2 avec division, cube | V3 T432 | $(a^23b):2$ ; $3b^2 + a^3 + 3a$<br>$(b + a)/(a + 3)$<br>$a+3\times b+a/2$ |
| **8** | Valeur numérique | V3 L5 T432 | (pas de lettres) |
| **9** | Ininterprétée | Vx | |

*Figure 10 : Codage des réponses de la classe de tâches « expression littérale de l'aire d'un rectangle »*

**PIERRE JOB**

# ÉTUDE DU RAPPORT A LA NOTION DE DEFINITION COMME OBSTACLE A L'ACQUISITION DU CARACTERE LAKATOSIEN DE LA NOTION DE LIMITE PAR LA METHODOLOGIE DES SITUATIONS FONDAMENTALES/ADIDACTIQUES.

**pierre.job@climb.be**

**Facultés universitaires St-Louis, Belgique**

**Résumé :** Nous montrons comment l'interaction entre la théorie des situations et la théorie anthropologique permet de penser le concept de situation fondamentale à un niveau plus institutionnel mieux adapté à l'étude d'un concept comme celui de limite. Cette interaction se traduit par la distinction entre praxéologie déduction et praxéologie modélisation, distinction qui signe l'acte de naissance de deux institutions clefs dans l'évolution de l'analyse. S'approprier le concept de limite dans ses aspects dits formels, notamment sa définition quantifiée, revient alors pour l'essentiel à entrer dans une praxéologie déduction. Nous montrons à l'aide d'une ingénierie toute la difficulté éprouvée par des élèves du secondaire à réaliser cette entrée en faisant ressortir combien un point de vue empiriste sur les mathématiques lui fait obstacle. Cette vision empiriste des mathématiques en ensuite mise en perspective en montrant combien l'école belge incite à son insu les élèves à adopter un tel point de vue, prise dans un jeu de contraintes institutionnelles contradictoires qui ne lui laisse guère d'autres possibilités que de brasser de manière inconsistante praxéologies déduction et modélisation afin d'assurer une forme de viabilité écologique au concept de limite.

CHRISTINE MANGIANTE-ORSOLA

# UNE ETUDE DU PROCESSUS D'APPROPRIATION PAR DES ENSEIGNANTS DE SITUATIONS PRODUITES PAR LA RECHERCHE POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

christine.mangiante@espe-lnf.fr

**LML, ESPE Lille Nord de France**

**Résumé.**
Prenant appui sur des travaux menés depuis une dizaine d'années à l'IUFM Nord-Pas-de-Calais sur l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, nous interrogeons dans ce texte les moyens à mettre en œuvre pour améliorer la diffusion dans l'enseignement ordinaire des situations produites par cette recherche. Dans ce but, nous étudions un dispositif de travail articulant formation continue et production de ressources et recherchons des moments de confrontation entre les deux *points de vue* en présence : celui des formateurs/chercheurs et celui des enseignants.

## Introduction

Ce texte rend compte d'une recherche en cours qui s'inscrit dans le prolongement de travaux antérieurs mais prend appui sur de nouvelles données et nous conduit à proposer de nouveaux résultats.

Le travail de l'enseignant est au cœur de nos recherches. Plus précisément, nous nous intéressons au processus à travers lequel un enseignant qu'il soit débutant ou non peut être amené à s'approprier une activité décrite dans un manuel ou toute autre ressource pédagogique (Mangiante-Orsola, 2011, 2012). Pour étudier cet aspect du travail enseignant, nous nous efforçons d'élucider l'origine des écarts créés entre le projet présenté via la ressource utilisée et la séance effectivement mise en œuvre. Si certains résultats ont été obtenus à propos de ce *processus de modifications*, bien des questions demeurent à propos de son fonctionnement, de sa dynamique et des leviers sur lesquels formateurs et/ou concepteurs de ressources pourraient éventuellement jouer. En outre, jusqu'à présent, notre travail était limité à l'étude des modifications apportées à une séquence donnée et nous avions jusqu'alors peu questionné en amont ce qui peut encourager un enseignant à utiliser telle ou telle situation et en aval les possibilités d'enrichissement[35] des pratiques enseignantes au-delà de la mise en œuvre de la situation choisie[36].

## Comment améliorer la diffusion dans l'enseignement ordinaire de situations issues d'une recherche sur l'enseignement de la géométrie ?

Notre travail actuel vise à poursuivre cette étude du processus d'appropriation tout en l'inscrivant dans le prolongement d'une recherche menée sur l'enseignement de la géométrie par un groupe réunissant des formateurs de l'IUFM du Nord Pas de Calais[37]. L'approche développée dans ces travaux se veut adaptée au développement des connaissances des élèves (il s'agit de prendre appui sur le rapport des élèves aux figures) et cherche à construire une progression assurant une certaine continuité dans les apprentissages tout au long de la scolarité obligatoire (Duval, Godin 2006, Perrin-Glorian, Mathé, Leclercq, 2013). Sans détailler davantage cette approche[38], nous voudrions toutefois soulever les questions qui ont émergé à propos de la diffusion des situations produites par la recherche dans l'enseignement ordinaire. En effet, les membres du groupe (tous formateurs) ont rapidement fait le constat suivant : bien que conçues en étroite collaboration avec des enseignants maîtres formateurs qui les ont testées en classe, les situations produites par la recherche impactent peu les pratiques des enseignants qui les utilisent : celles-ci sont favorablement accueillies dans la mesure où elles permettent de proposer des résolutions de problèmes en géométrie (ce qui n'est pas si fréquent) mais elles ne suffisent pas à modifier durablement les pratiques (au-delà de leur mise en œuvre, rien ne change véritablement).

Suite à ce constat, le groupe a tout naturellement été amené à interroger les moyens à mettre en œuvre pour favoriser la diffusion de ces situations dans l'enseignement ordinaire et à envisager la production de ressources pour l'enseignement et la formation.

Cette préoccupation et ce projet faisaient écho à mes propres questions de recherche. Qu'est-ce qui peut faire obstacle au processus d'appropriation de ces situations d'enseignement de la géométrie ? Comment les rendre plus accessibles aux enseignants ? Sur quels leviers de formation jouer ? Quelles ressources produire pour donner les moyens aux enseignants d'enrichir durablement leurs pratiques ?

## Choix théoriques et méthodologiques

### *Présentation générale du dispositif*

Pour trouver des éléments de réponse à cette problématique, nous cherchons à nous placer au plus près de l'activité enseignante et c'est pourquoi nous faisons le choix d'étudier un dispositif de formation avec production de ressources. Avant de préciser davantage nos appuis théoriques et notre méthodologie d'analyse, voici les grandes lignes du dispositif de travail étudié, tel qu'il a été conçu[39].

Il y a maintenant plus de deux ans, souhaitant redynamiser l'enseignement de la géométrie dans les écoles de sa circonscription, Régis Leclercq, Inspecteur de l'Education Nationale associé à la recherche, nous propose d'élaborer un dispositif de formation de deux fois neuf

[35] Nous entendons par enrichissement des pratiques, le développement de pratiques plus diversifiées dans le sens d'une meilleure progression des élèves.
[36] Il s'agit d'un objectif à plus long terme que la recherche actuelle ne nous a pas encore permis d'atteindre.
[37] Ont participé à ces recherches, à un moment ou un autre, J.R. Delplace, R. Duval, C. Gaudeul, M. Godin, B. Keskessa, R. Leclercq, C. Mangiante, A.C. Mathé, B. Offre, M. J. Perrin, O. Verbaere.
[38] Nous aurons l'occasion d'en dire davantage au fil du texte.
[39] Dans la partie suivante, nous rendons compte plus en détails du déroulement effectif du dispositif.

heures, sur deux années consécutives. Ce dispositif doit déboucher sur la production de ressources et sur la participation des enseignants concernés à un « forum des pratiques » destiné à présenter le travail réalisé à leurs collègues.

Au cours de la première année, trois séances sont prévues : une animation plénière sur l'enseignement de la géométrie ouverte à tous les enseignants des cycles 2 et 3 de la circonscription et deux séances de travail réservées aux enseignants ayant choisi de suivre le module de formation avec production de ressources. La deuxième année doit permettre de poursuivre le travail engagé avec le même groupe d'enseignants. Trois séances sont également prévues. Afin d'accompagner au mieux les enseignants dans ce travail de conception de ressources, de nombreux allers-retours entre expérimentation en classe et travail de rédaction sont prévus grâce notamment à la participation des conseillers pédagogiques qui pourront se déplacer et rencontrer les enseignants dans leur école.

En tant que formateurs, nous faisons l'hypothèse que ce travail collaboratif, parce qu'il laisse une certaine marge de manœuvre aux enseignants et les implique dans la production de ressources, est susceptible de favoriser l'appropriation des situations issues de la recherche.

En tant que chercheurs, nous faisons l'hypothèse que l'étude de ce dispositif nous donne accès à certains aspects du travail des enseignants et nous permet de recueillir des informations à propos de la façon dont ils choisissent, transforment, et dans quelle mesure ils s'approprient les situations proposées (ou choisies par eux-mêmes). Ainsi, dans le cadre de ce contexte particulier, nous cherchons à étudier ce qui se joue à l'interface du groupe constitué par les formateurs/chercheurs et de celui des enseignants pour, à terme, mieux cerner les conditions d'appropriation par les enseignants de situations (plus ou moins directement) inspirées par la recherche.

***Comment recueillir des informations à propos du processus d'appropriation dans le contexte particulier de ce dispositif de travail ?***

Une première caractéristique du dispositif de formation dont nous devons tenir compte est sa finalité c'est-à-dire la production de ressources. Cela nous conduit à nous tourner vers des recherches menées en psychologie ergonomique à propos de l'analyse de l'activité pour la conception et notamment les travaux de. Béguin et Cerf. Ceux-ci distinguent en effet trois postures que l'ergonome peut adopter pour analyser l'activité pour la conception. Ces trois postures se réfèrent à trois principes différents.

> « Le premier pose la nécessité d'une anticipation de l'activité, et affirme que cette anticipation devrait être partie intégrante des stratégies de conception. Le second postule que l'activité en situation permet de rendre les situations conçues plus efficaces, et préconise une plasticité des systèmes techniques ou des organisations. Le troisième principe appréhende la conception comme un processus développemental, où caractéristiques des situations et activités de travail évoluent dialectiquement durant la conduite du projet. » (Béguin, P., & Cerf, M., 2004)

Selon ces auteurs, il n'y a ni rupture entre les trois principes, ni progression d'un principe vers un autre. Il ne s'agit donc pas de principes s'excluant mutuellement.

Nous retenons pour notre travail le fait que le dispositif étudié s'appuie sur ce troisième principe : les concepteurs du dispositif font en effet l'hypothèse (implicite) que la formation des enseignants se fait à travers la production de ressources et que par ailleurs ils peuvent au fil des séances adapter à l'enseignement ordinaire les situations initialement produites par la recherche. Ils supposent donc que le dispositif vise à développer conjointement les situations pour la classe et les pratiques des enseignants.

Nous cherchons également à tenir compte d'une autre caractéristique du dispositif : la mise en présence de personnes aux statuts différents autour de l'élaboration d'un projet commun.

Pour décrire ce travail de conception entre des personnes aux statuts différents associés à des connaissances différentes, Beguin et Cerf parlent de processus dialogique (Beguin, Cerf, 2004). Ils  utilisent la notion de *monde*, empruntée à Prieto[40]. Cette notion de monde est une conceptualisation de la notion de *point de vue*. Lorsque ces auteurs parlent de *point de vue*, il ne s'agit pas d'un point de vue purement subjectif comme dans l'expression « à chacun son point de vue » pour signifier « à chacun son opinion, son avis » mais d'un point de vue situé c'est-à-dire défini par rapport au métier exercé ou pour le dire autrement défini par rapport à «d'où le sujet voit ».

Ainsi, face à un même objet coexistent différents *points de vue*, différents *mondes* qui sont autant de systèmes de référence, des arrières plans à partir desquels chacun se saisit d'une réalité tangible. Chaque arrière-plan est construit par et pour l'action par le sujet ce qui fait dire à Beguin que ce *monde* est construit et orienté. Et le sujet se situe à l'intérieur de ce *monde*, s'y positionne de manière singulière et construit ainsi peu à peu son expérience.

Nous retenons pour notre travail cette notion de *monde* pour conceptualiser le processus dialogique qui nécessairement va s'installer au cœur du dispositif entre d'une part les formateurs/chercheurs et d'autre part, les enseignants. La production de ressource est vue comme la construction possible d'un *monde commun*, un lieu d'échanges, d'apports mutuels mais aussi de mises en tensions entre des *mondes* (ou *points de vue*) différents.

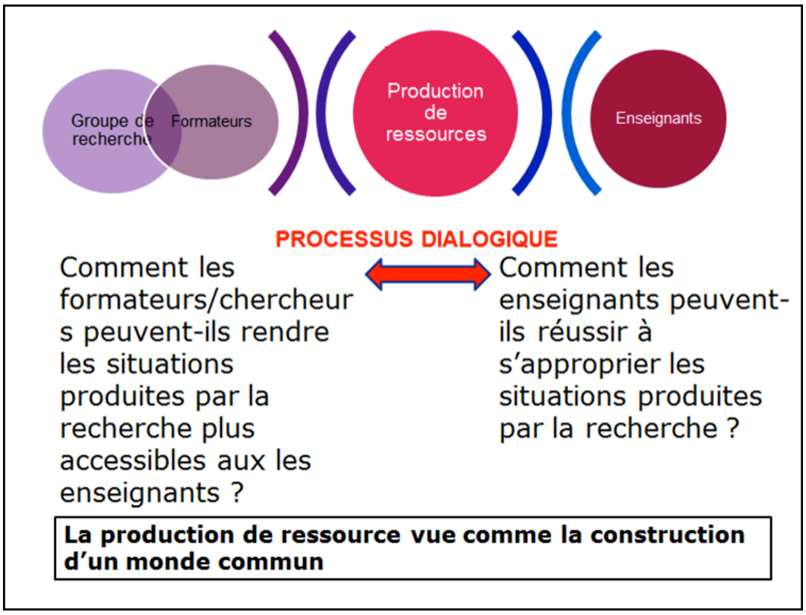



Figure 1

Néanmoins, nous devons préciser que nous empruntons ces éléments au cadre théorique évoqué mais que nous les interprétons pour les adapter à notre recherche. Notre intention est d'étudier ce qui se joue dans ce contexte bien particulier qui est celui de la formation continue avec production de ressources qui met en présence des personnes ayant des *points de vue* différents dans un contexte où pèsent des rapports institutionnels à ne pas négliger.

Par ailleurs, nous prenons appui sur d'autres cadres théoriques : la théorie des situations de Brousseau, 1998 et les registres des représentations sémiotiques de Duval, 1994 qui constituent les principaux appuis théoriques à partir desquels ont été conçues les situations produites par le groupe mais aussi la double approche des pratiques (Robert, Rogalski, 2002)

[40] Prieto, L. J. (1975). Pertinence et pratique Essai de sémiologie. Paris : Editions de Minuit

puisque notre questionnement porte sur la façon dont les enseignants s'approprient ces situations et les intègrent à leurs propres pratiques.

Enfin, il nous faut préciser que notre position personnelle dans ce dispositif n'est pas facile à définir. Appartenant au groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie (représentée sur le schéma de la figure 1 par le disque à gauche), nous sommes aussi formatrice (donc dans cette intersection entre les deux disques)[41] et en même temps, nous menons une recherche sur le dispositif représenté par l'ensemble du schéma. Dans la suite du texte, nous veillerons à distinguer l'analyse des formateurs/chercheurs et notre analyse en tant que chercheur s'intéressant au dispositif.

#### *Précisions à propos de la méthodologie*

Notre démarche générale consiste à poser un regard distancié sur la production de ressources pour y repérer des moments de confrontations que nous définissons comme *des moments où le travail des uns peine à être validé par les autres*. Ces moments de confrontation sont révélateurs de mises en tension entre les formateurs/chercheurs d'une part et les enseignants d'autre part. Leur dynamique permet de mettre en évidence le jeu qui s'installe entre les deux *points de vue* en présence, de décrire comment évoluent ces mises en tension et comment les différents protagonistes parviennent ou non à les apaiser voire à les dépasser.

Nous cherchons aussi à déceler ce qui est à l'origine de ces moments de confrontation. Ces mises en tension sont-elles dues à des connaissances différentes construites à partir de *points de vue* différents ? à des priorités différentes ?

Ainsi, deux axes sont à interroger. À la double flèche qui représente sur le schéma (figure 1) le processus dialogique entre les deux *points de vue* en présence, nous associons une double question.

- Comment les formateurs/chercheurs peuvent rendre les situations produites par la recherche plus accessibles pour les enseignants ?
- Comment les enseignants peuvent-ils réussir à s'approprier les situations produites par la recherche ?

### Étude du dispositif articulant formation continue et production de ressources

Cette partie vise à décrire le déroulement effectif du dispositif tout en mettant en évidence les moments de confrontation repérés au fil de l'analyse. Nous suivrons pour cela un ordre chronologique.

#### *Initier le travail*

Le travail débute par une première prise de contact avec dix enseignantes volontaires de cycle 2 et de cycle 3. Les conseillers pédagogiques vont à leur rencontre pour leur présenter les objectifs de la formation et les modalités de travail. A cette occasion, des séances ordinaires de géométrie sont filmées et des interviews sont réalisés de manière à obtenir des informations sur les pratiques usuelles de ces enseignantes (manuels utilisés, progressions, difficultés rencontrées, …) et sur leurs attentes vis-à-vis de la formation.

L'animation plénière destinée à tous les enseignants de la circonscription permet aux formateurs de présenter les idées-clés développées par le groupe de recherche et de proposer un travail en atelier durant lequel chacun des enseignants peut, d'une part se confronter à des

[41] Tout comme Régis Leclercq même si sa fonction d'IEN lui confère une position toute particulière vis-à-vis des conseillers pédagogiques et des enseignants.

situations de restauration de figures et d'autre part entamer une réflexion sur les actions sur le matériel en lien avec les gestes et les concepts de géométrie.

Au cours de cette première séance, les formateurs insistent sur la nécessité d'accompagner les élèves dans un changement de regard sur les figures. Pour illustrer cette idée, ils prennent appui sur l'exemple de la vision d'un rectangle (Qu'est-ce qu'un rectangle pour un élève de maternelle, de CP ou de 6e ?) et expliquent que les définitions données évoluent en même temps que le rapport aux figures[42].

Suite à cette séance et sur proposition des conseillers pédagogiques, un premier document est remis aux enseignantes volontaires. Celui-ci présente de manière concise sept situations de reproduction de figures que les enseignantes sont invitées à tester dans leur classe. Pour inciter ces dernières à questionner leurs pratiques sans pour autant trop les remettre en question, les formateurs font le choix de présenter des situations proches de pratiques usuelles (les tâches de reproduction de figures sont mentionnées dans les programmes) mais néanmoins nouvelles par certains aspects (notamment le choix des instruments mis à disposition).

Les indications à propos de la mise en œuvre de ces situations sont volontairement succinctes. En effet, les formateurs souhaitent éviter de fournir des situations clés en main qui pourraient enfermer les enseignantes dans un déroulement trop contraint et préfèrent leur laisser la possibilité de modifier les situations proposées pour mieux les adapter à leurs besoins, au niveau de leurs élèves, à leurs pratiques, etc.

Cette liste de situations illustre (de manière implicite) une progression possible du cycle 2 au cycle 3. Dans ce but, pour mettre en évidence les variables didactiques sur lesquelles jouer (le choix des instruments, les contraintes de la tâche, etc.) une seule et même figure est choisie pour figure modèle.

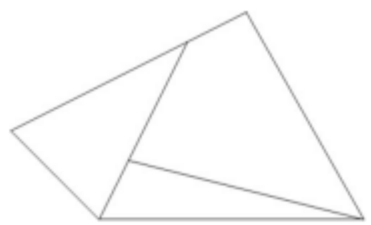


Figure 2

Dans la première situation, pour reproduire la figure modèle (figure 2), les enfants doivent juxtaposer des formes découpées (vision surface, assemblages par juxtaposition). Dans la deuxième situation, le choix des formes disponibles contraint les élèves à procéder par superposition (vision surface, assemblages par superposition).

[42] En maternelle, les élèves manipulent des formes ayant une certaine épaisseur. Un rectangle, c'est une forme de bois ou de plastique qu'on peut déplacer, manipuler, comparer à d'autres. Puis les élèves vont tracer des figures à l'aide de gabarits, il s'agit donc pour eux de surfaces fermées. Un rectangle, c'est alors un contour qu'on peut tracer sur le papier avec un gabarit ou un pochoir dont on peut colorier l'intérieur, une surface fermée. Puis progressivement, les figures seront vues comme un assemblage de droites. Un rectangle, devient alors un réseau de 4 droites (ou segments) deux à deux parallèles ou perpendiculaires. Une relation va se créer entre des segments, des points, des droites et l'élève va pouvoir ainsi appréhender les propriétés. Un rectangle, c'est alors certaines relations entre des segments (les côtés ou les diagonales) des points (les sommets, le centre), des droites (les supports des segments, les axes de symétrie). L'élève peut alors dégager des propriétés caractéristiques du rectangle (conditions nécessaires et suffisantes). Ainsi, afin de passer d'une reconnaissance perceptive à l'analyse géométrique d'une figure, un changement de regard serait donc nécessaire de la vision « surfaces » de la figure à une vision « lignes » et/ou vision « points ».

Puis, dans la troisième situation, le découpage leur est interdit et c'est par tracé des contours des formes que les élèves doivent reproduire la figure modèle (vision contour). Enfin, dans les séances suivantes, les élèves sont amenés à utiliser des gabarits de plus en plus grignotés, ce qui permet de les accompagner peu à peu vers l'utilisation d'instruments plus proches des instruments usuels (par exemple, dans la dernière situation, ils ont à leur disposition une règle informable et un gabarit d'angle droit).

Même si ce n'est pas indiqué dans le document, ces situations visent à accompagner les élèves dans un changement de regard sur les figures (comme cela avait été précisé lors de l'animation plénière), à favoriser le passage d'une reconnaissance perceptive à l'analyse géométrique d'une figure.

***Première séance et premiers moments de confrontation***

Lors de la première séance, le document distribué donne lieu aux premiers échanges et à une première confrontation entre les deux *points de vue* en présence. Les formateurs avaient fait le choix de laisser une certaine marge de manœuvre mais les enseignantes ne l'ont pas ou peu investie. Notre analyse des échanges nous conduit à distinguer plusieurs causes à cela. Tout d'abord, les enseignantes ne se sentent pas autorisées à modifier les situations proposées ou n'osent pas prendre le risque de le faire lors d'une première expérimentation. Ensuite, elles ont besoin de cerner cette marge de manœuvre. Identifier les éléments pouvant être modifiés sans pour autant dénaturer la situation nécessite certaines connaissances à propos des enjeux d'apprentissage mais aussi une compréhension suffisante du rôle des instruments, de la progression choisie, etc. Par conséquent, là où les formateurs cherchent à mettre en évidence la logique d'une progression via un jeu sur les instruments et laissent le soin aux enseignantes d'adapter les situations, celles-ci cherchent à adapter ces situations en réglant des problèmes matériels sans trop savoir si elles peuvent s'autoriser ou non à le faire.

Néanmoins, il faut souligner que cette mise en tension entre les deux *points de vue* est rapidement dépassée et que c'est précisément les échanges suscités qui permettent aux formateurs de proposer des apports en termes de savoirs pour l'enseignant. Ils saisissent cette occasion pour expliquer à nouveau en quoi jouer sur les instruments permet d'accompagner le changement de regard sur les figures et surtout pour préciser l'articulation entre le choix des instruments, les procédures attendues des élèves et le type de regard porté sur la figure (vision en terme de surfaces, de lignes ou de points).

Dès la première séance, nous relevons des moments de confrontation autour d'une question qui deviendra récurrente. Bien que les formateurs aient fait de choix de proposer une tâche peu éloignée des pratiques existantes, les enseignantes s'interrogent : *« Où placer ces situations dans ma progression ? Dans quel chapitre ? C'est où dans les programmes ? »*. Si les formateurs sont convaincus de la nécessité de prendre en compte les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les enseignantes et de les aider à planifier le travail de la classe, ils se heurtent néanmoins à plusieurs difficultés. Certaines trouvent leur origine dans les réticences de certaines enseignantes (et notamment celles de cycle 3) à prendre le temps d'utiliser d'autres instruments de géométrie. *« Pourquoi ne pas utiliser les instruments usuels puisque c'est ce qui est demandé au collège ? ».* Elles ont bien perçu les objectifs visés mais ne sont pas convaincues par la pertinence des propositions des formateurs.

D'autres réticences sont davantage dues à des difficultés à percevoir les enjeux d'apprentissage. Par exemple, Mme S. utilise des équerres « grignotées » mais ne peut expliciter en quoi cela peut accompagner (ou pas) les élèves dans un changement de regard sur les figures. Elle utilise les règles grignotées uniquement dans la séquence « droites parallèles, droites perpendiculaires » d'où peut-être la difficulté pour elle de rapprocher l'utilisation de ce matériel avec une séquence sur la reproduction de figures. Le matériel «équerres grignotées» reste associé à la séquence sur les droites perpendiculaires et seulement à cette séquence-là.

Les enseignantes de cycle 2 semblent moins préoccupées par le respect des programmes. Il y a manifestement plus de place dans leurs progressions et dans les manuels pour y intégrer des situations de restauration. Néanmoins, elles cherchent à associer les propositions des formateurs avec un type de matériel qui serait déjà présent dans les classes. Par exemple, lorsque l'une d'entre elle suggère d'utiliser les pièces du Tangram, cela apporte un réel soulagement au sein du groupe d'enseignantes car, comme le fait remarquer l'un des conseillers pédagogiques, *« le Tangram constitue une culture commune et cela les rassure ».*

Nous relevons ici un autre décalage entre les *points de vue* en présence : alors que les formateurs tentent de situer leurs propositions par rapport aux programmes en mettant en lumière les enjeux d'apprentissage, les enseignantes recherchent des indices dans le matériel utilisé, les titres des chapitres de leurs manuel, etc.

Nous retenons la nécessité pour les formateurs d'aider les enseignantes à dépasser certains critères parfois superficiels pour recentrer leur attention et leur analyse sur les enjeux d'apprentissage et nous retenons pour la recherche la nécessité de s'interroger sur les critères spontanément utilisés par les enseignantes pour faire des liens. En effet, l'absence de mise en relation en termes d'enjeux d'apprentissage constitue très vraisemblablement un frein à l'enrichissement des pratiques au-delà des situations proposées[43].

***Premières expérimentations***

Le travail se poursuit, lors des séances suivantes, par l'analyse de situations menées en classe (des situations proposées ou choisies par les enseignantes elles-mêmes à partir d'exemples rencontrés au cours de la première séance de formation). Nous retenons l'exemple des situations de reproduction et de restauration conçues et testées en classe par les enseignantes de cycle 3. Comme convenu, les enseignantes ont fait parvenir aux formateurs fiches de préparation, observations et productions d'élèves, quelques jours plus tôt, de sorte que ceux-ci puissent réagir à leurs propositions. Ils mesurent alors combien il est difficile pour les enseignantes de choisir des situations adaptées au niveau de leurs élèves et décident de leur demander d'effectuer elles-mêmes les restaurations de figures pour mieux analyser la tâche attendue des élèves. Plus précisément, l'objectif des formateurs est de les aider à cerner les connaissances en jeu pour ensuite d'effectuer un retour sur les variables didactiques sur lesquelles jouer pour mieux adapter les situations au niveau des élèves et en déduire une progression possible pour leur classe. Plus précisément, ils les invitent à compléter un tableau constitué de deux colonnes : une colonne « actions sur le matériel » et une colonne « concepts ou propriétés de géométrie en jeu » (par exemple, les enseignantes notent : « prolonger un trait » et « notion de droite » ou encore « recherche du milieu d'un segment avec une bande de papier » et « le milieu d'un segment est sur l'axe de symétrie de ce segment »). Les formateurs leur demandent ensuite d'identifier différents niveaux de difficultés en se référant aux lignes du tableau ainsi réalisé.

Les travaux menés dans le Pas-de-Calais soulignent l'importance de l'articulation entre actions sur le matériel, concepts de géométrie et langage mais il faut que les formateurs puissent préciser ce qui peut être articulé. Par ailleurs, la recherche menée par le groupe a le souci d'assurer une certaine continuité des apprentissages tout au long de la scolarité obligatoire mais pour cela il faut donner les moyens aux enseignants de contrôler la progressivité des apprentissages visés par les situations proposées. Exercer les enseignantes à

[43] Nous faisons allusion ici au constat fait par le groupe à propos de l'impact limité de la mise en œuvre des situations sur les pratiques enseignantes.

identifier une liste de variables didactiques ne suffit pas, elles doivent acquérir les moyens de jouer sur ces variables de façon à adapter ces situations en fonction de leurs objectifs et surtout contrôler la progressivité des apprentissages visés. Dans cette perspective, le travail à partir du tableau permet de mettre en lien la situation choisie (choix de la figure à reproduire, choix de l'amorce, choix des instruments à disposition) et les apprentissages attendus. Ainsi, au cours de cette deuxième séance, les formateurs commencent à interroger comment opérationnaliser les résultats directement issus de la recherche.

***Production de ressources***

Au cours de la deuxième année, trois séances de formation ont lieu. L'objectif des formateurs est d'accompagner les enseignantes dans le travail de conception de ressources par un jeu d'allers retours entre expérimentations en classe et échanges au sein du groupe (au cours des séances de travail mais aussi par échanges de mails). La première séance a pour but d'initier le travail de production de ressources et d'organiser le suivi (chaque enseignante pourra être aidée par un conseiller pédagogique). La deuxième séance permet de dresser les premiers bilans, d'apporter des ajustements aux ébauches de ressources produites. La troisième et dernière séance est consacrée à la préparation du forum des pratiques. Les enseignantes prévoient d'animer seules deux ateliers de 45 minutes (un par cycle). Il s'agira de proposer à leurs collègues une situation emblématique pour ensuite échanger à propos de leurs propres expériences.

Au cours de cette deuxième année, cinq ressources seront à terme produites (trois pour le cycle 2 et deux pour le cycle 3) et quatre séances seront filmées. Si nous ne présentons pas ici en détail mais nous les utilisons pour mettre au jour quelques moments de confrontation entre les deux *points de vue* en présence.

*Restauration de surfaces au CP*

Le premier exemple est celui du travail mené par Mme D. une enseignante de CP autour de la restauration de figures vues comme surfaces. La situation consiste à demander aux élèves de reproduire une figure modèle (figure 3) en utilisant des gabarits (les pièces A, B, C, D intactes ou en partie déchirées)[44].

D'après l'analyse a priori, il s'agit d'une situation de reproduction de figure pour laquelle l'enseignant peut jouer sur différentes variables didactiques : le nombre et le choix des pièces mises à disposition, la présence ou non d'une figure amorce, des pièces grignotées ou pas. Cette situation fait partie des situations proposées par le groupe. Elle figure sur un document en ligne sur le site de l'IUFM Nord Pas-de-Calais « géométrie au cycle 2 », fruit d'un travail mené avec des conseillers pédagogiques. Mais, l'enseignante dit ne pas avoir lu l'intégralité du texte, elle a seulement choisi d'utiliser la figure modèle qu'elle a reproduite sur sa fiche de préparation, en modifiant au passage par inadvertance l'ordre des lettres servant à désigner les pièces.

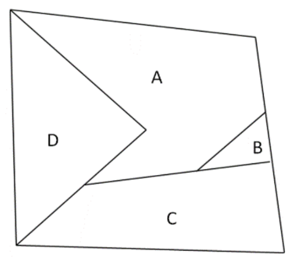



Figure 3

Mme D. a prévu un déroulement en trois phases sur sa fiche de préparation comme le montrent ces extraits (figure 4).

[44] La figure modèle est à leur disposition.

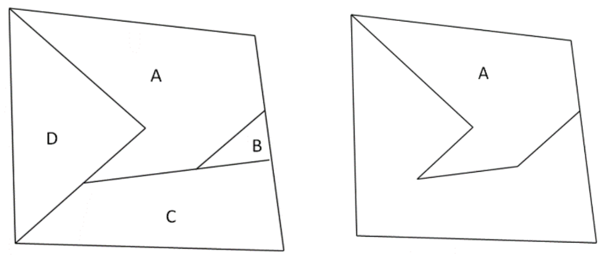
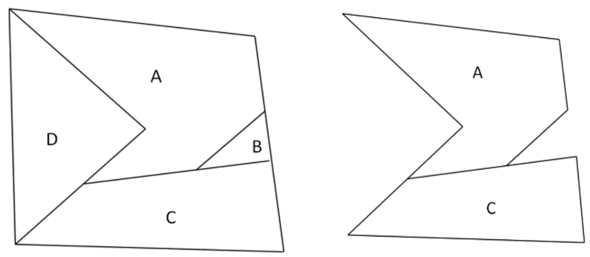
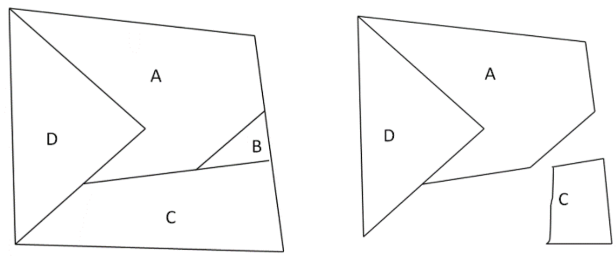
| | |
|---|---|
| 1ère activité<br>Reproduire la figure avec le cadre et le gabarit de la forme A et une règle.<br>Prolonger pour obtenir D. Obtenir des formes B et C. |  |
| 2ème activité<br>Reproduire la figure sans cadre en utilisant les gabarits de A et C.<br>/!\ positionner correctement les deux gabarits. Prolonger les deux lignes à gauche et à droite de la figure |  |
| 3ème activité<br>Reproduire la figure en utilisant deux gabarits A et D et le gabarit C en partie déchirée (pour reporter la largeur de C) Prolonger la pointe de A; Prolonger le cadre de la droite. Reporter la largeur de C. Relier D et C |  |

Figure 4

Cette fiche de préparation montre que l'enseignante prend en compte certains des enjeux évoqués en formation. En effet, elle écrit sous les rubriques « objectifs » et « compétences » : passer d'une vision contour à une vision ligne des formes, reproduire des figures géométriques simples à l'aide d'instruments et de techniques. Elle organise un déroulement en trois phases ce qui suppose une certaine capacité à interpréter actions, gestes, tracés à effectuer en termes de vision contours et vision lignes et une analyse du geste « tracer une ligne » pour y voir différents niveaux de complexité. Son travail de préparation montre également qu'elle anticipe certaines difficultés pouvant être rencontrées par les élèves (elle note : *« attention, positionner correctement les deux gabarits - prolonger les deux lignes à gauche et à droite de la figure…»*) même si elle ne va pas jusqu'à distinguer, du moins à l'écrit, les niveaux de difficulté des tracés à effectuer. En effet, au cours de la phase 3, les élèves doivent compléter le cadre en effectuant deux tracés différents : l'un consiste à joindre des sommets des pièces A et C pour obtenir un côté du quadrilatère constituant le cadre et l'autre consiste à prolonger les contours des pièces A et C pour compléter un autre côté de ce même quadrilatère. Or, le premier tracé est d'un niveau de complexité supérieur au second puisqu'il ne suffit plus ici de prolonger des traits mais de joindre deux points, ceux constitués par deux sommets relativement éloignés l'un de l'autre.

Par ailleurs, l'enseignante ne semble pas avoir pris en compte au moment de la préparation le saut important qui existe entre les phases 2 et 3. En effet, l'utilisation du gabarit déchiré contraint les élèves à organiser leurs actions sur le matériel : ils doivent commencer par prolonger des traits pour pouvoir ensuite placer le gabarit déchiré. Cela crée une rupture par rapport aux phases précédentes pour lesquelles le placement des gabarits précédait la réalisation des tracés.

La séance se déroule néanmoins sans écart majeur par rapport au projet de l'enseignante. Les élèves de CP étant peu nombreux (classe de GS/CP), celle-ci peut facilement observer les procédures des élèves et intervenir auprès de certains. Dès la fin de la séance, au cours de l'entretien à chaud avec les formateurs, Mme D. analyse les difficultés rencontrées par certains de ses élèves et explicite ses choix. Les formateurs saisissent cette occasion pour l'interroger à propos de son travail de préparation. Mme D. a trouvé sur internet le document « géométrie au cycle 2 » et a reproduit sur bristol la figure modèle choisie afin de pouvoir l'étudier plus facilement. Elle a testé plusieurs situations possibles en jouant sur la présence ou non d'une amorce et le choix des pièces à disposition. Elle explique notamment qu'elle avait envisagé une quatrième situation mais qu'elle y a renoncé car cela nécessitait la prise en compte d'alignements (ce que Mme D. jugeait trop difficile pour des élèves de CP).

Le document trouvé sur internet présente à partir de la même figure modèle une liste de situations possibles en jouant sur les variables didactiques précédemment identifiées. Mme D. n'a pas utilisé cette liste. Pour organiser le déroulement de la séance, elle n'a pas eu recours à la liste d'exemples donnés, il lui a suffi de rechercher quelques idées de situations adaptées à ses objectifs et de les organiser selon un niveau croissant de difficulté.

Si la liste des variables didactiques à utiliser constitue une aide indéniable, le travail de préparation consiste avant tout à sélectionner des situations en fonction de sa classe et de ses objectifs. Le document utilisé fait un inventaire (non exhaustif mais néanmoins très riche) d'exemples de situations possibles déduites non pas d'objectifs fixés en amont mais d'un jeu sur les variables didactiques. De plus, il faut souligner que les auteurs, voulant probablement montrer toute l'étendue des possibilités vont jusqu'à proposer des situations non adaptées à des élèves de cycle 2. Même s'ils mettent en garde le lecteur, il parait difficile pour un enseignant (en dehors de tout accompagnement) de repérer parmi ces exemples ceux qui sont adaptés au niveau de ses élèves et de les organiser selon une progression pertinente. Celui-ci est donc mis face à une liste de possibles très riche mais sans réels moyens de faire des choix. Il existe donc un décalage entre le travail de préparation de l'enseignante et les informations fournies par le document.

*Progression sur la notion de cercle au CM1*

Ce deuxième exemple est très différent du premier. Lorsque les formateurs rencontrent Mme M. dans sa classe, celle-ci leur annonce très clairement, qu'elle va leur présenter une séance qui ne s'appuie pas sur le travail fait en formation. Elle explique que son objectif est d'amener les élèves à réinvestir le lexique acquis précédemment sur le cercle car, justifie-t-elle, *« c'est une figure au programme du CM1 ».* Au cours de l'entretien à chaud qui suit immédiatement la séance, les formateurs l'interrogent à propos de sa progression et constatent des différences par rapport à la progression suivie l'année précédente. Elle ne se réfère plus exclusivement à la méthode Cap Maths[45]. Non seulement, elle a pris appui sur d'autres ressources[46] mais, de plus, elle y a intégré plusieurs activités de restauration de figures. Afin de cerner jusqu'où cette enseignante a conscience des liens entre la formation suivie et les changements apportés, les formateurs lui demandent alors de compléter sa progression en l'intégrant dans un tableau deux colonnes permettant d'indiquer en regard de chaque situation prévue « en quoi cela permet d'aborder la notion de cercle (vision ligne, vision point)». L'extrait reproduit ci-dessous (figure 5) rend compte du travail réalisé par l'enseignante. Les formateurs l'aideront ensuite à compléter la ressource ainsi produite par un éclairage sur la notion de point (figure 6).

[45] Cap Maths, Charnay, Combier, Dussuc, Madier, éditions Hatier, 2010

[46] Enseigner les mathématiques au cycle 3 : deux situations d'apprentissage en images : le cercle sans tourner en rond, l'enveloppe des nombres Muriel Fénichel ; Catherine Taveau. - CRDP de l'académie de Créteil, 2008.

| Progression sur le cercle : présentation des différentes étapes | Comment aborder la notion de point ? |
|---|---|
| Utiliser la définition du cercle | |
| Activité 1 : Avis de recherche (voir page 8) Cap Maths | Le cercle est un ensemble de points situés à égale distance d'un point appelé centre.<br>Points situés à une distance donnée d'un point fixé |
| Réinvestissement : Utiliser le cercle pour résoudre un problème de localisation de points. | |
| Activité 3 (recherche) : le trésor du pirate | Trouver un point, intersection de deux cercles |

Figure 5

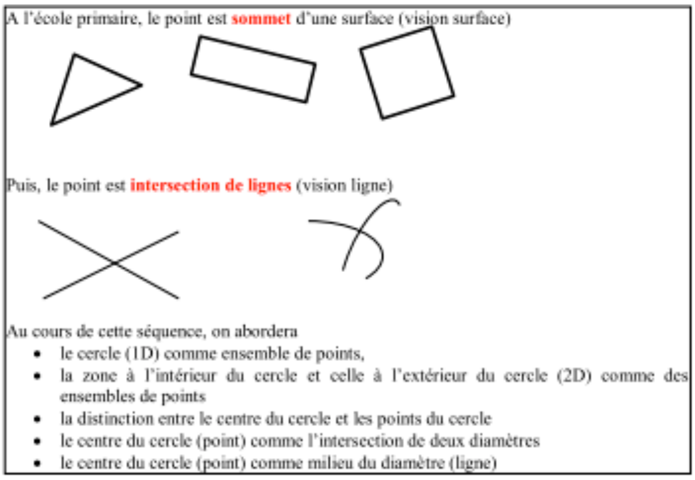



Figure 6

Ainsi, l'attitude de Mme M. conduit les formateurs à adapter leurs propositions : au lieu de fournir des situations à réinvestir en classe, les choix de cette enseignante les poussent à partir de ses pratiques usuelles pour lui donner dans un premier temps les moyens de mieux les analyser et dans un second temps des pistes pour les enrichir.

Notre analyse des échanges en termes de processus dialogique nous conduit à pointer ici un renversement de stratégie de la part des formateurs. La nécessité de répondre aux besoins (plus ou moins clairement) exprimés par cette enseignante contraint les formateurs à questionner différemment les travaux de recherche sur lesquels nous nous appuyons et à faire le lien entre notre démarche et d'autres ressources pour l'enseignement. Il ne suffit plus de puiser dans les recherches du groupe du Nord Pas-de-Calais des exemples de situations à proposer aux enseignantes mais il leur faut réinterroger les pratiques usuelles à la lumière des résultats de la recherche. Le travail attendu par les formateurs de la part de l'enseignante se trouve lui-aussi modifié : il ne s'agit plus d'intégrer de nouvelles situations dans une progression existante mais de revisiter ses pratiques usuelles grâce aux savoirs rencontrés en formation.

*Superposition et juxtaposition*

Cette troisième ressource se distingue des précédentes par les débats suscités tout au long de sa conception. En effet, si les ressources évoquées dans les deux paragraphes précédents sont le fruit du travail de deux enseignantes aux démarches bien différentes, les échanges furent relativement brefs. Cette troisième ressource résulte d'un travail d'élaboration bien plus long, un peu chaotique, fait de tentatives, de retours en arrière et de choix souvent discutés, parfois approuvés pour ensuite être remis en question.

Dès la première année, les enseignantes de cycle 2 se mettent d'accord pour rédiger ensemble une progression commune s'appuyant en partie sur le premier document remis par les formateurs mais en utilisant un autre matériel qu'elles jugent plus commode : les pièces d'un jeu de Tangram. Lors de la séance suivante, chacune rend compte des expérimentations menées en classe et l'une d'entre elles, Mme C., présente une séance qui retient davantage l'attention. Conçue avec l'aide d'un conseiller pédagogique, il s'agit de proposer aux élèves de reproduire des figures modèles à l'aide de pièces du Tangram reproduites sur du papier épais et plastifiées.

Dans une première étape, le nombre et le choix des pièces à disposition autorisent les élèves à reproduire la figure comme un assemblage par juxtaposition, puis dans une deuxième étape, un jeu sur certaines variables didactiques (figure 7) les contraint à procéder par superposition. Le bilan de l'enseignante est très positif car elle estime avoir atteint l'objectif fixé *« passer de la juxtaposition à la superposition »*. Néanmoins, elle souligne les limites de l'utilisation des pièces du Tangram (elle écrit à la fin de sa fiche de préparation *« il faudrait peut-être revoir aussi de l'utilité du Tangram, je pense que c'est très réducteur !!!!!! »*).

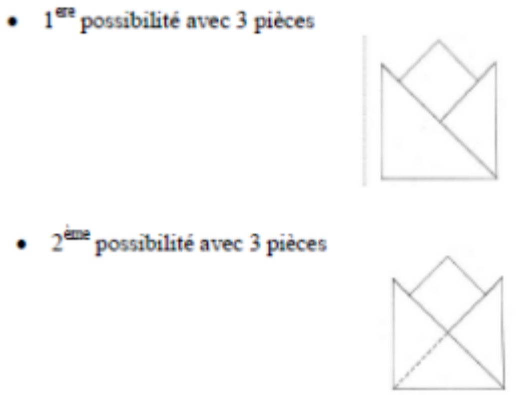



Figure 7

Suite aux réserves exprimées par cette enseignante (et d'autres), les formateurs proposent d'utiliser « la Moisson des formes[47] » en mettant en avant la richesse de ce matériel.

Mme C. fournit, là encore, un travail de préparation important mais fait un choix bien moins judicieux à propos des pièces mises à disposition et les assemblages réalisés par superposition ne correspondent pas à ceux attendus. Un peu découragée par le bilan de ses séances, elle s'interroge à propos des enjeux du travail réalisé jusqu'alors et soulève une question déjà posée lors de la première année mais qui n'avait pas vraiment donné lieu à débat : « pourquoi travailler la superposition ? ».

Les formateurs prennent alors conscience qu'un malentendu s'est installé. Pour les enseignantes, l'enjeu principal de ces séances est d'amener les élèves à accepter de procéder par superposition de surfaces. Or, du point de vue des formateurs, l'enjeu ne peut se résumer à un changement de contrat avec les élèves, la réalisation d'assemblages par superposition participe au changement de regard porté par les élèves sur les figures.

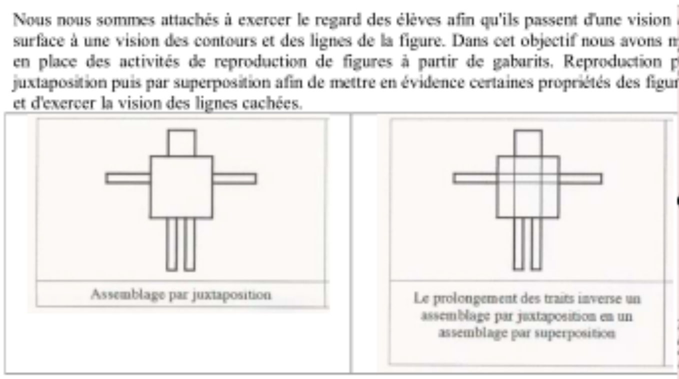



Figure 8

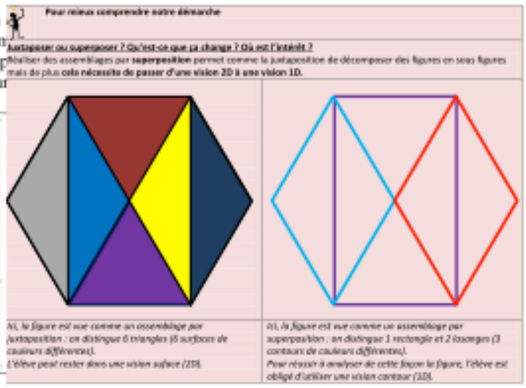



Figure 9

Pour aider les enseignantes à mieux percevoir les enjeux de la réalisation d'assemblages par superposition, les formateurs choisissent de présenter aux enseignantes deux figures utilisées par Duval et Godin (figure 8) pour illustrer la différence entre un assemblage par juxtaposition et un assemblage par superposition (Duval, Godin 2006).

[47] Bettinelli B. (1995) : La moisson des formes : matériel et livret pédagogique, Aléas

Ces deux exemples sont repris par Mme C. lorsqu'elle rédige le compte rendu de son travail. A ce propos, elle précise que des assemblages par superposition seront réalisés *« afin de mettre en évidence certaines propriétés des figures et d'exercer la vision de lignes cachée »*. Mais, cela ne suffit pas à convaincre les enseignantes et la question de la pertinence de ce type de situations est à nouveau posée lors de la séance suivante.

Les formateurs tentent alors de clarifier leurs attentes en avançant un autre argument (figure 9). Les figures présentées et les couleurs utilisées tendent à montrer que la superposition oblige les élèves à passer d'une vision surface à une vision contour. Mais, là encore, les enseignantes doutent de l'intérêt de la réalisation d'assemblages par superposition.

**Reconnaissance de formes**

**Atelier 1**

Consigne : colorie un carré puis colorie un autre carré de taille différente.

**Atelier 2**

Consigne : colorie un rectangle puis colorie un autre rectangle de taille différente.

**Atelier 3**

Consigne : colorie un rectangle puis colorie un autre rectangle de taille différente.

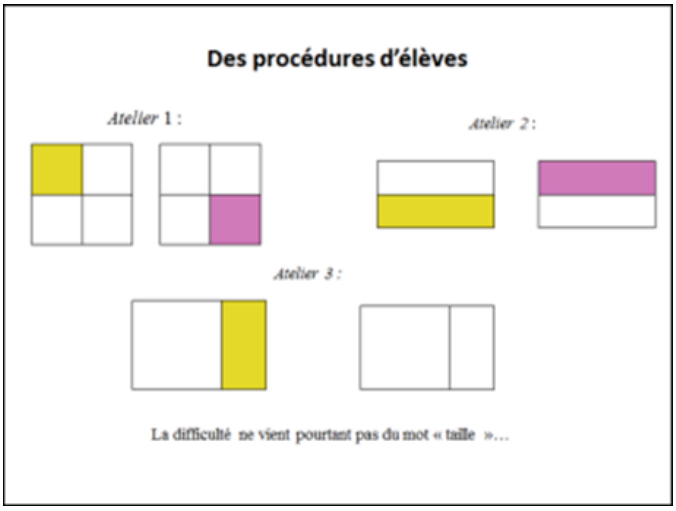



Figure 10

Les formateurs présentent alors un autre document (figure 10) issu d'un travail de l'IREM de Montpellier[48]. Il s'agit de l'analyse d'une évaluation (niveau CP/CE1) qui montre que les élèves ont des difficultés à repérer un carré ou un rectangle d'une autre taille que celui qu'ils viennent de colorier dans des figures qui peuvent être vues comme des assemblages par juxtaposition ou par superposition. Les enseignantes accueillent ce document avec intérêt car il fait écho à leur propre analyse de difficultés déjà repérées chez leurs élèves. Cela leur permet surtout de formuler ce qui selon elles constitue le lien entre nos propositions et les difficultés des élèves (constatées dans les classes et illustrées par le document présenté) : il s'agit d' *« exercer le regard des élèves ».*

Cette expression sera souvent reprise par les enseignantes. Elle semble soudain lever bien des « blocages ». Les enseignantes acceptent de travailler sur des séances avec réalisation d'assemblages par superposition. D'ailleurs, l'une d'entre elles, jusqu'alors peu impliquée dans le travail de production de ressources fait parvenir peu de temps après le compte-rendu de séances qu'elle a conçues et mises en œuvre dans sa classe. Il s'agit d'amener les élèves à dénombrer tous les triangles contenus dans une figure (figure 11).

[48] Activités géométriques à l'école primaire : exemples de problèmes à résoudre, suggestions pour des outils d'évaluation diagnostique.

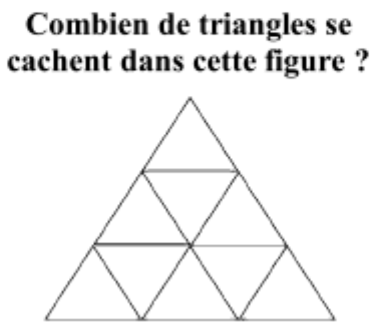



Figure 11

Ainsi, notre analyse en termes de processus dialogique montre que les enseignantes ont besoin d'exprimer un objectif qui leur permet de mettre en lien nos propositions, des difficultés déjà remarquées chez leurs élèves et des exemples de situations pour la classe plus proches de leurs pratiques usuelles. Néanmoins, il faut souligner que la justification des situations en termes d'accompagnement d'évolution du regard sur les figures que les formateurs tentent de faire accepter n'est pas reprise par les enseignantes. D'ailleurs, lors du forum, certaines justifieront leur travail en disant : *« on travaille la superposition »* sans autre explication, comme si la superposition était un objectif d'apprentissage en soi.

**Une première synthèse de l'analyse du dispositif[49].**

***Origine et évolution des mises en tension***

Les exemples de moments de confrontation repérés et exposés dans la partie précédente nous conduisent à établir deux principaux constats.

Tout d'abord, la plupart trouvent leur origine dans le poids relatif des contraintes du métier accordé par les formateurs/chercheurs et les enseignantes (notamment celles en lien avec les contraintes institutionnelles). Il existe fréquemment des décalages entre les besoins ressentis par les enseignantes et besoins supposés des enseignantes par les formateurs.

Ensuite, les efforts réalisés pour dépasser ces mises en tension mettent au jour les besoins des enseignantes en termes de connaissances mathématiques ou didactiques, leurs difficultés récurrentes à analyser et à prendre en compte les enjeux d'apprentissage des situations proposées.

A l'issue du dispositif, cinq ressources ont été produites, qui correspondent à des parcours de conceptions différents. En effet, même si plusieurs enseignantes ont pu intervenir dans l'élaboration d'une même ressource, celle-ci fut à chaque fois initiée et davantage prise en charge par une seule et même personne. Il en résulte des dynamiques différentes dues à des positionnements différents notamment vis-à-vis de la formation[50].

***La production de ressources vue comme la construction d'un monde commun***

Au-delà de ces constats, notre analyse nous conduit à reconsidérer nos hypothèses à propos du processus dialogique et par voie de conséquence les questions associées à la double flèche de notre schéma (figure 1).

[49] Les résultats seront à préciser, il s'agit d'une recherche en cours.

[50] Comme indiqué précédemment, chaque individu se positionne de manière singulière dans le *monde* auquel il se réfère. Par exemple, les ressources produites par Mme D. et Mme. M sont révélateurs de positionnements très différents.

*Comment les formateurs/chercheurs peuvent rendre les situations produites par la recherche plus accessibles pour les enseignants ?*

Au début de notre travail, nous faisions l'hypothèse que l'analyse de ce dispositif nous conduirait à adapter les situations produites par la recherche à l'enseignement ordinaire. Mais, à l'issue de ce travail, nous constatons qu'il nous faut aller au-delà de ces ajustements et réexaminer au préalable les résultats produits par le groupe du Nord Pas-de-Calais. En effet, les difficultés d'appropriation de ces situations révèlent des besoins en termes de savoirs pour les enseignantes qu'il convient d'identifier. Les moments de confrontation repérés au fil du dispositif révèlent ces besoins (non nécessairement formulés par les enseignantes ou les formateurs). Les reprenant un à un, nous avons cherché à les organiser.

*Prendre en compte les prescriptions institutionnelles*

- prendre en compte les contraintes institutionnelles et planifier le travail de la classe - tisser des liens entre situations et intitulés des programmes - identifier les enjeux d'apprentissage des situations.

-enrichir ses pratiques de l'enseignement de la géométrie - couvrir tout le programme - étudier les figures au programme - enrichir les pratiques existantes – provoquer un changement de regard et autres types de problèmes.

*Concevoir et mettre en œuvre des activités pour la classe*

- repérer les éléments fondamentaux des situations afin d'identifier leur marge de manœuvre - comprendre ce qui sous-tend la progression – s'approprier le jeu sur les instruments.

- organiser le travail de l'élève - faire des choix de situations - fixer des variables - percevoir les concepts en jeu dans les gestes à réaliser.

- maîtriser le choix des variables, le lien entre objectifs, actions ou gestes, repérer une progression ou gradation des difficultés pour un geste donné.

*Donner une finalité à la tâche prescrite via les formateurs et l'accepter*

- identifier les objectifs visés - comprendre en quoi cela permet d'accompagner le changement de regard sur les figures - prendre conscience de la nécessité d'accompagner le changement de regard à partir des difficultés rencontrées par les élèves dans le cadre d'activités proches des pratiques existantes.

Figure 12

La liste ainsi obtenue (figure 12) montre que ces besoins en termes de savoirs sont relatifs à différents niveaux des pratiques (global, local et micro) (Robert, Masselot, 2007) et sont susceptibles de donner les moyens aux enseignantes de faire des choix pensés allant dans le sens de l'amélioration des apprentissages des élèves tout en tenant compte des contraintes liées à l'exercice du métier.

Par voie de conséquence, il serait intéressant que la recherche réexamine les résultats produits et identifie en quoi tel ou tel savoir est susceptible de guider (ou non) l'action des enseignants dans le cadre de l'exercice de leur métier voire de modifier le savoir construit pour pouvoir faire sens pour les enseignants et l'adapter aux contraintes du métier.

Ainsi, la contribution des formateurs/chercheurs à la production de ressources (vue comme la construction d'un *monde commun*) ne peut se limiter à adapter des situations à l'enseignement ordinaire : tenir compte du *point de vue* des enseignants suppose aussi de réinterroger les savoirs produits dans le but de les reproblématiser.

Cette opérationnalisation ne va pas de soi et les formateurs ne sont pas à l'abri de dérives toujours possibles. Citons l'exemple du travail mené dans le cadre de notre dispositif à propos de la juxtaposition et la superposition de figures. Il est certes aidant pour les enseignantes d'identifier et de formuler un objectif qui fait sens *(« exercer le regard»)* mais nous avons constaté que certaines enseignantes associaient à cet intitulé divers exercices qui ne s'inscrivaient dans une approche de la géométrie visant à accompagner le regard des élèves sur les figures, il s'agissait seulement d'exercices de discrimination visuelle. De même, pour certaines enseignantes *« travailler la superposition »* est devenu un objectif en soi. Travailler une notion supplémentaire semblait être un argument suffisant à leurs yeux. Il est donc nécessaire pour le formateur/chercheur d'opérationnaliser les résultats produits par la recherche tout en s'assurant de préserver une lisibilité suffisante des enjeux d'apprentissage.

*Comment les enseignants peuvent-ils réussir à s'approprier les situations produites par la recherche ?*

Cette deuxième question se situe du côté des enseignants. Comment peuvent-ils contribuer via la production de ressources à la construction d'un *monde commun* ? Là encore, notre travail nous conduit à réexaminer cette question. Non seulement la mise en œuvre de situations produites par la recherche ne peut suffire à impacter durablement les pratiques comme l'avaient déjà constaté le groupe mais l'analyse des moments de confrontations montre combien le besoin d'ancrage des situations dans les pratiques usuelles est prégnant chez les enseignants. [51]

Il semble donc nécessaire pour les formateurs de questionner plus avant comment prendre appui sur les pratiques existantes. D'ailleurs, le travail mené sur la progression sur le cercle au CM2 nous conduit à envisager une alternative (figure 13).

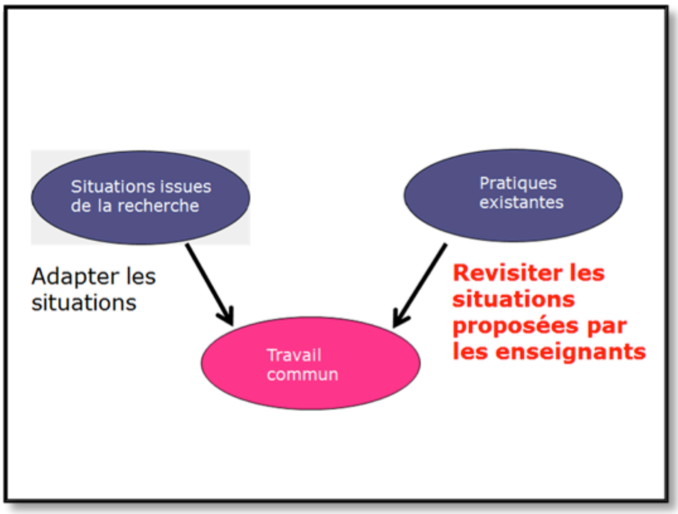



Figure 13

Au lieu de se limiter à des apports en termes d'exemples de situations, partir des progressions et des situations déjà utilisées par les enseignants pour les enrichir et les modifier dans le but de mieux accompagner les élèves dans les changements nécessaires de regard sur les figures. Il s'agirait alors de développer l'exercice d'une certaine vigilance didactique dans le domaine

[51] D'ailleurs, les attentes des enseignants dépassent la simple mise en œuvre d'une situation produite par la recherche. Ils attendent davantage et notamment la proposition de progressions.

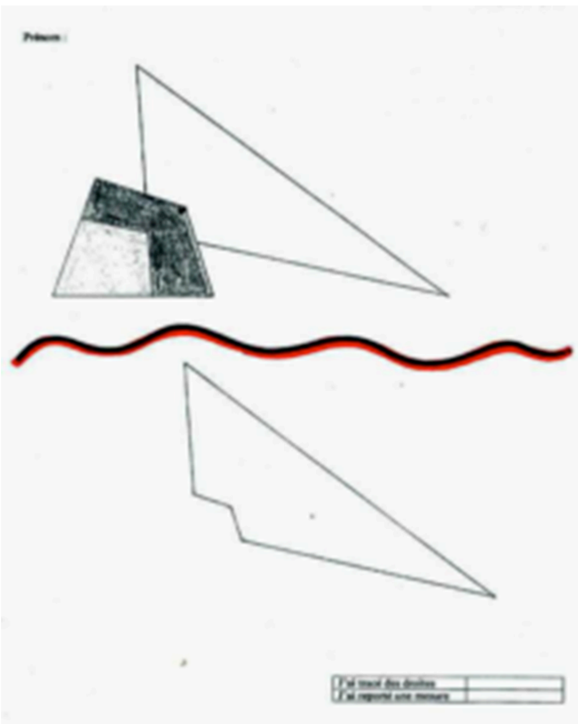
de l'enseignement de la géométrie (Pézard 2010, Butlen et al. 2012). Mais, là encore, il appartient à la recherche de s'emparer de cette question. Comment penser une intégration progressive des situations produites par le groupe dans les pratiques existantes et plus généralement comment articuler ces situations avec d'autres situations d'enseignement plus répandues dans les classes et les manuels ?

Ainsi, étudier comment les enseignants peuvent réussir à s'approprier des situations suppose d'examiner aussi comment ils peuvent les intégrer à leurs pratiques usuelles ou encore comment ils peuvent enrichir leurs pratiques en intégrant de nouvelles connaissances et ainsi exercer une certaine vigilance didactique.

**Comment penser une certaine « continuité » des pratiques ?**

Les travaux menés dans le Nord Pas-de-Calais ont pour ambition de proposer une progression assurant une certaine continuité dans les apprentissages visés pour les élèves (Perrin-Glorian, Mathé, Leclercq, 2013). Nous pensons qu'il convient aussi de s'interroger sur la possibilité de penser une certaine « continuité » dans l'enrichissement des pratiques. Les recherches menées dans le cadre de la double approche attestent que les pratiques enseignantes constituent un système complexe, cohérent et stable (Robert, Rogalski, 2002). Il nous semble par conséquent tout à fait légitime de chercher à tenir compte de cette organisation des pratiques.

Les situations de restauration de figures occupent une place particulière dans les travaux du groupe du Nord Pas de Calais dans la mesure où elles constituent un moyen privilégié pour accompagner les élèves dans un changement de regard sur les figures. Certaines ont fait l'objet de publications et ont souvent été le support de présentations des membres du groupe pour illustrer leur approche de l'enseignement de la géométrie (Godin, Perrin-Glorian, 2009). C'est le cas de cette situation (figure 14).



**Restaurer la figure modèle à partir de l'amorce donnée**

A disposition des élèves : une réglette non graduée dite « informable », une réglette non graduée (plastifiée) permettant de tracer des droites.

Les règles de coût : 0 point pour le tracé d'une droite sur la figure modèle ou l'analyse de la figure, via l'utilisation de la réglette « informable » ; 1 point pour le tracé d'une droite, avec la réglette plastifiée, pour compléter l'amorce ; 3 points pour un report de longueur

Figure 14

Parce qu'elle intègre les principaux résultats issus de la recherche, cette situation est particulièrement riche du point de vue des apprentissages potentiels pour les élèves mais, sa mise en œuvre sans précaution préalable présente certains écueils. C'est précisément ce que nous avons eu l'occasion de constater dans la classe de Mme S., l'une des enseignantes de cycle 3. Celle-ci souhaite élaborer une ressource présentant une situation de restauration de ce type[52]. Parce qu'elle a conscience des difficultés que ses élèves peu habitués à ce type de problèmes pourraient rencontrer, cette enseignante fait le choix de limiter ce qu'elle perçoit comme une prise de risque en prévoyant un guidage fort. Par exemple, après la passation des consignes, au lieu de laisser les élèves se confronter à la tâche de restauration, celle-ci affiche la figure modèle au tableau et invite les élèves à rechercher les alignements et les points d'intersection.

L'observation de cette séance conforte notre choix de poursuivre notre travail en interrogeant les possibilités d'une intégration progressive de pratiques nouvelles au sein de pratiques existantes (Leclercq, Mangiante-Orsola, à paraitre).

Dans cette perspective, nous faisons le choix de concevoir des *situations pour la classe avec objectifs de formation*, c'est-à-dire des situations permettant à l'enseignant de mieux comprendre les enjeux de notre démarche et les choix qui sous-tendent les situations proposées. Pour cela, nous cherchons à concevoir des situations relativement faciles à mettre en œuvre et donnant la possibilité à l'enseignant d'être suffisamment en retrait pour observer les procédures de ses élèves.

L'une des conséquences de ce choix est que nous ne pouvons proposer une seule et même séance pour introduire la restauration de figure, le jeu sur les instruments avec instauration d'un coût, la nécessité d'articuler action sur le matériel et concepts géométriques…etc…Nous prévoyons plusieurs situations visant une intégration progressive d'éléments nouveaux dans les pratiques existantes. La séquence ainsi conçue est constituée de quatre situations de restauration présentant chacune un objectif spécifique de formation.

La première situation (cf. annexe 1) consiste à donner la possibilité aux enseignants d'observer comment une situation de restauration jouant sur les instruments mis à disposition peut amener les élèves à exercer leur regard sur une figure jusqu'à en découvrir les propriétés.

La deuxième situation permet de réinvestir le travail effectué au cours de la première situation tout en introduisant un premier jeu sur les instruments que l'enseignant devra gérer.

La troisième situation permet de franchir une étape supplémentaire. La figure choisie peut être restaurée selon deux types de procédures. Comme dans la situation précédente, l'enseignant est encouragé à faire verbaliser par les élèves la procédure utilisée mais ici l'instauration d'un système de coût sur les instruments incite les élèves à rechercher la procédure la moins coûteuse.

Enfin, parce que nous tenons à prendre en compte les attentes des enseignants, nous prévoyons une quatrième situation visant la rédaction d'un programme de construction.

Nous avons testé la première situation dans une classe de CM1[53]. Nos premières analyses montrent que l'enseignante a peu modifié le projet initial et que les difficultés constatées chez les élèves étaient en grande partie dues à nos choix (notre analyse a priori de la situation est à revoir). Nous envisageons de poursuivre le travail en améliorant la ressource produite et en la testant auprès de nouveaux enseignants. Notre intention est de questionner plus avant ses effets sur leurs pratiques. Les situations proposées dans cette séquence permettent-elles

[52] Elle ne reprend pas exactement la même figure mais il s'agit encore pour les élèves de restaurer la figure modèle à partir d'une amorce. Comme dans la situation produite par la recherche, elle instaure un coût sur les instruments.

[53] Auprès d'une enseignante qui a assisté à l'animation plénière mais qui ne fait pas partie du groupe impliqué dans la production de ressources.

comme nous l'espérons un réel enrichissement ? Favorisent-elles une intégration progressive dans les pratiques des résultats issus de nos recherches à propos de l'enseignement de la géométrie ?

## Conclusion

Les situations produites par le groupe de recherche du Nord Pas-de-Calais visent un enrichissement des pratiques enseignantes qui ne va pas de soi. Nous avions mis à l'épreuve dans des travaux antérieurs (Mangiante-Orsola, 2011) l'hypothèse selon laquelle concevoir des ressources laissant aux enseignants une certaine marge de manœuvre favoriserait le processus d'appropriation mais notre recherche actuelle ouvre de nouvelles pistes pour la production de ressources.

L'analyse de ce dispositif de travail articulant production de ressources et formation continue nous donne accès à ce qui se joue à l'interface entre les deux *points de vus* en présence. L'élaboration de ressources est vue comme la construction d'un *monde commun* et cela nous conduit à réexaminer les conditions d'appropriation par les enseignants de situations produites par la recherche.

Il ne s'agit pas seulement pour le chercheur de les adapter à l'enseignement ordinaire mais de réexaminer les résultats produits selon un autre *point de vue*, celui des enseignants, afin de les reproblématiser, les opérationnaliser pour un enrichissement des pratiques et une amélioration des apprentissages visés.

De même, il appartient aux enseignants de réinterroger leurs pratiques usuelles pour exercer une certaine vigilance didactique, apporter les ajustements nécessaires pour prendre en compte les enjeux d'apprentissage mis au jour par les formateurs/chercheurs et par la suite enrichir leurs pratiques par la mise en œuvre de situations issues de la recherche.

Dans le prolongement de ce travail, nous souhaitons continuer à interroger les possibilités d'un enrichissement des pratiques selon une certaine « continuité ». La conception et l'expérimentation d'une nouvelle ressource avec des *situations pour la classe avec objectifs de formation* devraient nous permettre de mieux comprendre comment favoriser l'intégration progressive de pratiques nouvelles au sein des pratiques existantes.

## Bibliographie


Beguin, P., & Cerf, M. (2004). Formes et enjeux de l'analyse de l'activité pour la conception des systèmes de travail. Activités, 1(1), 54-71

Brousseau, G. (1998) Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques 1970-1990), textes rassemblés et préparés par Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. & Warfield, V. Grenoble : La Pensée sauvage.

Butlen, D., Charles-Pezard, M., Masselot, P. (2012) Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique »in actes du colloque «Espace Mathématique Francophone» Genève, Suisse

Charles-Pezard, M. (2010) «Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique», Recherches en Didactique des mathématiques, Vol 30-2, Grenoble, La pensée sauvage, 197-261

Duval, R. & Godin, M. (2006) Les changements de regard nécessaires sur les figures, Grand N, 76, 7-27.

Godin, M. & Perrin-Glorian, M.J. (2009) De la restauration de figures à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. In COPIRELEM Enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ? Actes du colloque de Bombannes, juin 2008, CD-rom, Atelier A2.

Leclercq, R., Mangiante-Orsola, C. (à paraître) Étude d'un dispositif articulant production de ressources et formation continu : quels effets sur les pratiques enseignantes ? In COPIRELEM Actes du colloque de Nantes, juin 2013

Mangiante-Orsola, C. (2012), Une étude de la cohérence en germe dans les pratiques de professeurs des écoles en formation initiale puis débutants. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 32/3

Mangiante-Orsola, C. (2011), Etude du processus d'appropriation de ressources par des professeurs des écoles enseignant les mathématiques : entre travail au quotidien et développement des pratiques, Actes du Colloque international INRP, Le travail enseignant au XXIe siècle Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle.

Masselot, P. & Robert, A. (2007), Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de pratiques de professeurs enseignant les mathématiques, Recherche et formation, 56, 15-31.

Perrin-Glorian, M.J., Mathe, A.-C. & Leclercq, R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. Repères-IREM, 90, 5-41.

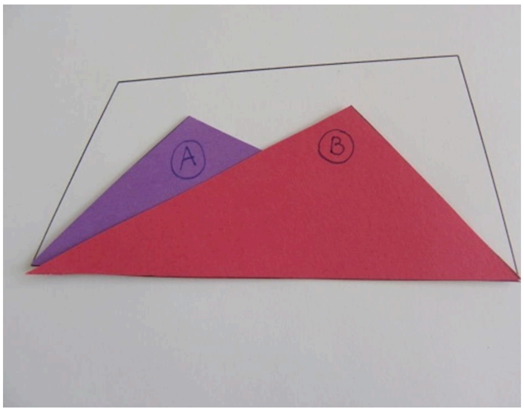
Robert, A. & Rogalski, J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, volume 2, n°4, 505–528.

**ANNEXE 1**

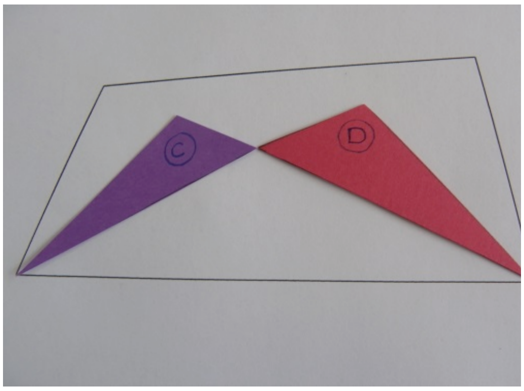
**Présentation de la première situation**

Première phase : reproduire la figure modèle à partir des gabarits A et B.

La procédure attendue consiste à réaliser un assemblage par superposition des gabarits pour ensuite en tracer les contours.



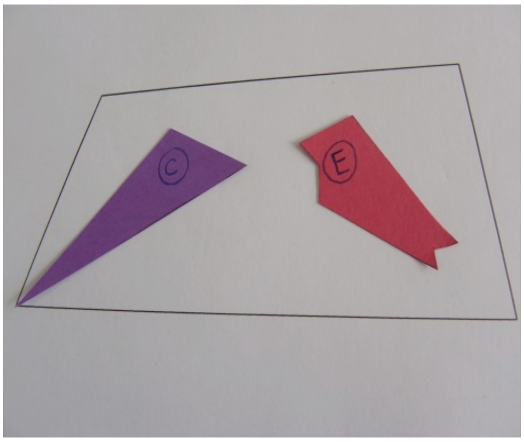

Deuxième phase : reproduire la figure modèle à partir des gabarits C et D.




La procédure attendue consiste à placer les deux gabarits en faisant coïncider certains sommets (des sommets des gabarits avec des sommets du quadrilatère « cadre » et deux sommets des gabarits entre eux) pour ensuite effectuer des tracés. Pour ce faire, les élèves peuvent soit utiliser les gabarits (tracer leur contour) soit prendre en compte certains alignements (tracer des lignes). Il s'agit alors de placer dans le prolongement un bord de C avec un bord de D (deux possibilités) pour ensuite placer la règle le long d'un bord et posée au-dessus de l'autre et tracer.

Troisième phase : reproduire la figure modèle à partir des gabarits C et E.

La procédure attendue consiste à placer le gabarit C en faisant coïncider l'une de ses pointes avec un sommet du quadrilatère et le faire pivoter jusqu'à ce qu'un de ces bords coïncide avec la diagonale. Le placement du gabarit E nécessite le recours à la deuxième diagonale.



**NICOLAS PELAY**

# ELABORATION DU CONCEPT DE CONTRAT DIDACTIQUE ET LUDIQUE EN CONTEXTE D'ANIMATION SCIENTIFIQUE

**npelay@gmail.com**

**Université de Genève**

**Résumé**
Le lien entre jeu et apprentissages mathématiques est au cœur de la problématique didactique de ma thèse, menée dans les contextes d'animation scientifique, et notamment ceux des séjours de vacances. La théorie des situations didactiques (Guy Brousseau, 1998), associée à la méthodologie d'ingénierie didactique (Michèle Artigue, 1990), m'a fourni le cadre théorique pour concevoir et expérimenter des ingénieries didactiques et ludiques, et pour développer le concept de contrat didactique et ludique. Dans cette communication, je décris les étapes clés dans l'élaboration de ce concept.

## Introduction

L'étude des liens entre jeu et apprentissages mathématiques est au cœur de la thèse que j'ai soutenue à l'université de Lyon le 6 mai 2011, et intitulée «*Jeu et apprentissages mathématiques: élaboration concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*».

Mon intérêt pour cette problématique provient initialement de mon expérience personnelle dans l'animation scientifique où l'on développe de nombreuses activités permettant aux jeunes d'apprendre et de jouer dans des conditions très favorables. La place des mathématiques y était faible, ceci pouvant sembler paradoxal compte tenu de la place qu'elles occupent dans la société, et c'est pourquoi j'ai voulu développer des animations mathématiques, avec la volonté qu'elles puissent être à la fois amusantes et riches d'un point de vue mathématique afin de créer les conditions de réels apprentissages mathématiques.

Ce projet m'a conduit au master 2 recherche à Lyon, intitulé «Histoire, Philosophie et Didactiques des Sciences» (master HPDS), avec option didactiques des mathématiques. La théorie des situations didactiques m'a d'emblée semblé parfaitement convenir, car elle contenait les caractéristiques dont j'avais besoin : des situations didactiques spécifiquement conçues pour les apprentissages, et dont j'entrevoyais déjà le potentiel ludique, ainsi que des concepts puissants pour organiser et penser l'action.

J'ai commencé par adapter de nombreuses situations didactiques existantes (situation du puzzle, course à 20, etc.) dans des contextes variés (séjours de vacances, classes scientifiques, fête de la science, écoles, etc.) et j'ai pu constater empiriquement leur réel potentiel pour engager les enfants dans le jeu et les apprentissages mathématiques. Mon mémoire (Pelay,

2007) a commencé à poser des bases méthodologiques et théoriques, et la thèse qui a suivie a ensuite permis d'approfondir ma réflexion autour de la dialectique jeu/apprentissage.

C'est dans ce cadre que j'ai peu à peu élaboré le concept de contrat didactique et ludique, qui permet de rendre compte de ce qui peut se passer dans les interactions entre l'adulte et les enfants dans ces activités. Ce concept n'est pas venu immédiatement, et il a pris un certain temps à s'élaborer. La difficulté de son élaboration vient beaucoup de l'ambiguïté qui existe dans la définition du terme «ludique», car la question de la définition du «jeu» est très complexe dans les différents champs de recherche, et il n'existe pas à ce jour de définition qui fasse l'unanimité dans la communauté des chercheurs.

Dans cette communication, je vais retracer les différentes étapes qui ont permis l'élaboration théorique de ce concept.

## Problématique, cadre théorique et méthodologie

### *Problématique*

L'objectif initial était de développer des animations qui puissent permettre de vraiment faire et apprendre des mathématiques d'une façon attractive et plaisante dans des séjours de vacances, avec des enfants qui n'aiment pas nécessairement cette discipline souvent considérée comme trop théorique et scolaire. Mon approche était de m'appuyer sur le jeu qui est un moteur essentiel d'action et de motivation chez les enfants, et qui présente de nombreux intérêts éducatifs pour les animateurs socioculturels.

Dans le même temps, la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) s'est tout de suite présentée comme un cadre théorique approprié, car les liens entre jeu et apprentissage y sont importants, notamment du fait que les connaissances mathématiques sont des stratégies gagnantes à des jeux :

> « Le jeu doit être tel que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la relation optimale » (ibid., 1998). Ainsi, «Le maître doit donc effectue, non la communication d'une connaissance, mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution s'opère, l'élève entre dans le jeu et s'il finit par gagner, l'apprentissage s'opère.» (Brousseau, 1998)

Aussi, nous avons très tôt fait l'hypothèse que la théorie des situations didactiques s'adaptait dans le contexte de l'animation scientifique :

- Elle permet de concevoir et gérer des animations mathématiques et ludiques
- Elle favorise les liens entre recherche et action
- Elle permet de développer des outils théoriques pour l'étude de l'articulation jeu/apprentissage

### *Les précautions à prendre sur la notion du «jeu»*

Dans la théorie des situations didactiques, le jeu est pris comme référence originelle à la théorie des jeux. Brousseau modélise «*la notion vague de " situation " par celle de " jeu"* » (Brousseau, 1998) en en prenant la définition suivante: «*Organisation de l'activité sous un système de règles définissant un succès et un échec*» (ibid., 1998). Il distingue clairement le jeu comme activité réglée (distinct de l'activité ludique), et l'actant (distinct du joueur) et cela se comprend très bien dans son projet de recherche de modéliser les apprentissages qui sont les stratégies gagnantes dans des activités réglées où l'élève a été mis en position d'actant.

Pourtant, les limites de ce modèle apparaissent, comme cela a été montré dans la thèse de Ratsimba-Rajohn (1981, p. 111) :

> « Mais cette théorie du jeu que nous avons considérée, ne nous a pas permis de prévoir a priori les comportements des élèves et de l'enseignant au moment de la production des états intermédiaires du jeu. En effet, lors de l'étude théorique, nous avons fait abstraction du jeu de l'enseignant, du jeu des élèves qui ont quelques idées pour résoudre le problème et du jeu de ceux qui n'ont pas trouvé. Cependant le travail que nous venons de réaliser a montré qu'il était impossible de faire l'économie du jeu de l'enseignant avec les élèves ».

Dans d'autres termes, Salin (2002, p. 119) pointe aussi des limites :

> « le milieu adidactique que nous avons considéré est un milieu théorique. Quand il est transposé en milieu didactique d'une situation didactique effective, l'écart entre le jeu de l'actant et celui de l'élève "joueur" apparaît. De plus, si l'enseignant (et non pas le professeur) n'est pas présent pour insuffler aux élèves le désir et le goût de chercher, la confrontation à une situation adidactique est inefficace : la dévolution ne peut pas s'effectuer. »

Aussi, il me faut clairement préciser mon projet : je me place dans la théorie des situations didactiques, et non dans la théorie des situations mathématiques à usage didactique. Je n'approfondirai pas cette distinction qu'a faite Brousseau dans le colloquium de 2005, mais cela permet néanmoins de situer plus précisément mon questionnement. Je cherche donc à prendre en compte le jeu comme *activité ludique*, et je m'intéresse aux interactions entre les joueurs (pas seulement l'actant) avec son milieu, et en particulier ses interactions avec l'animateur.

Étant donné la complexité de la question du jeu dans les différents champs de recherche, notre projet entre en résonance avec celui que définit Brougère (2005) en sciences de l'éducation pour qui il s'agit de «*saisir la tension entre l'attitude ludique, la dimension subjective de l'expérience et le versant objectif de situations, de dispositifs qui permettent l'investissement ludique* ». Notre perspective est didactique: nous nous intéressons aux apprentissages des mathématiques, et nous cherchons à comprendre en quoi le jeu peut être spécifique des savoirs mathématiques.

***Méthodologie de recherche***

La dialectique action/recherche est constitutive de mon travail. Les enjeux d'action et enjeux de recherche sont au même niveau, et je m'appuie conjointement sur les théories didactiques et ma pratique d'animateur scientifique. La nécessité de construire un terrain de recherche en centre de vacances, m'a conduit à développer une méthodologie, que j'ai appelée «*méthodologie des 3 pôles*», et que je pourrais qualifier aujourd'hui de méthodologie de recherche et développement (Pelay, à paraître) de par la triple articulation qui existe entre trois pôles théorique, pratique, et expérimental:

Cette méthodologie s'appuie sur la méthodologie d'ingénierie didactique (Artigue, 1990) dans laquelle les liens entre théorie et pratique sont très présents. Elle constitue en effet pour l'auteur une « *forme du travail didactique : celle comparable au travail de l'ingénieur qui, pour réaliser un projet précis, s'appuie sur les connaissances scientifiques de son domaine, accepte de se soumettre à un contrôle de type scientifique mais, dans le même temps, se trouve obligé de travailler sur des objets beaucoup plus complexes que les objets épurés de la science et donc de s'attaquer pratiquement, avec tous les moyens dont il dispose, à des problèmes que la science ne veut ou ne peut encore prendre en charge.* » (Artigue, 1990)

Par ailleurs, il est important aussi de préciser, même si ce n'est pas l'objet de cette communication, que l'histoire des mathématiques a joué un rôle important dans ma façon de travailler. Nourrissant la réflexion didactique, elle a permis une prise de recul sur la dialectique jeu/apprentissage, qui s'est notamment réalisé par l'étude des *Récréations mathématiques* (1694) de Jacques Ozanam (1640-1718), enseignant et mathématicien qui a écrit une trilogie: un *dictionnaire mathématique* (1691), un *cours de mathématiques* (1693), et les *Récréations mathématiques et physiques* (1694), ce dernier ayant eu un très grand succès pendant plus de 100 ans, constamment réédité au XVIIIème siècle.

### *La situation de la somme des 10 consécutifs, fil conducteur de ma thèse*

Pour mener cette réflexion sur les liens entre jeu et apprentissages mathématiques, je me suis appuyé sur une situation didactique, celle de la «situation de la somme des 10 consécutifs», expérimentée plus de 30 fois sur la période 2007-2011. Adaptée dans de nombreux contextes (séjours de vacances scientifiques, séjours de vacances thématiques, classes scientifiques, fête de la science, classes scolaires, etc.), j'ai pu faire varier de nombreux paramètres (âges, sexes, centres d'intérêts des enfants, etc.) et j'ai pu constater à quel point elle était pertinente pour articuler jeu et apprentissages mathématiques. C'est en répétant cette animation d'aussi nombreuses fois, en l'animant moi-même ou en observant des animateurs conduire eux-mêmes cette animation, que j'ai pu observer les variations et les invariants, qui existaient dans la situation et dans la façon de conduire l'animation pour les animateurs. Cette répétition d'animations fut cruciale dans mon travail et a permis de poser les bases théoriques de mon travail, et c'est en ce sens qu'elle constitue un fil conducteur de ma thèse. Je vais, dans la deuxième partie de cette communication, donner les principales étapes qui ont permis d'élaborer le concept de contrat didactique et ludique, en m'appuyant sur cette situation.

## La situation de la somme des 10 consécutifs

### *Description de la situation*

Gustavo Barallobres (2004, 2006, 2007) a conçu, expérimenté et étudié une situation didactique dans le but de construire un milieu pour l'entrée des élèves de la deuxième année de l'enseignement secondaire dans des pratiques algébriques. Il s'agit de faire calculer le plus rapidement possible aux élèves la somme de 10 nombres consécutifs dont la liste leur est fournie. L'objectif est non seulement que les élèves produisent une formule algébrique, mais qu'ils puissent ensuite la justifier. Elle se constitue de trois phases:

- 1ère phase: trouver la somme, comprendre le jeu
- 2ème phase: c'est une course entre équipe où le 1er nombre e la suite des 10 nombres est de plus en plus grand
- 3ème phase: un débat est organisé entre les élèves pour chercher à expliquer pourquoi les méthodes fonctionnent.

Cette situation comprend de nombreuses potentialités pour les apprentissages mathématiques, notamment du fait qu'elle permet de développer des stratégies algébriques liées à la formule 10X+45 (X étant le 1er nombre de la suite) et qu'il est possible d'obtenir de différentes façons. Elle contient une dimension expérimentale très forte que Barallobres a montré dans sa thèse, et que j'ai confirmé à mon tour dans mes expérimentations: l'émergence de la formule se fait chez les élèves à partir d'une répétition de calculs où la régularité des actions permet le repérage d'invariants: le 10 de «fois 10», ou le 45 comme somme des 10 premiers nombres de 1 à 9. Son fort ancrage dans le numérique en permet aussi son appropriation par des enfants dès la fin du primaire, ce qui permet de consolider certaines aptitudes numériques dans le calcul posé ou le calcul réfléchi tout en leur donnant des opportunités de trouver par eux-mêmes les techniques algébriques, ce qui est bien l'objectif poursuivi par l'inventeur de cette situation[54].

[54] Je renvoie au chapitre 7 de ma thèse pour l'*analyse a priori* de cette situation.

### *Résultats récurrents*

J'ai adapté cette situation pour la rendre attractive en séjours de vacances, notamment en développant des aspects imaginaires, et en renforçant la course par un système de comptage de points. J'ai pu avec cette animation, réalisée de nombreuses fois comme je l'ai expliqué précédemment, réaliser l'objectif de réaliser une animation à la fois ludique et didactique. La 1ère phase fonctionne toujours très bien : les enfants entrent dans la course et se prennent au jeu, et s'investissent pour trouver des stratégies efficaces pour trouver le résultat plus rapidement.

Extrait 1:

> Enfant 1: Eh , j'ai exactement le même. j'ai fait exactement pareil que toi ! la stratégie de la mort !
> Enfant 2: Notre stratégie, elle est trop bonne!

Extrait 2:

> Enfant 1:J'ai envie de jouer
> Enfant 2:Eh attendez regardez regardez
> Enfant 1:j'ai envie de retourner en jeu, la bataille des pirates.
> Enfant 3:C'est trop facile!

Ensuite, on observe que les enfants entrent en même temps qu'ils entrent dans la course dans une activité mathématique : ils optimisent leurs calculs, optimisent leurs stratégies, élaborent des formules (10X+45), ont des discussions de nature mathématiques au sein de leurs équipes ou lors du débat qui suit la phase de course, etc.

Extrait 3:

> Enfant 1: mais j'ai remarqué quelque chose. Regardez la somme des derniers chiffres
> Enfant 2 (chuchote): [inaud.] la somme des derniers chiffres, c'est toujours égal à 45
> Enfant 1: Quoi?
> Enfant 2: (chuchote) Tous les derniers chiffres, c'est toujours égal à 45, c'est obligé.[inaud.]
> Enfant 1: Ouais t'as raison

Extrait 4:

> Enfant 1: C'est ça que tu fais ? Ah ben, c'est bon, on a compris. J'avais pas compris
> Enfant 2: C'est ce que je vous ai dit, faut faire 45, c'est moi qui vous l'ai dit le premier, vous me croyiez pas
> Enfant 3: Moi, j'ai dit fois 10, toi t'as dit +45

Dans la phase 3, le débat mathématique que l'animateur leur propose est généralement très riche, et bien que cela ne se fasse pas toujours dans le calme et la sérénité tant les enfants sont pris par l'enjeu, on assiste à de véritables discussions sur la validité de la formule, avec des confrontations avec des arguments de différentes nature: certains liés à la numération décimale de position, ou d'autres liés à l'algèbre.

Ainsi, cette animation est une activité à la fois ludique et didactique, le jeu de la course agissant dans la phase 2 comme un moteur de la dévolution. Cette conclusion, que j'ai obtenue au cours du mon master fût vraiment le point de départ de mon projet, car dans cette situation, on peut bien montrer que le jeu et l'apprentissage peuvent réellement avoir lieu simultanément. C'est bien la recherche de stratégies gagnantes qui est au cœur de l'activité, du jeu comme de l'apprentissage. Dans la thèse, j'ai développé ce résultat d'un point de vue théorique en montrant que la situation adidactique d'action était vécue comme un jeu pour les enfants.

### *Une expérience cruciale pour comprendre la nature du contrat didactique*

La réussite récurrente de cette animation m'a conduit au questionnement suivant: comment se fait-il que l'animation réussisse de façon très systématique? Il apparaît en effet assez clairement, comme je l'ai expliqué précédemment, que la situation a certaines potentialités, mais le rôle de l'animateur a aussi un rôle important dans cette réussite qui m'a conduit à approfondir les questions suivantes : comment l'animateur gère-t-il l'animation ? Comment l'animateur concilie-t-il les enjeux didactiques et les enjeux ludiques? Comment interagit-il avec les enfants ?

Du point de vue théorique, cela pose la question de la nature du contrat didactique en contexte d'animation scientifique. Les thèses de Godot (2004) ou Poisard (2004) dans les contextes d'animation scientifique mettaient déjà en évidence cette différence de nature du contrat, mais j'ai souhaité approfondir spécifiquement cette question de recherche, jusqu'à faire cette expérimentation cruciale où l'animation de la somme des 10 consécutifs qui s'est déroulée de façon particulière. En effet, contrairement à ce qui se passait habituellement, l'animation s'est arrêtée à la phase 2, et il n'y a pas eu de phase de débat. La phase de course a duré l'intégralité de la période d''animation. Les enfants en restaient au stade des calculs numériques, et aucun groupe n'avait trouvé de formules ou de stratégies très avancées après plus de 45 minutes de jeu. Ce n'était pas une question de manque d'intérêt, au contraire, les entretiens et questionnaires révéleront que les enfants se sont beaucoup amusés mais leurs choix de stratégie étaient trop limités. J'étais en position d'animateur, et sentant venir la fin du temps de l'atelier, j'ai décidé de conclure l'animation sans mettre en place le débat habituel, car j'estimais qu'il n'y aurait pas le temps et qu'ils ne pourraient pas en retirer grand chose. Leur donner ou leur montrer la formule ne m'a pas semblé utile et accessible, il restait trop peu de temps, et j'ai préféré poursuivre la phase de course, déjà suffisamment satisfait que cette activité leur ait donné l'occasion de prendre du plaisir à faire rapidement des calculs.

C'est en analysant les interactions dans les enregistrements audio, puis les questionnaires et les entretiens, que j'ai par la suite pris conscience que ce qui s'était passé avait plusieurs conséquences théoriques importantes. D'une part, il était impossible de modéliser les interactions par un contrat de nature didactique: aucune intention didactique n'avait été exprimée par l'animateur qui n'avait fait «que» mettre en place une course sans jamais expliciter pour les enfants de quelconques intentions didactiques. Par ailleurs, aucune intention didactique n'a été perçue ou exprimée non plus par les enfants. Dans les entretiens, les enfants disaient s'être bien amusé mais n'avoir rien appris. D'autre part, le paradoxe du contrat didactique tel que le formule ainsi Brousseau (1998) était absent:

> «Le maître souhaite que l'élève veuille ne tenir la réponse que de lui-même, mais en même temps, il a le devoir social de vouloir que l'élève donne la bonne réponse. Il doit donc communiquer ce savoir sans avoir à le dévoiler, ce qui est incompatible avec une relation contractuelle»

Dans cette animation, l'animateur avait certes une intention d'enseigner, mais ne l'a jamais exprimée explicitement auprès des enfants, et n'a pas choisi d'instaurer une relation didactique. Il est resté à un niveau informel et a préféré maintenir les enjeux ludiques plutôt qu'introduire des enjeux didactiques qui étaient habituellement amené par le fait de l'émergence de formules dans certains groupes. En contexte des séjours de vacances, l'animateur n'a en effet aucune injonction d'enseigner. Il peut le faire quand les occasions sont favorables, mais il n'en a pas d'obligation, et surtout, il n'a aucun savoir spécifique à enseigner, car il n'est pas tenu à un quelconque programme à respecter. Cela ne veut pas dire que l'animateur n'a pas de contrainte, au contraire on constate justement que l'animateur a d'autres types de contrainte spécifique à son contexte, comme celle en particulier de rendre le savoir plaisant et amusant.

Ces résultats me semblent généralisables dans de nombreux contextes d'animation scientifique, et le témoignage récent d'un médiateur du Palais de la Découverte à Paris recueilli lors d'entretiens que j'ai conduit conforte ma thèse:

> « Je trouve que l'essentiel, c'est d'essayer au maximum que les gens passent un bon moment. Ça paraît con mais…à la limite en étant extrémiste, je dirais que le contenu passe après.C'est-à-dire que déjà, si les gens passent un bon moment, évidemment en ayant entendu parler de maths, […] si ils sentent que vraiment y'a des maths, là où ils sont, et qu'ils se sentent bien, pour beaucoup c'est déjà énorme. Et donc quelque part, je considère que notre responsabilité, c'est d'essayer de faire en sorte que ça se passe bien. […] Donc je ne me fixe jamais d'objectif de contenu, il passera ce qui passera. »

Cette impossibilité de modélisation de l'activité par le concept de contrat didactique m'a fait prendre conscience qu'il existait d'autres types de contrat dans ces contextes. Dans le cas qui concerne les activités que j'ai étudiée, c'est la notion de «contrat ludique» qui a émergée empiriquement : l'animateur et les enfants sont liés par l'intention de jouer ensemble, jouer en faisant et en apprenant des mathématiques peut-être, mais jouer avant tout. Dans l'expérience cruciale précédente, l'animateur a même décidé de maintenir le jeu jusqu'au bout. L'analyse du corpus montre que les interactions sont de nature ludique : sur le fait de gagner la course, sur les règles du jeu et leur évolution (système de comptage de points, bouts de papier pour déterminer qui rend en premier la bonne réponse, etc.).

***La notion de contrat ludique: de la notion au concept***

J'ai donc approfondi théoriquement cette notion, et cela m'a conduit à deux sources bibliographiques :

- Pierre Parlebas (1981), en science de l'action motrice: «Accord explicite ou tacite qui lie les participants à un jeu en fixant ou reconduisant le système des règles du jeu».
- Colas Duflo (1997), en philosophie : «Il y a dans tout jeu un contrat tacite, sur les règles, que l'on se sent tenu de respecter […] Le contrat ludique instaure le monde du jeu»

Chez Parlebas, cette notion est peu développée, mais chez Duflo, elle est au cœur d'une élaboration philosophique à part entière menée dans l'ouvrage *Jouer et philosopher* (1997), et dans lequel il se propose de poser de nouvelles bases dans la conceptualisation du jeu[55]. Snos démarches sont très proches, car il y a une réelle volonté chez Duflo de définir le jeu tel qu'il est réellement vécu par les joueurs avec une approche résolument empirique : « *il faut agir pour réfléchir sur l'action.*». Il s'agit selon lui, de «*sortir de la douce quiétude du poêle philosophique pour aller regarder les gens jouer, dans les cafés, dans les clubs de jeu, et, bien sûr, il faut jouer soi-même.* », ce qui est en lien avec ma propre démarche de mener mes recherches avec une position d'animateur sur le terrain en articulant théorie et pratique.

Duflo définit ainsi le contrat ludique par le fait qu'«*il y a dans tout jeu un contrat tacite, sur les règles, que l'on se sent tenu de respecter*». Pour lui, «*Les joueurs s'accordent, tacitement ou explicitement sur un certain nombre de règles, avant de jouer*». Tout comme Parlebas, on voit que la part importante faite à ces liens explicites ou implicites entre les joueurs est quelque chose de fondamental, qu'on retrouve bien sûr aussi dans le concept de contrat didactique défini dans la théorie des situations didactiques.

[55] Je ne vais pas développer dans ce texte l'ensemble de la théorie de Duflo sur le jeu, et comment il parvient, en déconstruisant les définitions habituelles d'auteurs de référence comme Huinziga et Callois, à donner sa propre définition du jeu. Je renvoie au chapitre 8 de ma thèse.

### *Émergence du concept de contrat didactique et ludique*

Les activités que je souhaite étudier nécessitent que je prenne en compte les enjeux ludiques et didactiques. D'une part, l'absence possible du paradoxe de contrat didactique dans la situation d'animation et de loisir est le signe que le contrat didactique, tel qu'il est défini par Brousseau, ne peut à lui seul modéliser une activité d'animation. Il nécessite pour cela qu'une relation didactique se mette en place, ce qui n'est pas nécessairement le cas. D'autre part, le contrat ludique est nécessaire pour modéliser les enjeux et les interactions ludiques que l'on peut observer de manière générale dans l'animation.

Dans le cadre de mon travail, il est maintenant essentiel de considérer la question de l'articulation de ces deux contrats. Se succèdent-ils ou s'imbriquent-ils ensemble ? L'un est-il inclus dans l'autre ? Pour aborder la problématique jeu/apprentissage d'une façon objective et dans différents contextes, il me paraît impossible de mettre une hiérarchie entre les deux : jouer et apprendre sont deux processus qui interfèrent et qui peuvent se renvoyer l'un l'autre. Les contrats ludiques et didactiques ne s'articuleront pas de la même façon selon le contexte et l'institution : de la même façon qu'il y a des éléments de contrat didactique dans le contrat ludique en contexte d'animation et de loisir, il y a des éléments de contrat ludique au sein du contrat didactique.

A ce stade, je fais donc l'hypothèse que la résolution de la dialectique jeu / apprentissage pourrait passer par la possibilité de faire émerger un «contrat didactique et ludique» dans un contexte donné. Une première définition de ce concept est alors donnée au cours de l'école d'été 2009 :

> « le contrat didactique et ludique est l'ensemble des comportements entre un "enseignant" et des "apprenants" dans un projet qui lie jeu et apprentissage. Il contient non seulement le contrat didactique, le contrat ludique, mais surtout la nécessaire articulation de ces deux contrats » (Pelay, 2009)

Comme on peu le voir dans cette première définition, il y a une volonté dans l'élaboration théorique de se doter d'un outil qui puisse permettre d'objectiver les phénomènes sans parti pris *a priori* sur la prévalence du didactique sur le ludique ou inversement. Il s'agit d'étudier les enjeux ludiques et didactiques avec l'idée qu'ils ne s'articulent pas ou ne s'opposent pas nécessairement, et que cela peut varier selon le contexte.

### *La règle : le cœur du contrat didactique et ludique*

La première définition ci-dessus utilise le terme de «comportement» et ce point n'est pas réellement satisfaisant, et c'est ce que je vais découvrir ultérieurement au cours des analyses de mon corpus de données. En effet, en analysant les interactions et en tentant de définir ce qui relève du contrat didactique et ce qui relève du contrat ludique, je réalise qu'il existe extrêmement difficile de faire la part des choses, et qu'en réalité, ce n'est pas ce qui est le plus important.

L'approfondissement du travail théorique avec Duflo vient me donner une solution. Pour Duflo, ce qui est central, c'est la règle du jeu. Tout jeu a des règles, et tout jeu, même en apparence «non réglé» contient en réalité des règles implicites. Il base ainsi sa définition du jeu sur la résolution de ce qu'il appelle l'antinomie source entre la liberté et la règle: «*Le jeu est l'invention d'une liberté dans et par une légalité*». Cette définition permet de définir de nombres types de jeu : jeu musical, jeu théâtral, jeu social, jeu mathématique, jeu didactique, etc. Cette définition n'est peut-être pas parfaite et ne fait pas forcément consensus, mais ce qui importe, c'est que le travail de Duflo donne ici des éléments de compréhension dans le cadre de ma problématique que je vais pouvoir importer dans le champ de la didactique des mathématiques : cette définition permet de placer les règles du jeu et leurs évolutions comme quelque chose de central dans l'analyse d'une activité qui tente d'articuler jeu et apprentissage.

En étudiant les évolutions du milieu et du contrat par rapport à l'évolution des règles du jeu (et pas seulement des variables didactiques), on élargit la compréhension de ce qui peut se passer. C'est en déterminant des règles et en les faisant évoluer que l'animateur instaure- ou non- les conditions d'une articulation -ou non- entre les enjeux didactiques et les enjeux ludiques. Certaines règles, sans être des variables didactiques, sont par exemple cruciales dans le processus de dévolution. Ce résultat me conduit ainsi à proposer une nouvelle définition plus globale qui ne fait cette fois plus la séparation artificielle entre deux types de contrat. Le contrat didactique et ludique est l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un "éducateur" et un ou des "participants" dans un projet qui lie, de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné.

Cette définition traduit donc le fait que lorsqu'on veut étudier les liens entre jeu et apprentissages dans une activité, il est important de particulièrement mettre en avant l'étude des règles du jeu et de leurs évolutions comme une grille centrale de compréhension qui renseigne sur la nature des enjeux ludiques et didactiques et leurs évolutions. Ainsi, certaines phases dans une activité peuvent être caractérisées de ludiques, didactiques ou didactiques et ludiques, selon la nature du contrat qui peut être plus ou moins «stable».

Ce point est développé dans le chapitre 8 consacré à l'élaboration théorique du concept de contrat didactique et ludique. Une tentative de modélisation sur deux niveaux, un niveau affiché et un niveau caché est proposée, mais ce point reste encore à approfondir.

**Conclusion et perspectives**

La mise en évidence de l'importance des règles dans la dialectique jeu/apprentissage va avoir une conséquence au niveau de la conception de situations pour favoriser les interactions entre jeu et apprentissage. Dans la théorie des situations didactiques, c'est l'évolution milieu/contrat qui est centrale. Si notre thèse a mis l'accent sur l'aspect «contrat», l'aspect «milieu» est tout aussi important. Dans la situation des de la somme des 10 consécutifs que nous avons étudiée, il apparaît bien que le ressort de la course est une règle centrale dans la situation : cela lui donne simultanément son potentiel didactique et son son potentiel ludique. J'ai bien montré en effet que c'est le fait de faire la course qui était quelque de vécu comme amusant et plaisant pour les enfants, et c'est bien cette enjeu de calculer rapidement que Barallobres a placé au cœur de son ingénierie pour conduire les élèves à des stratégies plsu rapides mettant en œuvre des connaissances algébriques.

Le «ludique» ne relève donc pas de la contingence, il est bien plus qu'une métaphore, et il est bien au cœur de la théorie des situations didactiques. Beaucoup de situations didactiques de la TSD sont basés sur des règles ludiques de rapidité, de compétition, de pari, qui leur donne leur intérêt didactique en même temps que leur intérêt ludique.

Aussi, nous faisons l'hypothèse que le concept de contrat didactique et ludique reste valide dans les contextes scolaires, et peut permettre de donner de nouveaux angles d'étude des situations didactiques. En prenant en compte la dimension ludique dans l'étude des situations, il est possible de mieux comprendre le processus de dévolution et d'apprentissage : l'enseignant doit souvent trouver un juste équilibre pour que le processus de dévolution soit optimum pour les apprentissages. Il le fait en jouant sur toutes les règles du jeu, et pas seulement sur les variables didactiques. Une analyse fine des règles permet de distinguer ce qui relève de la gestion de classe, ce qui relève du processus de dévolution, ce qui relève des apprentissages, et les liens qui existent entre ces processus.

## Bibliographie


Artigue, M. (1990), "Ingénierie didactique", *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9, n° 3, p. 281-308.

Barallobres, G. (2007), "Introduction à l'algèbre par la généralisation : problèmes didactiques soulevés", *For the Learning of Mathematics*, 27, 1.

Barallobres, G. (2006), *Enseignement introductif de l'algèbre et validation*, Thèse de doctorat, Université de Montréal.

Barallobres, G. (2004), "La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre", *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 24, n° 2.3, p. 23-27.

Brougere, G. (2005), *Jouer/Apprendre*, Paris, Economica.

Brousseau, G. (2005), Des situations mathématiques aux situations didactiques en mathématiques. Colloquium de didactique à l'occasion de l'attribution par l'ICMI de la médaille Félix Klein, Institut Henri Poincaré, Paris.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques" Recherches en didactique des mathématiques, vol. 7/2

Duflo, C. (1997), *Jouer et philosopher*, Paris, Puf

Godot, K. (2005), Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation, Thèse de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Huizinga, J. (1951), *Homo Ludens*, Essai sur la fonction sociale du jeu, éd. Gallimard.

Parlebas, P. (1981), *Contribution à un lexique commenté en science de l'action motrice*, Paris, INSEP.

Pelay, N., (à paraître). Méthodologie des trois pôles : une méthodologie en développement pour étudier les contextes d'animation scientifique. Actes du colloque méthodologie de recherche en didactiques, 13 juin 2014.

Pelay, N., (2011). Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique, Thèse de l'Université de Lyon.

Pelay, N., (2009). Le contrat didactique et ludique : vers un nouveau concept didactique *?*, actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques, Clermont-Ferrand.

Pelay, N., (2007). Etude didactique d'une animation scientifique, mémoire de master 2 HPDS de Lyon.

Poisard, C. (2005), *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer*, Thèse de l'Université d'Aix-Marseille I.

Ratsimba-Rajohn, H. (1981), *Étude de deux méthodes de mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue d'élaboration de situations didactiques*, Université de Bordeaux I.

Salin, M.-H. (2002), "*Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations*", Actes de la XIème Ecole d'été (2001), Grenoble, La Pensée Sauvage, p. 111-125.

**JULIA PILET**

MODELISATION DE PARCOURS D'ENSEIGNEMENT DIFFERENCIE APPUYES SUR UN DIAGNOSTIC EN ALGEBRE ELEMENTAIRE

**juliapilet@gmail.com**

**ESPE, Université Paris 12, LDAR, Université Paris 7**

**Résumé.**
Ma thèse de doctorat a consisté en la conception de parcours d'enseignement différencié visant à aider les enseignants à prendre en charge, dans la classe, l'hétérogénéité des apprentissages des élèves en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire. Dans le projet de recherche PépiMeP, nous avons implémenté ces parcours dans une plateforme en ligne de l'association Sésamath pour les rendre accessibles aux enseignants. Après avoir présenté notre problématique et notre méthodologie, nous exposons la conception du modèle des parcours d'enseignement différencié.

## Contexte de la recherche et problématique

### *La gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et la différenciation de l'enseignement*

La gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et la différenciation de l'enseignement sont deux sujets au cœur des politiques éducatives actuelles. Elles stipulent que, pour « assurer la réussite de tous les élèves », l'École apporte des réponses différenciées aux difficultés des élèves[56]. Ces politiques multiplient les injonctions à la mise en place de dispositifs de re-médiation, d'accompagnement personnalisé, d'individualisation et de personnalisation de l'enseignement hors du temps scolaire ou de pédagogie différenciée. Mais les enseignants éprouvent des difficultés à mettre en place ces dispositifs. Ils peuvent se trouver en difficulté pour repérer et exploiter les manifestations des connaissances des élèves et ne pas trouver des ressources appropriées pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages. Ils s'appuient le plus souvent sur des catégories d'élèves du type « les bons, les moyens, les faibles, les rapides », supposées situer leur niveau en mathématiques. Mais ces catégories, insuffisamment caractérisées par rapport aux contenus enseignés, semblent peu exploitables pour organiser la régulation des apprentissages en classe. Des études de didactique et de sciences de l'éducation (par exemple, Bolon, 2002 ; Charnay, 1995) mettent en évidence des limites de ces dispositifs lorsqu'ils ne prennent pas suffisamment en compte le *contenu*

[56] Se référer par exemple à http://www.education.gouv.fr/cid48653/les-dispositifs-d-accompagnement-des-collegiens.html, consulté le 4 janvier 2014.

*enseigné* et *l'évaluation des élèves*. Les chercheurs du réseau RESEIDA[57] (Rochex & Crinon, 2011) estiment que le « souci de faciliter la tâche aux élèves », se traduit par un «glissement de l'activité intellectuelle vers des activités à faible enjeu cognitif». Selon eux, la trop faible prise en compte des finalités du contenu enseigné pour évaluer les besoins d'apprentissage des élèves, la proposition de tâches avec un trop faible enjeu cognitif et la tendance à orienter l'enseignement vers l'individuel plutôt que le collectif conduiraient les dispositifs de différenciation proposés par les enseignants à construire des inégalités plutôt qu'à les réduire. Les modes de faire des enseignants, leur langage ou la succession de tâches isolées les unes des autres laisseraient à la charge des élèves certains apprentissages sans que les enseignants s'en aperçoivent et conduiraient à l'émergence de processus différenciateurs et à des inégalités entre les élèves.

Cet écart entre les injonctions des politiques éducatives et leur mise en œuvre par les enseignants dans les classes met en avant un besoin d'études et de recherches pour accompagner les enseignants dans la prise en compte de la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves. Nous abordons cette problématique dans le contexte spécifique du projet de recherche PépiMeP.

***Le projet PepiMeP***

Notre travail de thèse se situe dans le cadre du projet pluridisciplinaire PépiMeP[58] (Grugeon et al, 2014) qui vise à la conception d'Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (E.I.A.H.). Il est le fruit d'une collaboration entre des chercheurs en didactique des mathématiques du laboratoire L.D.A.R. de l'université Paris 7, de chercheurs en informatique du L.I.P.6 de l'université Paris 6 et d'une communauté d'enseignants de mathématiques, structurée autour de l'association Sésamath[59] et d'un groupe I.R.E.M. de l'université Paris-Diderot sur l'algèbre et la différenciation de l'enseignement. Cette association développe des ressources en ligne diversifiées, libres et gratuites, en particulier la plateforme LaboMeP et les exercices interactifs de MathenPoche. Le projet PépiMeP fait suite aux projets Pépite (Prévit et al., 2007) et Lingot (Delozanne et al., 2010) qui ont donné lieu à un logiciel, nommé *Pépite*, de diagnostic des compétences des élèves en algèbre élémentaire fondé sur une analyse épistémologique, cognitive et didactique de ce domaine (Grugeon, 1997). Chaque élève passe un test composé de dix exercices. Le logiciel analyse automatiquement les réponses à partir du modèle didactique de la compétence algébriques définie par Grugeon pour construire un profil cognitif de l'élève.

Le projet PépiMep a eu trois principaux objectifs. Premièrement, diffuser le logiciel de diagnostic Pépite sur la plateforme LaboMeP de l'association Sésamath sous la forme de séances de test diagnostic. Deuxièmement, concevoir et de diffuser, sur cette plateforme, les parcours d'enseignement différencié sous la forme de séances d'enseignement différencié (Pilet et al., 2013). Elles sont composées d'exercices adaptés aux spécificités des connaissances de groupes d'élèves diagnostiquées par Pépite. Troisièmement, évaluer l'utilisation des séances de diagnostic et des parcours par les enseignants et les élèves du secondaire. C'est dans les deux derniers objectifs que s'inscrit notre recherche.

[57] Le réseau RESEIDA est un regroupement interdisciplinaire de chercheurs issus de plusieurs laboratoires français et francophones. Piloté par Elisabeth Bautier et Jean-Yves Rochex, il porte sur la socialisation, l'enseignement, les inégalités et les différenciations dans les apprentissages.
[58] Projet P.I.C.R.I. financé par la région Ile-de-France.
[59] http://www.sesamath.net/

### *Problématique et hypothèses de travail*

Notre travail a consisté à concevoir des parcours d'enseignement différencié (notés PED), articulé au logiciel de diagnostic Pépite, sous la forme d'un modèle didactique et informatique et à évaluer son écologie possible dans l'enseignement secondaire actuel. Du point de didactique, nous cherchons à déterminer quels savoirs et savoir-faire faire intervenir dans les PED pour organiser un enseignement différencié en algèbre adapté à la fois aux spécificités des connaissances des élèves repérés par Pépite et à une stratégie d'enseignement pour la classe. Du point de vue informatique, nous cherchons à formaliser le modèle de façon à caractériser les PED par des types de tâches et des variables didactiques pour automatiser leur proposition suite au passage du test diagnostique Pépite.

Le domaine mathématique considéré dans la conception du modèle de PED est celui de l'algèbre élémentaire à la transition entre le collège et le lycée. Comme l'ont déjà montré les travaux de l'équipe PépiMeP, ce domaine est particulièrement intéressant à étudier vis-à-vis de la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages. En effet, l'algèbre élémentaire constitue un élément pivot du curriculum mathématique de l'enseignement secondaire pour pouvoir poursuivre des études scientifiques. Pourtant, il constitue un obstacle difficilement surmontable pour beaucoup d'élèves. En France, à partir de la classe de seconde, l'algèbre devient un outil au service des fonctions ce qui est en décalage par rapport à la fonction donnée à l'algèbre au collège et peut expliquer les difficultés des élèves en mathématiques à l'entrée au lycée.

De nombreux travaux en didactique des mathématiques (voir par exemple Kieran (2007) pour une synthèse) ont mis en évidence des difficultés d'apprentissage et d'enseignement de l'algèbre. Selon nous, les difficultés des élèves peuvent être renforcées par le fait que l'élève apprend dans une institution donnée, où le savoir est transmis selon certaines conditions. Nous nous appuyons sur les travaux de Castela (2008) pour qui l'existence *de savoirs et de savoir-faire ignorés par l'institution*, dans le sens où ils ne sont pas organisés institutionnellement, contribuerait à ce que certains élèves réussissent alors que d'autres échouent en mathématiques. Nous faisons l'hypothèse qu'au-delà des difficultés de conceptualisation, l'hétérogénéité des connaissances des élèves en algèbre est renforcée par des besoins d'apprentissage ignorés par les institutions. Mettre à disposition des élèves et des enseignants des PED pour organiser ces savoirs et savoir-faire peut favoriser une évolution plus idoine des rapports personnels des élèves à l'algèbre. Par ailleurs, l'identification des connaissances apprises des élèves à partir d'une évaluation diagnostique, comme le test Pépite, peut faciliter le repérage des besoins d'apprentissage des élèves et donc la proposition de types de tâches et d'une gestion didactique adaptés.

Notre problématique consiste à déterminer des savoirs et savoir-faire ignorés ou implicites au collège et au lycée en algèbre afin d'en dégager des questions génératrices à aborder dans les PED. Une question est génératrice si elle est suffisamment large pour travailler des raisons d'être des objets mathématiques considérés. Les PED sont conçus pour un enseignement au sein de la classe et non dans un dispositif d'individualisation ou de personnalisation. Pour chaque question génératrice, nous cherchons à caractériser un objectif d'enseignement commun à la classe et des stratégies différenciées (choix des types de tâches, des variables didactiques, des aides apportées par l'enseignant) pour que les tâches proposées et leur gestion didactique soient adaptées aux besoins d'apprentissage des élèves en algèbre. Enfin, nous nous interrogeons pour savoir si les PED conçus favorisent une évolution plus idoine du rapport personnel des élèves à l'algèbre.

Le cadre de théorie anthropologique s'est imposé pour concevoir les PED et faire le lien entre des apprentissages ignorés en algèbre au collège et les besoins d'apprentissage des élèves repérés par Pépite. Il nous a conduit à construire une méthodologie basée sur la définition d'une organisation mathématique de référence pour le domaine de l'algèbre élémentaire.

## Cadres théoriques et méthodologie

### *La théorie anthropologique du didactique pour modéliser les PED et déterminer les questions génératrices à aborder dans les PED*

La théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) propose un modèle dans lequel toute activité humaine « consiste à *accomplir une tâche t* d'un certain *type T*, au moyen d'une certaine technique $\tau$, *justifiée* par une *technologie* $\theta$ qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui à son tour est *justifiable* par une théorie $\Theta$. En bref, toute activité *met en œuvre* une organisation qu'on peut noter $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'on nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique »*. Une praxéologie mathématique ou d'organisation mathématique, notée OM, désigne un « objet de la réalité mathématique ». Toute praxéologie est constituée de deux blocs : un bloc pratico-technique $[T/\tau]$ et d'un bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$ ordinairement identifiés comme, respectivement, un savoir-faire et un savoir.

Dans une institution donnée, les praxéologies existent rarement comme praxéologies ponctuelles. Les praxéologies s'emboîtent les unes dans les autres selon les différents niveaux : ponctuel, local, régional et global. Cet emboîtement suit la hiérarchie des niveaux de codétermination didactique. Le sujet est une organisation ponctuelle, le thème est une organisation locale, le secteur est une organisation régionale, le domaine est une organisation globale et la discipline est commune à tous les domaines.

Les praxéologies circulent depuis l'institution qui les a produites vers d'autres institutions qui les perçoivent utiles à leur fonctionnement. Cette dynamique s'accompagne d'un phénomène de *transposition didactique*. La théorie anthropologique du didactique postule qu'il n'est pas possible d'expliquer les caractéristiques du « savoir appris » sans prendre en considération toutes les étapes de la transposition didactique. Selon Bosch et Gascón (2005), pour interpréter adéquatement ces étapes, le chercheur adopte un point de vue épistémologique en considérant une organisation mathématique épistémologique de référence

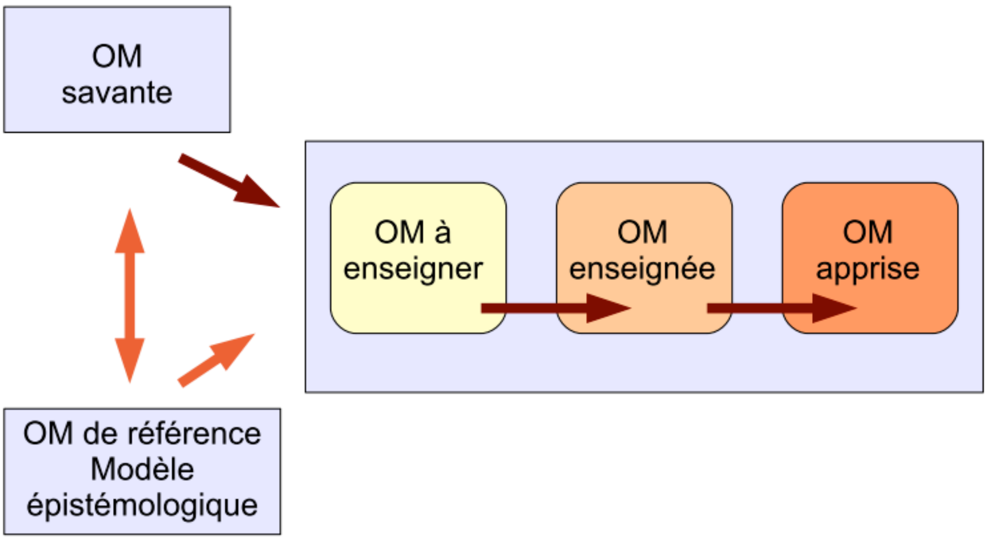



Figure 1. Schéma du processus de transposition didactique de Bosch et Gascón (2005)

Pour identifier les savoirs et savoir-faire ignorés au collège et en classe de seconde (OM à enseigner) et de faire le lien avec les difficultés des élèves en algèbre repérés par Pépite (OM apprises), nous suivons le processus de transposition didactique pensé par Bosch et Gascon. Nous définissons une OM de référence pour le domaine de l'algèbre élémentaire à partir d'une synthèse de travaux de didactique de l'algèbre (Chevallard, 1985 ; Ruiz-Munzon et al., 2012 ; Kieran, 2007). Elle est organisée en OM globales, régionales et locales. Nous nous sommes focalisés l'OM régionale de référence sur les expressions algébriques polynomiales (au maximum de degré 3 à coefficients réels en fin de collège et début de lycée) car elles sont au cœur de la résolution de problèmes mettant en jeu des formules ou des équations. Nous avons centré l'étude sur les aspects épistémologiques sous-jacents à la génération des expressions algébriques, au calcul sur les expressions et à leur utilisation dans des contextes intra- ou extra-mathématiques. Puis, cette OM est utilisée comme référence (cf. figure 2) pour analyser l'OM à enseigner au collège et en seconde à partir des instructions officielles, des manuels scolaires et des documents d'accompagnement, et, les OM apprises, à partir du test de diagnostic Pépite. L'analyse des écarts entre OM à enseigner et OM apprises conduit à définir des questions génératrices qui motivent les types de tâches et les environnements technologico-théoriques à convoquer dans les PED. Interviennent par ailleurs dans la conception des PED des éléments sur leur gestion et le rôle de l'enseignant, c'est pourquoi, en aval du choix des questions génératrices, nous avons défini une méthodologie itérative spécifique à la modélisation des PED dans le cadre du projet PepiMeP.

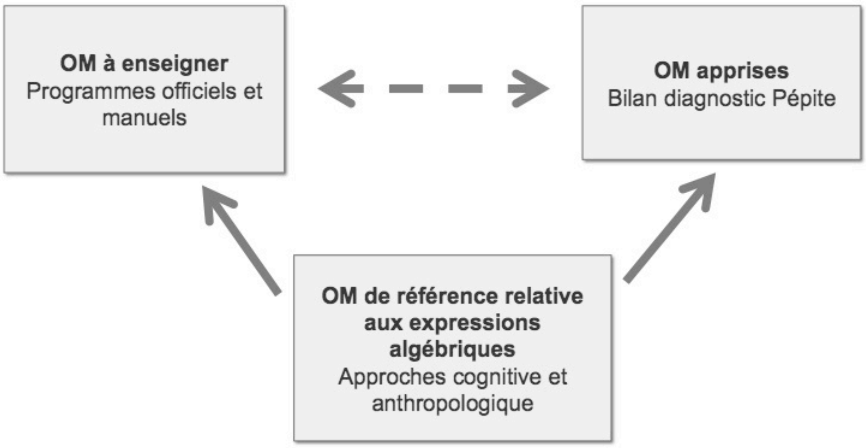



Figure 2. Méthodologie d'analyse des écarts en OM apprises et OM à enseigner à partir de l'OM de référence

### *Une méthodologie itérative et collaborative*

Nous avons adopté une démarche itérative et collaborative avec les différents partenaires du projet PépiMeP. Au départ, à partir des analyses menées en amont, nous avons conçu des PED qui ont été proposés aux chercheurs en informatique et aux enseignants. D'un côté, le travail avec les chercheurs en informatique et les développeurs a consisté à définir, systématiser et formaliser le modèle de PED en vue d'automatiser la génération de parcours sur LaboMeP suite au passage du test de diagnostic Pépite. De l'autre, entre chercheurs et enseignants de collège et de lycée (par le biais d'un groupe IREM de l'Université Paris-Diderot), nous avons ensemble précisé le choix des énoncés, le choix des expressions algébriques, le déroulement des parcours en classe et les savoirs et savoir-faire à institutionnaliser. À ce stade, nous concevons les PED à partir d'éléments de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) pour associer le choix des types de tâches à convoquer aux besoins d'apprentissage des élèves repérés par Pépite, à leur gestion didactique et au milieu. Selon les besoins d'apprentissage des élèves, nous proposons des PED reposant sur le même type de tâches mais différenciés selon des variables didactiques (nature et complexité des expressions, forme d'énoncés, aides proposées aux élèves).

Les enseignants ont testés les parcours dans leurs classes et ont fait passer le test Pépite à leurs élèves en début et en fin d'année scolaire. Une partie de ces expérimentations a été analysée qualitativement (Pilet, 2012) en comparant analyses *a priori* et *a posteriori* afin de déterminer si les PED et la gestion didactique ont permis de travailler sur les enjeux didactiques des PED. Les résultats des élèves au test Pépite sont analysés quantitativement afin de repérer des évolutions du rapport personnel des élèves à l'algèbre suite au passage des PED. Les expérimentations et les analyses menées nous ont conduit à revenir sur les choix didactiques des parcours avec les enseignants.

Avant de présenter le modèle de PED, nous commençons par présenter dans la section suivante l'OM de référence relative aux expressions algébriques que nous avons conçue et exploitée pour l'analyse des écarts entre OM à enseigner et OM apprises.

## L'OM de référence relative aux expressions algébriques

### *Éléments épistémologiques relatifs aux expressions algébriques*

Pour définir une OM de référence sur les expressions algébriques, nous croisons des travaux de didactique de l'algèbre relevant des approches cognitive et anthropologique. Ces deux approches complémentaires permettent de situer les rapports personnels des élèves et les processus de conceptualisation de l'algèbre des élèves relativement au rapport institutionnel à l'algèbre attendu dans l'institution considérée. Des travaux relevant d'une approche cognitive proposent des modèles de l'activité algébrique des élèves. Par exemple, chez Kieran (2007), l'activité algébrique relève de trois types d'activité : activité générative, transformationnelle et globale au niveau du meta. C'est à travers ces trois activités que les élèves conceptualisent les objets de l'algèbre. Les travaux relevant d'une approche anthropologique proposent quant à eux des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre. Ils permettent d'interroger les phénomènes didactiques et transpositifs qui déterminent la place et la fonction de l'algèbre à enseigner dans les curriculums. Chevallard (1985) et Gascón (1994) remettent en question l'algèbre comme arithmétique généralisée et introduisent la notion de modélisation. Plus récemment, Ruiz-Munzon modélise l'enseignement de l'algèbre comme un processus d'algébrisation des programmes de calcul en plusieurs étapes (Ruiz-Munzón et al., 2012).

Pour nos analyses, nous retenons les éléments épistémologiques au cœur de la génération des expressions algébriques, de la capacité d'adapter leur interprétation pour en faire des usages variés, de leur transformation à partir d'un calcul contrôlé et intelligent. Il s'agit des éléments suivants : l'équivalence des programmes de calcul (Ruiz-Munzón et al., 2012 ; Chevallard & Bosch, 2012) et des expressions algébriques, (Frege, 1971 ; Drouhard, 1992, Kieran, 2007), la dialectique entre le numérique et l'algébrique (Chevallard, 1985), les aspects structural et procédural des expressions algébriques (Sfard, 1991), leur interprétation dans d'autres registres de représentation (Duval, 1995 ; Bardini, 2003). Ces différents aspects sont selon nous constitutifs du bloc technologico-théorique de l'OM régionale autour des expressions algébrique que les élèves doivent construire pour avoir un rapport idoine au calcul algébrique. Ils nous permettent de définir l'OM régionale de référence relative aux expressions algébriques.

### *OM régionale relative aux expressions algébriques composée de trois OM locales*

Nous organisons le domaine algébrique en une OM globale dans laquelle nous distinguons au moins trois OM régionales : une première relative aux expressions algébriques, une seconde relative aux formules et une troisième relative aux équations. L'OM régionale sur les expressions algébriques, sur laquelle nous nous focalisons dans cette étude, intègre trois organisations mathématiques locales dont nous justifions l'existence à partir des travaux Ruiz-Munzón.

Ruiz-Munzón modélise l'enseignement de l'algèbre comme un processus d'algébrisation des programmes de calcul en plusieurs étapes (Ruiz-Munzón et al., 2012). Un programme de calcul est un énoncé qu'une expression algébrique symbolise. Par exemple, l'expression algébrique $E$ l'algèbre des polynômes qui s'appuie sur l'existence d'expressions équivalentes et porte sur le problème qui consiste à transformer une expression en une autre, équivalente. Les genres de tâches constitutifs de OM3 sont les suivants : développer une expression algébrique de type donné, factoriser une expression algébrique de type donné, réécrire un monôme de type donné, calculer une expression algébrique. Les éléments technologiques qui permettent d'expliquer et justifier la transformation d'une expression en une autre peuvent être décrits par les propriétés du calcul algébrique (distributivité, associativité, commutativité, etc.) et ses conventions d'écriture.

Les trois OM locales sont intimement liées puisque la convocation de certains types de tâches d'une OM locale implique la convocation d'autres types de tâches des OM locale ou des autres. Par exemple, le genre de tâches de OM1 « Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul » convoque des types de tâches de OM2 et OM3 :

- T1 : Produire une expression traduisant chaque programme de calcul (OM1)

T11 : Mobiliser une variable pour produire une expression générale
T12 : Traduire P1 et P2 par une expression algébrique

- T2 : Prouver que deux expressions algébriques sont égales pour toute valeur (OM2)

T21 : Identifier la structure de l'expression pour reconnaître les propriétés à appliquer
T22 : Développer (OM3)
T23 : Réduire
Ainsi différents types de tâches sont impliqués dans la convocation du type de tâches principal. Etant donné leur caractère implicite, nous nous interrogeons sur la place qui leur est accordée dans les discours technologiques et les organisations didactiques que les élèves rencontrent au collège et au début du lycée. L'OM de référence nous donne des critères pour analyser l'OM à enseigner et les OM apprises en algèbre à la fin de la scolarité obligatoire.

## Mise en perspective de l'OM à enseigner et des OM apprises sur les expressions algébriques en fin de scolarité obligatoire par rapport à l'OM de référence

Dans cette section, nous commençons par présenter les caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner puis celles des OM apprises et nous concluons en les mettant en perspective afin de dégager des questions génératrices organisant les PED.

### *Caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner*

L'OM à enseigner relative aux expressions, au collège et en seconde caractérise le rapport institutionnel attendu à l'algèbre élémentaire en fin de scolarité obligatoire. Nous la déterminons à partir de l'analyse des programmes officiels, le document d'accompagnement « Du numérique au littéral au collège » de 2008[60] et les manuels scolaires (13 manuels de collège et 3 manuels de seconde). L'analyse de ces textes s'attache à dégager, en référence aux trois OM locales de l'OM de référence, les types de tâches rencontrés, les techniques

[60] Ce document est téléchargeable à l'adresse :
http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

mathématiques développées, le discours technologico-théorique qui permet de justifier les techniques et, finalement, la place accordée aux trois OM locales, leurs raisons d'être et les liens qui sont établis entre elles. Nous présentons ici une synthèse des caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner à l'issue de laquelle nous mettons en évidence des savoirs et savoir-faire implicites laissés à la charge des élèves.

Avec l'apparition du genre de tâches de OM1 « Produire une expressions algébrique » dans la rubrique « Organisation et gestion de données, fonctions » des programmes de 2008 en classe de cinquième, la place de l'algèbre comme outil pour généraliser, modéliser et prouver est valorisée ce qui encourage l'articulation entre les trois OM locales de référence et donne une raison d'être aux expressions algébriques. Le document d'accompagnement complète cet apport en reprenant la situation du carré bordé (Combier et al, 1995), présentée en figure 4, pour montrer comment un problème de généralisation peut permettre de motiver, d'une part, l'introduction de l'algèbre comme modèle symbolique des processus de calcul, et, d'autre part, l'introduction des propriétés du calcul algébrique à partir de l'existence de programmes de calcul et donc d'‘expressions équivalentes. Cependant, cet apport a peu d'impact dans les manuels scolaires qui motivent rarement les expressions algébriques et leurs propriétés.

Exemple de problème : il s'agit d'établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.

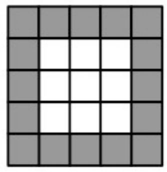


Figure 4. La situation du carré bordé dans le document d'accompagnement

OM2 est très peu présente dans les programmes et dans les manuels. Seul le type de tâche « Tester l'égalité de deux expressions en leur attribuant des valeurs numériques » est présent dans les programmes de collège. Il est rattaché au secteur des équations et non à celui des expressions algébriques ce qui place le statut de la lettre comme inconnue et non comme variable. OM2 n'est pas suffisamment liée à OM1 et à OM3. L'équivalence des expressions n'est presque jamais présentée comme un aspect central de la manipulation des expressions algébriques ni comme une aspect permettant d'organiser la vérification et le contrôle des calculs. Le fait que les propriétés du calcul algébrique permettent de transformer une expression en une autre, équivalente, et le fait qu'on puisse utiliser l'une ou l'autre en fonction du but visés sont rarement présents dans l'OM à enseigner au collège, c'est-à-dire que la dénotation et le sens des expressions sont laissés implicites. Les manuels scolaires d'éditions récentes (à partir de 2010) semblent néanmoins marquer des évolutions. Quelques manuels présente le genre de tâches « Prouver l'équivalence de deux expressions » (cf. figure 5). Les techniques et niveau technologique développés accordent une place à la dialectique algébrique-numérique et à la preuve d'un énoncé vrai ou faux. Néanmoins, ce type de tâches, lorsqu'il apparaît, est déconnecté des autres, n'est pas mis en perspective du contrôle des calculs et ne répond finalement à aucun raison d'être. Pourtant le document d'accompagnement développe ces liens et les principaux genres de tâches de OM2 apparaissent dans le document d'accompagnement. Les liens entre le contrôle des calculs et la preuve du fait que deux expressions sont ou pas équivalentes y est développé :

> « Après qu'une transformation d'expression algébrique [...] a été faite, un type de tâches doit faire l'objet d'une meilleure visibilité pour les élèves : comment contrôler qu'elle a été faite sans erreur ? […] En classe, le professeur peut montrer l'usage du tableur pour contrôler l'exactitude de l'égalité $(3x - 1)(2x + 5) = 6x2 + 13x - 5$ : [...]. Si le développement est exact, en faisant varier la valeur attribuée à x [...] les valeurs numériques qui s'affichent [...] varient également, mais restent égales. » (Document d'accompagnement, p.6)

**ÉNONCÉ** On se demande si les expressions littérales ci-contre sont égales.

1) a) Calculer l'expression A pour $x = 0$.

b) Calculer l'expression B pour $x = 0$.

c) Les expressions A et B sont-elles égales ? Justifier la réponse.

2) a) Calculer l'expression C pour $x = 0$.

Les expressions A et C peuvent-elles être égales ?

b) Les expressions A et C sont-elles égales ? Justifier la réponse.

$A = x(5x - 3) + 6$

$B = 5x^2 + 3$

$C = 5x^2 + 3(2 - x)$

Figure 5. Prouver que deux expressions algébriques sont équivalentes dans le manuel de la collection Phare de 4e, édition Nathan, 2011

À partir de la seconde, les expressions algébriques sont travaillées au service de l'étude des fonctions ce qui nécessite un travail sur le sens des expressions et un appui sur l'intelligence du calcul et l'anticipation des transformations à effectuer. Par exemple, le genre de tâches « Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but » sollicite le sens des expressions, aspect qui est peu présent au collège. Le rapport institutionnel à l'algèbre en seconde met en jeu une pratique algébrique appuyée sur des éléments technologiques et théoriques qui sont implicites dans les programmes du collège.

Les genres de tâches de OM3 relatifs à la transformation d'expressions algébriques dominent dans les programmes et dans les manuels mais majoritairement à travers des tâches simples et isolées. Le discours technologique qui accompagne les techniques de développement ou de factorisation a davantage recours aux ostensifs (Bosch & Chevallard, 1999) qu'aux non-ostensifs (cf. figure 6).

$H = 7x(x - 6) + (3x - 2)(4x + 5).$ ⟶ On développe.

$H = 7x \times x - 7x \times 6 + (3x \times 4x + 3x \times 5 - 2 \times 4x - 2 \times 5)$

$H = 7x^2 - 42x + 12x^2 + 15x - 8x - 10$ ⟶ On supprime les parenthèses.

$H = 7x^2 + 12x^2 - 42x + 15x - 8x - 10$

$H = (7 + 12)x^2 + (- 42 + 15 - 8)x - 10$ ⟶ On regroupe les termes en $x$ et en $x^2$.

$H = 19x^2 - 35x - 10$ ⟶ On simplifie en ordonnant.

Figure 6. Utilisation de flèches et couleurs pour outiller le développement dans le manuel Sésamath de 4e de 2011

Ce recours aux ostensifs est marqué par un jeu de couleurs, l'apparition de flèches pour appliquer la règle de distributivité ou des verbes d'action qui conduisent à la reconnaissance de signes plutôt que de structures (par exemple « On observe trois termes précédés du signe + » ou encore « On supprime les parenthèses »). Il est probablement accentué en classe par des ostensifs oraux et gestuels de l'enseignant. Ce n'est pas l'appui sur les ostensifs qui nous interpelle mais le faible lien fait avec les non-ostensifs. La convocation des types de tâches impliqués comme la reconnaissance de la structure et de la propriété à appliquer est souvent pris en charge implicitement par l'énoncé (par exemple, le titre d'un exercice de factorisation avec uniquement des expressions du type pressions algébriques. Nous présentons ces OM apprises comme mobilisant des technologies de façon dominante, c'est-à-dire des éléments technologiques et théoriques utilisés majoritairement et relevant de la mobilisation d'objets mathématiques et de propriétés associées, des modes de discours, d'utilisation des ostensifs et de validation des calculs. Selon nous, seule une description des OM apprises au niveau des technologies donne accès à une vue d'ensemble de la cohérence des modes de fonctionnement et de raisonnement des élèves. Les technologies dominantes permettent de faire des hypothèses sur les techniques utilisées (attendues, erronées ou inadaptées) par les élèves et le fait que certaines classes d'erreurs puissent vivre dans les pratiques algébriques des élèves. Nous présentons celles du groupe C dans la figure 7.

Nos choix de regroupement nous permettent donc, premièrement, d'interpréter les niveaux sur les composantes des stéréotypes en technologies dominantes utilisées par les élèves et, deuxièmement, de faire des hypothèses sur le type d'articulation des trois OM locales pour chaque groupe. Nous mettons maintenant en évidence la part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises afin de dégager les questions à aborder dans les parcours.

<table>
<tr><th colspan="2">Groupe C</th></tr>
<tr><td colspan="2">Les élèves articulent insuffisamment les OM ponctuelles de OM2 et OM3. La transformation des expressions dans OM3 ne donne pas de raisons d'être à la reconnaissance de la structure. La conduite des calculs s'appuie davantage sur la reconnaissance d'ostensifs (signes « +, -, =, etc.) et rarement, au niveau technologico-théorique, sur la hiérarchie des opérateurs, les propriétés du calcul algébrique et le rôle des parenthèses. Les écritures algébriques ou numériques en ligne sont rarement interprétées selon leurs aspects procédural et structural ce qui se traduit par un calcul non contrôlé et un appui sur des démarches arithmétiques. Cela conduit à un manque d'acceptation d'un résultat contenant un signe opératoire et donc à des règles de transformation et de formation incorrectes du type concaténation ($3 + 2a \rightarrow 5a$) ou linéarisation ($a^2 \rightarrow 2a$). Les modes de raisonnements s'appuient rarement sur l'équivalence des expressions (OM2) et sur la dialectique entre l'algébrique et le numérique et privilégient des formulations d'ordre légal (« On a le droit de »).</td></tr>
<tr><th>Groupe C-</th><th>Groupe C+</th></tr>
<tr><td>Les élèves articulent insuffisamment OM1 avec OM2 et OM3 et donnent peu de raisons d'être à l'algèbre. L'algèbre comme outil de résolution de problèmes est immotivée et peu adaptée. Les élèves ont majoritairement recours à des démarches arithmétiques et mobilisent rarement les lettres. Ils ont des difficultés à mobiliser la hiérarchie des opérateurs dans la production d'expressions.</td><td>Les élèves articulent OM1 avec OM2 et OM3 et commencent à donner des raisons d'être à l'algèbre comme outil de résolution de problèmes.</td></tr>
</table>

Figure 7. Technologies dominantes du groupe C

Ces trois entrées étant fixées, les PED se caractérisent par des questions et sous-questions génératrices déterminées en amont, des types de tâches pour aborder ces questions et des tâches différenciées adaptées aux besoins d'apprentissage de chaque groupe. Les questions génératrices et les types de tâches qui leur sont associés définissent un objectif commun d'enseignement à la classe. Une organisation didactique commune guide, à un niveau plus fin, les différentes phases individuelles (temps de recherche, apport d'aides par l'enseignant) et collectives (processus de dévolution, phases de débat, institutionnalisation) dans la mise en œuvre du parcours en classe. Les tâches différenciées relevant de l'objectif commun sont adaptées aux technologies dominantes à partir d'un jeu sur des variables didactiques comme la structure et la complexité des expressions algébriques, le découpage des énoncés, les cadres et les registres de représentation en jeu. Suite aux échanges avec les enseignants du groupe IREM, l'explicitation d'un objectif commun d'enseignement s'est avérée être un point crucial de la conception des PED. Tous les groupes d'élève travaillent ainsi sur le même objectif ce qui maintient le groupe-classe dans les institutionnalisations et dans l'avancée du temps didactique.

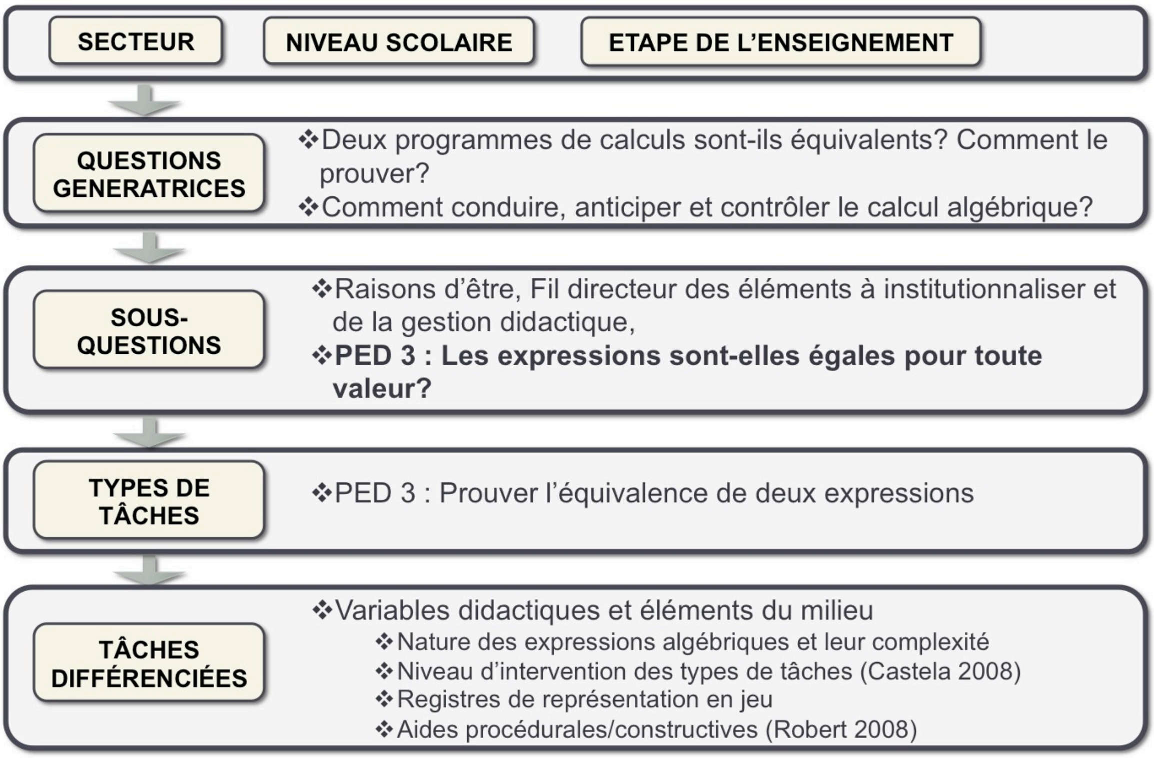



Figure 8. Modèle didactique des PED

Rappelons que, des caractéristiques de l'OM à enseigner, émergent deux questions génératrices. La caractérisation des technologies dominantes de chaque groupe nous a permis de les préciser en sept sous-questions qui correspondent à autant de PED. Nous définissons pour chacun l'objectif commun d'enseignement, les types de tâches à convoquer et les milieux auxquels confronter les élèves pour aborder ces questions et leur permettre de valider les réponses attendues. Nous précisons notre démarche à partir de l'exemple du PED intitulé « Prouver l'équivalence de deux expressions ».

Nous avons conçu un PED pour la troisième sous-question « Les expressions algébriques sont-elles égales pour toute valeur ? ». L'objectif commun à la classe est d'étudier des expressions équivalences et le type de tâches commun aux groupes est prouver l'équivalence de deux expressions algébriques.

D'après les caractéristiques de l'OM à enseigner, l'équivalence des expressions est une notion ignorée au collège et en seconde dans le sens où, peu présente dans les programmes et les manuels scolaires, son enseignement est peu pris en charge dans ces institutions. Ainsi les technologies dominantes du groupe C révèlent que ces élèves sont démunis pour guider et contrôler les transformations algébriques car ils ont peu conscience de la possibilité d'écrire une même expression sous plusieurs formes. Dans le parcours étudié ici, il s'agit, d'une part, d'amener les élèves à appréhender le fait que deux expressions peuvent dénoter le même nombre et, d'autre part, qu'en fonction du but visé dans l'énoncé, il est préférable d'utiliser l'une ou l'autre. La séance comporte deux phases. La première consiste à étudier si des expressions sont équivalentes. La deuxième consiste à choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé.

Les tâches sont différenciées entre le groupe A et les groupes B et C. Comme les élèves du groupe A s'appuient sur l'équivalence des expressions, les exercices proposés demandent de prouver l'équivalence des expressions algébriques par le calcul algébrique, puis de mobiliser la forme la plus adaptée pour résoudre un problème ou calculer astucieusement. Comme les élèves des groupes B et C prennent peu en compte l'équivalence des expressions pour guider et contrôler les transformations algébriques, l'enjeu premier est de donner du sens au fait que deux expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre. L'équivalence entre plusieurs expressions est conjecturée à partir de substitutions numériques ou de la comparaison des courbes représentatives des fonctions définies par les expressions (à partir de la classe de seconde) puis elle est prouvée algébriquement. Ensuite, l'équivalence des expressions est utilisée dans le but de calculer astucieusement une expression numérique et de choisir la forme la plus adaptée au calcul de la valeur de l'expression pour un nombre donné. Pour ce PED, la différenciation entre les groupes porte à la fois sur la complexité des expressions à étudier et sur la décomposition de l'énoncé en sous-questions. Les figures 9 et 10 présentent, à titre d'exemple, une tâche et sa déclinaison en un exercice pour chacun des groupes A, B et C.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :

**Groupe B**

- $A(x)=(x-1)^2-4$
- $B(x)=(x+1)(x-3)$
- $C(x)=x(x-2)-x^2-2$

| x | A(x) | B(x) | C(x) |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| -1 | | | |
| 0 | | | |

**Groupe C**

- $A(x)=(x+2)^2-4$
- $B(x)=x(x+4)$
- $C(x)=9x-6$

| x | A(x) | B(x) | C(x) |
|---|---|---|---|
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 0 | | | |

1. Complète les deux premières lignes du tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?
2. Complète la troisième ligne du tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?
4. Utilise les questions précédentes pour calculer mentalement 98x102.

Figure 9. Exemple d'exercices à proposer aux groupes B et C pour le parcours « Prouver l'équivalence de deux expressions »

L'exercice des groupes B et C comporte quatre questions. Les trois premières concernent la première phase. La dernière concerne la seconde phase. Trois expressions A, B et C sont données. A et B sont équivalentes mais pas C. Dans les deux premières questions, l'énoncé demande de conjecturer l'équivalence des expressions afin d'amener les élèves à comprendre que deux expressions différentes peuvent être égales pour toute valeur. Dans la question 1, les élèves testent les expressions pour deux valeurs numériques choisies de telle sorte qu'elles retournent la même valeur numérique. Dans la question 2, un troisième test numérique fournit un contre-exemple à l'équivalence de l'expression C avec A et B. La présence d'un tableau de valeurs est centrale dans ces questions. Dans la troisième question, un contre-exemple est attendu pour prouver que C n'est pas équivalente à A et B. Une preuve algébrique de l'équivalence de A et B est attendue. Les élèves doivent déterminer la structure des expressions et les règles de calcul à appliquer pour les développer. L'enseignant joue un rôle important pour amener les élèves à comprendre les limites des tests numériques pour prouver l'équivalence et produire une preuve algébrique. Si les élèves suggèrent des raisonnements erronés du type «si les expressions sont égales pour deux valeurs alors elles sont égales », il est prévu que l'enseignant utilise la quantification pour les déstabiliser : « nous voulons une preuve pour toute valeur ». La dernière question consiste à déterminer l'expression la plus adaptée pour calculer astucieusement (expression A avec x=98 pour le groupe C et avec x=101 pour le groupe B). Le déroulement du parcours prévoit, pour chaque question, des temps de travail individuel et de débat collectif au sein de la classe. Le fait que les groupes travaillent sur des expressions différentes est une opportunité pour décontextualiser la tâche et revenir sur l'objectif de la séance. En fin de séance, l'institutionnalisation prévue porte sur le fait que deux expressions algébriques peuvent être égales pour toutes les valeurs et que la transformation de l'une en l'autre est contrôlée par les règles du calcul algébrique. Dans le paragraphe suivant, nous présentons succinctement la modélisation informatique des PED.

***Modélisation informatique des PED***

La modélisation informatique a consisté à formaliser le modèle didactique pour automatiser la génération de parcours sur LaboMeP. Nous avons cherché à caractériser les parcours et les exercices y intervenant afin que ces derniers puissent être automatiquement attribués à chaque groupe d'élève suite au passage du test Pépite et au choix d'un parcours par l'enseignant. Ce travail a permis la réalisation d'une indexation de la centaine d'exercices qui intervient dans les parcours et du logiciel PépiPad pour automatiser les parcours sur LaboMeP.

L'indexation des exercices est réalisée à partir des critères suivants : le niveau scolaire pour lequel il a été conçu, les types de tâches convoqués, le chapitre et le thème mathématique auxquels l'exercice est rattaché (par exemple le thème expression algébrique du chapitre « Calcul littéral »), les objets mathématiques en entrée et en sortie (par exemple, expression algébrique, programme de calcul, arbre, figure, etc.), les cadres mathématiques en entrée et en sortie ainsi que le niveau de complexité de la tâche. Ce dernier critère englobe le niveau de mise en fonctionnement des connaissances, la structure des expressions algébriques ou encore le découpage des énoncés. Le critère d'indexation sur les types de tâches convoqués repose sur une ontologie du domaine de l'algèbre élémentaire que nous avons définie. L'ensemble des types de tâches intervenant dans les programmes scolaires à la fin de la scolarité obligatoire y sont répertoriés. Chaque parcours est caractérisé par les types de tâches, les objets mathématiques et les cadres en jeu ainsi qu'un niveau de complexité pour chaque groupe d'élève.

Le logiciel PépiPad intègre quatre types d'informations pour déterminer les exercices à proposer à chaque groupe d'élève. Il prend en entrée le diagnostic cognitif établi par Pépite pour chaque élève, l'indexation de la centaine d'exercices qui interviennent dans les parcours, le niveau scolaire des élèves, les choix de l'enseignant relatifs au secteur d'étude, l'étape du déroulement ainsi que les caractéristiques du parcours retenu par l'enseignant. Le résultat obtenu sur LaboMeP est présenté en figure 10.

Le modèle est peuplé d'une centaine d'exercices : des exercices « papier-crayon » conçus dans le cadre de notre thèse mais aussi des exercices interactifs présents dans LaboMeP. Notre travail a ainsi conduit à la conception de seize PED et à leur dissémination sur LaboMeP.

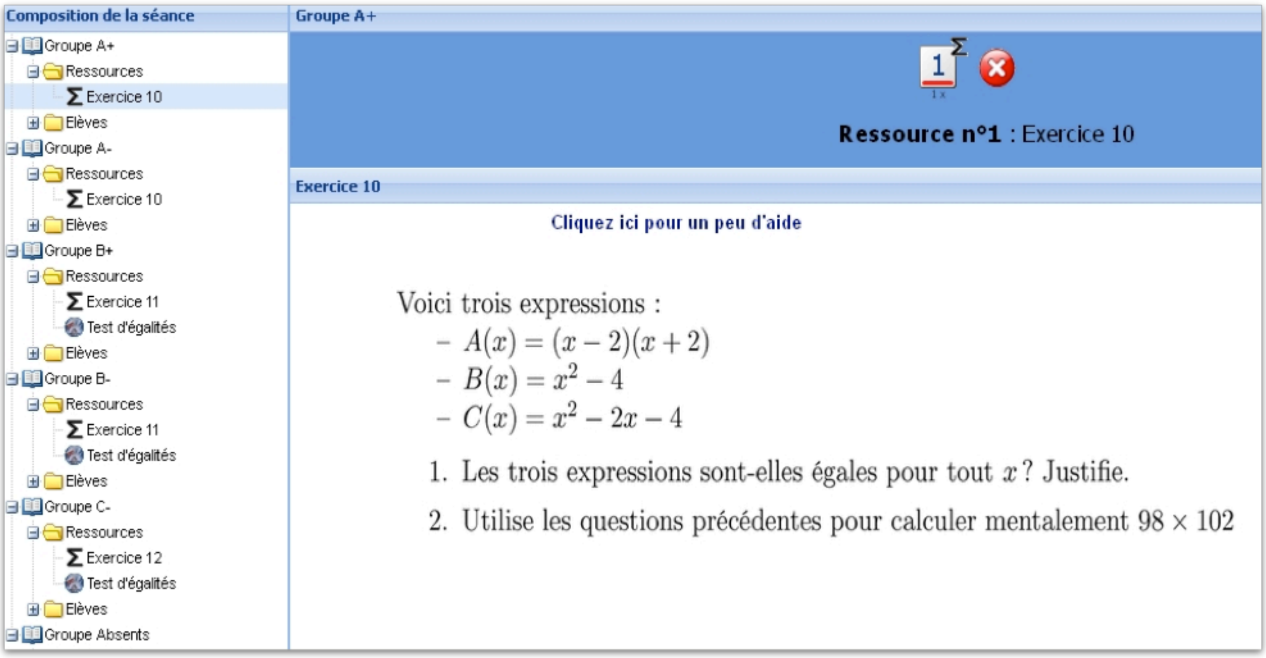



Figure 10. Interface « Enseignant » de présentation d'un parcours sur LaboMeP

## Conclusion

Nous avons présenté la démarche de recherche que nous avons menée pour la conception d'un modèle de parcours d'enseignement différencié. Nous avons défini une OM de référence autour des expressions algébriques. Cette référence est un outil conceptuel et méthodologique central pour analyser les organisations mathématiques à enseigner et celles apprises et mettre en évidence des savoirs et savoir-faire institutionnellement ignorés. Les OM mathématiques et didactiques des PED sont organisés à partir de ces analyses. Dans le modèle, un parcours est défini par rapport à un thème d'enseignement, un niveau scolaire, une étape du déroulement de l'enseignement en algèbre et un objectif d'enseignement commun à la classe. Les tâches ainsi définies sont adaptées aux niveaux technologiques dominants de chaque groupe d'élève à partir d'un jeu sur des variables didactiques comme la complexité des expressions algébriques, le découpage des énoncés et les registres de représentation en jeu.

Notre démarche de recherche comprend la validation de ce modèle. D'un point de vue interne, le modèle a été validé à la fois par la méthode de conception pluridisciplinaire (didactique, informatique, enseignant) et par le fait que son implémentation informatique conduit à une génération automatique valide des parcours. En effet, le logiciel conçu génère automatiquement les exercices prévus pour chaque PED. D'un point de vue externe, les analyses qualitatives des expérimentations menées avec l'un des enseignants du groupe IREM (Pilet, 2012, Pilet et al., 2013), que nous n'avons pu présenter dans ce texte, montrent que la mise en œuvre des parcours en classe a permis de travailler les enjeux didactiques prévus. Si ces analyses valident la pertinence des parcours d'un point de vue didactique, l'étude de cas de cet enseignant montre que leur mise en œuvre efficace des parcours peut s'avérer délicate, notamment parce que certains aspects épistémologiques des expressions algébriques intervenant dans les parcours sont parfois éloignés du rapport personnel des enseignants à l'algèbre et à son enseignement.

Enfin, dans le cadre du projet PepiMeP, nous avons disséminé le test diagnostic Pépite et des parcours d'enseignement différencié que nous avons conçus sur la plateforme LaboMeP. Des usages de ces outils, indépendamment de toute intervention de l'équipe de conception, montrent qu'ils correspondent à un besoin des enseignants. Entre septembre 2012 et juin 2013, 2700 élèves ont passé le test de diagnostic Pépite et près de 130 parcours ont été créés sur LaboMeP. Ces chiffres ouvrent des nouvelles perspectives de recherche sur les pratiques des enseignants ordinaires utilisant le test diagnostic Pépite et les parcours.

**Remerciements**

Le projet PépiMeP a été financé en partie par la région Ile-de-France. Je remercie Brigitte Grugeon-Allys pour son soutien et sa disponibilité dans l'encadrement de ma thèse, Élisabeth Delozanne, Françoise Chenevotot-Quentin, Naïma El-Kechaï pour leur collaboration dans la conception du modèle, les enseignants du groupe IREM qui ont accepté ma présence dans leurs classes, Arnaud Rommens, Dominique Prévit, Aso Darwesh, Josselin Allys, Yvonnick Labed Veydert, Aous Karoui pour leur participation active à l'implémentation des séances de diagnostic et de différenciation sur LaboMeP.

**Références**

Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis-Diderot, Paris.

Bolon, J. (2002). Pédagogie différenciée en mathématiques : mission impossible ou défi ? *Grand N*, 69, 63-82.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.

Bosch, M., & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e École d'été de didactique des mathématiques*. Corps (Isère), du 20 au 29 août 2003 (p. 107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissages ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28(2), 135-182.

Charnay, R. (1995). De la diversité. In R. Charnay et al. (Eds.), *Chacun, tous... Différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages* (p. 9-29). Lyon : I.N.R.P.

Chenevotot, F., Grugeon, B., Pilet, J., & Delozanne, E. (2012). De la conception à l'usage d'un diagnostic dans une base d'exercices en ligne. In J.-L. Dorier (Ed.), Actes du colloque Espace Mathématique Francophone, Enseignement et contrat social : Enjeux et défis pour le 21ème siècle, EMF 2012, Genève, février 2012 (p. 808-823). Disponible sur http://www.emf2012.unige.ch/index.php?option=com_content&view=article&id=57

Chevallard, Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique., *Petit x*, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (2), 221-265.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. *Recherches en didactique de mathématiques. Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, hors-série, 19-40.

Combier, G., Guillaume, J.-C., & Pressiat, A. (1995). *Calcul littéral : Savoirs des élèves de collège*. France : INRP.

Delozanne, E., Prévit, D., Grugeon, B., & Chenevotot, F. (2010). Vers un modèle de diagnostic de compétences, *Revue Techniques et Sciences Informatiques*, 29 (8-9), 899-938.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis-Diderot, Paris.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern : Perter Lang.

Frege, G. (1971). É*crits logiques et philosophiques*, Éditions du Seuil, Paris.

Gascón, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x* , 37 , 43-63.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.

Grugeon, B., Pilet, J., Chenevotot, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique de mathématiques, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, hors série, 137-162.

Grugeon, B., Chenevotot, F., Delozanne, E. (2014). *De la conception aux usages de ressources dédiées à l'enseignement différencié en algèbre élémentaire*. In S.Coppé & M.Haspekian (dirs.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris, octobre 2013. Paris : IREM de Paris7.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra At the Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In J. Lester F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, p. 707-762). Charlotte, NC : I.A.P.

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession*. Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, Montpellier.

Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation.* Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris. Disponible en ligne http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039, lien consulté le 4 janvier 2014.

Pilet, J., Delozanne, É., Chenevotot, F., Grugeon-Allys, B., Prévit, D., El-Kechai, N. (2013). Identifier des besoins d'apprentissages des élèves pour réguler l'enseignement : les outils Pépite sur LaboMeP, *MathémaTICE*, 37. Disponible en ligne http://revue.sesamath.net/spip.php?article557, lien consulté le 4 janvier 2014.

Prévit, D., Delozanne, É., et Grugeon, B. (2007). Génération automatique d'exercices de diagnostic, Actes de la conférence *EIAH2007, Environnements Informatiques pour l'apprentissage humain*, Lausanne, 27-29 juin 2007, INRP, 545-556.

Rochex, J.-Y., & Crinon, J. (2011). *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes : P.U.R.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques, hors série, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, Hors-série, 87-106.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

**CELINE VENDEIRA MARECHAL**

# EFFETS DES CONTRAINTES INSTITUTIONNELLES SUR LES PRATIQUES ENSEIGNANTES DANS L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE

celine.marechal@unige.ch

**Université de Genève**

**Résumé.**
Ce travail de thèse tend à comparer et interpréter les praxéologies activées par des enseignants primaires genevois en mathématiques dans trois structures différentes (classes «ordinaires», classes spécialisées et classes d'écoles d'enseignement spécialisé) au regard des conditions et contraintes qui pèsent sur eux. La problématique écologique, permettant d'identifier les systèmes de contraintes et de conditions dans lesquelles les enseignants font leurs choix d'organisations mathématiques et didactiques, est donc au cœur de cette recherche avec pour cadre principal la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992). Toutefois, afin de relever ce qui, dans les phénomènes observés, relèverait de différences inter-personnelles, ce cadre principal a été articulé avec la double approche didactique et ergonomique élaborée par Robert et Rogalski (2002).

C'est dans le cadre d'une recherche de thèse (Maréchal, 2010) que prend place le questionnement que nous développons dans cet article. Divers travaux de recherches nous ont conduits à nous intéresser à la question de la spécificité du travail des enseignants exerçant dans des contextes spécialisés. En effet, au-delà des différences évidentes dans les capacités cognitives des élèves, il semble bien que les organisations mathématiques et didactiques mises en œuvre par les enseignants jouent un rôle important dans les différences que l'on peut observer. Dans ce sens, la réflexion menée par Conne (1999, 2005) a été un déclencheur pour notre recherche. En effet, cet auteur s'est premièrement interrogé sur l'existence d'une didactique des mathématiques propre à l'enseignement spécialisé (1999) puis, dans un deuxième temps, à savoir si le cadre institutionnel dans lequel les élèves sont intégrés a un impact jusqu'au didactique (2005). Dans la lignée de ces travaux, notre intérêt s'est focalisé sur les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les enseignants du secteur spécialisé et leurs effets potentiels sur les pratiques enseignantes, notamment dans ce qui est proposé aux élèves en termes de contenu de savoir.

Notre étude vise donc à comparer les praxéologies mises en place par les enseignants de trois types d'institutions dans le canton de Genève (les classes « ordinaires », les classes spécialisées et les écoles d'enseignement spécialisé) et de chercher les liens de causalité en termes de contraintes et de conditions liées à ces institutions. Nous faisons en effet l'hypothèse que les conditions et contraintes institutionnelles particulières à chacun de ces types d'institutions ont un impact sur les organisations didactiques et mathématiques mises en place par les enseignants et donc sur l'enseignement dispensé. Comme le mentionne Chevallard (1989), c'est en se focalisant sur ce qu'il se passe dans les classes que l'on découvre les conditions et contraintes qui définissent l'écosystème dans lequel les enseignants évoluent.

**Contexte**

Notre étude prend place dans le contexte de l'enseignement primaire genevois où une politique de différenciation structurale est appliquée. Doudin et Lafortune (2006) définissent cette politique comme la création de différents types de classes dans un même système scolaire. Chacun des types de classes correspond à un certain profil d'élèves définit principalement par ses compétences scolaires, niveau et/ou problèmes de comportement en classe. A Genève, il existe trois types de classes différents : les classes « ordinaires » relevant du secteur « ordinaire » puis les classes spécialisées et les établissements d'enseignement spécialisé, relevant du secteur spécialisé. Nous avons dès lors choisi de collaborer avec trois classes de chaque type, soit un total de 9 classes. L'école « ordinaire » représente le lieu où la majorité des enfants se rendent. Ce sont généralement des élèves dits « sans difficulté » ou dont les difficultés d'apprentissage sont considérées – par les maîtres – comme étant compatibles avec les attentes de l'institution. Pour qu'un élève intègre une classe spécialisée, il faut en général que son enseignant le signale par le biais d'un bilan pédagogique comme « un enfant inadapté aux critères scolaires «ordinaires» » (Biffiger, 2004, p.34) autrement dit comme ne pouvant pas profiter de l'enseignement « ordinaire » suite à certaines difficultés d'apprentissage et/ou de comportement qui l'empêche d'évoluer correctement (c'est-à-dire conformément au contrat didactique en vigueur). Les établissements spécialisés regroupent quant à eux des élèves qui n'ont été orientés ni vers la filière ordinaire, ni vers les classes spécialisées et qui présentent généralement une « atteinte organique ou psychique majeure et handicapante : cécité, surdité, infirmité motrice cérébrale, handicap mental, psychoses déficitaires » (Ibid., p.34). Ces lieux ont la particularité d'offrir une prise en charge spécifique des élèves avec, en plus d'un soutien pédagogique, un soutien éducatif et thérapeutique dispensé par une équipe pluridisciplinaire. Les effectifs des classes en moyenne correspondent de 17 à 24 élèves pour les classes « ordinaires », de 7 à 9 élèves pour les classes spécialisées et de 3 à 6 élèves pour les classes des établissements spécialisés.

L'une des particularités du contexte suisse romand, dont Genève fait partie, tient au fait qu'il existe des moyens d'enseignement officiels et unitaires pour l'enseignement des mathématiques. Ces derniers sont la ressource principale et quasi unique des enseignants genevois. Cela n'implique cependant pas qu'ils soient employés de façon identique partout et par tous. En effet, en fonction du canton, de l'établissement scolaire, voire même de l'enseignant, des choix sont opérés, rendant ainsi possibles des variations plus ou moins fortes. Cette particularité suisse romande est cependant bien éloignée du fonctionnement d'autres pays, comme la France, où les manuels sont davantage le fait de publications d'éditeurs privés parmi lesquelles les enseignants ou établissements scolaires doivent effectuer des choix. Différentes conceptions de l'apprentissage et orientations didactiques peuvent ainsi se dessiner au travers des nombreux manuels présents sur le marché. D'ailleurs, comme le cite Jaquet (2000), alors que cette situation de moyens d'enseignement unique apparaît absolument naturelle en Suisse romande, « au-delà de nos frontières, elle suscite de l'étonnement, de l'incrédulité, voire de la réprobation : comment peut-on imaginer que tous les maîtres utilisent le même manuel ? Comment peut-on accepter le monopole de l'Etat sur les moyens d'enseignement ? » (p.1). Ainsi les moyens d'enseignement COROME[61] ne sauraient se réduire à un manuel au sens où on l'entend en France par exemple. C'est

[61] Les moyens d'enseignement COROME sont diffusés par la COmmission ROmande des Moyens d'Enseignement.

pourquoi nous soulignons que ce sont des moyens officiels distribués dans toutes les écoles de Suisse romande et qui sont encore une fois la seule source reconnue pour les enseignants. Toutefois, il est important de préciser que les enseignants du secteur spécialisé genevois ne sont pas contraints d'utiliser les moyens d'enseignement officiels. Ils ont en effet davantage de libertés que les enseignants « ordinaires ». Par exemple, ils ne sont pas obligés de suivre « à la lettre » le curriculum officiel, ni d'évaluer leurs élèves à travers des tests officiels. Nous postulons dès lors que ces différents éléments ont une influence directe sur les pratiques des enseignants et donc sur l'enseignement mathématique dispensé.

Dans le cadre de cette étude, nous nous focalisons sur l'enseignement de l'introduction à l'addition. Diverses recherches (Cherel & Giroux, 2002, Conne, 2003) ont pointé que les activités liées aux opérations additives sont souvent surreprésentées dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Ainsi, en nous focalisant sur l'addition, nous nous assurons de sélectionner une notion mathématique suffisamment travaillée dans les classes spécialisées et surtout dans les classes d'établissements spécialisés peu nombreuses dans le canton de Genève. Le choix du contenu de savoir « addition » a conduit à utiliser de façon secondaire le cadre des champs conceptuels de Vergnaud (1990). Nous ne détaillons toutefois pas cet aspect dans cet article.

## Méthodologie

La nature de notre question de recherche (comparaison de pratiques enseignantes au sein de trois *Institutions* distinctes) ainsi que l'ampleur du corpus (neuf classes) nous ont conduit à faire appel aux outils de la TAD – théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992). Nous verrons également que la nécessité de prendre en compte une dimension plus personnelle des enseignants a conduit à introduire le cadre de la double approche didactique et ergonomique de Robert et Rogalski (2002).

Pour permettre la description des pratiques institutionnelles, et l'étude de leurs conditions de réalisation, Chevallard a introduit la notion de praxéologie (Bosch & Chevallard, 1999). Une praxéologie est constituée d'un quadruplet qui comporte un type de tâches, les techniques possibles pour réaliser cette tâche, les technologies qui justifient ces techniques, et enfin les théories qui justifient ces technologies. Dans le cas de l'enseignement des mathématiques, pour étudier les praxéologies mises en place, la TAD propose d'examiner le travail du professeur d'après deux grandes composantes solidaires que sont les « organisations mathématiques » (OM) et les organisations didactiques (OD).

En pratique, il a été demandé à chaque enseignant de répertorier chaque activité relative à l'addition traitée dans sa classe tout au long d'une année scolaire (selon une grille élaborée par le chercheur). C'est sur cette base que les scénarios d'enseignement (enchaînement effectifs des activités relatives à l'addition) modélisés en termes d'OM et d'OD, ont été reconstitués et ont fourni la base des comparaisons. Nous avons dès lors comparé au sein des neuf classes le temps d'enseignement effectif de l'addition durant une année scolaire, la fréquence d'utilisation des moyens d'enseignement officiels, puis les types de tâches et registres d'ostensifs impliqués dans chacune des activités proposées (nous décrivons plus en détails ces éléments par la suite).

Ces premiers éléments nous permettent de dégager les organisations mathématiques et didactiques *régionales*[62] (Chevallard, 2002) mises en place dans chacun des lieux et

[62] L'organisation régionale correspond à tout un secteur d'étude. Dans notre étude il s'agit de la notion d'opération arithmétique représentée par le signe + ou – (addition et soustraction).

d'observer si des organisations mathématiques et didactiques caractéristiques par type d'institutions se dégagent.

Toutefois, nous avons assez rapidement pris conscience du fait que les outils de la TAD, permettant d'appréhender et saisir nos données d'un ordre macro, ne permettaient pas de considérer l'impact de composantes plus personnelles liées aux enseignants. La nécessité d'observer une séance commune dans les 9 classes est alors apparue en cours de recherche dans le souci d'obtenir des éléments plus tangibles du quotidien de notre échantillon d'étude et tenter de dégager un « genre » pour chacun des enseignants. Pour ce faire, nous avons basé nos analyses sur les travaux de Robert et Rogalski (2002) qui donnent lieu à une lecture des pratiques enseignantes selon 5 composantes. Dans notre cas, seules les composantes cognitive et médiative ont été considérées, car ce sont celles qui permettent de dégager les logiques d'enseignement.

Nous définissons ci-dessous les composantes cognitives et médiatives telles que définies par Robert et Rogalski. Ces deux composantes permettent d'analyser les pratiques enseignantes du point de vue des apprentissages potentiels des élèves. Il s'agit de l'élaboration des scénarios et itinéraires cognitifs[63] prévus pour les élèves ainsi que l'accompagnement pendant les déroulements des séances.

> [La] composante [cognitive] résulte de l'analyse de ce que l'enseignant planifie pour agir sur les connaissances mathématiques des étudiants. Quels savoirs vont être travaillés ? Quels itinéraires cognitifs a-t-il choisi pour les élèves ? (op.cit., p. 513)

Cette composante est particulièrement intéressante à analyser dans le cas des enseignants spécialisés qui, rappelons-le, ont une liberté de programme et d'emploi des moyens d'enseignement officiels qui les implique davantage dans le processus de transposition didactique que les enseignants de classes « ordinaires ».

> [La composante « médiative » concerne] les analyses relatives aux modes d'interaction en classe des différents acteurs. Il s'agit de préciser comment l'enseignant organise dans sa classe les médiations entre les élèves, et entre lui et les élèves. Plusieurs facettes de l'activité de l'enseignant sont en jeu : les discours d'accompagnement, notamment les aides, le moment où elles interviennent, mais aussi les mises au travail des élèves avec leurs modalités et les prises en compte des élèves. (Ibid., p.513)

La revue des travaux sur l'enseignement en contexte spécialisé a mis en évidence, en réaction à certaines contraintes, de nombreux effets de l'ordre de la composante médiative. Par exemple, l'importante fréquence des interventions et aides personnalisées, une gestion principalement individuelle, la disparition de phases collectives, l'absence de débat entre pairs, etc.

C'est donc en analysant des éléments relevant de ces deux composantes que nous pouvons, dans un second temps, définir le *i-genre* de chacun des enseignants à partir des travaux réalisés sous la direction de Peltier-Barbier (2004) dans le cadre de l'enseignement primaire en ZEP. Ces auteurs utilisent la catégorisation due à Clot en terme de *i-genre*[64]. Ils dégagent de leurs observations, trois pratiques enseignantes différentes en ZEP qu'ils ont catégorisées *i-genre 1* (individualisation du travail et absence de synthèse et d'institutionnalisation), *i-genre 2* (travail des élèves fortement guidé et morcelé en tâches élémentaires, absence de synthèse et d'institutionnalisation) et *i-genre 3* (pratique de synthèse et d'institutionnalisation, étayage prononcé lors des phases de formulations).

[63] Le terme « itinéraire cognitif » est représentatif de la reconstitution des activités proposées aux élèves (à partir du contenu en jeu dans une séance, des tâches prescrites aux élèves, du déroulement effectif (compte tenu des modalités de travail adoptées et des discours de l'enseignant)).

[64] Selon la définition de Clot (1999), les *i-genres* rendent compte de la mission d'instruction du professeur.

A partir de cette deuxième série d'analyses, nous mettons en évidence les organisations mathématiques *ponctuelles*[65] et les organisations didactiques au niveau du *sujet* d'étude pour chaque enseignant. Il s'agit ensuite de vérifier si celles-ci coïncident avec les organisations mathématiques et didactiques *régionales* caractéristiques dégagées précédemment à partir des outils de la TAD et ainsi mettre en évidence ce qui relève de contraintes plus locales ou d'investissement d'une marge de manœuvre plus personnelle au-delà des contraintes institutionnelles.

***Construction d'une typologie en fonction des types de tâches et des registres d'ostensifs***

Pour analyser chacune des activités proposées par les enseignants en classe, nous avons construit une typologie de tâches qui nous permet de coder toutes les activités travaillées selon les types de tâches et registres d'ostensifs impliqués. La typologie de tâches offre des possibilités d'analyses en termes d'organisations mathématiques (OM), mais aussi d'organisations didactiques (OD) et la caractérisation de registres d'ostensifs vient compléter ce premier outil en considérant différents objets ostensifs qui sont activés lors de la réalisation d'activités mathématiques. La construction d'une typologie de registres d'ostensifs permet des analyses davantage orientées vers les organisations didactiques (OD).

Afin de créer notre typologie de tâches, nous avons procédé en deux étapes. La première permet de constituer notre premier niveau de spécification avec le genre de tâches étudié. La deuxième étape consiste en un enrichissement de cette typologie de tâches à partir d'objets ostensifs. Ci-dessous, nous exposons plus en détails notre manière de procéder :

*Les calculs numériques*[66] *(premier niveau)*

Premièrement, nous définissons les types de tâches mathématiques disponibles en première année de primaire en lien avec le genre de tâches étudié[67]. Nous pouvons ainsi dégager 3 types de tâches relatifs à une même écriture de type a +/- b = c :

1) « faire des sommes et des différences » lorsque « c » est recherché
2) « trouver le terme manquant dans une addition / soustraction lacunaire » lorsque a ou b sont recherchés, c et l'autre terme étant connus.
3) « recherche de décompositions additives / soustractives » lorsque à la fois a et b sont cherchés pour un c donné.

Nous avons volontairement ignoré l'addition en colonne afin de ne répertorier que des additions sous forme de sommes en ligne, car les algorithmes de calcul en colonnes ne sont introduits, d'après le plan d'étude et les moyens d'enseignement suisses romands, qu'à partir de la troisième année du primaire signifiant qu'il est rare de l'introduire dès l'introduction du thème.

Pour nos analyses, nous regardons donc tout d'abord le calcul numérique impliqué dans chaque activité proposée aux élèves. Ci-dessous nous présentons le codage des différentes possibilités pour l'analyse de activités proposées en classe.

[65] L'organisation praxéologique *ponctuelle* est relative à un unique type de tâches et s'organise autour d'un complexe de techniques, de technologies et de théories relatives à ce type de tâches.

[66] Vergnaud (1981) distingue « calcul numérique » de « calcul relationnel ». En effet, alors que le premier décrit une opération ordinaire (addition, soustraction, multiplication et division), le second s'intéresse aux relations impliquées dans la situation (s'agit-t-il d'une transformation positive directe appliquée à un état initial, de trouver une différence entre deux états, etc. ?).

[67] L'ordre dans lequel nous introduisons nos types de tâches et sous-types de tâches n'est pas représentatif d'une quelconque hiérarchie.

| 1° Opération numérique impliquée | | | |
|---|---|---|---|
| $T_1$ | (+) a + b = .... | (-) a - b = .... | → *a* et *b* sont donnés et *c* doit être trouvé |
| $T_2$ | (+) a + .... = c | (-) a - .... = c | → *a* (ou *b*) et *c* sont donnés and *b* (ou *a*) doit être trouvé |
| $T_3$ | (+) .... + .... = c | (-) .... - .... = c | → seulement *c* est donné et quelques/toutes les possibilités pour *a* et *b* doivent être trouvées (décomposition additive) |

Figure 12 – Premier niveau de spécification: les calculs numériques

Nous distinguons également les symboles (+) et (–) selon si l'activité implique le calcul numérique de l'addition ou de la soustraction[68].

*Les registres d'ostensifs (deuxième niveau)*

Notre premier niveau d'analyse ne nous permettait pas de coder les différentes activités proposées dans les neuf classes de manière satisfaisante. Nous avons en effet constaté que certaines activités, pourtant très différentes, étaient codées identiquement. C'est pourquoi, afin de coder plus finement les activités récoltées, nous avons introduits un deuxième niveau à notre typologie : les registres d'ostensifs introduits par Bosch et Chevallard (1999).

Les objets ostensifs sont définis comme des objets manipulables qui ont une réalité perceptible. A l'inverse, les objets non ostensifs ne sont jamais « vus », « perçus », ni « entendus ». Ils ont besoin des objets ostensifs pour apparaître. Par exemple, la notion d'addition (objet non ostensif) a besoin d'objets ostensifs pour émerger (comme la manipulation des écritures de type $a + b = c$).

Les différents objets ostensifs peuvent être caractérisés en fonction du *registre* auquel ils appartiennent : registre de l'oralité, registre de la trace (qui inclut graphismes et écritures), registre de la gestualité, etc… Lors de la réalisation d'une activité mathématique, différents objets ostensifs sont activés appartenant à divers registres. Il est rare de voir fonctionner un objet ostensif de façon autonome. Prenons l'exemple donné par Bosch et Chevallard (1999) sur la technique de comptage. Cet exemple fait appel à deux registres : celui du geste (montrer les objets à compter) et celui de l'oral (réciter le nom des nombres pointés). Dans les activités proposées aux élèves, le support choisi par l'enseignant met en avant un registre d'ostensifs dominant qui influence nécessairement le choix des techniques mises en œuvre par les élèves. Par exemple, proposer une activité où des jetons sont mis à la disposition des élèves leur permet de recourir à la technique de dénombrement, ce qui n'est pas le cas dans d'autres situations où les élèves doivent directement recourir au calcul. C'est pourquoi, pour chaque exercice ou problème répertorié dans les neuf classes, nous allons extraire le registre d'ostensifs dominant en fonction du type de support mis à disposition des élèves, qu'il soit matériel (matériel manipulable, fiche avec des quantités représentées, fiche avec des images,…) ou non (discours écrit ou oral). Pointer à quel registre appartient tel exercice ou problème est important, car comme le dit Conne (1987) « ce qui fait la distinction entre dénombrement, comptage et calcul, ce sont les objets que l'on traite (manipule) : des objets concrets, réels, pris pour eux-mêmes ou représentant une quantité […] » (p. 12). Selon Giroux (2007), proposer des supports variés aux élèves pour mettre en scène un même objet de savoir (« jeux de table », papier-crayon, environnement informatique, etc.) permet de varier les

[68] Dans notre recherche, nous avons également regardé si l'inconnu était a (valeur initiale) ou b (Vergnaud, 1981). Nous ne présentons toutefois pas ces résultats dans cet article étant donné qu'ils ont apportés peu d'éléments significatifs.

« accès » au savoir et par conséquent favorise l'acquisition du savoir par des formes différentes d'utilité de la connaissance. De ce point de vue, il est important de varier les registres d'ostensifs impliqués dans les activités relativement à l'introduction de l'addition.

Les registres d'ostensifs ont, dès lors, une influence certaine dans la modélisation des relations en jeu dans les exercices et problèmes proposés aux élèves. En effet, la modélisation des relations en jeu peut être plus ou moins facilitée selon le registre d'ostensifs dominant dans l'activité proposée. Par exemple, poser un problème du type « Audrey a 3 billes, elle en gagne 4 contre Sylvia, combien en a-t-elle à la fin ? » ne représente pas le même niveau de modélisation que de résoudre 3 + 4 = …. sur une feuille de calculs. Le premier nécessite une organisation des éléments en jeu qui n'est pas requise dans le second, mais offre aussi une possibilité matérielle de mise en œuvre de techniques de dénombrement pour résoudre la tâche. Les techniques favorisées, accessibles ou pertinentes ne sont donc pas les mêmes dans les deux cas de figure. C'est pourquoi, il est nécessaire de prendre en compte la nature des ostensifs impliqués dans les activités proposées, afin de mettre en évidence les techniques qui y sont favorisées, accessibles ou pertinentes. Cela nous a conduit à distinguer, parmi 3 registres (gestualité, trace et oralité), 7 variantes à associer à chacun des types de tâches de notre typologie. Nous présentons dans ce qui suit la signification de ces 7 variantes :

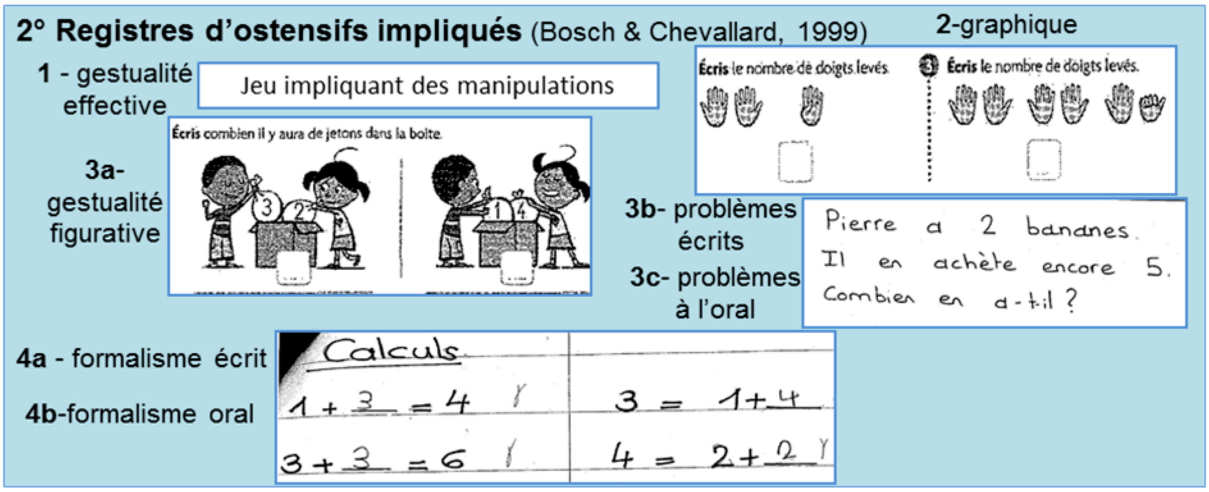



Figure 2 – Deuxième niveau de spécification: les registres d'ostensifs

Le premier registre d'ostensifs implique une activité qui met en jeu une situation effective impliquant les élèves. Cette activité permet une validation matérielle par manipulation (dénombrement). Les nombres sont représentés par des collections d'objets concrets représentant des quantités. Le second registre d'ostensifs représente une situation fictive où les manipulations ne sont plus possibles, mais le résultat peut être atteint par un dénombrement. Les nombres sont représentés par des collections d'objets figurés. Le registre d'ostensif 3a représente, à l'aide d'une image, une situation fictive. Les élèves doivent reconstruire mentalement les opérations à effectuer, mais l'image facilite cette organisation. Les manipulations ne sont plus possibles. Les nombres sont représentés par des écritures chiffrées ou des mots-nombres. Les registres d'ostensifs suivants (3b et 3c) correspondent à ce qu'on nomme communément « problèmes mathématiques » dans lesquels une situation fictive est décrite à l'écrit ou à l'oral. Comme dans la variante 3a, l'élève doit reconstruire mentalement les opérations à effectuer pour résoudre le problème. Cependant, ce cas est plus complexe, car il n'y a pas d'images facilitant la compréhension de la situation décrite. Pour finir, dans les activités impliquant les registres d'ostensifs 4a et 4b, il n'y a plus aucune référence à des situations, les élèves agissent uniquement sur des opérations numériques.

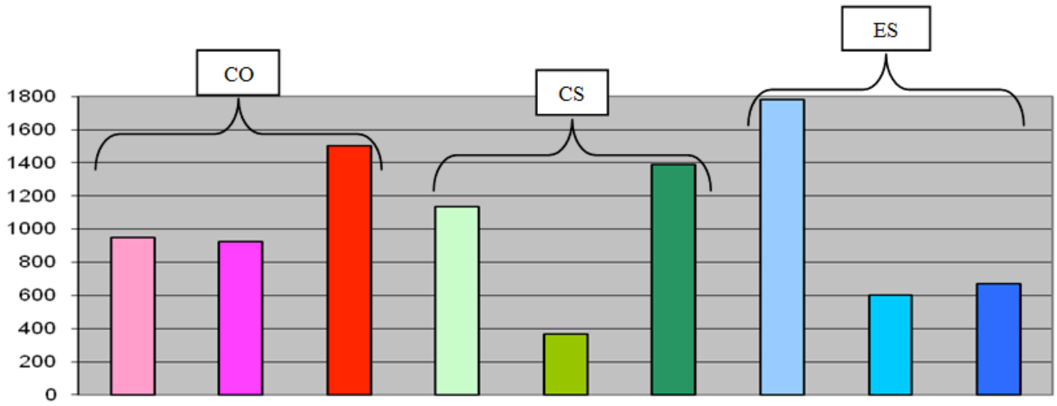
Ce second niveau de spécification nous informe sur la hiérarchie des techniques possibles pour résoudre les types de tâches proposés précédemment dans la figure 1.

Dans ce qui suit, nous présentons les analyses que nous avons développées sur la base de cette typologie de tâches et de registres d'ostensifs et qui nous renseignera sur les « mathématiques vécues » par les élèves des différents types d'institutions.

**Analyses**

Avec les neuf scenarios d'enseignement récoltés dans les classes, nous avons pu établir une série de données correspondant au temps effectif d'enseignement de l'addition durant une année scolaire, à la fréquence d'utilisation des moyens d'enseignement officiels et à l'analyse de l'ensemble des activités selon notre typologie de types de tâches et de registres d'ostensifs. Ces différentes données ont permis de dégager les organisations mathématiques et didactiques, au niveau *régional*, des neuf enseignants relativement à l'introduction de l'addition.

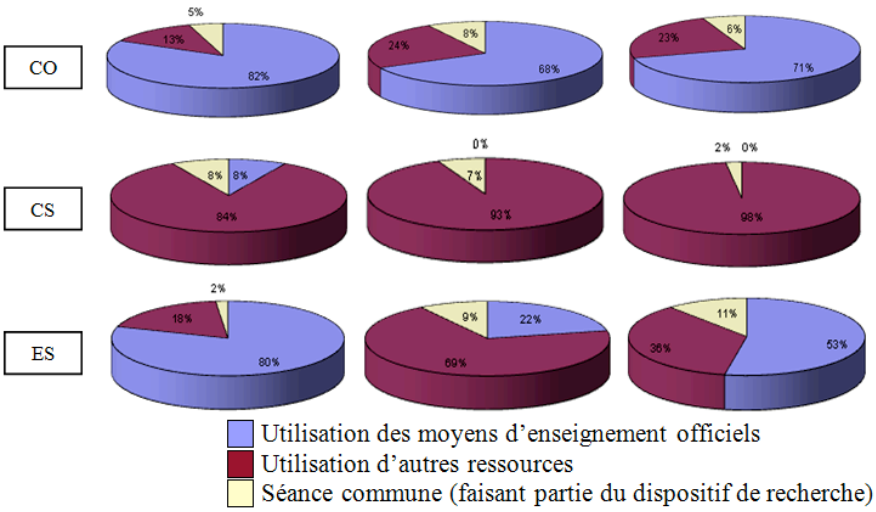
Ci-dessous nous présentons le graphique qui indique (en minutes), pour chacune des classes « ordinaires » (CO), spécialisées (CS) et les établissements d'enseignement spécialisé (ES), le temps d'enseignement attribué à l'introduction de l'addition durant l'année scolaire de nos observations :




Graphique 1: Temps (en minutes) attribué à l'enseignement de l'addition durant une année scolaire dans neuf classes.

Premièrement, nous constatons une nette disparité entre les neuf classes. Toutefois, les valeurs sont plus homogènes dans l'institution CO. Ce constat peut être relié aux fortes contraintes de programme que subissent les enseignants « ordinaires ». Dans le cas des classes spécialisées, un des enseignants a consacré très peu de temps à l'introduction de l'addition. Dans les faits, cet enseignant a choisi d'interrompre son enseignement relatif à l'addition en cours d'année scolaire, car il trouvait cette notion trop complexe pour le seul élève de la classe qui participait à cet enseignement. Cette particularité est révélatrice d'une marge de manœuvre rendue possible du fait de certaines contraintes institutionnelles plus souples dans le secteur spécialisé, telle que la flexibilité dans le suivi du programme officiel. Concernant les deux autres classes, les valeurs montrent un léger surinvestissement de l'addition par rapport aux classes « ordinaires ». Ce constat n'est pas surprenant si l'on se fie aux diverses recherches qui montrent que le domaine numérique est souvent privilégié dans le secteur spécialisé par rapport au domaine géométrique ou des mesures, entraînant souvent un surinvestissement de ce domaine d'étude dans ces lieux. Ceci s'explique par la nécessité pour les enseignants des classes spécialisées de renouveler cet enseignement que beaucoup de leurs élèves ont déjà suivi dans des classes ordinaires et par une obligation de réussite dans ce chapitre considéré comme incontournable. Concernant les trois établissements d'enseignement spécialisé, nous remarquons deux valeurs très basses et une plutôt haute (d'ailleurs la plus élevée du graphique). Dans cette dernière classe, l'enseignant consacre la quasi totalité de son « temps mathématique » annuel pour introduire l'addition. Par conséquent, sont retirés de son enseignement les autres objets de savoir figurant dans le curriculum officiel genevois. A l'inverse, les enseignants des deux autres classes ont investi l'ensemble des modules au programme, c'est pourquoi le temps attribué à l'enseignement de l'addition est plus réduit. Toutefois, nous remarquons que les valeurs dans ces deux classes sont plus basses que dans les classes spécialisées. Nous expliquons ce constat par le fait que les établissements d'enseignement spécialisés offrent moins de temps d'enseignement de façon générale et par conséquent également moins de temps d'enseignement en mathématiques. Ce constat a d'ailleurs été vérifié par diverses études (Pelgrims-Ducrey, 1997, 2001, 2006, Maréchal, 2004) qui indiquent clairement que s'il n'y a pas de différence significative entre les classes «ordinaires» et spécialisées concernant le temps alloué aux activités académiques et éducatives, il n'en va pas de même dans les établissements d'enseignement spécialisés. Ainsi, les choix effectués par les enseignants des trois types d'institutions peuvent, en partie au moins, être rattachés aux contraintes institutionnelles.

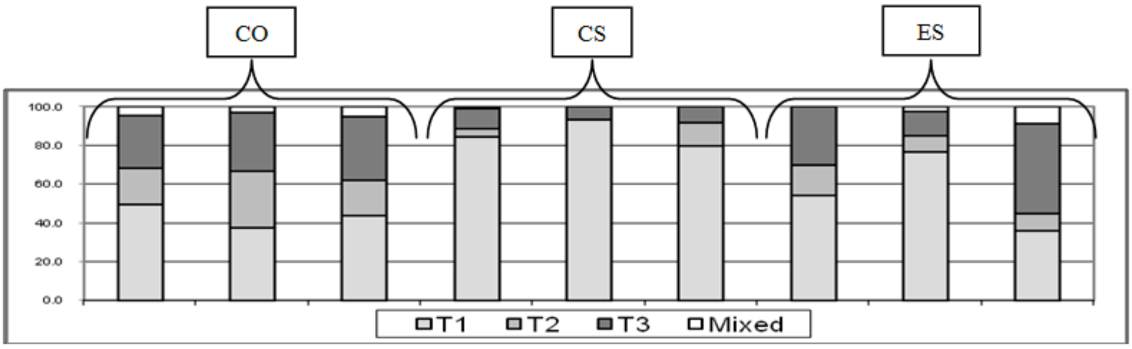
Le graphique qui suit se focalise sur la fréquence d'utilisation des moyens d'enseignement officiels par les enseignants des neuf classes :




Graphique 2 : Fréquence d'utilisation des moyens d'enseignement officiels par les enseignants des neuf classes

Dans les trois classes « ordinaires » nous remarquons des pratiques similaires quant à l'emploi des moyens d'enseignement officiels avec une tendance évidente à les utiliser massivement. Ce constat n'est pas surprenant si l'on considère la forte contrainte que représentent ces documents pour les enseignants de ce type d'institutions. Au contraire, les enseignants des trois classes spécialisées utilisent peu, voire pas, ces moyens d'enseignement. Dans les faits, nous remarquons qu'ils n'utilisent pas nécessairement un manuel de remplacement, mais « piochent » plutôt dans une réserve d'activités accumulée au fil des années par leur soin ou par des collègues. En ne suivant pas un manuel ou des moyens d'enseignement, ils sont, d'une certaine manière, davantage engagés dans le processus de transposition didactique (Chevallard, 1991) que ne le sont les enseignants « ordinaires ». Ce travail est normalement pris en charge pas la *noosphère* car il demande une réflexion sur les contenus d'un niveau supérieur. Ces enseignants doivent alors construire une *technologie*[69] *didactique* leur permettant de justifier leurs choix d'activités (tirées d'autres ressources) et la manière de les articuler. Nous pensons en effet que si les enseignants ne construisent pas de *technologies didactiques* « sérieuses », ils peuvent être amenés à proposer des activités inadéquates (par exemple bien plus complexes que celles recommandées par le plan d'étude officiel, ou inversement). Quant aux trois établissements d'enseignement spécialisé, il n'y a pas ici d'homogénéité intra institution. Nous remarquons même trois cas de figure bien distincts. Cette caractéristique peut être mise en lien avec la liberté d'emploi des moyens d'enseignement officiels. Cependant, cette liberté n'explique pas la différence de choix entre les deux types d'institutions spécialisées (CS et ES).

La suite de nos analyses s'intéresse à la distribution des types de tâches $T_1$, $T_2$ et $T_3$ que nous avons décrit précédemment dans la figure 1[70].




Graphique 3 : Distribution (en %) des types de tâches T1+, T2+ et T3+ durant une année scolaire dans les neuf classes71

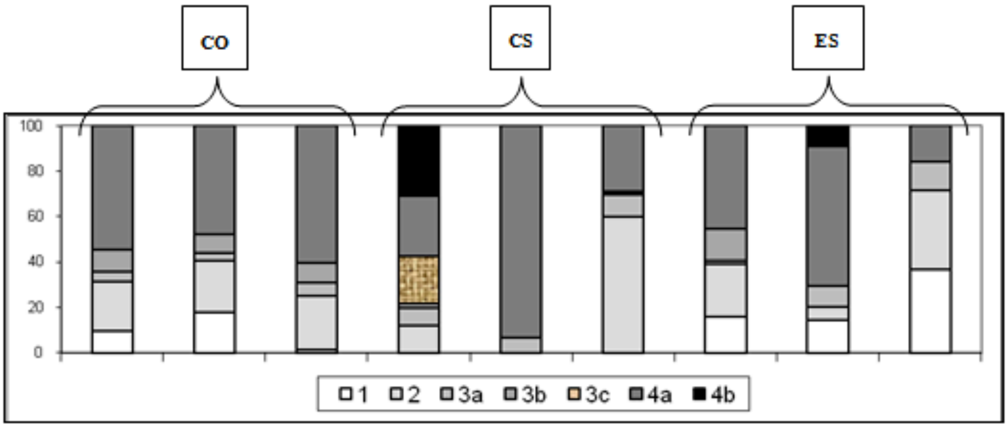
Une nouvelle fois ce graphique met en évidence une homogénéité des données au sein des trois classes « ordinaires ». Nous observons une distribution plus ou moins équivalente entre les trois types de tâches, avec toutefois une majorité d'activités du type $T_1$, puis $T_3$ et $T_2$. Dans les classes spécialisées, une homogénéité est également observée. Toutefois, nous remarquons, dans les trois classes, un surinvestissement du type de tâches $T_1$ au détriment des deux autres. Ce résultat doit, en partie au moins, être dû au fait que les enseignants n'emploient pas les moyens d'enseignement officiels, ni d'autres manuels de remplacement. Dans l'institution ES, aucune homogénéité n'est constatée entre les trois classes. La première se rapproche du fonctionnement des classes « ordinaires », la seconde des classes spécialisées et la dernière a un fonctionnement plutôt original par rapport à l'ensemble des classes. C'est la seule classe où le type de tâches $T_3$ (décomposition additive) est le plus représenté.

Pour terminer, nous regardons la distribution des registres d'ostensifs impliqués dans les activités proposées par les neuf enseignants à leurs élèves durant l'année de nos observations.

[69] Dans la TAD, la *technologie* fait partie du second bloc défini par Chevallard, le bloc technologico-théorique qui relève d'un discours raisonné sur la pratique.

[70] Pour rappel : $T_1$= a + b = …; $T_2$= a + … = c ; $T_3$= … + … = c

[71] Nous ne considérons pas ici les types de tâches soustractifs étant donné que durant l'année d'introduction de l'addition aucune activité soustractive n'est proposée dans les moyens d'enseignement officiels. De plus, nous avons constaté que seules quelques rares classes du secteur spécialisé en ont proposés durant l'année de notre recueil de données et de manière non significative.




Graphique 4 : Distribution (en %) des registres d’ostensifs durant une année scolaire dans les neuf classes

Comme pour les autres graphiques, nous constatons une homogénéité au sein de l’institution CO que nous attribuons à l’utilisation des moyens d’enseignement officiels et à la forte contrainte de programme. Nous notons une certaine variété dans les registres d’ostensifs impliqués dans les activités proposées avec toutefois une majorité d’activités sur des opérations numériques impliquant exclusivement des écritures chiffrées (4a) que des activités permettant la technique de dénombrement (1 et 2). Les techniques de calcul, voire de comptage, sont donc favorisées, ce qui rejoint l’idée qu’en fin de première primaire les stratégies de dénombrement doivent être dépassées. Dans les classes spécialisées, une certaine homogénéité peut être pointée étant donné que les trois enseignants choisissent d’introduire l’addition avec un grand nombre d’activités « formalisées » et le registre d’ostensifs 1 « gestualité effective » (permettant de dénombrer des collections d’objets concrets) est absent. Dans les établissements d’enseignement spécialisés, nous remarquons comme précédemment trois différents scénarios.

## Conclusion

Nos différentes analyses montrent que les différentes contraintes qui pèsent sur les trois types d’institutions ne sont pas les mêmes et engendrent l’activation de différentes praxéologies. Les enseignants « ordinaires » sont confrontés à de fortes contraintes institutionnelles comme l’obligation d’emploi des moyens d’enseignement officiels et le suivi « strict » du programme officiel. Les résultats montrent ainsi des organisations didactiques et mathématiques relativement proches pour les trois classes avec une large variété de types de tâches et de registres d’ostensifs relativement à l’addition.

Dans les classes spécialisées, les contraintes institutionnelles sont nombreuses[72] et accompagnées de contraintes plus « locales » propres à chaque classe telles que le comportement des élèves, l’hétérogénéité des classes, etc. Dès lors, les praxéologies activées dans cette institution sont plus ou moins homogènes avec, en particulier, un accent massif sur les activités simples et « formalisées ». Cette pratique est en partie due au fait que les enseignants spécialisés n’utilisent pas de manuel de référence. Ainsi, ils proposent des activités « valorisées » par les acteurs de l’éducation, voire de la société plus large, en surinvestissant le domaine numérique au détriment d’autres domaines tels que la géométrie et la mesure. De plus, le fait que les classes spécialisées soient localisées dans le même bâtiment que les classes « ordinaires » (ce qui n’est pas le cas pour les établissements d’enseignement spécialisés) occasionne un certain rapport à la « norme « ordinaire » » et engendre une

[72] Pour une analyse plus détaillée des contraintes, se référer à Maréchal (2010).

certaine « pression de réintégration » chez les enseignants spécialisés qui influence nécessairement les choix des praxéologies activées. Dans les faits, nous remarquons une préférence pour les types de tâches $T_1$ et le registre d'ostensifs 4a avec un grand nombre d'activités « formalisées ».

Quant aux établissements d'enseignement spécialisés, le fait qu'ils obtiennent des résultats hétérogènes peut être interprété par la grande autonomie dont disposent les enseignants de ce type d'institutions. Ils ont en effet davantage de libertés qu'ils n'ont de contraintes. De ce fait, ils peuvent davantage se focaliser sur des contraintes plus « locales » afin d'adapter leur praxéologies en fonction de leur contexte particulier qui se traduit par une absence d'homogénéité.

Notre étude montre ainsi que les différences dans les pratiques enseignantes dans les trois types d'institutions peuvent, pour certains aspects au moins, être expliquées par les différentes contraintes qui y pèsent.

Il ressort également de cette recherche que l'écologie du didactique dans le type d'institutions « classe spécialisée » n'est pas optimal et donne lieu à des scénarios d'enseignement répétitifs et appauvris ne coïncidant pas avec le plan d'étude officiel. Ainsi, les enseignants des classes spécialisées qui ont une participation importante dans le processus de transposition didactique ne semblent pas suffisamment outillés « didactiquement » pour adapter leur pratique de manière optimale.

Quant aux analyses issues de la double approche, elles ont permis de pondérer les résultats précédent en montrant par exemple que l'itinéraire cognitif proposé par les enseignants était plutôt riche dans les classes spécialisées, malgré une OM appauvrie, répétitive et incomplète mise en évidence avec les outils de la TAD. De plus, il a pu être mis en évidence que la pratique majoritaire dans ce type d'institution est caractéristique d'un accompagnement des élèves constant et soutenu par les enseignants (représentatif de l'i-*genre* 2, au sens de Peltier-Barbier (2004)).

## Bibliographie


Biffiger, J.-P. (2004). Le canton de Genève. In C. Berger (Ed.), *L'enseignement spécialisé en Suisse romande et au Tessin : aperçu présenté par les responsables cantonaux* (pp.27-42). Lucerne : Centre suisse de pédagogie spécialisée.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Recherches en didactique des mathématiques. 19(1), 77-123.

Cherel, C., Giroux, J. (2002). Intégration d'élèves en difficulté : une problématique didactique, Revue Instantanés Mathématiques, 39, 37-48.

Chevallard, Y. (1989). On Didactic Transposition Theory : Some Introductory Notes. Communication à l'International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education (Bratislava, 3-7 août 1988), pp. 51–62.

Chevallard, Y. (1991). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques. 12*(1), 73-111.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Ecologie & régulation. In J.-L Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (Eds.), Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques (pp. 41–56). Grenoble : La Pensée sauvage.

Clot, Y. (1999). La fonction psychologique du travail. Paris : PUF.

Conne, F. (1987). Entre comptage et calcul, Math Ecole, 130, 11-23.

Conne, F. (1999). Pouvons-nous parler d'une didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé ? In M. Bailleul (Ed.), Actes de la 10e école d'été de didactique des mathématiques, 2, 125-151.

Conne, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement mathématiques en institutions et classes spécialisées [version électronique]. Education et francophonie, 31(2), (pp. 82-102).

Conne, F. (2005). Comprendre la théorie est en attraper le geste et pouvoir continuer. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (année 2003), 101-108, Paris VII : Cahier Didirem.

Doudin, P.-A. & Lafortune, L. (2006). Une vision de l'aide aux élèves en difficulté entre inclusion et exclusion. In P.-A. Doudin et L. Lafortune (Eds.), Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers. Quelle formation à l'enseignement ? (pp.45–74). Québec : Presse de l'Université du Québec.

Ducrey, F. & Pelgrims Ducrey, G. (1997). Equivalence et différenciation des conditions d'apprentissage dans les classes spéciales : analyse du temps d'enseignement officiel, Education et Recherche, 19(1), 101-121.

Giroux, J. (2007). Adapter l'enseignement en classe d'adaptation scolaire ? (La Théorie des situations didactiques à la rescousse des difficultés d'enseignement aux élèves en difficulté d'apprentissage). Contribution au symposium *Entre didactique et politique*, Université Victor Segalen Bordeaux 2, 1-20.

Jaquet, F. (2000). Moyens d'enseignement de mathématiques de Suisse romande : défis et nécessité, Math Ecole, 190, 1-4.

Marechal, C. (2004). Etude descriptive des conditions d'enseignement en institutions spécialisées pour des élèves aux « troubles de la personnalité et de l'apprentissage » : Quel impact sur la mémoire didactique des élèves ? Mémoire de licence, FPSE, Genève.

Marechal, C. (2010). Effet des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé. Une analyse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition. Thèse de l'Université de Genève.

Pelgrims Ducrey, G. (2001). Comparaison des processus d'enseignement et conditions d'apprentissage en classes ordinaire et spécialisée: des prévisions aux contraintes, Revue Française de Pédagogie, 134, 147-166.

Pelgrims G. (2006). Intention d'apprendre, peur de l'échec et persévérance des élèves en classes spécialisées : des composantes générales aux dimensions situationnelles de la motivation à apprendre. Thèse de doctorat en Sciences de l'éducation, Université de Genève.

Peltier-Barbier, M.-L. (2004). *Dur d'enseigner en ZEP*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche, Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2(4), 505-528.

Vergnaud, G. (1981). L'enfant, la mathématique et la réalité. Berne : Editions Peter Lang.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2.3), 133-169.

**TITRE :**

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques


**AUTEURES :**

S. COPPE et M.HASPEKIAN



**RESUME :**

Actes de la session 2013 du séminaire national de didactique des mathématiques. Le séminaire national de didactique des mathématiques est organisé par l'ARDM. Il a pour but de permettre la diffusion régulière des recherches nouvelles ou en cours, des présentations de thèses ou d'habilitation à diriger des recherches et de favoriser les échanges et débats au sein de la communauté francophone de didactique des mathématiques.

Ces séances se sont tenues les 22 et 23 mars 2013 ainsi que les 18 et 19 octobre 2013 à Paris.



**MOTS CLES :**

Didactique des mathématiques