Brochure IREM

n°97

Mai 2015

Autour de la notion de dérivée en classe de première scientifique

Par Sylvie Alory, Renaud Chorlay, Charlotte Derouet, Vincent Josse, Clément Legris, Ratha Loeng, Monica Panero, Marc Rogalski, Fabrice Vandebrouck et Laurent Vivier

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
UNIVERSITE PARIS DIDEROT

Autour de la notion de dérivée en classe de première

Auteurs : Sylvie Alory, Renaud Chorlay, Charlotte Derouet, Vincent Josse, Clément Legris, Ratha Loeng, Monica Panero, Marc Rogalski, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier

Introduction

L'enseignement de l'analyse est étudié depuis plusieurs décennies (Robert 1982, 1983, Artigue 1991 et 1993, Hauchart et Schneider 1996, Robert 1998, Artigue, Batanero et Kent 2007 ou Gueudet 2008) mais les caractéristiques, sans cesse changeantes, des populations d'élèves au lycée et des populations d'étudiants à l'université (en particulier leurs difficultés) ainsi que celles des contenus d'enseignements, tant au lycée qu'à l'université, justifient que l'on s'y intéresse de façon continue et renouvelée. Actuellement, les étudiants entrant à l'université ne savent essentiellement manipuler que les fonctions qui sont définies par une formule. Or la démarche d'analyse est une démarche fondamentalement différente de la démarche algébrique. Elle impose un nouveau point de vue sur l'égalité des nombres réels qui est l'égalité si les deux réels sont arbitrairement proches. Les techniques qui sont attachées à l'analyse relèvent de la majoration, de la minoration et de l'encadrement, du jeu entre des conditions suffisantes et/ou nécessaires et elles mettent en jeu pour beaucoup les propriétés locales des fonctions (notamment les limites). Mais lors de ces études locales, les étudiants traitent algébriquement les équivalents ou les développements limités, donnant très difficilement du sens aux expressions du type $o(x)$, $O(x)$… Ils n'adoptent pas la perspective locale sur les fonctions attendue d'eux.

Cette brochure porte sur l'enseignement de la dérivation en classe de première, en particulier la définition du nombre dérivé et de la tangente. Il s'agit donc d'enseigner explicitement les premières notions de l'analyse (le travail sur l'irrationalité de certains nombres n'est plus travaillé explicitement en classe de seconde). Le sujet a été étudié par de nombreux auteurs : Cornu (1983), Sierpinska (1985), Schneider (1991), Castela (1995), Maschietto (2004), Vivier (2010), Schneider et Gantois (2009). Certains d'entre eux pointent le fait que les fonctions sont encore des objets en construction au début de l'enseignement de l'analyse (association de la notion de fonction uniquement à quelques fonctions de référence, association à l'idée de formule algébrique ou bien à l'idée de courbes particulières, avec des représentations des élèves dépendantes de la situation qu'ils rencontrent…). Les travaux mettent aussi en évidence la difficulté pour les élèves à associer la pente d'une tangente à la limite d'un taux d'accroissement. Les notions de tangentes et de nombre dérivé cristallisent en fait plusieurs difficultés à surmonter.

- Un jeu de cadres en cadre géométrique et cadre fonctionnel, la tangente étant pour les élèves un objet géométrique lorsqu'ils arrivent en première : c'est en premier lieu la tangente à un cercle, droite perpendiculaire au rayon du cercle en un point de la circonférence, ou au mieux une droite ayant la propriété d'intercepter en un unique point une parabole, rencontrée en première. Il s'agit donc d'installer la tangente comme un objet attaché au cadre fonctionnel, comme la droite qui approxime le mieux localement en un point la courbe représentative de la fonction. En première, les manuels ne relient guère la notion de tangente avec la conception préalable des élèves, qui peut pourtant s'avérer soit un obstacle, soit un point d'appui.
- Un jeu de registres entre registre graphique et registre analytique : la tangente n'est pas première par rapport au nombre dérivé. Pourtant elle est redéfinie dans la majorité des cas comme limite de sécantes particulières à la courbe – souvent monotone au voisinage du point considéré – la limite dans l'espace à deux dimension ayant encore moins de sens mathématique pour les élèves que la limite dans l'ensemble des nombres. On reste dans cette définition au sein du registre graphique. C'est plus facile pour les élèves, car la tangente représente l'objet

limite, visible, toujours global, mais il est difficile ensuite dans cette approche globale de faire adopter la perspective locale sous-jacente et de faire apparaître le nombre dérivé comme premier par rapport à la tangente. Schneider (1991) dit « *la pente d'une tangente semble bien seconde pour les élèves par rapport à la tangente elle-même : il s'agit pour eux de déterminer d'abord la tangente, ensuite sa pente, plutôt que le contraire* » ; « *la tangente a très peu à voir pour les élèves avec la limite d'une suite de quotients différentiels* ». Il y a peu de manuels qui proposent la définition alternative de la tangente en un point comme la droite qui approxime le mieux localement la courbe en ce point.

- La notion de limite proprement dite et l'adoption d'une perspective locale sur la fonction et sa courbe : le nombre dérivé est défini comme la limite d'un taux d'accroissement et la tangente est un objet global entièrement défini localement. Une difficulté vient du fait qu'on n'enseigne pas la notion de limite avant celle de nombre dérivée. L'approche du nombre dérivée par la limite des taux d'accroissements, qui convergent bien souvent de façon monotone dans les situations rencontrées, installe une conception dynamique de limite comme la barrière infranchissable de laquelle on s'approche progressivement, alors que la limite est le nombre dont les valeurs du quotient différentiel peuvent être trouvées aussi proches que l'on veut (conception statique). Robert (1982) a montré combien les conceptions premières des élèves restaient stables tout au long de la scolarité et jusqu'à l'université. L'introduction du nombre dérivé et de la tangente suppose d'adopter une perspective locale sur la fonction et sur sa courbe au voisinage du point considéré.

Une difficulté d'enseignement de la tangente et du nombre dérivé vient également du fait que la théatralisation mise en place pour les introduire, visant à faire adopter aux élèves une perspective locale sur les objets manipulés n'est que très peu relayée ensuite par des exercices mettant en jeu la perspective locale sur les fonctions. Trouver des exercices rentrant dans le programme d'enseignement et qui nécessitent impérativement d'adopter cette perspective n'est pas facile.

Dans beaucoup d'exercices, la représentation proposée pour les fonctions rencontrées est la représentation algébrique (au sens général de : sous forme de formules). Il est donc très difficile d'entretenir une habitude de travail chez les élèves qui met en fonctionnement les perspectives sur les fonctions, qu'elles soient locales mais aussi globales. Dans Vandebrouck (2011), il est pointé que les propriétés des fonctions qui sont manipulées par les élèves à partir de la classe de première sont au mieux ponctuelles universelles (pour tout x) : parité, périodicité et surtout croissance/décroissance, avec des fonctions dont on peut calculer la dérivée. Le travail d'étude des variations des fonctions est restreint à du calcul, sans activation des perspectives. Les élèves ne quantifient pas leurs expressions, ce qui peut être pleinement justifié par le fait qu'il n'y a qu'une seule quantification universelle à utiliser et que l'oublier n'est pas critique. Dans Vandebrouck (2011), des élèves de terminale S doivent justifier qu'une fonction définie par une intégrale est croissante mais l'utilisation de la dérivabilité n'est pas immédiate. Certains élèves montrent que la fonction est croissante car « f(x) < f(x+1) », au mieux avec la quantification.

Le premier chapitre de cette brochure, proposé par Sylvie Alory et Renaud Cholay, vise à introduire la tangente en un point auprès des élèves à partir du phénomène de rectitude locale apparente de la courbe représentative de la fonction au voisinage de ce point. Le caractère local et la perspective qui lui est associé sont respectivement mis en évidence et favorisés par un jeu de zoom sur la courbe à l'aide du logiciel *GeoGebra*. Le caractère de la définition – locale – de tangente dégagée par cette introduction permet de motiver la nécessité d'une définition mathématique. Le nombre dérivé est alors introduit en appui sur la fenêtre de calcul formel de *GeoGebra*, permettant de repousser en fin de séquence la définition à enseigner du nombre dérivée comme limite des taux d'accroissement tout en permettant que s'installent des savoirs et des savoir-faire liés à son calcul.

Le deuxième chapitre rend compte de deux expérimentations de la situation d'introduction proposée au chapitre 1. La première expérimentation est dans la classe de Clément Legris (Première ES) et est décrite par Ratha Loeng et Laurent Vivier, dont Ratha fût une étudiante de master didactique durant l'année 2013-2014. La deuxième expérimentation se passe dans la classe de Vincent Josse (Première S) et est retranscrite par Sylvie Alory.

Le troisième chapitre rassemble des compléments sur la tangente, la fonction dérivée et sur des thèmes de travail intégrant une dimension historique. Les premiers compléments sont proposés par Renaud Chorlay. Les tâches qu'il propose portent sur des fonctions décrites dans le registre formel. Elles sont certes pour beaucoup inhabituelles mais nécessitent de l'élève qu'il dépasse ses conceptions algébriques des fonctions et mette en fonctionnement les différentes perspectives sur les fonctions : par exemple « si f admet en maximum en 1, alors

$f'(1) = 0$ », perspective locale sur f et perspective ponctuelle sur f'. Charlotte Derouet propose ensuite une situation de construction de la courbe de la fonction dérivée, à partir du nombre dérivé, à l'aide du logiciel *GeoGebra*. Les thèmes de travail s'appuyant sur des documents historiques – proposés par Renaud Chorlay – portent sur le lien entre tangente au cercle et tangente à une courbe, sur l'approximation Babylonienne des racines carrées et sur une méthode d'approximation des racines d'un polynôme (la méthode des tangentes). Monica Panero rend compte enfin du travail spécifique d'un professeur italien pour introduire la définition locale de la tangente en a auprès de ses élèves par élimination successives des différentes propositions qu'ils formulent : la tangente passe progressivement du statut de droite qui intercepte la courbe en un seul point $(a,f(a))$ au statut de droite qui approche le mieux la courbe au voisinage du point. Les élèves ayant déjà rencontré auparavant la notion d'équivalence locale de deux fonctions, ils peuvent déduire de sa caractérisation en termes de limite la définition du nombre dérivé m

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(a)+m(x-a)}=1 \iff m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Le dernier chapitre est celui de Marc Rogalski et propose des compléments théoriques, épistémologiques et didactiques ; ce chapitre fournit aussi des pistes précieuses pour découvrir la très dense littérature de recherche sur la question. Marc Rogalski propose notamment de profiter de la situation d'introduction du nombre dérivé comme pente de la droite indiscernable de la courbe par zooms successifs au voisinage du point considéré pour susciter chez les élèves le besoin d'une définition mathématique claire. Il rappelle plusieurs scénarios basés sur cette idée : celui d'Aline Robert (1982) où la question « Si $(U_n)_n$ tend vers un nombre strictement positif alors peut-on affirmer que $(U_n)_n$ est elle-même strictement positive pour n assez grand ? », celui d'Isabelle Bloch (2000) sur le périmètre et l'aire de la figure limite obtenue par la construction du flocon de Von Koch et le scénario plus récent de Thomas Lecorre (2013) fondé sur le même type de question que celle posée par Aline Robert mais dans le cas de fonctions : « Si deux fonctions f et g ont des limites à l'infini qui vérifient que la limite de f est strictement inférieure à la limite de g , que peut-on dire de f et g ? ». Il en propose lui-même une nouvelle qui motive spécifiquement l'utilisation de la définition de nombre dérivé dans le contexte cinématique « Si à l'instant t, la voiture A double la voiture B, que peut-on dire des deux véhicules dans les instants d'après ? ». Que ce soit pour motiver l'utilisation de la définition de limite ou du cas particulier de nombre dérivé, on comprend bien aussi comment la compréhension de ces définitions est indissociable de la compréhension de la structure de $\mathbb{R}$: si deux nombres réels a et b sont distincts ($a < b$ par exemple) alors l'intervalle ouvert $]a,b[$ qu'ils délimitent est non vide (même infini), ce qui permet de choisir un troisième nombre c qui « sépare » a et b. Il n'en reste pas moins que, même motivée au mieux par un besoin provoqué chez les élèves, la définition rigoureuse (pas nécessairement en terme de epsilon !) n'en reste pas moins, dans la plupart des scénarios, à parachuter par le professeur à un moment donné de la séquence. Un levier pour faire accéder les élèves à cette définition (notamment le nombre dérivé comme celui duquel les taux d'accroissements considérés peuvent être aussi proches que l'on veut - conception statique de la limite, propice à l'installation de la définition formelle) est selon Marc Rogalski d'entrainer les élèves à approcher la valeur limite à un ordre arbitrairement donné. C'est d'autant mieux possible dans le cas du scénario proposé dans le chapitre 1 que la valeur potentielle limite nous est accessible via le logiciel *GeoGebra*. Les techniques de raisonnement par conditions suffisantes successives pour montrer que cette valeur potentielle peut être approchée d'aussi près que l'on veut par le taux d'accroissement semble toutefois très vite hors de portée des élèves dans cette phase initiale de l'enseignement de l'analyse.

Table des matières

I. Une séquence d'introduction de la dérivation en classe de première

Sylvie Alory – Renaud Chorlay

Description générale

Dans de nombreuses classes de première S, l'enseignement de la dérivation est découpé en deux temps clairement distincts dans l'année : un premier temps de découverte des notions de tangente et de nombre dérivé ; un second temps consacré à la maîtrise de formules de dérivations usuelles et à l'usage de la fonction dérivée pour étudier les variations d'une fonction primitive. Nous n'apportons aucune proposition quant au second moment. Nous proposons ici un plan détaillé de séquence pour le premier moment.

Les contextes pour introduire la dérivation sont nombreux, certains bien connus, d'autres moins : notion de tangente (cadre initial géométrique), notion de vitesse instantanée de variation (cadre initial cinématique), meilleure approximation affine locale (cadre numérique), intersection multiple entre une droite et une courbe algébrique (cadre algébrique). On trouvera des références bibliographiques ainsi qu'un développement sur l'approche cinématique dans le chapitre 4 (Marc Rogalski). D'autres situations fournissent des points d'entrée : étude de l'horizon visuel d'un observateur situé sur une courbe ou regardant une courbe ; introduction de la normale à une courbe vue comme un miroir sur lequel est réfléchi un rayon lumineux (point de départ choisi par Vincent Josse, chapitre 2.2 de cette brochure), etc. Aucune de ces six situations n'étant familière des élèves, toutes demandent un travail de mise en place.

Nous partons du cadre géométrique, dans lequel il est d'abord nécessaire d'introduire un objet peu familier des élèves : celui de la droite tangente en un point d'une courbe lisse. Nous introduisons cet objet à partir du *phénomène problématique* de rectitude locale apparente (*local straightness* en anglais) d'une courbe observée après zoom, phénomène rencontré puis retravaillé sur TICE (géométrie dynamique, tableur, calcul formel). Cette situation d'introduction nous semble présenter plusieurs qualités : elle fournit un critère visuel de reconnaissance de la situation de tangence, critère visuel permettant de guider des tâches de lecture graphique et de tracé ; ce critère visuel est aussi utilisé comme critère d'invalidation de démarches erronées, composante nécessaire d'une situation d'interrogation active de la matière mathématique ; ce critère visuel ancre aussi d'emblée le caractère local de la situation de tangence. Enfin, quelque utile que soit l'ancrage visuel dans la rectitude locale apparente, il peut être rendu clair pour tous au niveau Première que cette rectitude apparente après zoom est un phénomène empirique (éventuellement lié à l'outil TICE) et non un fait mathématique établi au-delà de tout doute. L'incertitude sur la nature épistémologique de ce fait d'observation est une autre composante fondamentale de la séquence.

Soulignons que cette proposition de séquence n'a rien de bien révolutionnaire. En particulier :
(1) les objectifs sont ceux du chapitre classique : formuler la définition en termes de limite du nombre dérivé ; se familiariser avec des exercices dans le cadre graphique (lire des nombres dérivés, tracer des tangentes, etc.) et dans le cadre algébrique (dériver des fonctions simples en utilisant la définition) ;
(2) l'ensemble du travail prend un peu plus de deux semaines, soit le temps généralement consacré en classe de première à la première rencontre avec la dérivation.
C'est d'ailleurs parce que nous nous insérons dans un cadre classique que, pour plusieurs moments dans la séquence, nous n'entrons pas dans les détails : nous renvoyons aux pratiques

usuelles et aux exercices des manuels. Dans ce cadre bien classique, nous avons fait une série de choix épistémologiques et pédagogiques, au-delà du choix de la rectitude locale apparente comme situation d'introduction et d'ancrage. Voici quelques-uns de ces choix :

- Nous proposons de repousser l'énoncé d'une définition du nombre dérivée en fin de séquence, tout en cherchant à stabiliser et valoriser les savoir-faire au fur et à mesure qu'ils peuvent émerger des situations.
- Dans cette séquence, l'enseignant et la classe assument explicitement une posture réflexive, une posture de recherche. Il s'agit d'une recherche de deux types d'objets mathématiques : (1) une définition, (2) une méthode de calcul ; les deux pouvant donner lieu à des phases intermédiaires (définition provisoire, méthode de portée limitée).
- Nous avons choisi de mener un travail très progressif sur l'usage des lettres. Il nous semble qu'une introduction précoce de la définition sous la forme
$$f'(a) = \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
confronte inutilement l'élève à une avalanche de lettre aux statuts divers et fluctuants (fonction f, paramètre fixe a, paramètre variable h), ainsi qu'à une fonction composée $f(a+h)$.
- Enfin, se pose la question de la limite. La théorie mathématique à enseigner repose – pour l'enseignant – sur la notion formalisable de limite ; notion qui n'est connue ni formellement ni (en général) informellement des élèves au moment de la première rencontre avec la dérivation. Nous ne proposons rien pour modifier cet état de fait, et avons recours aux procédés classiques pour introduire la notion intuitive de limite dans le cadre de la recherche de nombre dérivé : plus le h est « petit » ou « proche de zéro », meilleure est la valeur approchée du nombre $f'(a)$ fournie par le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$; les outils TICE (calcul numérique sous *GeoGebra*, calculatrice, tableur) permettent d'installer une vision dynamique du travail d'approximation, que l'enseignant résume en introduisant le terme « limite » et le symbole associé. Nous avons par contre fait le choix d'une définition provisoire n'utilisant pas la notion de limite : en effet, pour les fonctions rationnelles, on peut définir le nombre dérivé sans passer par la limite. On dispose donc de deux définitions, aucune des deux n'étant pleinement satisfaisante : la première consiste à simplifier l'expression $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ puis à remplacer h par 0 ; cette technique est assez simple à mettre en œuvre (surtout si l'on dispose du calcul formel) et s'avère souvent efficace ; cependant, elle choque à cause de la division par zéro, et n'est peut-être pas totalement générale (rien ne garantit qu'on arrivera toujours à réécrire le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ sous une forme dans laquelle le remplacement de h par 0 est une simple évaluation par calcul). La seconde s'appuie sur une idée non définie et pour tout dire assez vague de « passage à la limite ». Le fait que c'est la seconde définition qui est l'objet d'enseignement institutionnellement légitime en classe de Première ne nous semble pas pouvoir être totalement justifié auprès des élèves.

Ces choix ne sont pas totalement dépendants les uns des autres. En les explicitant, nous soulignons donc des points sur lesquels l'enseignant peut agir pour s'approprier la proposition de séquence.

Pour les élèves, les pré-requis sont :

- être à l'aise avec les équations de droites, y compris sous la forme
$$y = m(x - x_{\mathrm{A}}) + y_{\mathrm{A}}$$
lorsque l'on connaît le coefficient directeur *m* et un point A.
- avoir déjà rencontré la fenêtre de calcul formel de *GeoGebra* ; avoir constaté que c'est bien pratique de lui faire faire les calculs numériques (exacts) et algébriques.

Temps n°1 : rencontre avec la tangente

Modalité : classe entière, collectif, travail dialogué avec logiciels projetés utilisé par l'enseignant. Séance de 2h.

Objectifs :

- rencontrer expérimentalement des tangentes à des courbes fonctionnelles sous l'aspect « rectitude locale » (*local straightness*), ancrer une image mentale permettant plus tard des *feedbacks* de contrôle dans des situations d'exécution ou de recherche.
- utiliser la tournure complexe « la droite … semble tangente à la courbe … au point … »
- dégager un critère informel d'identification des tangentes, en rencontrant des contre-exemples classiques.
- Expliciter le fait qu'on va, pendant plusieurs séances, travailler sur la recherche (1) d'une définition, (2) d'une méthode de détermination, pour un objet nouveau.

Phase d'observation :

Après un certain nombre de zooms vers un point d'une courbe ($y = x^2$ en x = 1 ; ou $y = \frac{1}{1+2x}$ en x = 1), on ne distingue plus la courbe d'une droite. Si on place un deuxième point pour tracer cette droite (d'une autre couleur), et qu'on dézoome, on observe la position remarquable de la courbe et de la droite. On dit que « la droite D semble tangente à la courbe C au point A » ou « la droite d'équation … (mettre ici votre équation de droite, d'après *GeoGebra*) semble tangente à la courbe d'équation $y = x^2$ (ou …) en son point d'abscisse 1 »
Même question sur la même courbe, avec d'autres points ; faire anticiper la position (on envoie un élève au tableau, il indique la position de la tangente avec le doigt ou la grande règle) de la tangente en un point donné, puis la placer sous le logiciel en utilisant un deuxième point libre ; contrôler par zoom avant puis arrière.
Faire remarquer qu'il y a un point de la parabole où la tangente est déjà tracée (l'axe des abscisses, si on n'a pas caché les axes).
Sur la même courbe, en fixant un nouveau point, on demande à un élève de faire apparaître avec le logiciel une droite qui semble tangente à la courbe en ce point, mais sans utiliser le zoom. Par exemple en plaçant un second point libre, en traçant la droite le reliant au point sur la courbe, et en déplaçant le point libre pour faire « apparaître » la tangente. Contrôle avec zoom : on se rend compte du caractère très approximatif de la procédure.

Phase de recherche de définition, avec traces écrites :

On explicite le fait qu'on doit chercher (1) une définition, (2) un procédé plus précis, voire exact.
Demande « Que demander à une droite pour être sûr qu'elle est tangente à une courbe donnée (d'équation $y = f(x)$) au point A$(a, f(a))$? »
Par expérience, les propositions suivantes sont faites[1] :

- « la droite doit passer par le point ». OK
- « c'est la droite qui ne coupe la courbe qu'au point A ».

  → si aucun élève ne propose de contre-exemple, travail sur : $y = 0{,}1 \times x^3 - 2x + 3$ (ajouter un terme de degré 2 si l'on souhaite éviter les symétries évidentes) au point de coordonnées $(4,f(4))$ faire apparaître la tangente. Faire remarquer qu'elle a un autre point d'intersection avec la courbe, point où elle n'est pas tangente à la courbe. Distribuer la courbe sur papier, pour aider les élèves à avoir une trace écrite de bonne qualité.

  → le professeur peut exhiber le contre-exemple : recherche des tangentes à la courbe d'équation $y = 7x - 2$
- « c'est la droite passant par A et restant du même côté de la courbe d'équation $y = 0{,}1 \times x^3 - 2x + 3$; elle ne traverse pas la courbe ». Reprendre la même courbe au point d'abscisse 0, pour invalider les propositions liées à la locale convexité ou concavité.
- « c'est la droite indiscernable (visuellement) de la courbe au voisinage de A ».

On s'accorde le fait qu'on est d'accord sur l'idée, mais que ce qu'on a formulé ne peut pas être considéré comme une définition, et ne fournit pas vraiment de procédé précis. Par contre, on conserve les traces écrites montrant des tangentes recoupant la courbe ailleurs, ou traversant la courbe.

Temps n°2 : Exercices graphiques.
Introduction du terme « nombre dérivé » et de la notation f'.

Sur plusieurs séances, fréquenter les exercices du type :

- Une courbe et des droites étant tracées, dire qui semble tangent à qui, et où.
- On donne une ou deux droites, avec un point marqué sur chacune. Tracer une courbe passant par les points donnés et y semblant tangente aux droites données. *On remarquera bien que tout le monde n'aura pas la même courbe ; passer dans les rangs pour vérifier que visuellement, le critère de locale indiscernabilité semble satisfait.*
- Même exercice, mais avec des segments double-fléchés ⟷ au lieu des droites … introduction de la convention, qui permet aussi de revenir sur le caractère local de la propriété de tangence : finalement, les relations éventuelles entre la courbe et la droite en dehors d'un voisinage du point de tangence n'affectent pas la relation de tangence.

[1] Cet aspect est détaillé dans la contribution de Monica Panero (chapitre 3.3 de cette brochure).

- Même chose, les droites n'étant pas tracées, mais données par les coordonnées d'un point et le coefficient directeur.
- Une courbe étant donnée, tracer à la règle une droite qui semble tangente à la courbe au point … . *On s'accorde sur le fait que la méthode n'est pas exacte.*
- Si on peut faire une séance en salle TICE, exercice du type : une courbe étant donnée, ainsi qu'un point A de cette courbe (d'abscisse *a*), créer un curseur *m* et tracer la droite passant par A et de coefficient directeur *m*. Ajuster pour obtenir une droite qui semble tangente, noter la valeur de *m*.

Dans toute la série d'exercices, on fera rencontrer des points d'inflexion, ainsi que des tangentes horizontales et verticales. Dans le cas de la tangente verticale, on fera remarquer que la tangente n'a pas de coefficient directeur. Rappelons que nous n'avons pas encore introduit la notation *f'*, ni le terme « nombre dérivé ». Ce dernier terme peut s'avérer ici utile, pour éviter les périphrases « le coefficient directeur de la droite qui semble … ». Une fois la notation introduite, elle peut être utilisée systématiquement dès la série d'exercices graphiques.

Temps n°3 : à la recherche du coefficient directeur ;
calculs de quotients de type $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

Modalité : séance collective, figure vidéoprojetée.

Sous *GeoGebra*, on cache la partie « algèbre », pour que les équations de droites (en particulier les coefficients directeurs) n'apparaissent pas.

Bilan de la séance précédente : rappel de l'embryon de définition (points d'accord), absence de vraie définition et d'une réelle méthode de détermination ; ceci étant, pour trouver la tangente, il suffit de trouver son coefficient directeur ; pour le point d'abscisse 1, on le note *f'*(1).
Pré-requis : rappeler la formule $y = m(x - x_A) + y_A$. Si le point connu appartient à la courbe représentative de *f*, on peut – si on le souhaite – la reformuler en

$$y = m(x - a) + f(a)$$

Courbe d'équation $y = \frac{1}{1+2x}$, point A(1, *f*(1)) : on cherche à faire apparaître la tangente parmi les droites passant par A. On impose à la droite de passer par un second point de la courbe, B.
On se met d'accord sur le fait que la bonne idée est de placer B le plus près possible de A (on s'en assure en alternant *zoom* avant et arrière) ; une solution en un sens « parfaite » mais en un sens absurde serait de placer B en A.
On se rappelle qu'on cherche la valeur du coefficient directeur *m*.
Les élèves proposent de placer B en 1,1 d'abscisse ; demande d'autres possibilités (éventuellement déplacer le point sur la courbe): 1,01, 0,9, 0,99. En faire une à la main.
Si on posait et effectuait les calculs (éventuellement à la calculatrice), rien ne permettrait de faire sortir la formule sur laquelle on veut travailler. Nous choisissons donc de travailler avec la fonction « calcul formel » de *GeoGebra*, qui permet d'introduire les notations *f*(1,1), puis (*f*(1,1)-*f*(1))/0,1 … d'où l'intérêt d'avoir pris une fonction pour laquelle il est plus économique de taper *f*(…) que la formule explicite.

Exemple détaillé : l'enseignant aura déclaré la fonction et le point A.
« Essayons le point B d'abscisse 1,1.
Sachant qu'il est sur la courbe, quel calcul faire pour trouver son ordonnée ? »
Après que les élèves ont suggéré le bon calcul, c'est l'enseignant qui le pose dans la fenêtre « calcul formel » de *GeoGebra*. Il vient $f(1.1) = 5/16$
Dans la barre de saisie l'enseignant entre B = (1.1,5/16) (ou B = (1,f(1.1))
« Je voudrais tracer la droite en donnant son équation, que me manque-t-il ?
Comment calculer ce coefficient directeur m ? »
Après que les élèves ont récité la formule $(y_B\text{-}y_A) / (x_B\text{-}x_A)$, l'enseignant pose dans la fenêtre de calcul formel $\frac{f(1{,}1)-f(1)}{0{,}1}$. Il vient -5/24.
Dans la barre de saisie, l'enseignant entre l'équation de droite $y = (-5/24)\,(x-1) + 1/3$.

La vérification visuelle, avant puis après zoom, montre que c'est pas mal, mais on peut sans doute faire mieux. On demande aux élèves de proposer une autre position du point B pour obtenir mieux. L'enseignant se fait guider pour reproduire avec de nouvelles valeurs les étapes précédentes : calcul d'image, de coefficient directeur, équation de droite.
Après plusieurs exemples, on fait remarquer que la forme générale des calculs du type $\frac{f(1{,}1)-f(1)}{0{,}1}$, $\frac{f(1{,}01)-f(1)}{0{,}01}$ est $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, et qu'on aura une bonne approximation du coefficient directeur cherché en prenant des valeurs de h très « petite », c'est-à-dire proche de zéro.
Si un élève fait remarquer qu'en $h = 0$ le dénominateur ET le numérateur s'annulent, on peut souligner l'intérêt de la remarque.

Sous *GeoGebra*, le calcul formel montre :

(f(1+h)-f(1))/h

$$\rightarrow \; -\frac{2}{6\,h+9}$$

Il est vraisemblable que face à $\frac{-2}{6h+9}$, des élèves proposent de prendre $h = 0$. Regardons ce que cela donne :

- 1ère réponse : essayons, cela donne -2/9. Traçons la droite passant par A, et de coefficient directeur -2/9, le critère visuel est-il vérifié : oui, il semble bien que $f'(1) = -2/9$. Peut-on interpréter géométriquement le cas $h = 0$? Non, deux points confondus ne déterminent pas une droite.
- 2ème réponse : si $h = 0$ les points A et B sont confondus. De plus, le calcul posé sous la forme $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ contiendrait une division par 0.

Bilan : il semble que l'on ait trouvé une méthode de calcul efficace des coefficients directeurs, peut-être valable pour toute fonction f, à savoir, remplacer h par 0 dans l'expression simplifiée de $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$. Mais cette méthode semble reposer sur une impossibilité, tant dans le cadre géométrique que dans le cadre du calcul.

Appliquer la méthode qui semble marcher en un autre point (abscisse 2).

Temps n°4 : utilité et limites de la méthode de calcul $f'(a) = \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]_{h=0}$

Modalité : Deux séances d'exercices avec la fonction calcul formel de *GeoGebra*, en salle TICE.

Objectifs :

- Se familiariser avec une méthode de calcul de *f'*(*a*)
- Faire apparaître le paramètre *a*
- Observer les limites de la méthode (2$^{\text{ème}}$ séance)

<u>1$^{\text{ère}}$ séance</u> : avec des fonctions polynômes ou rationnelles.

On fait remplir des tableaux de la forme

a	1	2	-1	0			*a*
f(*a*)							
Coefficient directeur *f'*(*a*)							

Après la première série, on fait le bilan des procédures :

- Si l'on veut gagner du temps en demandant le calcul de $\frac{f(1+0)-f(1)}{0}$, on retombe sur l'impossibilité (le logiciel affiche « ? »)
- Certains élèves auront refait la procédure de calcul pour chaque valeur de *a*, et remplacé de tête ou avec le logiciel *h* par 0.
- Certains auront fait calculer directement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, puis posé *h* = 0 puis *a* = telle ou telle valeur.

On gardera la dernière méthode comme trace écrite ; on illustre son efficacité en faisant des allers-retours entre la fenêtre de calcul formel et la fenêtre graphique.

<u>2$^{\text{ème}}$ séance</u> : après une ou deux autres fonctions rationnelles, on reprend le travail sur une fonction du type $f(x) = \sqrt{2+x}$; dans ce cas, on ne peut pas poser *h* = 0 dans le calcul de *f'*(a). En effet, le calcul formel répond

(f(a+h)-f(a))/h

$$\rightarrow \frac{\sqrt{h+3}-\sqrt{3}}{h}$$

On peut alors passer sous tableur pour faire tendre *h* vers 0 dans cette expression.
Si des élèves pensent à la réécriture de $\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$ par $\frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}$, on peut proposer une autre fonction pour laquelle la réécriture est plus difficile à trouver, par exemple une fonction utilisant la formule $\frac{\sqrt{x+2}}{x}$.

Bilan de la séance et trace écrite de cours : on a bien $f'(a) \approx \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]_{h\approx 0}$, mais aller jusqu'à $h = 0$ présente deux inconvénients :

- Ça ne peut pas être une définition, car elle contient des impossibilités
- Comme méthode, c'est efficace pour certaines fonctions, mais en échec pour d'autres.

La version $f'(a) \approx \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]_{h\approx 0}$ est plus générale, mais n'exprime pas tout ce qu'on veut dire : on sait que l'approximation de $f'(a)$ sera d'autant meilleur que h s'approchera de zéro. Pour exprimer cela, on introduit une nouvelle notation

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ ou } f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Deux remarques importantes :

- Ici le « bilan » n'est que le bilan de la séance. Il y a ensuite une trace plus rigoureuse dans le cahier de cours. En particulier on y rappelle que la fonction f est dérivable en a si cette limite existe et est finie ; dans ce cas, on définit la tangente à la courbe au moyen du nombre dérivé. On rappelle par des exemples graphiques, que (1) toute fonction n'est pas dérivable en tout point, (2) cela peut même se produire lorsque la courbe semble admettre une tangente (par exemple verticale) ; la notion de « tangente » dans ce dernier cas demeure donc indéfinie à l'heure actuelle.
- On a cherché à rendre intuitive la notion de droite tangente à la courbe représentative d'une fonction, et à s'appuyer sur cette intuition et les possibilités offertes par la combinaison « géométrie dynamique + calcul formel » pour faire émerger une définition et un (ou deux) procédé(s) de détermination. Comme tout cheminement il présente des risques, à combattre comme suit :
    - Compléter les séances de calcul formel par des séances « papier-crayon », pour le calcul de $\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]_{h=0}$ ou la détermination de $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
    - Les élèves ne doivent pas ressortir avec l'idée que les courbes des fonctions dérivables contiennent réellement des petits segments. Un exercice peut être consacré à l'étude algébrique de la fonction carrée :
      Si a et b sont deux nombres réels distincts quelconques, on montre que le milieu du segment reliant A(a,$f(a)$) à B(b,$f(b)$) est strictement au-dessus de la courbe. En effet, son abscisse est $\frac{a+b}{2}$, et son ordonnée $\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}$, alors que le point de la courbe d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ a pour ordonnée $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$. La différence est $\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4} = \frac{a^2+b^2-2ab}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, strictement positive.

On peut bien sûr inclure dans ce chapitre les formules de dérivation de quelques fonctions usuelles. Le passage du « nombre dérivé » à la « fonction dérivée » nous semble suffisamment préparé par l'usage de la lettre a dans l'expression $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et la pratique des tableaux de valeurs à trois lignes : une pour a, une pour $f(a)$, une pour $f'(a)$.

Enfin, nous proposons dans le chapitre 3 de cette brochure deux documents pouvant être utilisés en parallèle à cette séquence :

- Le « vrai-faux ? Justifiez » (du moins pour les premiers items).
- Le travail sur « tangente au cercle – tangente à la courbe de f : quels liens ? »

II. Compte rendus d'expérience

1. Le cas de Clément

Clément Legris, Ratha Loeng & Laurent Vivier

Description du déroulement des séances en classe

Présentation de la classe et des cinq séances

L'enseignant est en poste au lycée Marie Curie de Sceaux (92). Il décrit sa classe de 1re ES, composée de 35 élèves, comme étant une classe ordinaire où les élèves ne sont pas « matheux » mais motivés. La salle est équipée de 24 ordinateurs. L'enseignant utilise le manuel de 1re ES de la collection Déclic chez Hachette, programme 2011.
C'est la deuxième année d'enseignement en 1re ES de l'enseignant. Comme l'année scolaire précédente, à ce niveau, il a trouvé que les élèves ont été confrontés à des difficultés de calcul algébrique. Cela l'a amené à proposer un travail préparatoire à l'introduction de la dérivation pour lequel 3 séances ont été nécessaires.
L'introduction proprement dite se déroule en 5 séances, au début du mois de février 2014. L'enseignant introduit la notion de tangente et de nombre dérivé en adaptant librement le scénario exposé au chapitre 1.

a) Analyse de l'organisation didactique

Les deux premières séances sont consécutives :

- **Séance 1** : première rencontre avec la tangente
- **Séance 2** : recherche d'une définition de la tangente, et exercices graphiques.

Dans les deux premières séances seront étudiées l'approche et la recherche d'une définition de la tangente à une courbe en un point – en liaison avec des activités graphiques.

Phase 1 (23 min) : *être à l'aise avec les équations de droite, sous la forme* $y = mx + p$ *et sous forme* $y = m(x - x_A) + y_A$; le travail préparatoire.

L'enseignant commence par la correction de quelques exercices effectués à la maison, à la suite de la séance de travail en groupe du vendredi précédent. Il s'agit d'une correction de travail dialoguée et collective avec les logiciels projetés. L'objectif de ces exercices est de déterminer :

- le coefficient directeur de la droite passant par deux points (si possible),
- l'ordonnée à l'origine (si possible) et
- une équation de cette droite

par deux techniques :

- la lecture graphique avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra,
- le calcul.

En particulier, pour déterminer par calcul l'équation d'une droite passant par un point A de coordonnées $(x_A; y_A)$ et ayant pour coefficient directeur m, l'enseignant a orienté avec des questions successives, cette détermination par deux méthodes :

- méthode 1 : remplacer d'abord le coefficient directeur par m dans l'équation réduite puis trouver l'ordonnée à l'origine p à l'aide d'un point situé sur la droite.
- méthode 2 : sachant que la droite d passe par le point $A(x_A; y_A)$ et a pour coefficient directeur m , appliquer la formule : $d : y = m(x - x_A) + y_A$, puis la réduire sous forme $y = mx + p$.

L'enseignant a précisé que la méthode 2 est une synthèse de la méthode 1. Il a noté que la formule $d : y = m(x - x_A) + y_A$, vue dans la méthode 2, et démontrée pendant la séance du vendredi précédent, n'était connue que par un seul élève.
Pendant cette visite, nous avons remarqué que l'enseignant a utilisé une seule fois la méthode 1 pour déterminer une équation de droite au début de la première séance et qu'il a suggéré d'utiliser la méthode 2 pendant le déroulement des cours.

Phase 2 (14 min) : *phase d'observation*

Consigne de l'observation : « avec *GeoGebra*, que se passe-t-il quand on zoome successivement sur un point d'une courbe ? »

Il s'agit d'un travail dialogué et collectif, avec des questions guidées par l'enseignant.
L'enseignant distribue les fiches de l'*activité 1* (courbe en figure *a*) aux élèves avant de commencer la phase d'observation avec la figure vidéo-projetée : il s'agit de l'introduction d'un nouveau chapitre.

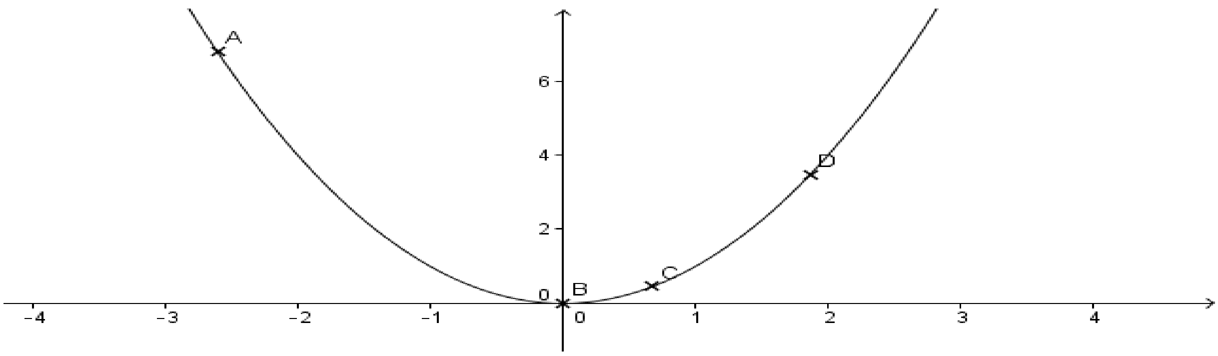
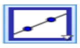


Figure *a*

L'enseignant précise que c'est « un moment d'observation ». Le déroulement de cette phase d'observation *des zooms autour d'un point d'une courbe à l'aide de GeoGebra* se passe remarquablement bien. Les élèves observent qu'avec des zooms, la courbe finit par ressembler à une droite.
C'est un travail dialogué. Nous remarquons que l'enseignant utilise la méthode de « la maïeutique socratique », méthode d'enseignement qui permet à l'enseignant, par un jeu de bonnes questions, de faire produire à l'apprenant le savoir visé. Alors, apparaît le moment de faire émerger un échange d'idées afin de réaliser ce que l'enseignant attend pendant cette observation.

En résumé pour la démarche pendant cette phase d'observation :

- L'enseignant zoome successivement vers le point C de la courbe (ici, c'est la parabole représentative de la fonction carré), à partir d'un moment, on ne voit plus qu'une droite à l'écran.
- Il dézoome et fait chercher le tracé de la droite apparue en envoyant au tableau une élève.
- Cette élève pose sur l'écran la grande règle passant par le point C, et la règle est en position presque parfaite (de façon qu'elle semble être la tangente à la courbe en C).
- L'enseignant trace avec *GeoGebra* la droite au-dessus de la règle posée par l'élève. (Noter qu'il faut deux points pour tracer une droite avec *GeoGebra* ; ici un deuxième point de la droite est le point E proposé par le logiciel.)
- Il zoome, et à un moment, il pose des questions, il attend des propositions des élèves, il relance des questions ... Voici les propositions dans l'ordre des élèves :
  - rapprocher le point E du point C (en fait, ici c'est la réponse des élèves quand l'enseignant pose la question « qu'est-ce que je fais ? ») ;
  - mettre le point E au-dessus, …, mettre le point E sur C ;
  - mettre le point E sur la parabole.
- L'enseignant place le point E sur la parabole en saisissant $E=(x(E),x(E)\wedge 2)$. (Noter qu'il n'y a aucune bonne réponse de la part des élèves quand l'enseignant leur demande de donner l'ordonnée du point E sur la parabole relative à son abscisse $x(E)$.)

  Avec cette manière, le point E est fixé. Il efface la droite (CE) et ce point E.
- Il trace à nouveau la droite (CE) en utilisant l'outil  .
- Il zoome successivement vers le point C en déplaçant simultanément le point E sur la parabole vers le point C.

  A un moment donné, toute la classe se met d'accord que la droite (CE) et la courbe semblent être confondues.
- L'enseignant dézoome, la droite (CE) est en position particulière par rapport à la courbe en ce point C. Il demande : « est-ce que cette droite-là est plus précise que celle [*de l'élève au tableau*]? », oui, répondent des élèves.

Phase 3 (39 min) : *recherche d'une définition géométrique de la tangente à une courbe en un point, par un procédé plus précis*.
L'enseignant lance l'enjeu d'étude : « L'objectif du jeu, c'est que l'on va chercher *la définition géométrique de la tangente* en un point de la courbe. »

Sous-phase 3.1 (4 min) : *liaison avec la tangente à un cercle en un point (connaissance antérieure)*

L'enseignant continue la phase d'observation en commençant par la question : « cette droite-là, à votre avis, en mathématiques, quel nom particulier pourrait-on lui donner ?, en géométrie, vous connaissez déjà ». Il précise : « *on essaie de définir. Le but du jeu, c'est de définir cette droite particulière, trouver des mots pour la caractériser. Le processus des zooms, c'est pour la définir* ; cette droite est une droite particulière, on veut cette droite, on zoome, on zoome, … pour qu'elle soit la même chose ou presque… ? » … « la courbe » (la réponse de la part des élèves). Il propose : « j'aimerais bien construire autrement ou définir autrement ? Quelqu'un a une idée ? ».
Ici, l'enseignant relance par des questions pour qu'un lien soit fait avec la connaissance antérieure de la tangente à un cercle en un point (classe de $4^{ème}$) par ressemblance visuelle.
Une élève dit : « ce n'est pas une tangente ? » et l'enseignant réagit : « T'as pensé à quoi, une tangente ? »
Il apparaît alors une situation remarquable. En effet, l'enseignant, toujours à l'écoute des propositions des élèves, répond à chaque proposition afin de faire apparaître « la tangente à un cercle en un point » et de faire rappeler « sa définition ».
Ensuite, l'enseignant oriente les regards des élèves vers la figure vidéo-projetée : « Cette droite-là, graphiquement, au niveau du point E , est-ce que ça a l'air d'être la tangente à la courbe au point C ? » Les élèves semblent être d'accord. L'enseignant précise : « le but du jeu, c'est que l'on va chercher la définition géométrique ou mathématique, mais on s'intéresse d'abord à la définition géométrique de la tangente en un point de la courbe ».
L'enseignant finit la sous-phase 3.1 en reprenant une proposition d'un élève et en la précisant : « la tangente à une courbe en un point est la droite qui <u>*touche*</u> la courbe en ce point ».

Les conversations, intéressantes, avaient pour objectif de réussir à bien définir la tangente à une courbe en un point. Un premier bilan (bilan 1) sera précisé à la fin de la sous-phase 3.2.

Sous-phase 3.2 : *application à un graphique sur papier et première définition de la tangente*
****Tracé de la droite tangente*** : L'enseignant dit : « je vous laisse faire à la main – vous tracez « à l'œil » sur votre schéma, les tangentes à la courbe représentant la fonction carrée en quatre points A, B, C et D, et ensuite on va les tracer ensemble ».

L'enseignant demande aux élèves de tracer les quatre droites tangentes sur la fiche de l'activité 1 qu'il leur a distribuée avant de commencer la « phase d'observation » (figure *a*).
L'objectif est de rencontrer le cas où la tangente reste du même côté de la courbe.
En fait, avant de laisser tracer les quatre tangentes, l'enseignant demande à un élève de venir au tableau pour poser la règle à l'emplacement de la tangente à la courbe en A, et simultanément l'enseignant pose les questions « comment posez-vous la règle, et cette règle par quel point passe-t-elle ? ». Une fois la règle en position convenable avec accord de l'élève, l'enseignant trace la droite au-dessus avec *GeoGebra*. Ensuite, il dit : « quelqu'un d'autre peut-il venir au tableau, même chose avec le point B ? ça m'intéresse ».
Tout de suite, un élève propose depuis sa place: « cette tangente-là est déjà tracée ». L'enseignant réagit : « Ah oui, où ? ». L'élève précise : « l'axe des abscisses en B » (B est à l'origine du repère). L'enseignant zoome, zoome, … sur le point B pour que la classe se mette d'accord. L'enseignant précise : « apparemment, elle est parfaite ». Puis, il dit : « alors, vous faîtes les quatre tangentes sur votre schéma ; avec la règle et à « l'œil », ah… par contre, un seul « truc », vous avez plus précis à faire, c'est <u>passer par un point</u>, **au moins** !! »
Pendant que les élèves tracent les quatre tangentes sur le schéma, l'enseignant passe dans les rangs pour voir le travail de chaque élève, puis il écrit le bilan 1 au tableau en énonçant ce qu'il est en train d'écrire au tableau.

Bilan 1 : On a tracé « la droite tangente à la courbe au point A ». On a dit « c'est la droite qui coupe la courbe une seule fois en A » ?
Là, ça serait une définition pour l'instant, …, on est dans la conjecture, précise l'enseignant. [L*'enseignant ajoute le point d'interrogation*.]
L'enseignant valide les productions des élèves en passant dans les rangs et en s'appuyant sur le bilan 1 au tableau. Il n'a pas fait la correction avec toute la classe.
Les élèves s'approprient l'enjeu de l'apprentissage avec des questions guidées par l'enseignant qui est lui-même en attente des propositions et des questions des élèves. Entre le moment où l'enseignant veut faire tracer les quatre tangentes sur la fiche donnée et celui où il le fait faire, l'enseignant montre comment construire la droite tangente à la courbe en un point avec deux modèles : il demande d'abord à un élève de venir poser la règle au tableau au point A, puis il confirme que la tangente existe déjà à la courbe en B avec des zooms successifs sur le point B de la courbe. A notre avis, l'enseignant veut ancrer une image mentale permettant aux élèves de construire la tangente convenable à l'œil sur le schéma (il s'agit d'un changement de supports pour le même registre graphique : GeoGebra & papier-crayon); et il conseille deux fois de passer « **au moins** » par un point pour que les élèves fassent attention, et que les élèves posent bien la règle avant de tracer la tangente à la courbe en un point souhaité. Donc, l'enseignant souhaite aider les élèves à réussir la construction de ces tangentes. Nous observons que presque tous les élèves arrivent à tracer ces tangentes convenablement.

Sous-phase 3.3 (11 min) : *rechercher un contre-exemple pour invalider la définition de la tangente vue au bilan 1*

Consigne : « A l'aide de la deuxième courbe, est-ce que la définition, vue au bilan 1, est toujours valable ? Trouver une tangente en un point de la courbe pour que cette définition « ne marche pas ». L'objectif du jeu, c'est de définir la tangente à une courbe en un point. »
L'enseignant commence par distribuer les fiches de l'*activité 2* (figure *b*).

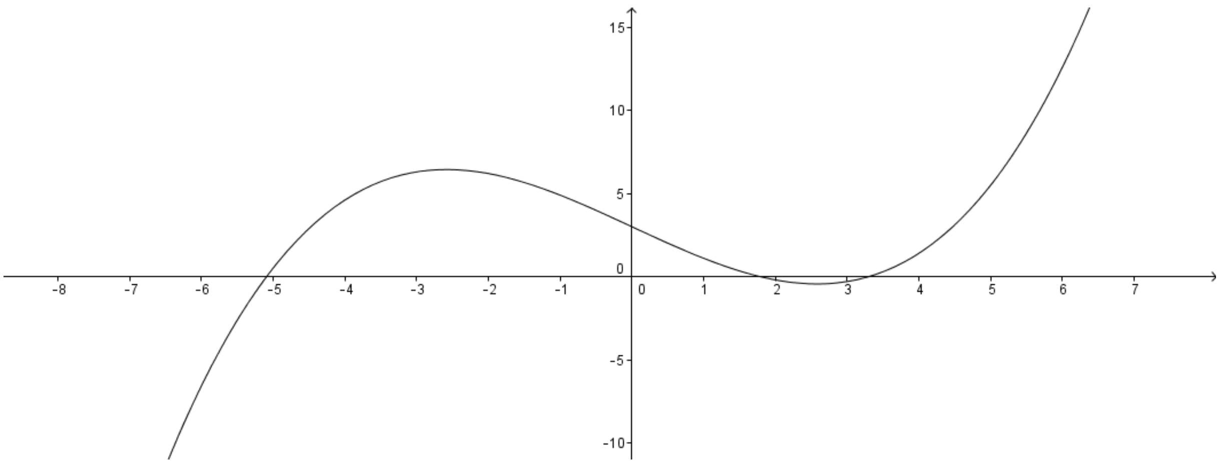


Figure *b*

L'enseignant rappelle la définition de la tangente, vue au bilan 1. Alors, il lance le travail en insistant à plusieurs reprises sur sa proposition : « vous cherchez et tracez « à l'œil », à main levée quoi !, à la règle, une tangente en un point de la courbe qui ne respecte pas la définition ; est-ce que vous trouvez « un truc » qui ne respecte pas cette définition ? Dessinez une droite en un point A , qui soit apparemment la tangente à la courbe qui ne respecte pas la définition. » Puis, il laisse une minute aux élèves pour chercher et tracer la tangente en un point de la courbe comme contre-exemple pour invalider la *définition*, vue au bilan 1.

L'objectif est de rencontrer une tangente qui invalide la définition du bilan 1 afin d'avancer sur la définition, à l'aide de la deuxième courbe.

Avant de demander à un élève de présenter au tableau une tangente, il insiste encore une fois sur l'objectif de la séance, et en plus : « trouvez un point, et tracez la tangente à la courbe en ce point qui ne respecte pas cette première définition, c'est-à-dire que cette droite ne coupe pas la courbe <u>une seule fois</u> ».
Un élève vient au tableau. L'enseignant demande à cet élève de choisir un point sur la courbe comme il veut, puis il trace avec *GeoGebra* la droite au-dessus de la règle posée par l'élève. Ensuite, il propose un débat pour enrichir la définition vue au bilan 1. Pour arriver à mettre en œuvre le bilan 2, l'enseignant montre à nouveau la figure vidéo-projetée de l'activité 1 ; ici la phrase ajoutée est : « la droite restant du <u>même côté</u> de la courbe ».
Le bilan 2 n'est pas encore terminé, un élève demande : « pourquoi pas le mot <u>au-dessus</u> au lieu de <u>du même côté</u> ? »
L'enseignant précise pourquoi le mot « du même côté » est mieux par rapport aux mots <u>au-dessus</u> ou <u>en-dessous</u> pour faire remarquer la position entre certaines tangentes et la deuxième courbe. Il ajoute : « *la phrase-là n'est pas suffisante* », avec *GeoGebra*, il montre une droite « traversant » la courbe en un point, « est-ce que cette droite est la tangente ? Et, est-ce qu'elle reste du même côté de la courbe ? » Toute la classe accepte que la tangente reste du même côté de la courbe, l'enseignant ajoute au bilan 2 : « elle ne traverse pas la courbe ».

Bilan 2 : « La tangente, c'est la droite qui coupe la courbe en A en restant du même « côté » de la courbe et qui ne « traverse » pas la courbe. » ?
L'enseignant précise : je mets le signe « ? », parce qu'on est en train de rechercher la définition.

Pendant la sous-phase 3.3, l'enseignant a laissé les élèves chercher et tracer sur la deuxième fiche de l'activité 2 donnée, une tangente qui ne respecte pas la première définition, vue au bilan 1, avec des échanges d'information entre les élèves et l'enseignant pendant le déroulement de cette sous-phase. L'enseignant a posé successivement des questions afin d'amener au bilan 2.
Nous avons remarqué que la moitié de la classe arrive à donner un contre-exemple pendant ce temps, alors que certains n'ont tracé aucune droite tangente sur leurs fiches. C'était peut-être à cause de la durée accordée, une minute de recherche.

Sous-phase 3.4 (12 min) : *rechercher un contre-exemple pour invalider la définition de la tangente vue au bilan 2*

****Consigne*** : « A l'aide de la deuxième courbe, trouver une tangente en un point à la courbe pour que la définition de la tangente, vue au bilan 2, « ne marche pas ». L'objectif du jeu, c'est définir la tangente à une courbe en un point. »

L'objectif est de rencontrer une tangente qui invalide la définition du bilan 2 à l'aide de la deuxième courbe.

Maintenant, l'enseignant propose aux élèves de chercher une *tangente traversant* la courbe au point de tangence. Ici, l'enseignant insiste sur le mot « traverser ». Cette fois-ci, il y a plusieurs essais proposés par trois élèves l'un après l'autre au tableau en posant la règle, mais c'est le troisième élève qui réussit à bien choisir un point de la courbe puis à bien poser la règle en ce point. Et, l'enseignant vérifie avec *GeoGebra* pour que toute la classe accepte que

cette droite-là soit la tangente parce qu'elle respecte ce qu'on a vu dans la phase d'observation : *« lorsque l'on zoome successivement sur le point, on ne distingue plus la courbe de la droite tangente au voisinage du point »* ; nous allons l'appeler dans la suite « l'observation d'une tangente avec des zooms ».
Puis, il montre la courbe d'une fonction de référence, ici la courbe représentant la fonction cubique : $x \mapsto x^3$; et il demande de chercher la '*tangente traversante*' en précisant le point où cette tangente traverse la courbe. La plupart des élèves reconnaissent facilement l'axe des abscisses qui est la tangente traversant la courbe à l'origine du repère ; l'enseignant vérifie de la même façon que précédemment à l'aide de « l'observation d'une tangente avec des zooms » afin que toute la classe se mette d'accord.
Immédiatement, un élève propose une définition de la tangente, et l'enseignant réagit, puis précise : « revenir au jeu de départ, que faut-il faire pour avoir la tangente ? » ; la réponse des élèves : « zoomer » ; l'enseignant continue à préciser : « ça veut dire que l'on se rapproche de A. Donc, une tangente,

- c'est une droite qui est tout simplement, presque identique à la courbe et puis … proche … du point ;
- c'est une droite qui passe par un point de la courbe, qui est proche … qui est … quasiment équivalente à la courbe quand on est près du point A, en mathématiques, on dit : *au voisinage* du point A . »

L'enseignant dit : « Alors, bilan 3 » ; mais tout d'un coup, une élève demande : « est-ce que ce n'est pas possible qu'une tangente soit verticale ? » L'enseignant réagit : « ah, très bonne remarque ! » ; et il propose à toute la classe : « est-ce que vous connaissez des fonctions où on peut trouver une tangente verticale ?, pensez aux fonctions de référence ! ». Avec geste, l'enseignant montre la forme d'une droite verticale ; mais personne n'arrive à donner aucune fonction. « Ah, il me faut faire le schéma (il fait le geste de dessiner « une demi-parabole d'axe horizontal ») pour cette fonction » ; la plupart des élèves répondent alors tout de suite : « fonction racine carrée ». L'enseignant montre la courbe avec *GeoGebra*, et demande de proposer d'abord le point où l'on peut trouver la tangente verticale. Le point d'abscisse zéro est proposé par certains élèves, puis l'enseignant zoome successivement à l'origine du repère. Il demande, puis affirme : « et alors, c'est quoi la tangente verticale ? … c'est l'axe des ordonnées ». (Il y a eu un silence entre le moment où l'enseignant a posé cette question et celui où il a confirmé la réponse.)

Bilan 3 : La tangente à une courbe au point A est la droite indiscernable (visuellement) de la courbe au voisinage de A.

Les élèves n'ont pas pu répondre seuls quand l'enseignant leur a proposé de chercher et de tracer sur la deuxième fiche donnée une tangente *traversante* en un point à la courbe. En effet, quand il a lancé la consigne avec plusieurs questions de même objectif (durant une minute), il a demandé à un élève de venir au tableau pour trouver un point, puis poser la règle passant par ce point de façon à faire apparaître une droite semblant tangente. Comme cet élève n'est pas arrivé à trouver une tangente anticipée/visée, l'enseignant a demandé à un deuxième élève, puis à un troisième élève. Et, simultanément, les autres élèves étaient en train de chercher à tracer une telle tangente. L'enseignant n'a pas laissé de temps pour faire les tracés avant d'envoyer les trois élèves au tableau. Nous avons remarqué que peu d'élèves arrivent à trouver une « *tangente traversante* ».
Concernant la recherche de la tangente verticale à la courbe au point d'abscisse zéro représentant la fonction racine carrée, l'enseignant pose la question : « et alors, c'est quoi la tangente verticale ? » et après un certain nombre de zooms successifs sur ce point, aucune réponse de la part des élèves. A ce moment-là, il y avait une grande hésitation pour répondre à

la question posée. En effet, cette fois-ci, il s'agit d'une tangente sous forme d'une demi-droite, alors que, d'après certaines expériences, aux yeux des élèves, la tangente représente '*une droite*'.

Phase 4 (35 min) : *exercices graphiques*

Travail individuel : « vous allez faire les exercices 2.1 à 2.5 (voir annexe), vous avez un quart d'heure de travail »

A l'aide de *GeoGebra*, l'enseignant rappelle à toute la classe les trois bilans successifs avant de distribuer les fiches des cinq exercices graphiques.
L'objectif est de provoquer une rencontre graphique avec des tangentes restant du même côté de la courbe ou avec des tangentes traversant la courbe, et également, avec des tangentes en position soit oblique soit horizontale soit verticale.
Juste après avoir distribué les fiches de ces cinq exercices, l'enseignant montre sur l'écran la figure de l'exercice 2.1. Tout de suite, une élève demande une précision sur la position de la tangente par rapport à la courbe. L'enseignant répond : « la tangente, c'est la droite qui touche une seule fois la courbe au point choisi et qui est indiscernable au voisinage de ce point. « En gros », vous mettez vos mains en cachant tout ce qu'il y a, imaginez que vous zoomez, vous regardez ce qui se passe autour du point choisi ».
Pendant ce temps de travail individuel, l'enseignant passe dans les rangs pour voir le travail de chaque élève ; en cas d'échec chez l'élève, il intervient individuellement de manière à faire des rappels, à suggérer une ou des idée(s) pour, par exemple, construire une courbe représentant une fonction, en connaissant la position des tangentes en certains points de la courbe cherchée.
Après 18 min de travail individuel, l'enseignant commence la correction collective et dialoguée avec l'exercice 2.1 composé de cinq questions. Noter que <u>l'exercice 2.1</u> est du type : *une courbe et des droites étant tracées, dire qui semble tangent à qui, et où*.

> L'enseignant demande à un élève de donner sa réponse pour la question a), cet élève donne la bonne réponse : « la droite (d_1) semble tangente à la courbe C_f en K ». L'enseignant conseille et confirme la façon de travailler sans l'aide de *GeoGebra* pour s'assurer si une droite est la tangente à la courbe en un point choisi : « Pour vous, ce n'est pas facile, c'est plus délicat. Alors, pour vous en gros, prenez vos mains et posez-les autour du point K en cachant tout ce qu'il y a, vous regardez ce qui se passe autour du point K ». Puis avec *GeoGebra*, il zoome successivement sur le point K en justifiant la réponse à l'aide de « l'observation d'une tangente avec des zooms ». Et, de la même manière pour les quatre questions restantes.

Puis, la correction collective avec l'intervention de l'enseignant pour <u>l'exercice 2.2</u> qui est du type : *on donne une ou plusieurs droites, avec un point marqué sur chacune d'elles. Tracer une courbe passant par les points donnés et semblant tangente aux droites données en ces points*.

> L'enseignant demande à un élève de venir au tableau pour tracer une courbe sur la figure projetée. L'élève vient au tableau et trace sa courbe : il rencontre un échec pour le 1er essai, puis il l'efface. Il la trace à nouveau, mais il y a encore des erreurs. L'enseignant pose alors des questions précises et l'élève arrive à construire une courbe convenable.
> Puis, l'enseignant demande à un autre élève de donner sa courbe en la mettant en rouge, ce 2ème élève trace une autre courbe convenable.

L'enseignant demande à toute la classe de faire des remarques et de comparer les deux courbes tracées. Pour l'exercice 2.2, il y a plusieurs courbes convenables possibles que l'on peut construire en respectant l'énoncé.

Pour la correction de l'exercice 2.3 qui est du même type que l'exercice 2.2 précédent, mais avec des segments double-fléchés au lieu des droites (introduction de la convention). L'enseignant demande à un élève de venir présenter sa courbe en traçant à nouveau sur la figure projetée. « La courbe-là est catastrophique au point A », précise l'enseignant « c'est pas une fonction », puis il efface la partie de la courbe autour du point A, et il la construit à nouveau avec le logiciel.

Comme c'est l'heure, l'enseignant demande aux élèves de continuer à faire les deux derniers exercices à la maison, qui seront corrigés à la séance du lendemain.

Le travail individuel pourrait être un moment où l'élève est confronté à un milieu/une situation *sans l'intervention de l'enseignant*. Mais, en réalité, il est évident qu'il y a une aide de la part de l'enseignant.

Ce que nous avons constaté, c'est que d'un côté, les élèves semblent s'approprier géométriquement la notion de tangente avec l'expérience d'observation à l'aide de *GeoGebra* utilisé par l'enseignant, et de l'autre côté, les élèves se sont confrontés aux tangentes vues avec la technique des zooms successifs sur un autre support, pendant le travail individuel, puisque chaque élève ne travaille pas avec *GeoGebra*, mais avec des graphiques statiques donnés à main levée sur papier. La question qui se pose est de définir comment l'élève va justifier « à l'œil » si une droite semble la tangente à une courbe en un point ?

Le choix de l'enseignant est de rappeler à toute la classe à l'aide de *GeoGebra*, les trois bilans concernant la définition géométrique de la tangente à une courbe en un point, et en plus, une autre technique sur papier, avant de laisser faire les cinq exercices graphiques.

Pourtant, nous avons constaté qu'environ la moitié des élèves rencontre des difficultés avec ce nouveau support de travail.

Pour l'exercice 2.1 : une difficulté chez l'élève pourrait être d'une part l'incompréhension de la définition géométrique de la tangente et, d'autre part, l'élève lui-même qui ne pourrait pas distinguer « à l'œil » sur le graphique-papier si une droite coupe ou touche la courbe en un point choisi.

Si l'élève réussit à faire l'exercice 2.1, il pourrait faire les deux exercices 2.2 et 2.3. Ici, quand nous regardons certaines productions des élèves, nous pouvons dire que :

- certains élèves pourraient se tromper entre les mots 'couper' et 'toucher' ;
- certains élèves représentent autour d'un point choisi d'une courbe la tangente comme un segment ;
- certains élèves arrivent à construire une courbe convenable. Ces élèves appréhendent la définition géométrique de la tangente, surtout la position locale entre la tangente et la courbe en un point choisi.

Commentaires :

Concernant les deux premières séances, l'objectif principal est de découvrir la notion de tangente dans le cadre de la géométrie. Comme l'introduction de cette notion n'est pas facile, et comme il s'agit d'une nouvelle stratégie d'introduction de la notion de tangente avec la technique des zooms successifs vers un point d'une courbe, à l'aide du logiciel de géométrie dynamique *GeoGebra* : « la tangente, c'est la droite indiscernable (visuellement) de la courbe au voisinage d'un point ; avec logiciel, lorsque l'on zoome successivement sur ce point, on ne distingue plus la courbe de cette droite. ».

Concernant ces deux premières séances, les élèves ont la volonté de découvrir la notion de tangente et l'enseignant se donne un rôle important pour donner un sens à la notion de tangente avant de la définir.
Nous remarquons que cette nouvelle stratégie pour introduire la notion de tangente n'est pas présente dans des manuels de 1re ES et de 1re S. Nous avons découvert une technique avec des zooms successifs dans le manuel de 1re S de la collection Math'x chez Didier, programme 2011, mais il s'agit d'un autre scénario (activité 2 pages 74-75).

Séance 3 (le lendemain) : Recherche du coefficient directeur de la tangente à une courbe en un point

Phase 1 (24 min) : *correction de deux exercices effectués à la maison*

Il s'agit d'une correction collective et dialoguée :

- l'exercice 2.4 est du type : *on donne un tableau de valeurs d'une fonction sur un intervalle I et les coefficients directeurs des tangentes à la courbe représentative de cette fonction aux abscisses données, tracer une courbe représentative de la fonction cohérente avec le tableau de valeurs.*

  Remarquer que selon l'information du tableau de valeurs :

  - les deux premières lignes permettent de repérer 4 points de la courbe cherchée ;
  - la troisième ligne permet de construire les droites tangentes en ces quatre points à la courbe cherchée.

  L'enseignant envoie un élève au tableau. Il pose des questions successives concernant le tableau de valeurs donné et des procédés possibles pour arriver à tracer une courbe cohérente avec le tableau de valeurs. Avec le logiciel *GeoGebra*, l'élève commence par placer quatre points notés A, B, C *et* D, puis tracer la droite tangente passant par le point A donné et de coefficient directeur 1. Il s'agit de reconnaître la construction d'une droite passant par un point et connaissant son coefficient directeur. Ensuite, l'enseignant trace les trois autres droites tangentes pour gagner du temps en expliquant la façon de les construire. Mais, il envoie un autre élève au tableau pour tracer une courbe cohérente avec ce tableau de valeurs. Ce deuxième élève rencontre des difficultés pour tracer la courbe semblant tangente à la droite tracée au point D. L'enseignant pose des questions pour vérifier, puis il construit à nouveau une courbe cohérente. À la suite de la construction de cette courbe convenable, il y a aussi une proposition de la part d'un élève de sa place « une tangente traversante au point C », et l'enseignant précise et trace à nouveau une courbe pour visionner les tangentes *traversantes* à cette courbe aux points A et C.
  Les élèves rencontrent des difficultés pour cet exercice 2.4. La première difficulté est la construction des droites tangentes, à cause de l'information à la troisième ligne : « Coefficient directeur de la tangente au point de C_f d'abscisse x », la question qui se pose chez les élèves est : comment tracer la tangente à une courbe en un point indiqué sans connaître la courbe ? Puis, la deuxième difficulté est la construction d'une courbe cohérente avec le tableau de valeurs après avoir repéré les points connaissant leurs coordonnées et avoir tracé les tangentes en ces points connaissant leurs coefficients directeurs. En effet, l'appropriation de la notion de tangente du point de vue

géométrique chez les élèves est récente, bien que les élèves aient déjà rencontré ce type de problème dans les exercices 2.2 et 2.3.
Avant de corriger l'exercice 2.5, l'enseignant montre sur l'écran avec *GeoGebra* une courbe sous forme d'une droite, puis il pose la question : « quelle est la tangente à une telle courbe en un point ? », en précisant que « c'est un cas particulier, vous ne l'avez pas encore rencontré dans les deux premières séances ». Il conclut que « toute tangente à la courbe en tous les points est la droite qui est confondue avec la droite du départ ».

- L'exercice 2.5 est du type : *une courbe étant donnée, tracer à la règle la tangente au point donné.*

  Il faut à l'aide du graphique donné, repérer d'abord les points de la courbe grâce à leurs abscisses (données), puis tracer à la règle ou avec un logiciel les tangentes à la courbe en ces points à l'aide de « l'observation d'une tangente avec des zooms ».
  L'enseignant envoie un élève au tableau. Avec un logiciel, cet élève réussit à bien repérer les points et à tracer les tangentes à la courbe en chacun de ces points, un par un.
  Nous avons constaté que l'élève a bien compris le principe de la construction visuelle de la tangente en un point de la courbe donnée.

Phase 2 (30 min) : *recherche du coefficient directeur de la tangente à une courbe en un point*

L'enseignant distribue les fiches de l'*activité 3* et fait un rappel du bilan 3 de la deuxième séance : « La tangente à une courbe en un point A est la droite indiscernable (visuellement) de la courbe au voisinage du point A » ; « cette définition-là reste évidemment à améliorer, à formaliser un peu plus en mathématiques », ajoute-il.
L'objectif de l'activité 3 est de trouver une méthode pour déterminer le coefficient directeur de la tangente à une courbe en un point.

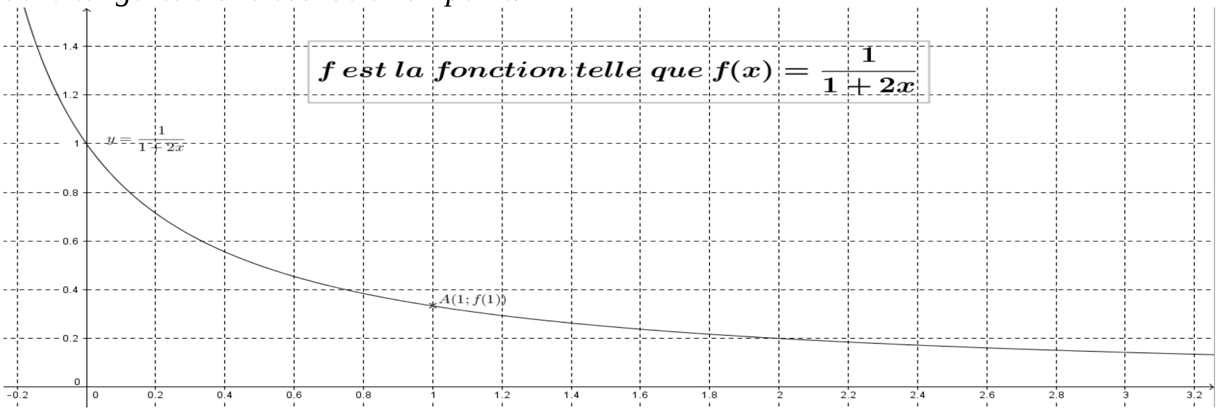


Figure *c*

Noter que sur la figure vidéoprojetée (figure *c*), la fenêtre d'algèbre de *GeoGebra* est cachée pour que les équations de droites (en particulier les coefficients directeurs) n'apparaissent pas.
Il s'agit d'un travail dialogué et collectif, avec des questions guidées par l'enseignant. L'enseignant commence par lancer une question : « la courbe représente quelle fonction, quelle famille de fonctions ? ». Aucune bonne réponse n'est donnée de la part des élèves pour la famille de fonction, c'est l'enseignant qui dit : « fonctions homographiques ». Puis, il continue à poser une question : « le but du jeu est de faire quoi, à votre avis ?»… il continue : « le but du jeu, c'est de trouver une méthode moins géométrique, c'est-à-dire une méthode plus précise pour déterminer le coefficient directeur de la tangente à une courbe en un point ».
L'enseignant continue en faisant des rappels vus pendant la phase d'observation dans la première séance sur :

- Le fait que zoomer successivement vers un point de la courbe donnée, à un moment donné, fait apparaître la droite.

- Comment tracer à main levée la droite tangente à la courbe en A.

- Comment faire pour tracer une droite : il faut connaître un point de la droite et son coefficient directeur.

- Comment tracer la tangente à la courbe en A : la droite tangente passe par le point A et un autre point B quelconque du plan de façon que cette droite et la courbe soient presque identiques après un certain nombre de zooms vers le point A.

- Comment faire pour trouver la tangente à la courbe en A dans la position la meilleure possible :

  - tracer une droite passant par le point A et par un autre point B qui est obligatoirement placé sur la courbe ;

  - déplacer le point B sur la courbe vers le point A le plus proche possible.

L'enseignant pose des questions pour faire un lien avec l'objet d'étude de la phase d'observation de la première séance : la tangente à une courbe en un point est la droite limite des sécantes quand le deuxième point de la sécante se déplace sur la courbe vers le point indiqué. Il précise que « pour trouver la tangente, il suffit de trouver son coefficient directeur ».
L'enseignant enchaîne l'utilisation du tableau blanc avec celle de l'ordinateur, à partir de ce moment. Il utilise le tableau pour écrire les démarches mathématiques par exemple la formule du coefficient directeur d'une droite, et l'écran vidéoprojeté pour les démarches graphiques et le calcul avec la fonction « Calcul formel ».
Après avoir tracé sur l'écran la sécante (AB) où le point B se situe sur la courbe, il demande aux élèves de lui donner la formule pour calculer le coefficient directeur de la sécante (AB). Un élève donne la formule du coefficient directeur de la droite (AB) passant par deux points A et B, et l'enseignant l'écrit simultanément au tableau. Comme le point $A(1; f(1))$ est fixé, l'enseignant s'intéresse aux coordonnées du point mobile B. Il pose des questions à chaque fois pour amener à écrire le coefficient directeur de la sécante (AB) comme $\frac{f(x_B)-f(1)}{x_B-1}$ et il utilise le logiciel pour donner le résultat obtenu automatiquement dans le cas où l'abscisse du point B prend les valeurs respectives $1{,}1;\quad 0{,}9;\quad 0{,}99$. Les trois valeurs arrondies (le logiciel donne des fractions puis des valeurs décimales au centième près) sont, respectivement, -0,21, -0,24 et -0,22. Un élève mentionne que ça ne s'arrête jamais, que ça continue.
Ensuite, il pose la question : « quand aura-t-on le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A ? », alors maintenant, essayez de trouver la formule générale ! ». Au tableau, il demande aux élèves de lui donner l'abscisse du point B quand le point B se rapproche du point A en ajoutant : « essayez d'écrire l'abscisse du point B en fonction de l'abscisse du point A »; toute la classe se met d'accord que l'abscisse du point B est $1+...$ et l'enseignant dit : « 1 plus un nombre que l'on appelle h désignant l'écart des abscisses entre les deux points A et B ». Il précise que « h prend des valeurs très proches de zéro et h est un réel non nul ». Il propose alors aux élèves de lui donner la formule générale du coefficient

directeur de la sécante (AB) : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$. Il revient au travail sur l'écran avec « Calcul formel ». Avant de faire afficher le résultat, il demande : « obtient-on un résultat numérique ou littéral ?». « Oui, c'est un nombre », répondent des élèves, l'enseignant précise : « oui, mais en fonction de h ». Il recopie le résultat obtenu automatiquement au tableau en écrivant $m_h = -\frac{2}{6h+9}$:

P : Alors, comment va-t-on faire ? Rappelez-vous, comment h prend-il ses valeurs ?
Es : h prend des valeurs très proches de zéro.
P : A-t-on le droit de remplacer h par zéro ?
Es : … (aucune réponse)
P : On va essayer de faire $h = 0$.

L'enseignant demande au « Calcul formel » de donner un arrondi de $-\frac{2}{9}$. Il est à noter qu'un élève mentionne, avant le calcul par le logiciel, la répétition du chiffre 2, « moins zéro deux deux deux deux ».
Puis, il enchaine : « regardez, on n'est pas loin des coefficients directeurs des sécantes ».
Sans tarder, l'enseignant dit : « on va tracer cette droite », puis il propose aux élèves de lui donner la formule d'une équation de la droite passant par un point A et de coefficient directeur $m_0 = -\frac{2}{9}$. Il écrit d'abord la formule donnée par des élèves au tableau, puis à l'écran, il la saisit pour représenter cette droite. Ensuite, il vérifie la position entre cette droite particulière et la courbe au point A , à l'aide de « l'observation d'une tangente avec des zooms ».
Comme c'est l'heure, l'enseignant n'a pas de temps de faire un bilan pour finir. Un élève déclare « c'est pas mal ! » et l'enseignant répond « ce n'est pas que c'est pas mal, c'est parfait ! ».

En résumé pour la phase 2 :

- l'enseignant s'appuie sur l'enchainement des idées ci-dessous pour amener à trouver une méthode pour calculer le coefficient directeur de la tangente à une courbe en un point :

  - Comment faire pour tracer une droite ?
  - Comme on connaît un point de la droite tangente, pour tracer cette droite, il nous suffit de connaître son coefficient directeur.
  - Rappeler le procédé pour amener à obtenir la tangente en un point d'une courbe pendant la phase d'observation de la première séance.
  - Comme la tangente à une courbe en un point est la position limite des sécantes, proposer aux élèves de donner une formule pour calculer le coefficient directeur de la sécante.
  - Comme le point mobile se déplace sur la courbe vers le point indiqué, faire varier numériquement l'abscisse du point mobile, à chaque fois, demander avec le logiciel « Calcul formel » de calculer le coefficient directeur de la sécante en donnant la valeur exacte et un arrondi de cette valeur.

- Faire donner l'abscisse du point mobile en fonction de l'abscisse du point indiqué, et faire introduire un réel non nul h désignant l'écart des abscisses de ces deux points.

- Demander aux élèves de donner la formule générale du coefficient directeur de la sécante.

- Faire calculer algébriquement avec la fonction « Calcul formel » ce coefficient directeur.

- Rappeler comment h prend ses valeurs quand le point mobile se rapproche du point indiqué en restant sur la courbe.

- Encourager les élèves à essayer de faire $h = 0$.

- Vérifier à l'aide du logiciel, si la droite passant par le point indiqué et ayant le coefficient directeur trouvé est la tangente à la courbe en ce point.

Nous avons remarqué que la méthode proposée par l'enseignant ne permet pas de :

- développer la démarche mathématique par le calcul algébrique chez les élèves ;
- s'assurer qu'il est légitime de faire $h = 0$;
- introduire explicitement la notion de limite au sens dynamique.

Notons que la formule algébrique donnée par le logiciel n'est pas utilisée pour chercher d'autres valeurs numériques, l'enseignant veut directement arriver au coefficient directeur de la tangente avec *h*=0. Aurait-on pu amener à la conjecture que le coefficient cherché est -0,222… par un travail plus long dans le cadre numérique ?

Séance 4 : TP – utilisation de la méthode de calcul « $f'(a) = \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right]_{h=0}$ »

Pendant la quatrième séance, les élèves sont répartis en deux groupes : groupe du matin et groupe de l'après-midi.

Phase 1 (18 min pour le groupe 1 et 32 min pour le groupe 2) : *Des rappels – bilan*

Avec le logiciel *GeoGebra*, l'enseignant commence par faire des rappels et un bilan de la troisième séance sur :

- la définition de la tangente du point de vue géométrique, vue aux bilans 1, 2, et 3 des deux premières séances.
- comment trouver, à l'aide de la fonction « Calcul formel », le coefficient directeur de la tangente à une courbe en un point, vue en activité 3 de la troisième séance.

Dans ce cas, l'enseignant reprend l'activité 3 dont l'objectif est de consolider l'objet d'étude de la troisième séance : trouver le coefficient directeur de la tangente et vérifier avec « l'observation d'une tangente avec des zooms », la position de la « droite particulière dont le coefficient directeur est obtenu en faisant $h = 0$ dans le résultat du coefficient directeur de la sécante calculé par la machine » pour la courbe au point indiqué.

Certains élèves des deux groupes posent une question concernant le résultat automatique calculé par « Calcul formel » : « pourquoi a-t-on $-\dfrac{2}{6h+9}$ et comment fait la machine ? ».
L'enseignant répond : « la raison d'utiliser la fonction « Calcul formel » de GeoGebra, c'est l'intérêt d'économie de temps, et que le calcul à la main serait compliqué pour vous ». Les deux groupes posent des questions. Malgré son hésitation, l'enseignant effectue au tableau le calcul algébrique au groupe de l'après-midi, mais il ne l'a pas fait dans le groupe du matin.

Bilan 4 : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 a été trouvé en calculant :
$m_h = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ (coefficient directeur de la sécante lorsque B est très proche A), le calcul formel donne $m_h = -\dfrac{2}{6h+9}$, puis on regarde si on peut remplacer h par zéro. On trouve alors $-\dfrac{2}{9}$ et on l'appelle $f'(1)$ (se lit : f prime de 1)

L'enseignant donne la méthode générale pour la tangente à une courbe en un point $A(a; f(a))$ en posant $h=0$ dans $m_h = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. On obtient $f'(a)$ (si cela est possible).

Phase 2 (36 min pour le groupe 1 et 23 min pour le groupe 2) : *Phase d'application*

L'enseignant distribue les fiches de l'*activité 4*.
Consigne : « Vous travaillez en binôme avec ordinateur, vous avez 20 minutes pour cette activité. »
Objectif de l'activité 4 : se familiariser avec une méthode de calcul de $f'(a)$, à l'aide de la fonction « Calcul formel » de GeoGebra.

Activité 4 :

Rappel : On a vu que peut être $f'(a) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *en posant* $h=0$?
En utilisant l'outil calcul formel de Geogebra, remplir le tableau suivant en choisissant cinq valeurs de *a* de votre choix pour la fonction proposée puis avec un nombre *a* quelconque.

A						*a*
f(a)						
f'(a) ?						

Les cinq fonctions à considérer (cinq tableaux à remplir) sont : $f(x) = x^2-5$,
$g(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 2x + 3$, $h(x) = \dfrac{20x}{x^2+4}$, $i(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6$, $j(x) = \sqrt{x+2}$.

On relève beaucoup de questions de la part des élèves, des appels à l'enseignant (« monsieur ? »). Les élèves ont du mal à effectuer le travail demandé et l'enseignant les guide beaucoup.

Séance 5 : Institutionnalisation

Phase 1 (36 min) : *bilan de l'activité 4*

Il s'agit d'un travail collectif et dialogué, avec des questions suggérées par l'enseignant.
L'enseignant extrait de l'activité 4 deux fonctions $x \mapsto x^2 - 5$ et $x \mapsto \sqrt{x+2}$. Il reprend la méthode pour calculer le coefficient directeur de la tangente à une courbe en un point, vue dans les séances 3 et 4. Ici, il s'intéresse à calculer le coefficient directeur de la tangente à ces deux courbes au point d'abscisse 2 .
<u>Pour la première fonction</u> : $f : x \mapsto x^2 - 5$
Avec *GeoGebra*, l'enseignant montre la courbe représentative de la fonction f , puis il place le point A d'abscisse 2 sur cette courbe. Ensuite, il commence à poser des questions pour guider l'enchainement des idées pour amener à calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en A et puis représenter la droite particulière dont le coefficient directeur est le nombre trouvé $f'(2)$ précédemment. Il faut ensuite vérifier à l'aide de « l'observation d'une tangente avec des zooms » que cette droite-là semble parfaitement être la tangente à la courbe représentative de la fonction f en A.
<u>Pour la deuxième fonction</u> : $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$
Même objectif, l'enseignant continue avec *GeoGebra* en remplaçant $x^2 - 5$ par $\sqrt{x+2}$. Alors, dans la fenêtre de « Calcul formel », paraît automatiquement $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ qui donne comme résultat direct $\frac{\sqrt{h+4}-2}{h}$.
L'enseignant dit : « alors, on va substituer h par zéro, qu'est-ce qu'il donne « Calcul formel » ? ». Le logiciel affiche alors « ? ».
Dans ce cas, l'enseignant propose aux élèves de donner des valeurs de h très petites, le « Calcul formel » donne à chaque fois la valeur approchée du coefficient directeur de la sécante ; et l'enseignant vérifie également, à l'aide de « l'observation d'une tangente avec des zooms », la position entre la droite de coefficient directeur trouvé et la courbe en A d'abscisse 2. Toute la classe se met d'accord que cette droite-là n'est pas la tangente cherchée.
C'est ici que l'enseignant fait **un bilan** : la méthode pour calculer le coefficient directeur de la tangente à une courbe en un point que vous avez vue dans les séances 3 et 4 est efficace pour certaines fonctions, par exemple pour les quatre premières fonctions de l'activité 4, mais en échec pour d'autres, par exemple cette fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$. Et, il introduit alors « *la notion de limite* », « *la notion de nombre dérivé* » et « la définition de la tangente à une courbe en un point ».
L'enseignant montre comment calculer la limite en zéro de $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ où h est reconnu par le logiciel comme « variable », avec la fonction « Calcul formel ». Puis, il vérifie par « l'observation d'une tangente avec des zooms ».
Nous avons remarqué pendant le déroulement dans cette séance 5 que jusqu'à ce moment, les élèves s'approprient les caractéristiques visuelles de la position de la tangente à une courbe en un point. En effet, quand l'enseignant demande à chaque fois « est-ce qu'on obtient le coefficient directeur de la tangente quand h prend une valeur fixée qui est très proche de

zéro ? », la réponse de la part des élèves est « non, c'est le coefficient directeur de la sécante ».

Phase 2 (20 min) : *cours – nombre dérivé d'une fonction*

L'enseignant présente :

- la définition du taux d'accroissement d'une fonction f entre deux réels a et $a+h$, et l'interprétation graphique de ce taux d'accroissement qui est le coefficient directeur de la sécante passant par deux points $(a; f(a))$ et $(a+h; f(a+h))$;

- la définition du nombre dérivé d'une fonction f en une valeur a.

Noter qu'avant de donner la définition du nombre dérivé, l'enseignant fait une remarque. Il montre une courbe semblant être la courbe d'une fonction « valeur absolue » (il s'agit là d'une famille de deux fonctions affines définies sur un intervalle), avec le logiciel *GeoGebra* ; il demande s'il y a une tangente à cette courbe en un point particulier. Il introduit également les expressions « point anguleux » et « demi-tangentes » mais sans entrer dans les détails. Avec cette remarque, les élèves semblent percevoir « la tangente à une courbe en un point du point de vue local ».

Commentaires :
Concernant les cinq premières séances, nous trouvons en général que :

- il s'agissait (plutôt) d'un travail collectif et dialogué (mais non d'un travail magistral) ;

- la durée est limitée ;

- le rôle de l'enseignant est de :
    - poser des questions successives,
    - attendre des réponses et interpréter ces réponses,
    - attendre des propositions des élèves,
    - orienter les débats

  afin d'amener à l'institutionnalisation visée ;
- le rôle des élèves est de :
    - répondre aux questions correspondantes,
    - proposer des solutions/propositions convenables ou non,
    - participer volontairement

  afin de s'approprier les enjeux de l'apprentissage, de découvrir des procédures à utiliser, d'intégrer la nouvelle connaissance mathématique de la classe.

Il est à noter que le passage à h=0 pose problème aux élèves. Ils reviennent souvent sur ce point, notamment en séance 4 et dans la phase 1 en séance 5. On peut penser que le travail numérique n'a pas été suffisant, n'impliquant pas directement les élèves, puisque cette phase est collective et orchestrée par l'enseignant. La formule algébrique de m_h aurait pu permettre de relancer ce travail numérique en séance 3. Est-ce que les élèves pourraient être tentés, par eux-mêmes, de faire h=0 dans l'expression de m_h ? Peut-on, parallèlement, visualiser les valeurs approchées de m_h pour h de plus en plus petit, -0,222… avec de plus en plus de « 2 », avec la valeur en h=0 dans la formule (-2/9) ? Cela pourrait être un appui intéressant mais qui demande des connaissances sur le nombre qui ne sont pas actuellement disponibles dans l'enseignement secondaire.

Un autre travail, en parallèle, pourrait être intéressant : l'invalidation des droites obtenues pour m_h avec h petit par des zooms, alors qu'avec un cadrage « normal » elles semblaient adéquates. Or, quand h=0, on ne peut pas invalider. Cela peut soulever des questions

importantes pour mettre en avant la contradiction avec le fait que l'*on n'a pas le droit* de prendre h=0.
Cela dit, ce travail prendrait beaucoup de temps et on peut s'interroger sur sa pertinence étant donné que ce n'est pas cette définition qui sera institutionnalisée, mais celle avec la notion de limite. Ici, on rencontre une contrainte institutionnelle de première importance. Ce scénario, pour être viable, nécessiterait-il un appui des programmes qui prendraient en compte cette définition de la dérivée comme la valeur en $h=0$ du taux d'accroissement ?

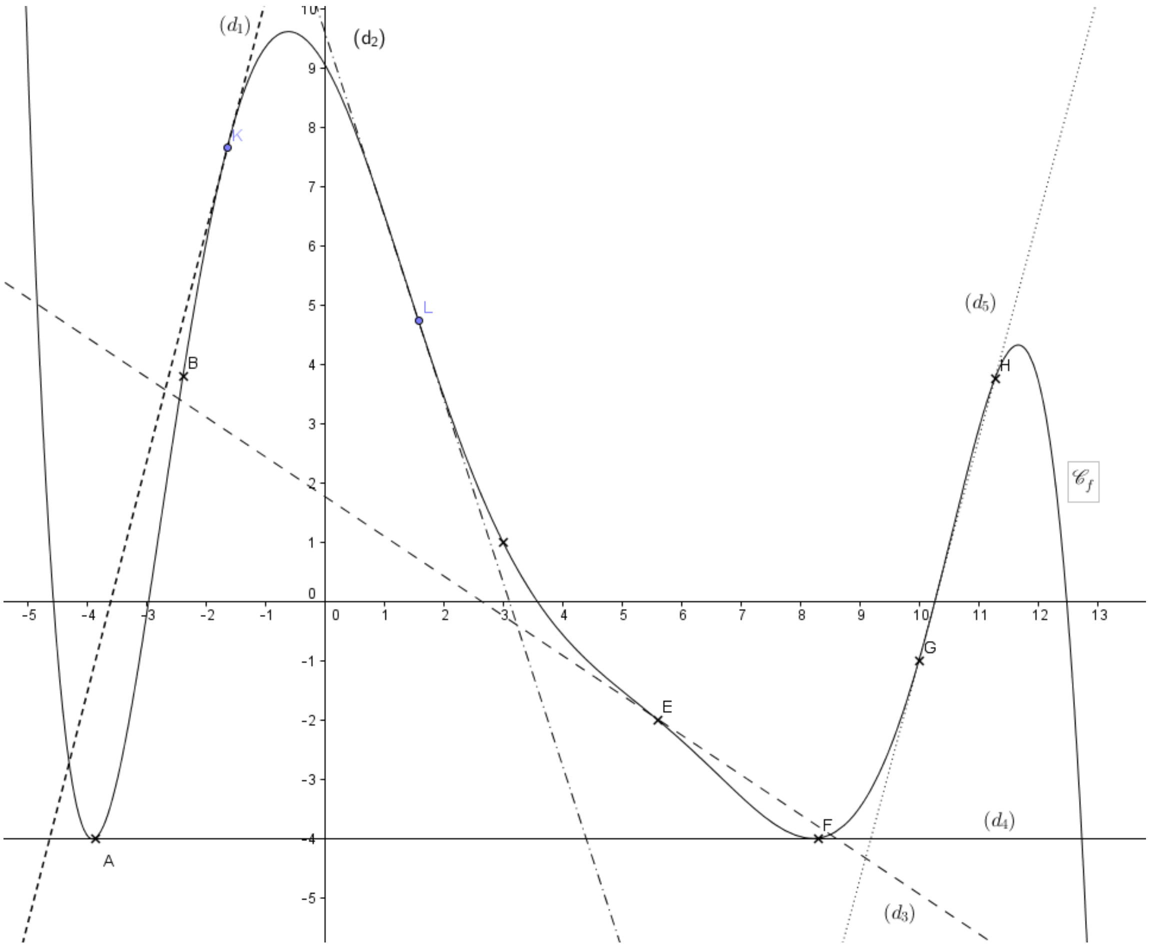
Annexe: les exercices de la séance 1&2, phase 4

Exercice 2.1.

(d_1) *semble-t-elle* tangente *à* C_f *en* K ? (d_2) *semble-t-elle* tangente *à* C_f *en* L ?

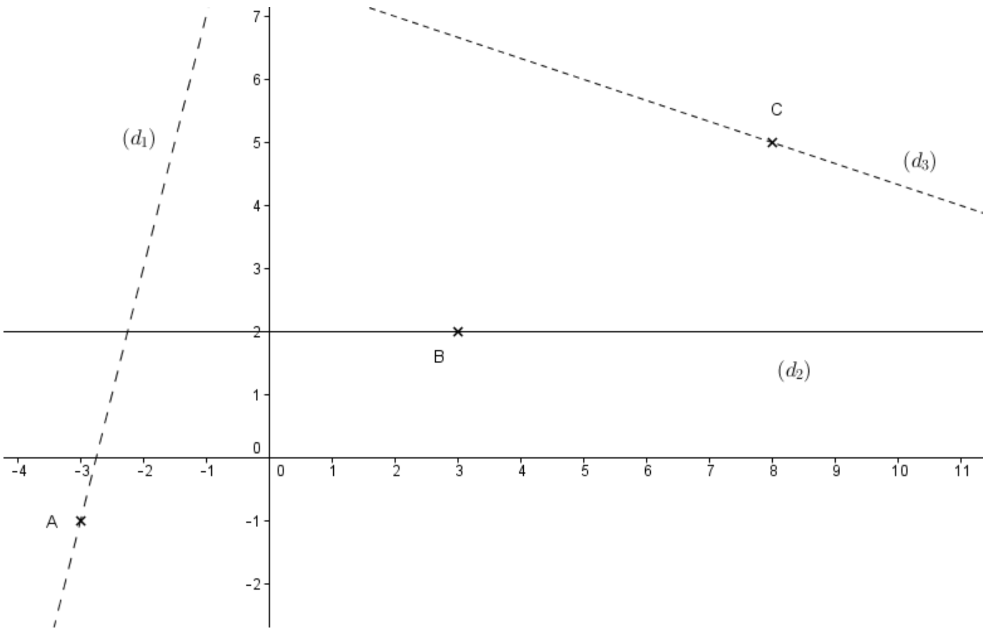
(d_3) *semble-t-elle* tangente *à* C_f *en* E ? (d_4) *semble-t-elle* tangente *à* C_f *en* A ? *et en* F ?

(d_5) *semble-t-elle* tangente *à* C_f *en* G ? *et en* H ?

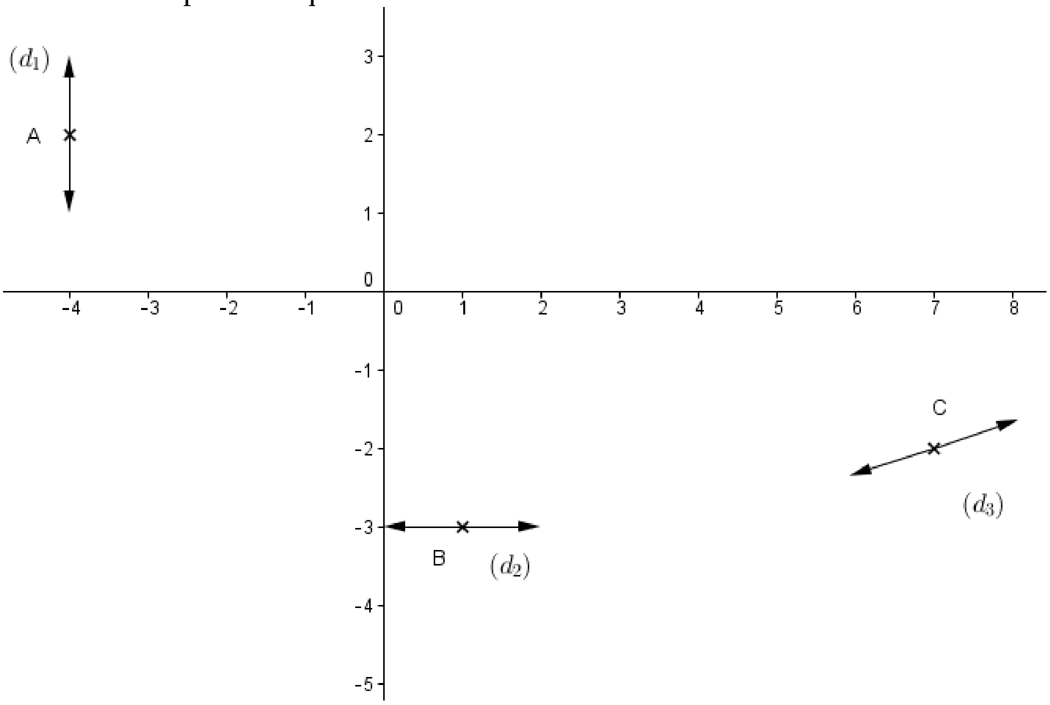


Exercice 2.2.

Tracer la représentation graphique d'une fonction *f* passant par les points A,B et C et dont les tangentes $(d_1),(d_2)\,et\,(d_3)$ en A,B et C sont tracées.



Exercice 2.3 :
Tracer la représentation graphique d'une fonction f passant par les points A,B et C et dont les tangentes $(d_1),(d_2)\,et\,(d_3)$ en A,B et C sont tracées.
Remarque et convention : Les tangentes sont généralement tracées sous forme d'un segment double-fléché pour indiquer le côté local de la notion.

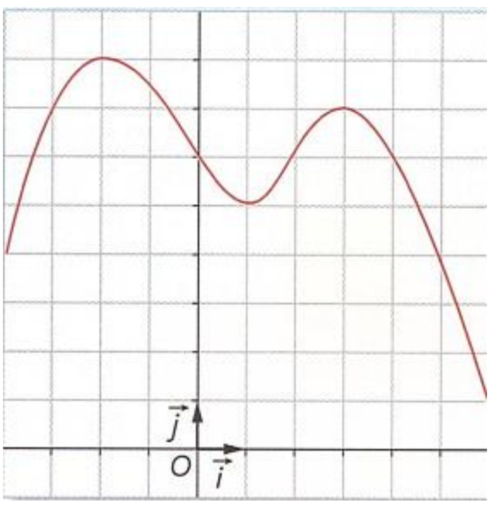


Exercice 2.4 :
On considère le tableau de valeurs d'une fonction *f* définie sur [-3 ;8] et les coefficients directeurs des tangentes à C_f aux abscisses données.

x	-2	1	2	6
f(x)	4	7	5	-5
Coefficient directeur de la tangente au point de C_f d'abscisse *x*	1	0	-2	0

Tracer une courbe C_f cohérente avec ce tableau.

Exercice 2.5 :
Sur la figure ci-contre, tracer « à l'œil »
les tangentes aux points de la courbe d'abscisses -4 ; -2 ;-0,5 ; 3 et 4



b) Quelques impressions de l'enseignant

Le contenu du scénario m'a plu compte tenu d'une approche très géométrique et visuelle (« image mentale de la tangente ») et peu algébrique dans un premier temps. L'écriture et l'utilisation du taux d'accroissement est un obstacle en classe de 1ère notamment en 1ère ES. Par ailleurs les activités proposées aux élèves favorisent la participation, les débats et les passages au tableau, les calculs « lourds » étant quant à eux relégués un peu plus tard dans le scénario. J'ai repris le scénario tel quel en y ajoutant des exercices (de rappels/ consolidation, d'entraînement et d'approfondissement) plus personnels notamment sur la notion de droite et d'équation de droite (écriture(s) algébrique(s)).

Les 1ères activités (Zoom/ Dézoom successifs) permettent de bien cerner le problème et d'aborder des techniques pour approcher la tangente. Le placement du point B (point mobile du plan qui permet de tracer la droite (AB) où A est fixe sur la courbe) est vite positionné sur la courbe car cela donne une sécante presque tangente quand les élèves rapprochent B de A. Cela permet d'écrire le taux d'accroissement sous une forme « basique » dans un premier temps (coefficient directeur $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$), l'écriture $\frac{f(a) - f(a+h)}{h}$ est vue plus tard (4ième heure après la première série d'exercices). Dans cette première phase, les élèves sont plutôt actifs et débattent volontiers des positions particulières : point d'inflexion, une tangente en plusieurs points différents, travail sur les équations de droite. Cela est travaillé également dans la première série d'exercices (exercices de perception et travail sur les équations de droite). On passe ensuite au TP de calcul formel où des difficultés de manipulations, de liens entre les fenêtres algèbre/calcul formel/graphique de *GeoGebra* apparaissent. C'est souvent la première fois que les élèves utilisent l'outil calcul formel (en répétant de nombreuses fois les mêmes calculs), qui semble sans doute un peu miraculeux pour certains. En revanche, la vérification des calculs en faisant tracer la droite trouvée est assez efficace comme moyen de contrôle, les élèves peuvent savoir s'il ont bien manipulé le logiciel (oubli de parenthèses dans les quotients et autres erreurs d'écriture)? Quelques petits « bugs » sont apparus dans l'utilisation des lettres, il faut faire attention à ne pas nommer de fonction h pour éviter les confusions avec le h du taux d'accroissement.

L'institutionnalisation a lieu ensuite et semble mieux passer surtout pour l'écriture du taux d'accroissement. Le « parachutage » du mot et de la notation **limite** semble assez brutale pour les élèves. Mais peu de calculs de limites sont faits par la suite (en 1ère ES)... L'écriture de l'équation de la tangente est assez fluide car déjà beaucoup travaillée auparavant dans les exercices et le TP de calcul formel. Pour la notion de tangente, le scénario me semble robuste, cela reste plus discutable pour la notion de limite.

Des exercices « classiques » (manuel ou autre) sont faits par les élèves. Vient ensuite la série d'exercices du type Vrai/Faux (à justifier) qui sont très intéressants car amènent les élèves à se poser des questions sur la notion de dérivation sur un « intervalle » et permet de préparer la partie « fonctions dérivées ayant lieu quelques semaines plus tard »

Quelques contraintes et adaptations.

L'adaptation et la passation d'un scénario préparé par d'autres collègues/chercheurs est un exercice difficile pour un enseignant. Les temps de discussion (au final de formation) passés au préalable avec les collègues m'ont permis d'avoir des idées plus claires sur les objectifs et les déroulements à proposer en classe. Le scénario m'a convaincu et plu au départ car assez proche de ma pratique habituelle (de la sécante vers tangente mais pas d'utilisation de vitesse instantanée par exemple).
La passation du scénario crée un certain stress (l'inconnu de n'avoir jamais fait), il faut une réflexion quotidienne sur ce que l'on va dire, sur les déroulements à adopter (passage des élèves au tableau ou non ? gestion des débats oraux ?...), se pencher lors des séances sur ses notes pour essayer de respecter au mieux le scénario.
Le recours « massif » aux TICE en utilisant le vidéoprojecteur quasi quotidiennement et le TP de calcul formel peuvent être des grosses contraintes pour les enseignants (salle pas équipée, professeur non formé à l'utilisation des TICE). Le scénario est évidemment impossible à réaliser sans un système de vidéoprojection accessible au quotidien.
Dans la préparation, il y'a un travail à réaliser assez important. D'une part, il faut prévoir des temps de travail sur les équations de droite (niveau seconde) bien avant la passation du scénario ce qui n'a pas été mon cas. Les équations de droites $y = mx + p$ et surtout $y = m(x - x_0) + y_0$ auraient pu être travaillées dans le chapitre de 1ère « fonctions de référence ». Il faudrait également préparer en amont des exercices de calcul algébrique (du calcul littéral du type $f(1 + h)$ puis $f(1 + h) - f(1)$ ...) à faire en AP par exemple).

2. Le cas de Vincent

Sylvie Alory – Vincent Josse

Compte-rendu de la mise en œuvre du scénario par Vincent Josse en première S en 2013-2014 au lycée Jean de la Fontaine (75016).

Introduction :
Enseignant au lycée La fontaine, M. Josse a accepté de mettre en œuvre le scénario proposé[2] en classe de première S, avec des élèves d'un bon niveau. Plusieurs éléments du scénario lui ont semblé pertinents pour pallier les difficultés rencontrées lors de cette introduction du nombre dérivé, à savoir (entre autres) :

- La non compréhension de la définition du nombre dérivé comme mentionné dans le BO n°9 du 30 septembre 2010 : « Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 ». Cette définition s'appuie sur l'espoir d'une idée intuitive de la notion de limite.
- Le scénario permet de progressivement introduire la variation des lettres a et h dans la formule du nombre dérivé.
- La notion de tangente à une courbe : introduction non motivée, impression de tourner en rond : la tangente est la droite qui a pour coefficient directeur $f'(a)$ et $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente.

Les points intéressants du scénario :

- L'originalité de l'approche.
- L'occasion de prendre le temps de chercher une définition difficile à formuler, et donc de faire des mathématiques comme les élèves ont peu souvent l'occasion de le faire.
- Le bénéfice attendu (espéré tout du moins !) pour les élèves en termes de compréhension de la dérivation.

Dans un premier temps, nous présenterons le déroulement en classe et les modifications non négligeables apportées au scénario ; nous commenterons ensuite le déroulé de la séquence.

Le déroulement :
Acquis :

- Les élèves ont l'habitude d'utiliser *GeoGebra*, en classe et chez eux.
- Les équations de droites, les lectures graphiques de coefficients directeurs sont maîtrisées.
- Les fonctions usuelles ont été vues (dont la fonction valeur absolue).
- Le point le plus important de tous : ce que c'est que « faire des mathématiques » a été explicitement formulé, en mettant en avant quatre activités fondamentales :
  définir, postuler, conjecturer, démontrer. Définir est bien l'activité première, et l'étude des vecteurs (entre autres) a été l'occasion d'aborder ces questions.

L'enseignant propose cette séquence sur une période de 6 heures de cours, mais estime qu'elle doit être complétée (pour les raisons données ci-dessous).

[2] Voir chapitre 1

En classe entière, l'enseignant ne disposait pas d'une salle de cours équipée en matériel informatique. Une fois par semaine en demi-groupe, il disposait d'une salle avec 18 ordinateurs.
Au moins un exercice est donné à faire d'une séance sur l'autre ; il est corrigé en début de séance.

Séance 1 : Mise en route ; motiver la recherche de la tangente

La première séance d'une heure a lieu en demi-groupe en salle informatique. Les élèves travaillent seuls et utilisent le logiciel *GeoGebra*. L'enseignant propose une première approche des miroirs non plans pour motiver la recherche de tangente à une courbe (voir document 1 plus bas).

La figure est vite construite ; le point A est placé comme sur le document. Les élèves se lancent dans la recherche du rayon réfléchi en tâtonnant ; beaucoup cherchent la normale passant par A, en référence à la figure 1. Cette normale est tracée approximativement, puis le rayon réfléchi. Aucun élève ne pense à la tangente à la courbe. La question se pose de faire une figure exacte, déplaçable en déplaçant le point A. Pour certains groupes, l'enseignant attire l'attention sur ce qui se passe au point O. Plusieurs groupes zooment sur A ; l'idée du zoom se répand assez vite dans le groupe. Les élèves voient alors une droite à la place de la courbe et ne comprennent pas pourquoi le logiciel refuse de tracer la perpendiculaire à cette droite (pour obtenir la normale). L'enseignant leur propose alors de placer un point B « sur la droite visible », et de faire la figure en traçant la perpendiculaire à (AB). Le rayon réfléchi est tracé par symétrie axiale. On « dézoome » pour voir ce que cela donne. La figure se déplace en déplaçant le point A puis le point B. Ce n'est pas entièrement satisfaisant. En analysant la figure « correcte », on observe que la droite (AB) n'est pas quelconque ; On l'appelle « droite tangente à la courbe en A ». La solution du problème repose sur la construction de cette droite.

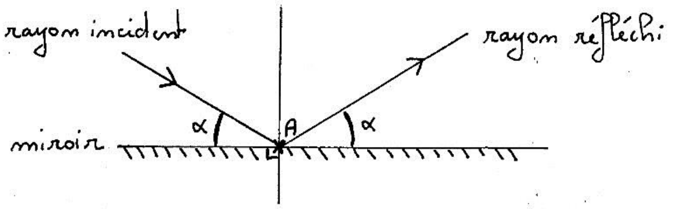
L'enseignant impose aux élèves de faire la figure sur la feuille en traçant au jugé la droite tangente à Cf en A, puis de tracer correctement le rayon réfléchi.
L'outil « tangente » de *GeoGebra* est dévoilé, et les élèves construisent enfin la figure finale, et s'émerveille en voyant la correspondance avec leur travail, et ce qui se passe quand on déplace le point A.

En fin de séance, une synthèse est alors dictée par l'enseignant :
« Quand on « zoome » sur C_f au voisinage de A, la courbe semble confondue avec une droite passant par A que l'on peut tracer de façon empirique. On dit que cette droite est tangente à $C_f$au point A. Le miroir réfléchit le rayon lumineux comme s'il était localement plan. »
Les élèves réfléchissent alors à la manière de définir une droite tangente à une courbe en un point. L'enseignant leur demande de rédiger une proposition par écrit. Ceux qui n'ont pas le temps de le faire à la fin de la séance font parvenir leur proposition à l'enseignant avant la séance suivante.

Document 1

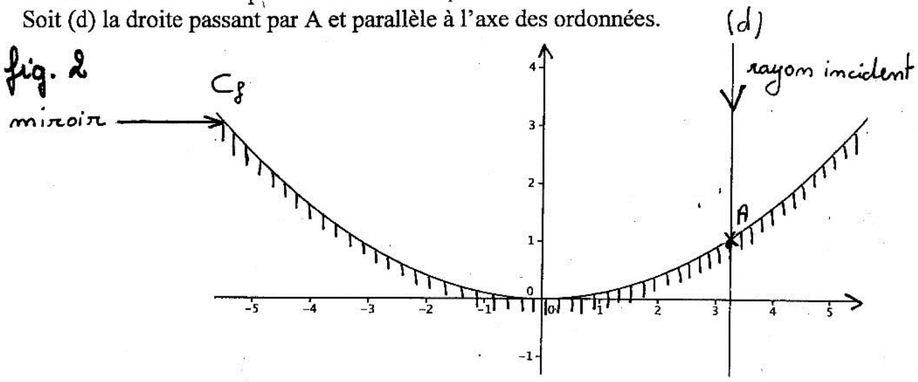
I. Introduction.

1) Les lois de la réflexion.
Lorsqu'un rayon lumineux frappe un miroir plan en un point A, il se réfléchit de telle sorte que le rayon incident et le rayon réfléchi forment avec le miroir des angles égaux. Ces rayons sont symétriques par rapport à la perpendiculaire au miroir en A.

fig. 1


Que se passe-t-il si le rayon frappe un miroir qui n'est pas plan ? Dans la suite, nous allons étudier le cas particulier d'un miroir de forme parabolique.

2) Un miroir parabolique.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}1 . x^2$ et C_f sa courbe tracée dans un repère orthonormé. Soit A un point de la courbe C_f.
Soit (d) la droite passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées.

fig. 2


On considère que C_f est un miroir parabolique et (d) un rayon incident. Comment sera le rayon réfléchi ?
Faire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, et tracer le rayon réfléchi.

Ici sera écrite la synthèse →

3) A la recherche d'une définition.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}5\,x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, et A un point de C_f.
Comment définir la droite tangente à C_f en A ?

Séance 2 : Recherche d'une définition : Comment définir la droite tangente à une courbe en un point donné ?

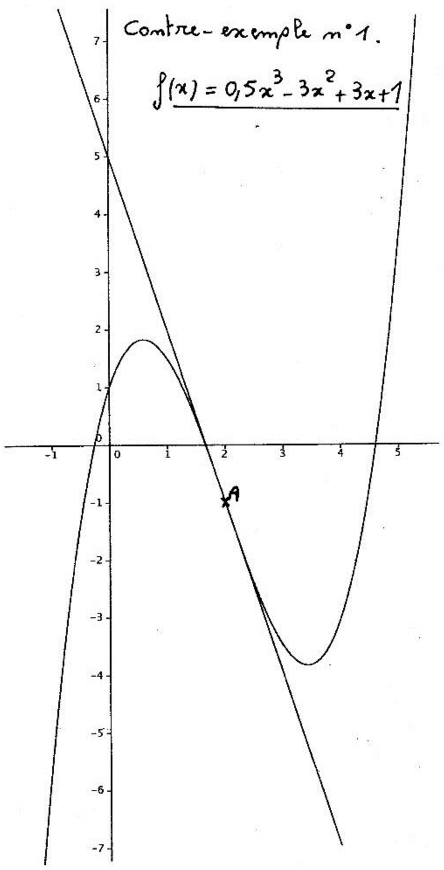
L'enseignant a choisi plusieurs propositions de définition faites par les élèves, et les donne à toute la classe en distribuant le document 2.

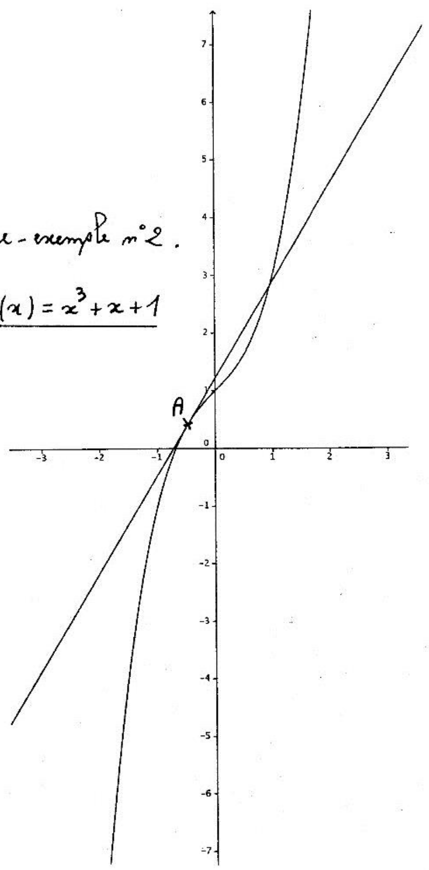
Document 2

Propositions pour définir la tangente à C_f en un point A.

La tangente à la courbe représentative de f au point A est...

1) ... la droite qui coupe la courbe en un point sans la traverser.
2) ... la droite qui forme avec la courbe des angles égaux.
3) ... la droite qui, sur un intervalle où la courbe est strictement monotone, ne la coupe qu'en un seul point.
4) ... la droite qui est confondue avec la courbe en A.
5) ... la droite qui tend vers la courbe et l'effleure sans la toucher vraiment.
6) ... la droite qui se rapproche le plus de la courbe au voisinage de A.
7) ... une droite qui passe par A et qui sera définie si on connaît son coefficient directeur.





Les propositions sont étudiées une à une et commentées collectivement. Certaines sont rejetées à l'aide de contre-exemples, d'autres à cause des difficultés qu'elles créent.
Se pose la question de l'unicité de la tangente en un point ; un élève passe au tableau pour essayer d'en tracer plusieurs (au moins une autre, par symétrie de ce qui se passe « à droite » du point considéré). Face à l'échec, on conjecture que la tangente est unique.
On aboutit à une définition provisoire, et un programme de recherche pour poursuivre le travail.

> Définition provisoire (proposée par les élèves) : la tangente à C_f en A est la droite passant par A et qui approche le mieux la courbe au voisinage de A. Cette définition est provisoire car la notion de meilleure approximation reste floue.
> Programme de recherche : Nous allons tenter de définir la tangente à une courbe en un point à partir de son coefficient directeur en cherchant différentes approximations de celui-ci, en essayant d'optimiser ces approximations (conformément à notre définition provisoire).

L'enseignant introduit la notation $f'(a)$ pour le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a.
Un exercice de lectures graphiques de nombres dérivés est introduit dans le cours.
On écrit : « $f'(2)$ est le coefficent directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 » ; on répète cette phrase en remplaçant 2 par d'autres valeurs.
La feuille d'exercices n°1 est distribuée et des exercices sont donnés pour la séance suivante.

Fiche d'exercices n°1. Document 3.1

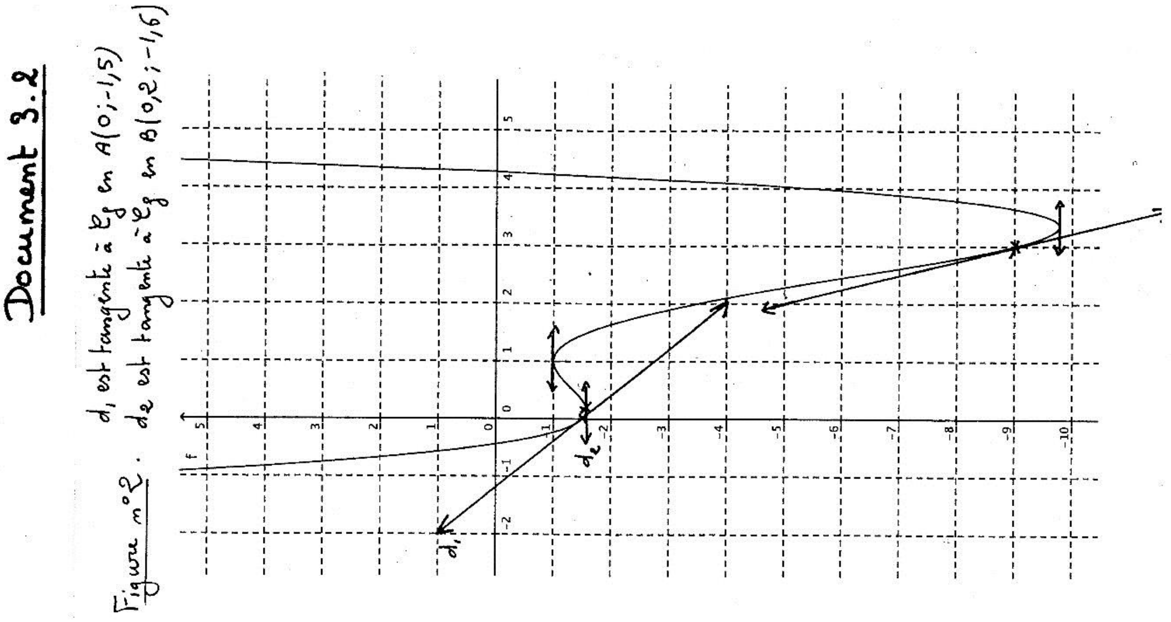
Exercice n°1.
On considère la figure n°1.
Tracer empiriquement la (ou les) tangente(s) à la courbe C_f ...
1) ... passant par A ; ... passant par B.
2) ... au point de la courbe d'abscisse -3.
3) ... parallèle(s) à la droite d.
4) ... ayant pour coefficient directeur 0.

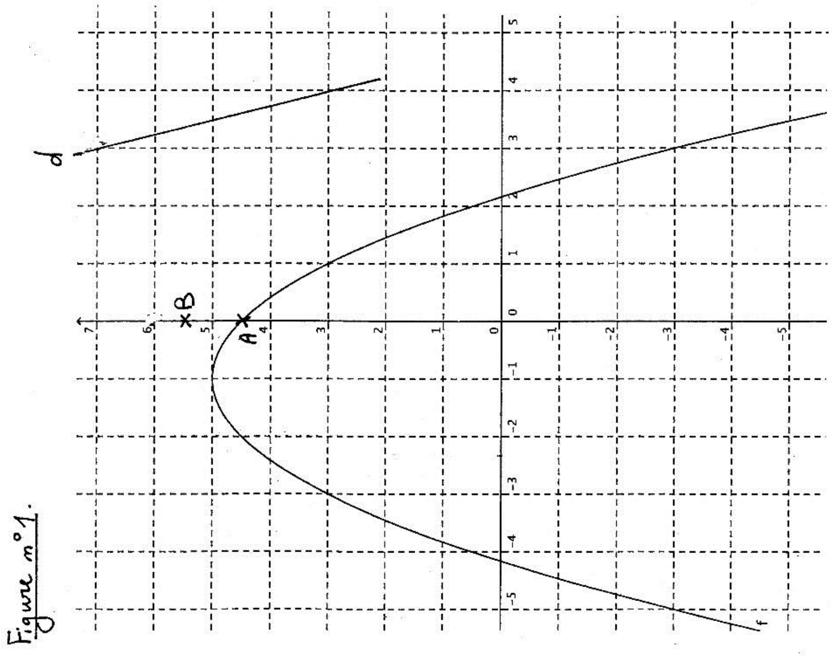
Exercice n°2.
On considère la figure n°2. Déterminer par lecture graphique :
1) f(0) et f '(0)
2) f '(3)
3) Les solutions de l'équation f(x) = 0
4) Les solutions de l'équation f '(x) = 0

Exercice n°3.
Tracer une courbe représentant une fonction f définie sur [-5 ; 5] et vérifiant les conditions suivantes :
a) f(-5) = f(5) = 0
b) f '(-2) = f '(2) = 0
c) f(0) = 1 et f '(0) = 3

Exercice n°4.
Tracer une courbe tangente à l'axe des abscisses en 5, représentant une fonction f définie et croissante sur [0 ; 10].

Exercice n°5.
Soit p un paramètre réel décrivant R et (d_p) la droite d'équation $y = px - p^2$.
A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer de quelle courbe les droites (d_p) sont les tangentes.
Indication : créer le paramètre p, tracer (d_p), activer la trace de (d_p) et faire varier p.
Vocabulaire : on dit que la courbe est enveloppée par les droites (d_p).





Séance 3 : A la recherche du coefficient directeur.
Cette séance est un cours dialogué, sans document support.

On considère la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et le point A de C_f d'abscisse 1. On cherche le coefficient directeur de la tangente à C_f en A. Comme aucun élève ne trouve de valeurs exactes, on cherche des valeurs approchées. On considère alors une sécante (AB) où B est un point de C_f.
Les élèves calculent le coefficient directeur de la sécante pour $x_B = 1{,}1$.
Le problème est que cette sécante n'est pas la tangente comme aucune des autres sécantes.
La droite (AB) est une approximation de la tangente d'autant meilleure que B est proche de A.
L'enseignant demande aux élèves de faire plusieurs calculs, avec différentes valeurs de x_B.
On conjecture que $f'(1) = 2$.
L'enseignant demande de conjecturer $f'(1{,}5)$; $f'(-2)$.
On conjecture de manière plus générale que $f'(a) = 2a$.
Contrôlons la conjecture pour $a = 7$. Pour ne pas multiplier les calculs numériques, comment faire ?
L'idée se dégage d'exprimer $\frac{f(7+h)-f(7)}{h}$
On obtient l'expression algébrique $\frac{f(7+h)-f(7)}{h} = h + 14$
L'enseignant demande comment il est possible de trouver $f'(7)$ à l'aide de cette formule.
Les élèves proposent :

- On fait h négligeable
- On ne peut pas faire $h = 0$ car on a une division par 0 ; géométriquement A et B seraient confondus et la droite (AB) aurait disparu.
- h tend vers 0 donc comme si h valait 0.

Ici est introduite la notation : $f'(7) = \left[\frac{f(7+h)-f(7)}{h}\right]_{h\ négligeable}$
Remarque : un élève a proposé la formule : $f'(a) = \left[\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}\right]_{h\ négligeable}$
Cette proposition n'est pas diffusée dans la classe, et sera reprise dans le doc. 5.

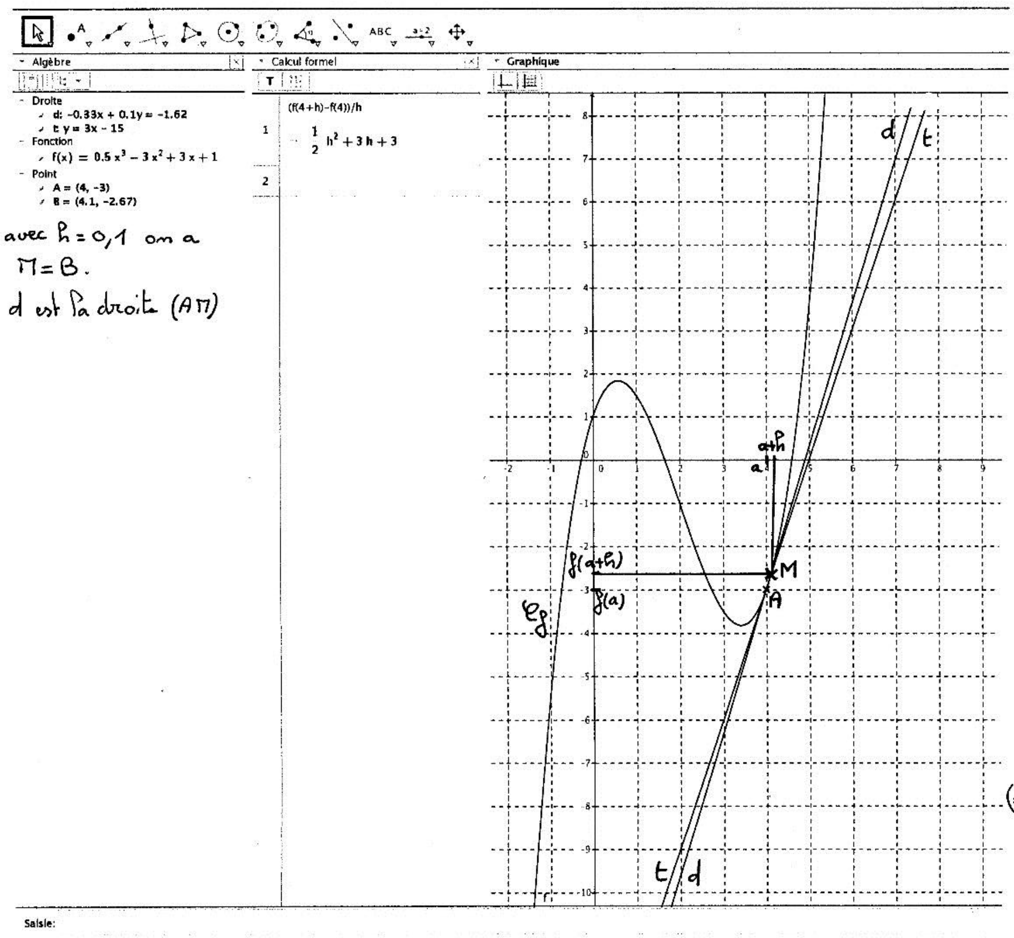
Cette formule est généralisée en remplaçant 7 par a, pour une fonction f <u>*a priori*</u> quelconque…

$$\text{Formule : } f'(a) = \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]_{h\ négligeable}$$

<u>Séance 4</u> : Etude de cette « formule ».
L'efficacité de cette formule est testée avec $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x + 1$ et $a = 6$.
Les élèves effectuent le calcul littéral, supposent « h négligeable » dans la formule obtenue, et trouvent $f'(6) = -3$.
Une synthèse est distribuée (doc 4) ; on reprend toutes les étapes dans le cas général, et on réexplique l'ensemble de la démarche. La notation en termes de limite est introduite.

<u>Séance 5</u> : Vers les formules ; en salle informatique (en demi-groupes, doc 5.)
En une heure, les trois premières parties sont traitées. Pour les tableaux (3^{e} partie), on se limite aux premières valeurs, avant que les calculs ne deviennent faux.
Les élèves ignorent que le logiciel de calcul formel de *GeoGebra* permet d'obtenir directement $f'(a)$ sans passer par le taux de variation.
La synthèse de la séance d'informatique n'est pas faite en salle d'informatique.

Document 4



avec $h = 0{,}1$ on a $M = B$.

d est la droite (AM)

f est une fonction définie sur I et $a \in I$.

Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

Soit $h \in \mathbb{R}$ et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a+h$

A a pour coordonnées $(a\,;\, f(a))$

M a pour coordonnées $(a+h\,;\, f(a+h))$

Le coefficient directeur de (AM) est :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Le coefficient directeur de "la" tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est noté $f'(a)$.

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est une approximation de $f'(a)$ d'autant meilleure que M est proche de A, et donc que h est proche de 0.

De manière "limite", nous avons :

$$f'(a) = \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]_{\text{quand } "h=0"}$$

Ceci est paradoxal, car si $M = A$ alors la droite (AM) n'existe plus ; et si $h = 0$, le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ n'est pas défini.

Nous écrirons donc, pour rester rigoureux :

$$f'(a) = \underset{\text{quand } h \text{ tend vers } 0}{\text{limite de}} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

notation abrégée : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$

Document 5

T.P. d'informatique : Géogébra et le calcul formel.

Première partie.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,5x^2 + 3x + 1$

1. Saisir l'expression de f(x) et tracer la courbe représentative de f.
2. Ouvrir la fenêtre du calcul formel (dans le menu « Affichage »), et taper l'expression :
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
3. A l'aide de l'expression simplifiée obtenue, déterminer f '(2).
4. Vérifier graphiquement le résultat obtenu.
5. Faire de même (de 2. à 4.) avec f '(6).

Deuxième partie.

On considère la fonction inverse g, définie par $g(x) = \frac{1}{x}$

1. A l'aide du calcul formel, déterminer g '(– 2) ; g '(– 1) ; g '(0,5) ; g '(4).
2. Vérifier graphiquement les résultats obtenus.
3. Toujours avec le calcul formel, déterminer l'expression de g '(a) pour tout réel a non nul.

Troisième partie.

On considère la fonction r définie par $r(x) = \sqrt{x}$

1. A l'aide du calcul formel, peut-on déterminer r '(2) ?
2. Ouvrir un tableur ;
   a) En A1, taper 0,1. En A2, taper = A1*0,1. Etendre cette formule à toute la colonne A.
   b) En B1, taper = 2 + A1. Etendre cette formule à toute la colonne B.
   c) En C1, taper = $(\sqrt{B1} - \sqrt{2})$/A1. Etendre cette formule à toute la colonne C.
3. Conjecturer la valeur de r'(2) à partir des résultats obtenus en 2.
4. Vérifier graphiquement (sur Géogébra) votre conjecture.
5. En suivant une démarche identique, conjecturer la valeur de r'(4) et vérifier graphiquement le résultat.

Quatrième partie.

A l'aide du calcul formel, compléter le tableau suivant :

f(x)	f '(a)
f(x) = mx + p	f '(a) =
$f(x) = x^2$	f '(a) =
$f(x) = x^3$	f '(a) =
$f(x) = x^4$	f '(a) =
$f(x) = x^5$	f '(a) =
(...)	(...)
$f(x) = x^n$	f '(a) =

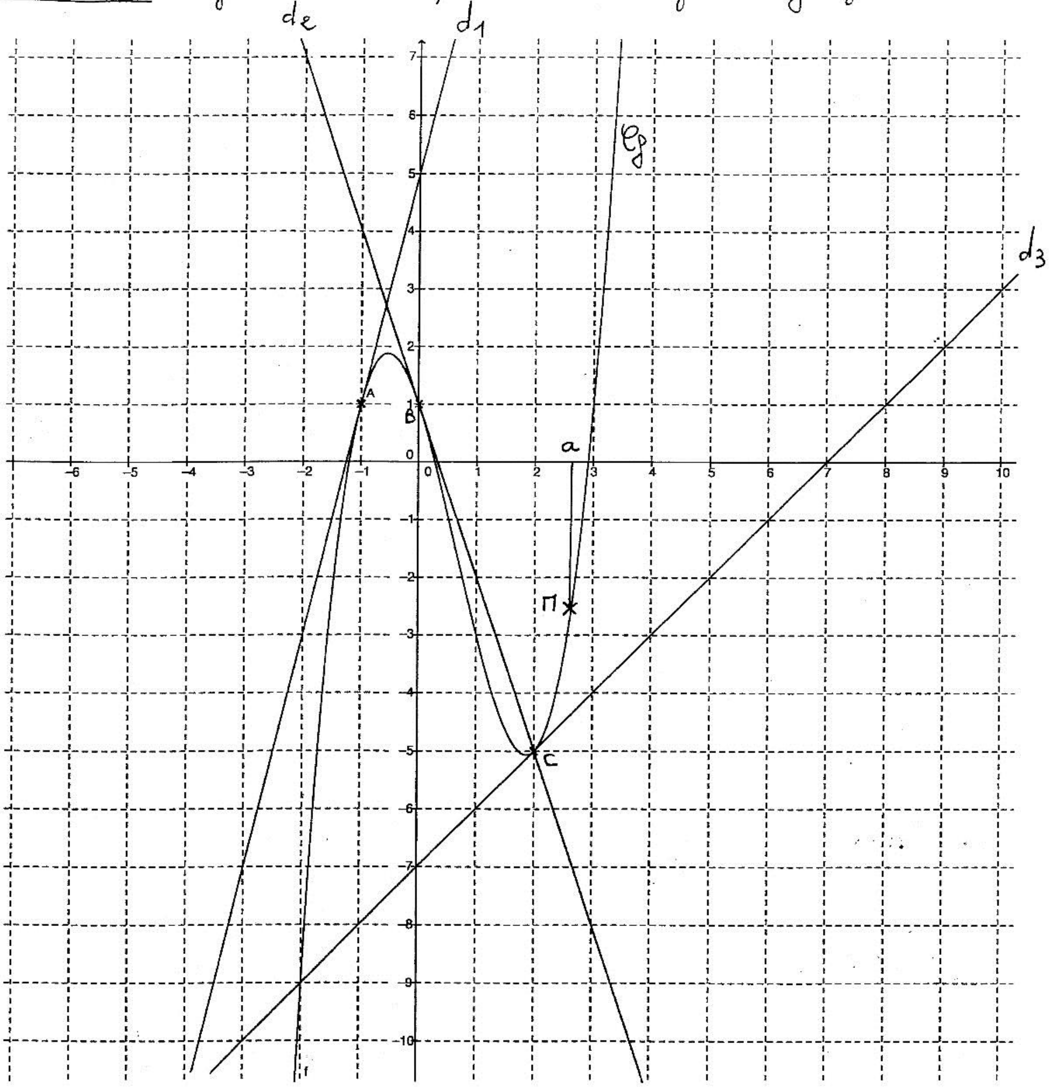
Cinquième partie.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a ∈ I et A le point de C_f d'abscisse a.

Une autre méthode pour trouver une valeur approchée de f '(a) consiste à prendre deux points M et N de la courbe C_f situés de part et d'autre du point A, et de calculer le coefficient directeur de la droite (MN). Quelle formule obtient-on alors ? Reprendre les calculs de la partie précédente avec cette nouvelle formule. Que constate-t-on ? Et pour la fonction inverse ?

Séances 6 et suivantes : De l'insuffisance de la méthode précédente.
Distribution de la feuille d'exercices n°2.

Exercice n°1 $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



(d_1) est tangente à $\mathcal{C}_f$ en A d'abscisse -1 ; (d_2) en B d'abscisse 0 ; (d_3) en C d'abscisse 2. Soit Π un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

1/ Exprimer l'ordonnée de Π à l'aide des données.

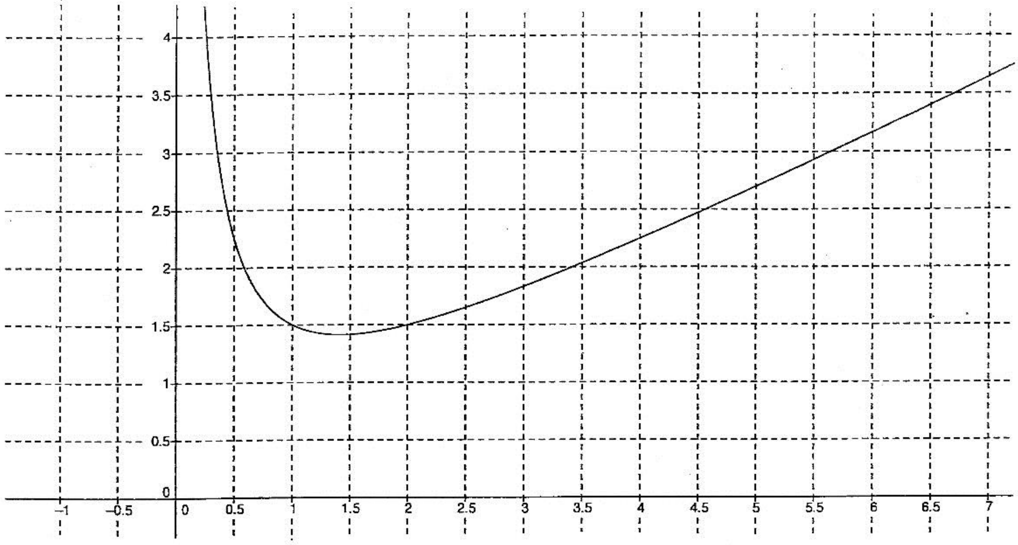
2/ Que représente graphiquement $f'(a)$?

3/ Par lecture graphique, donner $f'(-1)$; $f'(0)$; $f(2)$ et $f'(2)$.

Exercice n°2. Compléter le tableau.

$f(x)$	$f'(a)$
$f(x) = 1$	$f'(a) =$
$f(x) = x^n$	$f'(a) =$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(a) =$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(a) =$

xercice n° 3.



Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$

Un logiciel de calcul formel donne $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h-1}{2h+2}$

1/ Déterminer $f'(1)$

2/ Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1.

Exercice n°4.

.a courbe ci-contre représente **la** fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3.$$

Calculer $f'(-1)$.

Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -1.

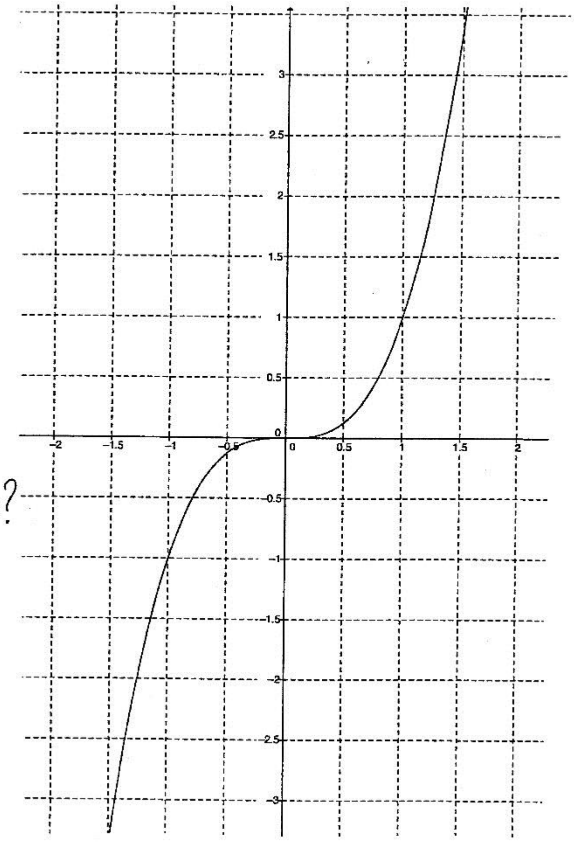
racer rigoureusement la tangente (d) $\mathcal{C}_f$ en A.

Soit B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1.

et (d') la tangente à $\mathcal{C}_f$ en B.

ue peut-on dire des droites (d) et (d')?

. **Justifier.**

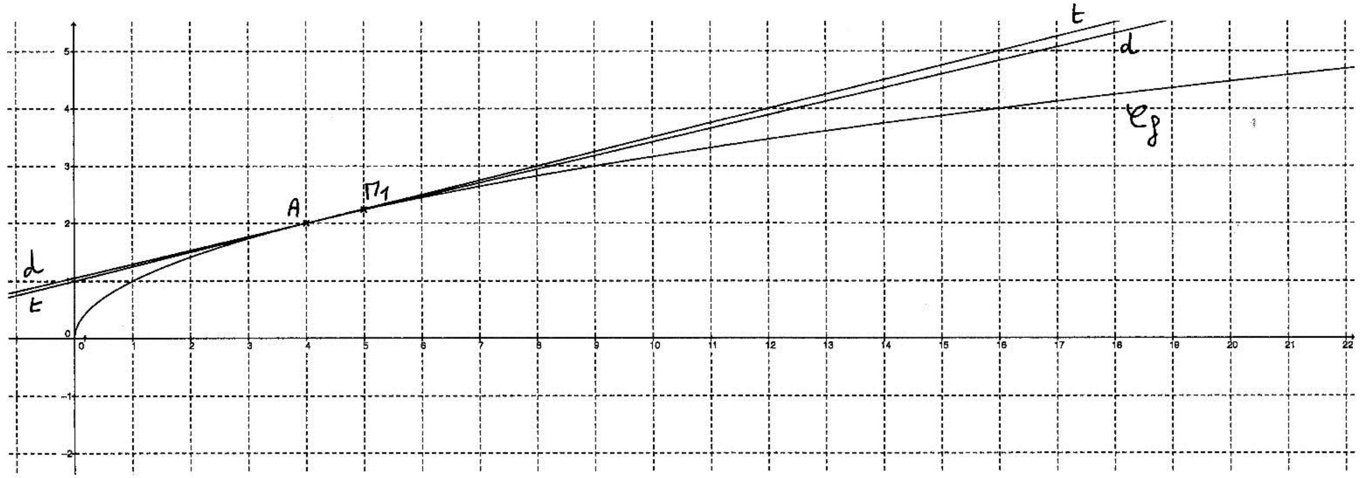


On revient sur la fonction racine carré (3^e partie doc 5.). Une synthèse du travail fait en TP est rédigée.

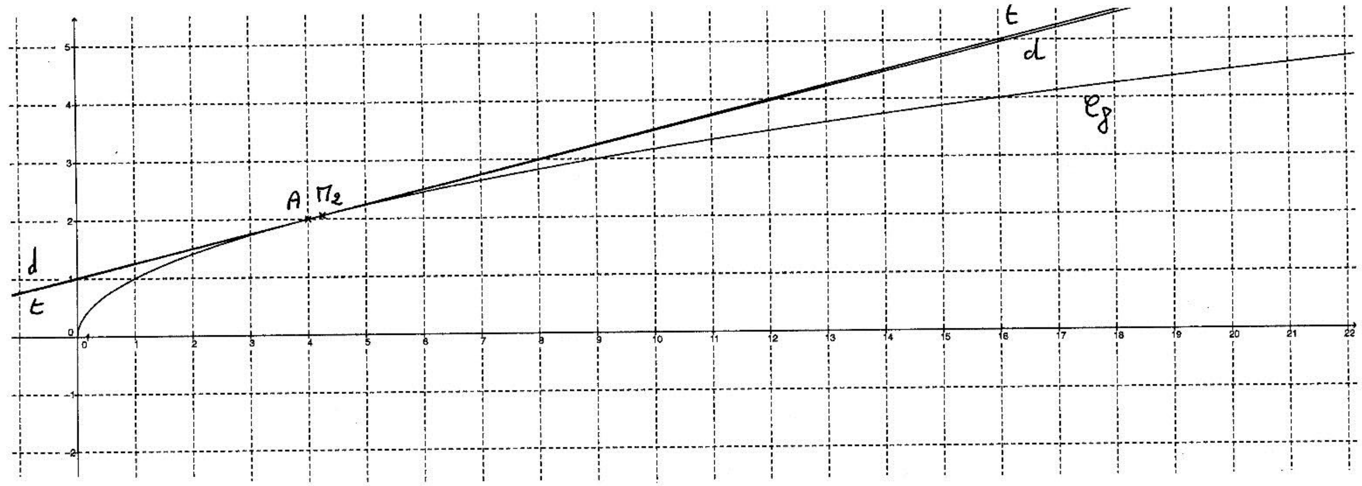
Document 6.1

h	$2+h$	$\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$	h	$4+h$	$\dfrac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}$
0,1	2,1	0,349241122	0,1	4,1	0,248456731
0,01	2,01	0,35311255	0,01	4,01	0,249843945
0,001	2,001	0,353509207	0,001	4,001	0,249984377
0,0001	2,0001	0,353548971	0,0001	4,0001	0,249998438
0,00001	2,00001	0,353552949	0,00001	4,00001	0,249999844
0,000001	2,000001	0,353553346	0,000001	4,000001	0,249999984
0,0000001	2,0000001	0,353553384	0,0000001	4,0000001	0,249999998
0,00000001	2,00000001	0,353553387	0,00000001	4,00000001	0,249999976
0,000000001	2,000000001	0,353553409	0,000000001	4,000000001	0,250000021
1E-10	2	0,353552743	1E-10	4	0,250000021
1E-11	2	0,35353942	1E-11	4	0,249977816
1E-12	2	0,353495011	1E-12	4	0,250022225
1E-13	2	0,353050922	1E-13	4	0,248689958
1E-14	2	0,355271368	1E-14	4	0,222044605
1E-15	2	0,222044605	1E-15	4	0
1E-16	2	0	1E-16	4	0
1E-17	2	0	1E-17	4	0
1E-18	2	0	1E-18	4	0
1E-19	2	0	1E-19	4	0
1E-20	2	0	1E-20	4	0

Document 6.2



$f(x) = \sqrt{x}$; t est la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ en A ; d est la droite (AM).



Les définitions notées en classe

On considère une fonction f définie sur un intervalle I, $a \in I$. h un réel non nul tel que $a + h \in I$.

1) Taux d'accroissement

On appelle taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ l'expression $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2) Tangente

Soit f une fonction, A le point de C_f d'abscisse a et M le point de C_f d'abscisse $a + h$; la tangente à C_f en A est la droite vers laquelle tend la droite (AM) quand M tend vers A.

3) Nombre dérivé

Quand h tend vers 0, si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel, alors ce nombre est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en A d'abscisse a. Ce nombre s'appelle le nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$.

Le cours est poursuivi avec l'obtention des nombres dérivés des fonctions usuelles, l'équation de la tangente, les formules de dérivation pour ku et $u + v$, exprimées pour les nombres dérivés seulement, et jamais en terme de fonction dérivée.
On évoque le cas des tangentes verticales, et la fonction valeur absolue en 0.
Fin de la première partie du cours sur la dérivation en 1^{e}S.

Les commentaires :
Préalable : L'enseignant a assisté à la présentation du scénario Chorlay/Alory effectuée par Renaud Chorlay, dans le cadre du groupe « Analyse » de l'IREM de Paris.

Séance 1 :
La synthèse dictée évite volontairement le substantif « tangente ». L'objet n'étant pas encore défini, on se limite à l'emploi de l'adjectif « tangent », apposé aux droites.
Il pourrait être judicieux de placer le point A « à gauche » de l'origine, afin de pouvoir plaquer la figure 1 sur la figure 2 (dans le doc 1).
Les objectifs ont été atteints.
Remarque : l'étude des miroirs paraboliques sera reprise lors du cours sur le produit scalaire ; on montrera alors la convergence des rayons réfléchis. Ce sera l'occasion de revenir sur ce travail d'introduction de la notion de tangente.

Séance 2 :
Discussion fructueuse.
Un glissement de l'adjectif « tangente » dans l'expression « droite tangente » au substantif « la tangente » a eu lieu ; une petite partie de la classe seulement en est troublée (ceux qui se posent la question de l'unicité de la tangente).

Séance 3 :
Plutôt qu'un cours dialogué, faire une séance plus guidée (avec un document-cadre) nous semblerait une meilleure solution. Des exemples de calculs avec h négatif seraient pertinents.

Etrangement, les élèves acceptent d'utiliser l'expression « h négligeable », mais refusent d'utiliser « $h = 0$ ». L'enseignant s'était pourtant préparé à accepter cette dernière expression sans réserve.
L'erreur majeure fut l'introduction de la notation $f'(a) = \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]_{h\ négligeable}$ Cette notation a cristallisé trop tôt la réflexion des élèves, et en a bloqué certains. Pour l'enseignant, cette notation n'était rien d'autre qu'un résumé de ce qui avait été fait en classe ; une partie importante des élèves ne l'a pas vue ainsi.
Une formulation en langage naturel semble préférable. La démarche dynamique des approximations de plus en plus précises de $f'(a)$ mise en œuvre avec le élèves les conduit à des formulations du type : plus h est proche de 0, meilleure est l'approximation de $f'(a)$ par $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Retenir une telle formulation est possible dans la mesure où elle n'est pas présentée comme un résultat à mémoriser, mais comme une étape intermédiaire sur le chemin qui mène vers la définition de la tangente cherchée.

<u>Séance 4</u> :
A ce moment de travail, une synthèse était bienvenue. Les explications complémentaires ont permis de récupérer les élèves qui menaçaient de décrocher.
Comme pour la séance 3, l'introduction de notations qui bloquent la poursuite de la réflexion est une erreur. *Il n'est absolument pas nécessaire d'introduire la notation en termes de limite pour atteindre tous les objectifs de cette séquence*.
Si l'on souhaite donner un résultat à mémoriser (les élèves peuvent avoir besoin de résultats de ce type à ce moment du travail), on peut encadrer la phrase suivante :

> $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est une bonne approximation de $f'(a)$ quand h est assez proche de zéro ; on peut rendre cette approximation aussi précise que l'on veut en prenant h suffisamment proche de 0.

Mais alors, les élèves voudront savoir pourquoi leur formulation a été rejetée, au profit de celle-ci, et leurs demandes d'explications seront bien légitimes ! Y répondre sans les noyer n'est pas une mince affaire.

<u>Séance 5</u> :
Nous avons la salle info pour 1h seulement ; le TP poursuit donc de nombreux objectifs, trop peut-être. A l'issue de cette séance, plusieurs élèves sont désorientés ; il est temps d'arrêter la recherche, et de formuler des définitions pour stabiliser les connaissances. C'est donc ce qui est fait dans la séance suivante.
La troisième partie du TP pourrait être modifiée en donnant le tableau aux élèves (voir doc 6), limité à sa partie valide. Cependant, l'analyse de la défaillance du tableur est intéressante pour les élèves.

<u>Séance 6</u> :
Les connaissances sont fixées.
Il n'est pas souhaitable de s'arrêter là, pour plusieurs raisons :

- Dans le cas contraire, il resterait trop de choses à traiter sur la dérivation pour le faire en une seule fois ; mais découper ce chapitre en trois séquences est trop chronophage.
- La séquence formée par les 6 premières séances donne lieu à trop peu d'exercices différents ; les points à évaluer seraient trop limités.

- Le passage aux premières formules permet de consolider les acquis, et montre la pertinence du travail de réflexion sur les définitions. Cette consolidation ne doit pas être différée.
- Le découpage permet de mieux mettre en évidence le passage du nombre dérivé à la fonction dérivée.

III. Autres éléments autour de la dérivation en classe de première

1. Vers la fonction dérivée

a) Vrai/Faux ? Justifier

Renaud Chorlay

Vrai / Faux

Chacune des affirmations suivantes vous semble-t-elle vraie ou fausse ?
Si elle vous semble fausse, proposez un contre-exemple (par un graphique, une formule, un calcul … ou autre).

Pour chaque affirmation, on considère une fonction *f*, définie *et dérivable* sur ℝ. La fonction peut changer à chaque question.

		Vrai	Faux
1	Si *f* admet un maximum en 1, alors $f'(1) = 0$		
2	Si $f'(1) = 0$ alors *f* admet un maximum en 1		
3	Si $f(1)$ est supérieur ou égal à toutes les valeurs prises par *f* sur l'intervalle [-1 ; 3], alors $f'(1) = 0$		
4	Si $f'(1) = 0$ alors $f(1)$ est supérieur ou égal aux valeurs prises par *f* au voisinage de 1		
5	En un même point de la courbe de *f* il peut y avoir deux tangentes différentes.		
6	La courbe de *f* admet en tout point une tangente		
7	Si une droite D est tangente à la courbe de *f* en son point A d'abscisse 1, alors A est l'unique point d'intersection de D et de la courbe.		
8	Si une droite D est tangente à la courbe de *f* en son point A d'abscisse 1, alors la courbe de *f* demeure toujours soit au-dessus, soit en dessous de D.		
9	Si une droite D est tangente à la courbe de *f* en son point A d'abscisse 1, alors la courbe de *f* reste du même côté de D, au moins au voisinage de A.		
10	Soit *g* une autre fonction définie et dérivable sur ℝ. Si $f(2) = g(2)$ alors $f'(2) = g'(2)$.		
10'	Soit *g* une autre fonction définie et dérivable sur ℝ. On peut avoir $f(2) \neq g(2)$ et $f'(2) = g'(2)$.		
10''	Soit *g* une autre fonction définie et dérivable sur ℝ. Si $f(2) \neq g(2)$ alors $f'(2) \neq g'(2)$.		
11	Si *f* est croissante sur l'intervalle [0 ; 10], alors $f'(4)$ est positif		
12	Si *f* est croissante sur l'intervalle [0 ; 10], alors $f'(4)$ est négatif		
13	Si *f* est croissante sur l'intervalle [0 ; 10], alors $f'(0) \leq f'(10)$		
14	Si sur l'intervalle [0 ; 10] f' est positive, alors *f* est croissante sur [0 ; 10]		
14'	$f'(4)$ est strictement positif, alors *f* est croissante sur [0 ;10]		

15	Si sur l'intervalle [0 ; 10] *f'* est positive, alors *f* est positive sur [0 ; 10]		
16	Si sur l'intervalle [0 ; 10] *f'* est négatif, alors *f* est décroissante sur [0 ; 10]		
17	Si *f* est croissante sur [0,10], alors *f'* est croissante sur [0 ;10].		

On suppose *f* définie et dérivable au voisinage de +∞.

		Vrai	Faux
A	Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$		
B	Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ alors $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2$		
C	Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ alors $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$		
D	Si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$		

Vrai / Faux : document pour l'enseignant

Nous proposons une banque de « vrai/faux ? Justifiez » portant entièrement sur les liens entre f et f'. La banque est copieuse, il nous semble qu'on peut y puiser la matière de plusieurs travaux (séances en classe, exercices en classe ou en devoir-maison). Nous avons regroupé les items en quatre séries, pouvant être utilisées à des moments différents dans l'année de 1ère, voire en début de Terminale.

Pour les séances en classe sur les « vrai/faux ? Justifiez », nous imaginons le scénario suivant : après une phase de recherche individuelle, les élèves travaillent en petit groupe pour voir s'ils sont d'accord entre eux sur les Vrai/faux et discuter des mérites de leurs contre-exemples éventuels. Phase finale de mise en commun : les groupes se prononcent sur les alternatives Vrai/faux, proposent leurs contre-exemples, discutent ceux des autres ; le professeur répond aux questions et fait des mises au point.
L'enseignant doit insister pour qu'il y ait une trace écrite, la plupart de ces contre-exemples étant à connaître ; cet élément de règle du jeu est à expliciter. L'enseignant peut par exemple indiquer que des recherches de contre-exemples sur le même modèle seront évaluées au contrôle final. Autre dispositif : après avoir donnée une première fiche aux élèves pour le travail de recherche, une nouvelle fiche peut être donnée pour qu'une trace de la synthèse collective soit conservée au propre ; cette fiche est à considérer comme faisant partie du cours.

On demande ici aux élèves des tâches de nature variée :

- Analyse d'énoncés complexes, à la fois par leur structure logique (implications, réciproques), et par leur emploi des notions nouvelles (tangentes, nombre f')
- Recherche de contre-exemple. Cette recherche, et l'argumentation collective autour des exemples permet
    - De faire sortir des représentations erronées
    - De faire, lors de la correction, quelques mises au point relevant de la convention
    - D'apprendre aux élèves à intégrer la nouvelle couche de vocabulaire au sein du lexique relatif aux fonctions
    - De formuler des conjectures importantes, appelées à devenir des théorèmes de cours (souvent admis).

Comme dans tous les exercices de ce type, il faudra faire rappeler à un moment que les réponses ont des statuts épistémologiques différents : l'exhibition d'un contre-exemple prouve l'invalidité d'une affirmation universelle ; pour les affirmations jugées « vraies », on demeure au stade de la conjecture, à moins de pouvoir justifier par un résultat de cours. Le professeur peut choisir de faire établir une liste collective de conjectures importantes, sur lesquelles on reviendra plus tard (dans le même chapitre, ou plus tard dans l'année, ou en devoir-maison …).

1ère série:

		Vrai	Faux
1	Si *f* admet un maximum en 1, alors $f'(1) = 0$		
2	Si $f'(1) = 0$ alors *f* admet un maximum ou un minimum en 1		
3	Si $f(1)$ est supérieur ou égal à toutes les valeurs prises par *f* sur l'intervalle [-1 ; 3], alors $f'(1) = 0$		
4	Si $f'(1) = 0$ alors $f(1)$ est supérieur ou égal aux valeurs prises par *f* au voisinage de 1		

L'objectif est de conjecturer le lien entre extremum local et annulation de la dérivée (qu'on a intérêt à systématiquement reformuler en termes de tangente horizontale). Les termes « maximum local » et « minimum local » peuvent être introduits à cette occasion, sans être définis ; la fonction étant définie sur un ouvert, la notion intuitive suffit.
Pour l'item 1, rappelons que la fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Si on avait pu jouer sur le domaine de définition, on aurait fait apparaître d'autres phénomènes. Par exemple, la fonction définie sur [0,1] par $f(x) = 2x+1$ est bien dérivable en 1, et admet bien un maximum atteint en $x = 1$, pourtant le nombre $f'(1)$ n'est pas nul.
L'item 4 doit bien sûr servir à montrer que la réciproque de « extremum local $\Rightarrow$ annulation de f' » est fausse. Pour beaucoup d'élèves ce sera sans doute la première rencontre avec une tangente qui est « traversée » par la courbe, ce qui heurte la conception de la tangente issue des exemples usuels (cercle, fonctions du second degré). Il faut rappeler que le critère pour trancher est celui de l'indiscernabilité de la droite et de la courbe après zoom vers un point.

2ème série :

5	En un même point de la courbe de *f* il peut y avoir deux tangentes différentes.		
6	La courbe de *f* admet en tout point une tangente		
7	Si une droite D est tangente à la courbe de *f* en son point A d'abscisse 1, alors A est l'unique point d'intersection de D et de la courbe.		
8	Si une droite D est tangente à la courbe de *f* en son point A d'abscisse 1, alors la courbe de *f* demeure toujours soit au dessus, soit en dessous de D.		
9	Si une droite D est tangente à la courbe de *f* en son point A d'abscisse 1, alors la courbe de *f* reste du même côté de D, au moins au voisinage de A.		
10	Soit *g* une autre fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $f(2) = g(2)$ alors $f'(2) = g'(2)$.		
10'	Soit *g* une autre fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut avoir $f(2) \neq g(2)$ et $f'(2) = g'(2)$.		
10''	Soit *g* une autre fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $f(2) \neq g(2)$ alors $f'(2) \neq g'(2)$.		

L'item 5 doit conduire les élèves à se poser la question des points anguleux. Ici encore, le critère d'indiscernabilité après zoom conduit à dire que la courbe n'y admet pas de tangente, et donc qu'on ne peut définir de nombre f'. On peut introduire les termes « tangente à gauche » et « tangente à droite ». Parmi les fonctions de référence étudiées en Première S, il y

a la racine carrée (tangente verticale à l'origine) et la valeur absolue. Cela règle du même coup la question de l'item 6. Ceci étant, une hypothèse de dérivabilité a été donnée en début de feuille d'exercice ; on peut donc ici répondre que ces pathologies remarquables ne peuvent se présenter sous les hypothèses ici en vigueur.
Remarque : la rencontre avec les points anguleux peut amener les élèves à penser que les fonctions sont dérivables, sauf éventuellement en des points isolés. Il est sans doute prématuré de vouloir les détromper ; si on le souhaite, on peut mentionner le fait qu'on peut prouver l'existence de fonctions (mais dont on ne peut pas tracer les courbes) dont l'ensemble des points de non dérivabilité est dense, voir coïncide avec le domaine de définition. Ces exemples seront rencontrés (peut-être !) dans l'enseignement supérieur.
On peut motiver la question de la dérivabilité en présentant des cas pathologiques. Par exemple, la courbe de $x \rightarrow x^2 + 0.001 \times |\sin(10000 \times \cos(100x))|$ a l'air bien lisse, vue de loin, mais pleine de points anguleux lorsqu'on zoome.
Les item 7, 8 et 9 servent à insister sur l'aspect local du renseignement apporté par la connaissance d'une tangente, et à revenir sur le cas de la courbe traversant sa tangente (voir item 4).
A l'item 7, on verra peut-être que certains élèves entendent par « intersection » le fait de couper ; il faut rappeler que le sens conventionnel dans le cours de mathématiques s'éloigne du sens usuel (carrefour routier), « point d'intersection » désignant ici tout point « commun » aux deux courbes. On peut, si on le souhaite, préciser qu'en mathématique une intersection sans tangence est dite « transverse ».
L'item 10 est destiné à lutter contre certains automatismes, d'ailleurs bien explicables : il était fondamental de comprendre au collège que lorsqu'on appliquait la même opération aux deux membres d'une égalité, on obtenait des résultats égaux. La dérivation semble violer ce principe fondamental des mathématiques. Pour comprendre pourquoi on est conduit à distinguer l'égalité de deux nombres (telle que $f(2) = g(2)$) et l'égalité de deux fonctions (ou l'égalité au voisinage de 2). On pourra chercher des contre-exemples

- Avec des formules, par exemple $f(x) = 2$ et $f(x) = x$
- Sous forme géométrique : en un point d'intersection, deux courbes n'ont pas nécessairement la même tangente.

Les contre-exemples des deux types sont extrêmement précieux, il serait bon d'inclure les deux dans le bilan, quoiqu'aient trouvé les élèves.
Les items 10' et 10'' sont des variantes l'un de l'autre, au sens où la même figure prouve que 10' est vraie et 10'' fausse ; la différence réside dans la structure logique de l'énoncé, et donc dans la stratégie logique de validation ou d'invalidation.

Série 3 :

11	Si f est croissante sur l'intervalle [0 ; 10], alors $f'(4)$ est positif		
12	Si f est croissante sur l'intervalle [0 ; 10], alors $f'(4)$ est négatif		
13	Si f est croissante sur l'intervalle [0 ; 10], alors $f'(0) \leq f'(10)$		
14	Si sur l'intervalle [0 ; 10] f' est positive, alors f est croissante sur [0 ; 10]		
14'	$f'(4)$ est strictement positif, alors f est croissante sur [0 ;10]		
15	Si sur l'intervalle [0 ; 10] f' est positive, alors f est positive sur [0 ; 10]		
16	Si sur l'intervalle [0 ; 10] f' est négatif, alors f est décroissante sur [0 ; 10]		
17	Si f est croissante sur [0,10], alors f' est croissante sur [0 ;10].		

Cette série demande sans doute une plus grande maturité, et peut être traitée plus tard. Elle demande en effet de prendre en compte des phénomènes demandant (implicitement) des quantifications universelles (simples : « la fonction est positive sur l'intervalle », ou doubles : « la fonction est croissante sur l'intervalle »), et un début de prise en compte de la fonction dérivée.

Item 11 et 12. Quand tout le monde sera d'accord sur le fait que ça a l'air vrai, le professeur pourra demander si le nombre 4 joue ici un rôle particulier. On pourra s'accorder sur le fait qu'il semble bien (mais on n'en a pas la preuve) que si « Si f est croissante sur l'intervalle [0 ; 10], alors les valeurs f' sont positives sur cet intervalle ». Un dispositif de visualisation collectif d'un logiciel grapheur permet de renforcer l'image mentale « fonction croissante, tangentes penchées vers le haut » ; on peut laisser les élèves dire de telles choses, même si le professeur parle plutôt de « droites de coefficients directeurs positifs » ou de « nombres dérivés positifs ».
La comparaison des item 14 et 14' peut permettre de revenir sur la différence entre énoncé portant sur tout un intervalle et énoncé portant sur un unique point. On pourrait être tenté de conjecturer que « $f'(4) > 0$ » alors f est croissante au voisinage de 4 ; cela peut malheureusement s'avérer faux si la dérivée n'est pas continue en 0. La conjecture demeure cependant intéressante, ne serait-ce que parce que sa formulation amène à expliciter son caractère local.
L'item 17 permet d'invalider une dernière conception erronée des liens entre les fonctions f et f'. L'exhibition d'un contre-exemple demande au élève d'associer la décroissance de f' (pour une dérivée positive) au fait que les tangentes sont « de moins en moins penchées », ou « vont vers l'horizontale ». Si les contre-exemples graphiques nous sembles plus riches, on doit bien entendu accepter la validité de contre-exemples analytiques, ne serait-ce que celui de la fonction racine carrée (ou, pour que la fonction soit réellement dérivable sur [0 ;10], de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$).

Pour aller plus loin …

Plus tard dans l'année (ou en Terminale), on pourra enrichir en s'appuyant sur l'idée intuitive de limite.

On suppose f définie et dérivable au voisinage de $+\infty$.

		Vrai	Faux
A	Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$		
B	Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ alors $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2$		
C	Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ alors $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$		
D	Si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$		

Item A : les recherche de contre-exemples graphiques risquent de ne pas être très convaincantes. On peut plutôt ici penser à la fonction racine carrée, ou à $x \mapsto x + \sin x$.
Item B et C : certains élèves diront sans doute que B est faux, parce qu'en dérivant 2 on doit trouver 0 ; ils ont donc raison mais pour une mauvaise raison (pas d'interversion de la limite et de la dérivation). On trouvera par contre des contre-exemples graphiques à B et C avec des oscillations. Le professeur pourra exhiber $2 + \frac{\cos(x^2)}{x}$ (qu'on ne sait toutefois pas dériver en Première).
Item D : c'est vrai, mais pas prouvable en 1ère. Des élèves pourraient tenter le raisonnement suivant : « la dérivée tendant vers 1, elle finit par devenir positive, la fonction f finit donc par

devenir croissante sur un intervalle du type [A ; +∞[, elle tend donc vers +∞ en +∞ » ; la dernière implication est cependant fausse, et l'on peut utilement chercher des contre-exemples. Un argument de terminale (ou de L1) serait : il existe un intervalle [A ; +∞ [sur lequel *f'* > 0.5, or sur cet intervalle $f(x) = f(A) + \int_A^x f'(x)dx \geq f(A) + \frac{1}{2}(x - A)$, et le membre de droite de l'inégalité tend vers +∞ avec *x*.

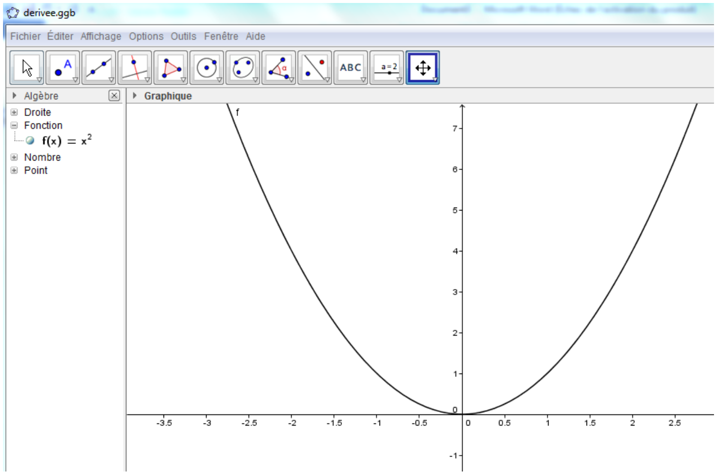
b) Passage du nombre dérivé à la fonction dérivée à l'aide du logiciel *GeoGebra*

Charlotte Derouet

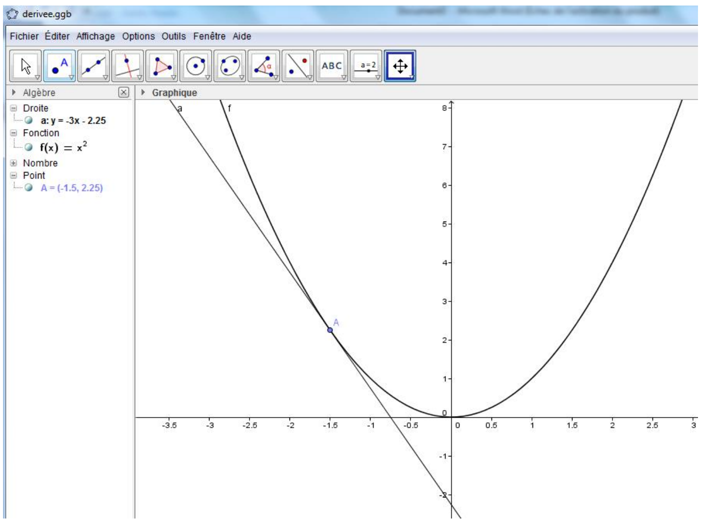
Nous vous présentons ici une activité *GeoGebra* pour passer de la notion de nombre dérivé à la notion de fonction dérivée. Il s'agit, en partant de la courbe d'une fonction, de tracer la fonction dérivée associée. Pour cela, il s'agit d'associer à chaque abscisse x_A de la courbe le nombre dérivé en x_A. Puis grâce, à l'option « Trace », la fonction dérivée va apparaître.

Voici un exemple, avec la fonction carré.

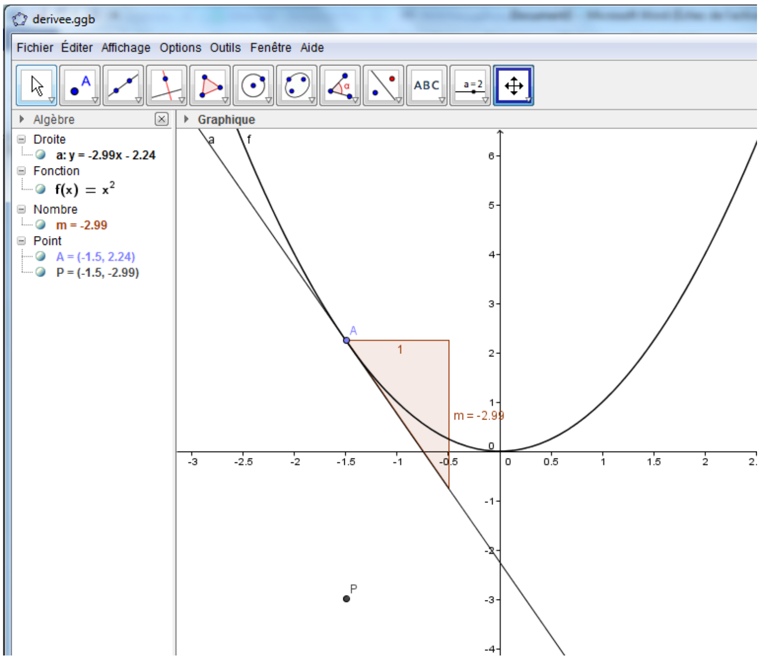
Etape 1 : Tracer, sur *GeoGebra*, la fonction f (ici f est la fonction carré).



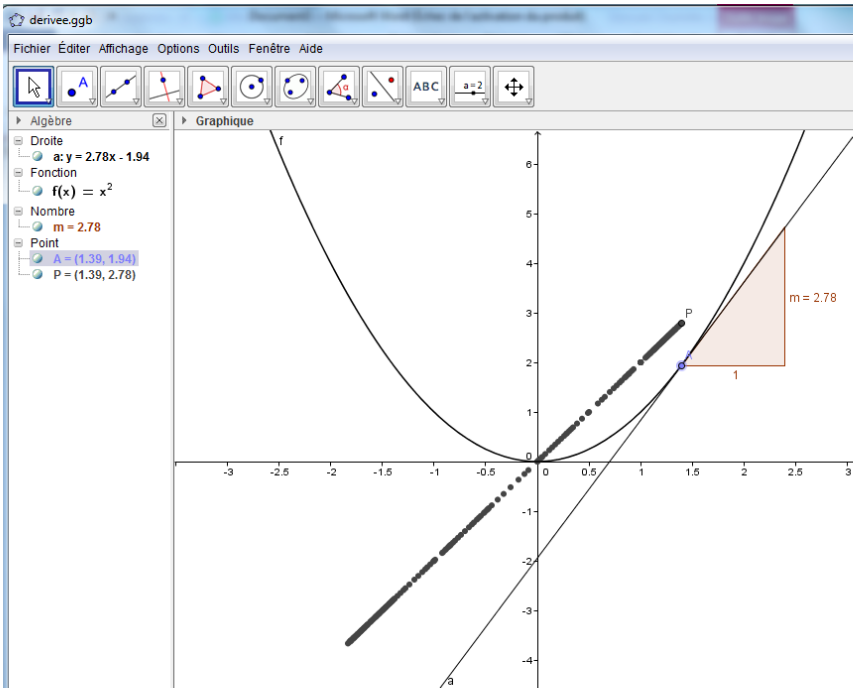
Etape 2 : Placer un point A sur la courbe de f. Puis, à l'aide de l'option « Tangentes », tracer la tangente à la courbe de f au point A.



Etape 3 : Nommer m le coefficient directeur de la tangente (m=pente de a). Puis définir le point P d'abscisse x_A et d'ordonnée m. Pour cela, il faut taper $P = (x(A), m)$. Remarque : m est le nombre dérivé de f en x_A.



Etape 4 : Il s'agit maintenant de déplacer le point A. Le point P va alors lui aussi se déplacer. Il faut alors activer le mode « Trace activée » du point P et la fonction dérivée de f va alors apparaître.



Cette activité permet la construction progressive de la fonction dérivée : la fonction qui à chaque abscisse associe le nombre dérivé de la fonction au point d'abscisse en question.

2. Trois thèmes de travail intégrant une dimension historique

Renaud Chorlay

a) Thème de travail : les droites tangentes à un cercle

Séance 1 : définition et propriété caractéristique, dans les *Eléments* d'Euclide[3].

1. Vous connaissez depuis le Collège la notion de droite tangente à un cercle. Pouvez-vous en donner la définition ?

Au début du livre III des *Eléments* d'Euclide (rédigé autour de 300 avant notre ère), on trouve la définition suivante:
Une droite qui touchant le cercle et qui étant prolongée ne le coupe point, est appelée tangente au cercle.

2. En utilisant vos propres mots ou des schémas, pouvez reformuler cette définition ? En particulier la distinction entre « toucher » et « couper ».

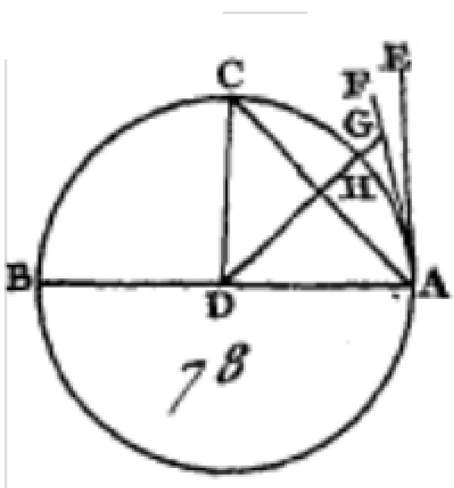
Dans le même livre III, il est démontré en proposition n°16:
Une droite perpendiculaire au diamètre d'un cercle et menée par une de ses extrémités, tombe hors de ce cercle ; il est impossible qu'il y ait une droite dans l'espace qui est compris entre cette perpendiculaire et la circonférence. [4]

Voici la démonstration de la première partie de la proposition :

Soit le cercle ABC (fig. 78) dont le point D est le centre et la droite AB le diamètre : je dis que la perpendiculaire à la droite AB, menée par le point A, tombe hors du cercle.

Car si cela n'est point ; supposons s'il est possible, qu'elle tombe en-dedans et qu'elle ait la position AC ; conduisez la droite DC.

Puisque la droite DA est égale à la droite DC, l'angle DAC sera égal à l'angle ACD (prop. 5. 1) ; mais l'angle DAC est droit : donc l'angle ACD est droit aussi : donc les angles DAC, ACD sont égaux à deux angles droits, ce qui est impossible (prop. 17. 1) : donc la perpendiculaire au diamètre AB, menée par le point A ne tombe point dans le cercle. Nous démontrerons de la même manière qu'elle ne tombe point sur la circonférence : donc il est nécessaire qu'elle tombe en-dehors, et qu'elle ait une position comme la droite AE.



[3] Source : *Les éléments de géométrie d'Euclide, traduits par F. Peyrard*, Paris : chez F. Louis, an XII – 1804. Il s'agit d'une traduction des 6 premiers des 13 livres des *Eléments* d'Euclide, ceux portant sur la géométrie plane. Disponible en ligne sur Gallica : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110982q.r=.langFR

[4] p. 141 et suiv.

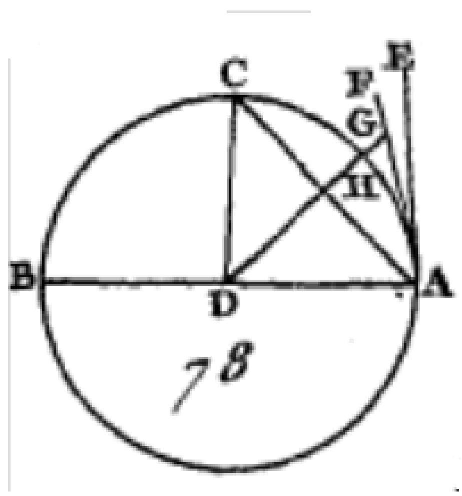
3. a. Refaire la figure en ne traçant que les éléments nécessaires à cette partie de la démonstration.
   b. Le raisonnement utilise des propositions ou théorèmes démontrés plus haut : la proposition 5 du livre 1, et la proposition 17 du livre 1. Proposez un énoncé équivalent à ces propositions.
   c. En quoi cette démonstration est-elle une démonstration *par l'absurde* ?

Voici la démonstration de la deuxième partie de la proposition (nous redonnons la figure) :

Je dis qu'il est impossible qu'il y ait une droite dans l'espace qui est compris entre la droite AE et la circonférence CHA.

Car si cela est possible, supposons qu'il y ait une droite qui ait la position FA ; du point D menez une droite DG perpendiculaire à FA.

Puisque l'angle AGD est droit et que l'angle DAG est plus petit qu'un angle droit, la droite AD sera plus grande que la droite DG ; mais la droite DA est égale à la droite DH : donc la droite DH est plus grande que la droite AG, c'est-à-dire que la plus petite surpasse la plus grande, ce qui est impossible : donc il est impossible qu'il y ait une droite dans l'espace qui est compris entre cette perpendiculaire et la circonférence.



4. a. La figure semble mal faite, est-ce dû à une maladresse de l'auteur, ou de l'imprimeur ?

   b. Au cœur du raisonnement on trouve l'argument « Puisque l'angle AGD est droit … la droite AD sera plus grande que la droite DG ». Euclide utilise ici une proposition très intuitive et qu'il a démontré au livre I (prop. I.18), mais que vous n'avez pas apprise au Collège. Cette proposition relie, dans les triangles, l'ordre entre les angles et l'ordre entre les côtés. Pouvez-vous proposez un énoncé de cette proposition.
   c. En quoi peut-on dire que la proposition III.16 est un théorème d'*existence* et d'*unicité* ?

Séance 2 : la propriété de l'angle à la tangente, selon Clairaut (1713-1765)[5].

On se donne un cercle **C** de centre O et une corde [AB] de ce cercle (qui ne soit pas un diamètre). Soit E un troisième point du cercle, tracer le triangle ABE.

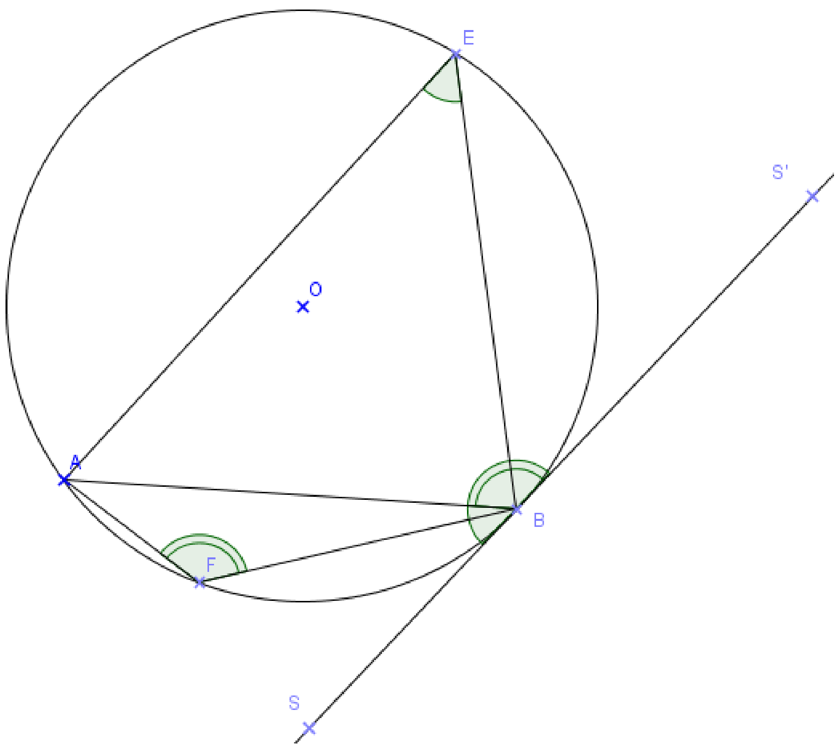
1. a. Pouvez-vous rappeler le théorème vu au collège sous le nom de « théorème de l'angle inscrit ».

   b. Créer un fichier *GeoGebra* permettant d'illustrer le théorème de l'angle inscrit.
   c. Dans le cas particulier où [AB] est un diamètre, quel résultat bien connu retrouve-t-on ?

Supposons ce théorème démontré. Plus loin dans le livre III, Euclide énonce un autre théorème relatif aux tangentes (proposition 32) [6] :

Si une droite touche la circonférence d'un cercle, et si du point de contact on conduit une corde, les angles que cette corde fait avec la tangente seront égaux aux angles qui sont placés dans les segmens alternes du cercle.

On peut illustrer cet énoncé par la figure suivante :



Dans cette figure, la droite (SB) est tangente au cercle en B.

[5] Alexis Clairaut, *Eléments de Géométrie, nouvelle édition mise en accord avec le système décimal par M. Honoré Regodt*, Paris : Jules Delalain, 1853. Disponible sur Internet Archive. Première édition 1741.
[6] p. 164

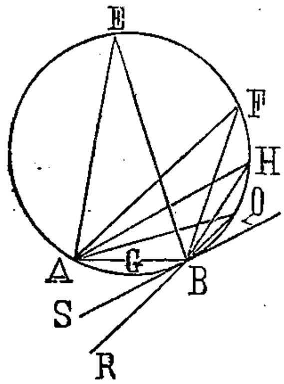
Euclide donne de cette proposition une démonstration indépendante du théorème de l'angle inscrit. En revanche, dans ses *Eléments de géométrie*, Alexis Clairaut montre comment ce théorème sur l'angle entre une corde et une tangente peut se déduire du théorème de l'angle inscrit.

Voici son énoncé et son raisonnement :

La tangente au cercle est la ligne qui ne le touche qu'en un point. L'angle au segment est celui qui est fait par la corde et par la tangente. Sa mesure est la moitié de l'arc du segment.

Après avoir vu que dans un même segment les angles AEB, AFB et AHB (*fig.* 87), supposés à la circonférence, sont tous égaux, on est tenté de chercher ce que devient l'angle AQB lorsque son sommet se confond avec le point B, extrémité de la base AB. Cet angle s'évanouirait-il alors? Mais il ne paraît pas possible que, sans s'être resserré par degrés, il vienne tout à coup à s'anéantir. On ne voit pas quel serait le point au delà duquel cet angle cesserait d'exister; comment donc parviendra-t-on à en trouver la mesure? c'est une difficulté qu'on ne peut résoudre sans recourir à la géométrie de l'infini, dont tous les hommes ont au moins une idée imparfaite qu'il ne s'agit que de développer.

Fig. 87.



Observons d'abord que quand le point E s'approche de B, en devenant F, H, Q, etc., la droite EB diminue continuellement, et que l'angle EBA qu'elle fait avec la droite AB augmente de plus en plus. Mais, quelque courte que devienne la ligne QB, l'angle QBA n'en sera pas moins un angle, puisque pour le rendre sensible il ne faudrait que prolonger la ligne diminuée QB vers R. En doit-il être de même lorsque la ligne QB, à force de diminuer, s'est réduite enfin à zéro? qu'est devenue alors sa position? qu'est devenu son prolongement?

Il est évident qu'il n'est autre chose que la droite BS qui touche le cercle en un seul point B, sans le rencontrer en aucun autre endroit, et que, pour cette raison, on appelle *tangente*.

De plus, il est clair que pendant que la ligne EB diminue continuellement jusqu'à s'anéantir à la fin, la droite AE, qui devient successivement AF, AH et AQ, etc., s'approche toujours de AB, et qu'elle se confond enfin avec elle : donc l'angle à la circonférence AEB, après être devenu AFB, AHB et AQB, devient en dernier lieu l'angle ABS, fait par la corde AB et par la tangente BS ; et cet angle, qu'on appelle *angle au segment*, doit toujours conserver la propriété d'avoir pour mesure la moitié de l'arc AGB.

Quoique cette démonstration soit peut-être un peu abstraite pour les commençants, j'ai cru à propos de la donner, parce qu'il sera très-utile à ceux qui voudront pousser leurs études jusqu'à la géométrie de l'infini de s'être accoutumés de bonne heure à de pareilles considérations.

2. a. En complétant votre fichier *Geogebra*, illustrez le raisonnement de Clairaut en utilisant le fait que le point E est mobile.
   b. Le texte de Clairaut vous semble-t-il constituer une *démonstration* de la propriété ?
   c. Dans son raisonnement, Clairaut n'utilise jamais le lien entre tangentes et perpendiculaires au rayon. Quels sont les deux aspects de la tangente à un cercle qu'il mentionne ou utilise ?
   d. La notion de tangente utilisée par Clairaut est-elle proche de celle étudiée en classe dans le cours sur les tangentes aux courbes représentant des fonctions ?
   e. Clairaut écrit que son raisonnement permet d'habituer les débutants à la « géométrie de l'infini ». A votre avis, parle-t-il de l'infiniment petit ou de l'infiniment grand ?

Fiche pédagogique

L'objectif est de faire le lien entre la notion de tangente à un cercle – rencontrée au collège –, et la notion plus générale de tangente à une courbe rencontrée au Lycée.
En classe de première, ces séances de type « analyse de texte », « débat scientifique sur la notion de démonstration » peuvent trouver leur place en Accompagnement personnalisé (AP).
Ce travail peut être placé avant ou après la séquence d'introduction à la dérivation. Elle peut donc soit préparer le terrain, soit faire écho dans un cadre différent (1) à l'idée que la notion de tangente n'est pas fondamentalement liée à celle de « perpendiculaire au rayon », (2) à l'idée que la notion de position limite de droites passant par un point laissé fixe et un point mobile – quoiqu'apparemment peu rigoureuse – peut se révéler unificatrice. Dans la séance 2, nous avons toutefois opté pour une rédaction de la question *d* qui suppose que l'introduction à la dérivation a été commencée ; dans le cas contraire, la question est aisée à modifier.

Séance 1 :

- On y montre que le lien entre tangente et perpendiculaire au rayon est une propriété démontrable et non la définition de la tangente au cercle.
- Le travail demandé est un travail d'analyse d'énoncés de théorèmes et de textes de démonstration.
  On y procède en demandant des reformulations ou des explicitations.
  En particulier, on considère qu'en classe de Première il est bon que les élèves se familiarisent avec les notions (et les termes) de *démonstration par l'absurde*, de *théorème d'existence* et de *théorème d'unicité*.
- On pourra signaler au passage qu'en français, on a longtemps appelé « touchante » la droite que nous disons aujourd'hui « tangente » ; il s'agit bien du même verbe latin *tangere*).

Pour information, la proposition 18 du livre I des *Eléments* dit:

Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle.

Autrement dit, l'ordre entre les angles est le même que l'ordre entre les côtés opposés (en particulier : le plus grand côté est celui qui est en face du plus grand angle). On peut aussi le formuler en termes de mesures, si on s'est fixé des unités.

De même, la proposition 17 du livre I dit :

Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Séance 2 :

Question 2b : comme dans la première partie, la tâche dévolue aux élèves consiste à analyser et évaluer un texte argumentatif portant sur un contenu mathématique. Ce type de travail est à mener en classe, et invite au débat scientifique ; la forme du devoir-maison nous semble impropre, à moins qu'un large temps de discussion ne soit prévu lors de la correction, et que la règle du jeu (les attentes) ne soit explicitée en amont.
On peut ici convenir que Clairaut s'écarte sensiblement du modèle de la démonstration géométrique :

- Par son recours au mouvement
- Il obtient la conclusion par un simple « il est évident que » plutôt qu'en s'appuyant sur des résultats démontrés précédemment et les règles de la logique usuelle.
- Il s'appuie sur l'« évidence » d'une conservation par passage à une position limite lors d'un mouvement.
- Le style très rhétorique (avec ses nombreuses questions) montre que l'objectif de Clairaut est de faire sentir quelle est la question, et de donner une intuition de la réponse, plus que de démontrer.

Question 2c. La tangente est

- Définie comme une droite ayant avec le cercle un unique point d'intersection (on trouve cette définition dans l'énoncé de la proposition).
- Vue comme la position limite d'une corde, lorsque l'une des extrémités se rapproche de l'autre d'aussi près qu'on veut.

Question 2d :

- La notion de tangente comme « perpendiculaire au rayon » ne s'étend pas aux autres courbes que le cercle ; on a vu qu'elle n'était d'ailleurs pas la définition, même dans le cas élémentaire du cercle.
- La notion de tangente comme droite n'ayant qu'un unique point d'intersection avec la courbe est plus générale, mais n'est pas satisfaisante (on aura rencontré ces cas dans la séquence d'introduction à la dérivation : courbe de la fonction cube, de la fonction *sinus* …).
- La notion de tangente comme position limite de droites passant par deux points de la courbe, l'un fixe, l'autre glissant vers le premier, semble la plus générale, quoique la plus « floue ».

Question 2e : le texte parle de points devenant infiniment proches l'un de l'autre, de segments dont la longueur tend vers zéro (i.e. devient infiniment petite) ; il s'agit donc ici de raisonnements sur l'infiniment petit et non sur l'infiniment grand.

b) Thème de travail : approximation de racines carrées par une méthode babylonienne

Moment n°1

On trouve dans des tablettes d'argiles paléo-babyloniennes (entre 2100 et 1600 avant notre ère) une technique pour trouver une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif. On peut la reformuler comme suit :

Pour trouver la racine carrée de *N*, chercher le plus grand nombre entier *B* dont le carré soit inférieur à *N*. On a alors $N = B^2 + A$. Une valeur approchée est alors donnée par $\sqrt{N} = \sqrt{B^2 + A} \approx B + \frac{A}{2B}$

1. Quelles sont les valeurs obtenues par cette méthode pour
$$\sqrt{104} \qquad \sqrt{4{,}5} \qquad \sqrt{10} \qquad \sqrt{81} \quad ?$$
2. Que se passe-t-il lorsque *N* est exactement le carré d'un nombre entier ?
3. On sait que des valeurs approchées peuvent être par excès ou par défaut.
   a. Dans les exemples de la question 1, les valeurs obtenues sont-elles approchées par excès ou par défaut ? Peut-on répondre sans utiliser la touche « racine carrée » de la calculatrice ?
   b. Calculer le carré de $B + \frac{A}{2B}$. Cela permet-il de généraliser la remarque précédente ?
4. On cherche à écrire un algorithme permettant d'obtenir l'approximation babylonienne de la racine carrée d'un nombre entier choisi par l'utilisateur.
   a. Dans la première partie de l'algorithme, correspondant à la recherche du *B*, la boucle sera-t-elle du type « POUR » ou du type « TANT QUE » ? Pourquoi ?
   b. Ecrire et programmer cet algorithme. Vérifier qu'il donne les résultats trouvés à la main à la question 1, ou pour des carrés d'entiers.
5. On va établir des liens entre la méthode babylonienne et la formule d'approximation suivante :

   (formule T) Si a est proche de zéro, alors $\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}$

   a. En interprétant « proche de zéro » comme « appartenant à l'intervalle [0 ; 1] », vérifier que la formule T s'obtient par une application de l'algorithme babylonien.
   b. En interprétant « proche de zéro » de la même manière, montrer que dans l'algorithme babylonien, $\frac{A}{B^2}$ est « proche de zéro » lorsque *B* dépasse 2.
   c. Dans ces conditions, factorisez par B^2, et vérifiez que la formule babylonienne peut être vue comme un cas particulier de la formule T.

Moment n°2

Dans la suite du travail, on va identifier deux idées qui pourraient conduire à « trouver » l'algorithme babylonien ou la formule T.

6. Dans les tablettes babyloniennes, on ne trouve pas d'argument expliquant l'origine de l'algorithme. Les historiens des sciences David Fowler et Eleanor Robson ont proposé un raisonnement sur des aires et des longueurs, dont ils estiment qu'il a pu être à l'origine de l'algorithme babylonien.
    a. Jusqu'à présent nous étudiions un problème numérique, à savoir « trouver la racine carrée d'un nombre positif » ; pouvez-vous reformuler ce problème en termes géométrique, en raisonnant sur l'aire d'un carré ?

    Voici un extrait de l'article de Fowler et Robson[7]:

(…) pour aider le lecteur, nous utiliserons des noms en minuscule tels que « *approx* », « *nouvelle approx* » pour les longueurs, et des noms en majuscule tels que « *Nombre* » et « *Reste* » pour les aires.

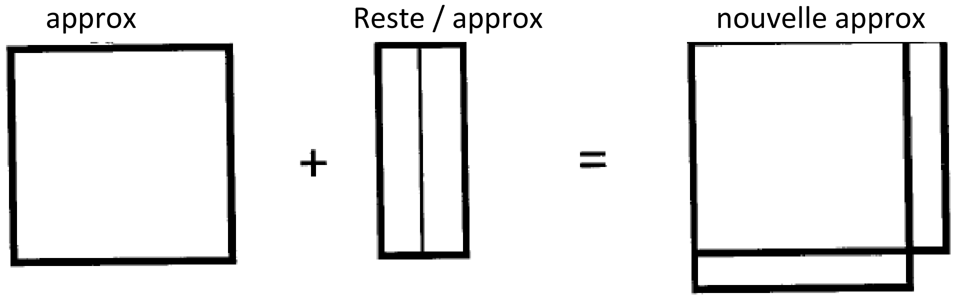


Figure 2

Supposons que nous voulions évaluer le « côté d'un Nombre » (notre racine carrée). Nous partons d'une valeur approchée ; regardons d'abord le cas où elle approche par défaut, d'où

Nombre = Carré d'approx + Reste

ce qui peut être représenté géométriquement comme la somme d'un carré de côté *approx* et d'un *Reste* en plus. Exprimons maintenant ce *Reste* comme un rectangle dont l'un des côtés est *approx*, l'autre étant donc *Reste / approx* (ou, dans le style babylonien : *Reste* × inverse d'*approx*). Coupons-le en deux dans la longueur, et accolons les deux moitiés sur deux côtés adjacents de *Carré d'approx*, comme sur la figure 2. Donc

nouvelle approx = approx + *moitié de Reste* × *inverse d'approx*

ce qui donne clairement une valeur par excès, à cause du petit coin perdu.

    b. Reprendre les figures proposées par Fowler et Robson pour illustrer le cas $N = 104 = 10^2 + 4$

[7] D. Fowler & E. Robson, *Square Root Approximation in Old Babylonian Mathematics : YBC 7289 in Context*, Historia Mathematica n°25 (1998), p.366-375. Extrait p.370-371 (traduction libre R. Chorlay).

c. Reprendre les figures proposées par Fowler et Robson, en codant avec les longueurs et les aires avec les lettres *B*, *A* et *N*.
d. Expliquez la remarque « ce qui donne clairement une valeur par excès, à cause du petit coin perdu », et retrouvez le résultat de la question 3b.

Moment n°3

7. On a vu que l'algorithme babylonien était largement équivalent à la formule T. On va montrer qu'on peut avoir l'idée de cette dernière formule en étudiant la courbe de la fonction racine carrée.

   Soit donc la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On nomme C sa courbe représentative.

   a. Par la méthode de votre choix, déterminer le nombre $f'(1)$.
   b. En déduire que la droite tangente à C au point d'abscisse 1 a pour équation
   $$y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1$$
   c. Pour quelles valeurs de *x* la formule suivante vous semble-t-elle intéressante, et en quoi ?
   $$\sqrt{x} \approx \frac{1}{2}(x - 1) + 1$$
   d. On pose $x = 1 + a$. Comment s'écrit la formule précédente si l'on utilise *a* comme indéterminée, plutôt que *x* ? Pour quelles valeurs de *a* cette formule est-elle intéressante ?
   e. La formule T et l'algorithme babyloniens donnent des valeurs approchées par excès. Pouvait-on le conjecturer par lecture graphique ?
   f. On pourrait imaginer toute une série de formules d'approximation du même type que la formule T, par exemple

   Si a est proche de zéro, alors $\sqrt{1 + a} \approx 1 + \frac{a}{3}$
   Si a est proche de zéro, alors $\sqrt{1 + a} \approx 1 + 2a$
   Si a est proche de zéro, alors $\sqrt{1 + a} \approx 1 - \frac{a}{2}$

   Par simple lecture graphique, peut-on prévoir qu'elles donnent de moins bonnes approximations que la formule T ?

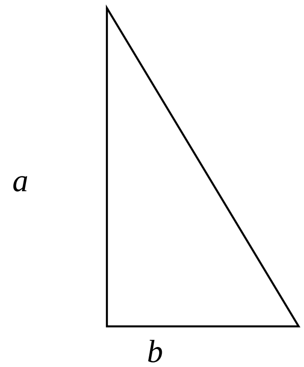
Annexe: un problème babylonien

Les tablettes BM 96957 et VAT 6598([8]) présentent une série de problèmes résolus. Voici la traduction de l'un d'eux[9].

Une porte, de hauteur ½ toise et 2 coudées, et de largeur 2 coudées. Quelle est la diagonale ? Toi : prend le carré de la largeur 0 ; 10. Tu verras 0 ; 01 40, la base. Prend l'inverse de 0 ; 40 (toises), la hauteur. Multiplie le par 0 ; 01 40, la base. Tu verras 0 ; 02 30. Partage 0 ; 02 30 en deux. Tu verras 0 ; 01 15. Ajoute 0 ; 01 15 à 0 ; 40, la hauteur. Tu verras 0 ; 41 15. La diagonale est 0 ; 41 15. C'est la méthode.

Guide de lecture :

Pour calculer la longueur de la diagonale d'un rectangle de côtés de longueurs *a* et *b* unités, en supposant *a* > *b*, le texte prescrit le calcul suivant :



$$\frac{\left(b^2 \times inverse(a)\right)}{2} + a$$

Ce qui revient à approcher une racine carrée par l'algorithme décrit plus haut (sans toutefois que l'approximation par défaut de départ ne soit donnée par le plus grand carré d'entier inférieur au nombre dont on cherche la racine) :

$$\text{Longueur de la diagonale} = \sqrt{a^2 + b^2} \approx a + \frac{b^2}{2a}.$$

Pour entrer dans le texte :

- Unités de longueur : 1 toise = 12 coudées (voir Fowler & Robson, p.369 note 8)
- Le système de numération est en base 60. Dans le système de transcription choisi ici, le point virgule marque la position des unités et les « chiffres » (de 0 à 59) sont séparés par un espace.

  Exemple : *0 ; 01 40* désigne le nombre $0 + \frac{1}{60} + \frac{40}{3600}$
- La largeur : 2 coudées = $\frac{2}{12}$ toise = $\frac{10}{60}$ toise = *0 ; 10* toise.
- $\left(\frac{10}{60}\right)^2 = \frac{100}{3600} = \frac{60+40}{3600} = \frac{60}{3600} + \frac{40}{3600} = \frac{1}{60} + \frac{40}{3600}$ = *0 ; 01 40*
- La hauteur est d'une demi toise et 2 coudées, donc de 6 + 2 = 8 coudées = $\frac{8}{12}$ toise = $\frac{40}{60}$ toise = *0 ; 40*.
- L'inverse de $\frac{40}{60}$ est $\frac{60}{40} = \frac{40+20}{40} = 1 + \frac{20}{40} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{30}{60}$ = *1 ; 30*

Le reste des calculs se vérifie sans problèmes. On peut utiliser la « calculatrice babylonienne » en référence plus bas.

Pour aller plus loin sur les mathématiques babyloniennes:

[8] Ce sont les cotes des tablettes, respectivement au *British Museum*, et au musée de Berlin (section : *Vorderasiatische Abteilung, Tontafeln*).

[9] Source: Fowler & Robson, *op. cit.*, p. 371-372. Traduction libre R. Chorlay.

Site Culturemath : http://www.math.ens.fr/culturemath/index.html
Calculatrice babylonienne : http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/calculator/scalc.html

Fiche pédagogique

Le thème « approximation de racine carrée » peut être un fil rouge en classe de Première. On fera sentir aux élèves que, quoique bien définie abstraitement, la détermination concrète de la valeur d'une racine carrée est un problème ardu.

Dans l'année, le travail sur la méthode babylonienne ne nous semble pas devoir être le premier rencontré sur le thème de l'approximation de racines carrées. On peut avoir déjà traité :

- La méthode de « balayage », ou par tableaux de valeurs enchâssés : la calculatrice donnant les tableaux de valeur de la fonction carré, on peut donner un encadrement d'amplitude 0,1 de $\sqrt{2}$, puis d'amplitude 0,01 etc.
- La méthode de dichotomie
- L'usage raisonné de l'encadrement entre des carrés d'entiers successifs. Après avoir écrit un algorithme qui encadre un nombre réel positif donné entre deux carrés d'entiers successifs, on peut travailler sur l'idée suivante :
  - $1 \leq 2 \leq 2^2$ donc $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$
  - $14^2 \leq 2 \times 100 \leq 15^2$ donc $14 \leq \sqrt{2} \times 10 \leq 15$, donc $1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}5$
  - $141^2 \leq 2 \times 10\,000 \leq 142^2$ donc $1{,}41 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}42$

  Cette astucieuse méthode élémentaire repose sur le même principe que le balayage avec des pas du type 10^{-n}, mais nous semble en différer suffisamment pour donner lieu à un travail autonome.
  Elle se généralise à l'approximation des racines de tout polynôme. On peut la voir exposée et illustrée dans le premier volume de la partie *Mathématiques* de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert[10] (1784-1789), p.99-100. On la trouve aussi, pour le cas de la racine carrée, dans le *Quadripartitum Numerorum* de Jean de Murs (ed. L'huillier, Paris, 1990, p.237-238).

Par ailleurs, d'autres heuristiques géométriques que celle proposée par Fowler et Robson peuvent conduire à la suite de Héron, dont le procédé babylonien représente la première étape. Pour une heuristique s'appuyant sur des rectangles, nous renvoyons le lecteur à : Marc Rogalski, *Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadre de Régine Douady*, in *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, Publication de l'IREM de Paris 7, 2002. En particulier p. 20-21.

Le présent travail poursuit dans la veine algorithmique, mais fait en outre le lien avec l'approximation affine locale donnée par le nombre dérivé. Il se place donc après le chapitre d'introduction à la dérivation ; en revanche, il ne demande pas de connaissance des formules usuelles de dérivation, ni même de prise en compte de la fonction dérivée.

[10] Disponible sur Gallica : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k61414059.r=.langFR

Le thème porte sur l'étude de deux « formules » d'approximation de racines carrées.

- Moment 1 : on présente les deux « formules », on les mets en œuvre à la main et en programmation algorithmique, on établit leur équivalence.
- Moment 2 : contrairement aux algorithmes évoqués en introduction (dichotomie etc.), dont la mise en œuvre est guidée et contrôlée par le *sens* des notions de carré et de racine carrée, les méthodes présentées au moment 1 semblent sortir de nulle part. Le moment 2 est consacré à l'étude d'un raisonnement géométrique pouvant conduire à la méthode babylonienne.
- Moment 3 : on montre que la formule d'approximation est la traduction numérique d'un phénomène géométrique, analysable en termes de recherche de tangente au point (1,1) de la courbe de la fonction racine carrée. On va jusqu'à l'idée de « meilleure approximation affine locale », qui n'a pas été explicitée dans le chapitre d'introduction à la dérivation.
- Nous donnons en Annexe la traduction d'un passage d'une tablette babylonienne, où l'on voit un algorithme d'approximation de racine carrée proche de celui évoqué dans le travail, utilisé dans un contexte géométrique (théorème dit de Pythagore). Ce texte ne nous semble pas utilisable en classe, en particulier du fait de l'usage du système sexagésimal. Il nous semble toutefois utile de le mettre à disposition de l'enseignant. Cela permet aussi de voir la différence entre les explications reconstituées par des historiens et les données archéologiques primaires.

Entrons dans quelques détails :

Moment 1

Question 1: On attend l'usage des décompositions $104 = 10^2 + 4$, $4{,}5 = 2^2+0{,}5$ …

L'enseignant pourra faire remarquer (éventuellement avant de demander l'utilisation de la méthode dite babylonienne) qu'on peut de tête donner des estimations de ces nombres, tout simplement en remarquant que $104 \approx 100 = 10^2$, $4{,}5 \approx 4 = 2^2$. La méthode babylonienne semble donc aller un peu au-delà de cette approximation grossière.

On fera expliciter que cette méthode, quoique seulement approchée, permet de trouver des valeurs en n'utilisant que des opérations élémentaires (sommes, divisions).

Question 3: pour contrôler la méthode, il semble bien naturel de comparer avec ce que donne l'usage de la touche « racine carrée » de la calculatrice. On ne voit pas pourquoi s'en priver, ne serait-ce que pour remarquer que la formule donne des approximations meilleures que l'estimation de tête, du type $\sqrt{104} \approx 10$. Il est cependant intéressant de voir qu'on peut se faire une idée de la qualité de l'approximation sans utiliser la touche « racine carrée », en comparant les carrés. Pus généralement, dans tous les travaux visant à mettre en œuvre une méthode d'approximation de racine carrée, on évitera d'utiliser les fonctions RAC ou SQR des langages de programmation, sous peine de vider l'entreprise de son sens.

Question 4 : les élèves ont souvent du mal à savoir s'il faut se lancer dans une boucle « POUR » ou dans une boucle « TANT QUE ». Ici, il faut se mettre d'accord sur le fait que la recherche de *B* demande un nombre d'étape qui dépend du nombre *N* entré par l'utilisateur, une boucle « POUR » (dont le nombre de répétition est fixé au moment de la programation) est donc d'emblée exclue. Dans l'algorithme on trouve toujours le petit piège usuel : il faut une petite ruse pour sortir B et non B+1.

Par exemple sous ALGOBOX :

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  approx EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Entrez le nombre dont voulez vous la racine carrée"
  LIRE N
  B PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (pow((B+1),2)<=N) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    B PREND_LA_VALEUR B+1
    FIN_TANT_QUE
  A PREND_LA_VALEUR N-pow(B,2)
  AFFICHER "La valeur approchée est : "
  approx PREND_LA_VALEUR B+A/(B*2)
  AFFICHER approx
FIN_ALGORITHME
```

Les questions 1-4 forment un bloc. La question 5, en revanche, peut-être traitée plus tard (séance suivante, devoir-maison …).

Question 5a : pour ces valeurs de a, c'est 1^2 qui est le plus grand carré d'entier inférieur à 1+a, la méthode babylonienne conduit donc au calcul $\sqrt{1+a} = \sqrt{1^2+a} = 1 + \frac{a}{2}$.

Question 5c : $\sqrt{B^2+A} = B \times \sqrt{1+\frac{A}{B^2}}$ car B est un nombre positif non nul

$\approx B \times \left(1+\frac{A}{2B^2}\right)$ par formule T, puisque $\frac{A}{2B^2}$ est entre 0 et 1

$= B + \frac{A}{2B}$ en développant.

La question 5b sert à justifier le caractère « petit » de $\frac{A}{2B^2}$. En effet, par construction, $N = B^2 + A$ est compris entre B^2 et $(B+1)^2$, donc $0 \leq A \leq 2B+1$, $0 \leq \frac{A}{2B^2} \leq \frac{1}{B} + \frac{1}{2B^2}$; le membre de droite est manifestement décroissant (B étant positif), et vaut déjà moins que 1 quand B = 2. On pourrait choisir de formuler la question 5b différemment ; ou la supprimer, au prix d'une petite entorse à la rigueur.

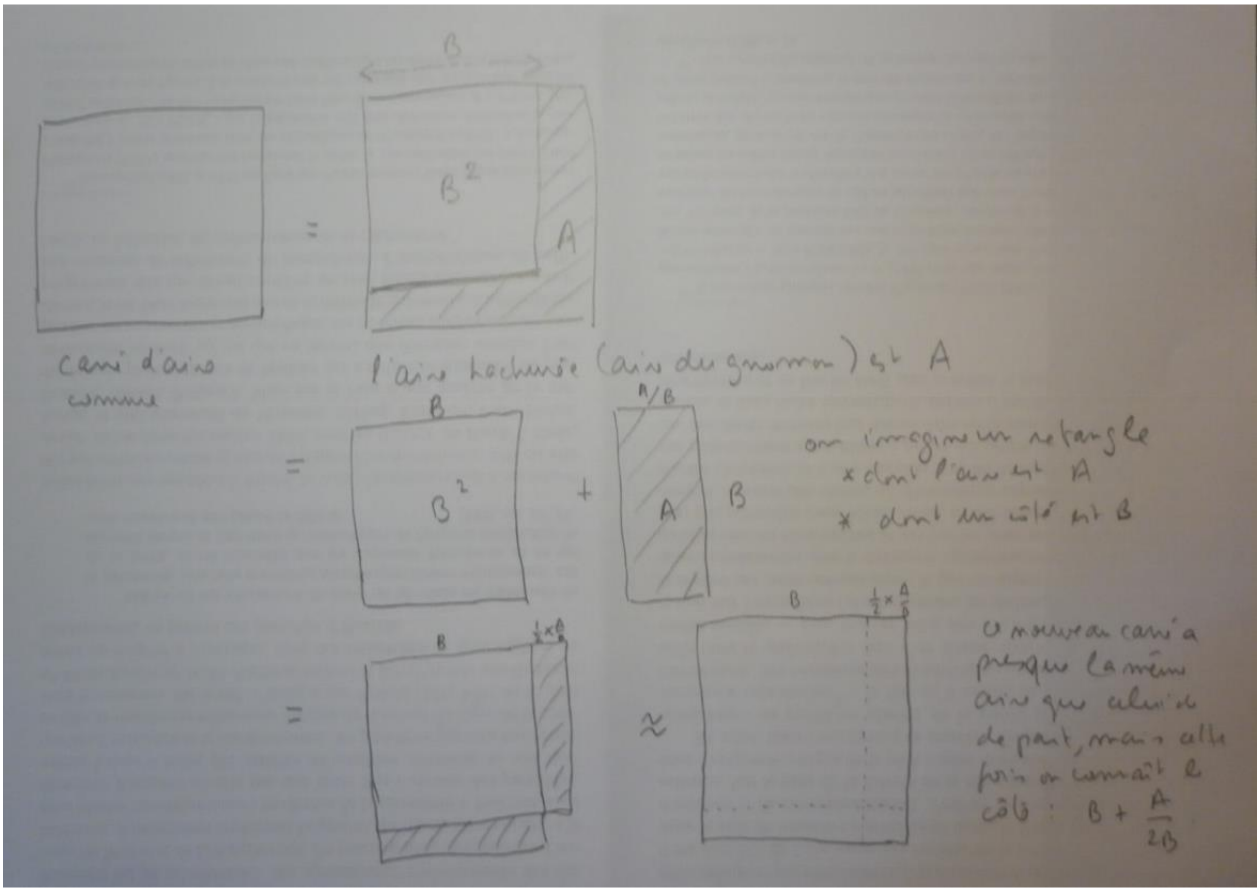
Moment 2 :

Ce travail nous semble riche, dans la mesure où il permet de revenir sur un mode de raisonnement géométrique que les élèves ont déjà pu rencontrer, soit au collège (analogue géométrique de la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, lorsque les nombres a et b sont positifs), soit au Lycée (travail sur la justification géométrique des algorithmes d'Al-Khwarizmi de résolution des équations du second degré).

Le travail est cependant assez difficile et un peu inhabituel ; il ne nous semble faisable que sous forme d'une activité dialoguée avec l'enseignant. Un jeu de questions-réponses est sans doute nécessaire pour le bon déroulement de la séance.

Question 6a : on peut chercher à faire consensus sur une réponse du type « on se donne un carré d'aire connue, on cherche la longueur de son côté ».

Les explications données par les historiens D. Fowler et E. Robson servent de point d'appui au raisonnement, mais on peut chercher à obtenir une explication du type suivant :



Moment 3 :

Ici nous avions deux possibilités pour faire le lien entre la formule T et la notion de tangente :

- Soit étudier la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction définie sur [-1 ; +∞ [par $f(x) = \sqrt{1+x}$.
- Soit étudier la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de la fonction définie sur [0 ; +∞ [par $f(x) = \sqrt{x}$.

Les deux nous semblent faisables et légitimes. Nous présentons ici une rédaction sur le second modèle, qui a l'avantage de rentre compte du fait que c'est fondamentalement la fonction racine carrée qu'on étudie ici, mais qui a l'inconvénient de nécessiter un petit changement de variable à la question d.

Question 7c : la formule donne une bonne valeur approchée de la racine carrée lorsque x est proche de 1, car c'est au voisinage du point d'abscisse 1 que les ordonnées sur la tangente sont proches des ordonnées sur la courbe : pour x proche de 1, $y_T \approx y_C$, autrement dit

$$\frac{1}{2}(x-1)+1 \approx \sqrt{x}$$

Question 7d : il faut impérativement faire écrire que $x = 1 + a$ équivaut à $a = x - 1$. Ce changement de variable ne pose pas de problème technique, mais il s'agit de bien comprendre qu'il y a équivalence entre « x proche de 1 » et « a proche de zéro ». On peut s'interroger sur la pertinence de ce changement de variable. Nous pensons qu'ici il reste de difficulté raisonnable, et qu'il est important que les élèves de Première rencontrent ce type de changement de variable, en vue de la Terminale. En effet, ils devront pouvoir travailler en Terminale en s'appuyant sur l'égalité (lorsque cette limite existe et est finie)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

Question 7f : on peut imaginer un traitement sous logiciel grapheur ou sous tableur ; il s'agit de constater l'analogue numérique de ce qui servait de point de départ à l'introduction de la notion géométrique de tangente à la courbe représentant une fonction ; à l'idée de droite qui approche le mieux possible la courbe correspond l'idée de meilleure approximation affine locale. Non seulement la méthode babylonienne ou, ce qui est équivalent, la « formule T » (T comme tangente T) remplacent un calcul qu'on ne sait pas faire (la racine carrée) par quelques calculs élémentaires, mais la formule T est la meilleure parmi celles d'un type très simple (fonction affine de a).

c) Thème de travail : une méthode itérative pour approcher les racines d'un polynôme

On va utiliser et chercher à rendre de compte d'une méthode de résolution d'équations polynômiales qu'on retrouve, entre autres, dans les *Elémens d'algèbre* de Léonard Euler (1707-1783)[11].

Découverte et mise en œuvre de la méthode

<u>Extrait 1 [12]</u>:

Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $xx = 20$.

On voit ici que x eſt plus grand que 4 & plus petit que 5 ; en conſéquence de cela on fera $x = 4 + p$, & on aura $xx = 16 + 8p + pp = 20$; mais comme pp eſt très-petit, on négligera ce terme pour avoir ſeulement l'équation $16 + 8p = 20$, ou $8p = 4$; elle donne $p = \frac{1}{2}$ & $x = 4\frac{1}{2}$, ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. Si donc on ſuppoſe à préſent $x = 4\frac{1}{2} + p$; on eſt ſûr que p ſignifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, & qu'on pourra négliger pp à bien plus forte raiſon. On aura donc $xx = 20\frac{1}{4} + 9p = 20$, ou $9p = -\frac{1}{4}$, & par conſéquent $p = -\frac{1}{36}$; donc $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$.

Que ſi l'on vouloit approcher encore davantage de la vraie valeur, on feroit $x = 4\frac{17}{36} + p$, & on auroit $xx = 20\frac{1}{1296} + 8\frac{34}{36}p = 20$; ainſi $8\frac{34}{36}p = -\frac{1}{1296}$, $322p = -\frac{36}{1296} = -\frac{1}{36}$, & $p = -\frac{1}{36.322} = -\frac{1}{11592}$. Donc $x = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{4473}{11592}$, valeur qui approche ſi fort de la vérité, qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle.

1. Euler affirme sans le justifier que $\sqrt{20}$ « est plus grand que 4 & plus petit que 5 ». Pouvez-vous le justifier ?
2. Faire à la main les calculs prescrits par Euler, jusqu'à l'étape $= 4\frac{17}{36}$. Contrairement à Euler, vous distinguerez par les symboles = et ≈ les égalités et les égalités approchées.
3. Cette nouvelle valeur approchée est-elle meilleure que la première, qui était $4\frac{1}{2}$? Vous pouvez utiliser la calculatrice.
4. A plusieurs reprises, Euler affirme qu'il va « négliger *pp* » parce qu'il est « très petit ». Cela vous semble-t-il raisonnable ?

[11] L'édition originale est parue en allemand, à Saint Petersbourg, en 1770. Nous utilisons la traduction française : L. Euler, *Eléments d'algèbre, tome premier*, Lyon : chez Jean-Marie Bruyset, 1774.
[12] Euler, *op. cit.*, p.679-680.

5. La méthode d’Euler demande qu’on sache développer des carrées de sommes, et résoudre des équations du premier degré ; un logiciel de calcul formel peut faire cela pour nous.
    a. En utilisant un logiciel de calcul formel, reprendre depuis le début les calculs d’Euler.
    b. Euler termine son paragraphe sur la valeur $x = 4\ \frac{4473}{11592}$.
        i. Cette valeur est-elle exacte ?
        ii. Est-elle égale à $\sqrt{20}$?
    c. En appliquant la méthode décrite par Euler une fois de plus, trouver une meilleure valeur approchée de $\sqrt{20}$ que $4\ \frac{5473}{11592}$.
    d. Au bout de combien d’étape cette méthode donne-t-elle autant de décimales de $\sqrt{20}$ que votre calculatrice ?

Après avoir détaillé le cas de l’équation $x^2 = 20$, Euler explique rapidement comment adapter la méthode à d’autres équations.

6. Par exemple, pour l’équation $x^3 = 2$, il écrit ([13])

> Soit, par exemple, $x^3 = 2$, & qu’on veuille déterminer $\sqrt[3]{2}$. Si n approche de près le nombre cherché, la formule $\frac{2n^3+2}{3nn}$ exprimera ce nombre encore de plus près ; qu’on faſſe donc
>
> I.) $n = 1$, on aura $x = \frac{4}{3}$,
> II.) $n = \frac{4}{3}$, on aura $x = \frac{91}{72}$,
> III.) $n = \frac{91}{72}$, on aura $x = \frac{1621130896}{1286634294}$.

    a. Comment être sûr qu’il existe entre 1 et 2 un nombre dont le cube est 2 ?
    b. En utilisant un logiciel de calcul formel, retrouvez-vous les mêmes valeurs approchées qu’Euler ?
    c. Par du calcul algébrique (à la main ou sur logiciel), pouvez-vous expliquer l’affirmation « Si n approche de près le nombre cherché, la formule $\frac{2n^3+2}{3n^2}$ exprimera ce nombre d’encore plus près ».
    d. En utilisant cette dernière formule et un logiciel tableur, donner une suite de valeurs approchées de $\sqrt[3]{2}$.

7. Reprendre la question 5 à propos du passage suivant[14] :

[13] Euler, *op. cit.*, p.683.
[14] Euler, *op. cit.*, p.684-685.

Soit, pour appliquer ce procédé à un exemple, $x^3+2xx+3x-50=0$, où $a=2$, $b=3$ & $c=-50$. Si n eſt cenſé approcher de près une des racines, $x=\frac{2n^3+2nn+50}{3nn+4n+3}$, ſera une valeur encore plus proche de la vraie. Or la valeur $x=3$ n'étant pas éloignée de la véritable, nous ſuppoſerons $n=3$, & nous trouvons $x=\frac{62}{21}$. Que ſi nous écrivions cette nouvelle valeur à la place de n, nous en trouverions une autre encore plus exacte.

Fiche pédagogique

Le dernier chapitre des *Elémens d'algèbre* d'Euler s'intitule *De la résolution des équations par approximation*. L'auteur y présente sur de nombreux exemples ce que nous appelons la méthode des tangentes, mais le cadre est numérique et non géométrique. Cette méthode (toujours dans un cadre numérique) prend son origine dans les travaux de Newton, et est largement répandue dans les traités du 18ème siècle.

A termes, les liens avec la dérivation seront faits, en particulier :

(1) Pour un polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, on peut, lorsque x est proche de zéro, utiliser l'approximation affine $P(x) \approx a_0 + a_1x$. On peut le voir de deux manières :
   A. C'est l'approximation affine locale donnée par la tangente au point d'abscisse 0
   B. Lorsque x est proche de 0, on peut considérer que x^2, x^3, …, x^n sont « négligeables » devant *x*.

(2) La méthode décrite par Euler consiste en une itération de l'approximation affine locale décrite en (1). Si la méthode décrite ici ne semble pas avoir recours à la dérivation, c'est qu'Euler l'applique aux seules fonctions polynômes, pour lesquelles une présentation purement algébrique est possible (1.B.). L'extension de la méthode à des fonctions plus générales fait apparaître explicitement la dérivation.

Dans un premier temps le lien avec la dérivation n'apparaît pas. La partie « découverte et mise en œuvre de la méthode » invite au travail sur trois supports : papier-crayon, calcul formel, tableur. Même sans tenir compte du point de fuite « dérivation », le travail nous semble intéressant pour trois raisons :

- Il met à disposition des élèves une méthode très élémentaire mais extrêmement puissante et générale de résolution approchée d'équations. A titre de cas particulier, la mise en œuvre d'une seule boucle, appliquée au seul cas de l'équation $x^2 = a$ donne la « formule T » rencontrée dans le travail sur la méthode babylonienne.
- Il permet de rencontrer la « règle » d'approximation « Lorsque x est proche de 0, on peut considérer que x^2, x^3, …, x^n sont « négligeables » devant *x* ». Le travail permet de constater l'efficacité d'une méthode reposant sur cette idée, et d'en discuter la validité.
- Les supports variés conduisent à des tâches variées et invitent à des prolongements mathématiques différents. En particulier :
  - L'usage d'un logiciel de calcul formel permet de s'approprier une méthode itérative et de mener à bien des calculs vite pénibles. Il s'agit d'une démarche algorithmique, mais ne donnant pas lieu à l'écriture d'un algorithme. A aucun moment la mise en œuvre de cette méthode ne conduit à écrire de formule d'approximation.
  - Le passage sur tableur, au contraire, repose sur l'identification d'une formule récursive décrivant la suite des valeurs approchées. Il permet d'introduire ou de réinvestir l'écriture de la définition par récurrence d'une suite. A termes, on pourra aborder dans des cas particuliers la question de la preuve de convergence, par exemple dans le cas de la racine carrée (suite de Héron).

Les deux aspects – algorithme itératif, suite récurrente – sont explicitement présents dans le texte d'Euler.

Découverte et mise en œuvre de la méthode

Détaillons quelques points :

Question 2 : le calcul à la main est nécessaire pour s'approprier l'enchaînement des étapes ; le travail sur les symboles d'égalité permet de mieux comprendre en quoi l'on procède par approximation. Ainsi : si $x^2 = 20$ et si l'on pose $x = 4 + p$

alors $(4 + p)^2 = 20$

$16 + 8p + p^2 = 20$

$16 + 8p \approx 20$ en négligeant p^2

$p \approx \frac{20-16}{8} = \frac{1}{2}$

donc $x \approx 4 + \frac{1}{2}$ nombre qu'Euler écrit $4\frac{1}{2}$

Question 3 : nous avons posé la question de manière volontairement peu directive, pour inviter à discuter plusieurs points :

- La simple comparaison de $4\frac{1}{2}$ et $4\frac{17}{36}$ ne permet pas de savoir si la seconde valeur est une meilleure approximation de $\sqrt{2}$. D'expérience, nous pensons que des élèves pourraient le penser, soit par ce que la seconde valeur est supérieure à la seconde (lien – erroné – entre monotonie et convergence), soit par ce que la seconde « donne plus de chiffres après la virgule ».
- On doit comparer avec $\sqrt{2}$, mais on peut le faire de deux manières : (1) comparer avec ce que la calculatrice donne lorsqu'on demande $\sqrt{2}$; (2) comparer à 2 les carrés des valeurs approchées. On peut chercher à faire entendre que le second mode de comparaison, quoiqu'indirect, est plus raisonnable, puisqu'il ne demande pas qu'on sache déjà calculer $\sqrt{2}$.

  On peut bien sûr fermer la question en demandant de n'utiliser que les touches + - x / de la calculette.

Question 4 : la notion de « négligeable devant … en … » sera définie dans l'enseignement supérieur ; il ne nous semble pas nécessaire d'entamer ici un travail réel sur cette notion, par exemple pour montrer que le concept est fondamentalement multiplicatif et non additif. Il ne s'agit ici que de chercher des arguments lui donnant sens et plausibilité. En particulier :

- Son efficacité. Tout ce travail, en particulier la partie au tableur, montre la grande efficacité de la méthode d'approximation reposant sur cette seule idée.
- Sans aller jusqu'à « négligeable », on peut rappeler ou faire travailler sur l'*ordre* entre les différentes fonctions puissances entre 0 et 1. Ce travail est loin d'être inutile, certains élèves de Lycée demeurent persuadés que le carré d'un nombre est plus grand que ce nombre, sans doute en s'appuyant sur l'expérience des nombres entiers naturels.
- Le travail sur l'*ordre de grandeur* est facile à mener sur les puissances de 10 : lorsque *x* vaut 1/10, son carré ne vaut que 1/100 = 0,01 ; son cube que 1/1000 = 0,001 ; si *x*

continue à se rapprocher de 0, en valant par exemple 1/100, son carré ne vaut déjà plus que 1/10 000 etc. On peut associer calcul mental, calcul posé et tableur.

Question 5 : par exemple, sous *GeoGebra*

1	Première valeur approchée x = 4	✓ Vérifiez s'il vous plaît la structure de votre sélection
2	(4+p)^2	→ $p^2 + 8\,p + 16$
3	8p+16=20	Résoudre: $\left\{p = \frac{1}{2}\right\}$
4	Deuxième valeur approchée x = 4 + 1/2	✓ Deuxième valeur approchée $x = 4 + \frac{1}{2}$
5	(4+1/2+p)^2	→ $\frac{4\,p^2 + 36\,p + 81}{4}$
6	(36p+81)/4=20	Résoudre: $\left\{p = -\frac{1}{36}\right\}$
7	1/2-1/36	→ $\frac{17}{36}$
8	Troisième valeur approchée x = 4 + 17/36	✓ Troisième valeur approchée $x = 4 + \frac{17}{36}$
9	(4+17/36+p)^2	→ $\frac{1296\,p^2 + 11592\,p + 25921}{1296}$
10	(11592p+25921)/1296=20	Résoudre: $\left\{p = -\frac{1}{11592}\right\}$
11	17/36-1/11592	→ $\frac{5473}{11592}$
12	4ème valeur approchée x = 4 + 5473 / 11592	
13	(4+5473/11592+p)^2	→ $\frac{134374464\,p^2 + 1201881744\,p + 2687489281}{134374464}$
14	(1201881744p + 2687489281) / 134374464=20	Résoudre: $\left\{p = -\frac{1}{1201881744}\right\}$
15	5473/11592-1/1201881744	→ $\frac{567451585}{1201881744}$
16	5ème valeur approchée x = 4 + 567451585 / 1201881744	✓ 5 ème valeur approchée $x = 4 + \frac{567451585}{1201881744}$

Question 6: les élèves n'ont pas de mal à accepter la notion de racine cubique lorsqu'elle est présentée ainsi (on cherche à résoudre $x^3 = 2$, on notera $\sqrt[3]{2}$ la solution). On pourra, si on le souhaite, rappeler la courbe ou le tableau de variations de la fonction cube pour faire conjecturer l'existence et l'unicité. Par exemple :

x	-∞	0	1	?	2	+∞
x^3	↗	0	1	2	4	

Question 6b : adapter la méthode au cas de la racine cubique de 2 nous semble une tâche algorithmique pertinente. Une petite difficulté sera due au fait qu'Euler change de notations : dans l'extrait numéro 1 les rationnels positifs étaient présentés sous la forme « partie entière + parti fractionnaire », ici la notation fractionnaire seule est utilisée. La dernière valeur donnée par Euler est légèrement fausse.

Question 6c : On peut viser une réponse finale de la forme suivante

Supposons que	$x^3 = 2$ et qu'on dispose d'une valeur approchée $n \approx x = \sqrt[3]{2}$
La vraie valeur est	$x = n + p$
Donc	$x^3 = (n+p)^3 = n^3 + 3n^2p + 3np^2 + p^3 = 2$
	$n^3 + 3n^2p \approx 2$
	$p \approx \frac{2-n^3}{3n^2}$
Nouvelle valeur approchée	$n + p = n + \frac{2-n^3}{3n^2} = \frac{2n^3+2}{3n^2}$ c'est bien la formule d'Euler.

C'est peut-être le moment de faire remarquer aux élèves que les notations d'Euler peuvent conduire à des écritures ambigües. Si on numérotait les valeurs approchées successives $x_0, x_1, x_{2\ldots}$ on aurait une formule du type

$$x_{n+1} = \frac{2(x_n)^3 + 2}{3(x_n)}$$

Question 6d : la formule de récurrence donnée dans le texte correspond exactement à ce qu'on entre dans une cellule du tableur pour ensuite utiliser la fonction « copie ». En fin de travail, on peut avoir construit une feuille du type

A4 =(A3^2+20)/(2*A3)

	A	B	C	D	E	F
1	Approx de rac(20)	Vérification		Approx de rac. cub. 2	Vérification	
2						
3	4	16		1	1	
4	4,5	20,25		1,333333333	2,37037037	
5	4,472222222	20,0007716		1,263888889	2,018955225	
6	4,472135956	20,00000001		1,259933493	2,000059259	
7	4,472135955	20		1,25992105	2,000000001	
8	4,472135955	20		1,25992105	2	
9	4,472135955	20		1,25992105	2	
10	4,472135955	20		1,25992105	2	
11	4,472135955	20		1,25992105	2	
12	4,472135955	20		1,25992105	2	
13	4,472135955	20		1,25992105	2	
14	4,472135955	20		1,25992105	2	
15	4,472135955	20		1,25992105	2	
16	4,472135955	20		1,25992105	2	

On constate la remarquable efficacité de la méthode proposée par Euler ; on constate aussi l'intérêt de la formule de récurrence par rapport à l'algorithme itératif à mettre en œuvre « à la main » sur le logiciel de calcul formel. On pourra toutefois alerter les élèves sur le fait que l'on n'a pas obtenue les valeurs exactes (soit en évoquant l'irrationalité de ces racines, soit en montrant que la suite des approximations obtenues par le logiciel de calcul formel ne se stabilise pas).

Question 7 : on voit ici que la méthode présentée par Euler s'étend directement à toute recherche de racine d'un polynôme. On pourra accélérer la manœuvre en ne demande que le travail d'établissement de la formule récursive (en s'aidant du logiciel de calcul formel) et sa mise en œuvre sous tableur.

Ici se pose en premier lieu la question de la localisation des racines (ici, entre 2 et 3). Euler ne l'évoque pas dans son texte, mais l'utilisation de tableaux de valeurs permet de se tirer d'affaire[15].

Par exemple :

G	H	I	J	K
Sol. de x^3+2x^2+3x-50 = 0	Vérification		localisation	
			x	x^3+2x^2+3x-50
3	4		-2	-56
2,904761905	0,09890941		-1	-52
2,902284957	6,572E-05		0	-50
2,902283309	2,909E-11		1	-44
2,902283309	0		2	-28
2,902283309	0		3	4
2,902283309	0		4	58
2,902283309	0		5	140
2,902283309	0		6	256
2,902283309	0		7	412
2,902283309	0			
2,902283309	0			

On appelle ici « vérification » l'évaluation du polynôme.

3. Introduction de la définition de la tangente : un exemple en Italie

Monica Panero

Nous allons présenter une séquence de classe sur la définition de la tangente. Elle a lieu en Italie avec des élèves de la dernière année du lycée. Nous devons préciser qu'en Italie la dernière année est quasiment entièrement dédiée aux thèmes de l'Analyse, généralement développés dans l'ordre suivant : limite, dérivée, intégrale. La dérivée est donc introduite après le concept de la limite. Dans le cas que nous allons présenter, l'enseignante a déjà travailler la limite et en particulier elle a parlé d'équivalence asymptotique entre deux fonctions.

La définition qu'elle a donnée est la suivante :

Deux fonctions f et g, qui tendent vers zéro pour $x \to 0$, sont dites asymptotiquement équivalentes si la limite de leur rapport est 1 pour $x \to 0$.

Graphiquement, ils ont observé que les deux fonctions doivent coïncider pour un certain trajet au voisinage du point zéro.

---

[15] On peut ici aussi se reporter à l'explication très claire donnée dans l'article *Approximation* de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert.

Avant de passer à la notion de dérivée, l'enseignante ouvre une discussion en classe sur la définition de tangente, en posant la question: « *Soit une fonction, dont on connait le graphique, et soit un point du graphique. Quelles propriétés doit avoir la tangente?* ». Les élèves ont déjà travaillé sur les tangentes dans le contexte des coniques. Les définitions qu'ils proposent proviennent toutes de ce contexte.

Nous allons présenter ci-dessous les étapes qui portent sur les propositions de définition des élèves de la tangente.

Définition 1: La tangente intersecte la courbe en un seul point.

L'enseignante répond avec un contre-exemple (Fig. 1), en faisant remarquer la possibilité que la tangente rencontre d'autres points de la courbe.

Fig.1. Contre-exemple de la définition 1

Définition 2 : Dans un petit intervalle, la tangente intersecte la courbe en un seul point.
L'enseignante propose un deuxième contre-exemple qui incite les élèves à rejeter l'idée ponctuelle de croisement en un seul point. Elle propose (Fig. 2) le graphique d'une fonction coupé au point x_0 par une droite sécante qui vérifie leur définition 2. Cependant, cette droite n'est pas tangente.

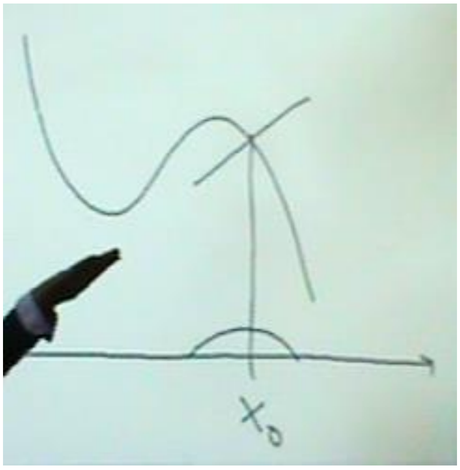


Fig.2. Contre-exemple de la définition 2

Définition 3 : La tangente est la perpendiculaire au rayon du cercle qui approche le mieux la courbe.

L'enseignante fait remarquer que cette définition oblige le fait de devoir trouver le cercle qui approche le mieux la fonction et que ce problème est très difficile.

Définition 4 : La courbe doit appartenir à une seule des régions délimitées par la tangente.

L'enseignante réagit à cette définition globale avec un contre-exemple avec une tangente en un point d'inflexion (Fig. 3). Dans cet exemple, la courbe traverse la tangente, donc n'est pas entièrement dans un même demi-plan délimité par la tangente.

Fig. 3. Contre-exemple à la définition 4

Il est possible que ce contre-exemple graphique rappelle aux élèves le cas des fonctions *sin* et *cos* au voisinage de 0 et l'idée graphique d'équivalence asymptotique. Cela les amène à énoncer la définition correcte suivante, qui implique une propriété locale.

Définition 5 : La tangente est la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage du point.

En s'appuyant sur cette dernière définition et la définition de l'équivalence asymptotique (donnée précédemment), l'enseignante guide les élèves à déterminer le coefficient directeur de la tangente et donc le nombre dérivé.

IV. De la notion couplée de tangente et dérivée à la notion de limite

Marc Rogalski

Introduction

La question est la suivante : à la suite du scénario du chapitre 1 de cette brochure, supposé passé par des élèves de première S, le programme de celle-ci prévoit la notion de limite (au niveau intuitif, sans qu'on sache bien ce que cela signifie). L'ordre du programme suggère que cette notion pourrait (devrait ?) être motivée par cette étude préalable de la dérivée. Comment cela est-il possible dans la poursuite du scénario du chapitre 1 ? C'est la question que nous allons examiner, en revenant sur quelques aspects épistémologiques des notions de dérivées et de limite, et en évoquant plusieurs ingénieries existantes, avant de proposer deux situations peut-être adaptées comme suites du scénario du chapitre 1.

1. Quelques aspects épistémologiques du concept de dérivée

Nous rappelons ici certains points de vue sur la notion de dérivée en général pour une fonction réelle d'une variable réelle.

(a) *Aspects géométriques (indépendants des coordonnées)*

(a1) La courbe, par zooms successifs, devient une droite, voir (Maschietto 2002)

(a2) Il y a une droite D par M_0 sur laquelle la courbe s'écrase : si P est la projection sur D du point courant M de la courbe, $\frac{MP}{MM0} \to 0$ quand $M \to M_0$ sur la courbe. (*)

(b) *Aspect cinématique* : vitesse instantanée d'un mobile, à partir des vitesses moyennes (physique). Voir (Gantois et Schneider 2012) (#)

(c) *Aspect analytique* : limite de $[f(a+h) - f(a)]/h$ quand $h \to 0, h \neq 0$. Bien sûr, on ne peut échapper aux relations avec le graphique, c'est-à-dire avec les problèmes géométriques liés à la notion de tangente ; voir par exemple (Schneider 1991).(#)

(d) *Existence d'une « meilleure approximation affine »* au sens d'Aline Robert :
$g_m(x) := f(a) + m(x - a)$ est une meilleure approximation affine en a de f que g_n s'il existe un voisinage V de a tel que $|f(x) - g_m(x)| \leq |f(x) - g_n(x)|$ pour $x \in V$.
Il y a tangente et dérivée m si g_m est la meilleure approximation affine de f en a (meilleure que toute autre). Cette définition n'utilise pas la notion de limite ! (#) Voir (Lambre 1998) et aussi (Perrin 1999).

(e) *Aspect : différentielle et négligeabilité du reste* : $f(a+h) = f(a) + \lambda(h) + r(h)$ avec $r(h)$ négligeable devant $|h|$ et λ linéaire. (*#)

Remarque : les signes placés après certains paragraphes signifient que cette conception de la dérivée peut s'étendre : (*) en plusieurs variables ; (#) aux fonctions vectorielles.

Ces six aspects de la notion de dérivée sont ceux qui paraissent raisonnables pour une approche élémentaire. Rappelons que dans son célèbre texte, Thurston annonce avoir au moins 37 sens pour la notion de dérivée… Voir (Thurston 1995).

L'ingénierie du scénario de la partie I mixe les aspects (a1) et (c), en utilisant les approches de Fermat et de Lagrange, les calculs étant motivés par l'activité des élèves autour du logiciel : « faire h = 0 », ou prendre le coefficient du terme en h dans le « développement » de f(a+h) (implicitement).

2. La situation à l'issue du passage du scénario du chapitre 1

On peut analyser sommairement cette situation, telle qu'elle paraît aux élèves, ainsi :

(a) Le taux $\tau(h) := [f(a+h) - f(a)]/h$ représente pour h très petit à peu près la pente de la droite indiscernable de la courbe $y = f(x)$ par zooms successifs au voisinage du point $(a, f(a))$, pente qu'on a désignée par $f'(a)$ (cette droite idéale étant désignée par « tangente »). On peut deviner cette pente en faisant l'opération « interdite » $h = 0$ dans le taux.
On peut même avoir donné le nom de « limite » à cette procédure.

(b) Il reste une difficulté résistante pour les élèves, qui leur pose problème :

* Pour certaines fonctions, telles que $x \to \frac{x}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$ ou $x \to \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{x}$, la procédure « faire h=0 » dans le taux d'accroissement ne marche pas (du moins pour des élèves pour lesquels multiplier haut et bas d'une expression fractionnaire comportant des radicaux par la quantité conjuguée n'est pas une procédure disponible) ; et alors comment deviner le nombre dérivé ?

* Comme l'a bien montré la passation du scénario en classe (voir le chapitre 2), la procédure « faire h=0 » dans un quotient qui se présente alors (avant simplification par h) comme 0/0 laisse les élèves très dubitatifs et même franchement inquiets… Voir aussi (Gantois et Schneider 2012) pour le rôle du même phénomène dans une approche différente.

Il nous semble que cet état d'incertitude des élèves est en fait très propice à un scénario d'introduction du concept de limite, à propos du taux d'accroissement.

3. Retour sur quelques aspects de la notion de limite et certaines ingénieries construites pour son enseignement

On peut distinguer trois aspects de cette notion.

(a) Celle assez fréquente antérieurement à Cauchy (et encore présente chez celui-ci, d'ailleurs), selon laquelle « la variable entraîne la fonction », et liée à l'ordre du vocabulaire : « si $x \to x_0$, alors $f(x) \to \lambda$».

(b) La procédure d'approximation de la limite à un ordre qu'on se donne avant : comment rendre $|f(x) - \lambda|$ plus petit qu'une quantité donnée ? En fait cette procédure apparaît plus ou moins chez certains auteurs avant Cauchy (par exemple par référence à la méthode d'exhaustion, considérée comme précurseur).

(c) La définition formelle associée, avec ses deux quantificateurs et son implication qui n'est pas une équivalence (une condition suffisante).

Un objectif raisonnable semble-t-il est de rendre les élèves capables d'utiliser la procédure (b), l'usage répété de celle-ci en situation permettant de dégager la définition (c) pour résumer ce qu'on fait chaque fois qu'on approxime une limite, devinée par une méthode intuitive semblable à celle utilisée en « faisant h=0 » dans le cas de la recherche de la dérivée. Ce choix demande évidemment de ne pas livrer trop tôt aux élèves les « procédés automatiques de limites », ni la définition formelle de celle-ci, bien sûr !

La difficulté principale dans une construction si possible a-didactique (par les élèves) de la procédure (b) d'approximation de la limite est de trouver une situation susceptible de mettre les élèves en état d'incertitude et de demande forte de réponse à un problème.
Examinons de ce point de vue plusieurs scénarios proposés dans la littérature didactique.

(1) Dans le scénario d'Aline Robert (sur la limite de suite (Robert 1982 et 1983)), après avoir fait travailler les élèves avec un ensemble de suites aux comportements très variés, et dans plusieurs cadres (numérique, graphique), on leur pose le problème assez général : « si une suite u_n tend vers un nombre strictement positif quand n tend vers l'infini, montrer que $u_n > 0$ pour n assez grand ». Les élèves sont convaincus du résultat, mais n'arrivent pas à le prouver faute de disposer de la définition formelle (c). C'est l'enseignant qui la donne alors, et il s'agit ensuite de voir comment l'utiliser. La difficulté est de faire en sorte que les élèves (ou les étudiants) soient suffisamment motivés par ce problème pour pouvoir développer eux-mêmes assez d'arguments pour se trouver dans l'état d'attente souhaité pour accepter d'emblée de passer au niveau formel (c) (sans pratiquer suffisamment avant la procédure concrète (b) d'approximation).

(2) Le scénario développé par Thomas Lecorre dans (Lecorre 2013) est fondé sur le même ressort, mais avec des fonctions au lieu de suites : mettre les élèves en état de demander eux-mêmes la définition formelle de la limite pour résoudre un problème qui leur résiste. Le problème posé est lui aussi général : « soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, et ayant toutes deux des limites en $+\infty$; on suppose que lim f < lim g ; que peut-on dire de f et g ? ». Dans ce cas, la pratique du débat scientifique en classe permet que se déploient un grand nombre d'arguments, de réfutations, de contre-exemples (analytiques ou graphiques), qui mettent probablement les étudiants en état d'attente de la définition formelle qui leur permettra de conclure.

(3) Le scénario d'Isabelle Bloch dans (Bloch 2000) est d'une autre nature : on fait calculer par les élèves plusieurs étapes de la construction du flocon de von Koch, et on s'interroge sur l'aire et le périmètre de la « figure limite ». Pour l'aire, par exemple, les élèves ont le moyen de deviner le résultat par somme d'une série géométrique, et l'enjeu est ici de majorer l'écart de l'aire de la figure de rang n avec le nombre limite deviné : c'est bien la procédure d'approximation (b) qui s'impose dans ce scénario. Néanmoins, la monotonie des suites étudiées peut renforcer l'obstacle du modèle monotone (voir (Robert 1983)).

Il y a d'autres ingénieries « sur le marché », voir par exemple (Robinet 1983), mais celles rappelées ici permettent de bien situer les enjeux qui s'y trouvent développés : « parachutage » de la définition formelle comme seul moyen de résoudre un problème

résistant et plus ou moins motivant, ou recherches répétées d'approximations concrètes pour valider un résultat numérique deviné intuitivement, généralisées et formalisées ensuite.
Il y a aussi des ingéneries ne rentrant pas du tout dans les deux catégories précédentes, voir par exemple (Mamona-Downs 2010) qui définit la convergence d'une suite au moyen des points d'accumulation de son ensemble image.

Il faut insister sur l'aspect « procédure d'approximation de la limite », qui entraîne directement l'attitude de base quand on cherche à prouver une limite : se donner d'abord le $\mathcal{E} > 0$ arbitraire et écrire l'inégalité souhaitée sur la fonction (ou la suite) :
$|f(x) - \lambda| < \mathcal{E}$ (ou $|u_n - \lambda| < \mathcal{E}$), et non pas partir de x ou de n. C'est d'ailleurs la base du « raisonnement à $\mathcal{E}$ près » en analyse.
Ce n'est pas un mouvement naturel, et par exemple dans le cours de calcul différentiel de Liouville, en 1847-48 (donc nettement après les cours de Cauchy), on trouve une erreur de raisonnement motivée par le fait de partir de la variable, et non de l'approximation qu'on veut sur la fonction. Pourtant, dans les premières pages de son cours de l'Ecole Polytechnique, Cauchy détermine bien des limites en se donnant un $\mathcal{E}$ d'approximation a priori. On pourra voir ces deux exemples en appendice.

4. De la dérivée dans le scénario du chapitre 1 à la notion de limite

Nous allons maintenant voir comment un scénario suivant le scénario du chapitre 1 peut peut-être faire accéder les élèves à l'aspect approximation de la notion de limite.

On se situe dans la foulée du scénario du chapitre 1, précisément au moment où on calcule divers nombres dérivés.
On se demande donc quel degré d'approximation du nombre dérivé $f'(a)$ on peut avoir par le taux d'accroissement $\tau(h)$ en fonction de h ≠ 0, afin de respecter le fait que faire « $h = 0$ » est interdit, mais a permis de deviner $f'(a)$.

L'idée est donc de reprendre plusieurs des exemples du scénario du chapitre 1 en essayant de trouver une petitesse de h ≠ 0 qui garantisse qu'on puisse approcher le f '(a) deviné (en faisant h = 0) par le taux d'accroissement $\tau(h) = \frac{[f(a+h)-f(a)]}{h}$ à un ordre d'approximation donné 10^{-n} pour plusieurs valeurs de n. Cette recherche va mobiliser divers calculs avec des majorations et minorations. Une partie de ces calculs est à faire à la main par les élèves, et à accompagner de beaucoup de commentaires concernant le fait qu'on cherche seulement des conditions suffisantes sur la petitesse de h, et sur le fait que cette recherche se fait par des majorations et/ou minorations, avec éventuellement des choix préalables de petitesse pour |h|, pour simplifier les calculs.
Regardons ce que cela peut donner pour plusieurs des fonctions regardées par le scénario du chapitre 1.

(1) Commençons par le cas le plus simple (non affine !) : la fonction $x \to x^2$, au point a = 1.
On obtient $\tau(h) = (2h + h^2)/h = 2 + h$ si h≠0, on devine donc que f'(a) = 2. Alors pour h ≠ 0, on voit qu'on a | τ (h) - 2| = |h|, et majorer ceci par 10^{-n} en prenant |h| petit ne pose aucune difficulté : ce cas est peu instructif, mais permet de mettre en valeur auprès des élèves l'enjeu cherché.

(2) Prenons maintenant f(x) = x^3, en a = 1. Cette fois, le taux est $(3h + 3h^2 + h^3)/h = 3 +$

$3h + h^2$ si h ≠ 0. Par suite, majorer | τ (h) – 3| par 10 $^{-6}$ pour |h| ≠ 0 assez petit, c'est vérifier l'inégalité |3h+h^2| $\leq$ 10 $^{-6}$ pour |h| assez petit. A ce point il peut être utile de laisser des élèves traduire ceci par - 10 $^{-6}$ ≤ 3h+h^2 ≤ 10 $^{-6}$, ce qui les met devant le problème d'étudier le signe de deux polynômes du second degré, ce qui est loin d'être simple ici, car les racines sont compliquées (de plus, l'un des polynômes doit être positif, et l'autre négatif, les conditions étant une disjonction dans un cas, une conjonction dans l'autre). C'est alors l'occasion de faire remarquer que $|3h + h^2| = |h||3 + h|$, et de demander pour quelle petitesse de |h| on est sûr de rendre ceci inférieur à 10 $^{-6}$. L'idée de d'abord majorer |3+h| par un nombre indépendant de h, pour celui-ci petit en valeur absolu, peut alors surgir, et permettre de mettre en évidence et valoriser le fait qu'on peut déjà sup6poser |h| < 1. On obtient alors une condition sur h, qui n'est que suffisante : $|h| \leq 10^{-\frac{6}{4}}$.
Si on demande aux élèves : « et si on voulait approcher f'(a) = 3 par le taux à 10 $^{-9}$ près pour |h| petit, comment ferait-on ? », il est très probable que les élèves n'auraient aucun problème, car *le nombre 10* $^{-6}$ *n'a pas été modifié pendant les calculs.*

(3) On peut alors prendre l'exemple de la courbe y = 1/(1+2x) déjà étudiée dans le scénario C-A, pour laquelle il semble que $f\,'(1) = -2/9$.
On calcule donc | τ *(h)* $- (-2/9)|$, par exemple par le calcul formel du logiciel. On trouve 4|h|/9|3+2h|.
Donc, réaliser $|\tau\,(h) - (-2/9)| \leq$ 1à$^{-6}$, c'est réaliser $\frac{4|h|}{9|3+2h|} \leq 10^{-6}$.
On cherche les h vérifiant l'inéquation. Comme h peut être négatif, et qu'on s'intéresse à |h| petit, il suffit de supposer d'abord 3+2h > 0, par |h | < 1. Deux approches alors :

* on résout effectivement : 27 . 10 $^{-6}$ ≥ 4|h| - 18h.10 $^{-6}$.
On majore le deuxième membre (car h ≥ -1) par 4|h| + 18. 10 $^{-6}$ et il suffit donc que $|h| \leq$ $9.10 - 6$.

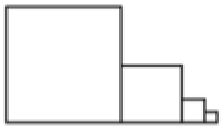
* il suffit de minorer 3+2h par 1 dans l'inégalité de départ, ce qui donne tout de suite l'inégalité suffisante $|h| < (9/4)10^{-6}$.
Il est essentiel dans ces calculs de faire prendre conscience aux élèves *qu'on ne cherche pas toutes les solutions* des inégalités utiles.

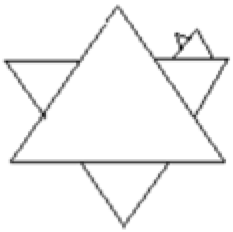
Puis on peut alors recommencer avec 10^{-9}…

A l'issue de ce travail sur plusieurs exemples, il faut tirer un bilan sur la procédure : une fois deviné ce que va être la limite f '(a), se donner un degré d'approximation souhaité $\mathcal{E}$, et trouver une valeur η telle que pour tous les h ≠ 0 tels que |h| ≤ η, ce degré d'approximation soit réalisé. On vérifie que tous les calculs précédents auraient été les mêmes avec $\mathcal{E}$ au lieu de 10^{-6} ou…

La notion de limite est ainsi motivée par la généralisation de la recherche d'une approximation qu'on a à faire chaque fois qu'on veut se persuader qu'une fonction f(x) « tend vers un nombre λ quand x ≠ x_0 tend vers une valeur x_0 ».

La difficulté de cette approche est qu'elle demande une pratique des majorations et minorations (qui est justement la marque – le cœur – de l'analyse, avec le rôle des conditions suffisantes) qui est difficile pour les élèves. L'aide au calcul, par l'enseignant et/ou un logiciel de calcul, doit être alors équilibrée justement, pour que l'ensemble de la procédure (b) s'établisse bien chez les élèves : il faut leur laisser la responsabilité des majorations suffisantes, préliminaires comme finales.





Il reste alors à faire fonctionner la procédure d'approximation sur d'autres problèmes de limite, par exemple en reprenant le scénario d'Isabelle Bloch sur le flocon de von Koch, ou des exemples analogues plus simples, par exemple calculer l'aire de la figure « limite » obtenue en juxtaposant côte à côte des carrés de côtés successifs 1,

1/2, 1/4, 1/8,… puis en généralisant à la somme d'une série géométrique de raison r inférieure à 1 en valeur absolue. Dans ce cas, en l'absence de la fonction logarithme, en première, il faut utiliser l'inégalité de Bernoulli : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ si $x \geq 0$ (pour $1/r = 1 + x$), c'est-à-dire avoir recours à une condition suffisante en fait grossière…
Dans le même esprit, on peut voir aussi (Barrera 2011).

5. Esquisse d'un autre scénario dans l'esprit de ceux de T. Lecorre et A. Robert

L'idée est de proposer un problème impossible à résoudre sans la définition formelle de la dérivée, mais avec un appui concret pour rendre le résultat évident pour les élèves – en mettant en évidence l'interprétation physique de la dérivée comme vitesse instantanée.

L'idée est de motiver et faire considérer comme naturel par les élèves le « théorème de comparaison locale » : si $f(a) = g(a)$ et si $f'(a) > g'(a)$, alors il existe un h > 0 tel que sur]a,a+h[on ait f(x) > g(x) et sur]a-h,a[on ait f(x) < g(x) (ce théorème intervient souvent dans divers problèmes mathématiques, par exemple dans l'une des preuves *directes* de l'implication f' > 0 ⇒ f strictement croissante).

Première étape : relation entre nombre dérivé et vitesse instantanée d'un mobile se déplaçant en fonction du temps sur une droite : sa position après choix d'une origine est algébriquement f(t) ; c'est la reprise de ce qu'on dit - ou disait - en seconde en physique : c'est [f(a+h) – f(a)]/h pour h très petit, c'est-à-dire la vitesse moyenne sur des intervalles de temps de plus en plus petits. C'est bien l'idée de dérivée à laquelle a mené le scénario C-A. Il reste à détailler ici le scénario du changement de cadre mathématiques – physique, c'est-à-dire à se situer dans une approche par modélisation. Voir à ce propos (Gantois et Schneider 2012).
Remarquons d'ailleurs que si on veut que les élèves scientifiques puissent utiliser le calcul différentiel en physique, par exemple, cette étape d'interprétation/modélisation des taux d'accroissement dans divers contextes (vitesses, débits, intensités,…) est absolument indispensable à leur formation. Si la constitution même de la notion de dérivée n'est pas introduite par une situation physique (comme dans (Gantois et Schneider) par exemple), ce qui est le cas dans le scénario du chapitre 1, il faudra donc de toute façon mettre en place cette interprétation/modélisation.

Deuxième étape : position de deux véhicules qui « se doublent »

A un moment donné, deux véhicules A et B ont la même position sur une route droite, et A *est en train de doubler* B. Que peut-on dire des positions respectives de A et B avant cet instant et après cet instant ? Eventuellement, on peut commencer par ne s'intéresser qu'au futur.
On organise le débat dans la classe entière, et on commence ce débat par une demande de modélisation. Les deux fonctions f et g vérifiant f(a) = g(a) et f '(a) > g'(a) devraient sortir, compte tenu de la première étape et du scénario antérieur.
Puis le débat se concentre sur la comparaison des deux fonctions. On peut prévoir les étapes et arguments suivants lors du débat :

- dessins de deux graphes ;
- réponse rapide : f > g ;
- contre-exemple avec des courbes qui se recoupent plus loin ;
- interprétation concrète : après avoir été doublé par A, B peut accélérer et rattrapper A ;
- on se place avant cet instant ;
- dessin de courbes oscillantes ;
- invocation du premier point où les courbes se recoupent après a ;
- pourquoi ce point existe-t-il si on a une infinité de points d'intersections ?
- dessin des graphes : puisque les pentes des tangentes sont inégales, les courbes ne peuvent se recouper tout de suite ;
- preuve ?

Après ce type de débat, les élèves peuvent être demandeur d'une « vraie » définition de la dérivée – ou de la vitesse instantanée – qui permette de faire cette preuve d'un résultat qui semble « évident » mais dont la justification résiste.

Cette situation est adaptée de celle de Thomas Lecorre, et les prévisions sur le débat proviennent du script de ce qui s'y est passé. La situation est ici moins facile, pour plusieurs raisons :

- on doit faire régresser le temps à partir d'un moment *fini* où B rattrape A, c'est moins facile que de diminuer le temps depuis +∞ (étudier le passé t < a est de ce point de vue plus facile, mais peut-être conceptuellement plus difficile, car on discute sur ce que B *aurait pu faire*, et non sur ce qu'il *pourra faire*) ;
- pour faire osciller des courbes à un temps fini, il faut utiliser des sin(1/x), alors qu'en +∞ des sin x suffisent, sauf si on se contente d'un dessin sans formule explicite.

Appendice

(1) Dans son cour de calcul différentiel, de 1847-48, Joseph Liouville[16] se propose de montrer que si une fonction a une dérivée identiquement nulle sur un intervalle, alors elle est constante. Ramenons-nous à une fonction f sur un intervalle ouvert contenant [0,1], de dérivée identiquement nulle. Le problème est de montrer que $f(0) = f(1)$, et pour cela de faire un « raisonnement à $\mathcal{E}$ près », en montrant que $|f(1) - f(0)|$ est arbitrairement petit.
Liouville découpe l'intervalle [0,1] en n intervalles de longueurs 1/n, et *part de la variation de la variable* pour majorer |f(1/n) – f(0)| par $\left(\frac{1}{n}\right)\mathcal{E}_1$, pour un certain $\mathcal{E}_1 > 0$; de même, on a

[16] Liouville Joseph (1998), *Calcul différentiel*, Ellipses, Paris.

$$|f(1/n) - f(2/n)| \leq (1/n)\, \mathcal{E}_2, \dots |f((n-1)/n) - f(1)| \leq (1/n)\mathcal{E}_n.$$

Par addition, on a $|f(1) - f(0)| \leq (1/n)\,(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_n)$. On pose $\mathcal{E} = max(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n)$, et alors on a $|f(1) - f(0)| \leq \mathcal{E}$. Pour conclure que $f(1) = f(0)$, il faudrait savoir que $\mathcal{E}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ce que Liouville n'hésite pas à affirmer, mais ce qu'il est incapable de justifier, car on n'a aucun contrôle sur les $\mathcal{E}_i$, puisque chacun provient de *la variation de f quand x varie* entre $(i - 1)/n$ et i/n.

Une solution, dans l'esprit du raisonnement à $\mathcal{E}$ près de Liouville, aurait été de se donner *a priori* un $\mathcal{E} > 0$ et de montrer l'inégalité $|f(1) - f(0)| < \mathcal{E}$ en raisonnant par l'absurde : supposer $|f(1) - f(0)| < \mathcal{E}$, et utiliser alors une dichotomie permettant de trouver une suite a_n de points tendant vers un nombre c et tels *que* $|(f(a_n) - f(c))/(a_n - c)| \geq \mathcal{E}/2$. On voit que la grande différence avec la méthode de Liouville est de partir d'une approximation *a priori* (un ordre d'approximation souhaité) de $|f(1) - f(0)|$.

(2) Dès les premières pages de son cours, Cauchy[17] se propose de montrer que si une fonction f définie par exemple sur $]0,+\infty[$ vérifie la propriété $f(x+1) - f(x) \to a$ quand $x \to +\infty$, alors $f(x)/x \to a$ quand $x \to +\infty$.

Le résultat peut évidemment être deviné à partir du cas particulier de la fonction f(x) = ax + b, et conforté par l'étude des cas de la fonction homographique $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$, de la fonction $x \to x + 1/x$, ou de la fonction $x \to ax + x^{1/2}$ (bien que Cauchy ne le dise pas dans son cours). Voici sa preuve.

Soit E > 0, il existe un A tel que pour $x \geq A$ on ait $|f(x+1) - f(x) - a| \leq \mathcal{E}$. on écrit alors la suite d'inégalités

$$a - \mathcal{E} \leq f(x+1) - f(x) \leq a + \mathcal{E},$$
$$a - \mathcal{E} \leq f(x+2) - f(x+1) \leq a + \mathcal{E},$$
$$\dots \dots$$
$$a - \mathcal{E} \leq f(x+n) - f(x+n-1) \leq a + \mathcal{E}$$

On a donc par addition et division

$$n(a - \mathcal{E}))/(n+x) + f(x)/(n+x) \leq f(x+n)/(x+n)$$
$$\leq n(a + \mathcal{E}))/(n+x) + f(x)/(n+x).$$

On sent à ce stade qu'en posant x+n = X, on devrait pouvoir majorer $|f(X)/X - a|$ par un nombre arbitrairement petit en prenant X assez grand. Reste à préciser comment, une fois choisi x fixe déjà assez grand, on peut définir n en fonction de X. On obtient alors l'encadrement

$$-\mathcal{E} - x(a - \mathcal{E})/X + f(x)/X \leq f(X)/X - a \leq \mathcal{E} - x(a + \mathcal{E})/X + f(x)/X,$$

dont on déduit que pour X assez grand on aura majoré $|f(X)/X - a|$ par 2 $\mathcal{E}$, ce qui assure la conclusion.

Nous avons légèrement réécrit le raisonnement de Cauchy pour le faire entrer dans un moule moderne, mais on voit que la procédure d'approximation de la limite devinée à un ordre arbitraire est nettement mise en œuvre par Cauchy.

[17] Cauchy Augustin Louis (1821), *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique. Première partie : Analyse algébrique*, p. 54-58. Document BNF Gallica-Math : Œuvres complètes, série 2, tome 3.

Bibliographie

Artigue M. (1991) Analysis. Dans D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (pp.167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Artigue M. (1993) Enseignement de l'analyse et fonctions de références. *Repère IREM*. Vol 11. pp 115-139.

Artigue M., Batanero C., Kent P. (2007) Mathematics thinking and learning at post-secondary level. Dans F. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.1011-1049). Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing, Inc.

Barrera R. (2011), Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique. Petit x n° 85, Irem de Grenoble.

Bloch I. (2000), Une situation d'introduction à la notion de limite en première scientifique : le flocon de Von Koch, dans I. Bloch : L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation, thèse de l'Université Bordeaux 1.

Bloch I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 19 (2). pp 135-193.

Bloch I. (2002) Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x*. Vol 58. pp 25-46.

Castela C. (1995) Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 15 (1). pp 7-48.

Castela C. (1997). La droite des réels en seconde : point d'appui disponible ou enjeu clandestin ? Brochure de l'IREM de Rouen.

Chorlay R. (2011) Local-global: the first twenty years. *Archives for history for exact sciences*. Vol 65. pp 1-66.

Cornu B. (1983) Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. Thèse de doctorat. Université de Grenoble 1. Grenoble.

Gantois J-Y., Schneider M. (2009) Introduire les dérivées par les vitesses. Pour qui ? Pourquoi ? Comment ? Revue Petit x, 79, pp5-21

Gantois, J.-Y. & Schneider, M. (2012), Une forme embryonnaire du concept de dérivée induite par un milieu graphico-cinématique dans une praxéologie 'modélisation'. Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 32 (1), 57-99.

Gueudet G. (2008) Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 67. pp 237-254.

Lambre T. (1998), L'épreuve sur dossier à l'oral du Capes de mathématiques, Tome II : analyse, Ellipses, Paris.

Hauchart, C. & Schneider, M. (1996) Une approche heuristique de l'analyse. *Repères IREM*. Vol 25. pp.35-62

Lecorre T. (2013), Situation pour la limite, TD à l'Ecole d'été de didactique des mathématiques, Nantes 2013.

Mamona-Downs Joanna (2010), On introducing a set perspective in the learning of limit of a real sequence. International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology, 41(2), p. 277-291.

Maschietto M. (2002), L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de la calculatrice, thèse en cotutelle Paris 7 – Université de Turin.

Maschietto M. (2001) Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 21 (1-2). pp 123-156.

Maschietto M. (2008) Graphic Calculators and Micro Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computer for Mathematics Learning*. Vol 13. pp 207-230.

Perrin M.-J. (1999), La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point, Repères-IREM n° 34, janvier 1999, P. 5-12.

Robert A. (1982), L'acquisition du concept de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 3.3, p. 307-341, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robert A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP*. Vol 340. pp 431-449.

Robert A. (1998) Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 18 (2). pp 139-190.

Robert A., Boschet F. (1984) *Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de DEUG première année*. Cahier de didactique des mathématiques, Numéro 7, Publication de IREM de Paris 7.

Robinet J. (1983), Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction, Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 4.3, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robinet J. (1986). Les réels : Quels modèles en ont les élèves ? Educational Studies in Mathematics, 17, pp. 359-386.

Rogalski M. (2008) Les rapports entre local et global: mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. Dans L. Viennot (Eds.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp.61-87). Paris: PUF.

Schneider M. (1991) Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *Repère IREM*. Vol 5. pp 65-82.

Sierpinska A. (1992) On understanding the notion of function. Dans G. Harel et E. Dubinsky (Eds.) *The Concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy.* Mathematical Association of America Notes, volume 25.

Sierpinska A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol 6 (1). pp 164-198.

Thurston W. (1995), Preuve et progrès en mathématiques, Repères-IREM, n°21, octobre 1995, p. 7-26.

Vandebrouck F. (2011) Points de vue et domaines de travail en analyse. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 16. pp 149-185.

Vivier L. (2010) Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 15. pp 173-199.

TITRE :

Autour de la notion de dérivée en classe de première scientifique

AUTEURS:

Sylvie Alory, Renaud Chorlay, Charlotte Derouet, Vincent Josse, Clément Legris, Ratha Loeng, Monica Panero, Marc Rogalski, Fabrice Vandebrouck et Laurent Vivier

RESUME :

Cette brochure rassemble le travail du groupe IREM "Analyse" durant l'année 2013-2014 à l'issue de son travail sur le thème de la tangente et du nombre dérivé. La réflexion est essentiellement issue du travail de Sylvie Alory et Renaud Chorlay d'élaboration d'une séquence d'introduction de la tangente et du nombre dérivé viable compte tenu des programmes actuels d'enseignement et qui soit accessible pour les élèves. Cette séquence a été expérimentée par des enseignants du groupe IREM, ce qui est relaté dans le deuxième chapitre. La brochure contient des compléments, notamment sur la notion de fonction dérivée ainsi que des éléments de reliefs théoriques, historiques et épistémologiques.

MOTS- CLES :

Analyse, nombre dérivée, tangente, GeoGebra, limites

Éditeur: IREM de Paris
Responsable de la publication: F. Vandebrouck
IREM de Paris 7 – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13
irem_de_paris@univ-paris-diderot.fr
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/

Dépôt légal : 2015
ISBN : 978-2-86612-362-8