Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

2017

Édités par

Thomas Barrier et Christine Chambris

Presentation

Le séminaire national de didactique des mathématiques, organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration d'une communauté de chercheur-e-s.

Sous réserve de l'accord des intervenant-e-s, les présentations sont filmées et diffusées en ligne :

https://irem.univ-paris-diderot.fr/videos-du-seminaire-national-de-didactique-des-mathematiques

Le travail de capture, de montage et d'hébergement des vidéos a été assuré par l'IREM de Paris.

Au fur et à mesure de la finalisation des textes des interventions, ceux-ci sont mis à disposition sur le site de l'ARDM. Ils sont ensuite regroupés en un volume. Le présent ouvrage regroupe les textes issus des séminaires de l'année 2017 :

https://irem.univ-paris-diderot.fr/actes-du-seminaire-national-de-didactique-et-autres-actes

En 2017, en concertation avec la CFEM, nous avons fait évoluer le colloquium CFEM-ARDM. Nous avons proposé qu'une thématique soit choisie et que des intervenant-e-s, issus de la diversité des communautés préoccupées par l'enseignement des mathématiques, viennent l'éclairer. C'est le thème *mathématiques et citoyenneté* qui a été retenu pour cette première. Les interventions ont donné lieu à des textes qui sont rassemblés dans ce volume, en compagnie des textes du séminaire.

Signalons enfin que, depuis 2014, le groupe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM organise une session de posters durant les sessions du séminaire.

L'édition des actes a bénéficié du concours de Marie-Jeanne Perrin-Glorian pour le texte de Ferdinando Arzarello, d'Alain Kuzniak, Simon Modeste et Bernard Parzysz pour une partie des textes du colloquium CFEM-ARDM. Qu'ils et elle soient ici remercié-e-s. Nous remercions également Christophe Hache pour son aide dans l'organisation du séminaire.

Bonne Lecture.

Thomas Barrier et Christine Chambris

Responsables du séminaire de l'ARDM
pour les années 2016 et 2017

SOMMAIRE

Séminaire des 10 et 11 mars 2017

Colloquium CFEM- ARDM Mathématiques et citoyenneté *du 17 novembre 2017*

Séminaire du 18 novembre 2017

ANALYSE DES PROCESSUS D'APPRENTISSAGE EN MATHEMATIQUES AVEC DES OUTILS SEMIOTIQUES : LA COVARIATION INSTRUMENTEE

Ferdinando **ARZARELLO**

Dipartimento di Matematica « G. Peano »

Université de Turin

ferdinando.arzarello@unito.it

Résumé

L'article met l'accent sur la manière multimodale dans laquelle les processus d'apprentissage se produisent et se développent dans la classe de mathématiques. La première partie introduit le cadre théorique du faisceau sémiotique et ses connexions avec la notion vygotskienne de médiation sémiotique. Le problème de la médiation sémiotique est une question très importante pour l'apprentissage et le chapitre lui répond du point de vue du nouveau cadre, en mettant ainsi l'accent sur la genèse dynamique des signes dans les faisceaux sémiotiques lorsque les artefacts sont utilisés pour instrumenter les processus d'apprentissage. Plus précisément, dans la deuxième partie est introduite la notion de covariation instrumentée. Cela décrit la covariation comme un aspect important et théoriquement omniprésent de la pensée mathématique, mais pas tellement en termes d'enseignement. L'instrumentation avec des artefacts peut favoriser son apprentissage grâce à une planification didactique soignée. Nous l'illustrons avec un exemple qui montre la synergie positive produite par le potentiel sémiotique d'un « duo d'artefacts » utilisé dans une classe d'école primaire : le faisceau sémiotique est utilisé pour analyser les productions des élèves.

Mots clés

Covariation, Instrumentation, Faisceau sémiotique, Problème ouvert, Duo d'artefacts.

MULTIMODALITE ET GESTES

Une bonne enseignante de mathématiques du Liceo Classico Italien, engagée dans une expérience d'enseignement sur l'utilisation des mathématiques pour modéliser les phénomènes physiques [au grade 9], m'a dit un jour : « Ce matin, nous avons réalisé une activité sur la loi de Hook [...] À mon avis, il y avait un malentendu très important entre le sens de l'allongement et celui de la longueur [allungamento - lunghezza en Italien] du ressort. Cela les a empêchés de trouver les bonnes réponses. Et mes élèves sont du Liceo Classico ! ». Des malentendus similaires sont communs et diffus et concernent un vaste phénomène, qui a de profondes racines cognitives et épistémiques, et met en avant un important problème didactique. La prise de conscience de ce phénomène a des conséquences pertinentes pour la conception de l'enseignement.

Le but de cette contribution est d'encadrer théoriquement ces problèmes et de discuter des stratégies d'enseignement appropriées pour les surmonter. Je partagerai donc quelques réflexions sur un champ de recherches ayant un arrière-plan sémiotique, que moi-même et d'autres avons développé au cours des dernières années.

Ces problèmes m'amènent à me concentrer sur une racine commune à différents phénomènes sémiotiques décrits dans la littérature, et qui peuvent servir de base à la conception de tâches mathématiques à l'école : c'est la notion de covariation, largement étudiée par les didacticiens (pour un excellent résumé, voir Thompson & Carlson, 2017). En me basant sur cette notion et en utilisant un point de vue sémiotique, j'ai élaboré un outil d'analyse plus complexe, qui a une contrepartie didactique, que j'appelle *covariation instrumentée* (CI).

Dans cet article, en premier lieu je vais brièvement esquisser un cadre sémiotique (le *faisceau sémiotique*), que j'utilise pour étudier les phénomènes didactiques. Après, j'analyserai spécifiquement le phénomène mathématique de la covariation et les raisons qui font généralement défaut dans de nombreuses classes de mathématiques. Enfin, je définirai la CI, comme une méthodologie didactique possible, qui permet de déclencher et de soutenir une approche covariante des mathématiques.

Outils sémiotiques pour analyser les phénomènes didactiques dans la classe de mathématiques

Si on regarde la phénoménologie des processus d'apprentissage/enseignement dans la classe de mathématiques, on voit une variété d'actions et de productions activées par les élèves et par l'enseignant en utilisant simultanément différentes ressources :

- Mots (oralement ou par écrit) ;
- Modes d'expression extralinguistiques (gestes, regards, ...) ;
- Différents types d'inscriptions (formules, dessins, esquisses, graphiques, ...) ;
- Différents instruments (du crayon aux appareils numériques les plus sophistiqués).

Ces ressources sont (également) utilisées comme outils de communication. Les gestes sont ainsi revendiqués comme ayant un rôle social dans les processus de réflexion. Par exemple, McNeill, l'un des érudits les plus éminents sur la signification et le rôle des gestes dans le discours, avec ses recherches, montre qu'il y a un rôle constitutif des gestes dans la pensée (McNeill, 1992, 1996, 2005) : la pensée n'est pas simplement exprimée en mots ; elle se construit aussi avec les gestes. Cette affirmation peut être considérée comme une extension de l'hypothèse de Vygotski sur le rôle du discours par rapport à la pensée elle-même : c'est-à-dire que les gestes ne reflètent pas seulement la pensée mais ont un impact sur la pensée. Les gestes, avec le langage, aident à constituer la pensée.

L'observation montre que les gens (enseignants et élèves) font aussi des gestes en faisant des mathématiques. C'est dans cette hypothèse vygotskienne qu'il est possible de définir le rôle des gestes dans les activités mathématiques. Comme W. Roth l'écrit (2003) :

> ... les gestes expriment de nouveaux niveaux de compréhension avant qu'un élève exprime cette nouvelle compréhension en mots ; de plus, les gestes expriment les nouveaux concepts bien que le langage reste fidèle aux vieux concepts erronés.
>
> […] les élèves sont à l'écoute des gestes que les enseignants utilisent et parfois adaptent ces gestes à leurs propres répertoires expressifs, accélérant ainsi le développement de l'alphabétisation (literacy) scientifique. (p. 48 ; traduction de l'auteur)

Ces observations soulèvent des questions importantes, c'est-à-dire :

- Existe-t-il des spécificités des gestes en mathématiques, qui les distinguent de la gestuelle quotidienne ?

- Comment les gestes rentrent-ils dans les processus de conceptualisation mathématique des élèves ?
- Comment une telle analyse peut-elle aider les didacticiens des mathématiques dans leurs recherches et les enseignants dans leur travail ?

En se référant au numéro spécial de ESM (Edwards, Radford & Arzarello, 2009) pour une discussion détaillée de ces points, je mentionnerai ici un résultat très important qui ressort de ces recherches : les gestes en mathématiques sont profondément mêlés non seulement aux mots, mais aussi aux inscriptions produites par les personnes lorsqu'elles résolvent des problèmes. Par conséquent, il faut étendre le cadre habituel utilisé par les chercheurs qui étudient les gestes ; en effet, ce cadre souligne une unité profonde entre les gestes et les énoncés (McNeill, 1992), mais ne considère pas l'entrelacement avec les signes mathématiques, qu'ils soient produits ou interprétés par les agents (enseignants et élèves).
Mais si d'un côté il manque quelque chose à l'analyse habituelle des gestes quand nous analysons la gestuelle dans une classe de mathématiques, d'un autre côté il manque aussi quelque chose à l'approche sémiotique habituelle. Bien sûr, il est vrai que, comme le dit Duval (1995, p.4) : « Il ne peut y avoir de noésis sans sémiosis ». Les systèmes sémiotiques fournissent un environnement pour faire face aux mathématiques non seulement dans leur structure en tant que discipline scientifique, mais aussi du point de vue de leur apprentissage, car ils permettent de rechercher le fonctionnement cognitif sous-jacent à la diversité des processus mathématiques. En effet, l'approche des activités et des productions mathématiques comme systèmes sémiotiques nous permet aussi de considérer les problèmes cognitifs et sociaux qui concernent les phénomènes didactiques. Cependant, l'approche sémiotique classique impose de fortes limitations à la structure des systèmes sémiotiques qu'elle considère. Par exemple, selon Ernest (2006, pp. 69-70), un système sémiotique (classique) a trois composantes :
1. Un ensemble de signes, dont les marques pourraient éventuellement être prononcées, écrites, dessinées ou encodées électroniquement.
2. Un ensemble de règles de production et de transformation des signes, y compris la capacité potentielle de créativité dans la production de signes atomiques (simples) et moléculaires (composés).
3. Un ensemble de relations entre les signes et leurs significations incarnées dans une structure de signification sous-jacente.
En général, cette définition est trop étroite pour interpréter la complexité des phénomènes didactiques en classe. Ceci pour deux raisons :
(i) Comme observé par Radford (2002), il existe une variété de ressources sémiotiques utilisées par les élèves et les enseignants, comme les gestes, les regards, les dessins et les modes d'expression extralinguistiques, qui ne répondent pas aux exigences des définitions classiques pour les systèmes sémiotiques tels qu'ils sont discutés dans la littérature (voir par exemple Duval, 2001).
(ii) La façon dont ces registres différents sont activés est multimodale. Il est nécessaire d'étudier attentivement les relations à l'intérieur des registres et entre ceux qui sont actifs au même moment ainsi que leur dynamique de développement dans le temps. Cette étude ne peut être réalisée que partiellement à l'aide des outils classiques de l'analyse sémiotique. Le point de vue sémiotique classique est aveugle par rapport à beaucoup de ressources sémiotiques qui sont actives dans la salle de classe. Comme le soulignent Bosch et Chevallard (1999), il est nécessaire de disposer d'un système qui peut également donner raison des différents registres :

> le registre de *l'oralité*, le registre de *la trace* (qui inclut graphismes et écritures), le registre de *la gestualité*, enfin le registre de ce que nous nommerons, faute de mieux, *la matérialité*

> *quelconque*, où prendront place ces objets ostensifs qui ne relèvent d'aucun des registres précédemment énumérés. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 96, souligné dans l'original)

Pour surmonter ces deux difficultés, j'adopte une approche vygotskienne pour l'analyse des ressources sémiotiques et présente une notion élargie du système sémiotique, que j'ai appelée *faisceau sémiotique*. Il englobe tous les registres sémiotiques classiques comme des cas particuliers. Ainsi, il ne contredit pas l'analyse sémiotique développée à l'aide de tels outils mais permet d'obtenir de nouveaux résultats et de cadrer les anciens dans une image unitaire. Le faisceau sémiotique (Arzarello, 2006) est un outil qui peut offrir une analyse intégrée de toutes les ressources sémiotiques dans la classe de mathématiques (Arzarello & Sabena, 2014).

Mon cadre est également spécifique aux mathématiques ; il permet de mieux combiner deux problématiques : celle de la sémiotique, dans l'esprit de la définition d'Ernest des systèmes sémiotiques, et l'autre de la psychologie, selon l'approche vygotskienne. Les deux images sont essentielles pour analyser les processus d'apprentissage en mathématiques ; ils sont ici intégrés dans un modèle plus large.

D'une part, il est nécessaire d'élargir la notion de système sémiotique pour englober toute la variété des phénomènes de médiation sémiotique en classe, comme le suggérait déjà Radford (2002), qui a introduit une nouvelle notion de système sémiotique :

> L'idée du système sémiotique que j'introduis comprend un système classique de représentations - langage naturel, formules algébriques, systèmes de représentation bi ou tridimensionnels, en d'autres termes, ce que Duval (2001) appelle registres discursifs et non discursifs - mais comprend aussi des systèmes plus généraux, tels que les gestes (qui ont une signification intuitive et dans une certaine mesure, une syntaxe floue) et des artefacts, comme les calculatrices et les règles, qui ne sont pas des signes mais ont une signification fonctionnelle. (Radford, 2002, note p.7, traduction de l'auteur).

D'un autre côté, les processus psychologiques de l'intériorisation, si importants dans la description de la médiation sémiotique des signes et des outils, doivent occuper une place naturelle dans le nouveau modèle.

Une fois que les systèmes sémiotiques ont été élargis pour contenir des gestes, des instruments, des pratiques institutionnelles et personnelles et, en général, des moyens d'expression extralinguistiques, la même idée de fonctionnement dans ou entre différents registres change de sens. Il ne s'agit plus seulement d'un traitement ou d'une conversion (en utilisant la terminologie de Duval) dans ou entre des représentations sémiotiques selon des règles algorithmiques (par exemple la conversion du registre géométrique dans le registre du graphique cartésien). Au contraire, les opérations (intra ou inter) doivent être élargies pour englober aussi des phénomènes qui ne peuvent pas être strictement algorithmiques : par exemple, des pratiques avec des instruments, des gestes, etc.

À ce stade de la discussion, pour obtenir un système sémiotique aussi étendu, il faut étendre la définition ci-dessus d'Ernest. Nous arrivons ainsi à la notion que j'ai appelée *faisceau sémiotique*, ou faisceau d'ensembles sémiotiques (Arzarello, 2006). Pour le définir, j'ai besoin d'abord de la notion d'ensemble sémiotique, qui est un élargissement de la notion de système sémiotique.

Un *ensemble sémiotique* est :

a) Un ensemble de signes qui peuvent éventuellement être produits avec différentes actions qui ont un caractère intentionnel, comme le fait de dire, d'écrire, de dessiner, de faire des gestes, de manipuler un artefact ;

b) Un ensemble de modes pour produire des signes et éventuellement les transformer ; de tels modes peuvent éventuellement être des règles ou des algorithmes mais peuvent aussi être des modes d'action ou de production plus flexibles utilisés par le sujet ;

c) Un ensemble de relations entre ces signes et leurs significations incarnées dans une structure de signification sous-jacente.
Les trois composantes ci-dessus (signes, modes de production / transformation et relations) peuvent constituer une variété de systèmes, allant des systèmes de composition, habituellement étudiés en sémiotique traditionnelle (par exemple les langages formels) aux ensembles de signes ouverts (par exemple les gestes). Les premiers sont faits de constituants élémentaires et leurs règles de production impliquent à la fois des signes atomiques (simples) et moléculaires (composés). Les derniers ont des caractéristiques holistiques, ne peuvent être divisés en composants atomiques, et les modes de production et de transformation sont souvent idiosyncrasiques pour le sujet qui les produit, même s'ils incarnent des aspects culturels profondément partagés, selon la notion de système sémiotique de significations culturelles élaborée par Radford, cité ci-dessus. Le mot 'ensemble' doit être interprété dans un sens très large, par ex. comme une collection variable d'objets.
Un *faisceau sémiotique* comprend :
(i) Une collection d'ensembles sémiotiques, qui changent dans le temps ;
(ii) Une collection de relations entre les ensembles du faisceau.
Certaines des relations peuvent avoir des modes de conversion entre elles.
Un faisceau sémiotique ne doit pas être considéré comme une juxtaposition d'ensembles sémiotiques ; au contraire, c'est un système unitaire et ce n'est que pour l'analyse que nous distinguons ses composantes comme des ensembles sémiotiques. De plus, un faisceau sémiotique est une structure dynamique qui peut changer dans le temps à cause des activités sémiotiques du sujet (d'où son nom, tiré de la théorie mathématique des topoi, c'est-à-dire comme faisceau d'ensembles variables : Goldblatt, 1984) : par exemple, la collection d'ensembles sémiotiques qui le constituent peut changer ; de plus, les relations entre ses composantes peuvent varier dans le temps ; parfois les règles de conversion ont une nature génétique, à savoir qu'un ensemble sémiotique est engendré par un autre, élargissant le faisceau lui-même (on parle alors de conversions génétiques).
Il faut observer que si l'on se borne à examiner seulement les systèmes sémiotiques classiques, de nombreux aspects intéressants des discours humains sont perdus : ce n'est qu'en considérant les faisceaux d'ensembles sémiotiques que l'on peut découvrir de nouveaux phénomènes.
Un premier exemple de faisceau sémiotique est donné par l'unité parole-geste (McNeill, 1992) : le geste et le langage forment un faisceau sémiotique, constitué de deux ensembles sémiotiques profondément entremêlés (un seul, le discours, est aussi un système sémiotique classique). La recherche sur les gestes a mis au jour des relations importantes entre les deux (par exemple, les notions de 'match-mismatch' dans Goldin-Meadow, 2003). Un deuxième exemple se trouve dans le travail de De Freitas et Sinclair (2012, p. 149), même s'il est dans une perspective différente (*ibid.*, p. 151) : ici l'unité du faisceau sémiotique est donnée par l'entrelacement entre les dessins et les gestes dans les activités mathématiques d'étudiants universitaires.

Sur le plan théorique, le faisceau sémiotique permet de décrire d'une manière plus confortable la notion de *médiation sémiotique*, qui est au cœur du cadre de Vygotski (Bartolini & Mariotti, 2008). Selon Vygotski, le rôle et la dynamique de la médiation sémiotique peuvent être caractérisés comme suit : d'abord, orienté vers l'extérieur, un signe ou un outil est utilisé en action pour accomplir une tâche spécifique ; puis, les actions avec le signe ou l'outil (activité sémiotique, éventuellement sous la direction d'un expert), génèrent de nouveaux signes (mots inclus), qui favorisent le processus d'intériorisation et produisent un nouvel outil psychologique, orienté vers l'intérieur, complètement transformé mais qui conserve certains aspects de son origine. Selon Vygotski, une composante majeure de ce processus d'internalisation est le langage, qui permet les transformations. Ce sont précisément les signes qui transforment le registre linguistique du discours en un nouveau système : Vygotski l'appelle langage intérieur, qui a une structure complètement différente de celle du langage extérieur (Vygotsky, 1985, chap. 7). Vygotski distingue deux types de propriétés qui permettent de différencier le langage intérieur du langage extérieur : les propriétés structurelles et les propriétés sémantiques. Les propriétés structurelles du langage intérieur sont sa réduction syntaxique et sa réduction phasique : la première consiste dans le fait que le langage intérieur se réduit à la juxtaposition pure de prédicats minimisant son articulation syntaxique ; la seconde consiste à minimiser ses aspects phonétiques, à savoir réduire les mêmes mots. Selon Vygotski, les propriétés sémantiques du langage intérieur sont basées sur la distinction faite par le psychologue français Frédéric Pauhlan entre le sens et la signification d'un mot et sur ce qu'il appelle la prépondérance du sens [smysl] d'un mot sur sa signification [znachenie] (Vygotski, 1985). Dans le langage intérieur, le sens est toujours en train de submerger la signification. Cet aspect dominant du sens a deux effets structurels sur le langage intérieur : l'agglutination et l'influence. Le premier consiste à coller différentes significations (concepts) en une seule expression ; le second se produit lorsque les différents sens « coulent » ensemble en une seule unité. Pour expliquer les propriétés du discours intérieur, Vygotski utilise des analogies qui se réfèrent au discours extérieur et qui ne donnent qu'une idée de ce qu'il veut dire : en fait, il utilise un système sémiotique (écrit ou parlé) pour décrire quelque chose qui n'est pas un système sémiotique. Les métaphores de base par lesquelles Vygotski décrit le langage intérieur montrent leur similarité avec les ensembles sémiotiques : des propriétés comme l'agglutination et l'influence font que le discours intérieur s'apparente à des ensembles sémiotiques, comme les dessins, les gestes, etc. En outre, les phénomènes de réduction syntaxique et phasique signifient que les propriétés dites linéaires et compositionnelles des systèmes sémiotiques classiques sont violées. La description de Vygotski ne s'interprète que partiellement en termes de systèmes sémiotiques.

La notion de faisceau sémiotique permet de rendre compte correctement du point le plus important de l'analyse de Vygotski, à savoir les transformations sémiotiques qui permettent la transformation du discours externe en discours intérieur. Le cœur de l'analyse de Vygotski, à savoir le processus d'intériorisation, consiste précisément à signaler une conversion génétique au sein des faisceaux sémiotiques : il génère une nouvelle composante sémiotique, le discours intérieur, à partir d'un autre existant, le discours extérieur. La description est donnée en utilisant la structure du discours extérieur (le langage extérieur), qui est clairement un système sémiotique, pour construire des métaphores de base afin de donner une idée de la seconde (le langage intérieur), qui est un ensemble sémiotique. Le processus peut être décrit par des transformations dynamiques des composantes d'un faisceau sémiotique qui évolue dynamiquement à travers leur action.

En termes de pratiques d'enseignement, cette approche avec un système sémiotique plus large est particulièrement fructueuse lorsque les processus et les activités des personnes apprenant les mathématiques sont examinés. Dans les recherches réalisées par l'équipe de Turin, nous étudions les faisceaux sémiotiques composés de plusieurs ensembles sémiotiques : gestes, discours et inscriptions écrites (par exemple symboles mathématiques, dessins). Les résultats consistent à décrire certaines des relations et des règles de conversion au sein d'un tel ensemble complexe. Dans ces recherches nous élaborons également une méthodologie didactique qui peut être utile pour améliorer l'apprentissage des élèves selon une perspective vygotskienne.

Typiquement, l'analyse des processus d'apprentissage avec le faisceau sémiotique permet de mettre en évidence certaines relations entre les objets mathématiques et l'élève qui va les saisir, mais n'est pas encore en mesure de s'exprimer immédiatement et complètement avec le

langage verbal (il est en ‘zone de développement proximal’). Une médiation sémiotique appropriée peut favoriser l'évolution de ses processus de compréhension. Cette médiation peut être faite par l'enseignant ou avec l'utilisation d'instruments, qui, avec le soutien de l'enseignant, peuvent également servir comme médiateurs de ces processus. Un exemple du premier type est donné par les *jeux sémiotiques*, que j'ai développé il y a quelques années (Arzarello & Paola, 2007; Arzarello et al., 2009), tandis qu'un exemple du deuxième type, la covariation instrumentée, est essentiellement nouveau dans ce cadre théorique et est le sujet de la deuxième partie du chapitre.
Avant de développer ce deuxième thème, pour des raisons d'exhaustivité, je terminerai la première partie du chapitre par un très petit sketch sur les jeux sémiotiques. Un jeu sémiotique peut se produire lorsque l'enseignant interagit avec les élèves, comme dans les discussions en classe ou pendant le travail en groupe. Dans un jeu sémiotique, l'enseignant utilise la ressource sémiotique activée (entre autres) par l'étudiant (par exemple les gestes) et produit les mêmes signes que lui dans ce registre, afin de l'informer que ce qu'il produit est correct. Mais l’enseignant utilise une autre ressource sémiotique (par exemple, la parole) dans laquelle il exprime d'une manière précise, en utilisant le langage scientifique officiel, le concept qu’il a reconnu, comme enseignant, dans la production imprécise et naissante de l'élève. De cette façon il fait évoluer les connaissances mathématiques des élèves vers des significations scientifiquement partagées : c’est-à-dire, il prête ses mots à ce que les élèves avaient voulu dire en utilisant des gestes. C'est un aspect délicat des stratégies d'enseignement, à ne pas confondre avec l'effet « funnel » (entonnoir) (Bauersfeld, 1978, p. 162) ou «Topaze» (Brousseau, 1997, p. 162).

LA COVARIATION INSTRUMENTEE

La deuxième partie de ma présentation introduira une forme spécifique de médiation sémiotique: la *covariation instrumentée* (CI). Dans la CI les instruments jouent un rôle de pivot, et le faisceau sémiotique est un outil d’analyse très utile. La CI étend le concept de médiation sémiotique tel qu’on le trouve dans la littérature, en particulier celle de Bartolini et Mariotti (2008).
Je présenterai d’abord la CI en m'appuyant sur quelques outils théoriques que je vais résumer très schématiquement. Après cette courte introduction théorique, j’illustrerai la CI à travers un exemple concret qui concerne la géométrie au niveau primaire. Cependant les résultats ne sont pas limités à cet âge ni à ce sujet.

La covariation dans les mathématiques

De nombreuses recherches montrent la pertinence du raisonnement covariant en mathématiques d'un point de vue épistémologique :

> Nous soulignons que le raisonnement covariant continu, ou le raisonnement sur les valeurs de deux quantités ou plus variant simultanément, a joué un rôle crucial dans l'invention par les mathématiciens des concepts qui ont conduit à la définition moderne de la fonction, de l'utilisation d'équations pour représenter une variation contrainte à des représentations explicites de relations déterministes entre des quantités. (P.W. Thompson and M.P. Carlson, 2017, p. 423 ; traduction de l’auteur)

Le raisonnement covariant a fait irruption de façon spectaculaire dans les mathématiques avec la naissance et le développement de l'algèbre moderne grâce aux travaux de Viète, Descartes et autres. Les méthodes d'analyse et de synthèse en algèbre, empruntées à la géométrie des Grecs, introduisent une manière révolutionnaire d'aborder les problèmes de mathématiques, que Lagrange au début du XIXème siècle a pu résumer comme suit :

> L'algèbre prise dans le sens le plus étendu, est l'art de déterminer les inconnues par des fonctions des quantités connues, ou qu'on regarde comme connues. (Lagrange, 1808, p. vii).

La rupture du nouveau paradigme avec l'idée d'une algèbre élémentaire comme arithmétique généralisée, selon une image souvent présente dans les manuels (mais pas seulement), a été discutée dans un article très important de Chevallard (1989), où il souligne le rôle crucial que les variables et les paramètres jouent dans la nouvelle algèbre, tant d'un point de vue épistémologique que didactique. Par exemple, la solution "arithmétique" (verbale) d'un problème élémentaire comme le suivant :

> Diviser un nombre donné en deux parties telles que la première dépasse la seconde en un excès donné.

ne peut être traduit en termes algébriques que si l'on fait un raisonnement covariant, en utilisant des paramètres pour représenter (et manipuler) les nombres supposés donnés.

En fait, la nouvelle méthode de raisonnement covariant avec les quantités physiques a été l'une des racines qui a rendu possible la naissance de la science moderne avec les ‘sensate esperienze e le dimostrazioni matematiche’ (expériences sensibles et démonstrations mathématiques) de Galilei. Ce type de raisonnement s'est développé comme une recherche des relations entre des variables concrètes, dynamiques et continues, pour exprimer l'idée de changement et les phénomènes de mouvement. C'est une très vieille histoire : les anciens savants manquaient d'une description mathématique du mouvement ; ils voyaient la distance et le temps comme des quantités mesurables, mais pas la vitesse. En fait, la notion de changement, selon la philosophie d'Aristote, n'était que de nature qualitative et avait une signification très large (Génération et corruption, Altération, Augmentation et diminution, Mouvement local). Les idées ont changé à partir du Moyen Age et c'est au XIVe siècle que des nouvelles conceptions révolutionnaires ont mûri à Oxford, au Merton College, et à Paris, avec Nicole Oresme (1325-1380). Les philosophes du Moyen Age avaient réalisé que les qualités ont aussi une intensité (Arzarello, 2004). Les lois mathématiques de la nouvelle science peuvent s'exprimer parce qu'on commence à raisonner de manière covariante ; l'algèbre, cependant, ne suffit plus et un nouveau calcul est nécessaire. Malheureusement, cette manière fondamentale de raisonner a été négligée dans les écoles : comme l'algèbre est enseignée comme une arithmétique généralisée, les fonctions sont souvent enseignées aussi suivant la définition statique de Bourbaki, qui gèle leur nature dynamique dans le langage statique de la théorie des ensembles.

Cette affirmation sur la pertinence de soutenir le raisonnement covariant à l'école est également énoncée dans le document cité de P.W. Thompson et M.P. Carlson (2017), avec de nombreuses références ; ils écrivent :

> [N]ous soutenons que le raisonnement variant et covariant est fondamental pour le développement mathématique des élèves. Nous fondons cette affirmation sur des recherches qui mettent en évidence les difficultés éprouvées par les étudiants en ce qui concerne les relations fonctionnelles, car ils n'ont pas la capacité de raisonner de façon variante ou covariante et dans des recherches montrant des changements productifs dans les conceptions et utilisations des fonctions par les enseignants et les élèves, quand ils utilisent le raisonnement covariant. (*ibid.*, traduction de l'auteur)

La même question a été analysée d'un point de vue différent en psychologie par J. Piaget (1950) et en mathématiques par W. Lawvere et S. Schanuel (1991) : le premier en définissant la notion d'opérateur multiplicatif ; les derniers en discutant la notion de produits, coproduits et adjonctions au sein de la théorie des catégories.

Saldanha and Thompson (1998) reprennent le travail de Piaget :

> L'idée de Saldanha et Thompson d'un objet multiplicatif est dérivée de la notion de ‘et’ chez Piaget en tant qu'opérateur multiplicatif - une opération que Piaget a décrite comme une classification opératoire et une sériation sous-jacentes dans la pensée des enfants.
>
> (Thompson & Carlson, 2017, p. 433, traduction de l’auteur)

Ces travaux illustrent la covariation à partir de deux points de vue concurrentiels, cognitifs et épistémologiques.

Pour le premier : une personne forme un objet multiplicatif à partir de deux quantités lorsqu'elle unit mentalement leurs attributs pour faire un nouvel objet conceptuel qui est simultanément l'un et l'autre. Saldanha et Thompson (1998) illustrent cela en considérant l'engagement des étudiants dans des tâches centrées sur l'activité de suivre et de décrire le comportement des distances entre une voiture et deux villages pendant que la voiture se déplace le long d'une route ; les étudiants utilisent un environnement géométrique dynamique pour simuler le mouvement de la voiture en faisant glisser un point avec la souris et en commentant la trace des deux distances pendant qu'elles covarient.

Dans le premier chapitre de leur livre introductif à la théorie des catégories, Lawvere et Schanuel (1991) introduisent aussi le phénomène de covariation avec la notion d'objet multiplicatif en se basant sur un exemple historique, qui montre à la fois sa parenté directe avec la notion de Piaget (en fait ils utilisent la même terminologie), et sa pertinence pour la révolution scientifique :

> Commençons par Galilée, il y a quatre siècles, qui s'interroge sur le problème du mouvement. Il voulait comprendre le mouvement précis d'un rocher lancé ou celui du jet d'eau d'une fontaine. Tout le monde a observé les arcs gracieux paraboliques qu’ils produisent ; mais le mouvement d'un rocher signifie plus que sa trajectoire. Le mouvement implique, pour chaque instant, la position de la roche à cet instant ; pour l'enregistrer, il faut une image animée plutôt qu'une exposition temporelle. Nous disons que le mouvement est une ‘carte’ (ou fonction) du temps dans l’espace.
>
> […]
>
> Ces deux cartes, ombre et niveau, semblent réduire chaque problème d'espace à deux problèmes plus simples, l'un pour le plan et l'autre pour la ligne. Par exemple, si un oiseau est dans votre espace, et que vous ne connaissez que l'ombre de l'oiseau et son altitude, vous pouvez reconstituer la position de l'oiseau. Il y a plus, cependant. Supposons que vous ayez un film montrant l'ombre de l'oiseau pendant qu'il vole, et un film de son altitude - peut-être y avait-il un ornithologue grimpant sur notre ligne, restant toujours à la même altitude que l'oiseau et filmant le spectateur. A partir de ces deux films, vous pouvez reconstituer tout le vol de l'oiseau ! Donc non seulement une position dans l'espace est réduite à une position dans le plan et une autre sur la ligne, mais aussi un mouvement dans l'espace est réduit à un mouvement dans le plan et un sur la ligne.
>
> […]
>
> La découverte de Galilée est que de ces deux mouvements plus simples, dans le plan et sur la ligne, il pourrait complètement retrouver le mouvement complexe dans l'espace.
>
> (Lawvere & Schanuel, 1991, 3-6, traduction de l’auteur)

Les aspects épistémologiques et cognitifs généraux de la covariation ont été mis en évidence par la notion d'objet multiplicatif dans Piaget et (Lawvere & Schanuel, 1991), tandis que l'exemple de Saldanha et Thompson illustre ses potentialités didactiques.

Nous allons maintenant approfondir l'analyse de la covariation en utilisant un outil didactique plus spécifique : la notion de problème ouvert (Arsac, Germain et Mante, 1991). Ensuite, nous pourrons nous concentrer sur un important phénomène didactique, la *covariation instrumentée* : elle peut aider les enseignants à concevoir des situations didactiques appropriées, dont le but est d'initier les étudiants au raisonnement covariant dans des environnements de géométrie dynamique.

Problèmes ouverts

Il est bien connu que la formulation d'une tâche est une variable didactique importante : le même problème peut changer selon la manière dont il est formulé. Notre but est de rechercher des formulations appropriées de problèmes qui stimulent le raisonnement covariant. Dans ce but, la notion de *problème ouvert* (Arsac, Germain et Mante, 1991) se révèle très utile. Le résumé réalisé par Kosyvas sur l'histoire et les potentialités didactiques des problèmes ouverts (Kosyvas, 2010) affirme que, selon l'élaboration faite par le groupe de recherche de l'IREM de Lyon, les principales caractéristiques d'un problème ouvert sont :

- L'énoncé du problème est habituellement court et formulé en langage courant ou mathématique. L'énoncé simple et court favorise la lecture rapide et la compréhension et crée des conditions de facilité en ce qui concerne ce qui se maintiendra en mémoire et en ce qui concerne la gestion des données. En outre, il peut donner l'impression que le problème est facile et inciter à s'intéresser à ce problème.
- En aucun cas, cette solution ne devra se limiter à l'utilisation simple ou à l'application directe de conclusions ou de règles qui se sont présentées durant les derniers cours, parce qu'alors, il constituera un problème d'application directe et non un problème ouvert. Cependant, ce qui a une importance fondamentale est la manière dont est posé l'énoncé du problème ouvert qui ne résulte pas directement de la méthode et de la solution.
- Le problème ouvert doit être fondé sur des notions avec lesquelles les enfants sont assez familiarisés. Ceci est indispensable afin que les enfants, dans le cadre des restrictions habituelles de l'horaire scolaire, puissent calculer des résultats ou produire des idées dans le temps imparti. Le problème peut être ouvert mais cependant, le temps de la recherche reste malheureusement fermé. Dans ces conditions, les enfants doivent pouvoir saisir facilement la situation et prendre part à des essais, formuler des conjectures, établir des voies de vérification, des projets de résolution et des contre-exemples, lesquels visent à la découverte et à la création de la solution ou des solutions du problème ouvert. (Kosyvas, 2010, p.56).

Dans la dernière partie nous verrons l'utilisation de problèmes ouverts dans le cadre de la covariation instrumentée.

Un exemple

Voyons maintenant un exemple où la notion de problème ouvert peut être utilisée pour l'analyse didactique d'un problème.
Voici le "même" problème énoncé dans deux versions différentes (Figure 1) :

- avec une formulation standard (FS) dans le cadre théorique classique de la géométrie euclidienne (hypothèse, thèse)
- comme un problème ouvert (PO), à résoudre éventuellement dans un environnement de géométrie dynamique (EGD).

<u>FS (formulation standard)</u>:
Etant donnés trois points A, P, D, et C le symétrique de A par rapport à P. Le cercle *C* de centre C et de rayon CP coupe la droite (PD) en B. Prouver que si PD = PB alors ABCD est un parallélogramme.
<u>PO (problème ouvert)</u>:
Soient trois points A, P, D, et C le symétrique de A par rapport à P. Le cercle *C* de centre C et de rayon CP coupe la droite (PD) en B. Étudier quels types de quadrilatères peuvent être obtenus en faisant varier A, P, D.

Dans la version FS, il n'y a pas la même canalisation de l'attention que dans PO : l'hypothèse et la thèse sont liées par la relation de démonstration logique dans une théorie, dont la technique peut être plus ou moins opaque au solveur.

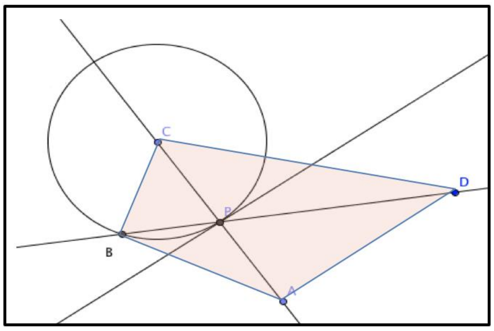


Figure 1

Les deux situations sont descriptibles aussi en utilisant le modèle de la *microgenèse de la représentation d'un problème* développé par Saada-Robert. Le problème, en fonction de la façon dont il est formulé peut induire deux modalités différentes de contrôle : descendante ou ascendante :

> Lorsque le contrôle est descendant, il y a formation d'une idée-guide et recherche autour de sa réalisation, par adéquation entre objet de pensée et objet de travail (objet de production). […]
> Lorsque le contrôle est ascendant, il y a d'abord recherche exploratoire sur l'objet de production défini par la primitive pertinente ; puis formation de l'objet de pensée adéquat (adéquation renforcée par l'idée-guide correspondante). Dans ce cas, la primitive est à la source de l'unité prototype ; le découpage de cette dernière dépend de la primitive repérée à partir du dispositif et du but fixé, et c'est elle qui sert alors de cadre organisateur à la recherche du bon objet à penser." (Saada-Robert, 1989, p. 204)

La modalité descendante est la modalité cognitive qui caractérise la voie du raisonnement vers l'avant, y compris la manière déductive du raisonnement ; inversement, la modalité ascendante est une modalité cognitive qui comporte une façon de penser 'à rebours', vers l'arrière.
D'une manière générale, une formulation ouverte induit d'abord un contrôle ascendant, la formulation d'une conjecture et après un contrôle descendant, avec de possibles alternances descendante-ascendante.
Plusieurs exemples sont discutés dans les ouvrages mentionnés auparavant et aussi par E. Gallo et al. (1989) dans le domaine algébrique.

En général, une formulation standard peut provoquer des blocages car il faudrait commencer par la recherche des éléments théoriques qui pourraient valider la thèse : mais ce n'est pas induit par la formulation et il se peut au contraire qu'elle provoque des modes descendants, qui peuvent produire des difficultés parce que ces modes ne sont pas liés à des conjectures construites. Au contraire, la formulation PO du même problème induit la pensée "dans la direction opposée" à celle où elle est induite dans le cas FS.

L'exemple soulève la question de savoir quelles restrictions devraient être mises sur D pour que ABCD soit un parallélogramme. La modalité ascendante est induite par la formulation elle-même.
La formulation ouverte de l'exemple, suggère une covariation fonctionnelle du type :

$$? \ D = f(B,\_) \ ?$$

Logiquement, c’est une relation fonctionnelle f entre B et D qui est possible. C'est la construction d'un objet multiplicatif (selon les modèles de Piaget et Lawvere et Schanuel, 1991, introduits plus haut) à partir des deux objets D, B. La construction de cet objet est donc le résultat d'un raisonnement covariant, soutenu éventuellement par l'exploration faite dans un EGD. L'exploration est conduite avec ce but en modalité alternativement ascendante et descendante, selon une approche ouverte à la découverte et à la construction de liens entre les faits observés et non à l'application pure d'algorithmes et de règles connus. Au contraire, la formulation standard ne pousse pas les étudiants vers une attitude d'enquête et les empêche généralement d'adopter une approche covariante. Cet aspect typique des processus de résolution des étudiants dans le cas de problèmes ouverts est clairement décrit, même si c'est avec une langue différente, par G. Kosyvas (2010, p. 63):

> Les élèves devront renverser la procédure formelle d’une liaison directe des données avec les questions. En faisant preuve d’imagination et d’inventivité, ils sont appelés à suivre une voie scientifique non linéaire qui implique des progrès et des retours en arrière, des balancements et des renversements d’obstacles, des contrôles et des reconstructions : ils commencent en fouillant et en effectuant des essais pour élaborer une hypothèse initiale de solution, ils vérifient ou infirment l’hypothèse en la testant plusieurs fois et à la fin, la découverte de la solution (ou des solutions) “démontre” la valeur de l’hypothèse. La preuve de l’élève, c’est une voie personnelle, qui diffère des démonstrations mathématiques formelles, et dans cette perspective, il est peut-être mieux que nous parlions de preuve ou d’argumentation et non de démonstration (Balacheff, 1987). Et bien évidemment, on développe la confiance des enfants dans leurs propres compétences. Il est nécessaire de les prendre en compte en tant que sujets.

Du problème ouvert à la covariation instrumentée

Une approche covariante est un phénomène profond qui n’est présent ni épistémologiquement ni didactiquement dans la formulation didactique habituelle, dans le cadre théorique de la géométrie euclidienne (TGE). Par conséquent les habitudes scolaires vont dans la direction opposée. Donc, une approche covariante :

- induit une forme géométrique « différente » (par ex. celle typique des problèmes ouverts où l’on demande de conjecturer);
- implique un changement épistémologique par rapport à TGE;
- a des conséquences cognitives (raisonnement “à rebours”);
- peut avoir des conséquences didactiques dans la salle de classe.

Cela prouve une discontinuité épistémologique entre TGE et la géométrie formulée avec des problèmes ouverts. Cognitivement, la discontinuité est particulièrement marquée quand le problème est abordé dans un EGD. La valeur ajoutée dans ce cas est donnée par l’approche covariante, qui est absente dans le TGE. Beaucoup de différences cognitives entre les deux environnements (TGE vs PO, éventuellement avec EGD) ne sont que la contrepartie cognitive de cette discontinuité.

La recherche / découverte de covariation, que visent les problèmes ouverts, est le ciment qui lie les étapes des arguments. Le travail avec le logiciel constitue une instrumentation de ce processus de recherche covariant. Il peut également avoir lieu dans l'environnement papier et crayon, mais généralement nécessite des solveurs plus experts. L'environnement de géométrie dynamique est un artefact qui amplifie les phénomènes qui dépendent de la formulation du problème et permet leur instrumentation. Le faisceau sémiotique peut nous aider à décrire adéquatement ces phénomènes de covariation instrumentée produits par une ingénierie didactique appropriée avec les artefacts. Bien sûr, le mot instrumentation dérive de l'approche instrumentale de Vérillon et Rabardel (1995), qui soulignent la distinction entre un artefact (un objet matériel ou abstrait, déjà produit par l'activité humaine) et un instrument (une entité mixte avec une composante artefact et une composante cognitive, représentée par des schèmes d'utilisation).

Je présente maintenant un extrait d'une discussion générale finale dans une classe de quatrième année d'école élémentaire, presque à la fin d'une expérience d'enseignement, où la notion de symétrie axiale a été introduite en utilisant deux artefacts différents, selon une variante de l'approche du *duo d'artefacts matériels et numériques* utilisée par Maschietto et Soury-Lavergne (2013). L'expérience d'enseignement a été faite à Bari et a été mise en oeuvre par Faggiano, Montone, et Rossi (Faggiano et al., 2017). L'exemple décrit comment un duo d'artefacts peut produire une compréhension instrumentée de la covariation dans une situation de symétrie géométrique entre deux points : c'est un processus que nous appellerons précisément *covariation instrumentée*. On verra que la covariation instrumentée (CI) est une forme particulière de médiation sémiotique (Bartolini et Mariotti, 1999). Je travaille actuellement sur ce problème et je présente donc ici les résultats d'une recherche en cours.

Les deux artefacts sont très différents l'un de l'autre. L'artefact concret consiste en une feuille de papier sur laquelle est dessinée une ligne droite pour le pliage, et une épingle pour percer le papier aux points choisis afin de construire leurs symétriques. Cet artefact permet de créer directement une symétrie axiale car la feuille modélise naturellement le plan et le pli permet la réalisation de deux points symétriques à l'aide de l'épingle. L'artefact virtuel a été conçu par les auteurs pour exploiter la valeur ajoutée conférée par la technologie à l'utilisation de l'artefact concret choisi. Il est intégré dans un livre interactif (LI) créé dans l'environnement de création de New Cabri. Le LI apparaît sous la forme d'une séquence de pages comprenant les tâches conçues, ainsi que des outils spécifiques correspondant à des éléments spécifiques des objets concrets : ceux qui permettent la construction de certains objets géométriques (point, droite, segment, point milieu, ligne perpendiculaire, point d'intersection), les artefacts "Symétrie" et "Compas". Un rôle fondamental est également joué par la fonction de "Déplacement" (dragging) et par l'outil "Trace", qui permet d'observer l'invariance des propriétés caractérisant les figures. La principale différence avec l'expérience de Maschietto et Soury-Lavergne est que, dans cet instrument numérique, il n'y a pas de simulation de l'autre artefact.

Dans cette expérience, la conception de l'enseignement exploite le potentiel sémiotique des artefacts. Le potentiel sémiotique d'un artefact est défini comme la double relation qui existe entre un objet et, d'une part, les significations personnelles qui émergent de son utilisation pour accomplir une tâche (activité instrumentée), et d'autre part, les significations mathématiques évoquées par son utilisation et reconnaissables comme mathématiques par un expert (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Ce potentiel est à la base de la conception des activités et de l'analyse des actions ainsi que de la production des signes et de l'évolution des significations. L'activité instrumentée ici est précisément l'approche de la covariation des fonctions, c'est-à-dire la CI.

Les élèves sont invités à accomplir des tâches sur les symétries en six cycles successifs, où ils utilisent alternativement les deux instruments (outil concret, OC; outil numérique, ON), selon l'ordre suivant : OC → ON → OC → ON → ON → OC.

Je m'attarde sur les dialogues et les gestes de deux moments clés de la discussion de classe, orchestrés par les chercheurs à la fin des différentes phases de l'expérience. Ils montrent :

a) l'internalisation de la covariation des figures symétriques;

b) la synergie entre les deux artefacts qui soutiennent cette covariation.

Pendant les trois épisodes, les élèves sont assis à leurs bancs disposés en fer à cheval ; ils viennent d'illustrer avec le tableau blanc interactif l'expérience faite avec l'ON pour Yuri, un garçon qui avait été absent ; le tableau blanc est toujours actif devant eux.
a) Internalisation de la covariation entre les deux figures symétriques (E: Enseignant; M, V, Gl : élèves).

(t= 21:14-21:59)
M : si tu déplaces seulement le point A, le point C se déplace avec le point A car ils doivent être symétriques.
E : c'est-à-dire
M : si tu déplaces le point A plus haut…le point C se déplace plus bas car si il doit y avoir le même espace…entre les deux points…
[M bouge ses mains symétriquement ; le pouce et l'index des deux mains se déplacent simultanément comme dans un miroir en soulignant cette symétrie. Alternativement, la symétrie est identifiée comme la même distance en marquant la distance entre les points avec les deux doigts des deux mains].
V [interrompt M] : il doit être à la même distance… toujours… entre la droite… entre les deux points et la droite.
M : entre le point A… entre la droite et le point C
E : pourquoi?
M : parce que sinon ils ne sont pas symétriques.
…
(23:26).
M : si tu déplaces seulement le point A, le point C se déplace avec le point A… partout où va le point A, le point C doit se déplacer avec lui [elle imite le mouvement des deux points A, C avec les deux mains disposées symétriquement et avec le pouce et l'index rassemblés qui pincent, pour ainsi dire, le point : Figure 2].
…
(29 :34)
Gl : Nous l'avons compris parce que lorsque Yuri a traîné le point A, le point C bougeait aussi. Mais quand ils étaient très loin de la droite rouge, il était toujours à la distance de la droite rouge... à partir du point C à la droite rouge… la même distance que... du point A à la droite rouge.

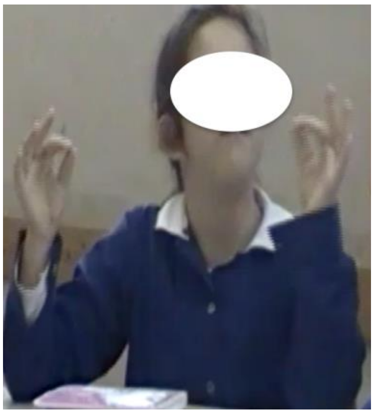


Figure 2


Figure 3

La covariation est observable à travers le faisceau sémiotique. Dans les épisodes, les mots et les gestes sont actifs tous les deux. Les gestes sont principalement iconiques : ils reproduisent particulièrement ce qui a été fait dans ON dans l'espace gestuel de l'élève (imitant le mouvement des deux points symétriques vus dans ON). Le registre parlé, en plus de décrire le mouvement des points, introduit les notions de symétrie et de distance : il est une élaboration mathématique de l'expérience avec les deux artefacts. Il est important de souligner que les artefacts sont seulement virtuellement présents.

b) L'effet synergique des deux artefacts (23:51 – 25:20):

> V : Cela signifie que si je déplace le point A, le point C doit nécessairement se déplacer parce que si le point C ne se déplaçait pas, ils ne seraient plus symétriques parce qu'ils ne conserveraient pas la même distance entre eux
> E : entre eux
> V: non, à savoir, entre la droite et le point
> E : et les points
> V: il ne conserverait pas la même distance entre le point A et la droite et le point C et la droite
> E : cette distance est-elle constante?
> V : ouiiiiiiiiiii… autrement ils ne seraient pas symétriques
> E : comme vous aviez vu que cette chose se passe à savoir, comment le réaliser?
> V: parce que... pas... quand... parce que si nous avons à notre disposition une feuille qu'on peut plier… hem… nous devons... nous tirons le point [les doigts des mains sont rassemblés à la pointe et pincent chaque un point ; avec ses doigts V mime sur le banc ce qu'ils avaient fait dans OC en déplaçant le point et son symétrique : Figure 3] et nous avons à... à savoir, selon la ligne, si elle est droite …il sera à la même distance…hem…
> E : Comment as-tu vu cette chose arriver? À savoir, comment l'atteindre ?
> V: Parce que... pas... quand... parce que si nous pouvons utiliser une feuille que nous pouvons plier… hem... nous devons... nous tirons le point et nous avons ..., le long de la ligne, si c'est juste ce sera au même moment distance, hem ...

Les mots et les gestes de V confirment l'hypothèse selon laquelle l'artefact numérique (ON : Cabri) agit en synergie avec le matériel de manipulation (OC : feuille et épingle) : que les points symétriques doivent avoir la même distance de l'axe de symétrie était compréhensible déjà en pliant la feuille et en perçant le papier avec l'épingle, mais il apparait avec le déplacement du point dans l'ON qu'il est plus facile de réaliser qu'il y a toujours la même distance.

L'expérience individuelle avec l'ON a été suffisante pour saisir l'analogie entre "déplacer le point" et "faire le trou" dans la feuille, c'est-à-dire entre les deux environnements, ON et OC.

La réponse et les gestes de M à la question de l'enseignant montrent que dans l'espace gestuel de V les deux sont mélangés. Ceci est possible à cause de l'internalisation de la dépendance fonctionnelle entre les deux figures, l'une symétrique de l'autre, et c'est perçu en regardant le faisceau sémiotique, qui est partagé dans la classe à un certain point de la discussion. La dépendance fonctionnelle est saisie par tous les élèves en raison des activités avec l'ON : par exemple, elle est clairement indiquée par M ; mais d'autres le montrent aussi avec leurs gestes et mots.

Le tableau suivant recueille les données de 15 minutes de la discussion générale dans la salle de classe à la fin de l'expérience (dont certaines parties sont rapportées ci-dessus), en analysant chaque production des élèves en fonction de marqueurs :

- verbaux
- gestuels
- de dépendance fonctionnelle
- de l'invariance des propriétés
- de référence à l'Artefact Numérique (DA)
- de référence au Matériel de Manipulation (MM)

Dans le tableau, nous voyons que les mots et les gestes sont tous les deux actifs et que la covariation fonctionnelle est très forte au début : l'analyse du faisceau sémiotique montre son internalisation et les élèves expliquent exactement ce qui s'est passé dans l'environnement numérique. Cette phase culmine à 23:58 : c'est un moment de partage fort dans la classe où le sens de la symétrie comme équidistance des points de la ligne est clair pour tous.

Immédiatement après commence la connexion (verbale et gestuelle) avec ce qui a été fait dans l'environnement MM (synergie des deux artefacts).

Temps	Verbal	Gestuel	Dep. fonct	Inv.	DA (EDG)	MM
16:03	X	X	X		X	
16:40		X	X		X	
19:28	X		X		X	
20:30	X		X		X	
20:39	X		X		X	
21:18		X	X		X	
21:29		X	X		X	
21:43	X			X	X	
22:29	X			X	X	
23:25	X	X	X		X	
23:58	X	X	X+++		X	
24:24	X	X		X	X	
24:40						X
24:59	X	X		X		X
26:16	X		X			X
28:00					X	X
29:25	X	X		X?	X	X
30:22	X	X	X		X	X
31:22	X			X	X	X
TOTAL	14	10	13	6	16	7
%	74%	52%	68%	32%	84%	37%
partagé	37%				21%	

Tableau 1

DISCUSSION

Où nous sommes arrivés

Dans cet article, nous avons présenté une introduction didactique à la covariation en mathématiques. Cet objectif a immédiatement soulevé quatre ordres de problèmes :
a) l'opportunité d'une analyse épistémologique et cognitive soigneuse du concept de covariation ;
b) la nécessité d'élaborer des situations didactiques (au sens de Brousseau) qui permettent la dévolution aux étudiants des problèmes de covariation, définis précisément selon le statut analysé en a) ;
c) l'importance de définir le rôle des technologies dans ces situations ;
d) l'exigence de disposer d'outils pour observer les phénomènes didactiques qui se produisent en classe avec la proposition de telles situations.
L'article répond à ces quatre points en illustrant les réponses par des exemples, à la fois pour des raisons d'espace et pour ne pas trop alourdir le fil du discours.

Pour a) : La covariation est une idée omniprésente dans la pensée mathématique moderne, de la naissance de l'algèbre moderne et de la pensée fonctionnelle liée à la révolution scientifique, dont un aspect parallèle, non considéré ici, est l'analyse élémentaire (calculus, en anglais). Comme l'ont montré diverses recherches, cet aspect, à quelques exceptions près, est à peine présent dans les manuels de mathématiques, qui donnent une définition de fonction abstraite et statique ou au mieux se réfèrent à la métaphore input-output des machines. Ce n'est pas une coïncidence si cette approche est plus présente dans les textes traitant de problèmes physiques, biologiques, économiques, etc. dans lesquels il est nécessaire de modéliser des phénomènes qui évoluent dans le temps. Donc on a préféré considérer la covariation comme une forme plus large de pensée, le raisonnement covariant, qui considère les objets mathématiques en considérant et en recherchant leurs relations mutuelles.

Pour b) : Contrairement à d'autres travaux, le raisonnement covariant n'est pas considéré ici comme limité à l'introduction de fonctions. Comme noté en a), il a une valeur épistémologique et cognitive beaucoup plus large : sa contrepartie didactique est constituée par la forme covariante qui se cache derrière la formulation ouverte des problèmes. Nous avons donc repris les problèmes ouverts de la littérature, en les opposant à la nature monodirectionnelle des problèmes sous forme standard généralement présents dans les manuels. La référence aux objets multiplicatifs de Piaget et Lawvere et Schanuel (1991) a illustré les significations cognitives et épistémologiques de ce choix didactique, qui restructure les situations didactiques afin de mettre en jeu le raisonnement covariant en général, incluant naturellement une approche des fonctions non fondée sur la définition statique d'ensemble.

Pour c) : Faire face à la covariation dans un environnement papier et crayon est très abstrait et peut être difficile à comprendre : par exemple, des obstacles cognitifs peuvent être attribués à ce que certains appellent la confusion entre parcours et trajectoires dans le cas où les chronogrammes sont considérés (mais cela peut aussi apparaître dans d'autres situations).

La thèse de l'article est que la covariation peut être abordée avec un certain succès dès les premières années d'école à l'aide d'outils technologiques. La covariation instrumentée a ainsi été introduite. Il est en effet possible de concevoir des situations éducatives où le raisonnement covariant est produit par une médiation appropriée des outils technologiques dans laquelle leur potentiel sémiotique est exploité dans le but de produire une forme de covariation instrumentée.

Pour d) : Nous avons répondu en proposant le modèle du faisceau sémiotique. C'est un modèle qui rend compte de la complexité des ressources sémiotiques utilisées par les élèves et les enseignants lorsqu'ils apprennent / enseignent les mathématiques. Il élargit la notion de système sémiotique classique à des systèmes de signes tels que les gestes et les inscriptions, tous présents dans les processus observés en classe, comme l'illustre abondamment la littérature. Le faisceau sémiotique est une structure dynamique qui intègre toutes ces ressources dans un ensemble unique, en considérant à la fois les relations mutuelles entre elles et leur évolution dans le temps. Dans ce sens, il est une généralisation de l'étude par le système geste-parole de McNeill et d'autres, parce que d'une part il intègre dans le modèle non seulement le discours et les gestes, mais aussi les inscriptions (des formules aux graphiques) sur lesquelles est fondée la pensée mathématique ; d'autre part il présente un modèle qui évolue avec le temps. En raison de sa structure riche, le modèle du faisceau sémiotique permet de saisir dans des variables observables les dynamiques complexes de la pensée mathématique lorsqu'elles se produisent dans une situation d'interaction, et de les rendre ainsi accessibles à la recherche scientifique. Naturellement, pour y parvenir, il est également nécessaire de filmer avec plusieurs caméras ce qui se passe dans les interactions de classe entre les élèves et entre les élèves et les enseignants, tout en gardant une trace de leurs productions écrites. Dans l'analyse finale de ces documents, nous avons également utilisé le modèle de la microgénèse d'un problème, adapté de la recherche susmentionnée par Saada-Robert. Malheureusement, l'espace accordé ne nous permet pas d'illustrer cet aspect ici.

Où nous aimerions arriver

Il y a différents problèmes que cette recherche laisse ouverts. D'une part, nous avons besoin d'une collection plus large de données sur le travail en classe, centrées sur l'introduction du raisonnement covariant pour fournir de plus amples informations sur la dynamique de son apprentissage, en particulier sur les difficultés des élèves et éventuellement sur les ingénieries didactiques appropriées pour les surmonter. D'autre part, il est important de développer un approfondissement cognitif et épistémologique de la notion de covariation : les idées de Piaget et Lawvere et Schanuel (1991) sur les objets multiplicatifs, par exemple la notion d’adjonction, concept fondamental dans la théorie des catégories, doivent être étudiés par rapport aux processus de résolution propres aux problèmes ouverts et aux phénomènes de la microgenèse de la représentation d'un problème discutés ci-dessus. Il semble que l'étude de l'alternance des modalités descendantes et ascendantes dans le processus de résolution de problèmes ouverts dans des contextes covariants, déjà étudiée par l'auteur dans d'autres contextes, puisse être féconde.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC, G. & MANTE, M. (2007), Les pratiques du problème ouvert, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

ARSAC, G., GERMAN, G., & MANTE, M. (1991). Problème ouvert et situation- problème, IREM de Lyon.

ARZARELLO F., (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latino Americana de Investigacion en Matematica Educativa*, Vol. Especial. 267-299.

ARZARELLO F. (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. In: NISS, M. (Editor), *10th International Congress on Mathematical Education, Plenary lecture*. IMFUFA, Roskilde University: Copenhagen, Denmark. 158-181.

ARZARELLO F. (2009). New Technologies in the Classroom: Towards a Semiotics Analysis. In: SRIRAMAN B. & GOODCHILD, S., *Relatively and Philosophically Earnest: Festschrift in Honor of Paul Ernest’s 65th Birthday*. Chishing, Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc., ISBN/ISSN: 978-1-60752-240-9. 235-255.

ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D. & ROBUTTI, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 34 (3).

ARZARELLO, F. & PAOLA, D. (2007). Semiotic Games: the role of the teacher. In: WOO, J., LEW, H., PARK, K., & SEO, D. (Editors). *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2. Seoul, Korea: The Korean Society of Educational Studies in Mathematics. 17–24.

ARZARELLO F., & ROBUTTI, O. (2008). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm. In: ENGLISH, L. (Editor). *Handbook Of International Research In Mathematics Education*. ISBN: 10:0-8058-5875-X. New York: Routledge. 720-749.

ARZARELLO, F., PAOLA, D., ROBUTTI, O., & SABENA, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*. Special issue on Gestures and Multimodality in the Construction of Mathematical Meaning, Editors: RADFORD, L., EDWARDS, L., AND ARZARELLO, F. Volume 70, Issue 2. 91-95.

ARZARELLO,F., & SABENA,C. (2014). Introduction to the approach of action, production, and Communication (APC). In: BIKNER-AHSBASHS, A. & PREDIGER,S. (Editors), *Networking of theories as a research practice in mathematics education*, New York:Springer, ISBN: 9783319053882, doi: 10.1007/978-3-319-05389-9. 31-46.

ARZARELLO, F., & SABENA, C. (2014). Analytic-Structural Functions of Gestures in Mathematical Argumentation Processes. In: EDWARDS, L.D., FERRARA, F., & MOORE-RUSSO, M. (Editors), *Emerging perspectives on gesture and embodiment*, Charlotte, NC:Information Age Publishing, ISBN: 9781623965532. 75-103.

ARZARELLO, F. & SABENA, C. (2014). Introduction to the Approach of Action, Production, and Communication (APC). In: BIKNER-AHSBASHS, A. & PREDIGER, S., *Networking of theories as a research practice in mathematics education*.New York: Springer. ISBN: 9783319053882, DOI: 10.1007/978-3-319-05389-9. 31-46.

ARZARELLO, F., ROBUTTI, O., & THOMAS, M. (2015). Growth point and gestures: looking inside mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 90, ISSN: 0013-1954, doi: 10.1007/s10649-015-9611-5.19-37.

BARTOLINI BUSSI, M. G., & MARIOTTI, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In: ENGLISH, L., BARTOLINI BUSSI, M., JONES, G., LESH, R. & TIROSH, D. (Editors), *Handbook of international research in mathematics education, second revised edition*. Mahwah: Lawrence Erlbaum. 746-805.

BAUERSFELD, H. (1978). Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht – Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In: H. BAUERSFELD (Hrsg.): *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel. 158-170.

BOSCH, M., & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, n. 1. 77-124.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht : Kluwer.

CHEVALLARD, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche,* Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

COX, D., LITTLE, J., O'SHEA, D. (1996). *Ideals, Varieties, and Algorithms*. New York: Springer.

DREYFUS,T., SABENA,C., KIDRON,I., ARZARELLO,F. (2014). The Epistemic Role of Gestures – A case study on networking of APC and AiC. In: BIKNER-AHSBASHS, A. & PREDIGER,S. (Editors), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. New York:Springer, ISBN: 9783319053899. 127-151.

DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

DUVAL, R. (2001). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Paper presented at the Semiotics Discussion Group of the 25th PME International Conference*, Freudenthal Institute, The Netherlands, July 2001.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61. 103–131

DE FREITAS, E. & SINCLAIR, N. (2012). Diagram, gesture, agency: theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 80. 133–152

ERNEST, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: the case of number, *Educational Studies in Mathematics*, 61. 67-101

GALLO, E. (1994). Control and solution of "algebraic problems". Problems in algebraic learning. *Rendiconti del Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino,* special issue, 52(3). 263-278.

GASCON, J. (1994). Un nouveau modele de l'algebre elementaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *petit x*, n. 37. 43-63.

GOLDBLATT, R. (1979). *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*. Amsterdam:North-Holland. Revised edition 1984. Dover Publications edition 2006.

GOLDIN-MEADOW, S. (2003). *Hearing gestures: How our hands help us think*. Chicago: Chicago University Press.

INHELDER, B. & PIAGET, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent. Essai sur la construction des structures opératoires formelles*. Paris: Presses Universitaires de France.

KOSYVAS, G. (2010). Problèmes ouverts : notion, catégories et difficultés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Volume 15. IREM de Strasbourg. 45 – 73.

LAGRANGE, L. (1808). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés,* Nouvelle edition, Paris: Courcier.

LAWVERE, F.W. & SCHANUEL, S.H. (1991). *Conceptual Mathematics*, Buffalo Workshop Press. Published by Cambridge University Press in 1997.

LIM, V.K., WILSON, A., HAMM, J.P., PHILLIPS, N., IWABUCH, S., CORBALLIS, M.C., ARZARELLO, F., & THOMAS, M. (2009). Mathematical gestures are semantically meaningful, *Brain*. vol. 71; ISSN: 0278-2626, doi: 10.1016/ j.bandc.2009.07.004. 306-312.

MASCHIETTO, M., & SOURY-LAVERGNE S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics, *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 45(7). 959-971.

MCNEILL, D. (1992) *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: Chicago University Press.

MCNEILL, D. (1996). *Hand and Mind: What Gestures Reveal about Thought.* Chicago, Illinois, USA: University of Chicago Press. ISBN 0-226-56134-8.

MCNEILL, D. *(2005). Gesture and Thought.* Chicago, Illinois, USA: University of Chicago Press. ISBN 0-226-51462-5.

MCNEILL, D. *(2012). How Language Began: Gesture and Speech in Human Evolution.* New York, USA; UK: Cambridge University Press. ISBN 1-107-60549-0.

MONTONE, A., FAGGIANO, E., & MARIOTTI, M.A. (2017). The design of a teaching sequence on axial symmetry, involving a duo of artefacts and exploiting the synergy resulting from alternate use of these artefacts. In: DOOLEY, T., & GUEUDET, G. (Editors). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for*

Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME. 653-660.

PIAGET, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique*. Tome I: *La pensée mathématique*. Presses universitaires de France.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

RADFORD, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

RADFORD, L. (2006). The Anthropology of Meaning, *Educational Studies in Mathematics*, (61), 39-65.

RADFORD, L., EDWARDS, L., & ARZARELLO, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics*. Special issue on Gestures and Multimodality in the Construction of Mathematical Meaning, Editors: RADFORD, L., EDWARDS, L., & ARZARELLO, F. Volume 70, Issue 2, 97-109.

RICHARD, J. F. (1989). Analyse de protocoles individuels et microgénèse de la représentation d'un problème: commentaire sur l'article de M. Saada-Robert suivi d'une réponse de l'auteur. *Psychologie française*, 34(2-3), 207-211.

ROTH, W.M. (2003). Making Use of Gestures, the Leading Edge in Literacy Development. In: SAUL, W. (Editor), *Communicating science: Examining the discourse*. Newark, DE/ Arlington, VA: International Reading Association & National Science Teachers Association. 48–70.

SAADA-ROBERT, M. (1989). La microgenèse de la représentation d'un problème. Psychologie française, 34(2-3), 193-206.

SABENA, C., ROBUTTI, O., FERRARA, F., & ARZARELLO, F. (2012). The development of a semiotic framework to analyze teaching and learning processes: Examples in pre- and post-algebraic contexts. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, Numéro special, Enseignement de l'algèbre élémentaire. ISSN: 0246-9367. 237-251.

SALDANHA, L., & THOMPSON, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In: BERENSON, S.B. & COULOMBE, W.N. (Editors), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America* Vol 1. Raleigh, NC: North Carolina State University. 298-304.

THOMPSON, P. W., & CARLSON, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

VÉRILLON, P., & RABARDEL, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1). 77–101.

VYGOTSKI L.S. (1985). *Pensée et langage* (synthèse, 1934), publié en français en 1985 (Éditions Sociales, Paris) et en 1997, Éditions La Dispute, Paris, suivi par le *Commentaire sur les remarques critiques de Vigotski* par Jean Piaget.

PLACE ET ROLE DES TECHNOLOGIES DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DU CALCUL SOUSTRACTIF EN CE2 : PROPOSITION D'INGENIERIE

Anne-Marie **RINALDI**
ESPE Amiens, LDAR
anne-marie.rinaldi@u-picardie.fr

Résumé

Notre recherche conduite dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, nous a menée, suite à une étude épistémologique et didactique, à construire une organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif. Cet outil théorique permet d'avancer, en analysant différents manuels scolaires de CE1 et de CE2, et des séances de calcul observées dans des classes de CE2, qu'un déficit en éléments technologiques, expliquerait en partie, les difficultés rencontrées par les élèves pour développer de la flexibilité et de l'adaptabilité en calcul mental et pour effectuer un calcul posé en colonne. Par ailleurs, l'évaluation de l'ingénierie que nous avons conçue, en nous appuyant sur l'organisation mathématique de référence et en restant « assez proche » des pratiques des enseignants, montre les effets positifs d'un travail régulier et progressif à partir des écritures arithmétiques sur les apprentissages des élèves. En revanche, les expérimentations permettent de pointer les limites des situations qui mettent en jeu la propriété de conservation des écarts quand celles-ci n'ont pas assez de potentiel adidactique. En ce sens, la thèse soutenue en décembre 2016 peut servir d'appui pour poursuivre la recherche engagée sur les conditions de viabilité d'une organisation mathématique et d'une organisation didactique susceptible de fédérer le calcul mental et le calcul posé.

Mots clés

Calcul mental et posé, soustraction, organisation mathématique, ingénierie didactique

INTRODUCTION

Nos travaux de recherche (Rinaldi, 2016) portent sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif mental et posé en colonne à l'école élémentaire, plus précisément en CE2, donc pour des enfants de 8 à 9 ans. Selon Boole (1994) et Thompson (1999), le calcul mental consiste à rechercher une stratégie basée sur l'application de résultats connus ou retrouvés rapidement, en combinaison avec l'utilisation de propriétés spécifiques du système de numération décimal et des opérations. Il demande donc de la part du calculateur, de la flexibilité et de l'adaptabilité. Flexibilité car il nécessite de connaitre différentes techniques, et adaptabilité, car il s'agit de mettre en œuvre, en fonction du calcul à effectuer, une technique adaptée. A l'inverse le calcul posé en colonne, même s'il s'appuie sur l'application de résultats connus et conceptuellement sur l'utilisation des propriétés du système de numération décimale et des opérations requiert l'utilisation d'une seule technique algorithmique. Reste alors à définir quelle technique algorithmique enseigner [1] et quelle programmation de l'étude envisager afin d'éviter l'atomisation des savoirs pour reprendre une expression de Chevallard (1999) et d'amener les apprenants à surmonter leurs difficultés. Difficultés au niveau du calcul posé car d'après une étude de Maurel et Sackur (2010), certains élèves font le calcul dans le sens où c'est possible[2]. Par ailleurs, même s'ils arrivent à placer à bon escient un couple de retenues, certains élèves interrogés vont parler d'emprunt alors que dans la soustraction par compensation, on n'emprunte pas une dizaine, on ajoute aux deux nombres une dizaine pour poursuivre le calcul. Difficultés également en calcul mental car les élèves vont, d'après Butlen et Pézard (2007), s'ils n'ont pas appris à faire autrement, poser l'opération en colonne ou utiliser systématiquement des techniques qui incitent à calculer en décomposant canoniquement les deux nombres sans chercher *a priori* à utiliser d'autres techniques[3].

Le contexte institutionnel et professionnel dans lequel se situe la recherche soulève donc une question relative à la nature des savoirs à enseigner. Quels répertoires, quelles propriétés des nombres et des opérations, quelles désignations des nombres introduire surtout si l'objectif recherché est de développer suivant Artigue (Artigue, 2005) la valence pragmatique du calcul (calculer vite et bien) et la valence épistémique du calcul (connaitre les propriétés mathématiques qui interviennent dans l'effectuation d'un calcul). Par ailleurs une fois ces savoirs identifiés se pose la question de leur enseignement. Est-il possible de programmer et d'organiser l'étude en tenant compte de la progressivité des apprentissages, des conditions et des contraintes de l'enseignement ordinaire ?

Pour répondre à ce questionnement initial, nous présentons dans une première partie le cadre théorique, la méthodologie et la problématique de la thèse. Nous donnons par la suite quelques caractéristiques des pratiques relatives à l'enseignement du calcul soustractif basées sur l'analyse de manuels et sur l'observation de séances de classe. Dans une troisième partie, nous indiquons les grandes lignes de l'ingénierie que nous avons conçue puis nous revenons sur les résultats deux expérimentations de l'ingénierie, l'une propre au calcul mental, l'autre visant à introduire la propriété de conservation des écarts. Pour finir nous présentons les résultats, les limites et les perspectives de la recherche.

CADRE THÉORIQUE, MÉTHODOLOGIE ET PROBLÉMATIQUE

Références théoriques préalables

Pour préciser notre questionnement, orienter et conduire la recherche, nous nous sommes placée principalement dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique. Nous avons intégré le concept d'organisation mathématique qui permet selon Chevallard (1999) de caractériser l'activité mathématique et le concept d'organisation didactique qui renvoie aux différents moments de l'étude.

[1] Trois techniques cohabitent en France. La première technique consiste à poser en colonne une addition à trou. La seconde dite par emprunt est couramment utilisée dans le monde anglo-saxon. Elle s'appuie exclusivement sur le système de numération décimale. La dernière, dite par compensation s'appuie également sur les propriétés du système de numération décimale tout en sollicitant une propriété de la soustraction : la propriété de conservation des écarts.

[2] Pour effectuer par exemple $53-27$, ils vont effectuer $7-3$ et trouver 34 à la place de 26.

[3] Une technique basée exclusivement sur la décomposition sera efficace pour effectuer par exemple $53-21$ car $53-21=50-20+3-1$ mais problématique pour effectuer le calcul $53-27$ car trois est inférieur à 7.

Nous avons également utilisé le concept d'organisation mathématique de référence. L'organisation mathématique de référence selon Bosch et Gascon (2005) permet au chercheur, pour un sujet donné, ici le calcul soustractif sur les entiers naturels, d'identifier à partir d'une étude épistémologique et didactique l'ensemble des savoirs à enseigner. Dans notre recherche, cette organisation mathématique de référence nous a servi pour concevoir un dispositif d'enseignement (une organisation de l'étude) et comme outil d'analyse de l'existant.

Nous avons aussi emprunté à Robert (2013) les concepts de contrat, d'habitude et de régularité des pratiques pour étudier les pratiques de trois enseignants de CE2 et le concept de zone proximale de développement des pratiques pour concevoir une organisation de l'étude pas trop éloignée des pratiques de l'« enseignement ordinaire ».

Un autre concept, celui d'ingénierie didactique (Artigue, 2011), nous a servi pour définir une méthodologie générale de mise à l'épreuve et d'analyse de l'organisation de l'étude conçue.

Nous présentons maintenant notre méthodologie

Méthodologie

Pour conduire notre recherche nous avons opté pour la méthodologie suivante :

- ✓ Première étape : construction de l'organisation mathématique de référence
- ✓ En second lieu : utilisation et mise à l'épreuve de cet outil pour analyser les pratiques d'enseignants (trois enseignants) et analyser les manuels.
- ✓ En troisième lieu : utiliser l'étude des manuels et notre connaissance des contrats et habitudes des trois enseignants avec lesquels nous avions « travaillé » pour nourrir l'organisation didactique de l'ingénierie. L'organisation mathématique étant elle fondée sur l'organisation mathématique de référence.
- ✓ Pour finir, expérimentation de l'ingénierie dans deux classes avec les enseignants dont nous connaissions les pratiques pour mettre à l'épreuve l'ingénierie en confrontant analyse *a priori* et analyse *a posteriori.*

Nous caractérisons maintenant les éléments qui ressortent de l'étude épistémologique et didactique qui permet d'élaborer l'organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif utilisée à plusieurs reprises dans le travail. Elle permettra de formuler la problématique de la thèse.
Cette méthodologie nous a donc conduite à identifier quelques caractéristiques des pratiques relatives à l'enseignement du calcul soustractif que nous préciserons avant de présenter l'ingénierie en elle-même.

Organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif

L'organisation propre au calcul soustractif sur les entiers naturels est fédérée autour de quatre organisations mathématiques locales :

- ✓ La première organisation OM1 regroupe les tâches propres à la production de calcul. Tâches qui permettent essentiellement à l'école élémentaire de modéliser les situations additives en référence aux travaux de Vergnaud (1990).

- ✓ La seconde organisation OM2 regroupe les tâches qui consistent à associer ou transformer des représentations sémiotiques. Parmi ces représentations sémiotiques, nous retenons les écritures arithmétiques, les schémas et les expressions langagières. Cette organisation est motivée par OM1 et OM3.
- ✓ La troisième organisation OM3 regroupe les tâches qui vont consister à effectuer un calcul.
- ✓ La dernière organisation OM4 est associée à la réécriture de calculs. C'est celle qui va permettre de montrer quelles sont les propriétés des nombres et des opérations qui sont mobilisée donc de développer la valence épistémique du calcul au sens d'Artigue (2005).

En rapport avec notre recherche, nous avons particulièrement développé l'étude de l'organisation propre à l'effectuation de calculs (OM3). Nous avons identifié différents types de tâches[4] et pour chaque type de tâches les techniques potentielles en nous référant aux travaux de Fuson et al.(1997), Carpenter et al.(1998), Klein et al. (1998) et Thompson (1999). Nous avons regroupé les techniques citées autour de quatre technologies savantes. La première technologie Θ_{DD} s'appuie sur la décomposition des deux nombres, la recomposition d'un nombre, les répertoires additifs et soustractifs, les propriétés de la numération positionnelle décimale (relation décimale entre les positions et le principe de position), les propriétés de la soustraction sur N. Elle génère deux techniques de décomposition τ_{1010}, $\tau_{(1010)'}$ et la technique algorithmique de la soustraction par emprunt[5] . La seconde technologie Θ_D s'appuie sur les mêmes propriétés que la première. Elle ne nécessite pas de décomposer les deux nombres du calcul mais nécessite de décomposer un des deux nombres, en l'occurrence le nombre à soustraire. Elle génère trois techniques séquentielles τ_{N10}, τ_{A10} et τ_{N10C}[6]. La troisième technologie $\Theta_{SOU/ADD}$ s'appuie sur la définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition sur les entiers naturels et génère la technique $\tau_{SOU/ADD}$[7]. La dernière technologie Θ_{AN} s'appuie la propriété de conservation des écarts. Elle génère une technique de calcul mental τ_{AN}[8] et l'algorithme de la soustraction par compensation qui consiste à ajouter aux deux termes du calcul si, besoin est, un ou plusieurs multiples de dix ou de cent ou de mille...

---

[4] Ces types de tâches sont soustraire un nombre à un chiffre ($T_{a-\square}$), un multiple de dix ($T_{a-\square 0}$), soustraire un nombre à deux chiffres ($T_{a-\square\square}$), puis un nombre à trois chiffres ($T_{a-\square\square\square}$).

[5] $\boldsymbol{\tau_{1010}}$: technique par décomposition canonique des deux nombres qui consiste à calculer des différences partielles sur des multiples de 100, de 10, de 1 et à les ajouter.
Exemple : $168 - 23 = (100 + 60 + 8) - (20 + 3) = (100) + (60 - 20) + (8 - 3)$
$\boldsymbol{\tau_{(1010)'}}$: technique par décomposition du premier nombre et décomposition canonique du nombre à soustraire qui se rapproche de $\boldsymbol{\tau_{1010}}$.
Exemple : $165 - 27 = (100 + 60 + 5) - (20 + 7) = (100) + (50 - 20) + (15 - 7)$.

[6] $\boldsymbol{\tau_{N10}}$: technique séquentielle où on décompose canoniquement le nombre à soustraire.
Exemple : $125 - 23 = 125 - (20 + 3) = (125 - 20) - 3$.
$\boldsymbol{\tau_{A10}}$: technique séquentielle où on décompose le nombre à soustraire afin d'obtenir des calculs soustractifs intermédiaires plus simples à effectuer. Exemples : $125 - 27 = 125 - (25 + 2) = (125 - 25) - 2$ ou $123 - 70 = 123 - (20 + 50) = (123 - 20) - 50$.
$\boldsymbol{\tau_{N10C}}$: technique séquentielle où on remplace le nombre à soustraire b par un multiple de dix ou de cent supérieur à b et où on compense le surplus. Exemple : $125 - 47 = (125 - 50) + 3$.

[7] $\tau_{SOU/ADD}$: technique par inversion qui consiste à remplacer une soustraction par une addition à trou. Exemple : pour calculer $125 - 47$, on cherche le complément de 47 à 125.

[8] $\boldsymbol{\tau_{AN}}$: technique par translation qui consiste à ajouter (respectivement soustraire) un même nombre à chaque terme du calcul soustractif. Exemple : $125 - 47 = (125 + 3) - (47 + 3)$.

Parallèlement, nous avons cherché quels ostensifs, objets sensibles permettant d'évoquer les concepts selon Bosch et Chevallard (1999) pouvaient être utilisés pour mettre en avant les différentes fonctions des technologies (expliquer, évaluer, valider, motiver) en référence à l'article de Castella et Romo Vasquez (2011). En nous basant sur les études de Teppo et Van den Heuvel-Panhuizen (2014), Ernest (1985), Gravemeijer (1994), Bobis et Bobis (2005), Van den Heuvel-Panhuizen (2008) nous avons émis plusieurs hypothèses. La droite numérique vide (DNV) aiderait à visualiser les différentes étapes d'un calcul donc à expliquer le mode d'emploi des techniques séquentielles. La droite numérique graduée (DNG) aiderait à visualiser l'écart dans le cadre de la mesure. Les écritures chiffrées (EC) et les arbres permettant eux de valider toutes les techniques. Le cadre théorique fixé, nous avons formulé notre problématique.

Problématique de la thèse

Il s'agit de concevoir et d'évaluer une ingénierie viable dans l'enseignement ordinaire qui fédère le calcul mental et le calcul posé autour de deux technologies principales basées sur la décomposition des nombres (Θ_{DD}) et la propriété de conservation des écarts (Θ_{AN}) et qui introduit un travail de réécriture de calculs (OM4) afin d'expliquer et de valider l'ensemble des techniques de calcul soustractif.

L'ORGANISATION MATHEMATIQUE DE REFERENCE : OUTIL D'ANALYSE DES PRATIQUES

Nous avons choisi de nous intéresser à deux collections Outils pour les maths CE1 & CE2 (2012) et Euro Maths (2001) & CE2 (2012). Pour chaque collection nous avons étudié de façon minutieuse les manuels de CE1 et de CE2 et les livres du maître pour repérer les techniques étudiées, les ostensifs introduits et les éléments de technologie présents. Nous avons également observé et analysé des séances de calcul mental conduites dans trois classes de CE2. Nous avons reconstruit à partir du déroulement de chacune d'entre elles, le parcours cognitif proposé par les enseignants. L'étude des manuels nous donne un premier résultat sur les liens entre les organisations mathématiques à enseigner.

Liens entre les différentes organisations mathématiques locales (manuels)

La première organisation mathématique locale OM1 est liée à la production de calculs. Avec Outils pour les Maths, les tâches proposées sont motivées par des énoncés de problèmes et ne mobilisent que des écritures de la forme $a + b$ et $a - b$ que nous appelons expressions numériques. Il n'y a pas de production d'écritures de la forme $a + b = x, a - b = x, a + x = b$ que nous appelons calculs et donc pas d'addition à trou. A l'inverse, les auteurs d'Euro Maths proposent en premier lieu des jeux, des textes reprenant des jeux, des énoncés de problèmes issus de contextes variés pour amener les élèves à produire des calculs et des représentations à partir de la droite numérique vide (DNV).

Au niveau de l'effectuation de calculs (OM3), pour Outils pour les Maths, le calcul mental est exclusivement mental. L'élève ne note que le résultat. Il ne cherche pas en utilisant un papier et un crayon. C'est pourquoi nous n'avons pas relié le calcul mental aux écritures chiffrées. Les auteurs d'Euro Maths proposent à l'élève de réécrire le calcul (de façon isolée cependant) quand celui-ci se prête à l'utilisation de la technique séquentielle τ_{N10}.

Autre élément important qui n'apparait pas sur le schéma présenté à la figure 1, la propriété de conservation des écarts a un réel statut dans Euro Math et permet d'introduire sans véritablement l'installer[9] une technique que les auteurs nomment technique à la russe qui est basée sur cette propriété.

Les liens entre les différentes organisations sont mis en évidence sur le schéma suivant :

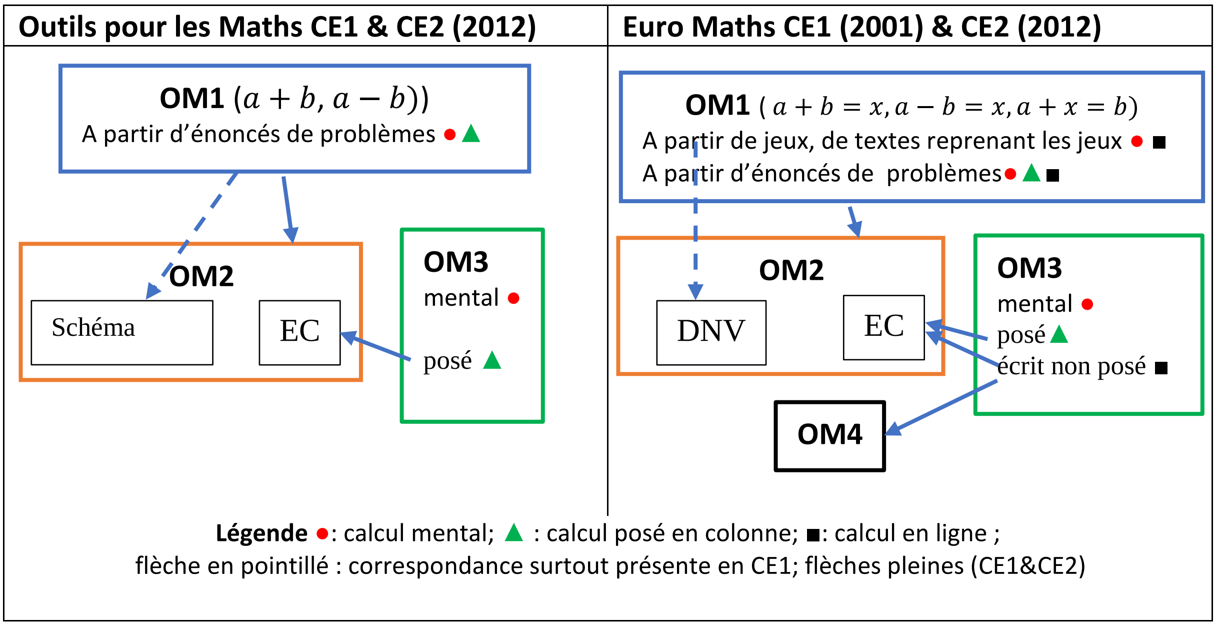


Figure1 : liens entre les différentes organisations mathématiques
Outils pour les Maths CE1 & CE2 (2012) et Euro Maths CE1 (2001) & CE2 (2012)

Pour compléter cette étude sur les organisations mathématiques a *priori* enseignées dans les classes, nous présentons ci-après les éléments prélevés suite aux observations conduites dans trois classes de CE2.

Éléments prélevés suite aux observations (classes)

La valence pragmatique du calcul est prédominante dans le sens où les enseignants cherchent avant tout à ce que les élèves calculent vite et bien. Les corrections étant là surtout pour valider les résultats. Peu de synthèses autour des techniques sont mises en place. Par ailleurs, dans les séances de calcul mental que nous avons observées, les enseignants proposaient des séries de calcul pour s'entrainer à soustraire un nombre à un chiffre, soustraire des multiples de dix, soustraire un nombre à deux chiffres, donc des tâches non isolées et toutes d'un même type. Le travail en calcul mental vu qu'il était conduit essentiellement à l'oral, ne facilitait pas la réécriture de calcul. Sur l'ensemble des techniques enseignées, on ne retrouvait pas de technique s'appuyant sur la propriété de conservation des

[9] Peu de tâches permettant de travailler la technique sont proposées. Le seul moment de l'étude présent est celui de la première rencontre.

écarts. Un dernier point : les enseignants alors qu'ils n'étaient pas demandeurs initialement d'un autre projet d'enseignement ont accepté dans un premier temps de mettre en œuvre des scénarios que nous leurs avions proposé (entre autres sur la propriété de conservation des écarts) et dans un second temps d'expérimenter l'ingénierie que nous présentons dans le paragraphe suivant.

PRESENTATION DE L'INGENIERIE

Rappelons que l'ingénierie vise l'explicitation des éléments technologico théoriques et à agréger les organisations mathématiques locales pour permettre aux élèves de calculer vite et bien (en calcul mental et en calcul posé en colonne), de faire preuve de flexibilité et d'adaptabilité et de donner du sens à ce qu'ils font (valence épistémique du calcul). Par ailleurs, elle s'appuie sur les pratiques des enseignants A, B et C avec l'objectif de les modifier sans chercher à les bouleverser.

Le tableau suivant montre les grandes lignes de l'ingénierie :

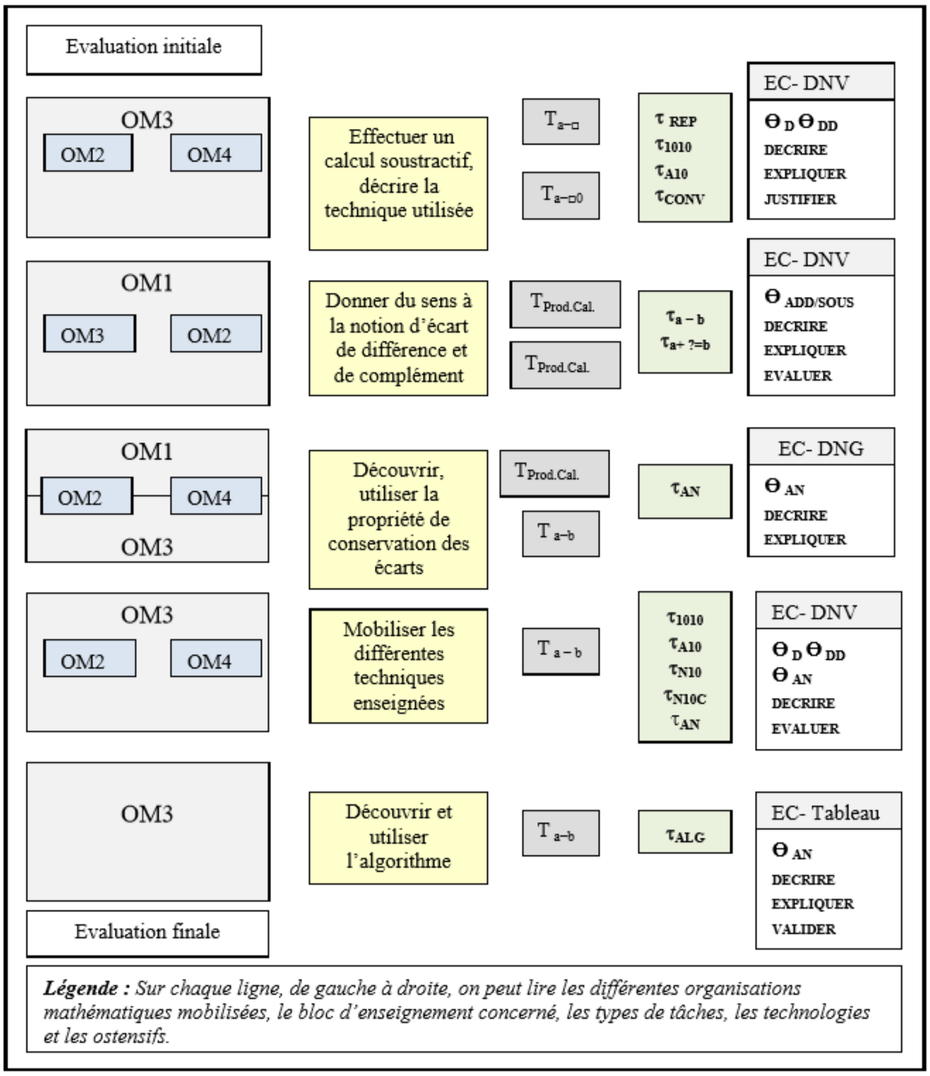


Figure 2 : présentation de l'ingénierie (thèse, page 210)

Le tableau se lit verticalement et horizontalement. Verticalement, il permet de voir que la mise en place de l'ingénierie a été précédée de la mise en place d'une évaluation initiale et suivie d'une évaluation finale pour mesurer les effets de l'ingénierie sur les apprentissages des élèves. Il montre comment l'étude a été découpée et programmée autour de cinq blocs d'enseignement (présentés dans la seconde colonne). Le dernier bloc visant l'introduction de l'algorithme de la soustraction posée basée sur la propriété de conservation des écarts. Le premier et l'avant dernier étant axés sur l'enseignement du calcul mental. Le deuxième et le troisième visant à donner du sens à la notion d'écart, de différence et de compléments et le troisième à découvrir et utiliser la propriété de conservation des écarts. Il révèle comment les blocs sont imbriqués les uns aux autres. Horizontalement, nous allons détailler dans les paragraphes suivant la lecture correspondant au premier et au troisième bloc d'enseignement.

Descriptions et analyses relatives aux types de tâches $\mathbf{T_{a-\square}}$ et $\mathbf{T_{a-\square 0}}$

Les moments liés à l'étude des deux types de tâches, soustraire un nombre inférieur à dix ($T_{a-\square}$) et soustraire un multiple de dix ($T_{a-\square 0}$) correspondent à des moments de reprise au sens de Larguier (2009) car les élèves ont déjà rencontré ces types de tâches. Il s'agit alors de ne pas reprendre totalement l'étude du thème et de s'efforcer de faire apparaitre le nouveau à étudier par rapport à l'ancien.

Les objectifs sont d'associer à un travail d'effectuation de calculs, un travail sur les représentations sémiotiques et sur la récriture, de limiter, voire mettre en défaut l'utilisation d'une technique basée sur le comptage et pour finir, d'expliciter les éléments technologico-théoriques se référant aux technologies Θ_{DD} et Θ_D en décrivant, expliquant et justifiant la mise en œuvre de chaque technique aux moyens des ostensifs droite numérique (DNV) et écritures chiffrées (EC).

La mise en scène choisie est directement inspirée d'une pratique d'un enseignant. Trois séries de quatre calculs sont donnés à chercher individuellement. Entre deux séries, un temps de restitution face au groupe classe est programmé. Pour chaque série, la consigne donnée aux élèves doit les amener à trouver le résultat du calcul et à décrire la technique qu'ils choisissent de mettre en œuvre.

Sur une série de quatre calculs (exemple : $48 - 5;\ 59 - 2;\ 328 - 6;\ 70 - 6$) nous faisons en sortes d'assortir les trois premiers au sens de Genestoux (2002). C'est ainsi, que dans l'exemple proposé, pour les trois premiers calculs, le nombre à soustraire est volontairement inférieur au chiffre des unités du nombre auquel on soustrait. La technique $\boldsymbol{\tau_{1010}}$ est donc applicable alors que pour le dernier calcul, elle ne l'est pas. La présence de ce quatrième calcul doit amener l'élève à évaluer $\boldsymbol{\tau_{1010}}$.

Description et analyse relative à la rencontre de la conservation des écarts

Cette séquence d'enseignement correspond au moment de rencontre avec la propriété de conservation des écarts, rencontre et non reprise car les élèves n'ont pas étudié cette propriété en CE1.

L'objectif principal est de proposer une rencontre dans le cadre d'une activité de mesurage avec un travail de production de calcul et de prolonger cette rencontre par un travail numérique qui va mobiliser la réécriture des calculs.

Situation de mesurage et de réécriture

L'activité de mesurage consiste à mesurer une bandelette à différents endroits de la règle graduée, à donner cette mesure sous la forme d'un calcul soustractif (en lien avec un travail effectué avec la règle cassée dans une séquence antérieure) puis à comparer les résultats obtenus.

Dans le prolongement, un calcul est proposé : $43 - 18$. L'élève est invité à trouver parmi $43 - 8$, $53 - 20$ et $55 - 20$ les expressions numériques équivalentes sans effectuer de calculs.

Analyse a priori

Au vu du travail engagé au préalable sur la notion d'écart, **c**haque élève doit être capable de produire un calcul soustractif pour mesurer la bandelette à différents endroits de la règle graduée. Les techniques envisagées pour comparer les résultats obtenus peuvent consister à effectuer le calcul, réécrire le calcul, conclure par référence à la manipulation (translation de la bandelette). Pour la recherche d'expressions équivalentes, nous envisageons le fait que les élèves s'engagent dans un travail de réécriture et utilisent « indirectement » les techniques qu'ils connaissent :
$53 - 18 = 53 - 10 - 8 = 43 - 8$ ($\boldsymbol{\tau_{N10}}$)
$53 - 18 = (53 - 10) - (18 - 10) = 43 - 8$ (τ_{AN})
$53 - 18 = 53 - 20 + 2 = 55 - 20$ ($\boldsymbol{\tau_{N10C}}$)
$53 - 18 = (53 + 2) - (18 + 2) = 55 - 20$ (τ_{AN})

EXPERIMENTATION ET ANALYSES DE L'INGENIERIE

Les expérimentations ont eu lieu dans les classes A et B, de novembre 2015 à janvier 2016. Les enseignants n'avaient pas du tout abordé le calcul soustractif. Ils avaient travaillé sur le calcul additif et la numération (lecture, écriture et décomposition des nombres). Les séquences se sont enchainées, sept séquences de deux voire trois séances de 45 minutes chacune. Les données dont nous disposons sont les productions des élèves, les enregistrements vidéo d'une à deux séances par semaine dans chaque classe. La méthode à consister à analyser, pour les différentes organisations mathématiques ponctuelles, les différents moments (rencontre ou reprise, travail de la technique, construction du bloc technologico théorique) et de confronter analyse *a priori* et analyse a *posteriori*. Nous présentons ci-après les résultats relatifs aux types de tâches présentées précédemment

Expérimentation et analyses relatives aux types de tâches $T_{a-\square}$ et $T_{a-\square 0}$

Trois points essentiels ressortent suite à l'analyse des données :

- ✓ Les situations ont amené les élèves à choisir une technique adaptée au calcul qu'ils avaient à effectuer et à décrire la technique mise en œuvre (utilisation des écritures chiffrées, éventuellement de la droite numérique vide).
- ✓ Les synthèses sous forme de *cours dialogués* (Hersant, 2004) entre les séries de calculs ont permis dans les deux classes d'expliquer, valider et évaluer chaque technique et de transposer les éléments théoriques présents dans les différents scénarii. Le cours dialogué se caractérise par le fait que l'enseignant rebondit à partir d'une proposition d'élève pour introduire le savoir visé. Il n'y a pas d'interaction des élèves.

Ce ne sont pas eux, par exemple qui sont amenés à valider ou évaluer la technique proposée par un camarade.

- ✓ Les tâches qui consistent à soustraire un multiple de dix (de type Ta−□0) posent des difficultés (ex : 437- 50) alors que les tâches comme soustraire un nombre inférieur à 10 (de type Ta−□) ont montré que les élèves s’étaient mis à décrire leurs techniques et surtout à utiliser à bon escient et avec efficacité $\boldsymbol{\tau_{A10}}$et $\boldsymbol{\tau_{N10C}}$. L’utilisation de la droite numérique vide (DNV) peut faire écran à l’effectuation du calcul. Elle permet à l’élève de s’engager dans un calcul, de le commencer sans lui permettre de le mener jusqu’au bout. En ce sens elle fait illusion, écran.

Expérimentation et analyses relatives à la rencontre de la conservation des écarts

Nous analysons la rencontre de la conservation des écarts dans le cadre de l’activité de mesurage avant d’aborder les effets du travail de réécriture sur les techniques des élèves.

Situation de mesurage

Comme attendu, les élèves se sont impliqués dans la tâche de mesurage et ont tous produit un calcul soustractif pour mesurer la bandelette. En ce qui concerne l’interprétation des résultats :

- ✓ Environ la moitié des groupes (13 binômes sur 24) justifient l’égalité entre les calculs en effectuant ceux- ci

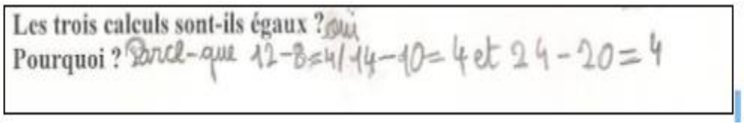


Figure 3 : production d’un binôme mettant en évidence l’égalité en calculant

- ✓ Un quart des groupes (13 binômes sur 24) interprète les résultats en se référant à l’expérience, en indiquant que le fait de translater la bandelette n’a pas d’incidence sur sa longueur.

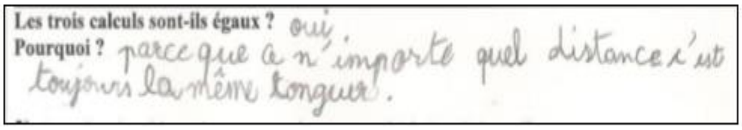


Figure 4 : production d’un binôme mettant en évidence l’invariance par translation

On constate que la taille des bandelettes et l’utilisation d’un double décimètre ne permet pas de produire des calculs qui nécessitent vraiment de la réécriture. Les élèves peuvent comparer directement. Il aurait fallu utiliser des bandelettes de taille plus grande et utiliser un mètre. Nous avons été piégée par le milieu matériel. Dans ce milieu, les élèves peuvent comparer directement. La translation de la bandelette, quant à elle, et c’est une limite de la situation, n’engage pas l’élève à réécrire les calculs.

Au niveau de la construction du bloc technologico théorique, dans une des classes, l’enseignant utilise un schéma extrait de la proposition de scénario et montre que le nombre ajouté aux deux termes de la différence correspond à la valeur de la translation.

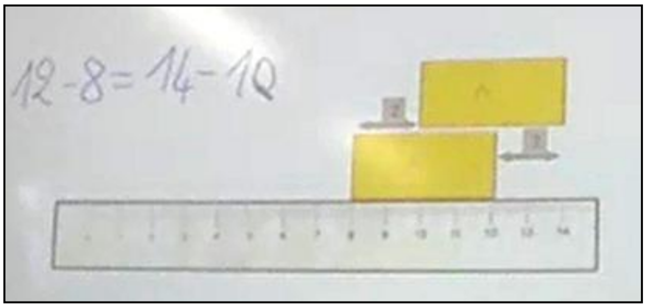


Figure 5 : schéma extrait du scénario mettant en avant l'invariance par translation

En s'appuyant sur le schéma, l'enseignant formule avec ostension la propriété de conservation des écarts appliquée à cet exemple « Si j'avance de deux-là, j'avance de deux-là donc je peux écrire que douze moins huit égal quatorze moins dix ». Le travail de réécriture est amené par la suite.

Situation de réécriture d'expressions numériques

La consigne formulée oralement face au groupe classe est la suivante : « *Vous avez une étiquette sur laquelle est écrit* $53 - 18$*. Je veux qu'un enfant aille me placer une étiquette dont le résultat serait le même que celui-là. Je ne veux pas de calculs. On évite de calculer. Cela a un lien avec ce qu'on vient de faire juste avant.* »
La consigne est claire. Elle précise bien les attentes de l'enseignant sur le plan cognitif : l'élève ne doit pas calculer pour trouver une expression numérique équivalente à 53-18. Elle est trop fermée dans le sens où un seul type de réécriture, celui qui met en jeu la propriété de conservation des écarts est attendue en lien avec ce qui vient d'être fait juste avant.

Suite à cette consigne, spontanément, un élève propose de placer l'étiquette sur laquelle est écrit $43 - 8$. L'enseignant sans plus attendre lui demande comment il a fait pour « passer » de cinquante-trois à quarante-trois. C'est un autre élève qui indique qu'il a « enlevé » une dizaine. Ce à quoi, l'enseignant sans plus attendre répond :
« J'ai enlevé le même nombre aux deux termes. J'ai enlevé dix à chaque fois. Est-ce que j'ai eu besoin de faire le calcul ? Non, je sais que le résultat est le même à chaque fois. »

Cet échange permet à l'enseignant d'expliquer comment on applique la conservation des écarts pour comparer deux expressions numériques sans avoir à les calculer. Au cours des échanges non retranscrits ici, l'enseignant motivera l'utilisation de cette technique en demandant aux élèves quelle(s) expression(s) ils choisiraient pour effectuer facilement un des calculs suivants $53 - 18, 43 - 8$ et $55 - 20$.

Cette situation permet aux élèves de s'engager dans un travail de réécriture avec l'aide de l'enseignant. Un prolongement pourrait être de rechercher une situation permettant aux élèves de prendre davantage d'initiatives et de formuler eux-mêmes la conservation des écarts.

RESULTATS DE LA RECHERCHE

Notre premier résultat est relatif à l'organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif sur les entiers naturels. Celle-ci s'est avéré opérationnelle comme filtre d'analyse d'éléments de pratiques (manuels, pratiques effectives) et comme cadre de la conception d'ingénierie.

Dans les manuels étudiés, nous avons noté peu ou pas de prise en compte de la dimension technologique et une faible articulation entre calcul mental et calcul posé. Par ailleurs, le choix des techniques à enseigner en calcul mental n'est pas toujours argumenté. La réécriture des calculs pour justifier les techniques est parfois absente.

Dans les classes observées, les enseignants en privilégiant un travail exclusivement oral cherchent à développer la valence pragmatique (calculer vite et bien) sans mettre en avant les propriétés des nombres et des opérations qui interviennent. Des élèves utilisent alors systématiquement l'usage du comptage ou des techniques « posées ». L'utilisation d'ostensifs comme les écritures chiffrées et la droite numérique ne semble pas ancrée dans les pratiques usuelles de l'école primaire.

Dans ce contexte, nous avons noté les effets positifs d'un travail régulier et progressif à partir des écritures arithmétiques sur les apprentissages des élèves. L'analyse des productions de l'évaluation finale montre que plus des trois quarts des élèves (dans les deux classes confondues) arrivent à indiquer avec précision le mode d'emploi de la technique qu'ils mettent en œuvre. De plus, les réponses justes sont plus nombreuses qu'à l'évaluation initiale comme le montre le tableau suivant .

<table>
<tr><th colspan="2">Ta−□</th><th colspan="3">Ta−□0</th><th colspan="3">Ta−□□</th></tr>
<tr><td rowspan="2">421−3
ED:24/48</td><td rowspan="2">235−6
EF: 30/48</td><td colspan="2">203−10</td><td rowspan="2">463−90
EF:27/48</td><td colspan="2">31−29</td><td rowspan="2">63−17
EF: 28/48</td></tr>
<tr><td>ED:20/48</td><td>EF:38/48</td><td>ED:17/48</td><td>EF:
27/48</td></tr>
</table>

Figure 6 : résultats aux évaluations diagnostiques et finales (48 productions au total)

Aux évaluations diagnostiques (ED), pour effectuer le calcul $421 - 3$, uniquement la moitié des élèves réussissaient le calcul et parmi eux beaucoup décomptaient de un en un alors qu'aux évaluations finales (EF) pour effectuer le calcul $235 - 6$ la plupart des élèves arrivent à montrer au moyen des écritures chiffrées ou d'un schéma avec appui sur la droite numérique vide (DNV) qu'ils effectuent $236 - 5 - 1$ (utilisation de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{A10}}$). De la même manière la technique pour effectuer $203 - 10$ a évoluée (moins de décomptage de un en un) et consiste maintenant à soustraire une dizaine à vingt dizaines puis à convertir 19 dizaines en unités ($\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{CONV}}$) et enfin à calculer $190 + 3$ ou à effectuer $203 - 3 - 7$ (utilisation de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{A10}}$). Un autre calcul est beaucoup mieux réussi, celui de $31 - 29$. Les élèves font maintenant preuve de flexibilité et d'adaptabilité en passant par une addition à trou ($29 + .. = 31$) ou une technique par compensation ($31 - 29 = 31 - 30 + 1$) ou encore une technique par translation ($31 - 29 = 32 - 30$).

LIMITES ET PERSPECTIVES DE LA RECHERCHE

Même si l'ingénierie construite et mise en œuvre dans deux classes de CE2 a eu des effets globalement positifs sur les compétences des élèves en calcul soustractif, il nous semble important de revenir sur ce qu'elle n'a pas permis d'atteindre, pour engager quelques pistes de réflexion et ouvrir des perspectives …

Pas assez de différenciation pédagogique, pas assez de potentiel adidactique pour certaines situations

Le travail régulier et progressif sur les écritures numériques même s'il s'est avéré « porteur » pour la majorité des élèves n'a pas été convaincant pour permettre à un tiers des élèves de progresser et d'arriver à calculer en ligne $a - b$ avec b nombre à deux chiffres. L'introduction de l'ostensif droite numérique, même s'il permet de visualiser les étapes d'un calcul, n'aide pas l'élève à effectuer le calcul à proprement parler. De même, le fait d'explorer d'emblée plusieurs techniques, avant de stabiliser l'usage de certaines d'entre elles, n'est pas forcément bénéfique pour tous les élèves. Autre limite, la situation proposée autour du mesurage et de la réécriture de calculs pour introduire la conservation des écarts était trop fermée et laissait peu d'initiatives aux élèves.

Des pistes de réflexion, des perspectives…

Ce travail de thèse n'est qu'un début. La question soulevée par l'utilisation de la droite numérique est à approfondir au vu de l'obstacle soulevé par son utilisation pour effectuer des tâches comme soustraire un multiple de dix. Obstacle que nous avons essayé de formuler en évoquant « un écran à l'effectuation de calculs ». Nous aimerions également approfondir la question de l'utilisation de la propriété de conservation des écarts aux cycle 3 et 4 pour résoudre des équations. Cette propriété est-elle explicitée et mise en relation avec le travail effectué autour de l'algorithme de la soustraction posée.

Le travail collaboratif enseignants-chercheur réalisé pour la thèse est plus présent qu'il n'y parait même s'il reste à l'analyser et le formaliser avec d'autres outils théoriques avant d'engager un travail sur le même thème avec un autre groupe d'enseignants. Nous pensons à un groupe IREM ou à un Léa, ce qui permettrait d'avoir des temps de rencontre et de formation, des conditions matérielles qui faciliteraient la collaboration, et ouvrirait éventuellement le groupe à d'autres chercheurs.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (2005). L'intelligence du calcul. In Actes de l'Université d'été de mathématiques, Saint Flour. Disponible en ligne : http://www.ac-clermont.fr/disciplines/fileadmin/user_upload/Mathematiques/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_02.doc (consulté le 11/07/15).

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel P., Vandebrouck F. & Wozniak F. (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p.15-25). Grenoble : la Pensée Sauvage.

BOBIS, J., BOBIS, E. (2005). The empty number line : Making children's thinking visible . Disponible en ligne: https://www.researchgate.net/publication/271447200_The_empty_number_line_Making_children%27s_thinking_visible (consulté le 01/08/ 2015)

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), *77*-124.

BOSCH, M., GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12ième Ecole d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère). Du 20 au 29 aout 2003* (p. 107-122). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BOULE, F., (1994-1995). Regards sur le calcul mental. *Grand N, 58*, 39-52.

BUTLEN, D., CHARLES-PEZARD, M. (2007) Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental entre sens et technique. *Grand N, 79*, 7-32.

CARPENTER, T.-P., FRANKE, M.- L., JACOBS, V.-R., FENNEMA, E., EMPSON, S.-B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, *29*(1), 3-20.

CASTELA, C., ROMO VAZQUEZ, R. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des Mathématiques, 31*(1), 79-130.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-265.

ERNEST, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational studies in Mathematics, 16*. 411- 424.

FUSON, K. C., WEARNE, D., HIEBERT, J., HUMAN, P., MURRAY, H., OLIVIER, A., CARPENTER, T.-P., FENNEMA, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 130-162.

GRAVEMEIJER, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 443-471.

KLEIN, A.-S., BEISHUIZEN, M., TREFFERS, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 443- 464.

MAUREL, M., SACKUR, C. (2010). Il ne faut pas désarticuler un nombre. Mise en œuvre du dispositif Cesame en primaire. *Grand N*, *85*, 43-59.

RINALDI, A.-M .(2016). *Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie.* Thèse de doctorat. Université Sorbonne Paris Cité. Université Paris Diderot. Disponible en ligne :https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01470473/ (consulté le 21/06/ 2016)

ROBERT, A., PENNINCKX, J., LATTUATI, M. (2013). Présentation d'un ouvrage. Une ressource en formation de formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire. *Petit x*, *92*, 49-56.

TEPPO, A., VAN DEN HEUVEL- PANHUIZEN, M. (2014). Visual representations as objects of analysis : the number line as an example. *ZDM: the International Journal on Mathematics Education, 46*(1), 45-58.

THOMPSON, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction Part 1. *Mathematics in School November*, 2-4.

INVESTISSEMENTS DE SAVOIRS ET INTERACTIONS DE CONNAISSANCES DANS UN CENTRE DE FORMATION PROFESSIONNELLE ET SOCIALE : QUE PEUVENT BIEN NOUS APPRENDRE LES MATHEMATIQUES QUE FONT LES ELEVES DE L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE UNE FOIS QU'ILS ONT TERMINE L'ECOLE ?

Jean-Michel **FAVRE**

Groupe ddmes, Rolle (CH) & CFPS du Château de Seedorf, Noréaz (CH)

jmfavre@cfps-seedorf.ch

Résumé

Ce texte rend compte d'une thèse dont l'enjeu principal est d'appréhender les mathématiques à l'œuvre dans le contexte de la formation professionnelle spécialisée que bon nombre d'élèves de l'enseignement spécialisé rejoignent au terme de leur scolarité obligatoire. Menée à l'interne d'un système par l'un de ses acteurs, en ayant recours à un instrument de recherche original : la narration (Groupe ddmes, 2012), la thèse vient questionner, sous divers aspects, les trois champs qu'elle a mis en étroite connexion : l'enseignement spécialisé, la formation professionnelle spécialisée et la didactique des mathématiques. L'un des résultats les plus probants de la thèse est la caractérisation du rapport à l'ignorance que l'enseignant entretient à l'égard des interactions, l'invitant à un jeu avec l'enseigné qui alterne recherche de significations et recherche de contrôles.

Mots clés

Formation professionnelle spécialisée - enseignement spécialisé - didactique des mathématiques - proportionnalité - mesures - narration - rapport de l'enseignant à l'ignorance - jeu

PREAMBULE

Avant toutes choses, je tiens à remercier chaleureusement les organisateurs du séminaire national de l'ARDM 2017 - Christine Chambris et Thomas Barrier - de m'y avoir invité. J'y étais déjà venu en 2003 avec des collègues suisses pour présenter les travaux du groupe de recherche ddmes[1] (Conne & al., 2004) que nous avons fondé en 1998 avec François Conne, mais je n'y ai plus jamais participé depuis. C'est donc à la fois pour moi un grand plaisir et un bel honneur de m'y retrouver une quinzaine d'années plus tard pour y rendre compte de mon travail de thèse.

L'introduction permettra de définir brièvement ce qu'il faut comprendre, lorsque je parle d'enseignement spécialisé, de formation professionnelle initiale et de formation professionnelle spécialisée, étant donné que ces termes recouvrent, déjà en Suisse, des réalités sensiblement différentes lorsque l'on passe d'un canton à l'autre et qu'ils ne correspondent assurément pas non plus à ce qu'on a coutume d'y entendre en France.

[1] Le groupe ddmes (didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé) est subventionné par l'AVOP (Association vaudoise des organismes privés pour personnes en difficulté) : http://www.avop.ch.

La première partie visera à préciser l'origine et les enjeux de mon travail de thèse, à présenter le contexte dans lequel elle a eu lieu et le dispositif de recherche que j'ai conçu pour en assurer la réalisation, ainsi que le cadre théorique que j'ai construit pour fonder mes analyses. Il s'agira ici de montrer comment je m'y suis pris pour appréhender les mathématiques qui sont à l'œuvre dans la formation professionnelle spécialisée.
Suivant le cadre théorique établi, je présenterai dans la seconde partie les résultats de mes analyses selon trois niveaux d'appréhension : le niveau de l'institution, le niveau des investissements de savoirs et le niveau des interactions de connaissances (Conne, 2003). Il s'agira là de restituer ce que j'ai compris des mathématiques à l'œuvre dans la formation professionnelle spécialisée.
Enfin, conformément au titre de l'exposé : « Que peuvent bien nous apprendre les mathématiques que font les élèves de l'enseignement spécialisé une fois qu'ils ont terminé l'école ? », la conclusion déclinera les perspectives que cette étude augure pour la formation professionnelle spécialisée, l'enseignement spécialisé et la didactique des mathématiques.

INTRODUCTION

Enseignement spécialisé

Tout au long de l'exposé, je considérerai l'*enseignement spécialisé* (Es) comme l'ensemble des classes qui rassemblent : « les enfants et adolescents qui, en raison d'une maladie ou d'un handicap mental, psychique, physique, sensoriel ou instrumental[2], ne peuvent suivre tout ou partie de l'enseignement ordinaire » (Ogay, 2010, p.238).

Ecole ordinaire (Eo)	Enseignement spécialisé (Es)
Univers homogène Etablissements scolaires Normes (inter)cantonales	**Univers composite** Institutions spécialisées Spécificités locales
Organisation verticale marquée Cycles d'enseignement uniformes et filières Plans d'études officiels Moyens d'enseignement obligatoires	**Organisation verticale floue** Organisations spécifiques à chaque institution Projets individualisés Moyens d'enseignement à choix
Etablissement Organisation en « classes » Enseignants seuls face à la classe Visée prioritairement pédagogique et didactique	**Institution** Organisation en « lieux » Equipes d'intervenants : enseignants, éducateurs, psychologues Visées pédagogique et didactique, éducative et thérapeutique
Elèves Statut d'élève permanent Importance donnée au groupe-classe et à son potentiel Paliers de progression endogènes	**Sujets** Statut d'élève intermittent Importance donnée au sujet et prise en compte de ses difficultés Paliers de progression endogènes et exogènes (visant la réintégration en Eo)

Tableau n°1 *- Divers contrastes entre école ordinaire et enseignement spécialisé*

[2] La liste n'est pas exhaustive, sachant d'autant plus que l'on peut trouver dans ces classes des élèves considérés en difficulté, mais dont les causes des difficultés ne sont pas clairement identifiées.

Si certaines de ces classes sont intégrées dans les établissements de l'école ordinaire (Eo), une grande majorité d'entre elles résident dans des institutions spécialisées, définies autour du traitement spécifique d'un ou de plusieurs handicaps[3].
Dans le canton de Vaud, l'Es constitue une entité officiellement reconnue depuis la création, en 1971, du Service de l'enseignement spécialisé (SES) qui a été rattaché au Département de la prévoyance sociale et des assurances (DPSA). Il s'agit d'un univers composite, difficile à appréhender dans son ensemble. Au sein du groupe ddmes (Conne, 2004a), nous avons pourtant pris pour habitude de considérer l'Es comme un tout singulier[4], en le contrastant selon différents aspects (cf. tableau n°1) vis-à-vis de l'Eo.

Formation professionnelle initiale

A la fin de l'école obligatoire - soit entre quinze et seize ans - deux grandes voies de formation s'ouvrent[5] en Suisse aux élèves qui terminent leur cursus scolaire : celle de la *formation professionnelle initiale* qui offre un accès direct au monde du travail et celle des écoles d'enseignement général qui débouche sur les hautes écoles et l'université[6] (cf. figure n°1). Ces deux voies forment ce qu'on appelle le secondaire II (le secondaire II faisant suite au secondaire I, d'une durée de trois ans, qui succède à l'école primaire dans le cadre de la scolarité obligatoire).

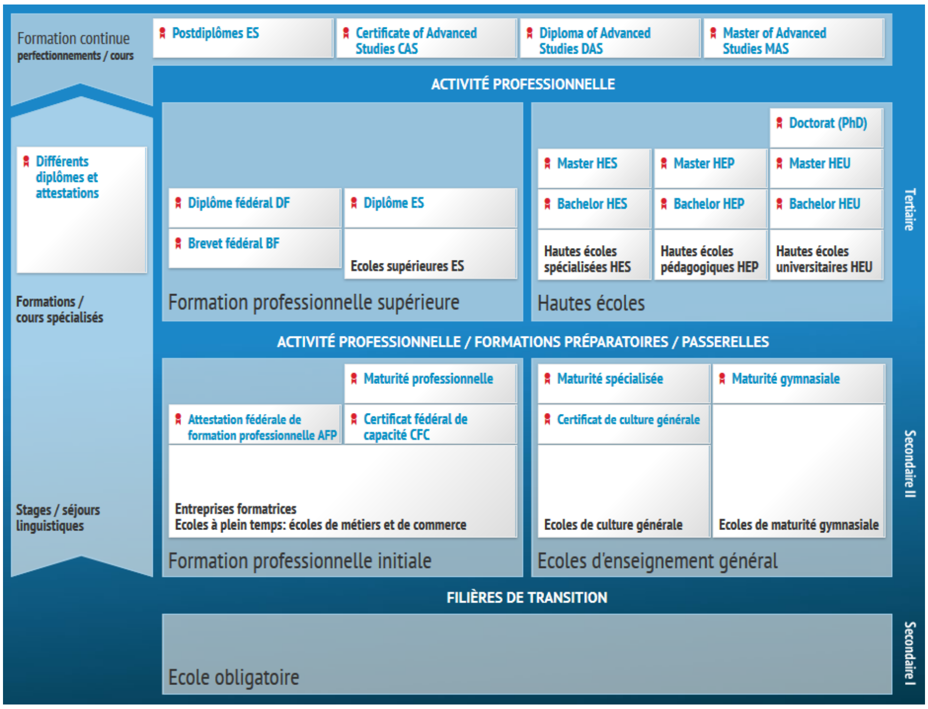


Figure n°1 *- Le système de la formation professionnelle en Suisse (CSFO, 2018)*

[3] Dans cette perspective, échappent donc à l'Es toutes les classes de l'Eo - elles sont de plus en plus nombreuses de nos jours - qui intègrent ou incluent, à temps partiel ou à temps plein, des élèves qui relèvent de l'Es.
[4] Relevons à ce propos qu'en Suisse, en 2012, on comptait au terme de l'école obligatoire, 4,7% de l'ensemble des élèves scolarisés (soit environ 3600 élèves) qui provenaient de l'Es (OFS, 2016).
[5] Durant ces dernières années, diverses filières de transition se sont développées pour accueillir des élèves qui ne peuvent accéder directement à l'une ou l'autre de ces voies. Dans le canton de Vaud, ces filières accueillaient le 6 % des élèves en 1991 ; en 2015, il y en a maintenant 27 % qui y recourent (Mabillard & al., 2016). Pour bon nombre d'élèves, l'entrée effective dans le secondaire II se réalise en conséquence beaucoup plus difficilement qu'auparavant.
[6] Le système comprend toute une série de passerelles (absentes du schéma) devant permettre, plus ou moins facilement selon les cas, de passer d'une voie à l'autre.

La formation professionnelle initiale, appelée aussi « *apprentissage* » en Suisse, recoupe deux cent cinquante métiers (Antille & al., 2011). Environ deux tiers des jeunes du secondaire II se retrouvent dans cette voie de formation qui permet une entrée rapide - après deux, trois ou quatre ans de formation - dans le monde du travail (Mabillard & al., op.cit.).
L'apprentissage peut s'effectuer de deux manières, soit en entreprise, soit en école professionnelle :

- dans la formation en entreprise (on parle volontiers de formation duale), les jeunes cherchent une place d'apprentissage, postulent et sont sélectionnés sur la base d'un dossier de candidature et/ou d'un entretien d'embauche. Ils signent un contrat d'apprentissage avec leur employeur et sont directement intégrés dans le monde du travail. Durant leur formation qui dure de trois à quatre ans, ils reçoivent un salaire et ont au minimum cinq semaines de vacances par an. Un à deux jours par semaine, ils suivent des cours dans une école professionnelle où ils apprennent les bases théoriques de leur futur métier et améliorent leur culture générale. Des cours interentreprises, placés sous la responsabilité des organisations faîtières relatives à chaque profession, traitent certains aspects centraux du métier pour compléter la formation.
- dans la formation en école professionnelle, les jeunes s'inscrivent auprès de l'école concernée et sont sélectionnés sur la base d'un test d'admission. La formation est de même durée que la voie correspondante en entreprise, mais les apprentis conservent un statut d'élève : ils bénéficient d'horaires et de vacances scolaires et ne touchent pas de salaire. Ils suivent des cours théoriques et pratiques et font des stages en entreprise. La formation en école professionnelle n'existe pas pour l'ensemble des métiers de la formation professionnelle initiale. (Antille & al., op.cit.)

Ces deux voies de formation aboutissent à un même diplôme : le *certificat fédéral de capacité* (CFC) qui permet d'entrer directement dans le monde professionnel.
Dans quelque cinquante métiers, il est également possible d'entreprendre un apprentissage en entreprise de complexité moindre qui débouche lui aussi sur un diplôme reconnu au plan fédéral : l'*attestation fédérale de formation professionnelle (*AFP). La durée de la formation est réduite à deux ans et les exigences au niveau de la pratique et des cours sont moins élevées. L'AFP permet également d'entrer directement dans le monde professionnel (voire de poursuivre la formation pour obtenir un CFC).

Formation professionnelle spécialisée

Pour des raisons diverses (que je ne développerai pas ici), certains jeunes arrivés au terme de leur scolarité ne peuvent accéder à la formation professionnelle initiale, même après être passés par des filières de transition. C'est le cas d'une partie des élèves ayant accompli, partiellement ou intégralement, leur scolarité obligatoire dans l'Es. Dans les cantons de Suisse romande, on trouve donc des structures - des *centres de formation professionnelle spécialisés* ou *centres de formation professionnelle et sociale* - qui se sont spécialisées pour accompagner ces jeunes, afin de leur permettre, malgré tout, d'accomplir une formation professionnelle initiale et d'entrer ensuite dans le monde du travail. Ces centres sont financés par l'assurance invalidité[7] (AI).

[7] En Suisse, l'invalidité est une notion qui comprend trois éléments (Imperiale & Lepori, 2013) : un élément médical (atteinte à la santé physique ou psychique), un élément économique (limitation de gain à moyen et à long terme) et un élément causal (rapport entre l'atteinte à la santé et la limitation de gains). Pour accomplir sa formation dans un centre, un jeune doit donc répondre à ces critères. C'est l'AI qui tout à la fois lui en donne l'autorisation, suit sa progression, procède de cas en cas à l'interruption de cette formation et veille à terme à son insertion dans le monde du travail.

Les formations réalisées en centre débouchent majoritairement sur des AFP, bien plus rarement sur des CFC. Par ailleurs, les apprentis qui ne peuvent ni concourir à l'AFP, ni au CFC, obtiennent au terme de leur formation une *attestation de formation pratique* (AFPra) qui devrait également leur permettre d'intégrer le marché du travail, mais le plus souvent au sein d'une structure à caractère social (une entreprise sociale ou un atelier protégé).
A l'image de la place prise par l'Es au sein de la scolarité obligatoire, la *formation professionnelle spécialisée* (Fps) constitue un autre univers composite, formé de ces différentes structures financées par l'AI, destinées à tous ces jeunes qui ne peuvent suivre une formation professionnelle initiale dans une entreprise ou en école professionnelle.

APPREHENDER LES MATHEMATIQUES ET LEUR FONCTIONNEMENT DANS LA FORMATION PROFESSIONNELLE SPECIALISEE

Origines et enjeux de la thèse

La thèse est à considérer comme le produit d'une *continuité* et d'une *rupture* : une continuité dans les travaux du groupe ddmes et dans ceux que j'ai déjà menés, en didactique des mathématiques (ddm), dans le contexte de l'Es ; une rupture dans mon parcours professionnel[8] me conduisant à découvrir le monde de la Fps qui m'était entièrement inconnu[9] jusqu'alors. Elle vise à répondre, au moins partiellement, à la question suivante : « *Au terme de l'école obligatoire, que se passe-t-il, du point de vue des mathématiques, de leur enseignement et de leur apprentissage, pour les élèves qui ont passé tout ou partie de leur scolarité dans l'Es ?* ».
La thèse relève en outre d'un triple enjeu :

- *explorer le terrain de la Fps* à l'aide des outils théoriques de la ddm et de son approche systémique fondée sur l'examen des savoirs, pour problématiser, voire éclairer les pratiques des mathématiques qui y sont à l'œuvre ;
- *informer l'Es des pratiques mathématiques effectives* que l'on rencontre sur le terrain *de la Fps*, pour susciter un questionnement autour des représentations que l'on s'en fait et envisager des ouvertures ;
- c*onfronter les concepts de la ddm au terrain de la Fps* pour en éprouver la pertinence ; le cas échéant, en développer de nouveaux, plus propices à la compréhension des phénomènes didactiques et l'appréhension du fonctionnement des savoirs au cœur des interactions.

Contexte de recherche

Le contexte de recherche est le *Centre de Formation Professionnelle et Sociale du Château de Seedorf*, sis à Noréaz, dans le canton de Fribourg (CH). Ce centre accueille quelques huitante (de nonante à cent, durant la réalisation de la thèse) apprenties[10] âgées de seize à vingt-cinq

[8] Après avoir travaillé pendant une quinzaine d'années en tant qu'enseignant spécialisé dans un centre thérapeutique de jour et un peu plus de dix ans à la formation en ddm des enseignants spécialisés, j'ai rejoint, en 2009, le monde de la Fps. L'idée d'y réaliser une thèse n'était pas encore présente, mais la belle aventure que j'ai vécue dans ce nouveau contexte m'a peu à peu convaincu qu'il valait vraiment la peine de me mettre à l'ouvrage…

[9] La chose n'est pas banale en soi, si l'on considère que la plupart des travaux qui sont menés en ddm se réalisent dans des contextes connus et éprouvés des chercheurs qui ont déjà fréquenté, que ce soit en tant qu'élève ou comme enseignant, le contexte sur lequel porte leur étude.

[10] J'utiliserai le féminin tout au long du texte, dans la mesure où, pour des raisons liées au développement historique du centre que je ne développerai pas ici, il s'agit presqu'exclusivement de jeunes femmes.

ans, provenant de l'ensemble de la Suisse Romande. Ces apprenties, qui ne peuvent suivre directement une formation professionnelle en entreprise ou dans une école professionnelle[11], bénéficient de mesures de l'AI.

Le mandat délivré au centre par l'AI est de rendre chaque apprentie apte à l'embauche sur le marché du travail, grâce au fait qu'elle y ait accompli avec succès une formation professionnelle initiale. Le CFPS cherche cependant à dépasser le cadre restreint de la formation professionnelle pour offrir une *formation* qu'il qualifie de « *globale* », intégrant et articulant des objectifs professionnels, personnels et sociaux, susceptibles de favoriser, en fin de parcours, une intégration professionnelle et sociale la meilleure possible.

La formation globale des apprenties est assurée conjointement par des maîtres socioprofessionnels, des éducateurs et des enseignants spécialisés (et quelques rares psychologues). Le centre propose actuellement neuf domaines de formation (il n'y en avait que six durant la réalisation de la thèse) : blanchisserie, confection, commerce de détail, cuisine, exploitation (conciergerie), intendance, horticulture, restauration, soins et accompagnement. Comme indiqué précédemment, chaque domaine se décline en trois niveaux de formation, débouchant sur trois types de diplômes : l'AFPra, l'AFP et, dans de rares cas, le CFC.

Depuis 2009, je fonctionne comme responsable de l'équipe des enseignants spécialisés et comme responsable pédagogique du CFPS dans son ensemble. Dans la perspective de réaliser une thèse dans ce contexte, ma position à l'interne de responsable pédagogique présentait à la fois des avantages : j'avais un accès direct aux documents, aux collègues, aux apprenties ; et des inconvénients : en tant que responsable pédagogique, j'occupais une position hiérarchique vis-à-vis de la plupart de mes collègues, ce qui impliquait que j'étais en principe déjà supposé savoir ce que je souhaitais pouvoir appréhender et rendre compte.

Cette position m'a finalement conduit à ne prendre pour objet d'analyse que les interactions que j'étais moi-même en mesure de nouer avec les apprenties. Il s'agit là d'un choix qui constitue une limite forte de la thèse, puisqu'en renonçant à faire porter mes analyses sur les interactions que mes collègues - enseignants ou maîtres socioprofessionnels - entretenaient en mathématiques avec les apprenties, c'est tout un pan d'observation du CFPS et de son fonctionnement dont je décidais sciemment de me priver.

Dispositif de recherche

J'aime à qualifier ma démarche d'*opportuniste* (Giroux, 2007), dans le sens où je n'ai pas créé de dispositif de recherche a priori, ce dernier s'étant progressivement construit selon les opportunités que ma fonction de responsable pédagogique m'a amené à rencontrer durant mes quatre premières années au CFPS. Ces opportunités ont donné lieu à cinq *investigations exploratoires*[12] (cf. tableau n°2), dans lesquelles j'ai été amené à chaque fois à jouer des rôles particuliers, où j'ai choisi d'assumer les *contraintes* (Chevallard, 1988a) qui leur étaient liées.

---

[11] Voilà ce qu'en dit le directeur actuel du CFPS du Château de Seedorf :

> L'une des caractéristiques communes, mais évidemment à des degrés divers, à nombre de jeunes filles placées à Seedorf est une expérience de vie souvent chaotique tant sur les plans personnels et familiaux que scolaires. Ainsi sur le plan personnel, elles n'ont pu, bien souvent, bénéficier d'un environnement sécurisant et d'un parcours de vie qui auraient dû leur permettre de se construire une identité équilibrée.
>
> […] Sur le plan scolaire, les expériences d'apprentissage ont souvent été synonymes d'échec. […] Nous constatons ainsi, chez nombre de ces jeunes apprenties, ce que les spécialistes de l'apprentissage appellent l'impuissance apprise, convaincues qu'elles sont de leur nullité et de leur incapacité à réussir un apprentissage. (Moulin, 2015, p.14)

[12] L'idée d'*investigation exploratoire* a été développée au sein du groupe ddmes (Favre, 2004) pour qualifier des activités expérimentales moins lourdes que des recherches, de façon à ce que chacun de ses membres soit à même d'en réaliser dans son contexte professionnel. Dans le cas particulier de la thèse, il faut comprendre

La première investigation a consisté à rassembler, pour les analyser, les documents, de provenance externe ou interne au CFPS, qui servent de cadre à la formation des apprenties. La deuxième investigation a porté sur le soutien que j'ai apporté, lors de ma première année au CFPS, à une apprentie employée de cuisine AFP qui éprouvait des difficultés en mathématiques dans le cadre de ses cours professionnels. La troisième investigation comprend l'analyse d'une cinquantaine d'épreuves mathématiques que l'on soumet aux futures apprenties durant le stage qu'elles accomplissent avant leur entrée au CFPS, pour déterminer les savoirs mathématiques qu'elles avaient pu s'approprier durant leur scolarité. La quatrième investigation s'est intéressée aux cours de mathématiques que j'ai donnés sur une année à un groupe de sept apprenties employées en cuisine AFP, en vue de la préparation de leurs examens de fin d'apprentissage. La cinquième investigation a porté sur un nouveau soutien en mathématiques que j'ai donné à une apprentie praticienne en intendance (AFPra).

	Années	Objet d'étude	Rôle emprunté	Données récoltées
1	2009-2012	Documents de références à la formation	Responsable pédagogique	Programmes, moyens, épreuves, etc.
2	2009-2010	Cours de soutien apporté à une apprentie	Enseignant de soutien	5 narrations de séances
3	2010-2011	Epreuves soumises aux stagiaires	Examinateur/évaluateur	53 épreuves
4	2011-2012	Cours de branches professionnelles dispensé à un groupe d'apprenties	Enseignant de mathématiques	13 narrations de séances
5	2012-2013	Cours de soutien apporté à une apprentie	Enseignant de soutien	10 narrations de séances

Tableau n°2 *- Les cinq investigations exploratoires constitutives du dispositif de recherche*

Du fait que sur les cinq investigations, trois reposaient sur des interactions dans lesquelles j'étais moi-même impliqué, j'ai choisi de recourir à un instrument qui permette de suivre et de conserver la trace des échanges des apprenties et de l'enseignant sans (trop) en perturber le déroulement. Il s'agit d'un instrument que nous utilisons régulièrement dans le groupe ddmes, que nous désignons par le terme *narration*[13] et que nous avons, dans une première acception, défini de la manière suivante :

> Nous envisageons la narration comme une description orale ou écrite d'un entretien ou d'une séquence d'enseignement, faite « à chaud » à partir des souvenirs qu'on en a conservés et des productions d'élèves qu'on y a récoltés. Elle s'articule autour d'un ou de plusieurs événements qui se sont produits dans la séquence et qui nous ont particulièrement surpris. La narration vise à rendre compte des interactions qui ont eu lieu durant la séquence en relatant ce qui s'y est passé (et non pas ce qui aurait dû s'y passer) à quelqu'un qui n'y était pas présent […] (Favre, 2012, p.701).

La thèse a ainsi été l'occasion de définir théoriquement la narration, en lien et en contraste, avec des idées/champs proches développés par différents auteurs : l'idée de « protocole (Brun & Conne, 1990) ; l'idée de « récit » (Bruner, 1996) ; l'idée d'« intrigue » (Pastré, 2005 ; en

que la détermination et l'articulation de cinq investigations consécutives constitue bel et bien une recherche à part entière.

[13] La *narration* a été le thème des journées didactiques que le groupe ddmes a organisé en 2011 à La Chaux-d'Abel dans le canton de Berne (Groupe ddmes, 2012). L'acception dans laquelle la narration est prise ici ne doit pas être confondue avec celle qui prévaut ailleurs en ddm, sous la dénomination de *narration de recherche* (Bonafé & al., 2002), laquelle correspond à une modalité de travail développée au sein de l'IREM de Montpellier, demandant aux élèves de rédiger, au terme de la résolution d'un problème, le compte-rendu des démarches qu'ils ont engagées pour parvenir à sa résolution.

référence à Ricoeur, 1985) ; le champ de la « recherche qualitative/interprétative » chez Anadon &Guillemette, 2012. Elle a également permis d'en valider l'usage à travers la collecte des données qu'elle a conduit à réaliser et des analyses auxquelles elle a permis d'aboutir ; mais aussi d'en explorer l'usage, en cherchant à y intégrer[14] trois niveaux d'interprétation : a) le compte-rendu des événements apparus dans l'interaction ; b) les analyses particulières qui peuvent en être faites ; c) les retombées théoriques plus générales qui en découlent.

Cadre théorique

Etant donné la diversité des données récoltées, la complexité de l'objet d'étude et du fait de l'absence de tout travail antérieur en ddm le concernant, j'ai eu besoin, pour procéder à mes analyses, de constituer un cadre théorique suffisamment large pour appréhender les savoirs mathématiques que l'on rencontre dans le CFPS considéré dans sa globalité et suffisamment fin pour décrire et analyser le fonctionnement des savoirs qui s'actualise au cœur des interactions. Pour ce faire, je me suis appuyé sur un *socle théorique* qui a été développé par Conne (2003) dans le contexte de l'Es.

Niveau de l'institution				
Formes	**Déterminations**	**Enjeux**	**Types d'interactions**	**Evolution**
Praxéologie Chevallard (1999)	*Contraintes internes/externes* Chevallard (1988a)	*Enjeu didactique/ non-didactique* Chevallard (1988b)	*Didactiques organisé/improvisé*[15] Chevallard (1988b)	*Objet sensible/ savoir didactique* Chevallard (1988c)

Niveau des investissements de savoirs		
Tâches	**Techniques**	**Déterminations**
Complexité cognitive Vergnaud (1991)	*Calcul assisté par un diagramme* Conne (1997)	*Contraintes internes/externes* Chevallard (1988a)

Niveau des interactions de connaissances		
Types de contrat	**Productions**	**Dynamique**
Contrat de reprise Brousseau (1995)	*Analyse d'erreurs* Brun (1999)	*Activité du couple enseignant/enseigné* Conne (1998)

Tableau n°3 *- Caractérisation des trois niveaux d'analyse du système étudié*

Opérant une coupe transversale dans le système étudié, allant de la périphérie jusqu'à son centre, ce socle distingue trois niveaux d'analyse :

- le niveau de l'*institution*, envisagée comme un réseau de lieux, de personnes et de savoirs, pour appréhender les savoirs mathématiques qui sont en jeu dans la formation des apprenties et les conditions qui les déterminent ;
- le niveau des *investissements de savoirs* pour caractériser de façon plus approfondie les savoirs mathématiques qui font l'objet d'un investissement effectif au cours des investigations menées ;

[14] Dans la thèse, j'ai recouru à diverses manières (successions chronologiques, emploi de différentes polices, décalages typographiques, …) pour tenter d'articuler le mieux possible ces trois niveaux d'interprétation : le chapitre 9, portant sur la cinquième investigation réalisée, les intègre au sein d'un récit continu ; il est assurément le plus abouti en ce sens.

[15] La distinction *didactique organisé*/*didactique improvisé* n'est pas de Chevallard, mais elle a été définie dans le contexte de la Fps (voir plus avant dans le texte) en référence à la distinction *didactique scolaire/didactique familial* qui provient bien de la théorie de Chevallard (1998b).

- le niveau des *interactions de connaissances* pour analyser finement le fonctionnement des savoirs mathématiques mis en œuvre par l'enseignant et par l'enseigné au sein même des interactions et les incidences qui en résultent sur leur dynamique.

Chaque niveau a ensuite fait l'objet d'une caractérisation spécifique par emprunt/ajustement de divers concepts provenant de plusieurs théories de la ddm, afin de préciser les aspects qui feraient l'objet d'une analyse spécifique. Le tableau n°3 spécifie les aspects retenus pour chacun des trois niveaux et les met en regard des concepts didactiques utilisés pour les examiner.

A ces trois niveaux s'ajoute, pour guider le travail d'analyse, la nécessité de définir un *savoir mathématique de référence* (Conne, 1992), qui a été élaboré à partir des travaux de Rouche (1992, 1998, 2006). Le choix de Rouche se justifie tout d'abord par le fait que ses propos traitent des principales notions mathématiques en jeu dans la Fps, alors que certaines d'entre elles (règles de trois, produit en croix) ont parfois disparu des programmes de l'Eo. De plus, les savoirs ne sont pas considérés par Rouche de façon détachée, comme des isolats, ainsi qu'ils apparaissent dans certaines recherches ou certains programmes ; elles relèvent en effet de constructions qui, à l'image d'une axiomatique, conduisent les notions à s'engendrer les unes des autres, marquant ainsi les liens qu'elles entretiennent entre elles. Enfin, les constructions établies par Rouche ont pour enjeu de partir du quotidien et de la pensée commune[16] pour remonter jusqu'aux mathématiques qui en proviennent et les modélisent : elles semblaient donc bien adaptées à un contexte où les mathématiques avaient en principe pour vocation d'être utilisées dans le quotidien professionnel des apprenties.

Dans la thèse, ce savoir de référence prend la forme de deux constructions. La première construction, établie dans le *champ de la mesure*, vise à articuler entre elles les notions de grandeur, de mesures de longueur, de capacité et de poids, de conversion d'unités et de nombre décimal, présentes dans les interactions. La seconde construction, établie dans le *champ de la proportionnalité*, vise à articuler entre elles les notions de grandeur, de rapport, de proportionnalité, de règle de trois, de produit en croix et de pourcentage, présentes dans les interactions. Ces deux constructions ont été utilisées non comme des cadres, mais bien comme des schémas (Bontems,2014), de manière à leur conférer un caractère à la fois sommaire, sélectif et provisoire, susceptible d'être révisé par les interactions ; et ce, notamment, en réponse à la distinction logique d'exposition / logique d'initiation établie par Conne (2004b).

RENDRE COMPTE DES MATHEMATIQUES ET DE LEUR FONCTIONNEMENT DANS LA FORMATION PROFESSIONNELLE SPECIALISEE

Les mathématiques et leur fonctionnement au niveau de l'institution

Les mathématiques que l'on retrouve au niveau de l'institution procèdent de trois caractéristiques majeures : *immobilité, disparité* et *précarité.*

Immobilité

Du début à la fin de la formation, ce sont les mêmes savoirs, presqu'exclusivement numériques[17] que l'on retrouve : les nombres (naturels, décimaux et quelques fractions simples), les quatre opérations élémentaires et certains éléments de calcul mental (tables) ; les

[16] Une critique de cette idée telle que développée par Rouche figure dans le chapitre 3 de la thèse.

[17] On parle volontiers de « calcul professionnel » pour désigner les mathématiques enseignées dans la formation professionnelle initiale ordinaire comme spécialisée.

mesures (longueurs, poids, capacité, temps, argent) : mesure effective, lecture, estimation, conversion, calcul (peser avec la tare, rendre la monnaie, préparer une facture) ; la proportionnalité (règle de trois, calcul de pourcentage). Ce sont par ailleurs des savoirs qui ont généralement déjà été enseignés aux apprenties au cours de leur scolarité obligatoire.

Le fait que les savoirs n'évoluent pas tout au long de la formation s'explique notamment par le fait que la Fps constitue, du point de vue des savoirs mathématiques, un *système autarcique, dépourvu d'un amont et d'un aval*. On ne sait pas trop en effet avec quels savoirs les apprenties sont supposées y arriver, à défaut d'un document qui, comme c'est le cas pour chaque métier de la formation CFC (Antille & al., 2011), définirait ce que sont les savoirs qu'elles seraient supposées maîtriser. On se réfère donc à des savoirs « en creux » de ceux qui sont attendus dans la formation CFC, étant donné que les épreuves qu'on soumet aux stagiaires avant leur entrée au CFPS - la thèse a fort bien pu le montrer (voir chapitre 7) - ne permettent pas non plus de les déterminer. Et on ne sait pas trop non plus avec quels savoirs les apprenties sont supposées en sortir : les ordonnances fédérales et les plans de formation définis sous formes de compétences ne précisent pas les savoirs attendus[18] et il est bien difficile de les identifier au cas par cas à partir des besoins de la pratique ; il n'y a pas non plus de manuels scolaires spécifiques à la Fps qui traceraient les contours des savoirs attendus en fin de l'apprentissage et il n'y a guère que dans la formation d'employée en cuisine AFP, qui se termine par un examen de mathématiques, qu'il est plus ou moins possible de le faire.

Disparité

Si les mathématiques sont bien présentes tout au long de la formation des apprenties dans la Fps, elles relèvent d'enjeux divers. Ainsi, certaines activités proposées s'avèrent-elles dénuées de tout enjeu didactique ; c'est le cas par exemple des épreuves soumises aux stagiaires avant leur entrée en formation où il s'agit en priorité de se faire une idée de leur niveau scolaire en vue du choix ultérieur du type de formation qu'elles seront en mesure d'accomplir ; mais c'est le cas aussi des activités d'éducation cognitive (Coulet, 2003) qui sont proposées aux apprenties pour favoriser l'acquisition de stratégies d'apprentissage afin qu'elles les utilisent ensuite pour s'approprier les contenus de formation.

Par ailleurs, au sein des activités qui relèvent d'un enjeu didactique avéré, il est nécessaire de distinguer celles qui prennent la forme classique d'un cours (ce que j'ai désigné par les termes de *didactique organisé*), de celles qui adviennent, aussi bien dans les cours que dans la pratique, au détour d'un besoin spécifique, et qui font que l'on va consacrer un moment particulier à l'enseignement d'un savoir spécifique (ce que j'ai désigné par les termes de *didactique improvisé*). Ces enseignements de mathématiques improvisés, qui se déroulent dans les différents lieux où se réalisent la formation des apprenties et qui sont le fait de personnes différentes font que les techniques enseignées ne sont pas les mêmes. Il n'existe donc *pas de rapport institutionnel au savoir* (Chevallard, 1988b) clairement défini qui fasse l'objet d'un consensus au sein du système et c'est donc aux apprenties qu'il appartient en dernier lieu - ce qui ne va pas sans heurts (voir plus avant) - de gérer cette disparité.

Précarité

A défaut de déterminations externes suffisamment fortes, il a également été possible d'observer qu'un enseignement des mathématiques de type didactique organisé est tout bonnement susceptible de disparaître, sans que cela n'empêche la formation des apprenties d'être menée jusqu'à son terme. Cela été le cas au CFPS en 2007, à l'occasion du

[18] En référence à l'idée de praxéologie de Chevallard (1999), on peut dire que seules les tâches sont définies, mais pas les techniques, ni les technologies et les théories qui les sous-tendent.

basculement des mathématiques des cours de culture générale dans les cours de branches professionnelles où, à l'exception de la formation d'employée en cuisine AFP qui se termine par un examen comprenant des exercices de mathématique à résoudre, un enseignement des mathématiques de type didactique organisé a disparu de la formation des apprenties.
Cette troisième caractéristique que l'on peut attribuer aux mathématiques dans la Fps vient fortement questionner les représentations que l'on s'en fait depuis l'Es (où elles occupent, comme dans l'Eo, une place de choix tout au long de la scolarité des élèves) quant au rôle qu'elles sont censées jouer dans la formation professionnelle des apprenties. L'idée, solidement ancrée un peu partout que les mathématiques devraient être utiles au bon déroulement de leur formation, se voit en effet fortement remise en cause.

Faire avec et faire sans les mathématiques dans la formation professionnelle spécialisée

L'immobilité, la disparité et la précarité des mathématiques dans la Fps tendent à montrer qu'on peut *faire avec*, comme on peut *faire sans les mathématiques* pour *aller de l'avant* dans la formation des apprenties. Toute tâche requérant l'usage de mathématiques pour être accomplie fait l'objet d'une négociation - largement implicite - pour déterminer si ces mathématiques seront matière à enseignement/apprentissage ou si, au contraire, il est préférable (en termes d'efficacité) d'apprendre à faire sans. Il faut également comprendre que cette forme de négociation intervient tant au niveau de la noosphère et du système, que chez les personnes en charge de la formation et les apprenties[19].
Faire avec et faire sans les mathématiques s'avère donc en fait une condition de (bon) fonctionnement du système pour faire face aux importantes difficultés d'enseignement et d'apprentissage que l'on y rencontre, octroyant à chacun des acteurs un espace de liberté qu'il leur est donné (ou non) d'investir : de fait, si chacun s'entend fort bien sur le fait qu'il peut être important de maîtriser des savoirs mathématiques pour faire de la cuisine (par exemple), en l'absence de programmes spécifiques, de moyens d'enseignement adaptés, de formation des maîtres socio-professionnels en ddm pour les enseigner, de capacités suffisantes chez les apprenties pour se les approprier, tout le monde peut également fort bien apprendre à se « débrouiller » sans.

Les mathématiques et leur fonctionnement au niveau des investissements de savoirs

Au niveau des investissements de savoirs, les investigations menées m'ont conduit à m'intéresser essentiellement aux cours donnés aux apprenties employées de cuisine AFP.

Des exercices à résoudre

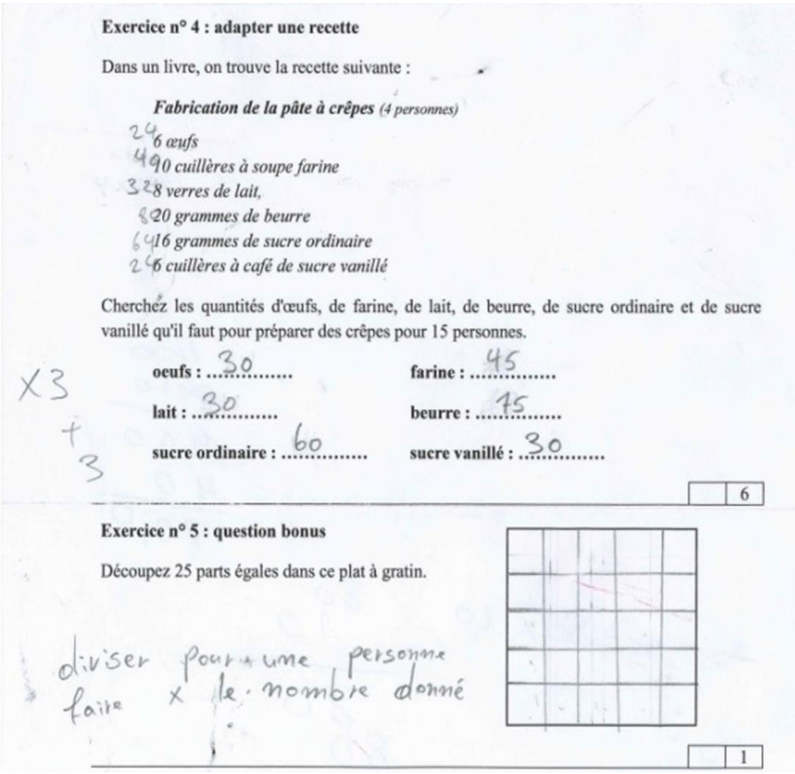
Dans le cadre de ces cours, les tâches données aux apprenties prennent pour l'essentiel la forme *d'exercices scolaires*, parce que ce sont des exercices de ce type qu'elles seront appelées à traiter durant les examens de fin de formation. Or, si ces exercices réfèrent tous au contexte de la cuisine, ils ne correspondent pourtant pas aux problèmes effectifs que les apprenties rencontrent en situation professionnelle, comme l'exemple qui suit le montrera fort bien (cf. figure n°2). Ils sont par ailleurs d'une *complexité cognitive* (Vergnaud, 1991) *très*

[19] Ainsi l'exemple d'une apprentie employée en cuisine qui demande au maître socio-professionnel responsable des cours combien « compte » l'épreuve de mathématiques lors de l'examen de fin de formation et ce dernier qui lui répond qu'un bon résultat à cette épreuve lui permettra seulement d'obtenir une meilleure moyenne finale.

variable (l'analyse les révèle en effet d'une très inégale difficulté) et ils reposent pour l'essentiel sur des relations multiplicatives qui sont souvent indisponibles chez les apprenties.

La figure n°2 donne deux exemples d'exercices scolaires que les apprenties doivent apprendre à résoudre. Le premier d'entre eux (exercice n°4, cf. figure n°2) demande de transformer les quantités d'ingrédients d'une recette prévue pour 4 personnes afin de la réaliser pour 15 personnes. On peut facilement montrer que cet exercice se distingue selon plusieurs aspects d'un problème correspondant que les apprenties auraient lieu de rencontrer en cuisine :

- en cours, toutes les données figurent dans l'énoncé, alors qu'en cuisine d'autres éléments peuvent intervenir : prévoir assez pour qu'il en reste, faire avec une plaque de beurre déjà entamée, etc. ;
- en cours, on ne devra passer que par des calculs pour obtenir les résultats des transformations, alors qu'en cuisine on pourra faire appel à d'autres modes de faire : s'appuyer sur des expériences antérieures, estimer des quantités, faire cas de celles qu'on a disposition, etc.;
- en cours, on demande des résultats exacts, alors qu'en cuisine on pourra s'en tenir à des résultats approchés ;
- en cours, l'exercice à traiter est sous la responsabilité de l'apprentie, alors qu'en cuisine, les transformations à effectuer restent sous la responsabilité des maître socio-professionnels (afin notamment d'éviter de gâcher de la nourriture).


Exercice n° 4 : adapter une recette

Dans un livre, on trouve la recette suivante :

Fabrication de la pâte à crêpes *(4 personnes)*

24 *6 œufs*
40 *10 cuillères à soupe farine*
32 *8 verres de lait,*
80 *20 grammes de beurre*
64 *16 grammes de sucre ordinaire*
24 *6 cuillères à café de sucre vanillé*

Cherchez les quantités d'œufs, de farine, de lait, de beurre, de sucre ordinaire et de sucre vanillé qu'il faut pour préparer des crêpes pour 15 personnes.

x3 + 3

oeufs : 30 **farine :** 45
lait : 30 **beurre :** 45
sucre ordinaire : 60 **sucre vanillé :** 30

6

Exercice n° 5 : question bonus

Découpez 25 parts égales dans ce plat à gratin.

diviser pour une personne
faire x le nombre donné

1

Figure n°2 *- Deux exemples d'exercices scolaires de la formation d'employée en cuisine AFP*

Dans le même ordre d'idées, les procédés de résolution utilisés n'auront pas la même validité en cuisine et en cours. Ainsi, si l'on considère les trois procédés que l'apprentie a esquissé sur sa feuille (cf. figure n°2), on observe que :

- le premier procédé - la multiplication de chaque quantité par 4 qui produit les nombres 24, 40, 32, 80, 64 et 24 figurant à côté des quantités de la recette de base - s'avère non-valide en cours, puisqu'il n'aboutit pas à des résultats exacts, alors qu'il est en revanche tout à fait pertinent en cuisine, donnant des quantités approchées pour 16 personnes et permettant ainsi d'éviter l'usage du 15/4 ;

- le deuxième procédé - la multiplication par 3 suivi de l'ajout de 3, qui vise à déterminer la relation numérique entre 4 et 15 et qui n'a pas été mené à terme par l'apprentie - s'avère non-valide en cours, comme en cuisine ;
- le troisième procédé - la règle de trois énoncée en mots : « diviser pour une personne, faire fois le nombre donné » qui produit les nombres 30, 45, 30, 75, 60 et 30 figurant comme résultats de l'exercice - s'avère en principe valide en cours et en cuisine ; mais on remarque cependant que, dans le cadre des cours, il achoppe à l'usage des décimaux : les trois fois où la division donne un nombre décimal, deux fois 6 ÷ 4 = qui donne 1,5 et une fois 10 ÷ 4 = qui donne 2,5, les résultats ont en effet été « arrondis » à l'entier qui suit[20], soit respectivement à 2 ou 3, pour ensuite être multipliés par 15 et aboutir à 30 et 45 qui seront non-valides.

Quant au second exercice de la fiche (exercice n°5, cf. figure n°2), qui a été rapporté par une apprentie, on se convainc sans grande difficulté que son traitement en cours diffère très nettement de celui qui lui est réservé en cuisine :

- en cours, la détermination des 25 parts est donnée dans l'énoncé, alors qu'en cuisine, elle doit être établie : dans le cas particulier, il y avait 5 plats à gratin pour nourrir une septantaine de personnes, mais on a fait « comme si » c'était pour 100 personnes, afin de s'aménager la possibilité d'effectuer un deuxième service proposé à ceux qui en voudraient encore[21] ;
- en cours, le partage en 25 parts égales se réalise à l'aide d'une règle et d'un crayon ; en cuisine, il se fera avec un couteau sans mesure effective, ce qui sera très différent : on ne fera pas de mesures précises, on s'appuiera peut-être sur un partage par quatre parce qu'il est aisé de prendre la moitié de la moitié, puis on diminuera quelque peu la longueur d'un quart pour obtenir le cinquième attendu, etc.

Des algorithmes pour résoudre les exercices

L'enseignement des mathématiques dispensés dans les cours professionnels est avant tout un *enseignement technique, fondé sur des algorithmes,* que les apprenties doivent s'approprier pour traiter les exercices qui leur sont proposés. ***Cet enseignement par algorithmes doit être compris comme une réponse apportée à l'imprévisibilité de la disponibilité des savoirs mathématiques chez les apprenties - et tout spécifiquement des relations numériques - nécessaires à la résolution des exercices, et à l'impuissance manifeste, dans les conditions données, d'œuvrer à les rendre plus stables.***

Un tel enseignement rencontre toutefois divers problèmes didactiques, concernant notamment le choix de l'algorithme et le dépassement des écueils auquel son appropriation se heurte.

a) un exemple dans le champ de la proportionnalité

Pour résoudre des exercices de type transformation de quantités d'ingrédients d'une recette (cf. figure n°2, exercice 4), il existe trois principales techniques qui sont enseignées dans la Fps : l'usage du *rapport interne*, la *règle de trois* et le *produit en croix* (cf. figure n°3).

L'usage du *rapport interne* présente deux facilitateurs dans son exécution : il est direct (il ne comprend qu'une seule opération à réaliser) et il « suit » la variation des quantités de la recette (on multiplie quand les quantités augmentent ; on divise quand elles diminuent). Il

[20] On trouve divers exemples dans la thèse de ce phénomène de « naturalisation des décimaux » visant à rectifier en nombres entiers les décimaux/rationnels produits par la calculette, de façon à ce qu'ils correspondent mieux aux quantités qu'ils représentent : en effet, que peut bien signifier en cuisine une quantité de 1,5 œuf ?

[21] D'ailleurs, dans un exercice similaire demandant d'obtenir 20 parts, une apprentie qui avait proposé de réaliser une découpe en 3 x 7 parts s'est « rattrapée » au moment où elle a remarqué que son partage en avait produit 21, en disant que l'on pouvait très bien conserver la part supplémentaire pour le deuxième service.

peut toutefois se heurter à un solide écueil : on ne peut facilement l'utiliser que lorsque la relation numérique liant le nombre de personnes de la recette de base à celui de la recette transformée est aisément disponible (ce qui n'est pas le cas dans l'exemple de la figure où il est décimal[22]) ; dans le cas contraire, il faut l'établir, ce qui suppose une seconde opération dans laquelle il faut diviser le nombre de personnes de la recette transformée par le nombre de personnes de la recette de base.

Rapport interne

- x 15/4 ->

	Quantités pour 4 personnes	Quantités pour 15 personnes
Œufs (p)	**6**	22,5
Beurre (g)	**20**	75
Farine (cs)	**10**	37,5

Règle de trois

- ÷ 4 -> **- x 15 ->**

	Quantités pour 4 personnes	Quantités pour 1 personne	Quantités pour 15 personnes
Œufs (p)	**6**	1,5	22,5
Beurre (g)	**20**	5	75
Farine (cs)	**10**	2,5	37,5

Produit en croix

Quantités de personnes (u)	Quantités d'œufs (p)
4	**6**
15	22,5

Quantités de personnes (u)	Quantités de beurre (g))
4	**20**
15	75

Quantités de personnes (u)	Quantités de farine (cs)
4	**10**
15	37,5

***Figure n°3** - Trois techniques de résolution d'un exercice de proportionnalité*

La *règle de trois* présente également deux facilitateurs dans son exécution : elle procède de la « même manière » quel que soit le rapport numérique en jeu (rabat de la quantité à 1, avant de l'amplifier par le nombre de personnes de la recette transformée) ; l'idée de rapporter chaque quantité à 1 pour les faire ensuite correspondre au nombre de personnes de la recette transformée est assez « intuitive ». En revanche, la règle de trois est indirecte (elle comprend deux opérations successives à réaliser), elle est indépendante de la variation des quantités en jeu (ce qui fait que lorsque les quantités augmentent, il faut tout de même commencer par diviser) et elle implique de maîtriser (ce qui n'est pas le cas chez certaines apprenties) les deux relations algébriques suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \div n = 1$; $\forall m \in \mathbb{N}, 1 \times m = m$.
Le *produit en croix* présente le même premier facilitateur que la règle de trois dans son exécution : il procède de la « même manière » quel que soit le rapport numérique en jeu (multiplication des deux termes « croisés », puis division du produit par le troisième) et les deux mêmes premiers écueils : il est indirect et indépendant de la variation des quantités en jeu. Par contre, le fait de devoir multiplier la quantité de la recette de base par le nombre de personnes de la recette transformée est peu intuitif (on obtient en effet la quantité pour n x m personnes, où n correspondant au nombre de personnes de la recette de base et m au nombre de personnes de la recette transformée).
Du point de vue des calculs qu'ils impliquent, on remarque de plus que les trois algorithmes sont très proches : dans l'exemple de la figure 2, on fera, pour déterminer la quantité d'œufs pour 15 personnes, 6 x 15 ÷ 4 = avec le produit en croix, 6 ÷ 4 x 15 = avec la règle de trois et 15 ÷ 4 x 6 = avec le rapport interne (si la relation x 15/4 n'est pas disponible). Et le fait qu'ils fassent tous trois l'objet d'un enseignement au sein de la Fps constitue en soi-même un autre écueil important[23], en ce sens que les apprenties mélangent souvent l'ordre dans lequel il

[22] Sur un plan strictement numérique, on observe que la règle de trois et le produit en croix en viennent à décomposer le facteur rationnel x 15/4 à l'œuvre dans le rapport interne en deux facteurs naturels : ÷ 4, suivi de x 15 pour la première et x 15, suivi de ÷ 4, pour le second.

[23] On peut encore mentionner deux autres écueils d'importance apparus dans la thèse : la non-correspondance entre un nombre décimal obtenu et la quantité qu'il représente (cf. note 19) qui vient interrompre la bonne exécution de l'algorithme ; ou l'existence chez les apprenties de règles « didactiques » liées aux opérations en jeu, quand elles considèrent, par exemple, que pour effectuer une division, c'est toujours le plus grand

s’agit d’agencer les nombres et les opérations, ce qui les empêche d’obtenir le résultat auquel l’algorithme devrait leur permettre d’aboutir.

b) un autre exemple dans le champ de la mesure

Dans le cas de la résolution d’exercices de conversion d’unités de mesure, on enseigne, contrairement à l’exemple qui précède, un seul même algorithme pour effectuer des transformations de kilos en grammes, de centimètres en millimètres, de litres en décilitres, etc. Il s’agit d’un *tableau de conversion*[24] (cf. figure n°4) qui, pour fonctionner, s’appuie tout à la fois sur les régularités/propriétés du système de numération de position en base dix et sur celles du système décimal des poids et mesures (Rouche, 2006). L’appropriation du fonctionnement d’un tel tableau se heurte cependant lui aussi à de nombreux écueils auprès des apprenties. Le plus important d’entre eux tient au fait que, dans la pratique, l’usage des nombres décimaux et des unités de mesure diffère fondamentalement de celui qui est fait en cours.

3 mm -> combien de cm ?

km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**
					0,	3

Figure n°4 *- Exemple de tableau de conversion d’unités de mesure*

S’agissant des unités de mesure tout d’abord, on sait qu’il est possible, dans le système décimal des poids et mesures, de désigner à l’écrit un poids de "quatre kilos et trois cent grammes" à l’aide d’une grande diversité de couples (nombre, unité) : 4,3 kg (ou 4,300 kg), 43 hg, 430 dag, 4’300 g, 43'000 dg…, ou encore : 0,43 Mg (myriagramme), 0,043 q (quintal), 0,0043 t (tonne). Dans la pratique de cuisine, cette diversité est toutefois drastiquement réduite : à l’écrit, on utilise 4,300 kg ou 4'300 g en tout et pour tout, tandis qu’à l’oral, ce sera "quatre kilos trois cents", rarement "quatre kilos trois", mais jamais "quatre virgule trois cent kilos" (qui correspond pourtant à une lecture « mot à mot » de l’écriture 4,300 kg), ni non plus "quarante-trois hectogrammes", par exemple. Cette utilisation réduite des sous-unités de mesure a pour conséquence que beaucoup d’apprenties (c’est sans doute aussi le cas pour bon nombre d’adultes) ont bien du mal à se souvenir de l’ensemble de celles qui figurent sous forme d’abréviations dans le tableau de conversion, tout comme des rapports numériques qu’elles entretiennent entre elles et donc à reconstituer le tableau par elles-mêmes (cf. figure n°5).

3 mm -> combien de cm ?

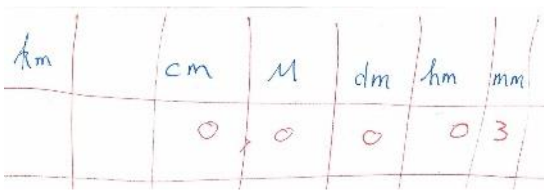


Figure n°5 *- Exemple de reconstitution d’un tableau de conversion d’unités de mesure*

De plus, si l’on compare les usages qui sont faits dans la pratique des sous-unités de mesure, on remarque que ceux-ci varient grandement d’un domaine de grandeur à un autre : si l’on utilise les kilos et les grammes qui sont dans un rapport de mille pour les poids, on utilisera plus volontiers les litres et les décilitres qui sont dans un rapport de dix pour les capacités, les francs et les centimes qui sont dans un rapport de cent pour la monnaie, etc. Ce qui fait que les

nombre qui « doit aller en premier », ce qui les conduit quand ce n’est pas le cas à inverser l’ordre des nombres dans l’exécution de l’algorithme.

[24] L’usage en classe d’un tel tableau n’est pas nouveau puisqu’on le trouve déjà dans un manuel d’arithmétique vaudois (Roorda, 1917) datant du début du vingtième siècle.

régularités inter-domaines présentées en cours dans le tableau rompent considérablement avec les irrégularités qui ont lieu d'être dans la pratique.
Or, cette réduction et ces irrégularités d'usage des sous-unités de mesure entrainent dans leur sillage une réduction et une irrégularité d'usage des nombres décimaux. En effet, si l'on utilise couramment dans la pratique l'écriture chiffrée 4,300 dans le domaine des poids, on ne l'utilisera jamais dans le domaine de la monnaie, où on lui préférera 4,30 ; tandis que 4,3 n'aura jamais vraiment lieu d'être ni dans l'un, ni dans l'autre domaine (ce qui fait que l'emploi du/des 0 final/s n'aura pas non plus la même signification dans le cadre d'un cours où il/s pourra/ont être supprimé/s, qu'en pratique où il/s sera/ont conservé/s).
En s'appuyant fortement sur le contexte pratique dans lequel les apprenties évoluent, il devient dès lors possible de ne s'appuyer que sur les nombres (sans adjonction d'unités de mesures) pour désigner des mesures de grandeurs. C'est en tous les cas ce que révèle l'analyse de certaines productions récoltées en cours qui permettent d'inférer l'existence d'un *système de nombres-mesures* où, pour reprendre l'exemple qui précède, le nombre 4300 se suffit à lui-même pour désigner sans aucune équivoque un poids de "quatre kilos et trois cent grammes".
Dans un tel système, la signification de certains signes à l'œuvre dans le système de poids et mesures va s'en trouver entièrement modifiée : c'est ainsi, par exemple, que les nombres 4'300 et 4,300 (utilisés pour désigner un poids de "quatre kilos et trois cent grammes") y seront considérés comme équivalents, en ce sens que la virgule et l'apostrophe n'y seront plus discriminantes, puisque servant toutes deux à représenter le terme "kilo" de la désignation orale du poids (qui a remplacé le terme "mille" de la désignation orale du nombre) ; et c'est ainsi aussi que lorsqu'une sous-unité de poids y sera employée, c'est l'abréviation "kg" qui accompagnera les nombres de quatre chiffres et plus (indépendamment du fait que ceux-ci comportent une virgule ou une apostrophe) et l'abréviation "g" qui le fera pour les nombres de trois chiffres et moins[25].

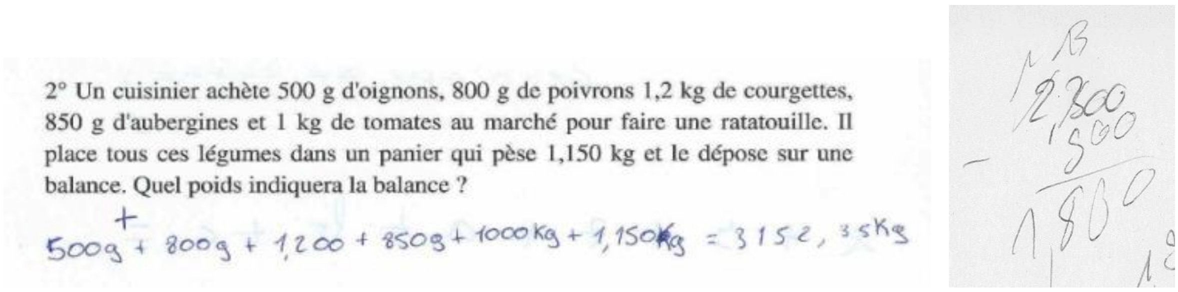


***Figure n°6** - Deux exemples issus d'exercices impliquant des conversions de mesure*

Par ailleurs étant donné que ce système se suffit à lui-même pour effectuer correctement des calculs en colonne (cf. figure n°6, production de droite, où l'on voit que 2,300 – 500 donne bien 1,800 et non pas 497,7), il rend caduc l'idée même de devoir établir des conversions. Sauf évidemment lorsqu'il est nécessaire de recourir à la calculette pour le faire (cf. figure n°6, production de gauche).
La prise en compte de l'existence d'un tel système s'avère donc d'une grande importance d'un point de vue didactique, d'une part, parce qu'il constitue un puissant levier pour interpréter les productions des apprenties ; et d'autre part, parce qu'il vient questionner l'usage à des fins d'enseignement d'un tableau de conversion aux règles univoques, là où il serait plus indiqué d'apprendre à se mouvoir dans des systèmes de signes multivoques.

[25] Dans la production de gauche de la figure 3, on voit que les nombres 1 et 1,2 qui désignent des quantités en kilos dans l'énoncé de l'exercice ont été modifiés de façon à ce qu'ils comportent bien quatre chiffres et qu'ils se suffisent dès lors, indépendamment de la présence d'une virgule (présente dans 1,200, mais absente dans 1000) ou de l'abréviation "kg" (présente dans 1000 kg, mais absente dans 1,200) pour les représenter.

Les mathématiques et leur fonctionnement au niveau des interactions de connaissances

L'émergence d'un rapport à l'ignorance

Les analyses menées au niveau des interactions de connaissances mettent en évidence et appellent donc à prendre en compte le *rapport à l'ignorance* (Conne, 1999) qui caractérise le développement de l'activité du couple enseignant-enseigné au sein de la Fps.
Dans l'interaction, ce rapport à l'ignorance concerne tout autant l'enseignant que l'enseigné. Il coexiste pour chacun d'eux avec leur rapport au savoir[26] dont il constitue le pendant. Cette prise en compte vise à défausser le clivage sachant/ignorant qui caractérise habituellement le rapport maître et élève et qui s'impose d'autant plus "naturellement" dans un contexte qui accueille des apprenties considérées en difficulté d'apprentissage. Le rapport à l'ignorance et le rapport au savoir se conjuguent et s'articulent au détour des *pertes et prises de contrôles* (Conne, 2003) qui scandent la dynamique des interactions.
Dans l'interaction, le rapport à l'ignorance de l'enseignant se manifeste en termes d'*incompréhensions* :

- *face aux productions de l'enseigné* qui le surprennent et dont il n'est pas toujours à même d'effectuer une interprétation adéquate ; c'est le cas, par exemple, lorsqu'une apprentie lui dit qu'elle ne comprend pas ce que signifie la question : « combien y a-t-il de centimes dans un franc ? » et qu'il n'a pas encore saisi que c'est probablement l'absence de pièces de 1 centime dans le système de monnaie suisse (leur disparition date de janvier 2007) qui rend sa question si étrange ;
- *lors de sa propre interaction avec le milieu* et qu'un élément de savoir qu'il n'avait pas pris en compte soudain s'y révèle ; c'est le cas, par exemple, lorsqu'il s'agit de transformer une quantité de 20 g de beurre d'une recette prévue pour 4 personnes en une recette pour 15 personnes et que, après avoir obtenu 300 comme résultat de la première opération (15 x 20) à exécuter dans le cadre du produit en croix, une apprentie lui demande s'il faut y adjoindre l'abréviation "g" et qu'il ne sait pas quoi lui répondre ; et que ce n'est que bien longtemps après la séance qu'il comprendra que ce nombre 300 peut effectivement être envisagé comme la mesure en grammes d'une quantité de beurre, soit celle qui s'avère nécessaire à la confection d'une recette pour 60 (4 x 15) personnes.

Dans l'interaction, le rapport à l'ignorance de l'enseigné se manifeste également en termes d'*incompréhensions* :

- *lors de sa propre interaction avec le milieu* qui ne réagit pas comme il pouvait s'y attendre ; c'est le cas, par exemple, lorsqu'après avoir posé par écrit l'opération 500 g + 800 g + 1,200 + 850 g + 1000 kg + 1,150 kg (cf. figure n°3) et l'avoir effectuée sur la calculette, le résultat 3152,35 qu'elle obtient lui paraît si déconcertant qu'elle en vient à mettre en doute le bon fonctionnement de la calculette ;
- *face aux prises de contrôles de* l'enseignant dont il ne parvient pas à saisir la teneur ; c'est le cas, par exemple, lorsque dans l'effectuation de la première opération d'une règle de trois, une apprentie inverse les deux termes de la division à accomplir, parce que le second est un nombre plus grand que le premier et que l'enseignant lui impose, sans

[26] Le rapport au savoir de l'enseigné émerge de façon imprévisible dans les interactions. **Ne pas savoir, pour l'enseigné, ne correspond jamais à ne rien savoir.** Ainsi, l'exemple d'une apprentie qui disait ne pas avoir appris la division à l'école, mais qui (cela se révélera au fil des interactions) savait pourtant bien qu'elle existait, qu'elle « servait à diminuer », qu'elle demandait de commencer par le plus grand nombre pour opérer ; et qui savait également prendre la moitié d'un nombre ou pouvait itérer quatre fois le nombre 3 pour déterminer combien de fois il allait dans 12, etc. ; ou la même apprentie qui disait ne pas connaître la signification du nombre ½, mais qui l'utilisait pourtant dans ses calculs, tantôt comme 1,2, tantôt comme 0,5.

qu’elle ne parvienne à en comprendre la raison (car ayant toujours agi de la sorte), de les remettre dans le bon ordre.

Pour l’enseignant, ce rapport à l’ignorance est également à l’œuvre en amont et en aval des interactions. *En amont de l’interaction*, le rapport à l’ignorance de l’enseignant se manifeste au travers de la *méconnaissance des savoir à enseigner* qui ne sont pas fixés dans un programme ou explicités dans des manuels : que doit-il enseigner ? comment peut-il s’y prendre pour bien le faire ? … ; *méconnaissance des savoirs maîtrisés* par l’enseigné sur lesquels il sera possible de s’appuyer dans l’interaction ; quels savoirs seront rendus disponibles ? quels savoirs resteront cachés ? … ; *méconnaissance des effets que les contraintes* qui pèsent sur le système assignent au déroulement de l’interaction : doit-il faire comprendre ou faire réussir ? comment conjuguer l’enseignement et l’évaluation dans un temps si réduit ? ... Tandis qu’en aval de l’interaction, le rapport à l’ignorance de l’enseignant se manifestera essentiellement dans les *significations* qu’il saura/ne saura pas attribuer, rétrospectivement, aux productions et aux éléments du milieu qui lui sont apparus en cours d’interaction et surtout de l’*usage* qu’il sera/ne sera pas en mesure d’en faire dans la prévision et l’organisation de nouvelles interactions.

L’interaction de connaissances envisagée comme un jeu

Dans un contexte professionnel comme celui de la Fps, il est important de comprendre et de considérer le rapport à l’ignorance de l’enseignant comme incontournable. S’il s’avère très utile d’un point de vue didactique d’explorer l’ignorance - les constructions de savoirs mathématiques que l’on réalise et les concepts didactiques que l’on élabore pouvant être mis au profit de cette exploration - il est en revanche impossible de la combler. Dès lors, la conduite des interactions que l’on engage avec les apprenties nécessite d’être envisagée comme un *jeu*[27] (Conne, 1999).

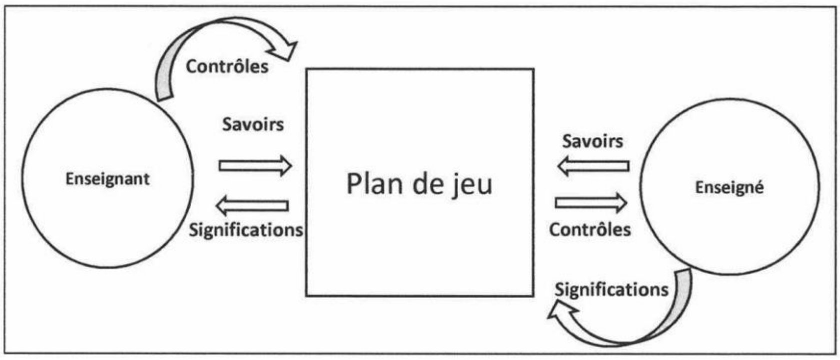


Figure n°7 - *Schéma de l’interaction de connaissances envisagée comme un jeu*

Dans le cadre d’un enseignement algorithmique tel qu’il est proposé dans les cours donnés aux apprenties employées de cuisine, on peut schématiser ce jeu de la manière suivante (cf. figure n°7) : le *plan de jeu* comprend les exercices que l’enseigné doit apprendre à résoudre et le ou les algorithmes que l’enseignant leur propose pour le faire. Pour investir le jeu, l’enseigné devra *engager ses savoirs mathématiques* dans la perspective d’obtenir un *meilleur contrôle de l’usage de l’algorithme* pour résoudre les exercices proposés ; tandis que de son côté, l’enseignant va lui aussi devoir *engager ses savoirs mathématiques et didactiques* pour

[27] Cette idée du jeu s’impose de manière tout aussi probante pour prendre en compte une dimension que les analyses didactiques menées dans la thèse n’ont pas traitée et qui s’avère pourtant omniprésente dans les interactions : la dimension relationnelle que les apprenties entretiennent vis-à-vis des mathématiques, solidement ancrée sur ce qu’elles ont vécu durant leurs années d’école et qui prend souvent la forme d’une dialectique amour-haine.

investir le jeu, mais en vue de *récolter un certain nombre de significations* (interprétations) sur ce que fait l'enseigné, les savoirs qu'il met en œuvre, les écueils auxquels il se heurte, etc. A terme, le contrôle progressif que l'enseigné va exercer sur l'algorithme doit contribuer à *élargir son réseau de significations* à travers la diversité croissante des exercices qu'il lui permettra de traiter ; alors qu'à terme, et de façon réciproque, le gain de significations que l'enseignant aura engrangé dans le jeu doit contribuer à *élargir son champ de contrôle* sur le déroulement du jeu à travers l'efficacité croissante des interventions (des coups) qu'il sera à même d'y accomplir[28].

CONCLUSION

Perspectives pour la formation professionnelle spécialisée

Vis-à-vis de la Fps, les analyses menées dans la thèse permettent de dégager trois principaux axes de recherche. Le premier axe plaide pour un *rapprochement des cours avec la réalité des secteurs professionnels* pour chercher à mieux prendre en considération les problèmes effectifs que les apprenties ont à résoudre dans la pratique, les moyens qui sont mis à leur disposition pour le faire et les conditions dans lesquelles leur résolution doit avoir lieu (Kaiser, 2010, 2011). Le deuxième axe invite à un *travail sur les nombres* - naturels, décimaux, rationnels, voire irrationnels - pour permettre aux apprenties d'appréhender ces objets bizarres que les opérations effectuées sur une calculette les amènent inévitablement à rencontrer. Quant au troisième axe, il vise à *caractériser ces moments de didactique improvisé* (qui n'ont pas fait l'objet d'une analyse spécifique dans la thèse) qui adviennent aussi bien dans les cours que dans la pratique, pour chercher à en considérer les effets et à déterminer comment il serait possible de les habiter pour en tirer un bon parti à destination des apprenties.

Perspectives pour l'enseignement spécialisé

Vis-à-vis de l'Es, les analyses menées dans la thèse visent à *lever la contrainte des mathématiques à vocation utilitaire ou utilitariste* qui y préside de façon à pouvoir engager un travail régulier sur les nombres, leurs relations et leurs propriétés dans un contexte où le temps d'enseignement qui peut être consacré aux mathématiques est nettement plus important que celui dont on dispose dans la Fps ; mais aussi et surtout diversifier les investissements de savoirs pour donner lieu à une formation mathématique qui s'ouvre sur une plus grande variété d'objets (Maréchal, 2012)

Perspectives pour la didactique des mathématiques

Vis-à-vis de la ddm, les analyses menées dans la thèse engagent à poursuivre la construction d'une didactique qui ne soit pas exclusivement tournée vers les élèves qui accéderont plus tard aux mathématiques formelles. Une *didactique de l'entre-deux* qui s'adresse à tous ces

[28] L'investigation menée avec une apprentie au chapitre 9 de la thèse donne un bon exemple d'un tel jeu. Les premières séances montrent en effet l'enseignant à la recherche de significations au travers des algorithmes que, tour à tour, il met dans les mains de l'apprentie ; et l'apprentie à la recherche de contrôles au travers des devoirs qu'elle se constitue pour elle-même. Et ce n'est qu'après avoir engrangé un certain nombre de significations que l'enseignant parvient progressivement à exercer un meilleur contrôle sur le pilotage de l'interaction ; alors que ce n'est qu'après avoir engrangé un certain nombre de contrôles sur l'usage du produit en croix (qui est l'algorithme finalement investi) que l'apprentie parvient à en élargir l'usage dans d'autres exercices et lui associer de nouvelles significations.

élèves qui, à l'image des apprenties du CFPS, n'iront très probablement pas beaucoup plus loin dans l'exploration des mathématiques. La ddm a beaucoup œuvré à la création d'une didactique du bon élève, soit celui qui parvient à se laisser porter par les programmes successifs qu'on lui propose. Mais il y a tout autant lieu de s'interroger sur ce que pourrait être la didactique d'un élève qui s'arrête en cours de chemin.

Il ne s'agit évidemment pas de vouloir ramener la première à la deuxième, mais bien d'en construire une spécifique, qui peut certes se nourrir des concepts de la première, mais qui a aussi besoin de les adapter et d'en élaborer de nouveaux. Et si en retour, elle pouvait s'avérer utile à la première, et bien ce serait tout bénéfice pour l'une comme pour l'autre.

De cette didactique de l'entre-deux, la thèse articule quelques jalons, empruntés pour beaucoup à Conne (1999, 2003, 2004a) : *logique d'initiation / logique d'exposition*, *rapport de l'enseignant à l'ignorance*, *pilotage de l'interaction comme un jeu*, etc. ; et avec, désormais, *négociation du faire avec et du faire sans*, *didactique organisé / didactique improvisé*, *recherche de significations et gain de contrôle*, *recherche de contrôle et gain de significations* ; qui viennent s'ajouter à d'autres : *retournement de situation* (Bloch, 2008), *conduite atypique*, *balises didactiques* (Giroux, 2008, 2013), *jeu de tâches* (Favre, 2008), *narration* (Groupe ddmes, 2012), etc. Mais il reste assurément beaucoup à faire…

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(2/3),* 309–336.

ANADON, M. & GUILLEMETTE, F. (2012). La recherche qualitative est-elle nécessairement inductive ? *Recherches qualitatives, Hors-série n°5,* 26-37.

ANTILLE, V., GENTILE, C. & MICHELOUD, M. (2011). *De l'école aux cours professionnels. Comment bien commencer sa formation : informations sur l'apprentissage et les connaissances requises.* Berne : Centre suisse de services Formation professionnelle | orientation professionnelle, universitaire et de carrière (CSFO).

BLOCH, I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. Etude d'une progression sur la multiplication en SEGPA. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle, 41(1),* 91-111.

BONAFE, F., CHEVALIER, A., COMBES, M.-C., DEVILLE, A., DRAY, L., ROBERT, J.-P. & SAUTER, M. (2002). *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée.* Montpellier : IREM Montpellier, APMEP.

BONTEMPS, V. (2014). Les mathématiques et l'expérience selon Ferdinand Gonseth. *Bulletin de l'Association Ferdinand Gonseth*, *158*, 15-31.

BROUSSEAU, G. (1995). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (Eds) *Actes de la 8ème école d'été de didactique des mathématiques à St-Sauves d'Auvergne.* Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

BRUNER, J. (1996). *L'éducation, entrée dans la culture. Les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle.* Paris : Editions Retz.

BRUN, J. (1999). A propos du statut de l'erreur dans l'enseignement des mathématiques. *Résonances, 5*, janvier 1999, 7-9.

BRUN, J. & CONNE, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et Recherche, 3/90*, 261-286.

CHEVALLARD, Y. (1988a). Médiations et individuations didactiques. *Interactions didactiques, 8,* Université de Neuchâtel, 23-34.

CHEVALLARD, Y. (1988b). L'univers didactique et ses objets : fonctionnement et dysfonctionnements. *Interactions didactiques, 9,* Université de Neuchâtel, 9-36.

CHEVALLARD, Y. (1988c). Esquisse d'une théorie formelle du didactique. In C. Laborde (Ed.) *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique à Marseille* (pp.97-106). Grenoble : La Pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en didactique des mathématiques, 19(2),* 221-266.

CONNE, F. (1992). Savoirs et connaissances dans la perspective de la transposition didactique. *Recherche en didactique des mathématiques, 12(2),* 221-270.

CONNE, F. (1997). Diagrammes, symboles et marques. Texte inédit, disponible sur HAL archives-ouvertes.fr [On Line] https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01133329/document [consulté le 12.05.2017].

CONNE, F. (1998). L'activité dans le couple enseignant/enseigné. In Bailleul M., Comiti C., Dorier J.-L., Lagrange J.-B., Parzysz B. & Salin M.-H. (Eds.) *Actes de la 9ème école d'été de didactique des mathématiques à Houlgate* (pp.15-24). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CONNE, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne. In Conne F., Lemoyne G. (Eds) *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp.31-69). Montréal : Presses Universitaires de Montréal.

CONNE, F. (2003). Interactions de connaissances et investissements de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. In Mary C., Schmidt S. (Eds) *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire. Éducation et francophonie, vol. XXXI (2)* [Online], 82-102.

CONNE, F. (2004a). Comprendre la théorie est en attraper le geste et pouvoir continuer. In Durand-Guerrier V., Tisseron C. (Eds) *Actes du séminaire ARDM 2003 de didactique des mathématiques* (pp.79-100). Paris : IREM Paris 7.

CONNE, F. (2004b). Problèmes de transposition didactique. *Petit x, 64*, 62-81.

CONNE, F., CANGE, C., FAVRE, J.-M., DEL NOTARO, L. SCHEIBLER, A., TIECHE CHRISTINAT, Ch., BLOCH, I. & SALIN M.-H. (2004). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. In Durand-Guerrier V., Tisseron C. (Eds) *Actes du séminaire ARDM 2003 de didactique des mathématiques* (pp.77-185). Paris : IREM Paris 7.

COULET, J.-C. (2003). Les méthodes d'éducation cognitive : bilans et perspectives. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Eds) *Carnets de route de la COPIRELEM. Tome 1. Apprentissage et diversité. Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques* (pp.169-198). Paris : ARPEME.

FAVRE, J.-M. (2004). La création d'un groupe de recherche pour étudier les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques dans l'enseignement spécialisé. In Durand-Guerrier V., Tisseron C. (Eds) *Actes du séminaire ARDM 2003 de didactique des mathématiques* (pp.127-140). Paris : IREM Paris 7.

FAVRE, J.-M. (2008). Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N, 82*, 9-30.

FAVRE, J.-M. (2012). Narrer pour problématiser dans le contexte de la formation professionnelle d'apprenties en difficulté d'apprentissage. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle - Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 699–710).

GROUPE DDMES (2012). Des narrations pour partager et faire rebondir nos expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Actes des deuxièmes journées didactiques de La Chaux d'Abel.* [On Line] http://www.ssrdm.ch/Spip3/spip.php?article62 [consulté le 18.05.2018].

GIROUX, J. (2007). Maillage de situations didactiques dans des classes de l'adaptation scolaire. In Giroux J., Gauthier D. (Eds) *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (pp. 35-63). Montréal : Editions Bande didactique.

GIROUX, J. (2008). Conduites atypiques d'élèves du primaire. *Recherche en didactique des mathématiques, 28(1)*, 9-62.

GIROUX, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Education et Didactique*, *7(1)*, 59-86.

IMPERIALE, M. & LEPORI, M. (2013). *Formations initiales, rôle et prestations de l'AI.* Conférence donnée à l'Institut Agronomique de Grangeneuve (IAG), le 17 septembre 2013, p.3 du support à la présentation.

KAISER, H. (2010). Situiertes Wissen, subjektive Erfahrungsbereiche und Mathematik in der Berufsbildung. In Prediger S. (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 469-472). Münster : WTM-Verlag.

KAISER, H. (2011). *Le calcul professionnel recentré - approches novatrices dans la formation de cuisinière/cuisinier.* Zollikofen : Institut fédéral des hautes études en formation professionnelle (EHB-IFFP-IUFFP).

MABILLARD, H., IMHOF, G. & GOY, M.-F. (2016). *Numerus. Numéro hors-série - juin 2016.* Lausanne : Statistique Vaud, Département des finances et des relations extérieures.

MARÉCHAL, C. (2012) Effets des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle - Actes du colloque EMF2012* (GT8, pp.1102-1113).

MOULIN, J.-P. (2015). CFPS, Centre de formation professionnelle de spécialisée à sociale : un renversement conceptuel et pratique. *Pages Romandes, 1, 03/2015*, 14-15.

OGAY, C. (2010). *Leurs droits, malgré tout.* Vevey : Editions de l'Aire.

OFS (2016). *Analyses longitudinales dans le domaine de la formation. La transition à la fin de l'école obligatoire - Édition 2016.* Neuchâtel : Office fédéral de la statistique - Numéro OFS 1666-1600.

PASTRÉ, P. (2005). La deuxième vie de la didactique professionnelle. *Éducation permanente*, *165*, 29-46.

RICOEUR, P. (1985). *Temps et récit. Tome III : le temps raconté.* Paris : Seuil.

ROORDA VAN EYSINGA, H. (1917). *I. Arithmétique. Théorie et exercices.* Lausanne : Payot & Cie.

ROUCHE, N. (1992). *Le sens de la mesure.* Bruxelles : Didier Hatier.

ROUCHE, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : ellipses.

ROUCHE, N. (2006). *Du quotidien aux mathématiques : Nombres, grandeurs, proportions.* Paris : ellipses.

CSFO (2018). *Système suisse de formation. Voies de formation et titres délivrés*. Berne : Centre suisse de services Formation professionnelle | orientation professionnelle, universitaire et de carrière (CSFO). [On Line] https://www.orientation.ch/dyn/show/2800 [consulté le 18.05.2018].

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques, 10(2.3)*, 133-170.

QUELQUES REFLEXIONS DEVELOPPEES DANS UN TRAVAIL COLLABORATIF ENTRE CHERCHEURS ET ENSEIGNANTS DANS UN CONTEXTE D'EVALUATION FORMATIVE

Gilles **ALDON***

Monica **PANERO****

*IFÉ-ENS de Lyon

**INVALSI-Universita di Torino

gilles.aldon@ens-lyon.fr

Résumé

Le contexte de la recherche présentée est celui du projet européen FaSMEd qui s'intéressait à la mise en œuvre de stratégies d'évaluation formative médiées par la technologie. Dans cette perspective d'évaluation pour l'apprentissage, nous présentons un travail à double facette. D'une part, nous traitons de l'évaluation formative avec les technologies et de la représentation graphique d'une fonction comme objet frontière entre les mathématiques et les sciences mais aussi d'une façon interne aux mathématiques comme représentation sémiotique essentielle à la construction des connaissances sur les fonctions. D'autre part, nous abordons la méthodologie de la recherche construite sur le paradigme de la recherche orientée par la conception. L'évaluation formative apparaît alors comme un objet frontière, dans un sens qui sera précisé, entre la communauté des chercheurs et celle des enseignants.

Mots clés

Transposition méta-didactique, évaluation formative, praxéologies, objets frontières.

INTRODUCTION

Le contexte de la recherche présentée ici est le projet européen FaSMEd (Formative Assessment for Sciences and Maths Education[1]) qui s'est terminé à la fin de l'année 2016. Ce projet a impliqué un ensemble de partenaires internationaux ayant tous des compétences reconnues dans l'analyse et la mise en œuvre de pédagogies fondées sur l'investigation scientifique intégrant l'usage des technologies. Le but de ce projet a été de considérer le rôle des technologies dans l'évaluation formative des élèves en sciences et en mathématiques.

Les objectifs de ce projet ont été énoncés de la manière suivante :

- produire un ensemble de ressources et de méthodes (ce que l'on nomme « une boîte à outils ») pour accompagner le développement de pratiques dans une perspective de développement professionnel des enseignants,
- construire des approches de l'évaluation formative utilisant les technologies,

[1]The research leading to these results reported in this article has received funding from the European Community's Seventh Framework Programme fp7/2007-2013, under grant agreement No 612337.

- diffuser les résultats des recherches sous forme de ressources en ligne, de publications professionnelles et de recherche[2].

Chacun des partenaires du projet a travaillé avec un ensemble d'écoles dans une perspective de recherche orientée par la conception (Design Based Research dans la littérature anglo-saxonne) (Wang & Hanafin, 2005 ; Swan, 2014), c'est à dire une conception de leçons travaillées conjointement par les enseignants et les chercheurs, mises en œuvre dans les classes et analysées, en s'appuyant sur des cadres théoriques, pour une reformulation et une nouvelle implémentation en classe. Dans le cas de la France, les niveaux des classes concernées varient de l'école primaire (CM1-CM2) au lycée (classe de 2de) en passant par le collège (classes de 5^{e}, 4^{e} et 3^{e})[3]. Les enseignants concernés travaillent en mathématiques ou en sciences, ou encore autour d'objets frontières en mathématiques et en sciences dans une perspective de co-disciplinarité (Prieur, 2016).

La recherche associée à ce projet de conception porte à la fois sur les questions d'analyse du rôle des technologies dans la mise en œuvre de stratégies d'évaluation formative et sur la méthode elle-même de recherche orientée par la conception. Il y a ainsi deux niveaux d'analyses qui sont présentés dans ce texte, d'une part pour analyser la mise en œuvre dans les classes de l'évaluation formative et, d'autre part, pour questionner la méthode et en particulier la conception collaborative lorsqu'elle implique deux communautés avec des connaissances et des objectifs distincts mais non incompatibles ! Du point de vue du projet FaSMEd, l'ensemble des partenaires s'est entendu pour construire, observer et analyser des séquences mettant en œuvre l'évaluation formative sur un thème commun, utilisable à la fois en mathématiques et en sciences de façon à pouvoir mener des analyses croisées[4]. Le thème retenu a été celui des représentations graphiques, présentes aussi bien en mathématiques qu'en sciences. Un des aspects importants de l'évaluation formative est la prise en compte des connaissances initiales des élèves et la cohérence entre les notions enseignées en mathématiques et en physique est un préalable d'un travail co-disciplinaire. Nous partirons de ce thème pour analyser ce dialogue entre mathématiques et physique dans la classe dans la perspective d'évaluation formative avec les technologies. Par ailleurs, la méthode retenue comme commune aux différents partenaires du projet est aussi objet de recherche pour comprendre, analyser et formaliser les apports des recherches orientées par la conception. Cette deuxième analyse est construite à partir des traces des interactions entre chercheurs et enseignants sur l'ensemble des trois années du projet. Dans ce texte, nous présentons les outils d'analyse et illustrons leurs effets sur des exemples issus du travail de FaSMEd.

CADRE ET METHODOLOGIE

Recherche orientée par la conception

Dans la perspective d'une recherche orientée par la conception (Sanchez & Monod-Ansaldi, 2015), nous décrivons le travail conjoint d'une équipe de professeurs d'un collège, enseignants en mathématiques et en sciences, et des chercheurs impliqués dans le projet FaSMEd. Les séquences d'évaluation formative ont donné lieu à des observations sous plusieurs formes :

- retour réflexif des enseignants qui tenaient un journal collaboratif,
- observations en classe et enregistrements vidéo,
- réunions de travail entre enseignants et chercheurs (enregistrements audio),
- rédaction collaborative de la boîte à outils FaSMEd.

[2]Le site du projet : http://www.fasmed.eu ; le site français du projet : https://ife.ens-lyon.fr/fasmed/

[3]Grades 4, 5, 7, 8 et 9 and 10

[4]http://microsites.ncl.ac.uk/fasmedtoolkit/files/2016/09/D5-2_report-cross-comparative-of-case-studies.pdf

L’ensemble de ces outils de recueils de données a été mis en œuvre sur la longueur du projet (3 ans) permettant plusieurs itérations pour construire et améliorer les productions dans la perspective d’une recherche orientée par la conception.

Évaluation formative

Le cadre de l’évaluation formative est vaste et il est important de pouvoir préciser la définition utilisée de ce concept né dans le paradigme de la pédagogie par objectif (Scriven, 1967) d’une volonté de mettre en rapport les performances des élèves avec les objectifs d’enseignement en les comparant aux objectifs comportementaux construits. Cette acception de l’évaluation formative plaçait au centre la construction et la déclinaison des objectifs d’une formation en précisant les résultats attendus pour prendre des décisions et faire des choix en décidant *a priori* des éléments importants et en pouvant donner une justification de ces choix éthiquement satisfaisante. Mais cette visée d’évaluation formative portait essentiellement sur les objectifs, construction externe à l’apprentissage, et conduisait à un découpage des objectifs qui d’une façon pratique permettait de mesurer l’adéquation entre les apprentissages et ces objectifs. Le concept d’évaluation formative bascule vers une centration sur l’apprenant grâce aux travaux de De Ketele (1993), Allal (1983, 1991), Cardinet (1986), Perrenoud (1989). Cette distinction entre les centrations possibles de l’évaluation formative et les perspectives d’enseignement-apprentissage est bien mise en évidence par Taras (2012, p. 4) :

> In the past 40 years great changes have taken place in learning and teaching, and a strange separation appears with assessment. Whereas the former has developed pedagogies according to learner and learning-centred rationales, assessment has not followed these logical developments and remained essentially teacher-centred.

Dans une perspective d’évaluation *pour* l’apprentissage, le modèle proposé par Wiliam et Thompson (2007) donne à l’enseignant, à l’élève individuel et aux élèves à l’intérieur de l’institution classe, un rôle quant aux stratégies d’évaluation supportant l’apprentissage. Le modèle bidimensionnel qui en résulte prend en compte le croisement entre les questions fondamentales de l’évaluation : où l’apprenant en est-il ? Où doit-il aller ? Comment l’y conduire ? Ces questions, croisées avec le rôle des acteurs conduisent à se focaliser sur les stratégies d’évaluation formative permettant de prendre en compte les rétroactions pour un réajustement permanent de l’enseignement et de l’apprentissage :

> Une pratique, dans la classe, est formative dans la mesure où des preuves des apprentissages des élèves sont perçues, interprétées et utilisées par le professeur, l'élève ou ses pairs, afin de prendre des décisions concernant les prochaines étapes de l'enseignement qui seraient meilleures ou mieux fondées que les décisions qui auraient été prises en l'absence de ces preuves. (trad. de Black & Wiliam, 2009, p.7)[5]

Dans cette définition, outre les éléments constitutifs de l’évaluation formative (prendre de l’information, traiter l’information, restituer les résultats de ce traitement), elle apparaît comme un pari (« that are likely to be better or better founded ») qui se construit sur l’efficience des situations d’apprentissage proposées et qui relie l’évaluation formative à l’évaluation pour apprendre (assessment for learning). Dans le projet FaSMEd, c’est cette définition de l’évaluation formative qui a été le point de départ du travail, augmentée par les propriétés potentielles de la technologie. Ainsi, à partir du modèle bidimensionnel de Wiliam et Thompson, nous avons développé un modèle tridimensionnel incluant les propriétés de la technologie classées en trois composantes : transmettre et afficher, traiter et analyser et pourvoir un environnement dynamique. Ces trois dimensions permettent de modéliser la dynamique des stratégies d’évaluation formative dans la continuité de la classe. A partir de cette réflexion théorique sur les fondements du travail du projet européen, nous

[5]Practice in a classroom is formative to the extent that evidence about student achievement is elicited, interpreted, and used by teachers, learners, or their peers, to make decisions about the next steps in instruction that are likely to be better, or better founded, than the decisions they would have taken in the absence of the evidence that was elicited.

avons construit des situations avec les enseignants pour constituer une boîte à outils et en étudier les effets sur l'apprentissage dans la mise en œuvre en classe mais aussi pour mettre à l'épreuve le modèle d'analyse résultant des réflexions conjointes sur l'évaluation formative et l'usage des technologies.

Objets frontières

Le projet européen s'appuyait sur une méthodologie de « design based research » dont Wang et Hannafin (2005, p. 7) précisent les cinq caractéristiques de base : pragmatique ; fondée ; interactive, itérative, et flexible ; intégrante ; et contextuelle.
Cette méthodologie s'appuie sur un travail collaboratif entre chercheurs et enseignants sur un ou des « objets » que chacune des deux parties doit pouvoir étudier et utiliser pour en tirer avantage dans sa pratique. Ainsi, cette méthodologie n'a pas comme unique but d'améliorer les pratiques mais aussi interroge à travers le processus des questions théoriques sur les fondements du travail réalisé (Sanchez & Monod-Ansaldi, 2015). Les objets sur lesquels le travail conjoint porte sont caractérisés par le fait que les deux communautés peuvent aborder et travailler *a priori* avec et sur eux, même si l'acception qui en est faite par chacune des deux communautés peut différer. Nous rejoignons ainsi les définitions des « objets frontières », proposées par Star et Grisener (1989) dans un contexte ethnographique, des mécanismes de coordination du travail scientifique. Ce concept a été largement repris dans la littérature dans des contextes variés. Plus précisément, si les objets frontières sont un *arrangement* qui permet à différents groupes de travailler ensemble sans consensus préalable, ils constituent un pont entre communautés, agissant souvent comme pont entre un usage faiblement structuré et une théorisation construite. L'objet frontière s'entend alors comme un dispositif permettant d'amorcer un travail commun et assurant une suffisante flexibilité interprétative pour que plusieurs communautés puissent trouver un intérêt à son étude ou à son usage. Le terme « objet » peut désigner à la fois une chose matérielle et un conteneur symbolique contenant des informations et des propriétés créées à partir d'un modèle duquel il peut hériter les caractéristiques. Ainsi, le terme « objet » se rapporte plus à l'objet du paradigme de la programmation-objet qu'à celui de chose tangible et manipulable. La frontière de la même façon n'est pas vue comme une ligne de démarcation, mais plutôt comme un territoire partagé sur lequel il est possible de s'entendre :

> […] dans notre cas, le mot est utilisé pour désigner un espace partagé, le lieu précis où le sens de l'ici et du là-bas se rejoignent. (Star, 2010, p. 20)

L'objet lui-même dans son évolution modifie la frontière et les activités qui s'y construisent peuvent évoluer au fur et à mesure du temps qui y est consacré (Trompette & Vinck, 2009). L'activité de transfert correspond à une situation où un vocabulaire commun a été mis en place ou est *a priori* constitué. L'activité de traduction amène les protagonistes à construire un compromis suffisant pour s'entendre sur l'objet d'étude dans le cadre spécifique de leur discussion commune :

> L'objet frontière est alors un médiateur cognitif ; il constitue une zone de transaction des perspectives en présence. (ibid., p. 13)

Enfin, l'objet frontière devient un médiateur social et la transformation de sa perception impose une construction, plus ou moins négociée, qui fait loi dans la poursuite du travail entre communautés. Cette négociation peut être la démonstration d'une prise de pouvoir mais aussi peut être acceptée comme une évolution des perspectives de travail avec l'objet dans une dimension de formation et de développement professionnel que nous pouvons relier au phénomène d'internalisation de la transposition méta-didactique que nous présentons plus loin.
Dans le cas du projet européen FaSMEd, nous pouvons considérer les objets frontières à deux niveaux. D'une part dans le dialogue entre disciplines (mathématiques, sciences physiques et chimiques, sciences de la vie et de la terre) et d'autre part dans le dialogue entre enseignants et chercheurs. Un livrable du projet européen consistait en une analyse croisée dans les différents pays d'une séquence d'évaluation formative dans la classe. Pour mener à bien cette analyse, le thème des

représentations graphiques a été choisi, comme objet frontière aux disciplines représentées. Si l'on se réfère au paragraphe précédent, le « graphique » réunit toutes les caractéristiques de l'objet frontière ; il est utilisé et compris dans chacune des disciplines, il existe une frontière suffisamment vaste pour s'entendre *a priori*, l'interprétation qui peut en être faite est suffisamment flexible pour que, de chaque point de vue, un travail puisse être amorcé et il comporte des facettes spécifiques à chaque discipline. Il suffit pour s'en convaincre de feuilleter quelques manuels de mathématiques, de physique et de science de la vie et de la terrer (SVT) pour voir apparaître des différences. En mathématiques, on retrouve l'objet avec ses propriétés propres liées aux connaissances mathématiques, en particulier ici aux relations fonctionnelles entre des grandeurs, le graphique apparaissant comme un des systèmes de représentation mis en relation avec les tableaux et les écritures formelles alors qu'en SVT, les graphiques incorporent une idée de tendance à tel point que l'axe des ordonnées peut être repéré par des « unités arbitraires ».
Le second aspect, tout aussi important, est relatif à la méthodologie de la recherche elle-même. Comme nous l'avons décrit plus haut, la méthodologie utilisée repose sur une recherche orientée par la conception, ce qui suppose un travail collaboratif sur l'objet même de la recherche, à savoir l'évaluation formative. En tant que telle, l'évaluation formative apparaît comme un objet frontière entre les deux communautés. D'une part, la base théorique du concept a été travaillée et circonscrite par les chercheurs et d'autre part le concept fait partie des connaissances professionnelles des enseignants. La frontière existe et il est possible *a priori* de parler et de travailler autour de cet objet, même si le regard porté diffère. Le projet dans lequel enseignants et chercheurs ont été impliqués imposait un dialogue et un travail de construction impliquant une mise en œuvre de séquences dans lesquelles la dimension d'évaluation formative devait être prépondérante. L'activité autour de cet objet frontière nous a conduit à réfléchir aux modalités de travail commun et à un modèle théorique des interactions entre communautés. Le cadre de la transposition méta-didactique permet d'analyser l'évolution du regard et des conceptions portés sur l'objet frontière.

La transposition méta-didactique

Le cadre de la transposition méta-didactique proposé par Arzarello, Robutti et al. (2014) a été, au départ, conçu dans le cadre d'une formation hybride, dans laquelle les chercheurs étaient peu nombreux et les enseignants au contraire très nombreux et dispersés sur tout le territoire italien (Projet M@t.bel). Dans ce dispositif, le lien entre chercheurs et enseignants était *a priori* porté par les enseignants-chercheurs, au sens italien du terme, c'est à dire des enseignants travaillant avec les équipes de recherche. Nous avons dans cette perspective analysé, conjointement avec l'équipe de Turin, des actions de formation dans le cadre du programme Pairformance (Aldon et al., 2013). Par la suite, nous avons pensé que le cadre pouvait également être utilisé pour décrire et analyser le travail conjoint mené dans les recherches orientées par la conception.
Cette approche théorique articule la dynamique qui peut se construire dans les confrontations entre plusieurs communautés et les contraintes institutionnelles dans lesquelles le travail est réalisé. Elle repose sur cinq composantes essentielles :

- la double dialectique : elle prend en compte une dialectique didactique mettant en jeu les savoirs à enseigner et les savoirs enseignés et une dialectique méta-didactique de construction de situations didactiques et de justification de ces constructions,
- les praxéologies méta-didactiques : elles permettent de décrire le niveau du discours et de réflexion sur les objets frontières qui amènent à internaliser des composantes qui *a priori* pouvaient être externes à la culture de chaque communauté ; l'activité du professeur et du chercheur n'est pas seulement une discussion des contenus didactiques mais porte sur les pratiques et les réflexions sur ces pratiques,
- les aspects institutionnels : fondamentaux dans un travail mettant en jeu plusieurs communautés chacune reliée à une ou des institutions ayant des règles de fonctionnement spécifiques,

- les composantes internes et externes : en termes d'objets frontières, les composantes externes (resp. internes) correspondent aux propriétés ou aux informations contenues dans l'objet mais invisibles (resp. visibles) du point de vue d'un acteur ou d'un groupe ; elles correspondent aux connaissances *a priori* constitutives de l'enseignement, des savoirs professionnels, des résultats de recherche qui peuvent être, selon les communautés internalisés ou au contraire extérieurs au système de pensée ; en termes de praxéologies, l'internalisation peut être vue comme l'intégration d'une composante à une praxéologie existante (Prodomou, Robutti & Panero, 2017),
- le « brokering » : un rôle de « passeur » de « médiateur », de « courtier » qui permet de faire le lien entre les différentes composantes et qui facilite le dialogue entre les communautés.

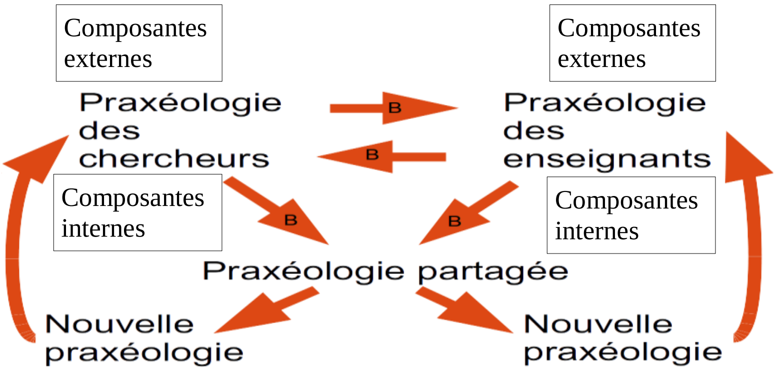


Fig. 1 - Le schéma de la transposition méta-didactique

Le schéma de la figure 1 permet d'illustrer cette dynamique qui apparaît ou non dans les recherches orientées par la conception mettant en jeu plusieurs communautés : enseignants, chercheurs mais ce peut être aussi développeurs, ingénieurs, etc. Les lieux d'interventions du « broker » notés B sur le schéma tendent à mettre en marche la dynamique permettant de faire évoluer les praxéologies des acteurs vers une praxéologie négociée (partagée) intégrant des composantes externes à chaque communauté ; cette praxéologie partagée n'étant qu'une étape qui se prolonge dans la dynamique parallèle du cycle de la recherche orientée par la conception. Les objets frontières sont alors les éléments essentiels des négociations ce qui nous renvoie aux activités de transfert, de traduction ou de transformation décrites dans le paragraphe précédent.

ANALYSE

Dans ce paragraphe nous proposons deux analyses correspondant d'une part à la mise en œuvre de stratégies d'évaluation formative dans un travail co-disciplinaire (Prieur, 2016) sur le graphe s'appuyant sur des observations d'une séquence de classe co-construite et co-animée par les professeurs de mathématiques et de physique d'une classe de cinquième, et d'autre part sur le concept d'évaluation formative dans des discussions entre enseignants et chercheurs.

Une séquence maths-physique

Dans un premier temps, nous revenons sur la justification du graphe comme objet frontière entre mathématiques et physique puisque les données sur lesquelles nous nous appuyons proviennent d'une activité construite de façon conjointe par les enseignants de maths et de physique. Les représentations graphiques sont considérées comme objets frontières entre les deux disciplines en ce sens que la lecture et la construction d'une représentation graphique est *a priori* une activité partagée.

> Les disciplines scientifiques et technologiques sont toutes concernées par la lecture et l'exploitation de tableaux de données, le traitement d'informations chiffrées ; par le langage algébrique pour généraliser des propriétés et résoudre des problèmes. Elles apprennent aussi à communiquer sur ses démarches, ses résultats, ses choix, à s'exprimer lors d'un débat scientifique et technique. La lecture, l'interprétation des tableaux, graphiques et diagrammes nourrissent aussi d'autres champs du savoir. (Programme français d'enseignement du cycle des approfondissement[6])

Par ailleurs, au niveau de la classe de 5^e^, les représentations graphiques apparaissent comme un objet d'étude en mathématiques comme le montre l'extrait du programme ci-dessous :

> En 5e, la rencontre de relations de dépendance entre grandeurs mesurables, ainsi que leurs représentations graphiques, permet d'introduire la notion de fonction qui est stabilisée en 3e, avec le vocabulaire et les notations correspondantes. (ibid.)

« Représenter » apparaît dans ce texte comme une des cinq compétences majeures de l'activité mathématique et fait l'objet d'enseignements spécifiques dans les différentes parties de ce programme avec un attendu de fin de cycle stipulant la maîtrise de la représentation de données :

> Au cycle 4, l'élève développe son intuition en passant d'un mode de représentation à un autre : numérique, graphique, algébrique, géométrique, etc.
> Utiliser un tableur, un grapheur pour calculer des indicateurs et représenter graphiquement les données.
> Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique. (ibid.)

En revanche, dans la partie Sciences physiques et chimiques, les graphiques qui ne sont pas cités en tant que tel, apparaissent plutôt comme un outil permettant l'interprétation de phénomènes physiques ou chimiques dans une compétence générale d'interprétation des résultats expérimentaux. Ainsi, les graphiques, outils fondamentaux des sciences et des mathématiques permettent cette flexibilité interprétative propre aux objets frontières et suivant le point de vue peuvent être considérés comme un objet d'étude ou un outil d'interprétation d'un phénomène. C'est sur cette dialectique que la situation a été construite. Le thème choisi, l'interprétation d'un graphique, se séparait en deux temps : d'une part l'interprétation d'un graphique temps-distance en mathématiques comme préparation à une activité d'interprétation d'un graphique temps-température lors d'un changement d'état en physique. Les professeurs de mathématiques et de physique ont co-animé plusieurs séances en mettant en place un dispositif d'évaluation formative. Les observations et les entretiens réalisés dans les classes tout au long du projet ont permis d'identifier des schèmes communs aux leçons et en particulier à cette séquence :

- proposition d'un QCM *a priori,* mettant en évidence les connaissances des élèves et leurs difficultés,
- discussion et analyse des résultats avec les élèves,
- analyses approfondies et mise en place de remédiations par l'intermédiaire de leçons différenciées.

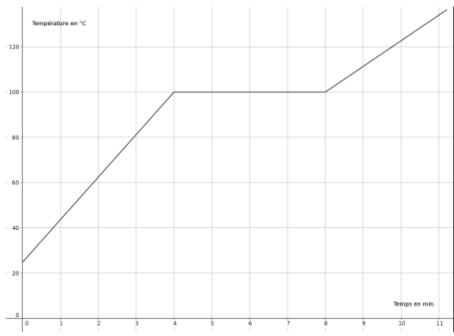
Le travail co-disciplinaire des enseignants a permis de mettre en évidence les difficultés liées au concepts perçus ou enseignés suivant les disciplines comme le montre cet extrait de dialogue entre les deux professeurs à propos du terme « pente » où le professeur de mathématiques repousse la présentation du concept qui sera vu ultérieurement et le professeur de physique qui cherche à utiliser le concept d'une façon pragmatique (M : professeur de mathématiques, P : celui de physique, lors d'une réunion de travail) :

[6]http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94717

M : Le mot « pente » est intéressant mais on le verra plus tard…
P : Oui, mais quand même sans l'expliquer, tu vois, je pense qu'ils ont compris.
M : Oui, mais, temps-distance, ils auraient pu dire « ça monte, ça descend ». Mais c'est quoi qui monte, qui descend ? c'est ce que tu lis sur l'axe des ordonnées ? La distance augmente ou diminue.
P : Oui !

L'activité de négociation sur l'objet frontière tend à construire une signification commune de la notion de pente encapsulée dans celle de graphique. On peut ici parler d'un transfert conduisant à une internalisation modifiant la perception que le professeur de physique pourrait avoir de ce concept de pente. Regardons un autre extrait issu cette fois d'une observation en classe alors que les élèves travaillent sur l'interprétation physique d'un graphique. Dans ce court extrait les élèves avaient à associer le graphique avec une « histoire » de ce qui avait pu se passer. Les élèves débattent de l'interprétation du graphique (Fig. 2). P est le professeur de physique et Nai et Fai deux élèves travaillant dans un groupe :

27- P : Alors, vous êtes d'accord ?
28- Nai : Oui on est d'accord, mais pas elle !
29- P : et tu as quoi comme argument, Fai ?
30- Fai : (lit l'histoire C) *Emma refroidit l'eau*…
31- Nai : refroidit l'eau ?!? (en montrant le graphe)
32- P : Tu es d'accord maintenant ?
33- Nai : Oui.
34- P : C'est quoi la réponse ?
35- Nai : A. (Lisant l'histoire A) Alors elle s'arrête de chauffer l'eau un moment (en montrant le plateau du graphe avec son doigt).
36- Fai : OK, c'est A.



Histoire A : Emma chauffe l'eau. Puis elle arrête de la chauffer un petit moment. Enfin elle reprend le chauffage.	**Histoire** B : Emma chauffe l'eau : elle change d'état. A la fin, il ne reste plus que de la vapeur d'eau au dessus de la casserole qui continue à chauffer	**Histoire** C : Emma refroidit l'eau. L'eau se met à geler : elle change d'état. A la fin il ne reste plus que la glace dans le récipient qui continue de refroidir.

Fig. 2 - Le graphique donnant la température en fonction du temps à associer à l'une des trois histoires.

On peut voir dans les extraits précédents des arguments de type mathématique et de type physique se croiser et empêcher d'une certaine manière l'interprétation correcte du graphique. Nai montre qu'elle a bien compris que le graphique correspondant à l'histoire C (« Emma refroidit l'eau ») ne peut être un graphique croissant alors que Fai lit cette partie de l'histoire pour justifier son doute quant à la bonne réponse ; et même si Fai est sûre d'éliminer l'histoire C, elle fait une erreur en interprétant mal le plateau du graphe : les variations (argument mathématique, ligne 31) l'emportent sur l'interprétation physique du changement d'état (interprétation fausse du plateau, ligne 35).
Les travaux conduits d'une part dans la classe de mathématiques et d'autre part dans la classe de physique puis dans une approche co-disciplinaire construisent ainsi l'objet frontière comme un médiateur cognitif pour embarquer à la fois les propriétés mathématiques et physiques sous-jacentes à l'interprétation des graphiques.
Cette analyse didactique replace l'objet frontière constitué ici par la notion de représentation graphique dans sa double interprétation d'un point de vue des disciplines et du travail nécessaire pour permettre aux élèves de mettre en relation le point de vue adopté en classe de mathématiques et celui adopté en classe de physique.

Un travail collaboratif entre enseignants et chercheurs

Le contexte est toujours celui du projet européen FaSMEd mais nous nous transportons maintenant dans une école de la banlieue lyonnaise dans laquelle quatre professeurs de classes de CM1 et CM2 travaillent avec les chercheurs sur l'analyse et la conception de séances mettant en œuvre des stratégies d'évaluation formative. Nous sommes ici dans une réunion de la deuxième année du projet dans laquelle nous parlons de l'interprétation des données recueillies dans la classe par un système de boîtiers de vote. Tous les résultats ont été enregistrés par un logiciel. Dans ce paragraphe, nous analyserons les données recueillies durant cette réunion en sachant bien qu'elles s'incluent dans un recueil plus vaste comprenant les observations de classes, les discussions à travers les courriers électroniques, les documents partagés et les comptes rendus écrits des enseignants. Nous nous intéressons à l'évaluation formative comme objet frontière entre les deux communautés en examinant les composantes de cet objet et en particulier les méthodes et les outils pensés ou mis en œuvre. Nous analysons les interactions en notant le niveau de discours. Nous appellerons par la suite le niveau didactique toutes les discussions, les techniques ou les justifications de ces techniques visant à mettre en place dans la classe des stratégies d'évaluation formative. Nous appellerons méta-didactique les interactions mettant en jeu des arguments de généralisation et d'explicitation de l'objet frontière pour les deux communautés. Ainsi, la distinction entre les niveaux didactique et méta-didactique repose sur l'appréhension et l'utilisation de l'objet frontière dans l'avancée de la discussion. Ainsi, les éléments suivants pourront être reconnus comme composante du niveau méta-didactique :

- utiliser l'évaluation formative dans son enseignement, c'est à dire intégrer une évaluation pour l'apprentissage,
- évoquer des stratégies d'évaluation formative,
- utiliser dans une perspective d'utilisation en classe des principes ou définitions de l'évaluation formative comme évaluation pour l'apprentissage ; utiliser les fonctionnalités de la technologie pour faciliter la mise en place de ces stratégies,
- se rapporter à des approches socio-constructivistes de l'enseignement pour justifier des stratégies évoquées.

Au niveau didactique la praxéologie relèvera de :

- la construction d'une séquence utilisant l'évaluation formative,
- l'utilisation d'un dispositif ou d'outils pour recueillir de l'information, pour l'interpréter et pour la renvoyer aux élèves,
- la justification empirique de ces outils,
- l'utilisation de principes d'évaluation formative.

Le travail d'analyse et de dépouillement des données n'est pas encore totalement achevé, mais nous montrons dans la suite le type d'analyse qui peut ressortir de cette méthode qui consiste à découper l'ensemble des interactions et de noter le niveau didactique ou méta-didactique des interventions. Le code couleur indique les interventions des deux communautés, en bleu les chercheurs et en rouge les enseignants. Nous reproduisons ci-dessous l'extrait analysé. La discussion commence par l'examen d'un tableau fourni par le logiciel qui gère les boîtiers de vote après la passation en classe d'un QCM portant sur les représentations multiples des fractions simples.

1 Ch 1	l'autre tableau moi je le trouve vraiment intéressant en termes d'évaluation formative
2 En 1	parce que clairement on voit bien...
3 Ch 1	pour les élèves on a le score total mais après individuellement sur chacune des questions horizontalement et verticalement sur la question 1 comment elle a été répondue dans la classe… la croix c'est il a répondu 2 et c'était faux, donc, là il s'est trompé là, il s'est trompé là
4 En 2	ça va beaucoup plus vite après
5 Ch 1	oui

6 En 2	pour des groupes de besoin, tu vois, en bas de la ligne, tu peux pour chaque item chaque question savoir combien il y a d'élèves
7 Ch 1	oui, oui, tout à fait / donc là ça donne des renseignements intéressants / et puis, verticalement aussi, ça donne des renseignements intéressants, alors c'était la 6, je crois, oui, tu regardes en bas et tu te dis oups, y'a quand même un sur deux, même plus d'un sur deux
8 En 2	1, 2, 3, 4, 5
9 Ch 1	non 6, c'est la 6
10 Ch 2	ah oui, mais c'était difficile [...]
11 Ch 1	donc oui, c'est vraiment intéressant pour ça de voir deux analyses
12 En 2	rapides
13 En 1	croisées
14 Ch 1	oui, et après tu disais et ce que tu as fait pour les groupes de compétences voir comment les élèves, comment on peut modifier un peu dans la suite
15 Ch 2	et donc, je disais, c'était long, mais l'avantage c'est que tu peux, pour la prochaine fois que tu veux le proposer, tu pourras enlever des questions que on a vu que c'était bien…
16 En 1	oui, ... après ce que je trouve intéressant, vu qu'il y a plusieurs compétences, c'est intéressant qu'il y ait plusieurs situations dans une même compétence / l'autre solution que je me disais sinon c'est de la faire en deux temps, mais en gardant exactement, ce qui fait que ça te fait quand même plusieurs situations dans une même compétence parce que je trouve que c'est quand même bien parce qu'il y a plusieurs représentations, plusieurs..., sinon, le faire en deux temps, juste, comme ça tu la gardes complète mais tu, tu, tu coupes pour que ça fasse moins long en temps, ça peut être une solution aussi
17 Ch 2	et en fait une chose intéressante c’est que tu peux regarder dans un même groupe d'exercices, de questions, s'il y a une certaine progression ça peut être que les premières deux sont... il s'est trompé, vers la fin de la même question il a repris… c'est intéressant d'avoir au moins trois, quatre...
18 En 2	il doit y avoir des choses sur les évaluations par QCM, parce qu'en fait les élèves peuvent avoir des stratégies pour répondre, ils le font par déduction et c'est pas la même chose si ils ont à répondre directement, donc la question qu'on se posait, c'était, voilà comment interpréter, parce qu'ils vont prendre des indices à droite à gauche dans ce qu'ils vont voir, et dans le QCM, est-ce que ça donne ou pas l'illusion, enfin, on peut peut-être se demander si certains élèves ont vraiment compris, ou bien ils se sont aidés…
19 Ch 2	voui
20 Ch 1	de toute façon, ça ne peut jamais donner que les renseignements que ça donne
21 En 2	Voilà
22 Ch 1	effectivement, après, il y a certainement d'autres choses à mettre en place dans la classe pour conforter ou
23 En 1	oui
24 Ch 1	ou infirmer les résultats / […]ça, ça peut être quelque chose à proposer, dans un deuxième temps, peut-être
25 Ch 2	laisser ouverte quelques questions
26 Ch 1	laisser ouverte quelques questions
27 En 1	et c'est vrai, c'est ce qu'on s'était dit et ce qui aurait pu être intéressant, c'est de leur faire faire par écrit, pour voir la différence... est-ce que ça fait une

	différence, est-ce qu'on observe des différences ou pas […] est-ce que la technologie, ça fait que ça induit des réponses différentes, c'est la question qu'on se posait
28 Ch 2	uhmm, uhmm
29 En 1	juste pour avoir... pourquoi pas
30 Ch 2	là la différence c'est que c'est un QCM et une réponse ouverte
31 En 1	oui... ou alors il faudrait le présenter…
32 En 2	il faudrait qu'ils aient mémorisé toutes les propositions pour pouvoir être en difficulté à l'écrit
33 Ch 1	non, c'est la même, c'est la question que tu posais, il y a une démarche différente entre une réponse ouverte et un choix entre trois réponses qu'il faut…
34 Ch 2	mais c'est pas dû à la technologie
35 Ch 1	oui, c'est pas dû à la technologie
36 En 2	non, c'est autre chose
37 En 1	c'est la modalité d'évaluation
38 En 2	faut qu'on ait conscience qu'on leur demande pas la même chose […]
39 En 2	c'est vrai que l'outil donne des choses pour l'adulte, il donne une lecture rapide, une vision rapide des résultats, par item, par élève, mais après eux…
40 En 1	ah ben eux, ils m'ont quand même dit, c'est trop bien, parce que du coup, on n'a pas à écrire, ça va plus vite...
41 En 2	il y a quand même la tâche de l'écrit qui...
42 En 1	ah oui, la tâche de l'écrit, ah moi, c'est la première chose qu'ils m'ont dit : ah, on pourrait pas tout le temps faire comme ça (Rires) parce que du coup, ils ont un sentiment de rapidité par rapport aux évaluations où on passe du temps, et là ils ont passé du temps mais c’est pas la même chose, je crois
43 En 2	déjà, si on garde le plaisir sur des notions nouvelles comme ça qui en général les fatigue parce que c'est tout nouveau, tout…
44 Ch1	et en même temps, une remarque que je voulais faire, c'est pas trop lié à l'évaluation, à l'évaluation sommative que tu vas pouvoir faire, enfin, ce que j'aimerais mieux qu'on pense à regarder c'est comment on peut faire en sorte que les élèves qui n'ont pas réussi à certains endroits, comment on peut les amener à réussir, tu vois…
45 En 1	uhm... mais ça c'est un peu notre objectif aujourd'hui
46 Ch 1	oui, c'est ça
47 En 1	c'est que du coup…
48 Ch 1	faire, ... différencier un peu les enseignements en fonction de ses résultats, parce que bon, ils ont été plus ou moins performants, alors il y a peut-être d'autres raisons, peut-être on va se tromper sur des élèves qui ont répondu... parce qu'il s'est gouré de touche, enfin, des choses comme ça, mais globalement il me semble qu'on va avoir des renseignements qui vont nous permettre de travailler
49 En 1	ben, c'est un petit peu pour ça, moi hier, au niveau de la lecture, c'était un peu l'idée, moi j'ai essayé de, ben par rapport aux compétences là qu'on avait listées, j'ai essayé de voir les élèves qui étaient en difficulté / alors comme tu disais, c'est pas parce que on a fait 1 erreur, moi, je suis partie du principe que, il y avait 10 questions, du coup je suis parti du principe qu'on pouvait faire 2 erreurs, et à partir de la troisième, j'ai fait un groupe et à partir de plus d'erreurs, par exemple Elies qui a fait 4 erreurs, enfin, 4 réponses justes sur 10, et code 2 j'ai mis pour les élèves qui avaient entre 5 et 7 réponses justes pour faire un

	groupe d'élèves moyens et un groupe qui avait des difficultés / j'ai essayé de faire ça, en fait, pour chaque compétence, d'arriver à faire, comme un espèce de pourcentage d'élèves en difficulté,... comme je disais tout à l'heure, après c'est des élèves que j'ai retrouvés en difficulté sur plusieurs, sur plusieurs domaines et en fait je suis partie de ça, on s'était dit ça pouvait être intéressant, c'est partir de ça pour faire des ateliers de remédiations sur la semaine et après de refaire la même évaluation pour voir les effets
50 Ch 1	voilà ! Et là on est vraiment dans une démarche d'évaluation formative, parce que, en gros, c'est pas une évaluation, c'est plutôt où vous en êtes
51 En 1	ça permet de faire un bilan
52 Ch 1	on fait un bilan, on travaille, et maintenant où vous en êtes

Analyse des interactions

Des lignes 1 à 11

Le tableau apparaît *a priori* comme une technique d'une praxéologie méta-didactique justifiée par le cadre de l'évaluation formative. Le type de tâches de nature méta : utilisation dans la classe de l'évaluation formative ; en revanche, il est part d'une praxéologie didactique où le type de tâches consiste à faire un bilan des compétences des élèves alors que (ligne 3) cet outil sert pour repérer "où en sont les élèves" et "où en est la classe" qui constituent des principes à la base de l'évaluation formative.

Le tableau se pose comme un objet frontière didactique – méta-didactique : outil pour l'enseignant et pour les chercheurs mais pas au même niveau. Le chercheur (ligne 7) indique que le tableau donne des renseignements intéressants, sans vraiment dire lesquels, ce qui laisse la place aux autres pour construire du sens, leur sens. D'où une discussion possible sur l'objet frontière.

Des lignes 12 à 15

Dans ces lignes, le regard porte vers la praxéologie méta-didactique (le dispositif en soi et pas seulement ce cas particulier en train d'être étudié) accompagné d'un regard vers la praxéologie didactique.

Le tableau demeure objet frontière entre praxéologies didactiques et méta-didactiques à ce moment du dialogue et la frontière, permettant la poursuite de la discussion, se situe autour des analyses "croisées". A noter la place de la technologie (les boîtiers de vote et le logiciel de traitement) comme un support de la technique liée à l'évaluation ("rapides"). C'est le rôle du projet FaSMEd d'étudier les modifications apportées par l'usage de la technologie dans les praxéologies didactiques liées au type de tâches : « faire un bilan des compétences des élèves sur les fractions ». Le tableau est alors regardé comme une technique méta-didactique pour analyser les données recueillies dans la classe avec deux types de tâches distinctes : « faire un bilan des compétences des élèves » / « faire un bilan de la classe ». Le tableau apparaît comme une technique permettant de réaliser l'une et l'autre tâche.

Des lignes 16 à 26

Cet outil sert pour modifier l'enseignement : c'est encore ici un des principes à la base de l'évaluation formative et le tableau est présenté comme une technique méta-didactique. Le lien est fait ligne 16 entre les deux discours au niveau didactique, le premier comme déclencheur du deuxième par les deux éléments qui sont repris : le temps (« c'était long »), et l'idée de sélectionner des tâches particulières. Le point commun entre enseignants et chercheurs relève de l'intérêt de la variété des questions sur une même compétence. Poser plusieurs questions pour une même compétence assure la pertinence de l'évaluation même si elle prend du temps. Dans la ligne 17, le type de tâches se resserre sur l'évaluation de compétences particulières liées directement au sujet mathématique en jeu (évaluer une compétence particulière comme sous-tâche de la tâche « faire un bilan des compétences des élèves »). Il s'agit ici de construire ou de discuter les tâches liées à une même compétence. La technique proposée est d'utiliser plusieurs situations parce que la multi-représentation des objets mathématiques permet d'évaluer une même compétence (c'est presque une justification de la technique). Le chercheur rejoint l'enseignante au niveau didactique sur cette technique mais il fait le lien avec les techniques possibles pour analyser les données au niveau didactique. On retrouve la parole du chercheur qui part de la praxéologie didactique pour rajouter un élément de la praxéologie méta-didactique avec une intention de nourrir les justifications de la praxéologie didactique. Le discours se centre alors sur les techniques pour évaluer les élèves (ligne 19). On est au niveau didactique (pertinence des QCM vus comme une technique de résolution d'un type de tâches), mais l'enseignante est sur une idée d'évaluation sommative plutôt que formative : elle considère la pertinence du QCM comme outil pour évaluer les élèves, sans l'insérer dans un dispositif plus global (du type quiz – groupes de besoin – quiz). Toujours en restant au niveau didactique, les chercheurs voient la possibilité d'autres modalités d'évaluation comme une partie du processus d'évaluation formative (lignes 25-26).

Des lignes 27 à 38

Alors que les enseignants discutent de la possibilité de proposer dans la classe les mêmes questions dans les deux modalités (QCM ou questions ouvertes) pour empiriquement en observer les effets, la référence à la technologie analyse le support (ou le frein) à la mise en œuvre des modalités d'évaluation qu'elle pourrait apporter ; la technologie apparaît ici comme un nouvel objet frontière qui est une composante de l'évaluation formative. On retrouve ici les propriétés héritées de l'objet frontière « évaluation formative ». Les chercheurs ramènent la réflexion sur le niveau méta-didactique (ligne 30) : ce n'est pas la technologie qui induit des réponses différentes. C'est plutôt la modalité même de poser les questions. La parole du chercheur part de la praxéologie didactique pour rajouter un élément de la praxéologie méta-didactique avec une intention de nourrir les justifications de la praxéologie didactique. Le rôle de broker entre les niveaux didactique et méta-didactique à ce moment est joué par les chercheurs. Les enseignants cherchent des justifications pour les techniques utilisées (à l'intérieur du niveau didactique) et ne font pas référence à l'évaluation formative. En faisant observer que l'enseignante était déjà sur le plan des justifications des techniques avec sa réflexion précédente sur les modalités d'évaluation, les chercheurs ramènent le rôle de la technologie à une justification des techniques méta-didactiques (lignes 33-35). On voit ligne 37 un basculement de l'enseignante à un niveau méta-didactique dans un début d'un processus d'internalisation alors que la deuxième enseignante revient sur un discours sur les techniques d'évaluation à un niveau didactique (ligne 38).

Des lignes 39 à 43

Mais, rapidement, en s'interrogeant sur l'outil et ses fonctionnalités pour les différents acteurs, elle se situe à un niveau méta-didactique de justification des stratégies d'évaluation formative et revient ensuite à la praxéologie didactique : un discours sur la technique d'évaluation formative. Il est intéressant de noter ici ce basculement entre les deux niveaux qui s'entremêlent et qui illustre bien la double dialectique, le niveau méta-didactique alimentant et nourrissant le niveau didactique de mise en place de stratégies appuyées sur des justifications méta-didactiques.

Des lignes 44 à 49

Le chercheur passe au niveau méta-didactique en faisant référence à l'évaluation formative pour que le discours sur le dispositif technique soit ancré sur des principes d'évaluation formative. En s'interrogeant sur « comment on peut faire pour les amener à réussir » il veut développer des techniques de la praxéologie méta-didactique. La réponse montre ou indique que le rôle de broker joué par Ch 1 a un effet sur En 1 qui passe du coup à ce niveau méta-didactique (en tout cas qui annonce qu'elle veut y passer). Ce qui incite Ch 1 à poursuivre le discours en continuant à s'appuyer sur les praxéologies didactiques des enseignants. Il s'agit ici d'une prise en compte par le chercheur des praxéologies didactiques et notamment de la confrontation des techniques à la contingence pour commencer à modifier (ou affiner) la praxéologie méta-didactique qui est reprise et détaillée par En 1 (ligne 49) qui décrit son dispositif (sa technique didactique).

Des lignes 50 à 52

Ch 1 lit avec une loupe méta-didactique la technique d'En 1 au niveau didactique. On voit bien ici le phénomène de transposition méta-didactique : le rapport des deux discours qui sont au même

niveau praxéologique (technique) mais à deux plans différents (technique méta-didactique vs technique didactique qui en est une transposition).
Cette analyse chronologique peut être représentée par la succession des niveaux de discours (figures 3 et 4) ; chacun des points représente une prise de parole à un niveau spécifique. Il est par exemple possible qu'un même acteur intervienne à des niveaux différents de discours ce qui, dans notre codage, justifiera de scinder cette intervention en deux points. De ce codage, on peut tirer des interprétations locales : comment les discours des uns et des autres se succèdent et quels éléments permettent d'élargir la frontière de l'objet enjeu de la discussion ? Mais aussi des interprétations globales sur l'évolution du discours des différents partenaires dans une perspective de mise en évidence d'internalisation et de praxéologies partagées. Dans la première phase de la réunion, ce sont les chercheurs (Fig. 3, bleu) qui interviennent le plus au niveau méta-didactique, alors que les enseignants ramènent toujours la discussion sur le niveau didactique et plus particulièrement sur les tâches et les techniques spécifiques mises en œuvre dans leur classe. On peut voir une évolution au fur et à mesure des interventions dans lesquelles on perçoit un glissement d'un discours sur les techniques vers une justification de ces techniques et même des interventions à un niveau méta-didactique.

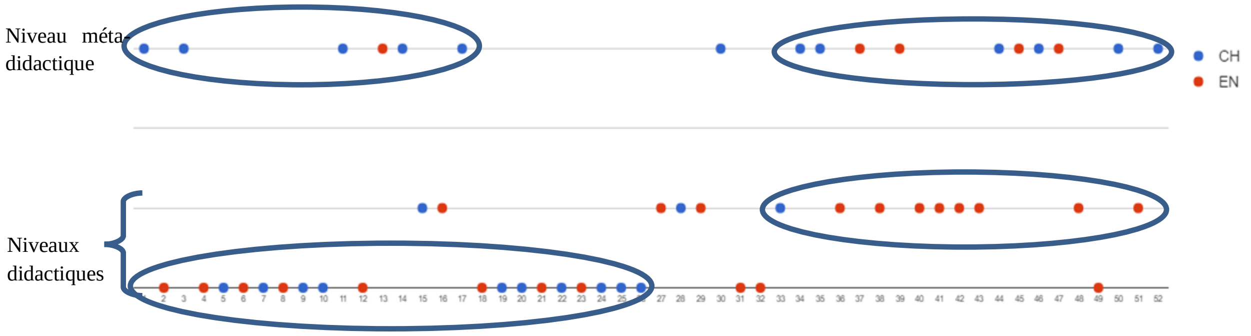


Fig. 3 - Analyse des interactions à un niveau global

A un niveau local l'étude des interactions découpées en épisodes permet de mettre en évidence la structure du discours partant d'un logos didactique pour construire un discours méta-didactique et de regarder les effets sur les professeurs (logos didactique renforcé) (Fig. 4). Il y a des moments de « brokering » horizontal (interne au niveau didactique) [15-17, 30-36] : on retrouve la parole du chercheur qui part de la praxéologie didactique pour rajouter un élément de la praxéologie méta-didactique avec une intention de nourrir les justifications de la praxéologie didactique.

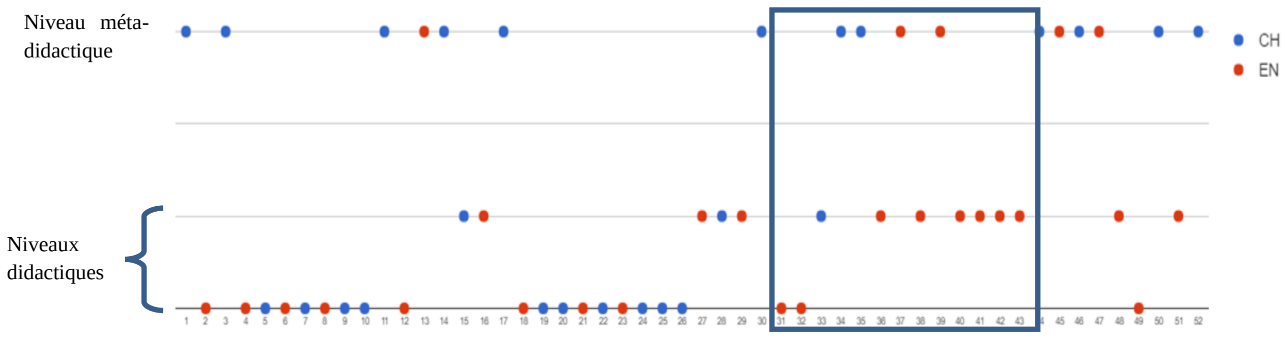


Fig. 4 - Interprétation locale des interactions

CONCLUSION

Les premiers résultats qui ressortent de ces analyses nous incitent à poursuivre ce travail. D'une part, le cadre d'analyse permet de mettre en évidence des points particulièrement utiles pour l'analyse et la conception de situations co-disciplinaires construites dans une perspective d'évaluation pour l'apprentissage. A travers les objets frontières mis en évidence dans la construction d'une séquence, le dialogue enrichit la perception de chacune des parties et modifie les praxéologies relatives à un type de tâches (ici interprétation d'un graphique) en internalisant des concepts ou des méthodes venant des autres disciplines. D'autre part, ce cadre permet aussi d'analyser et de justifier théoriquement la recherche orientée par la conception dans ce qu'elle propose comme développement professionnel d'une part et comme enrichissement théorique d'autre part. Nous avons pu ainsi dégager de l'analyse des rôles des acteurs deux formes de brokering : horizontal et vertical. Le brokering horizontal favorise dans les discussions le passage de praxis à logos dans une praxéologie didactique et le brokering vertical entre les niveaux didactique et méta-didactique en référence à la double dialectique de la Transposition Méta-Didactique. Il y a une dynamique qui est sensible à la perception de l'objet frontière dans la construction conjointe qui est mise en évidence et qui *a contrario* peut aussi expliquer les difficultés rencontrées dans certains groupes de travail dans lesquels cette double dialectique ne s'enclenche pas. Dans cette analyse, nous avons plus observé des moments de brokering horizontal, le rôle de broker étant tenu par les chercheurs, et moins de vrais moments de brokering vertical. Cependant dans la suite des réunions et sur l'analyse de l'ensemble des données, on peut commencer à percevoir une augmentation des moments de brokering vertical, en allant vers une généralisation et une décontextualisation des pratiques didactiques mises en place et analysées ; nous percevons aussi une augmentation des moments de brokering horizontal proposés par les enseignants qui justifient leurs techniques d'évaluation formative en passant par des observations méta-didactiques. Un aspect important des résultats concernant le broker est la mise en évidence du brokering comme un rôle et non pas comme un acteur. Les observations montrent bien que ce rôle peut être joué, à des moments différents, par des acteurs différents. Si, dans les extraits analysés dans ce texte, ce sont les chercheurs qui s'emparent de ce rôle, il apparaît qu'à d'autres moments et notamment dans des moments d'internalisation, un ou des enseignants prennent le rôle de broker.
Bien entendu, des questions se posent encore, plus particulièrement liées à l'évolution dans le temps des praxéologies des acteurs. C'est pourquoi, à partir des données recueillies, nous essayons maintenant de regarder les interactions dans la continuité sur les trois années de travail collaboratif entre enseignants et chercheurs.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALDON, G., ARZARELLO, F., CUSI, A., GARUTI, R., MARTIGNONE, F., ROBUTTI, O., SABENA, C., & SOURY-LAVERGNE, S. (2013). The méta-didactical transposition : a model for analysing teachers education programs. In A. Lindmeier & A. Heinze (Ed.), *Proceedings of the 37th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 97-124).

ALLAL, L. (1983). Evaluation formative : entre l'intuition et l'instrumentation. *Mesure et Evaluation en Education, 6*, 37-57.

ALLAL, L. (1991). *Vers une pratique de l'évaluation formative : Matériel de formation continue des enseignants*. Bruxelles : De Boeck.

ARZARELLO, F., ROBUTTI, O., SABENA, C., CUSI, A., GARUTI, R., MALARA, N., & MARTIGNONE, F. (2014). Méta-Didactical Transposition : A Theoretical Model for Teacher Education Programmes. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (pp. 347-372). Springer Netherlands.

BLACK, P., & WILIAM, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment. *Evaluation and Accountability, 21(1)*, 5-31.

CARDINET, J. (1986). *Pour apprécier le travail des élèves.* Bruxelles : De Boeck.

DE KETELE, J. M. (1993). L'évaluation conjuguée en paradigmes. *Revue Française de Pédagogie, 103(1)*, 59-80.

PERRENOUD, P. (1989). *Pour une approche pragmatique de l'évaluation formative*. Conseil de l'Europe.

PRODOMOU, T., ROBUTTI, O., PANERO, M. (2017, accepté). Making sense out of the emerging complexity inherent in professional development. *Mathematics Education Research Journal.*

PRIEUR, M. (2016). *La conception codisciplinaire de métaressources comme appui à l'évolution des connaissances des professeurs de sciences.* Thèse de Doctorat non publiée, Université Lyon 1 – Claude Bernard.

SANCHEZ, É., & MONOD-ANSALDI, R. (2015). Recherche collaborative orientée par la conception. *Education & Didactique*, *9(2)*, 73-94.

SCRIVEN, M. (1967). The methodology of evaluation. In *Perspectives of curriculum evaluation* (pp. 39-83). Chicago: Rand Mac Nally.

STAR, S.L. & GRIESEMER J. (1989). Institutional ecology, 'translations', and boundary objects: amateurs and professionals on Berkeley's museum of vertebrate zoology. *Social Studies of Science, 19*(3), 387-420.

STAR, S.L. (2010). Ceci n'est pas un objet frontière ! Réflexions sur l'origine d'un concept. *Revue d'Anthropologie des Connaissances*, *4(1)*, 18-35.

SWAN, M. (2014). Design research in mathematics education. In *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 148-152). Springer Netherlands.

TARAS, M. (2012). Assessing Assessment Theories. *Online Educational Research Journal*, *3(12)*.

TROMPETTE, P. & VINCK, D. (2009). Retour sur la notion d'objet frontière. *Revue d'Anthropologie des Connaissances*, *3(1)*, 5-27.

WANG, F., & HANNAFIN, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development*, *53(4)*, 5-23.

WILIAM, D., & THOMPSON, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Ed.), The future of assessment: shaping teaching and learning (pp. 53-82). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

ANALYSE DE RAISONNEMENTS PRODUITS EN CLASSES PREPARATOIRES AUX GRANDES ÉCOLES DANS LE DOMAINE DE L'ALGEBRE LINEAIRE

Marc **LALAUDE-LABAYLE**

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau (LMA-Pau)
Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA)

marc.lalaude-labayle@univ-pau.fr

Résumé

Notre travail est caractérisé par un double objet : la notion d'application linéaire comme concept structurant d'un enseignement de l'algèbre linéaire, d'une part, et les Classes Préparatoires aux Grandes Écoles comme institution particulière, d'autre part. La TSD et la sémiotique de Peirce constituent le cadre principal de nos travaux afin d'analyser les raisonnements produits par les étudiants en situation d'interrogation orale. Nous rappelons d'abord quelques éléments d'analyse épistémologique concernant le rôle des applications linéaires dans l'émergence de l'algèbre linéaire. Puis nous présentons quelques notions de TSD et de sémiotique de Peirce. Nous complétons alors le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel en lien avec le schéma de structuration des milieux et proposons un outil d'analyse sémiotique. Avec ces outils, nous procédons ensuite à une analyse des raisonnements produits par des étudiants en situation d'interrogation orale « classique ». Puis, nous expérimentons une situation d'interrogation orale modifiée afin d'enrichir et stabiliser les niveaux de milieu adidactique. Ces analyses confirment l'importance du lien entre l'activation de milieux adidactiques et l'accès aux objets mathématiques en situation de preuve.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BLOCH I., GIBEL P. (2011), Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherche en Didactique des Mathématiques, 31*(2), 191-228.

DE VLEESCHOUWER M., GUEUDET G. (2012), Secondary-tertiary transition and evolutions of didactic contract : the example of duality in linear algebra, In Pytlak, M., Rowland, T., Swoboda, E., (Eds.) *Seventh Congress of the European Society of Research on Mathematics Education*, (pp. 2113-2122), University of Rzesvow, Poland.

DORIER J.-L. (ED.) (2000), *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE DE L'ALGÈBRE ABSTRAITE À L'UNIVERSITÉ : ÉLÉMENTS POUR UNE DIDACTIQUE DU STRUCTURALISME ALGÉBRIQUE

Thomas **HAUSBERGER**
Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, CNRS, Univ. Montpellier
thomas.hausberger@umontpellier.fr

Résumé
Il est question ici de la rupture liée à l'accès à la pensée structuraliste à la transition entre licence et master de mathématiques. Je présente mes analyses épistémologiques du structuralisme algébrique, en appui sur le travail des historiens et des philosophes, et montre comment ces analyses, croisées avec des analyses didactiques outillées par la Théorie des situations didactiques, la Théorie anthropologique du didactique ou l'approche sémiotique de Duval, permettent de comprendre certaines difficultés des étudiants et de nourrir les ingénieries didactiques.
Je pose ainsi les premiers éléments d'une didactique du structuralisme algébrique : la dialectique objets-structures, prise en deux grands mouvements d'abstraction, l'idéalisation et la thématisation, distingués à la suite de Cavaillès et Lautman ; sa relation avec la dialectique syntaxe-sémantique ; la notion de praxéologie structuraliste, fondée sur la dimension méthodologique de la pensée structuraliste ; la notion de Parcours d'Etude et de Recherche formel dont l'enjeu est de faire vivre la dialectique objets-structures pour développer des praxéologies structuralistes. Enfin, j'expose mon travail d'ingénierie didactique autour de la « théorie des banquets », qui met en œuvre l'idée d'une phénoménologie didactique des structures mathématiques, empruntée à Freudenthal, pour enseigner la pensée structuraliste.

Mots clés
Structuralisme mathématique ; didactique de l'algèbre abstraite ; dialectique objets-structures ; praxéologies structuralistes

1. PROLÉGOMÈNES

De mathématicien à chercheur en didactique des mathématiques

Ce texte reprend les grandes lignes de l'exposé que j'ai donné au séminaire national de l'ARDM en mars 2017 et dont la vidéo est disponible en ligne[1]. Cet exposé de présentation de mes travaux d'habilitation à diriger des recherches avait pour objectif de situer le contexte particulier de mes recherches et d'en dégager les grands axes, afin de faciliter l'accès à ma note de synthèse (Hausberger, 2016 HDR), pour le lecteur souhaitant approfondir.
Mes recherches se caractérisent en effet par le niveau avancé du curriculum auquel elles se situent (fin de licence, début de master de mathématiques pures) et par leur fort ancrage épistémologique, en appui sur le travail des historiens et philosophes. Ceci s'explique par ma trajectoire professionnelle particulière (j'ai mené des recherches en théorie des nombres - géométrie arithmétique, dans le cadre du programme de Langlands, pendant une dizaine d'années tout en investissant progressivement les champs de l'épistémologie puis de la didactique) et par un choix

[1]http://mc.univ-paris-diderot.fr/videos/MEDIA170330124836611/multimedia/MEDIA170330124836611.mp4

délibéré d'inscrire mes travaux en didactique dans un domaine et sur un thème qui me permettent de réinvestir mon expertise scientifique et ma pratique de mathématicien.
Le choix de l'algèbre abstraite est également lié à mon expérience d'enseignant à l'université : le module obligatoire d'algèbre de troisième année de licence de mathématiques m'a été confié pendant 8 années consécutives, sur des contenus variant de la théorie des groupes à celle des anneaux et des corps, selon l'habilitation en cours. Ceci fut l'occasion d'explorer tout d'abord le potentiel d'une approche favorisant les TICE (Guin & Hausberger, 2008), mais sans véritable appui sur les théories didactiques (ma reconversion thématique est ultérieure à l'écriture de cet ouvrage). Pendant cette période, j'ai pu constater d'importantes difficultés rencontrées par les étudiants dans l'apprentissage des structures algébriques, en phase avec la situation au niveau international, telle que la renvoie la littérature en éducation mathématique :

> The teaching of abstract algebra is a disaster, and this remains true almost independently of the quality of the lectures (Leron & Dubinsky, 1995, p. 227).

Cette citation, bien qu'un peu caricaturale, laisse entrevoir la présence d'un obstacle de nature épistémologique, résistant à l'action didactique. Plus tard, j'appellerai cet obstacle « le défi de la pensée structuraliste » (Hausberger, 2012). Si les recherches en didactique de l'enseignement supérieur portant sur l'algèbre linéaire (Dorier, 2000, p. 36) et la théorie des groupes (Lajoie & Mura, 2004) ont permis d'identifier des spécificités des apprentissages algébriques à l'université, notamment autour de la notion de concepts Formalisateurs-Unificateurs-Généralisateurs-Simplificateurs (FUGS ; Robert 1987), il est question ici d'une autre rupture. En effet, lors de l'entrée dans la pensée structuraliste à la transition entre licence et master de mathématiques, le caractère unificateur prend une dimension supérieure. L'enjeu n'est plus celui d'une théorie qui s'applique à des objets de natures différentes, mais celui d'un traitement unifié, systématique, des structures présentées axiomatiquement : on se pose à leur propos le même type de questions que l'on cherche à résoudre avec le même type d'outils, mettant en avant les ponts entre ces structures. Par exemple, la notion d'idéal renvoie à celle de sous-groupe distingué, en tant que « bonne » notion pour la construction de quotients, soulignant ainsi l'analogie formelle entre la théorie des groupes et celle des anneaux. Une compréhension fine de l'épistémologie du structuralisme mathématique, et en particulier algébrique, apparaît ainsi comme un prérequis nécessaire à l'action didactique. Notamment, il s'agit de mettre à l'étude la « méthode axiomatique » dans son usage structuraliste.
La période 2011-14 fut l'occasion, dans mes enseignements, de plusieurs expérimentations d'ingénieries en relation avec mes travaux de recherches en didactique. D'une part, je suis parti d'échanges sur un forum de mathématiques en ligne et ai proposé un usage novateur de retranscriptions de ces échanges pour des activités en classe. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 2007), autour de la notion de praxéologie structuraliste que j'ai introduite en didactique de l'algèbre abstraite. Plusieurs articles sont issus de cette recherche-action (Hausberger, 2016 ; in press b ; in press c) qui fera l'objet de la deuxième partie de cet article, après les prolégomènes. D'autre part, j'ai développé l'ingénierie des « banquets » qui vise à faciliter l'entrée dans la pensée structuraliste. Cette ingénierie est présentée en détail dans ma note de synthèse en vue de l'HDR et constitue la partie originale de cette dernière (non publiée à ce jour ; deux articles sont actuellement en préparation). Elle s'appuie sur une étude épistémologique, croisée avec un cadre sémio-cognitif, à paraître (Hausberger, in press a). Les éléments saillants de cette ingénierie et quelques résultats obtenus seront mis en avant dans la troisième partie de ce texte.
Outre les cadres didactiques, l'ingénierie des banquets a été nourrie par mes lectures philosophiques. Notamment, l'ouvrage de Frédéric Patras « la pensée mathématique contemporaine » (Patras, 2001) a joué un rôle important dans un moment réflexif sur ma pratique de mathématicien, via l'épistémologie, lequel a précédé ma reconversion thématique vers la didactique. Dans la suite de ces prolégomènes, je vais rendre compte de ce questionnement et des

relations entre philosophie et didactique des mathématiques qu'il a fait émerger, pour terminer avec un énoncé des différentes questions de recherche, issues de ce terreau fertile, que j'ai mise à l'étude dans mes travaux sur l'algèbre abstraite.

Pensée mathématique contemporaine et critique hüsserlienne

Patras (2001, chap. III Les origines des mathématiques modernes) caractérise la pensée mathématique contemporaine par la prédominance, dans la pratique mathématique, de la méthode « structurelle-transcendantale », c'est-à-dire la prédominance du structuralisme mathématique en tant qu'épistémologie particulière des mathématiques :

> L'esprit de la méthode est d'abstraire des objets étudiés leur substance formelle, à la manière dont le procédé d'abstraction transcendantale dégage les concepts de leur enracinement empirique […] : à partir de situations diverses et parfois sans liens apparents, dégager des concepts, des structures universelles, qui puissent permettre de traiter simultanément de questions relevant de domaines *a priori* distincts. L'algèbre fut l'élément moteur de la prise de conscience qu'il fallait en finir avec un traitement *ad hoc* des problèmes. De chacun d'eux, il convient de dégager à chaque fois les éléments universels, et cela avec le plus grand degré de généralité possible. Cette généralité n'est pas vaine, dès lors que le mathématicien y gagne en lucidité et en compréhension (Patras, 2001, p. 57).

Cette épistémologie, que Patras tout comme certains historiens (Corry, 1996) fait remonter à Gauss, s'est développée à travers les travaux des mathématiciens allemands des XIX^{e} et XX^{e} siècles, notamment Riemann, Hasse, Dedekind, Hilbert et Noether. En particulier, la généralisation de la méthode axiomatique prônée par Hilbert a joué un rôle important : le système axiomatique proposé par Hilbert pour la géométrie a ouvert le pas à des axiomatiques « formelles » où le processus d'abstraction concerne à la fois la nature des objets et la sémantique des relations. Le résultat est un système d'axiomes dans lequel objets et relations sont désignés par des symboles, et qui exprime les propriétés formelles des relations, généralement dans le langage de la logique formelle.

Dans son Manifeste « L'architecture des mathématiques » (Bourbaki, 1948), Bourbaki fait la promotion de l'usage structuraliste de la méthode axiomatique (qui diffère de la fonction logique que lui assigne Hilbert, par exemple pour démontrer l'indépendance du cinquième postulat d'Euclide ou étudier la cohérence du système). L'idée de structure y apparaît d'une part comme un concept régulateur de la pensée, sous forme métaphorique ou programmatique, pour désigner, de façon assez floue, une architecture cachée derrière des objets ou des théories mathématiques. D'autre part, elle est formalisée, de façon précise et rigoureuse, en termes de structures particulières comme les groupes, les espaces vectoriels ou espaces topologiques. Bien que Bourbaki, dans son traité « Les Éléments de mathématique » (publié à partir de 1939), définisse mathématiquement la notion de structure, sa définition ne sert que de cadre général et n'est pas mathématiquement « fonctionnelle » (Corry, 1996, p. 324), à la différence de la théorie des catégories, introduite par Mac Lane et Eilenberg (Mac Lane, 1996). Cette dernière constitue une véritable métathéorie mathématique des structures, mais il s'agit d'un point de vue très surplombant, qui est hors d'atteinte des étudiants de licence ou début de master lorsqu'ils apprennent la théorie des structures algébriques. En définitive, pour les mathématiciens du milieu du XX^{e} siècle tout comme pour les étudiants (mis à part les étudiants de deuxième année de master qui se destinent à la recherche dans ce domaine précis des mathématiques), le concept de structure, faute de fondation mathématique, appartient essentiellement à « l'image du savoir », il fait office de *méta-concept*. Ceci soulève d'emblée le problème didactique suivant :

> As a consequence, students are supposed to learn by themselves and by the examples what is meant by a structure whereas sentences like "a homomorphism is a structure-preserving function" is supposed to help them make sense of a homomorphism (Hausberger, in press d).

Si les définitions par axiomes réalisent une séparation plus nette entre le logique et l'intuitif (d'où un niveau supérieur de rigueur, indispensable par exemple pour trancher le cas du cinquième postulat), le style d'exposition structuraliste laisse en général peu de place aux intuitions qui ont vu naître les formalisations mathématiques. Il en résulte une distance entre les mathématiques vécues par le mathématicien dans l'acte de création et celles que renvoient les textes du savoir, distance qui devient problématique lorsqu'il s'agit de comprendre les raisons d'être de ces formalisations, leur possibilité, et d'aborder la question du sens. C'est cette distance que pointe Patras en la dénonçant dans la tradition phénoménologique :

> En mathématique, l'objet savant est l'objet dans toute la violence aveugle de sa définition axiomatique, dépouillé de tout enracinement dans une pensée humaine et son cortège d'affects, d'incertitudes et d'espérances troubles. La chose pensée est celle qui se déploie dans une intuition, celle dont la présence habite et fait vivre le travail de recherche. La distance de l'une à l'autre est difficile à saisir en dehors d'une expérience : il faut éprouver la présence de la chose pensée pour comprendre sa spécificité, pour éprouver un sens là où auparavant il n'y avait qu'une certitude inerte (Patras, 2001, p. 158).

D'une façon générale, Patras dénonce ainsi « l'illusion d'une autonomie du discours mathématique » comme « sans doute la plus grave des erreurs qu'ait commises le structuralisme » (Patras, 2001, pp. 2-3). Pour y remédier, il devient indispensable de recourir à la théorie générale de la connaissance, c'est-à-dire à l'épistémologie. A l'opposé d'un « supplément d'âme », cette dernière doit se traduire par une modification effective du style d'écriture mathématique. Il s'agit de ne pas de se méprendre sur la difficulté de la tâche, comme le souligne Patras :

> Les acquis de la rigueur axiomatique étant uniformément admis, tous s'accordent aussi désormais à reconnaître la nécessité d'ajouter de la « matière » aux notions formelles, c'est-à-dire à se préoccuper dans tout texte mathématique d'intelligibilité tout autant que de cohérence. Il ne faut s'y tromper, c'est là l'exercice le plus difficile. Traduire l'idée d'une démonstration en langage formalisé est une simple affaire de patience, pourvu que l'idée soit exacte. Décrire cette idée, expliquer une motivation, est autrement difficile car c'est affaire de style et d'imagination (Patras, 2001, p. 135).

De fait, la lecture de Patras (2001) a questionné non seulement ma pratique mathématique de chercheur mais également ma pratique enseignante, à travers les questions mises en avant par le mathématicien-philosophe, lesquelles ne se limitent pas à la sphère de la création scientifique mais touchent également l'enseignement. Ceci n'est pas une coïncidence, si l'on se réfère d'une part à la tradition de l'implication des mathématiciens (tels que Klein, Poincaré, ou plus récemment Kahane) dans les questions relatives à l'enseignement, d'autre part aux relations entre recherche et enseignement qui se nouent lors de l'exercice du métier d'enseignant-chercheur à l'université (Winsløw & Madsen, 2007). Ainsi :

> Faire la part de modernisme dans le style d'exposition et de retour au système d'intuitions originales qui sous-tendent une théorie est sans nul doute l'une des difficultés majeures auxquelles est confrontée la pédagogie mathématique aujourd'hui, car la science est condamnée à être stérile si elle cesse de prendre appui sur une intuition pleine et vivante de ses contenus. C'est la conscience de cette stérilité qui gouverne les réactions de rejet de l'enseignement mathématique comme un bloc d'abstractions gratuites et dépourvues de significations tangibles (Patras, 2001, pp. 27-28).

Patras fait allusion à la réforme des « maths modernes », qui a rencontré les difficultés que nous connaissons. Le défi d'une écriture et d'une communication mathématiques faisant une part plus large à l'heuristique et aux racines phénoménologiques des structures mathématiques se transpose ainsi, depuis la sphère savante, aux dispositifs d'enseignement. Il se reformule alors en termes didactiques :

> En d'autres termes, le savoir mathématique est aussi pour beaucoup un savoir-faire, dont les règles sont celles d'une technique tout autant que d'une connaissance formelle. Les manuels conçus selon les règles de la méthode d'exposition structuraliste laissent souvent sur un sentiment d'incomplétude : le lecteur a bien compris les ressorts de la méthode, mais serait bien incapable de la faire fonctionner dans l'étude de situations concrètes (Patras, 2001, p. 136).

On l'aura compris, les considérations de Patras, qui portent en premier lieu sur le travail du mathématicien, ne tardèrent pas à résonner avec certaines notions et cadres théoriques didactiques élaborés dans le contexte de l'étude des phénomènes d'enseignement-apprentissage. Par exemple, la citation précédente souligne la dimension méthodologique de la pensée structuraliste (Bourbaki parle de méthode axiomatique) et appelle à un examen praxéologique des types de tâches structuralistes, dans l'esprit de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 2007). Elle pose également le problème de la construction de situations, au sens de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998), à même de conduire à cette « intuition pleine et vivante des contenus » que vise Patras, lorsque la méthode structuraliste tend à faire disparaître les objets derrière les structures abstraites et formelles. Le tableau ci-dessous synthétise les éléments marquants des thèses de Patras relevés dans les citations précédentes et les met en regard avec les éléments des cadres théoriques didactiques usuels qui me paraissent pertinents. Outre la fertilité d'un approfondissement de ces regards croisés entre philosophie et didactique, ce tableau nous rappelle également que l'écriture et la communication mathématiques revêtent indéniablement une dimension didactique.

philosophie de la création mathématique	*phénomènes et cadres didactiques*
illusion de l'autonomie du discours	illusion de transparence (Artigue, 1991)
distance objet savant - chose pensée	*concept definition - concept image* (Tall-Vinner, 1981)
intuition et conceptualisation, esthétique transcendantale	théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990), sémiosis et noésis (Duval, 1995), théorie APOS (Dubinsky, 1984)
phénoménologie du structuralisme	phénoménologie didactique des structures mathématiques (Freudenthal, 1983)
méthode axiomatique en tant qu'ensemble de techniques	praxéologies (Chevallard, 2007)

Tableau 1 : mise en regard philosophie-didactique

Des questions de recherche et un choix de cadres théoriques complémentaires

De ce terreau fertile ont émergé mes premières questions de recherche sur l'enseignement-apprentissage du structuralisme algébrique, encore à raffiner : Comment enseigner les techniques structuralistes en mettant en avant l'heuristique ? Quelles situations proposer engageant des objets ? Comment prendre appui sur l'origine phénoménologique des concepts structuralistes ? Pour y répondre, j'ai mobilisé différents *cadres didactiques complémentaires*, au sens où ces derniers vont permettre de mettre à l'étude des aspects complémentaires de ces premières questions.

Tout d’abord, j’ai choisi de me placer au sein de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD, Chevallard, 2007), du fait de l’importance de la *dimension méthodologique* dans la pensée structuraliste. Il s’agit notamment de mobiliser les outils offerts par la TAD pour étudier, d'un point de vue institutionnel, la rupture liée à l'entrée dans la pensée structuraliste. En effet, je fais l’hypothèse que la mise en évidence des *techniques structuralistes* permet de faire apparaître les *raisons d'être* des concepts structuralistes et de *fonder l'unité* des pratiques en algèbre abstraite, pour un apprenant. Le cadre de la TAD me permet ainsi de mettre à l’étude les questions de recherche suivantes : Comment *modéliser la pensée structuraliste en termes de praxéologies* ? Si mon hypothèse précédente est fondée, comment favoriser le *développement de praxéologies structuralistes* ?
J’ai choisi également de mobiliser la Théorie des Situations Didactiques (TSD, Brousseau, 1998), afin de penser l'apprentissage de la pensée structuraliste en termes de *situations* (en relation avec des gestes structuralistes), et ceci malgré le problème de construction de situations fondamentales dans le cas des concepts FUGS (Rogalski, 1995). Ce choix est aussi motivé par l’usage classique de la TSD dans une démarche d’'ingénierie didactique. Selon l’agenda épistémologique présenté ci-dessus en suivant Patras, il s’agit alors de construire des situations renouant avec les racines phénoménologiques des concepts, dans l’esprit de la *phénoménologie didactique* de Freudenthal (1983). J’ai ainsi mis à l’étude les questions de recherche suivantes, dans le cadre de la TSD : Est-il possible de construire une situation fondamentale ou un ensemble de situations pour l'entrée dans la pensée structuraliste ? Si oui, comment organiser le milieu ? Comment prendre en compte le fait que la notion de structure est un méta-concept ?
Enfin, il apparaît nécessaire d’introduire un cadre sémio-cognitif afin de poser le problème de la *conceptualisation* d'une structure algébrique dans les *rapports du concret à l'abstrait*. Pour cela, j’ai mobilisé la sémiotique de Frege en lien avec un point de vue *théorie des modèles* sur les systèmes axiomatiques (Hausberger, in press a ; voir également la dialectique objets-structures comme cadre de référence, ci-dessous). J’ai également utilisé les travaux de Duval (1995) dans le but d’analyser le fonctionnement cognitif de la pensée dans une situation d'apprentissage. Ce cadre sémio-cognitif me permet d’étudier les questions de recherches suivantes : Comment les aspects épistémologiques, sémiotiques et cognitifs s'articulent-ils dans le déploiement de la pensée structuraliste ? Comment analyser le travail de conceptualisation d'une structure algébrique abstraite et le favoriser ?

2. LES PRAXÉOLOGIES STRUCTURALISTES

Je développe dans cette section mes travaux effectués dans le cadre de la TAD. Pour mémoire, il s’agit de répondre aux questions de recherches : Comment modéliser la pensée structuraliste en termes de praxéologies ? Comment favoriser le développement de praxéologies structuralistes ? Les références pour cette section sont (Hausberger 2016, in press b, in press c).

Le forum sur les nombres décimaux

Commençons par un exemple permettant d’analyser le développement de praxéologies structuralistes par un collectif hétérogène d'apprenants sur un forum de mathématiques. Nous formaliserons la notion de praxéologie structuraliste par la suite.
Le fil de discussion qui nous concerne, visible à l'adresse http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?3,318936,page=1, est intitulé « les nombres décimaux ». Les échanges ont eu lieu probablement pendant un temps assez court, en 2007. l'intervention initiatrice du fil est le fait d'un forumeur, *Mic*, lequel met avant deux assertions et deux questions : A_1 (**D** est un sous-anneau de **Q**), A_2 (Tout sous-anneau de **Q** est principal), Q_1 (Comment le démontrer ?), Q_2 (Comment définit-on le pgcd de deux décimaux ?).

D'emblée, nous remarquons que les assertions A_1 et A_2 sont les deux prémisses d'un syllogisme dont la conclusion est « **D** est principal », assertion notée A_0 et qui est probablement visée par *Mic*. L'assertion A_2 est une généralisation de A_0 (nous notons $A_2=A_0^g$), dans l'esprit de la méthode structuraliste : la preuve recherchée se place au niveau de généralité supérieur (A_0^g), reflétant la pratique experte des mathématiciens qui d'une part postulent que cette généralisation est porteuse de simplification, d'autre part considèrent qu'elle est éclairante quant aux « raisons profondes » à l'origine du phénomène (la principalité de **D**). La question Q_2 lui est également liée : tant l'existence du pgcd que les diverses définitions (ou propriétés) du pgcd que l'on peut énoncer dépendent du type d'anneaux dans lequel on se place ; il est donc important de situer les décimaux au sein des grandes classes d'anneaux (intègre, factoriel, principal, euclidien).
L'investigation de ces questions va conduire un autre forumeur, *bs*, à porter la question à un niveau de généralité encore supérieur et formuler Q_1^g (tout sous-anneau d'un anneau principal est-il principal ?). Le forumeur *barbu rasé* y répond ensuite à travers une généralisation Q_1^{gg} de la question : il donne une classe de contre-exemples à l'assertion « toute propriété remarquable des anneaux (euclidien, principal, factoriel, noethérien, de Bezout) est stable par sous-anneau ». Un autre participant, *Toto le zéro*, énonce de son côté l'assertion A_3 ($\mathbf{Z}[X]$ n'est pas principal), destiné à fournir également un contre-exemple à la question Q_1^g qui porte sur une assertion universelle. Le forumeur Olivier G complète l'argument en affirmant A_4 (l'idéal $(2,X)$ de $\mathbf{Z}[X]$ n'est pas principal). l'assertion A_3 fait l'objet d'une pluralité de preuves (données de façon incomplète sur le forum), lesquelles laissent apparaître une gradation au niveau de leur *dimension structuraliste* (voir ci-dessous).
L'étude des énoncés et des preuves de ce fil de discussion montre ainsi le fonctionnement de deux dialectiques fondamentales en algèbre abstraite, lesquelles sont reliées :
Dialectique particulier-général. La reformulation du problème avec un niveau de généralité supérieur (passage de A à A^g) apparaît comme une démarche employée à plusieurs reprises par certains membres du collectif. Ceci reflète les démarches expertes des mathématiciens en algèbre abstraite :

> Les structures sont des outils pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié (Bourbaki, 1948).

Dialectique objets-structures. L'examen de la structure des objets, des généralisations éventuelles des énoncés et des preuves, de l'insertion de ces dernières dans la théorie constituée en tissu axiomatique fait des structures axiomatiques un *point de vue conceptuel généralisateur-simplificateur* pour démontrer des propriétés sur les objets. Réciproquement, un *contrôle sémantique* sur les énoncés axiomatiques s'exerce en les mettant à l'épreuve des exemples connus, donc des objets. En ce sens, la dialectique objets-structures s'apparente à une *dialectique syntaxe-sémantique*.

Formalisation de la notion de praxéologie structuraliste

La tâche discutée dans le forum est de type T : montrer qu'un anneau donné (e.g. **D**) est principal. Pour résoudre cette tâche, les participants ont introduit la généralisation T^g : montrer que tout sous-anneau d'un anneau principal donné (e.g. **Q**) est principal. Ceci nous amène à définir une *praxéologie structuraliste* comme une praxéologie visant la réalisation d'une tâche algébrique (d'un type donné T) en se plaçant à un *niveau de généralité* qui soit porteur de *simplification*, en appui sur les *concepts* et sur *l'outillage technologique structuraliste* (combinatoire des structures, théorèmes d'isomorphismes, théorèmes de structures, etc.). La *méthodologie structuraliste* vise ainsi à

remplacer une praxéologie [T/*/*/*] (où l'on ne sait pas bien quelles techniques *ad hoc* utiliser) par une praxéologie structuraliste [T^g, τ,θ,Θ], où T^g désigne une généralisation de T qui permette l'usage de techniques structuralistes.
Afin d'analyser de telles praxéologies, il s'agit de prendre en compte la *dimension structuraliste* de ces dernières, laquelle peut se concevoir selon différents niveaux : au premier niveau, la praxéologie comporte uniquement des *techniques élémentaires* ne mobilisant pas les structures au-delà de leurs définitions (donc d'un langage). Par exemple : montrer que **D** est principal en s'appuyant sur la preuve de la principalité de **Z**. Au niveau 2, la *technologie* mobilise des *théorèmes généraux* sur les structures ; par exemple : prouver que **D** est principal en montrant l'existence d'une division euclidienne (tout anneau euclidien est principal) ou en démontrant que tout sous-anneau de **Q** est principal. On peut alors parler de praxéologie structuraliste. A un niveau encore supérieur (niveau 3), le discours technologique revêt une fonction double : il vise d'une part à justifier la technique comme au niveau 2 (fonction logique) mais également, d'autre part, à rendre compte du choix et de la *portée* de la technique comme *procédant de la pensée structuraliste* (fonction heuristique), ce qui produit souvent un accroissement de la composante théorique. En d'autres termes, le niveau 3 rend explicite la *dimension méthodologique* de la pensée structuraliste, qui se traduit par une classe particulière de méthodes. Par exemple, questionner la stabilité par sous-anneau de la propriété de principalité vise au développement d'une praxéologie de niveau 3. On notera que la réponse à cette question est négative (d'où le travail sur des contre-exemples observé sur le forum). Dans l'esprit structuraliste, une autre généralisation, non suggérée par les participants, était possible et éclairante quant aux *ressorts* de la principalité de **D** : soit A un anneau principal et K son corps des fractions ; tout sous-anneau B tel que $A \subset B \subset K$ est principal.

Application aux problèmes de transition

Il s'agit d'utiliser la modélisation praxéologique afin de comprendre les ruptures suscitées par l'entrée dans la pensée structuraliste. Pour cela, je distingue, à la suite de Winsløw (2006), deux types de transition :

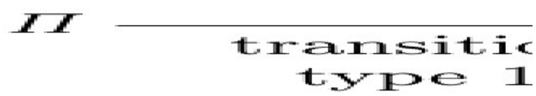


Figure 1 : Développement de praxéologies structuralistes, les deux types de transition

Le premier type consiste à passer d'un bloc de la praxis Π à une praxéologie structuraliste [Π_s,Λ] : il s'agit là d'une reformulation du passage de [T/*/*/*] à [T^g/τ/θ/Θ]. Par rapport à la situation de Winsløw, il ne s'agit pas seulement de compléter une praxéologie, mais de faire apparaître une praxéologie structuraliste. Les dialectiques particulier-général et objets-structures sont fondamentales à ce niveau.
Cependant, lors d'une transition de type 2, la *dialectique concret-abstrait* est amenée à fonctionner à un niveau supérieur. En effet, prenons l'exemple de l'énoncé suivant (extrait d'un manuel de préparation à l'agrégation de mathématiques) : soit A un anneau intègre noethérien tel que tout idéal premier est maximal ; montrer que A est principal. Cette tâche va prendre du sens, devenir concrète, par rapport à ses liens objectifs avec des praxéologies structuralistes antérieures, de façon à former une organisation mathématique régionale cohérente (voir Hausberger, in press b). En termes plus

formels, il s'agit là d'une praxéologie $[\Pi', \Lambda']$ construite sur les blocs du logos de praxéologies structuralistes $[\Pi_{s,i}, \Lambda_i]$, lesquelles ont été développées à un stade antérieur de l'étude.
Je fais l'hypothèse qu'un *problème de transition* de type 1 est susceptible de se produire lorsqu'un enseignant adopte une approche « top-down » (Hausberger, 2016) et, posant en premier lieu le bloc du logos Λ, relie ce dernier plus ou moins artificiellement à un bloc de la praxis Π_s, c'est-à-dire sans se référer au bloc Π dont il est issu historiquement, comme un moyen de mettre en évidence les raisons d'être des concepts et des techniques. De façon similaire, un problème de transition de type 2 est susceptible d'apparaître lorsque les $[\Pi_{s,i}, \Lambda_i]$ ne sont pas disponibles dans l'équipement praxéologique de l'apprenant ou que les liens entre Π' et les Λ_i sont trop faibles (voir Hausberger, in press b).

Développer des praxéologies structuralistes : les PER « formels »

Dans une étude de l'enseignement-apprentissage de la modélisation à l'université, Barquero et al. (2013) ont identifié des contraintes qui handicapent le développement d'activités de modélisation : « l'applicationisme » (la théorie précède les applications) en tant qu'épistémologie dominante et le « monumentalisme » (les savoirs sont rarement questionnés et problématisés, loc. cit., p. 322) en tant que pédagogie dominante à l'université. En réponse à ce constat, les auteurs proposent de nouveaux dispositifs d'enseignement sous la forme de parcours d'étude et de recherche (PER, voir Winsløw et al., 2013). De façon similaire, l'approche dominante « top-down » des structures algébriques contribue à placer l'enseignement-apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université sous le paradigme monumentaliste. Se pose alors (Hausberger, in press c) la question de ce que pourrait être une étude de l'algèbre abstraite dans le cadre du « paradigme du questionnement du monde » (Chevallard, 2012) qui fait l'objet des développements récents de la TAD.
La première idée est la suivante :

> La formalisation est à la fois une mathématisation du monde (réel extra-mathématique) et, à un niveau supérieur d'abstraction, une réécriture conceptuelle des mathématiques antérieures (pré-structuralistes) en termes de structures, les objets mathématiques usuels faisant office de réel intra-mathématique. Dans cette perspective, questionner le monde en instaurant une dialectique fertile entre médias et milieux, c'est questionner les objets mathématiques eux-mêmes de telle sorte que l'on puisse observer, faire fonctionner et développer une dialectique entre objets et structures, les concepts structuraux étant construits ou mobilisés à travers ce jeu du questionnement (Hausberger, in press c).

La seconde idée repose sur l'hypothèse qu'un PER est approprié pour implémenter la dimension heuristique nécessaire au développement de praxéologies structuralistes (cf. discussion des dimensions structuralistes). Cependant, différentes questions écologiques se posent : par exemple, quelle serait une bonne question génératrice du PER lorsque l'abstraction et la généralité en tant que vecteurs de compréhension sont un enjeu important de l'étude ? Comment instaurer une dialectique fertile entre objets et structures ?
La troisième idée, en guise de réponse à ces considérations dans le cas de l'enseignement de l'arithmétique des anneaux, est de faire travailler les étudiants sur une retranscription des échanges du forum sur les nombres décimaux, laquelle constitue un média portant la trace de son fonctionnement en tant que milieu. Une analyse didactique du potentiel de ce média-milieu en tant que milieu pour un PER en classe a été menée au préalable (Hausberger, 2016). La question génératrice est alors la suivante : Quelles connaissances sur les nombres décimaux et sur les anneaux généraux peut-on extraire de ce média-milieu ? Pour mener à bien cette étude, différents outils d'annotations (usage de sigles) ont été fournis aux étudiants. Le lecteur pourra consulter (Hausberger, 2016) pour un compte-rendu détaillé de cette expérimentation et une analyse des résultats obtenus.

3. L'INGÉNIERIE DES BANQUETS

Je présente dans cette section un travail original que j'ai mené selon la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 1990), avec pour cadres la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998) et un cadre épistémologique et sémio-cognitif (la dialectique objets-structures, Hausberger, in press a) que j'ai développé en incorporant, entre autres, des idées de Freudenthal (1983) et de Duval (1995). Pour mémoire, il s'agit de répondre aux questions de recherche suivantes : Est-il possible de construire un ensemble de situations pour l'entrée dans la pensée structuraliste ? Comment analyser le travail de conceptualisation d'une structure algébrique abstraite et le favoriser ? Les références pour cette section sont (Hausberger, in press a) et (Hausberger, 2016 HDR).
La structure de banquet est une structure que j'ai inventée ; elle ne se trouve donc dans aucun manuel et ne fait pas partie du curriculum. Son intérêt est de permettre une discussion, en classe, de la méthodologie structuraliste. Je vais expliciter les choix didactiques que j'ai opérés dans mon travail d'ingénierie et présenter certains résultats obtenus lors de son expérimentation en classe et lors de sessions en laboratoire. Mais tout d'abord, il s'agit d'exposer la théorie des banquets en tant que théorie mathématique structuraliste, afin que le lecteur puisse se familiariser avec cette nouvelle structure et les différents objets et représentations qui l'accompagnent.

Aspects mathématiques

La définition axiomatique de la structure de banquet est la suivante : un *banquet* est la donnée d'un ensemble E muni d'une *relation binaire* R tel que les axiomes suivants sont satisfaits : i) aucun élément ne vérifie $x\ R\ x$; ii) si $x\ R\ y$ et $x\ R\ z$ alors $y = z$; iii) si $y\ R\ x$ et $z\ R\ x$ alors $y = z$; iv) pour tout x il existe au moins un y tel que $x\ R\ y$.
Présentée ainsi, la structure apparaît avec toute la « violence de sa définition axiomatique », selon le mot de Patras (voir ci-dessus). S'il est en général aisé de nommer la première propriété (anti-réflexivité), les suivantes ne s'interprètent pas en termes de propriétés qui définissent les relations binaires usuelles (relations d'ordre et d'équivalence), d'où une première réaction de déstabilisation. Nous allons voir que le nom de la structure (les banquets) permet en général de « débloquer » la situation.
De fait, en tant que théorie mathématique abstraite, la théorie des banquets est susceptible d'une multiplicité d'interprétations : la structure de banquets possède une grande *diversité de modèles*, construits dans des *cadres mathématiques variés*, d'où découle une grande *diversité de représentations sémiotiques*. On peut distinguer une *interprétation empirique* (le nom de banquet est susceptible d'évoquer de lui-même des invités assis autour de tables ; ceci conduit à poser $x\ R\ y$ si et seulement si x est assis à la gauche - ou à la droite - de y) ou des représentations sémiotiques qui prennent pour cadre :

- la *théorie des ensembles* (la relation binaire est représentée par son graphe en tant que sous-ensemble de E^2), l'*algèbre matricielle* (la relation est regardée comme une fonction de E^2 dans $\{0,1\}$ et représentée par la matrice correspondante ; les axiomes disent que la diagonale ne contient que des 0, qu'il y a exactement un 1 dans chaque ligne et au moins un dans chaque colonne),
- la *théorie des graphes* ($x\ R\ y$ si et seulement si les sommets x et y sont reliés par une arête orientée de x vers y),
- la *théorie des fonctions* (d'après les axiomes (ii) et (iv), $x\,R\,y \Leftrightarrow y=f(x)$ définit une fonction f et les autres axiomes signifient qu'elle est injective et sans point fixe),
- enfin, la *théorie des groupes de permutations* (lorsque l'ensemble E est fini, alors f est bijective, autrement dit c'est une permutation sans point fixe et il est commode d'utiliser les représentations sémiotiques standards pour ces dernières, ce qui inclut l'écriture en produit de cycles à supports disjoints).

Ces remarques expliquent pourquoi la théorie des banquets est riche mathématiquement (sémantiquement et du point de vue de l'élaboration théorique) et pourquoi elle ne se trouve dans aucun manuel : en effet, elle est équivalente, dans le cas des banquets finis, à la théorie des permutations (sans point fixe). Cette équivalence est dissimulée : d'une part, une relation binaire est très différente d'une loi de composition interne, d'autre part, une familiarité avec le formalisme logique est nécessaire pour apercevoir le contexte fonctionnel derrière le dernier axiome. En outre, il s'agit d'une théorie plus simple que la théorie des groupes, ce qui favorisera le recul réflexif lorsque seront discutées les démarches structuralistes. Mais surtout, la structure de banquet est porteuse d'une *intuition* sous-jacente liée à l'*image mentale* de convives assis autour de tables (un banquet de mariage), conformément au but recherché : mettre en évidence l'ancrage phénoménologique des concepts, en suivant la pensée de Patras et de Freudenthal. Il est probable que le comportement des apprenants soit considérablement modifié si la structure était nommée « schmilblick », mais je n'ai pas encore testé cette hypothèse en laboratoire.
Voici les représentations sémiotiques produites par différents groupes d'étudiants de licence 3 de mathématiques :

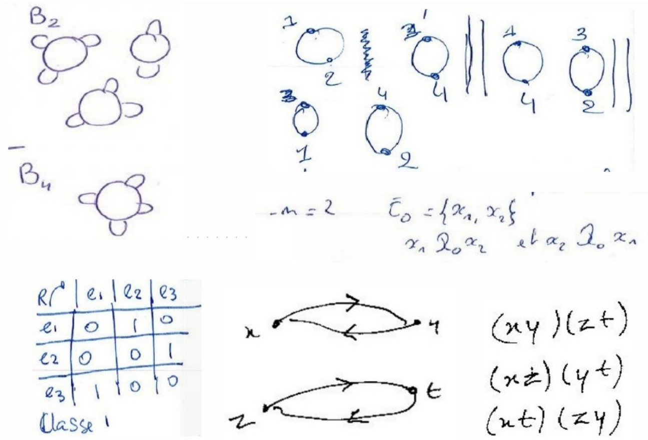


Figure 2 : Représentations sémiotiques produites par les étudiants

On reconnaît, en haut : à gauche des représentations à peine idéalisées des banquets de l'empirie, ou davantage idéalisées à droite ; au milieu : une représentation syntaxique sans sémantique particulière ; en bas, de gauche à droite : une représentation matricielle, l'usage des graphes et une représentation en produit de cycles.
La théorie des banquets, en tant qu'activité en classe, comporte une pluralité de tâches reflétant différentes démarches structuralistes :

- une tâche de *construction de modèles* en relation avec l'examen logique du système d'axiomes (il s'agit d'étudier si un axiome est conséquence logique des autres ou non, démarche qui implique la construction de contre-exemples permettant également de mieux cerner l'extension du concept de banquet) ;
- une tâche de *classification* de modèles (voir ci-dessous) ;
- une tâche de *définition axiomatique* des *tablées* : « On veut placer *n* personnes quelconques autour d'une table ronde. Une telle configuration s'appelle une tablée de cardinal *n*. Quelle relation entre les personnes pourrait-on poser afin de définir abstraitement une tablée ? Enoncer un système d'axiomes définissant abstraitement une tablée. » (il s'agit donc de la démarche inverse : on part de l'empirie et on recherche une modélisation) ;
- enfin, une tâche d'*élaboration théorique* : il s'agit de proposer une définition d'un *sous-banquet*, d'un *banquet irréductible*, du *banquet engendré* par un élément, puis d'énoncer et de prouver le *théorème de structure* des banquets (Tout banquet fini se décompose en une

union disjointe de tablées, analogue du théorème bien connu de décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints).

La tâche de classification, qui sera discutée plus en détails à l'aide de traces de travaux d'étudiants, s'énonce comme suit :

a) Classifier les banquets de cardinal $n \leqslant 3$.

b) Classifier les banquets de cardinal 4.

c) Que dire de **Z**/4**Z** muni de la relation $\bar{i}\, R\, \bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}$?

d) Comment caractériser abstraitement le banquet précédent (i.e. caractériser sa structure abstraite de banquet parmi les différentes classes de banquets, en fait caractériser sa classe) ?

Figure 3 : la tâche de classification des banquets de petits cardinaux

Aspects didactiques

La théorie des banquets est une activité qui a pour objectif de faciliter l'accès à la pensée structuraliste. Elle vise à rendre fonctionnelles les *dialectiques fondamentales objets-structures*, *concret-abstrait* et *syntaxe-sémantique*, et à clarifier le *méta-concept* de structure mathématique en utilisant le *levier méta*, c'est-à-dire « the use, in teaching, of information or knowledge *about* mathematics. […]. This information can lead students to reflect, consciously or otherwise, both on their own learning activity in mathematics and the very nature of mathematics » (Dorier et al., 2000, p. 151).

Un discours méta est ainsi introduit, de façon explicite, dans l'énoncé distribué aux étudiants ; à titre d'exemple, l'activité des banquets débute en ces termes :

> Une théorie structurale est une théorie abstraite : elle parle donc d'objets dont la nature n'est pas spécifiée. On les note alors par des symboles : x, y, z ou α, β, γ, etc. Dans notre théorie des banquets, il n'y a qu'un seul type d'objets [...] La nature des objets n'étant pas spécifiée, ce sont les *relations* entre les objets qui sont le propos de la théorie […] (Hausberger, 2016 HDR, Annexe 1)

De paire avec ce discours tenu par l'enseignant est également attendu, du côté des étudiants, un niveau de méta-cognition, dans l'esprit de l'abstraction réfléchissante de Piaget (Piaget & Beth, 1961). Le choix du type de structure constitue alors une variable macro-didactique qu'il s'agit d'ajuster en tenant compte des connaissances algébriques des apprenants. C'est pourquoi j'ai choisi de développer une théorie des banquets qui soit en proche parenté avec la théorie des groupes, de sorte, par exemple, que les démarches à l'œuvre dans la classification des banquets de petits cardinaux puissent s'appuyer sur celles menées lors de la classification des groupes de petits ordres. Pour un apprenant, il s'agit de repérer, dans la pratique des théories structurales, des invariants opératoires au sens de Vergnaud (1990), qui ouvrent la possibilité d'actions semblables dans des contextes analogues. Si cette généralisation des méthodes à un contexte proche n'est pas encore opératoire pour un certain nombre d'étudiants, ce qui nécessitera alors une intervention de l'enseignant, il est escompté *a minima* l'identification de ces invariants lors de l'institutionnalisation afin de favoriser une extension future.

Ce parallèle avec la théorie des groupes et les théories structurales déjà rencontrées est mené du début jusqu'au terme de l'activité. La phase finale d'institutionnalisation se conclut par le discours méta suivant au sein du document support distribué en classe :

> La volonté de décrire abstraitement des objets mathématiques afin de produire des théories générales conduit donc les mathématiciens à écrire des systèmes axiomatiques définissant les relations qu'ils décident de considérer entre ces objets. Les mathématiciens définissent ainsi différentes structures mathématiques abstraites. Les théories de ces structures établissent des conséquences logiques des systèmes axiomatiques en s'interdisant tout autre axiome.
> On cherche notamment à classifier les différents modèles de l'axiomatique considérée. Cette étude des modèles concrets se fait à « isomorphisme près », puisque la nature particulière des objets ne joue aucun rôle. Un des buts de la théorie est d'établir des « théorèmes de structure », c'est-à-dire de décomposer de façon canonique les modèles en un « assemblage » de sous-modèles les plus simples possibles (les briques élémentaires de la théorie).
> Le mot structure s'emploie donc dans trois sens différents :
> - on parle de la structure de groupe, d'anneau, de corps, etc. (ou de banquet) ;
> - on parle de la structure abstraite d'un modèle donné (au sein d'une théorie structurale) : il s'agit alors généralement de caractériser la classe d'isomorphisme de ce modèle ;
> - on parle de théorème de structure : on vient d'expliquer ce qu'il faut entendre par là. (Hausberger, 2016 HDR, Annexe 1)

Les cadres et registres introduits dans le milieu constituent une variable micro-didactique importante à souligner : en effet, des représentations génériques de la relation R sont nécessaires afin de pouvoir réaliser les tâches demandées par une approche sémantique. Il est probable que ceci nécessite l'intervention de l'enseignant, afin d'enrichir le milieu par l'introduction du cadre matriciel ou du cadre de théorie des graphes. Pour favoriser la dimension méta-cognitive, les étudiants travailleront par petits groupes de 3 à 4 personnes. Etant donnée l'inter-dépendance entre questions (qui s'inscrivent dans une progression liée à la logique de l'élaboration théorique), il est important d'organiser de fréquents moments de mutualisation-institutionnalisation. D'une façon générale, il est nécessaire d'orchestrer très finement les interactions entre dimensions a-didactique et didactique de l'activité, en s'appuyant sur l'analyse *a priori* (Hausberger, 2016 HDR, p. 41).
Selon la méthodologie de l'ingénierie didactique, le processus de validation de l'ingénierie est de nature interne et se fonde sur la comparaison entre l'analyse *a priori* présentant les adaptations escomptées et les erreurs attendues, avec l'analyse *a posteriori* des productions des apprenants. Le cadre didactique pour réaliser ces analyses est la dialectique objets-structures, qui fait l'objet du prochain paragraphe.

La dialectique objets-structures comme cadre de référence

Ce cadre incorpore différents contributions : des éléments d'épistémologie du structuralisme empruntés aux philosophes Cavailles (1994) et Lautman (2006), des idées empruntées à la phénoménologie didactique de Freudenthal (1983), un point de vue logique sur les structures issu de la théorie des modèles, enfin des éléments de la théorie de Duval (1995). Je vais présenter ces différents aspects de façon synthétique et renvoie le lecteur à (Hausberger, in press a) pour des compléments.
Selon Cavaillès, deux mouvements d'abstraction sont à l'œuvre dans la pensée structuraliste, l'*idéalisation* et la *thématisation*, lesquels s'exercent transversalement l'un de l'autre (l'un est perçu comme vertical, l'autre horizontal). Ils se succèdent de façon dynamique pour exprimer une dialectique entre forme et contenu, que Cavaillès appelle « dialectique des concepts ». A sa suite, Benis-Sinaceur (2014) décrit l'idéalisation en ces termes :

> Leaving aside or discarding all other aspects, especially specific substantial or space-time aspects. [...] it comes down to extracting a form from sundry situations [...] idealization follows from seeing or guessing some invariant basic properties attached to a plurality of apparently heterogeneous situations and it leads to a unifying view of the different domains on which we perform the same type of operations (Benis-Sinaceur, 2014, pp. 94-95).

Elle nous rappelle également le sens de la thématisation :

> Cavaillès appelle ensuite « thématisation » le fait que « les gestes accomplis sur un modèle ou un champ d'individus peuvent, à leur tour, être considérés comme des individus sur lesquels le mathématicien travaille en les considérant comme un nouveau champ » (Benis-Sinaceur, 1987, p. 24).

En d’autres termes, l’idéalisation consiste à extraire une forme, laquelle est ensuite thématisée en une théorie d’objets de niveau supérieur. L’idéalisation et la thématisation constituent ainsi les deux grands mouvements d’abstraction qui fondent, d’un point de vue épistémologique et cognitif, la dialectique objets-structures.

Pour Freudenthal (1983), l’*analyse phénoménologique* d’un concept (ou structure) mathématique consiste à repérer le phénomène dont ce concept est le *principe d’organisation* et à décrire les relations entre structure et phénomène. De telles considérations ont nourri le courant contemporain de la Realistic Mathematics Education (RME). Dans le but de clarifier les rapports du cadre que je propose avec celui de RME, on pourra noter que l’idéalisation s’apparente à la *mathématisation horizontale* de RME (une modélisation du réel), et la thématisation à la *mathématisation verticale* (une réorganisation à l’intérieur des mathématiques). Cependant, l’idéalisation ne se réduit pas à une mathématisation du monde réel et la thématisation est une mathématisation verticale particulière, propre au projet structuraliste.

Par ailleurs, il s’agit, dans le cas de l'algèbre abstraite (à la différence de l’algèbre élémentaire), de distinguer *deux niveaux* de principes organisateurs de phénomènes : d’une part, le niveau de la structure (de groupe, d'anneau, etc.), qui apparaît en tant que principe organisateur de phénomènes impliquant des objets de niveau inférieur ; d’autre part, le niveau du méta-concept de structure lui-même, lequel est appelé à jouer un rôle architectural dans l’élaboration des théories mathématiques, en relation avec la méthodologie structuraliste.

Expliquons maintenant les apports de la théorie des modèles, laquelle offre un point de vue fertile pour appréhender les relations entre objets et structures, à travers la distinction entre syntaxe et sémantique ainsi que l’articulation entre ces deux aspects. Tout d’abord, une définition par axiomes est, d’un point de vue logique, une *phrase ouverte*. Les *modèles*, c’est-à-dire les instances qui satisfont ces énoncés, constituent alors le contenu *sémantique* de la structure, par rapport au système d’axiomes qui la définit syntaxiquement. Ceci nous amène à distinguer un point de vue syntaxique sur l’idéalisation, qui consiste à faire abstraction de la nature particulière des objets et isoler les propriétés formelles des relations (la « logique » des relations), et un point de vue sémantique qui met l’emphase sur les *classes d'isomorphisme de modèles*, lesquelles constituent un intermédiaire entre le domaine sémantique concret des objets et celui syntaxique abstrait de la structure. Le prix à payer est la transition des éléments aux classes. Je fais l’hypothèse que la conceptualisation de ces classes engage un processus de réification (au sens de Sfard, 1991), et appelle de ce fait *objets structuraux* les classes d’équivalences réifiées. De ce point de vue, la tâche de classification des modèles (à isomorphisme près) apparaît fondamentale pour la conceptualisation d’une structure abstraite.

Pour finir, mentionnons brièvement les apports de la théorie de Duval (1995), laquelle fournit les outils sémiotiques nécessaires pour appréhender ce processus de conceptualisation dans ses dimensions cognitives. Nous avons souligné le rôle des « banquets de mariage » en tant qu’*image mentale* qui porte l’intuition sous-jacente à la théorie des banquets. Selon Duval, il s’agit d’une représentation interne qui sert à l’objectivisation de la structure de banquet, alors que les observables sont les représentations externes produites par les apprenants (*sémiosis*), en particulier lors de la conceptualisation des objets structuraux (*noésis*). Nous serons particulièrement attentifs à ce type de représentations, lors de l’observation du travail des étudiants, ainsi qu’aux manipulations sémiotiques (traitements et conversions) qui sont nécessaires pour la détermination d’une relation d’isomorphie entre modèles et, plus globalement, la détermination des classes de modèles.

Nous allons maintenant illustrer le fonctionnement de ce cadre à travers l’analyse *a priori* de la tâche de classification des banquets de petits cardinaux (voir figure 3).

Analyse *a priori* de la tâche de classification

Les méthodes se divisent en deux catégories : d'un côté une approche à dominante syntaxique, qui s'apparente aux raisonnements menés dans le cas de la classification des groupes de petits ordres, de l'autre une approche à dominante sémantique, qui utilise les modèles génériques empruntés à la théorie des matrices ou des graphes. Il sera nécessaire cependant, dans chaque cas, d'articuler syntaxe et sémantique à un moment donné du raisonnement.

Dans l'approche à dominante syntaxique, prenons le cas de trois éléments x, y, z. Quitte à effectuer une permutation, nous pouvons supposer $x\,R\,y$ (en vertu de i) et iv)) ; nécessairement, ($y\,R\,x$ ou $y\,R\,z$) et ($z\,R\,x$ ou $z\,R\,y$), toujours d'après i) et iv). Parmi les quatre cas, seul $y\,R\,z$ et $z\,R\,x$ est possible, en vertu des axiomes ii) et iii). Le raisonnement est similaire avec quatre éléments, mais il nécessite de répéter plusieurs fois des considérations du type « quitte à permuter... ». On aboutit à deux classes : $x\,R\,y$, $y\,R\,x$, $z\,R\,t$, $t\,R\,z$ et $x\,R\,y$, $y\,R\,z$, $z\,R\,t$, $t\,R\,x$. Il est prévisible que les étudiants s'arrêtent à ce stade, alors qu'il s'agit encore, d'une part de justifier que ces deux classes sont bien distinctes, d'autre part de montrer qu'elles sont non-vides, donc d'en exhiber un représentant (retour sémantique). Le premier point nécessite la notion d'isomorphisme, en fait la connaissance de propriétés invariantes par isomorphisme qui permettent de distinguer les deux classes. Dans le cas des groupes d'ordre 4, bien connu des étudiants, on invoque la présence ou non d'un élément d'ordre 4. L'analogue pour les banquets consiste à repérer une propriété de cyclicité : raisonner sur l'ordre d'un élément revient, dans notre contexte, à raisonner sur le cardinal de la « chaîne » issue d'un élément, notion qui est aisée à formaliser (en introduisant, par exemple, une notation R^k), laquelle chaîne se referme dans le cas d'un cardinal fini. Les groupes cycliques, dont ceux constitués par les racines de l'unité, s'appuient également sur cette image mentale du cercle. S'il est peu probable que les étudiants s'engagent dans une telle formalisation, excepté ceux qui sont particulièrement à l'aise avec le formalisme, il est probable par contre que le motif de cyclicité soit reconnu et mis en avant. Le but des questions c) et d) est d'amener les étudiants à expliciter cette image mentale dans le formalisme des relations. Enfin, la construction d'un représentant pour chaque classe est aisée, soit en s'appuyant sur les banquets empiriques, soit sur les graphes, soit sur le modèle de la question c). Notant B4 le banquet cyclique d'ordre 4, il est possible que certains étudiants introduisent, par analogie avec la théorie des groupes, des notations du type B2 x B2, alors que l'opération « produit cartésien de banquets » n'a pas de sens. L'opération structuraliste appropriée (la « réunion » disjointe des banquets) sera introduite dans la seconde partie de l'activité.

Dans l'approche à dominante sémantique, on utilise le fait que la théorie des matrices ou des graphes permet de représenter tous les cas possibles. Il s'agit donc de différencier les classes. Les graphes permettent de traiter rapidement le cas de 3 éléments : il permet de remplacer le raisonnement invoquant les axiomes par une succession d'actions, comme dans un « jeu de légos ». On obtient ainsi deux possibilités de rajouter des flèches entre trois lettres x, y, z et on se convainc facilement que le sens de rotation des flèches n'a pas d'importance grâce à un traitement au sein de ce registre graphique symbolique : on passe de la première configuration à la dernière (voir figure 4 ci-dessous) en rétablissant le sens anti-horaire, ce qui ne change pas la nature de la représentation en tant que graphe, puis en remarquant qu'il s'agit du même motif à permutation près des lettres x et y. Sans formaliser de notion d'isomorphisme, le principe d'abstraction, dans sa version naïve d'abstraire la nature des éléments, permet de se convaincre qu'il s'agit de la même classe d'isomorphisme, dans le sens premier du terme (avoir même forme).

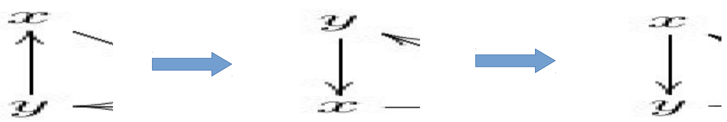


Figure 4 : établissement du lien d'isomorphie par une succession de traitements au sein du registre des graphes

La situation est un plus compliquée dans le cas de 4 éléments, car le nombre de configurations est plus élevé. Des connaissances de théorie des graphes (notamment changer de représentation afin de supprimer les « croisements » de flèches) permettent de se ramener facilement soit au cas du graphe cyclique, soit au cas du graphe ayant deux composantes connexes formées de deux éléments reliés par une flèche double. Le processus visuel de reconnaissance de forme permet de conclure, en faisant abstraction des lettres.
Examinons pour finir l'approche sémantique à base de matrices : dans le cas de trois éléments, la position du 1 en première ligne détermine totalement la matrice ; il y a donc deux possibilités. On se rend compte qu'il s'agit de la même classe par le raisonnement suivant : permuter y et z dans la seconde matrice conduit à deux matrices des relations identiques. C'est donc à nouveau un processus visuel de congruence qui permet d'établir le lien d'isomorphie. Comment a-t-on compris qu'il fallait permuter ces éléments ? C'est l'examen des relations qui le dicte : dans un cas, $x\,R\,y$, $yR\,z$, $z\,R\,x$, dans l'autre $x\,R\,z$, $z\,R\,y$, $y\,R\,x$. Isoler les relations et les ordonner en faisant apparaître des cycles (la conversion en une représentation du type banquet empirique) constitue en définitive une procédure très performante pour comparer les structures. Le cas de 4 éléments est, comme précédemment, facilité par un argument de permutation des éléments *a priori*, plutôt que d'invoquer des isomorphismes *a posteriori*.
Si la notion de modèles isomorphes est susceptible de s'appuyer sur la reconnaissance des formes, la définition formelle d'un isomorphisme nécessite d'avoir intégré le point de vue syntaxique sur la notion d'isomorphisme en tant que bijection préservant les relations. En théorie des groupes, l'isomorphisme est défini comme une bijection préservant la loi, ce qui est conceptuellement différent, mais la proximité syntaxique des écritures $x{*}y$ et $x\,R\,y$ devrait permettre aux étudiants de trouver facilement, outre le caractère bijectif qui est standard dans toute notion d'isomorphisme, la condition $\forall(x,y)\in E^2, x\,R\,y \Rightarrow \varphi(x)\,R'\,\varphi(y)$ définissant un isomorphisme $\varphi : (E,R)\to(E',R')$ de banquets. La construction effective d'un tel isomorphisme, par exemple entre les 2 banquets précédents d'ordre 3, s'effectue en comparant $x\,R\,y$, $y\,R\,z$, $z\,R\,x$ et $x'\,R\,z'$, $z'\,R\,y'$, $y'\,R\,x'$ (noter l'ajout des « ' », étape importante d'un point de vue sémiotique) : si φ associe x à x', il associera donc y à z' et z à y'. Il sera intéressant d'observer si les étudiants s'engagent dans l'écriture de tels isomorphismes ou bien s'ils se satisfont de la reconnaissance intuitive de formes ou bien de l'image mentale de permutation de deux personnes assises autour de la table.
Résumons-nous : la tâche de classification des modèles, dans ses aspects sémantiques, revient à idéaliser les objets structuraux liés aux banquets de petits cardinaux. La thématisation des démarches et notions de théorie des groupes joue un rôle important. D'un point de vue cognitif, la reconnaissance d'une congruence de formes peut s'appliquer après conversion vers un registre sémiotique adapté, comme la théorie des graphes ou les banquets de l'empirie (éventuellement idéalisés sous la forme de cercles munis de points, une représentation externe possible pour les objets structuraux associés). L'articulation entre syntaxe et sémantique passe par la notion d'isomorphisme, à thématiser. Je fais l'hypothèse que le contexte des banquets est propice à cette thématisation, car il permet de s'appuyer sur les processus visuels (un isomorphisme conserve les relations, donc les chaînes circulaires), selon l'étymologie d'isomorphisme.

Eléments d'analyse *a posteriori*

Ce paragraphe synthétise quelques résultats obtenus et phénomènes didactiques identifiés, notamment lors de la réalisation de la tâche de classification. Différentes données ont été recueillies à cet effet : d'une part les traces de travaux en classe, par petits groupes de 4-5 étudiants (l'expérimentation, d'une durée de 6 heures, ayant lieu au tout début du second semestre de licence 3, à l'issue du module de théorie des groupes et avant d'aborder la théorie des anneaux et des corps) ; d'autre part, des captations vidéos de sessions en laboratoire avec deux binômes d'étudiants préparant l'agrégation de mathématiques.

Le premier phénomène remarquable concerne *l'ancrage phénoménologique* de la théorie des banquets, qui se révèle *opératoire* au sens où l'image mentale des banquets de l'empirie sert d'appui aux raisonnements syntaxiques sur les axiomes et au travail de classification. Montrons-le à partir des dialogues du premier binôme d'agrégatifs, en pointant en italique les éléments saillants :

A : Classique, on spécifie la structure par des relations, d'accord.

B : Antisymétrie [à propos de l'axiome (i)]

A : C'est pas tout à fait ça, c'est la non-réflexivité ; *il y a un seul type à droite et un à gauche, c'est l'idée, quoi* [des rires] ; il y a personne qui est assis tout seul à une table.

B : *Les éléments sont des personnes ? Et en relation si ensemble à table ?*

A : Oui, c'est ça. La relation est d'être assis à la droite (ou à la gauche). Par contre, tu peux avoir au plus un type à droite et au plus un à gauche, il y a au moins un type à droite. Oui [continuant à lire]... il y a la théorie et les modèles. Pour montrer que c'est non contradictoire, on peut montrer qu'il y a un modèle. *Je propose de prendre un type. Non, un type ne marche pas, 2 types assis l'un à côté de l'autre*. Donc tu prends $E=\{x,y\}$. On peut aussi mettre $\{0,1\}$.

B : $\{1,2\}$?

A : Allez, on prend $E=\{a,b\}$ et pour la relation les couples (a,b) et (b,a). Donc c'est bien un modèle. [...]

B : Le cardinal 3...

A : *Le truc circulaire, des personnes a,b,c autour de la table*. (a,b), (b,c), (c,a). Reste à voir que c'est le seul. (a,b) moyennant numérotation, c'est toujours valable.

B : (a,c), (c,b), (b,a) ?

A : C'est le même modèle, à isomorphisme près.

B : C'est vrai.

A : (b,a)... il va avoir un soucis, car c va être envoyé sur quoi ? Si c est envoyé sur a ou b, comme a et b sont déjà atteints, on va nier (ii).

B : Si on avait (a,b) et (b,a) on ne saurait pas quoi faire avec c...

A : Oui, c'est ça. *Parce que ses deux voisins de droite potentiels ont déjà un voisin.*

B : Donc c'est forcément (b,c) et on complète.

A : Le cardinal 4 sera peut-être plus intéressant. On va dire $\{a,b,c,d\}$? [...]

A : Donc on a toujours (a,b) ; on a toujours (b,c)... ah, est-ce que b peut s'envoyer sur a ? Ca ferait un premier branchement.

B : *Ca ferait un banquet à deux tables, en quelque sorte.*

Une autre illustration de ce caractère opératoire concerne, ainsi que le prévoit l'analyse *a priori*, l'usage de l'image mentale des banquets de mariage dans la reconnaissance de banquets isomorphes via un processus cognitif de reconnaissance de congruence de formes. A titre d'exemple, voici un extrait de la production d'un groupe lors de l'expérimentation en classe :

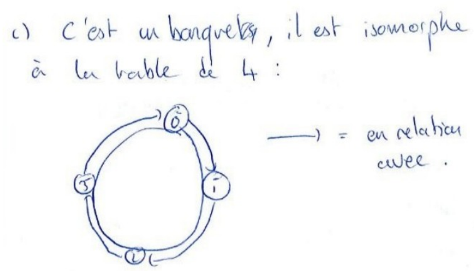
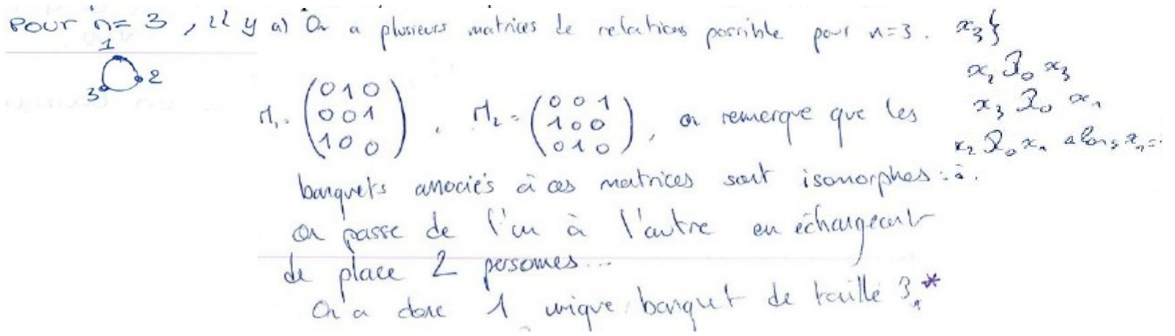


Figure 5 : Reconnaissance de l'isomorphie par conversion vers le registre des banquets empiriques et reconnaissance d'une congruence de formes.

On remarquera la présence simultanée de deux autres cadres, outre le cadre algébrique dans lequel est exprimé l'exemple considéré : la théorie des graphes et le cadre empirique (idéalisé sous forme d'un dessin schématique). A travers l'usage d'une pluralité de registres de représentations sémiotiques et la conversion entre registres, les étudiants parviennent à réifier la classe des banquets cyclique de cardinal 4, en lien avec la représentation mentale associée à la « table de 4 ».

Figure 6a *Figure 6b*



Pour n = 3, il y a) On a plusieurs matrices de relations possible pour n=3.

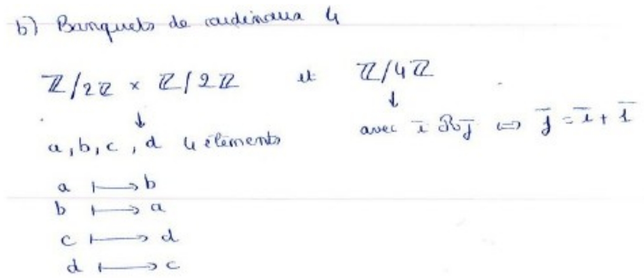
$M_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}$, on remarque que les banquets associés à ces matrices sont isomorphes : on passe de l'un à l'autre en échangeant de place 2 personnes... On a donc 1 unique banquet de taille 3.*

Figure 6c

Figure 6 : Articulation syntaxe-sémantique, comparaison du travail de 3 groupes différents

Un deuxième phénomène identifié concerne un *déficit d'articulation syntaxe-sémantique*, visible dans les productions en classe. En effet, comparons les 3 extraits de travaux d'élèves présentés dans la figure 6. Le premier groupe procède par une approche strictement sémantique (figure 6a) : pour ce groupe, la théorie des banquets est une théorie semi-empirique ; on observe un écrasement des structures par les objets. A l'opposé, le second groupe procède de façon syntaxique sans retour sur la sémantique (figure 6b). Enfin, la figure 6c montre une approche sémantique avec modèles génériques dans le cadre matriciel. Les étudiants s'appuient sur une notion intuitive d'isomorphisme ancrée dans le contexte phénoménal, ils ne produisent pas de définition syntaxique d'un isomorphisme.

En effet, les productions en classe ainsi que les sessions en laboratoire ont permis d'éclairer des *difficultés* sous-jacentes à la *thématisation de la notion d'isomorphisme*, que l'analyse *a priori* a sous-évaluées. De fait, la théorie des groupes, principal point d'appui à la thématisation, s'est également révélée un obstacle : ainsi certains étudiants utilisent-ils de façon abusive le formalisme de la théorie des groupes pour interpréter le domaine phénoménal des banquets, plutôt que de transposer les démarches de classification à ce nouveau contexte (figure 7). On observe un écrasement des structures de groupe et de banquet, favorisé par la notation **Z**/4**Z** (alors qu'il est essentiel de distinguer le groupe (**Z**/4**Z**, +) du banquet (**Z**/4**Z** , *R*)) et la proximité des classifications des banquets et des groupes de petits cardinaux (ce qui n'est pas une coïncidence, étant donné le lien avec les groupes de permutations). Le produit cartésien de banquets n'a pas de sens et les étudiants ne s'engagent pas dans un processus de justification.



b) Banquets de cardinaux 4

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

a, b, c, d 4 éléments — avec $\bar{i} \mathcal{R} \bar{j} \iff \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}$

$a \longmapsto b$
$b \longmapsto a$
$c \longmapsto d$
$d \longmapsto c$

Figure 7 : La théorie des groupes en tant qu'obstacle à la thématisation

Pour finir, examinons certaines traces (figure 8) et certains échanges recueillis lors du travail en laboratoire du second binôme d'agrégatifs. Ce dernier a introduit spontanément le cadre de la théorie des graphes, mais uniquement à travers les représentations sémiotiques associées (la théorie mathématique sous-jacente ne sert pas de domaine d'interprétation des banquets), utilisées par le binôme afin de faire sens des axiomes de banquet : « Globalement, on a un point *x* qui s'amène sur *y* et sur *z*, on a nécessairement l'égalité » (discussion de l'axiome (ii)). Le mouvement du crayon, du point *x* au point *y*, placé à la droite de *x*, donc le geste, les conduit à représenter la relation sous la forme d'une flèche orientée. Ils empruntent ensuite au cadre des permutations une nouvelle notation, plus condensée, pour désigner les graphes produits (sans relier les deux théories).

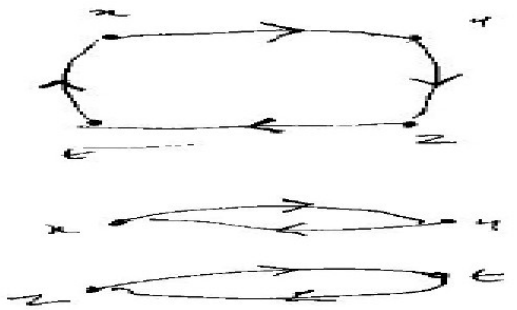


Figure 8 : Obstacle de la lettre dans le dénombrement des classes d'isomorphismes de banquets de cardinal 4

Les conclusions qu'ils en tirent se révèlent mathématiquement inexactes :

C : Il y en aurait 9.
D : Après, on fait que réfléchir sur des objets que l'on connaît. Or depuis le début, on parle de structure.
C : Mais attends, les éléments on peut toujours les numéroter. Qu'est-ce qui pourrait boguer ?
D : Notre propre cohérence.
C : Mais là, on a réfléchi sur les relations, on réfléchit pas sur les objets eux-mêmes, on n'a pas pris une relation particulière.
D : Bon passons.

La réflexivité dont font preuve les étudiants est remarquable : ces derniers soulignent bien qu'il s'agit de faire abstraction à la fois de la nature des éléments et de la sémantique des relations. Pour autant, le symbolisme algébrique (la lettre) donne l'illusion que le processus d'abstraction est complet. Il n'en est rien : une représentation sémiotique possible des objets structuraux consisterait à abstraire les étiquettes des sommets du graphe. Formaliser ce processus d'abstraction dans le langage algébrique consiste à thématiser la notion d'isomorphisme. Les étudiants y parviendront au terme d'un long échange avec le chercheur, qui intervient pour la première fois dans le travail. Ces échanges montrent à nouveau les difficultés liées à la thématisation, en appui sur la théorie des groupes.

D : Il y aurait donc 2 classes à isomorphisme près, ce genre d'objets et ce genre d'objets.
C : Là, du $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et là du $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, en fait.
Chercheur : Vous pensez à la classification des groupes ?
D : Nécessairement, on pense aux classifications que l'on connaît.
Chercheur : Donc il y a 2 types d'objets et là, vous les avez énumérés tous sur x, y, z, t […] Vous avez listé tous les graphes orientés possibles sur x, y, z, t qui vérifient les axiomes. […] Et pourquoi dites-vous que ce sont deux classes ?
C : Deux classes, c'est-à-dire ? On a mis toutes les permutations derrière, de toute façon.
Chercheur : Et pourquoi $(x\ y\ z\ t)$ et $(x\ y\ t\ z)$ seraient les mêmes ?
C : Non, pas les mêmes, du même type.
Chercheur : Que veut dire « être du même type » ?
C : Je pense aux permutations. Il y en a une qui va boucler plus vite que l'autre. Je pense clairement à l'ordre qu'il y a derrière.
D : Une bijection. On peut passer d'un élément de cette classe à un autre par une bijection, mais pas entre les 2 classes.
Chercheur : Ne peut-on pas toujours trouver une bijection entre 2 ensembles de cardinal 4 ?
C : Si !
D : Ah oui, mais est-ce qu'elle va respecter la structure ?

4. CONCLUSION

L'activité des banquets a permis d'éclairer les rapports du concret à l'abstrait en algèbre abstraite, à la fois du point de vue épistémologique et du point de vue des apprentissages. Ceci vient soutenir la thèse que si les mathématiques sont formalisées, elles ne sont pas pour autant formelles et laissent apparaître différents aspects phénoménologiques dans leur élaboration par le mathématicien et leur reconstruction par un apprenant. L'image mentale des banquets de mariage s'avère un point d'appui aux raisonnements syntaxiques sur les axiomes et aux tâches de classification et de caractérisation abstraite des banquets. Différents niveaux de couplage se produisent entre cette image mentale et le symbolisme mathématique, également porteur de gestes et d'images mentales, ce qui transparaît nettement au niveau des dialogues lors des sessions en laboratoire et conduit, entre autres, à l'introduction de modèles en théorie des graphes et à l'utilisation de processus visuels de reconnaissance de formes. L'activité des banquets répond ainsi au projet de phénoménologie didactique des structures mathématiques soutenu par Freudenthal et contribue à rétablir une dialectique concret-abstrait en algèbre abstraite.

D'une façon générale, j'ai posé, dans les travaux présentés ici, les premières pierres d'une *didactique du structuralisme algébrique*, en m'efforçant de tenir compte et d'articuler des aspects épistémologiques, phénoménologiques, didactiques et cognitifs. Ces travaux soulignent le potentiel d'un croisement des regards entre philosophique et didactique, autour de thèmes tels que le structuralisme, la phénoménologie et l'abstraction mathématiques. Ils appellent également à poursuivre le travail d'ingénierie didactique, avec pour cadres la TAD et la TSD et la dialectique objets-structures. Du côté de la TAD, les études praxéologiques sur le structuralisme (algébrique et au-delà) ouvrent un vaste programme de recherches avec en vue des retombées importantes autant pour la compréhension des problèmes de transition que pose l'algèbre abstraite, que pour nourrir l'action didactique, par exemple sous forme de PER (« formels »).

Pour finir, mes travaux soulèvent également différentes questions de nature méta-didactique, posées à notre communauté comme de nouveaux défis et de nouvelles pistes de recherche : La philosophie pourrait-elle être utile à la didactique en dehors de l'épistémologie ? La didactique pourrait-elle être productrice de questions philosophiques ? En quels sens et comment ? Comment penser le méta-mathématique au sein des cadres didactiques ? Quel est l'impact de la technicité des mathématiques (à partir du niveau master) dans les travaux de recherche en didactique ? Les cadres existants sont-ils robustes et sinon, quelles adaptations s'agit-il d'apporter ?

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281–308.

ARTIGUE, M. (1991). Epistemologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 241-285.

BARQUERO, B., BOSCH, M. & GASCON, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 33*(3), 307-338.

BENIS-SINACEUR, H. (2014). Facets and Levels of Mathematical Abstraction. *Philosophia Scientiæ, 18(1)*, 81-112.

BENIS-SINACEUR, H. (1987). Structure et concept dans l'épistémologie mathématique de Jean Cavaillès. *Revue d'histoire des sciences, 40(1)*, 5-30.

BOURBAKI, N. (1948). L'architecture des mathématiques. In F. Le Lionnais (Ed.) (1948, rééd. 1997), *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris : Hermann.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

CAVAILLÈS, J. (1994). *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris : Hermann.

CHEVALLARD, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. Javier García (Éds.), *Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique* (pp. 705-746). Universidad de Jaén.

CHEVALLARD, Y. (2012, July 8-15). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. *Regular lecture presented in the 12th International Congress on Mathematical Education* (ICME 12). COEX, Seoul (Korea).

CORRY, L. (1996). *Modern Algebra and the Rise of mathematical Structures*. Bâle : Birkhaüser.

DORIER, J.-L. (2000). Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspectives théoriques sur leurs interactions [Note de synthèse pour l'Habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier, Grenoble]. *Cahier du Laboratoire Leibniz, 12*.

DORIER, J-L., ROBERT, A., ROBINET, J. & ROGALSKI, M. (2000). The méta lever. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 151-176). Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

DUBINSKY, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts. *Korkeakoulujen Atk-Uutiset, 2*, 41–47.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht : Reidel

GUIN, D. & HAUSBERGER, T. (2008). *Algèbre – tome I : Groupes, Corps et Théorie de Galois*. Les Ulis : EDP Sciences.

HAUSBERGER, T. (2012). Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : Enjeux et défis pour le 21e siècle* (pp. 425-434). Genève : Université de Genève.

HAUSBERGER, T. (2016, HDR). Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université et premiers éléments d'une didactique du structuralisme algébrique : études croisées en didactique et épistémologique des mathématiques. *Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches*. Disponible en ligne à l'adresse : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01408565

HAUSBERGER, T. (2016). Comment développer des praxéologies structuralistes en Algèbre Abstraite ? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 36*(1), 97-142.

HAUSBERGER, T. (in press a). La dialectique objets-structures comme cadre de référence pour une étude didactique du structuralisme algébrique. *Education et Didactique, 11*(2).

HAUSBERGER, T. (in press b). Structuralist praxeologies as a research program in the didactics of Abstract Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*.

HAUSBERGER, T. (in press c). Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'Université : vers un paradigme du questionnement du monde. *Educaçao Matemática Pesquissa*. Numéro spécial consacré aux actes du 5ème congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (CITAD5).

HAUSBERGER, T. (in press d). The (homo)morphism concept: didactic transposition, meta-discourse and thematisation. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*.

LAJOIE, C. & MURA, R. (2004). Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient. *Recherches en didactique des mathématiques, 24*(1), 45-80.

LAUTMAN, A. (2006). *Les mathématiques, les Idées et le Réel physique*. Paris : Vrin.

LERON, U. & DUBINSKY, E. (1995). An abstract algebra story. *American Mathematical Monthly, 102*(3), 227-242.

MAC LANE, S. (1996). Structure in Mathematics. *Philosophia Mathematica, 4*(2), 174-183.

PATRAS, F. (2001). *La pensée mathématique contemporaine*. Paris : Presses Universitaires de France.

PIAGET, J. & BETH, E. W. (1961). Épistémologie mathématique et psychologie. Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle. Paris : PUF.

ROGALSKI, M. (1995). Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? l'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire DidaTech – Université de Grenoble, 169*, 127-162.

ROBERT, A. (1987). De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahiers de didactique des mathématiques, 47*.

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematic, 22*(1), 1-36.

TALL, D.O. & VINNER, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with special reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2), 133-170.

WINSLØW, C. (2006). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In A. Rouchier et al. (Ed.), *Actes de la XIIIè Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 1-12). Cédérom. Grenoble : La pensée Sauvage.

WINSLØW, C. & MADSEN, L. M. (2007). Interplay between research and teaching from the perspective of mathematicians. In D. Pitta – Pantazi & G. Philippou, G. (Eds.), P*roceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2379-2388). Cyprus: University of Cyprus & ERME.

WINSLØW, C., MATHERON, Y., & MERCIER, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 267-284.

Enseigner le choix social en L1. Quels Enjeux ?

Nicolas **SABY**

IMAG, Université de Montpellier

nicolas.saby@umontpellier.fr

Résumé

Cette communication propose, après un rappel historique sur la mathématique sociale, de présenter les questions posées par les problèmes de choix collectif, de décision et de vote. Une modélisation mathématique montre, dans une deuxième partie, quelles mathématiques peuvent être enseignées dans une première année de licence.

Ce sera l'occasion de questionner des éléments de savoirs mathématiques délaissés dans l'enseignement à la fois scolaire et universitaire.

Enfin, il s'agira de montrer l'importance du rôle social des mathématiques dans l'enseignement, son besoin d'élémentarisation ainsi que l'intérêt de repenser un enseignement de mathématiques « mixtes » afin de travailler la force de la pensée mathématisante dans l'étude du réel.

Mots clés

Choix social, décision, vote, modélisation, relations binaires, relations d'ordre, pensée critique

Introduction

La question du social ne fait pas communément partie des préoccupations premières des mathématiques ou des mathématiciens, bien que l'on retrouve régulièrement l'argument que l'apprentissage des mathématique participe à la construction de l'esprit, notamment critique. Pourtant, dès 1793, le marquis de Condorcet dans son Tableau général de la science lance un programme ambitieux autour de ce qu'il nomme la « Mathématique sociale ». Au milieu du XX^{e} siècle, ce projet a connu un regain d'intérêt, notamment dans les travaux des économistes ou de mathématiciens comme Georges Théodule Guilbaud, sous l'influence du développement des sciences sociales. Cependant, pour reprendre une expression chère à Condorcet, pour montrer que les mathématiques peuvent s'occuper du social, encore faut-il que son enseignement soit possible et qu'il soit rendu élémentaire.

Le point de vue adopté dans ce texte sur cette mathématique sociale est de la considérer comme une mathématique *mixte* au sens qu'on lui donnait au XVIII^{e} siècle comme on le trouve dans le tome 2 de l'Encyclopédie méthodique (D'Alembert & Diderot,1751) : « elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers ». Il ne s'agit pas de mathématiques pures, ni de mathématiques appliquées (Chevallard, 2001). Cette ancienne appellation de *mixte* est plus pertinente, notamment lorsqu'on s'attache à montrer l'importance de la modélisation dans cette activité où l'acte d'abstraire s'inscrit dans cette problématisation. La pensée mathématisante est ici un levier important de compréhension des problèmes et participe à cette entreprise de construction d'un esprit scientifique, au-delà des questions répertoriées plus ou moins arbitrairement comme sciences (scientifiques).

La mathématique sociale, de quoi s'agit-il ?

Le concept naît au cours du XVIII[e] siècle dans l'effervescence philosophique et politique du projet des Lumières. Son développement sera lent à se mettre en place, probablement par la difficulté de l'entreprise aussi bien dans son aspect social que mathématique. Nous préférons utiliser le terme de « mathématiques mixtes » pour ce concept plutôt que celui de « mathématiques appliquées » à des fins à la fois didactique et notamment pour faire la distinction avec les « mathématiques appliquées » qui concernent finalement un autre manière de faire des mathématiques. La mathématique mixte renvoie, comme le souligne Bkouche (2006), à la part d'empirisme liée à la connaissance en jeu, ici la question sociale. Cet empirisme sera présent dans les modèles développés et l'acte d'abstraire associé à l'activité mathématique prendra tout son sens. En 1793, Condorcet, dans son tableau qui a pour objet l'application du calcul aux sciences politiques et morales, propose un programme ambitieux qu'il nomme la « mathématique sociale » : « Les vérités des Sciences morales et politiques, *sont susceptibles de la même certitude que celles qui forment le système des Sciences physiques, et même que les branches de ces Sciences qui, comme l'Astronomie, paraissent approcher de la certitude mathématique (...) J'ai cru que le nom de mathématique sociale était celui qui convenait le mieux à cette science. Je préfère le mot mathématique, quoiqu'actuellement hors d'usage au singulier (...) parce qu'il s'agit d'applications dans lesquelles toutes les méthodes peuvent être employées. (...) Je préfère le mot sociale à ceux morale ou politique, parce que le sens de ces derniers mots est moins étendu et moins précis »* (Condorcet, 1793 et Feldman, 2005).
Ce programme de *mathématique sociale* ne peut donc pas être détaché de l'objet d'étude qui est « l'homme » dans la société. Ainsi, les attendus de cette mathématique mixte sont liés aux développements philosophiques autour des projets de société, de démocratie, de justice, d'état, de constitution, de liberté, …
Nous revenons dans la suite, trop rapidement, sur cette *Révolution scientifique.*

Au siècle des Lumières

Dans cette période féconde, on ne peut ignorer le travail fondateur de Rousseau (1762) dans le « Contrat social ». Deux grandes méthodes de choix, possibles pour les peuples et qui prendront plus tard le nom de choix social, sont développées dans ce texte qui sont d'une part l'unanimité et d'autre part la règle majoritaire. Dans ce texte où Rousseau développe la question de la « volonté générale » et de la « souveraineté » des peuples, l'unanimité reste un idéal à atteindre pour les *questions graves.* Elle semble s'imposer pour ce qui concerne les règles constitutionnelles comme l'adoption d'une règle de choix comme la règle majoritaire. La règle majoritaire fera elle-même l'objet de débats, que nous jugeons utiles à travailler dans le cadre scolaire, dont un point d'orgue sera atteint avec le *Théorème du jury* de Condorcet. Condorcet, par son approche de mathématicien, montre dans son théorème, application intelligente de la loi des grands nombres, que la règle majoritaire permet d'atteindre une « vérité » lorsque les électeurs sont suffisamment éclairés. Cependant, si la règle majoritaire

est pertinente dans le cas de deux candidats, son extension à plus de trois candidats par la règle de la pluralité des voix — ou majorité relative — fera l'objet d'un texte fondateur de Borda en1781 à propos de l'élection des membres de l'académie royale des sciences. Dans ce texte, Borda commence « ...je vais faire voir que cette opinion, qui est vraie dans le cas où l'élection se fait entre deux sujets seulement, peut induire en erreur dans tous les autres cas » (Borda, 1781, p.657). Son approche de mathématicien, comme celle de Condorcet, lui permet de montrer la difficulté du choix dans le cas de plusieurs candidats et il propose de le résoudre par un système de vote pondéré sur les classements des électeurs. Ce texte lui vaudra une polémique avec Condorcet qui montrera dans sa publication majeure sur le sujet *« Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix »* l'apparition d'un problème sérieux lorsque le nombre de candidats dépasse trois et qui est désormais connu sous le nom de *Paradoxe de Condorcet* que nous définissons plus loin. Dans cette même période, émerge sous l'influence de Bentham (1789), les choix fondés sur des méthodes de calcul du « *bonheur »*, qu'il nomme « *méthode utilitariste ».* Cette approche est fondée sur un calcul d'utilité collective et cherche à trouver un optimum social en réponse à la question de la volonté générale de Rousseau. Par ailleurs, Bentham théorise dans cette approche, une autre question essentielle pour cette période qui est celle de la « *Liberté individuelle ».*
Les questions sociales ont ainsi donné dans cette période de grands développements de nombreuses approches et le début d'une articulation dans ces questions, entre la philosophie et les mathématiques. Malgré quelques exemples fameux comme les travaux de Jules Dupuit ou d'Augustin Cournot (1838) qui préfigurent la renaissance de ces problèmes dans le cadre des théories économiques et bien que la voie ait été montrée par Condorcet, le développement de théories mathématiques adéquates ne se fera pratiquement pas dans le courant du XIX^{e} siècle.

Une renaissance tardive

Cette renaissance débute à la fin des années quarante et au début des années cinquante, dans l'immédiat après-guerre. Des outils mathématiques d'une grande diversité, comme les probabilités, la théorie des graphes ou la théorie des jeux naissante ont permis ce développement avec des résultats d'une très grande portée et généralité. Ces résultats permettront d'affirmer le rôle d'une approche mathématique de certains problèmes sociaux en réinterrogeant les approches philosophiques, économiques, sociales de la société. Dans le champ économique, les travaux fondateurs de May (1952), d'Arrow (1951), initiés dans un cadre économique libéral, auront une portée généralisatrice permettant de dépasser ce cadre. Dans le champ des sciences sociales, l'exemple des collaborations entre Lévi-Strauss (1956) et Guilbaud montrera la force de ces modélisations. Cependant, comme le souligne Guilbaud (2002) dans son entretien sur la mathématique et le social, sa pénétration dans le champ des mathématiques à enseigner ne se fera pas.
Depuis la fin du XX^{e} siècle, la mathématique sociale de Condorcet s'est singulièrement développée, honorée par de nombreux prix de l'académie de Suède pour l'économie. Son développement s'est aussi rapproché de l'informatique par ses aspects algorithmiques, multi-agents et de décision dans l'incertain. Force est de constater que son application la plus importante dans le cadre des élections n'a pas encore atteint la sphère publique, puisque les paradoxes les plus anciens, identifiés d'un point de vue mathématique depuis le XVIII^{e} siècle, restent encore ignorés. L'exemple le plus éclatant en France est la prédominance d'un scrutin à deux tours à la pluralité pour la plupart des élections politiques. Les problèmes rencontrés lors des scrutins présidentiels, notamment depuis avril 2002 n'ont pas eu pour conséquence de mettre en cause le mode de scrutin. En effet, on préfère chercher une réponse du côté

politique à un problème structurel, comme le système de vote qui influence directement le jeu politique.

Une expérience de vote

Afin d'illustrer combien un mode de scrutin peut influencer l'issue d'une élection, nous empruntons à Michel Balinski (2004) un tableau de *vote* qui sert de base à une activité pratiquée en amphithéâtre au début du semestre. L'objectif de cette activité est de faire prendre conscience de la diversité des modes de scrutins pratiqués usuellement et de montrer leur influence sur l'issue du scrutin. La question posée est : « Lors d'une élection, les électeurs font les classements suivants des candidats A, B, C, D, E. Lequel choisirez vous et pourquoi ? » Un temps de réflexion de 5 minutes leur est laissé, pour faire ce choix avant le recueil des réponses. La stabilité des retours sur plusieurs années est assez remarquable et montre que pratiquement aucun étudiant ne choisit le candidat D, peu choisissent le candidat E, environ 10 % choisissent le candidat A, environ un tiers des étudiants choisissent le candidat B et presque la moitié le candidat C.

Nombre des électeurs	33	16	3	8	18	22
Ordre des préférences	A	B	C	C	D	E
	B	D	D	E	E	C
	C	C	B	B	C	B
	D	E	A	D	B	D
	E	A	E	A	A	A

Lorsqu'il s'agit de donner les raisons de ces choix, il est assez difficile d'obtenir des justifications argumentées permettant d'aboutir sur une méthode de choix explicite ou algorithmique pour certains de ces choix.

- Le plus simple est bien évidemment le candidat A qui est le vainqueur d'un scrutin à la pluralité — c'est le candidat qui obtient le plus de premiers choix.
- Le candidat D est très peu choisi. La procédure qui le désigne est le vote préférentiel — ou vote simple transférable — qui élimine à chaque tour le candidat qui obtient le moins de premier choix. Cette méthode est utilisée depuis un siècle en Australie, ainsi qu'en Irlande. Il serait intéressant d'avoir une étude comparative dans les différents pays pour indiquer si les biais culturels sur la pratique du vote ont une influence sur les résultats de cette expérience.
- Le candidat E est peu choisi, bien que le gagnant du scrutin à deux tours — largement pratiqué dans les élections françaises.
- Le candidat B est vainqueur d'un scrutin pondéré — où l'on attribue des points suivant la place obtenue : 4 pour une première, 3 pour une deuxième, … Ce scrutin est dénommé vote de Borda en référence à Borda qui l'avait proposé pour l'élection à l'académie royale des sciences.
- Le candidat C est le « *vainqueur de Condorcet* », c'est-à-dire un candidat qui gagne tous ses duels. Il est assez rare que les participants à cette activité remarquent qu'il a cette propriété.

Cette expérience permet de montrer que chacun des candidats peut être désigné suivant un mode de scrutin raisonnable et utilisé pour certaines décisions. Elle permet de motiver la perspective d'une analyse rationnelle des modes de scrutins. Bien sûr, cette expérience ne prend pas en compte que les électeurs révèlent différemment leurs préférences suivant le mode de scrutin qui leur est proposé. Cette prise en compte dépasse le cadre possible de cet enseignement et relève d'un enseignement de théorie des jeux mettant en œuvre des mathématiques avancées.

Le paradoxe de Condorcet

Il a été identifié très tôt que la règle de la pluralité présentait de nombreux défauts dont celui présenté par Borda, puisqu'elle permet de désigner un candidat qui perd en duel contre tous les autres. On appelle ici « *duel* », une confrontation entre deux candidats à la règle de la pluralité. Condorcet (1785) propose une nouvelle situation paradoxale, le choix de la règle de la pluralité pour les duels ne permet pas toujours de classer ! Elle peut conduire à ce qu'il nomme un système contradictoire.
En reprenant dans un tableau l'exemple de Condorcet (Condorcet, 1785, p.61) :

60 votants	23	17	2	10	8
Ordre des préférences	A	B	B	C	C
	B	C	A	A	B
	C	A	C	B	A

Dans cet exemple, Condorcet montre que l'on a les trois propositions suivantes :
- A vaut mieux que B, pour 33 voix contre 27
- B vaut mieux que C, pour 42 voix contre 18
- C vaut mieux que A, pour 35 voix contre 25

que l'on peut résumer dans la relation suivante : A>B>C>A qui montre l'intransitivité de la relation obtenue ! Les comparaisons deux à deux ne suffisent pas à classer malgré la sémantique portée par l'expression « vaut mieux ». On reviendra plus loin sur ce problème d'intransitivité.

Une histoire de modèles

L'exemple introductif de Condorcet deviendra progressivement le cœur du problème du choix collectif et contribue à montrer la difficulté à trouver un cadre raisonnable pour poser cette question du choix collectif. Le choix d'enseignement que nous faisons dans cette expérimentation consiste alors à pouvoir proposer un modèle permettant de penser cette question du choix, nommée dans cette littérature « problème de l'agrégation des préférences ». Dans un langage mathématique, porté par le langage ensembliste, il s'agit de trouver une fonctionnelle ayant pour source l'espace des données demandées aux électeurs et pour but l'espace des classements des candidats. L'acte de modélisation permettant de savoir si notre problème a ou non des solutions se concrétise par les propriétés que l'on va imposer à cette fonctionnelle en rapport avec les contraintes démocratique du choix collectif.

La définition des espaces de données et de résultats (source et but) est déjà un objectif intéressant pour les étudiants de L1 et présente une vraie difficulté pour eux. En effet, pour ce qui concerne le résultat, puisqu'il s'agit de classer les candidats, la notion de ***classement*** doit être éclaircie. Notamment se pose le problème des ex-aequo potentiels, de l'ordre strict, de la relation totale, … Pour ce qui concerne les données, cela va dépendre de l'information demandée aux électeurs.

Le premier modèle proposé aux étudiants, qui est aussi le cadre historique de ce champ disciplinaire, on va demander aux électeurs le même type d'information que celui attendu pour le collectif, à savoir un classement individuel des candidats par les électeurs. La donnée est ainsi un *n*-uplet de classements. La fonctionnelle modélisant le choix collectif est une fonction qui prend en données des *n*-uplets de classements et donne comme résultat, un classement des candidats.
Les contraintes que l'on va imposer sur le modèle vont devoir être traduites comme des propriétés demandées à cette fonction de choix.

Le deuxième modèle proposé aux étudiants, demande une information plus riche aux électeurs. Les électeurs ne doivent plus classer, mais noter les candidats. Les notes peuvent être cardinales (une échelle numérique de -5 à 5 ou de 0 à 20) ou bien ordinales (des valeurs ordonnées : médiocre, passable, assez-bien, bien, très bien, par exemple). Le résultat restera un classement des candidats. La donnée est maintenant un *n*-uplet de notes, éventuellement numériques ou cardinales et le résultat est toujours un classement.
De la même manière, les contraintes imposées au modèle seront traduites comme des propriétés attendues de cette fonction de choix.

Cette approche de modélisation permet de travailler ce rôle mixte de cette mathématique, d'une part par l'intuition portée par le réel et d'autre part par cette abstraction que l'on devra faire sur les fonctions que l'on va produire. Cela permet d'exploiter la portée généralisatrice des mathématiques, les théorèmes qui seront prouvés dépasseront largement le cadre initial du modèle et montreront la difficulté à trouver une solution au problème posé : trouver une fonction vérifiant certaines propriétés. On peut retrouver dans cette approche, une des difficultés de l'algèbre linéaire ou de la résolution des équations différentielles, par ses aspects formalisateur, généralisateur, unificateur et simplificateur. La faiblesse des concepts de calculs en jeu, permet de concentrer la difficulté sur les raisonnements en jeu. La formalisation du problème aide à faire entrer les différents modes de scrutin ou de choix dans un cadre théorique unique qui exemplifie la puissance généralisatrice du concept en permettant de définir pour une fonction quelconque de choix collectif les propriétés que l'on souhaite qu'elle vérifie.

Des connaissances peu ou plus enseignées en L1

Cette modélisation du choix collectif introduit explicitement la question des classements et pose le problème des comparaisons deux à deux d'objets (ici des candidats) que l'on travaille par le biais des relations binaires. Ces relations binaires, peu travaillées pour elles-mêmes dans les cursus de mathématiques, sauf dans des enseignements d'informatique, peu en lien avec les enseignements de mathématiques, sont pourtant un cadre conceptuel important de beaucoup de situations des mathématiques, pour lesquelles le langage ensembliste est d'un grand secours.
Ainsi, les relations binaires sont travaillées sous différentes formes, comme graphe dans le produit cartésien, comme diagramme sagittal, comme matrice.

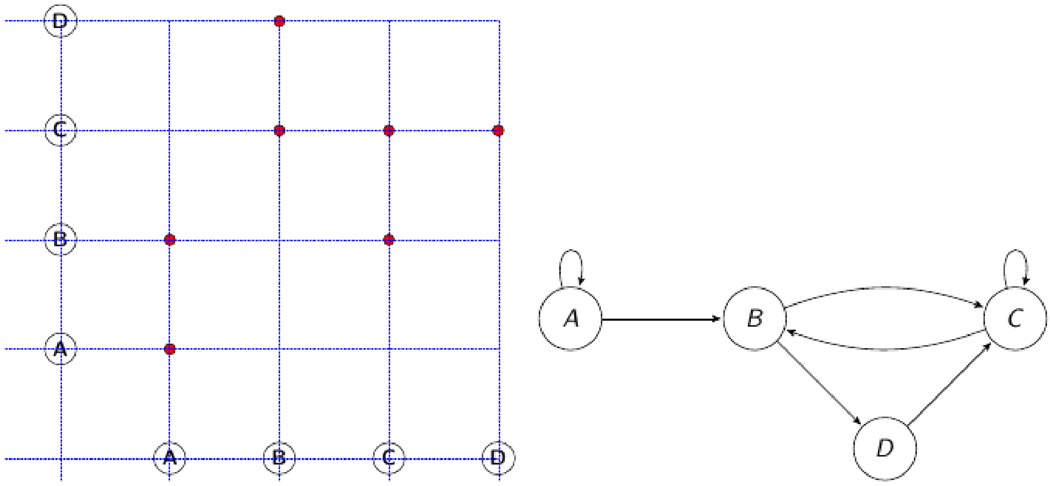
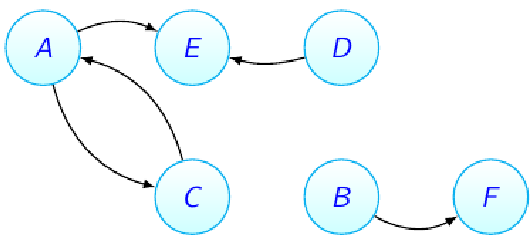


Illustration 1: Représentation sous forme de graphe dans un produit cartésien et sous forme de diagramme sagittal



$\mathcal{R}$	A	B	C	D	E	F
A	0	0	1	0	1	0
B	0	0	0	0	0	1
C	1	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	1	0
E	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0

Illustration 2: Représentation sous forme de diagramme sagittal et matricielle

Les relations fonctionnelles gagnent aussi à être présentées dans le cadre des relations binaires, comme cas particulier important.
Enfin, les relations binaires en jeu dans cet enseignement sont essentiellement les pré-ordres (réflexifs et transitifs) et un travail spécifique peut être mené sur les propriétés des relations binaires qui sont nécessaires pour parler des classements. Nous avons déjà évoqué précédemment que les relations binaires sont le cadre utile pour parler des comparaisons deux à deux.
Le paradoxe de Condorcet met en évidence que la propriété de transitivité est indispensable pour *classer*. Il en résulte que l'accent est porté sur cette propriété de transitivité et dans un degré moindre sur celle d'antisymétrie qui va distinguer les ordres des pré-ordres.
D'autant plus que la propriété la plus naturelle pour le classement strict qui émerge est celle de l'asymétrie — si x est en relation avec y, alors y n'est pas en relation avec x — propriété en général absente des définitions données dans l'enseignement et essentiellement plus simple que la propriété d'antisymétrie — si x est en relation avec y et y en relation avec x, alors x est égal à y. La propriété d'asymétrie trouve une autre justification dans cette approche des classements par les pré-ordres — c'est-à-dire des classements qui permettent la présence d'ex-æquo — car on va distinguer dans ces relations binaires, la composante symétrique — celle qui permet de d'identifier les ex-æquo — de la composante asymétrique qui permet de classer strictement après identification des ex-æquo. Dans le cadre numérique, l'usage de la propriété

d'antisymétrie est essentiel pour montrer des égalités. On sait que cette propriété est d'une appropriation difficile pour les élèves et les étudiants, ce qui peut expliquer notamment les difficultés rencontrées par les élèves du secondaire concernant la notion d'égalité. Dans ce cadre, elle est d'une utilité moindre.
Bien entendu, la quantification universelle de ces propriétés doit aussi être explicitée. Comme pour beaucoup des propositions en jeu dans ces modèles, les quantifications sont majoritairement universelles et mélangent rarement une universelle avec une existentielle. Cette remarque mériterait une étude plus approfondie pour en vérifier la validité et l'effet sur le travail des étudiants. En guise d'exemple, pour illustrer cela, une distinction est faite entre les propriétés suivantes :

- la dictature : il existe un électeur qui impose son choix aux autres électeurs quelles que soient leurs préférences ;
- l'imposition du choix pour des raisons morales ou religieuses : le résultat de la fonction de choix ne dépend pas des préférences des électeurs. La fonction est constante ;
- il existe un électeur qui a fait le même choix que le collectif.

Chacune de ces propositions a une formulation assez ressemblante, mais une quantification différente.

Cette modélisation du choix collectif permet aussi de définir et de travailler sur des fonctions qui ne sont pas définies par des formules. Une grande difficulté du modèle vient du fait que ces fonctions dépendent de plusieurs variables, puisque l'espace de définition est un produit cartésien. Cette difficulté est amoindrie par le fait que les données sont discrètes et permet dans la progression d'apprentissage de proposer des preuves par exhaustion lorsque ces données sont petites. Lorsque la taille des données augmentent, il faut alors trouver d'autres stratégies de preuves.

Quelques exemples de résultats

Dans les deux cadres de modélisation décrits dans la section précédente, quelques grandes familles de résultats sont présentés. Dans le premier modèle, ce sont surtout des résultats d'impossibilité ou d'existence et d'unicité qui dominent et qui font l'objet d'un travail soit en cours soit en TD.
Chacun de ces modèles demande une explicitation des notions de liberté, anonymat, neutralité, indépendance, … Il est intéressant de noter que ces notions sont héritées des théories philosophiques des Lumières. C'est aussi l'intérêt de cette mathématique mixte qui permet de discuter de la pertinence d'un modèle porté par cette part d'empirisme liée au réel. Ici, on peut montrer que les résultats démontrés dans le modèle vont permettre de dépasser cette part d'empirisme et de montrer toute la pertinence d'une approche mathématique de ces problèmes. Ainsi, la question de la « Liberté » du modèle née essentiellement de la pensée libérale de Bentham sur la « Liberté individuelle » qui dans ces modèles du choix collectif va se traduire par la condition que les électeurs peuvent avoir les préférences qu'ils veulent sur les candidats. On peut penser à cette définition comme le domaine de définition de la fonction de choix. Une restriction sur cette condition demandera à expliciter ce que cela signifie en termes de *Liberté.*
Les notions d'*anonymat* et de *neutralité* travaillent, elles, l'invariance par permutation de la fonction de choix collectif. En effet, l'*anonymat,* propriété qui impose que l'identité d'un

électeur n'a pas d'impact sur la prise en compte de son vote, se traduit dans le modèle par : l'application d'une permutation sur les électeurs, c'est-à-dire sur le *n*-uplet de données de la fonction de choix, ne change pas le résultat de la fonction. Celle de *neutralité* exprime que la fonction de choix doit traiter de manière équivalente chacun des candidats, ce qui se traduit aussi par une invariance par permutation des candidats : si on permute les candidats dans les données des électeurs, le choix collectif sera permuté de la même manière.
Le premier résultat significatif de cet enseignement est le *Théorème de May (1952)* qui est un théorème d'existence et d'unicité. Il énonce que lorsqu'il n'y a que deux candidats, il n'existe qu'une seule fonction de choix collectif qui prend en données des *n*-uplets de classements individuels, vérifiant les conditions de *Liberté individuelle, anonymat, neutralité* et *réponse positive.* Cette dernière condition — réponse positive — signifie que si un candidat est désigné vainqueur par la fonction de choix et que pour un autre jeu de données, un plus grand nombre d'électeurs l'ont placé en tête, alors il sera encore désigné vainqueur. La seule solution à ce problème est la **règle majoritaire**. Cela permet de justifier ce que personne n'ose contester, à savoir que si un candidat A préféré à un candidat B par 11 électeurs sur 20 est désigné vainqueur, alors si 12 électeurs sur ces mêmes 20 électeurs se mettent à le préférer à B, on continuera à choisir collectivement A. Ce résultat est un élément théorique justifiant la grande importance de la règle majoritaire dans un certain nombre de procédures de vote et il est aussi un oiseau de mauvais augure : si dans le cas de seulement deux candidats, il n'y a qu'une seule fonction solution du problème avec des conditions raisonnables, on conçoit que cela va être difficile lorsqu'il y aura plus de trois candidats !
La condition d'*indépendance des états non pertinents* est une condition utile permettant de montrer les difficultés liées aux modes de scrutin. Cette condition, héritée des paradoxes de Condorcet et de Borda demande à ce que le classement relatif entre deux candidats ne doit dépendre que du duel entre ces deux candidats.
Un autre résultat important de ce modèle est le théorème de Hansson qui, sous les mêmes hypothèses que celui de May, pour plus de trois candidats et avec la condition d'indépendance des états non pertinents, affirme qu'il n'existe qu'une seule fonction de choix collectif, c'est l'indifférence collective : tous les candidats sont classés ex-æquo par la fonction de choix !
Ce résultat préfigure le théorème le plus connu de ce champ : le théorème d'Arrow qui énonce que lorsqu'il y a plus de trois candidats, il n'existe aucune fonction de choix collectif vérifiant les conditions de *Liberté individuelle, anonymat, unanimité* et *indépendance des états non pertinents.* En d'autres termes, ce théorème annonce que l'on ne pourra pas réparer les paradoxes de Condorcet et de Borda.

Le rôle social des mathématiques

La perspective de Condorcet sur l'éducation visait à ancrer l'idéal démocratique dans une augmentation des Lumières. Le théorème du jury (Condorcet, 1785) en était une forme de justification. Mais comme l'énonce Condorcet dans ses cinq mémoires sur l'instruction, cette augmentation des Lumières nécessite une élémentarisation du savoir. Il ne s'agit pas que l'ensemble de la population devienne aussi éclairée que les savants, mais que la distance la séparant du savant se réduise. Cette question d'*élémentarisation,* n'étant pas univoque, est prise ici dans sons sens de *simplicité*, en ce qu'elle permet de désigner ce qui est essentiel, irréductible dans la compréhension d'une totalité complexe et difficile. Cela a ainsi justifié l'apprentissage de la lecture, de l'écriture et des mathématiques pour tous. Les mathématiques étant par nature une façon de communiquer sur le monde, ce rôle social demeure. Si son usage

dans les sciences a été d'une redoutable efficacité, il ne faudrait pas négliger son importance pour éclairer le citoyen. Ce que nous défendons dans cet article est que son rôle dépasse le champ strict des sciences physiques. Il s'applique aussi dans le champ social donnant une autre dimension à cette perspective sociale de l'enseignement des mathématiques pour tous. L'exemple de la compréhension des modes de scrutin en est un pour lequel Charles Ludwig Dodgson, alias Lewis Caroll avait déjà formulé à la fin du XIXe siècle : « *Les élections devant refléter de préférence le vœu de la majorité et non celui des plus habiles au jeu électoral, il me paraît souhaitable que tous maîtrisent les règles de ce jeu » (Dodgson, 1876, pp.232-233).*
Cette citation peut être mise en regard de la formule de Dominique Reynié : « *La question de savoir comment extraire un résultat conforme « au véritable vœu de la pluralité » fera l'objet de débats abondants, atteignant un niveau de formalisation finalement accessible aux seuls mathématiciens »* (Reynié, 2001). On perçoit dans ces deux citations la différence d'objectifs sur les Lumières et sur le rôle des mathématiques. Si la formalisation devient finalement accessible aux seuls mathématiciens, cela devient un aveu d'échec de l'élémentarisation du savoir ou une absence d'élémentarisation.
Les mathématiques sont un outil du discours pour décrire le monde réel. Si elles doivent participer à la construction de l'esprit critique et à la pensée autonome, cet enseignement montre le potentiel de son application explicite dans le champ social.

Conclusion

La philosophie a depuis longtemps interrogé la question de la démocratie et de la république. Il faut entendre que ces rapports sont liés à la question de la rationalité. L'usage des mathématiques dans ce qu'elles permettent d'explicitation de cette rationalité est un levier important des apprentissages et de questionnement de la citoyenneté. Elles participent ainsi aux capacités de débat, d'argumentation et de jugement qui sont les fondements des questions de liberté, d'égalité et de justice dans une démocratie. Ces capacités sont au cœur de la philosophie de Condorcet dans son projet d'instruction rendant possible la démocratie en libérant l'individu d'un esclavagisme potentiel.
Cet enseignement défend l'idée que la décision collective est d'une importance telle dans la vie démocratique d'un pays qu'on ne doit pas ignorer qu'elle nécessite un véritable travail de modélisation. L'enseignement des mathématiques utiles pour cette modélisation permet d'ouvrir des perspectives de compréhension de l'usage des votes. L'élémentarisation de ce savoir est possible et permet de travailler ou retravailler des mathématiques peu ou plus enseignées.

Références Bibliographiques

Arrow K.J. (1951) Social choice and individual values, volume 12. USA : Yale university press, 2012.

Balinski M. (2004) Le suffrage universel inachevé. Paris : Belin.

Bentham J. (1789) Introduction aux principes de la morale et de la législation. Paris : Vrin, 2011.

Bkouche R. (2006) La géométrie entre mathématiques et sciences physiques. In M. Kourkoulos, G. Troulis, et C. Tzanakis, éditeurs, *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics,* volume 2.

Chevallard Y. (2001) Les mathématiques et le monde : dépasser «l'horreur instrumentale». *Quadrature 41*, 25–40.

Condorcet J. A. (1793). Tableau général de la science qui a pour objet l'application du calcul aux sciences politiques et morales. *Journal d'instruction sociale*, *22*.

Condorcet, J.A. (1785) Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Rééd. (2014) UK : Cambridge University Press, 2014.

Cournot A.A. (1838) Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Paris : Hachette. Rééd. (2015) Paris : BnF collection ebooks.

d'Alembert, J. L. R., & Diderot, D. (1751). Encyclopédie. *Bd. I.*

de Borda J. C. (1781). Mémoire sur les élections au scrutin, Histoire de l'Académie Royale des Sciences. *Paris, France*.

Dodgson C. (1876). A method of taking votes on more than two issues. In Black, D., Newing, R. A., McLean, I., McMillan, A., & Monroe, B. L. (1958) *The theory of committees and elections.*

Feldman J. (2005) Condorcet et la mathématique sociale. enthousiasmes et bémols. *Mathématiques et sciences humaines. Mathematics and social sciences*, (172).

Guilbaud G. T. (2012). Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation. *Revue économique*, *63*(4), 659-720.

Guilbaud, G. T. (2002).La mathématique et le social. Entretien avec Georges Th. Guilbaud In *Gérer et comprendre*, n°67, mars 2002.

Lévi-Strauss C. (1956) Les mathématiques de l'homme. *Esprit (1940-)*, *(243 (10)),*525–538.

May, K. O. (1952). A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 680-684.

Reynié P. (2001) Le principe de « majorité ». Emergence, triomphe et remise en cause. In Perrineau, P., Reynié, D. (2001). *Dictionnaire du vote.* Paris : PUF

Rousseau, J. J. (1766). *Contrat social: ou principles du droit politique*.

PROBABILITES, STATISTIQUE ET CITOYENNETE : INSCRIRE LE DEVELOPPEMENT DU JUGEMENT CRITIQUE DU FUTUR CITOYEN DANS LE CADRE DES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Philippe **DUTARTE**

IA-IPR de mathématiques

Académie de Créteil

philippe.dutarte@ac-creteil.fr

Résumé

Nous décrivons la demande institutionnelle des programmes de mathématiques du collège et des lycées en matière d'éducation du futur citoyen et son évolution ces dernières années. L'accent est notamment porté sur le développement du jugement critique, auquel l'enseignement des mathématiques doit participer et singulièrement celui des probabilités et de la statistique.

À l'appui de cet objectif nous prenons cinq illustrations particulièrement emblématiques, dans des situations expérimentées en classe.

– Peut-on croire un sondage ? Depuis la présidentielle française de 2002 jusqu'à celle des Etats-Unis en 2016, la fiabilité des sondages est interrogée mais ceux-ci demeurent incontournables.

– Cas de leucémies à Woburn : hasard ou pollution ? Un exemple de santé publique où la statistique joue le rôle de « lanceur d'alerte ».

– Une « preuve statistique » de discrimination : l'affaire Castaneda contre Partida où les probabilités s'invitent au tribunal.

– Coïncidences et pseudo-sciences : le cas de la « psychogénéalogie ». Des connaissances en probabilités et en algorithmique permettent de démasquer des impostures.

– Exploration de données massives : Python, avec sa bibliothèque Pandas, permet, dès la classe de seconde, le traitement de données assez massives. Il s'agit notamment, pour le futur citoyen, de pouvoir mieux comprendre le monde, comme celui d'*Airbnb*, ou d'assurer une vigilance active, comme pour l'analyse des « *Paradise Papers* ».

Mots clés

Statistique, Probabilités, Citoyenneté, Esprit critique, Sondage, Discrimination, Coïncidences, Pseudosciences, Big data, Python, Pandas.

1. LA DEMANDE INSTITUTIONNELLE ET SON EVOLUTION

La demande institutionnelle des programmes, dont ceux de mathématiques, pour une éducation du futur citoyen va croissant.
Parmi les programmes en vigueur à la rentrée 2017, ceux du lycée professionnel[1] sont particulièrement explicites. La première phrase des programmes de mathématiques, sciences physiques et chimiques est la suivante :

> « L'enseignement des mathématiques et des sciences physiques et chimiques concourt à la formation intellectuelle, professionnelle et citoyenne des élèves. »

Le domaine « statistique et probabilités » du programme contribue spécifiquement à cet objectif, notamment par son caractère interdisciplinaire. On lit ainsi dans le programme de la classe de seconde professionnelle :

> « Ce domaine [statistique et probabilités] constitue un enjeu essentiel de formation du citoyen. Il s'agit de fournir des outils pour comprendre le monde, décider et agir dans la vie quotidienne. (…). Leur enseignement facilite, souvent de façon privilégiée, les interactions entre diverses parties du programme de mathématiques (traitements numériques et graphiques) et les liaisons entre les enseignements de différentes disciplines. »

Le programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique[2] indique les finalités suivantes, au premier rang desquelles un objectif plutôt citoyen :

> « Le programme de mathématiques a pour fonction :
> – de conforter l'acquisition par chaque élève de la culture mathématique nécessaire à la vie en société et à la compréhension du monde ;
> – d'assurer et de consolider les bases de mathématiques nécessaires aux poursuites d'étude du lycée ;
> – d'aider l'élève à construire son parcours de formation. »

Au collège, le socle commun de connaissances, de compétences et de culture[3], s'inscrit dans le cadre de la loi d'orientation du 8 juillet 2013 qui, en son article 13, pose le principe du socle commun :

> « La scolarité obligatoire doit garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun de connaissances, de compétences et de culture, auquel contribue l'ensemble des enseignements dispensés au cours de la scolarité. Le socle doit permettre la poursuite d'études, la construction d'un avenir personnel et professionnel et préparer à l'exercice de la citoyenneté. Les éléments de ce socle commun et les modalités de son acquisition progressive sont fixés par décret, après avis du Conseil supérieur des programmes. »

L'article 4 précise :

> « (la formation scolaire) développe les connaissances, les compétences et la culture nécessaires à l'exercice de la citoyenneté dans la société contemporaine de l'information et de la communication. »

[1] BO spécial n° 2 du 19/02/2009.
[2] BO 30 du 23/07/2009.
[3] BO n°17 du 23/04/2015.

Le socle donne à la scolarité obligatoire l’objectif suivant :

> « la scolarité obligatoire poursuit un double objectif de formation et de socialisation. Elle donne aux élèves une culture commune, fondée sur les connaissances et compétences indispensables, qui leur permettra de s'épanouir personnellement, de développer leur sociabilité, de réussir la suite de leur parcours de formation, de s'insérer dans la société où ils vivront et de participer, comme citoyens, à son évolution. »

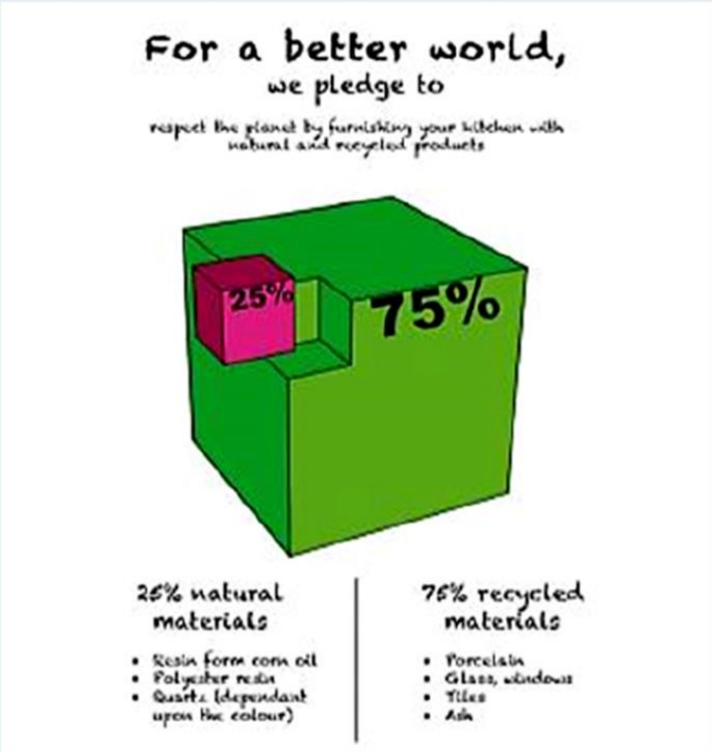
Le domaine 3 du socle est celui de « la formation de la personne et du citoyen ». Il y est affirmé que « *L'École a une responsabilité particulière dans la formation de l'élève en tant que personne et futur citoyen.* ». La prise en compte à parts égales des 8 composantes du socle dans l’évaluation du contrôle continu pour le DNB (Diplôme National du Brevet) fait que ce domaine 3 du socle représente 1/8 des points de contrôle continu pour l’examen, ce qui est assez considérable.
Le document d’accompagnement « Éléments pour l’appréciation du niveau de maîtrise satisfaisant en fin de cycle 4 », paru sur le site Eduscol, indique notamment comme « élément signifiant » du domaine 3 du socle, « *exercer son esprit critique, faire preuve de réflexion et de discernement* ».

> « En fin de cycle 4, l’élève qui a une maîtrise satisfaisante parvient notamment à utiliser les médias et l’information de manière raisonnée et responsable, à distinguer ce qui relève d’une croyance ou d’une opinion et ce qui constitue un savoir (ou un fait) scientifique. »

La figure 1 donne un exemple d’évaluation de l’esprit critique en mathématiques en fin de cycle 4.

ÉNONCÉ

La publicité ci-contre vise à exprimer que la proportion de produits naturels est égale à 25% de la production totale, et que celle de produits recyclés est égale à 75% de la production totale.



1. Quelle démarche a pu aboutir à cette représentation ?
2. Est-elle conforme à l’objectif visé ?

Figure 1 : exemple d'évaluation du domaine 3 du socle en mathématiques (Eduscol)

2. PEUT-ON CROIRE UN SONDAGE ?

Les sondages politiques constituent un domaine récurrent d'exercice de la culture statistique du citoyen et c'est un secteur que doit investir l'enseignement. L'un des « chocs » dans le domaine est l'exemple, déjà historique, du second tour de l'élection présidentielle française de 2002, dont on peut penser qu'il a joué un rôle dans l'évolution des programmes d'enseignement (voir Dutarte, 2011).

L'élection présidentielle française de 2002

Après la considération, en classe de seconde, des fluctuations des fréquences d'un caractère obtenues sur des échantillons aléatoires de taille *n*, on peut mettre en place la notion de « fourchette de sondage » et l'illustrer à propos de l'exemple suivant.
Lors du premier tour des élections présidentielles de 2002, le dernier sondage publié par l'institut B.V.A. , effectué sur 1 000 électeurs le vendredi 19/04/02, prévoyait :

Jacques Chirac	**19 %**
Lionel Jospin	**18 %**
Jean-Marie Le Pen	**14 %**

La surprise a été grande le dimanche 21/04/02 au vu des résultats, puisque Jean-Marie Le Pen figurait au second tour :

Jacques Chirac	**19,88 %**
Lionel Jospin	**16,18 %**
Jean-Marie Le Pen	**16,86 %**

Doit-on considérer que le dernier sondage B.V.A. était « faux » ?
Cet exemple a fait l'objet d'une analyse détaillée dans Dutarte et al. (2007).

L'élection présidentielle américaine de 2016

Plus près de nous, prenons l'exemple de la victoire, pour beaucoup inattendue, de Donald Trump à l'élection présidentielle américaine de 2016.
Un tweet malheureux du *Huffington Post* le 7 novembre 2016, veille de l'élection, annonçait, selon leur « modèle », la victoire d'Hillary Clinton avec une probabilité de 98,1 % (admirons la précision).

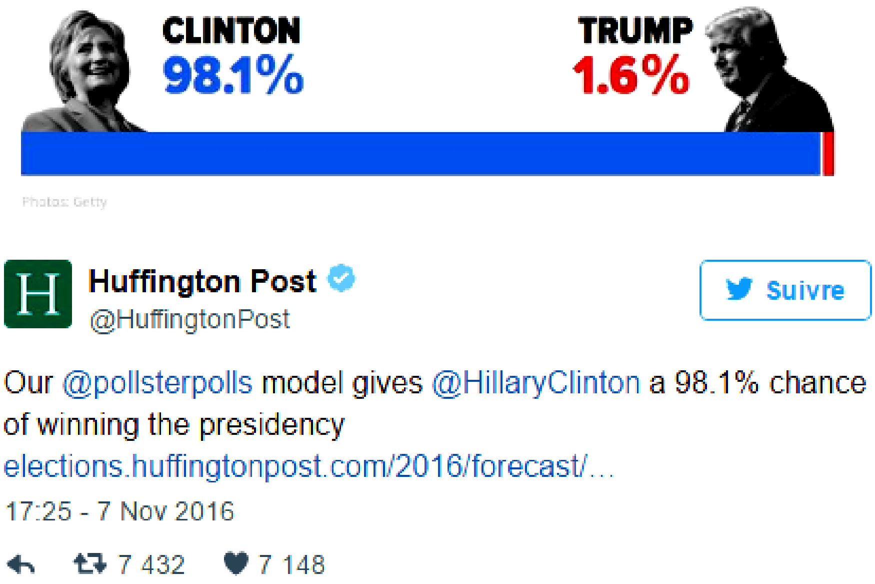


Figure 2 : tweet du Huffington Post annonçant une victoire écrasante d'Hillary Clinton

Une réponse d'un internaute dépité le 9 novembre : « Hé, les gars ! Peut-être que ce n'est pas un travail pour vous. »

Figure 3 : réponse au tweet de la fig. 2

La tendance des médias a été assez générale, même si certains ont été un peu plus prudents, comme ci-dessous le site FiveThirtyEight.com.

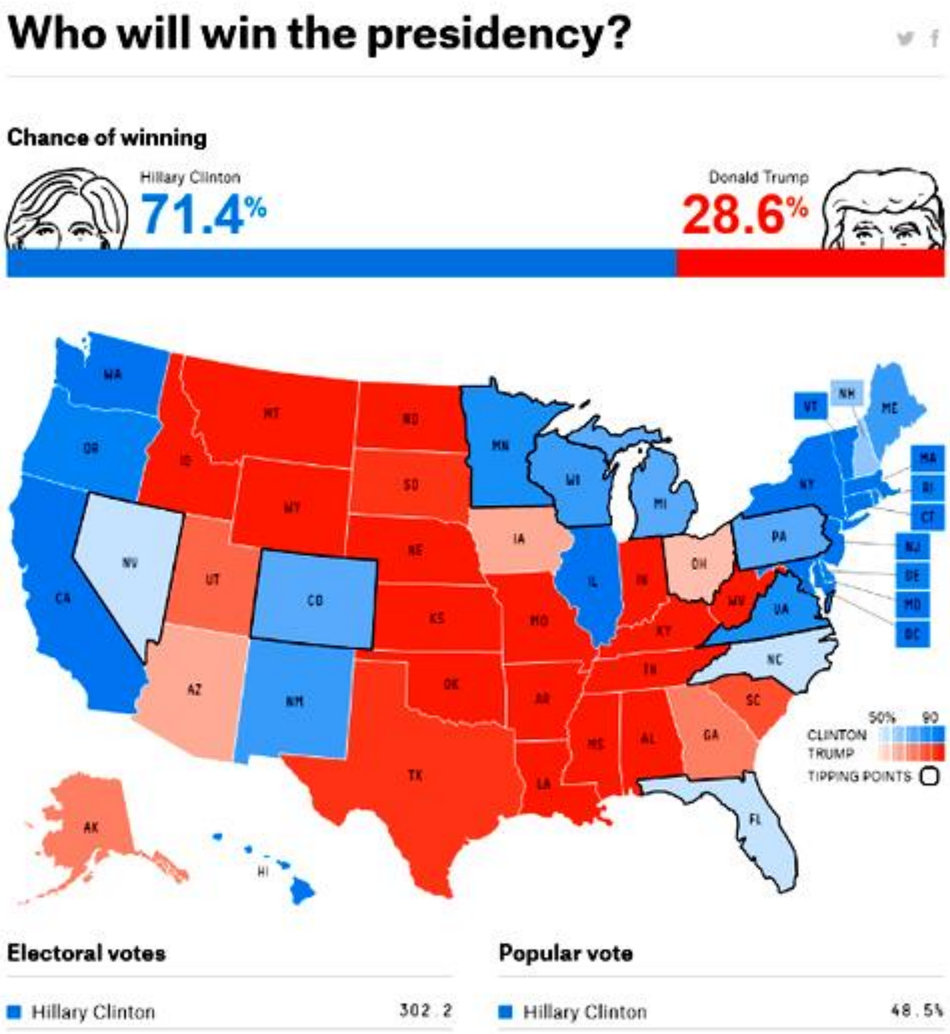


Figure 3 : prévisions de FiveThirtyEight.com

Si l’on prend cet exemple (figure 3) et que l’on le compare aux résultats du scrutin, on s’aperçoit que cela ne diffère que dans assez peu de cas.

La prise en compte des marges d’erreurs permettait de relativiser la vision des sondages comme le montre la figure 4.

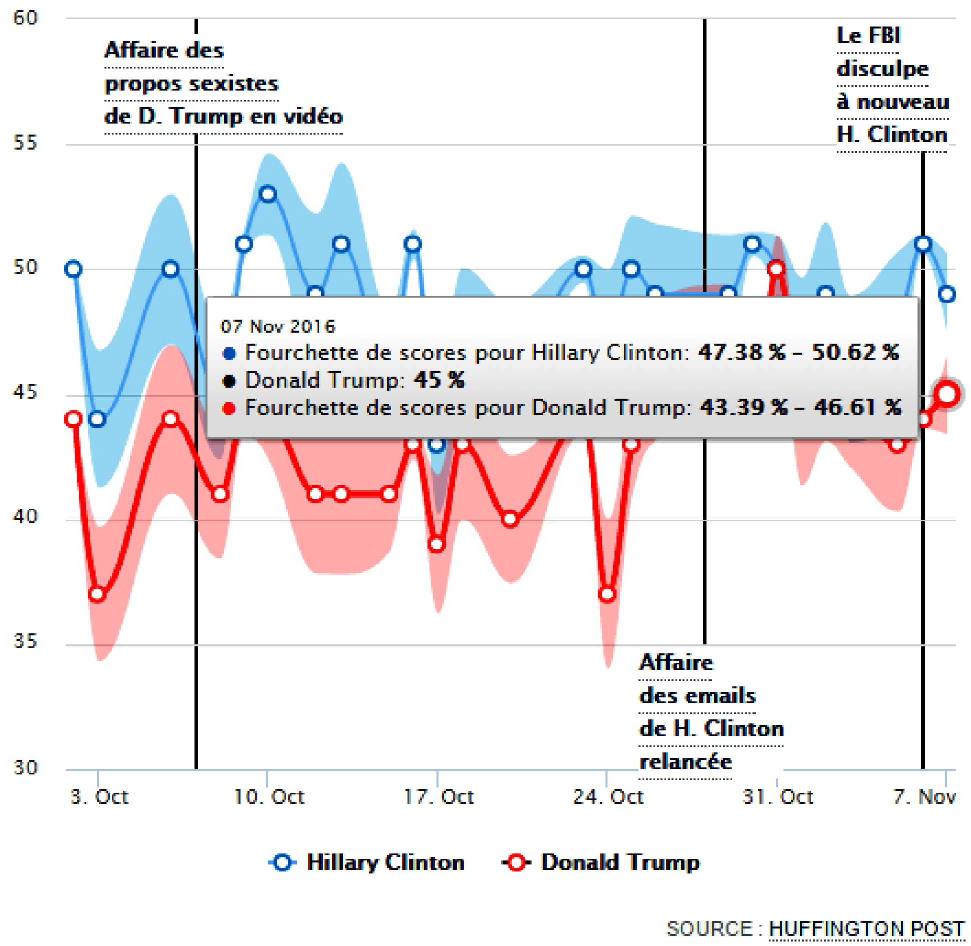


Figure 4 : fourchettes de sondage du 7/11/16 source Le Monde

Sur le nombre de votes, les sondages ont peu failli puisqu'Hillary Clinton a obtenu la majorité des suffrages. La difficulté principale de l'estimation tient au système électoral américain et aux fameux « swing states » (états-bascules) dont le basculement d'un côté ou de l'autre peut modifier, par le jeu des grands électeurs, le résultat de l'élection. Pour cette petite dizaine d'états, les sondages ont été assez nombreux et montraient bien une tendance très serrée la dernière semaine. On peut par exemple consulter les résultats des sondages, début novembre 2016, de quatre de ces états-bascules : la Caroline du Nord, la Floride, la Pennsylvanie et le Wisconsin (source : https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Liste_de_sondages_sur_l'%C3%A9lection_pr%C3%A9sidentielle_am%C3%A9ricaine_de_2016).

Les sondages de la dizaine d'états-bascules de 2016 montrent que les deux candidats étaient très proches lors de la dernière semaine, avec quasiment une chance sur deux, pour chacun, de l'emporter. On a pu tenir le raisonnement selon lequel il était hautement improbable qu'un candidat remporte l'ensemble des états-bascules puisque $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0{,}001$. Un tel raisonnement pourrait expliquer les modèles prévoyant la victoire d'Hillary Clinton avec une très forte probabilité. C'était supposer qu'il y a indépendance de ces 10 événements, ce qui n'est bien sûr pas le cas.

Au Canada, les sondages sont publiés en mentionnant leur « marge d'erreur » et en indiquant que cette dernière ne vaut que 19 fois sur 20. Une façon assez pédagogique d'évoquer un niveau de confiance de 95 % dont on ferait bien de s'inspirer.

Le sondage, réalisé en collaboration avec iPolitics, a été effectué au téléphone et par Internet du 10 au 15 octobre 2014 auprès de 1671 Canadiens de 18 ans et plus. Sa marge d'erreur est de plus ou moins 2,4 points de pourcentage, 19 fois sur 20. .

Figure 5 : mentions lors d'un sondage au Canada

Dès la classe de Seconde, voire en Troisième, on peut simuler les fourchettes de sondage avec un tableur. En Terminale, on peut indiquer que la marge d'erreur est voisine de celle donnée par la formule $1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}$.

3. CAS DE LEUCEMIES A WOBURN : HASARD OU POLLUTION ?

La santé et l'environnement sont des domaines essentiels de la citoyenneté et l'exemple suivant, tiré de faits réels, a été expérimenté de nombreuses fois en classe de Seconde, en utilisant la simulation sur tableur (voir par exemple Dutarte et al., 2007).

Woburn est une petite ville industrielle du Massachusetts, au Nord-Est des Etats-Unis. Du milieu à la fin des années 1970, la communauté locale s'émeut d'un grand nombre de leucémies infantiles survenant dans certains quartiers de la ville. Les familles se lancent alors dans l'exploration des causes et constatent la présence de décharges et de friches industrielles ainsi que l'existence de polluants. Dans un premier temps, les experts gouvernementaux concluent qu'il n'y a rien d'étrange. Mais les familles s'obstinent et saisissent leurs propres experts.

Une étude statistique montre qu'il se passe sans doute quelque chose « d'étrange ».

Le tableau suivant résume les données statistiques concernant les enfants de Woburn de moins de 15 ans, pour la période 1969-1979 (Source : *Massachusetts Department of Public Health* et *Harvard University*).

Enfants entre 0 et 14 ans	Population de Woburn selon le recencement de 1970 n	Nombre de cas de leucémie infantile observés à Woburn entre 1969 et 1979	Fréquence des leucémies à Woburn f	Fréquence des leucémies aux Etats-Unis p
Garçons	5 969	9	0,001 51	0,000 52
Filles	5 779	3	0,000 52	0,000 38
Total	11 748	12	0,001 02	0,000 45

Compte-tenu de ces données, le hasard seul peut-il raisonnablement expliquer les fréquences observées à Woburn, considérées comme résultant d'un échantillon prélevé dans la population américaine ?

4. Une « preuve statistique » de discrimination : l'affaire Castaneda contre Partida

L'exemple suivant a été proposé dans Dutarte et al. (2007) et se situe dans le contexte de la discrimination raciale aux Etats-Unis, auquel les élèves sont particulièrement sensibles et qui constitue un objet important d'éducation à la citoyenneté. L'activité est ici présentée sous une forme assez « ouverte » d'analyse d'un texte juridique au niveau de la Terminale, mais peut être abordée, notamment par simulation, dès la classe de Troisième.

En 1976 au Texas, un accusé d'origine mexicaine conteste le jugement du tribunal au motif que la désignation des jurés est discriminatoire envers les Américains d'origine mexicaine. On analyse ici les arguments statistiques et probabilistes qui apparaissent dans l'attendu de la Cour Suprême des États-Unis.

> Attendu de la Cour Suprême des Etats-Unis (affaire Castaneda contre Partida)[4] :
> « Si les jurés étaient tirés au hasard dans l'ensemble de la population, le nombre d'américains mexicains dans l'échantillon pourrait alors être modélisé par une **distribution binomiale**… Etant donné que **79,1 %** de la population est mexico-américaine, le nombre attendu d'américains mexicains parmi les **870** personnes convoquées en tant que grands jurés pendant la période de 11 ans est approximativement **688**. Le nombre observé est **339**. Bien sûr, dans n'importe quel tirage considéré, une certaine fluctuation par rapport au nombre attendu est prévisible. Le point essentiel cependant, est que le modèle statistique montre que les résultats d'un tirage au sort tombent vraisemblablement dans le voisinage de la valeur attendue… La mesure des fluctuations prévues par rapport à la valeur attendue est l'**écart type**, défini pour la distribution binomiale comme la racine carrée de la taille de l'échantillon (ici 870) multiplié par la probabilité de sélectionner un américain mexicain (ici 0,791) et par la probabilité de sélectionner un non américain mexicain (ici 0,209)… Ainsi, dans ce cas, l'écart type est approximativement de **12**. En règle générale pour de si grands échantillons, si la différence entre la valeur attendue et le nombre observé est plus grand que deux ou trois écarts types, alors l'hypothèse que le tirage du jury était au hasard serait suspecte à un spécialiste des sciences humaines. Les données sur 11 années reflètent ici une différence d'environ **29** écarts types. Un calcul détaillé révèle qu'un éloignement aussi important de la valeur attendue se produirait avec moins d'**une chance sur 10^{140}**. »

La constitution des jurys est-elle faite au hasard ?

Signalons qu'au-delà des arguments mathématiques, peut être abordée la question du mode de constitution des jurys aux États-Unis.

5. Coïncidences et pseudo-sciences :

Les mathématiques, et singulièrement la statistique et les probabilités, constituent des atouts décisifs pour exercer sa rationalité, notamment pour se prémunir des pseudo-sciences. L'exemple suivant, inspiré d'un ouvrage de Jean-Paul Delahaye et Nicolas Gauvrit, a été présenté lors du séminaire « Sciences et jugement critique » de novembre 2017 de l'académie

[4] Source : *Prove It with Figures (Statistics for Social Science and Behavioural Sciences)* - Hans Zeisel, D. H. et D. Kaye - Springer 2006.

de Créteil (documentation sur le site de l'académie de Créteil) et travaillé dans le cadre du projet de recherche « Les lois du hasard » d'Alain Bernard et Caroline Ehrhardt (Bernard & Ehrhardt, 2017). Voici une présentation possible de cette activité en classe de Seconde, ainsi que des éléments de réponse.

> « Dans les années 1970, la psychologue Anne Ancelin Schützenberger développa une théorie d'inspiration psychanalytique nommée «psychogénéalogie». Selon cette théorie, un inconscient familial travaille si bien dans l'ombre qu'on peut contracter des maladies ou des troubles mentaux à certaines dates parce qu'un de nos ancêtres aurait lui aussi vécu quelque chose de remarquable à cette date. Disons tout de suite que l'idée présentée comme cela n'est pas absurde : on peut imaginer que quelqu'un commence une dépression le jour anniversaire de la mort de ses parents, par exemple. En revanche dans la théorie de Schützenberger, il peut s'agir de cas bien plus mystérieux. Ainsi, elle imagine qu'on peut déclarer un cancer le jour anniversaire de l'accident d'un grand-oncle, et cela même si nous ne savons pas qu'un tel accident a eu lieu.
> L'argument massue de la psychogénéalogie est nommé le « syndrome des anniversaires » : Schützenberger a en effet noté que, si l'on cherche bien, on finit souvent par retrouver des coïncidences de dates, bref des anniversaires communs entre événements.
> La thérapie psychogénéalogique consiste à rechercher au moyen d'une enquête généalogique les dates importantes concernant nos ancêtres (naissance, majorité, premier amour, maladie, accident, mort, etc.), en remontant aussi loin qu'il le faut pour qu'une de ces dates se trouve être celle d'un événement important pour nous (accident, début d'une dépression, déclaration d'une maladie, etc.). Le nombre de dates recueillies lors de l'enquête dépasse bien souvent la cinquantaine et parfois la centaine, ce qui laisse planer un doute sur la nature improbable des coïncidences. […]
> La question qu'on doit se poser est celle-ci : si nous prenons deux listes de dates (disons n et m dates), quelle est la probabilité qu'une date de la première liste soit la même qu'une date de la seconde ? Avec une centaine de dates concernant les ancêtres, et une dizaine nous concernant, la probabilité de collision est alors de 0,96 environ. Que deux dates coïncident est en réalité beaucoup moins étonnant que l'événement inverse. »
>
> Jean-Paul Delahaye, Nicolas Gauvrit – *Comme par hasard !* book-e-book 2012.

1. Implanter les fonctions suivantes sur Python.

```
import random
import matplotlib.pyplot as plt

def liste_dates(n) :
    # Liste aleatoire de n dates sans remise
    dates = random.sample(range(1,366),n)
    return dates
def coincidence(n, m) :
    # Recherche d'au moins une coincidence entre deux listes de n dates et m dates
    dates_moi = liste_dates(n)
    print(dates_moi)
    dates_ancetres = liste_dates(m)
    print(dates_ancetres)
    double = 0
```

```
for d in dates_moi :
    if d in dates_ancetres :
        print(d)
        double = 1
return double
```

2. Effectuer quelques expériences de recherche de coïncidences entre deux listes aléatoires de 10 dates et de 100 dates, en imprimant les listes.
Qu'observe-t-on ?
3. Représenter l'évolution de la fréquence de l'événement E : « il existe au moins une coïncidence entre une liste aléatoire de 10 dates et une liste aléatoire de 100 dates » lorsque l'on répète l'expérience du choix aléatoire des listes de dates.
Vérifie-t-on l'affirmation du texte ?
4. Combien de fois suffit-il de répéter l'expérience pour obtenir une estimation de la probabilité de E à 10^{-2} près au seuil de 95 % ? (On admet que compte-tenu de la fluctuation d'échantillonnage, la fréquence obtenue après la répétition de n expériences fournit dans environ 95 % des cas une estimation de la probabilité de E à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ près.)

Nous fournissons ici des éléments de réponse montrant l'intérêt de cette activité dont l'originalité est qu'elle permet de faire intervenir des éléments d'algorithmique et de programmation en situation de développement de l'esprit critique.

2. Exemple d'exécution de l'expérience :

```
>>> coincidence(10, 100)
[309, 304, 8, 82, 4, 180, 97, 157, 217, 60]
[302, 207, 216, 307, 322, 342, 85, 245, 315, 231, 98, 79, 110
, 349, 318, 21, 3, 240, 287, 226, 41, 25, 182, 169, 305, 185,
153, 212, 177, 144, 183, 148, 159, 102, 71, 155, 10, 74, 95,
101, 156, 152, 272, 108, 129, 301, 97, 286, 244, 336, 361, 35
2, 180, 267, 221, 277, 4, 350, 242, 354, 170, 117, 264, 323,
14, 8, 55, 265, 122, 70, 67, 288, 294, 248, 88, 33, 18, 198,
124, 171, 306, 316, 268, 186, 2, 320, 58, 76, 356, 247, 321,
201, 127, 42, 49, 131, 120, 218, 78, 69]
8
4
180
97
1
```

Figure 6 : exemple d'exécution de la fonction coincidence

En renouvelant l'expérience on constate que la coïncidence est extrêmement fréquente.
3. On peut produire le graphique suivant pour 10 000 répétitions de l'expérience. Cela confirme bien une estimation de la probabilité de l'événement E à 0,96, comme annoncé dans le texte.

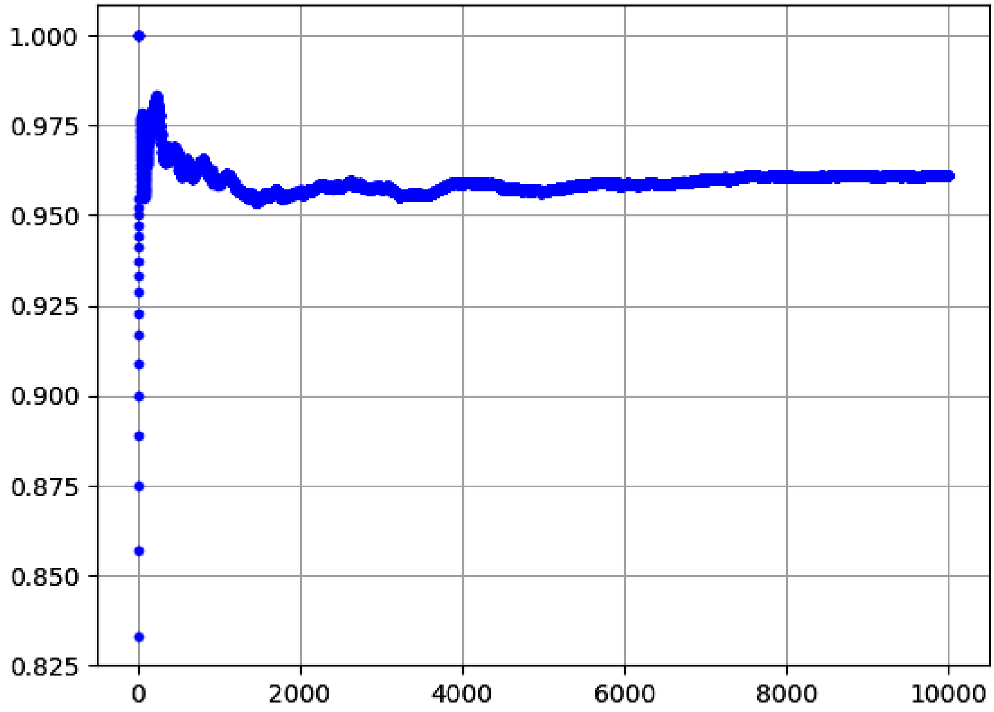


Figure 7 : stabilisation de la fréquence après 10 000 exécutions de l'expérience

4. Il suffit de répéter n fois avec $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 10^{-2}$ c'est-à-dire $n \geq 10\,000$.

6. EXPLORATION DE DONNEES MASSIVES : AIRBNB ET PARADISE PAPERS

Chaque jour, nous générons 2,5 milliards de milliards d'octets de données et plus de 90 % des données existantes ont été crées ces deux dernières années. L'exploitation de ces « big data », dont le potentiel économique est gigantesque, nécessite des techniques statistiques, mathématiques et informatiques en pleine évolution constituant un pôle important de recherche lié à la notion d'intelligence artificielle. Cependant plusieurs types de risques d'atteinte à la vie privée ou aux droits fondamentaux sont cités, notamment après les révélations d'Edward Snowden en 2013. Ainsi, environ 80 % des données personnelles mondiales seraient détenues par les GAFA (Google, Apple, Facebook, Amazon). On comprend le sentiment de défiance que peuvent provoquer ces technologies à l'égard des algorithmes et de l'intelligence artificielle comme en témoignent ces affiches photographiées à Londres fin 2017 (figure 8).

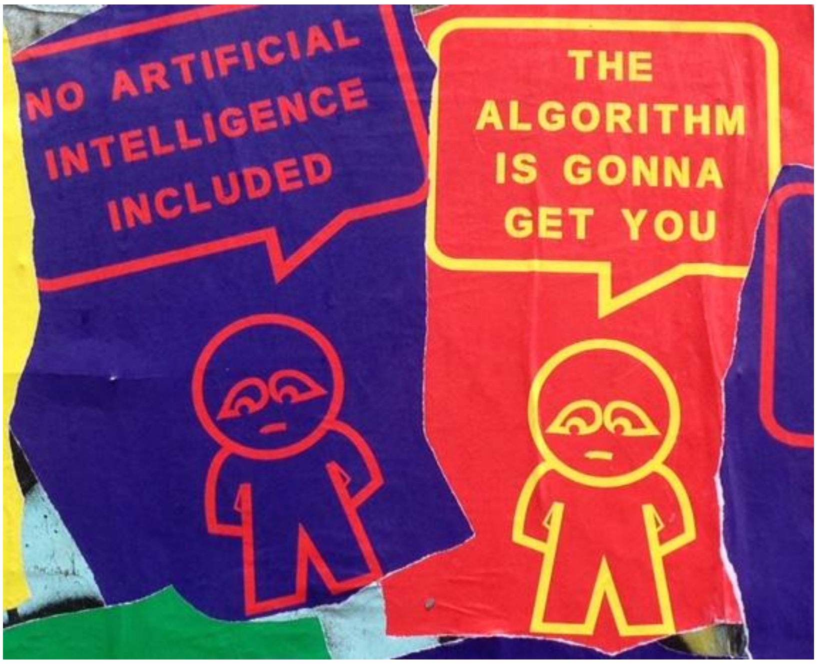


Figure 8 : dans les rues de Londres

Une attitude plus constructive consiste plutôt à renforcer l'éducation des futurs citoyens en matière d'analyse des données massives, permettant ainsi de mieux voir et appréhender le monde dans lequel on vit, comme dans l'exemple des locations Airbnb, voire de participer au contrôle de la vie citoyenne, comme dans le cas de l'analyse des « Paradise papers ». Un aperçu d'exploitation en classe de lycée de ces deux exemples est donné ici à l'aide du module Pandas de Python.

Airbnb

Le site insideairbnb.com[5] pose la question suivante : « Comment Airbnb est-il réellement utilisé et affecte-t-il les quartiers de votre ville ? ». Pour répondre à cette question, il est possible d'y télécharger les données Airbnb de nombreuses villes dans le monde dont Paris. On obtient pour Paris (avril 2017) un fichier csv de 56 450 lignes, correspondant chacune à une location, pour 12 variables étudiées, dont le prix, la disponibilité, le nombre d'avis et les coordonnées géographiques.
L'étude de la disponibilité des locations, en jours par an, montre par exemple que 64 % des locations sont disponibles plus de 120 jours par an.

[5] Ce site a été créé par Murray Cox, écrivain et informaticien indépendant se qualifiant de « data activiste » (« activiste des données »).

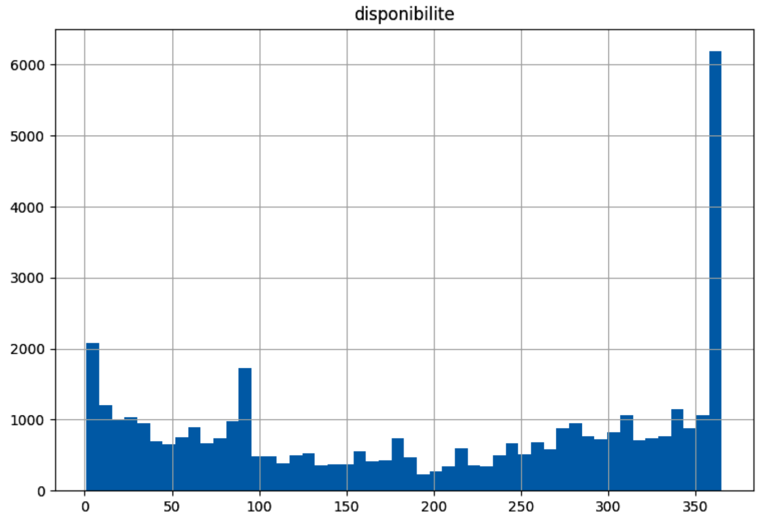


Figure 9 : disponibilité, en jours par an, des locations Airbnb de Paris (2017)

Une visualisation des données par le module Folium de Python (modèle « carte de chaleur ») permet d'illustrer la concentration des locations dans certains quartiers.

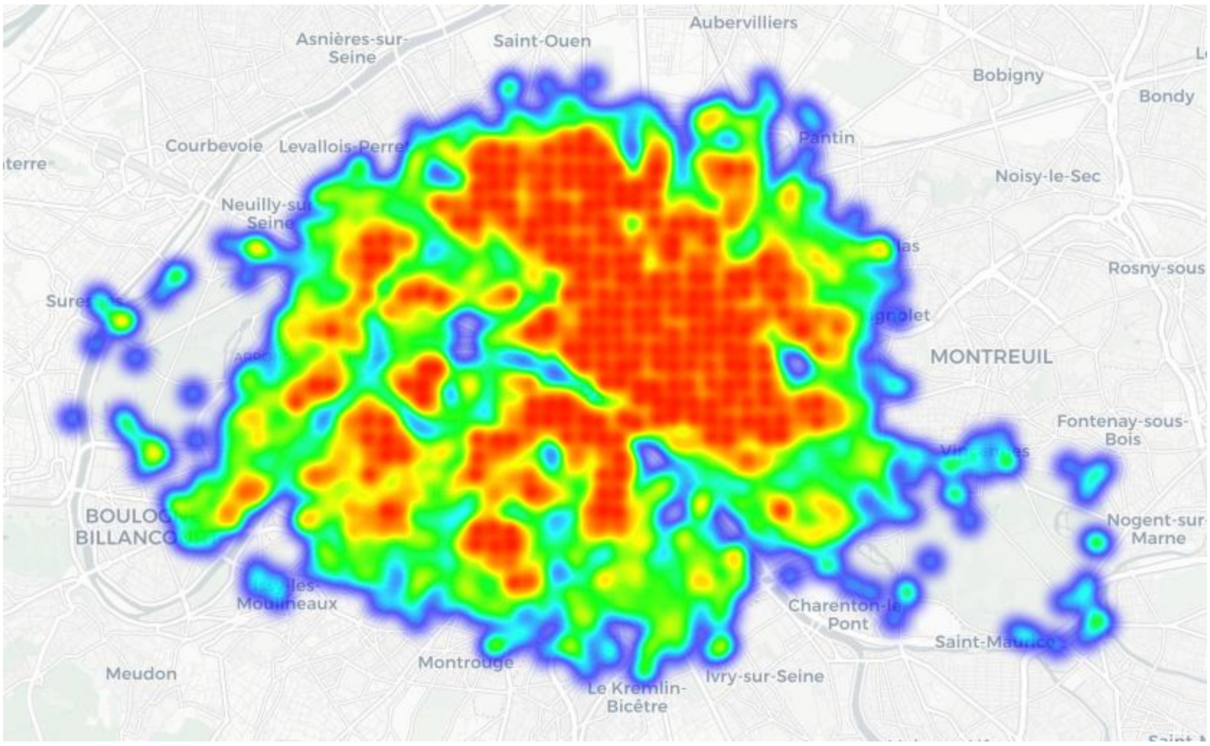


Figure 10 : concentration des locations Airbnb de Paris (2017)

Paradise Papers

Les données des « Paradise Papers », publiées par le Consortium international des journalistes d'investigation en novembre 2017, concernent des investissements « offshore » (i.e. un investissement de capital dans un pays fiscalement intéressant)[6]. On peut obtenir sur le site

[6] On peut à ce propos consulter les articles suivants du journal Le Monde : 05/11/2017 *Les « Paradise Papers » : nouvelles révélations sur les milliards cachés de l'évasion fiscale* ou 14/02/2018 *« Paradise Papers » : des dizaines de milliers de sociétés offshore rendues publiques dans la « Offshore Leaks Data Base ».*

kaggle.com[7] des fichiers csv correspondant à ces données. Nous avons exploré avec Python quatre fichiers nommés entity, officer, address et edges. Le fichier entity.csv, de dimension 24 957 × 18, correspond aux compagnies offshore jouant le rôle d'écran dans un paradis fiscal. On constate que, pour l'essentiel, les paradis fiscaux représentés dans les « Paradise Papers » sont les îles Caïmans et les Bermudes.

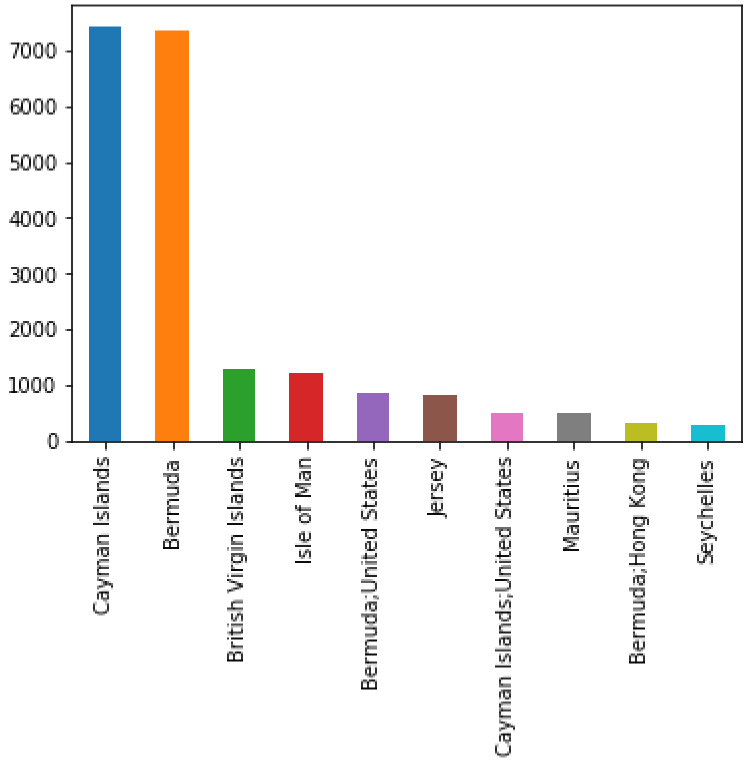


Figure 11 : répartition des paradis fiscaux des « Paradise papers »

Le fichier officer.csv, de dimension 77 012 × 18, correspond aux exécuteurs, c'est-à-dire aux entreprises ou particuliers donneurs d'ordre pour des « clients » souhaitant échapper au fisc de leur pays. À la ligne 1185 apparaît « The Duchy of Lancaster », le domaine privé de la reine d'Angleterre. La France apparaît en vingtième position des pays exécuteurs les plus cités.

[7] Site d'une start-up californienne organisant des compétitions en science des données.

```
>>> pays_executeurs[:20]
United States                    17303
United Kingdom                    4298
Hong Kong                         3262
China                             3050
Bermuda                           2955
Cayman Islands                    1925
Bermuda;United Kingdom            1362
Canada                            1226
China;Hong Kong                    981
Switzerland                        969
British Virgin Islands             919
Singapore                          789
Jersey                             651
Taiwan                             645
Australia                          640
Japan                              570
Isle of Man;United Kingdom         508
Ireland                            497
Isle of Man                        489
France                             422
Name: n.countries, dtype: int64
```

Figure 12 : principaux pays exécuteurs dans les Paradise papers

Le fichier address.csv, de dimension 59 228 × 18, donne la localisation des « clients », c'est-à-dire des commanditaires, ceux à qui profite la fraude. La France apparaît ici en dix-huitième position.

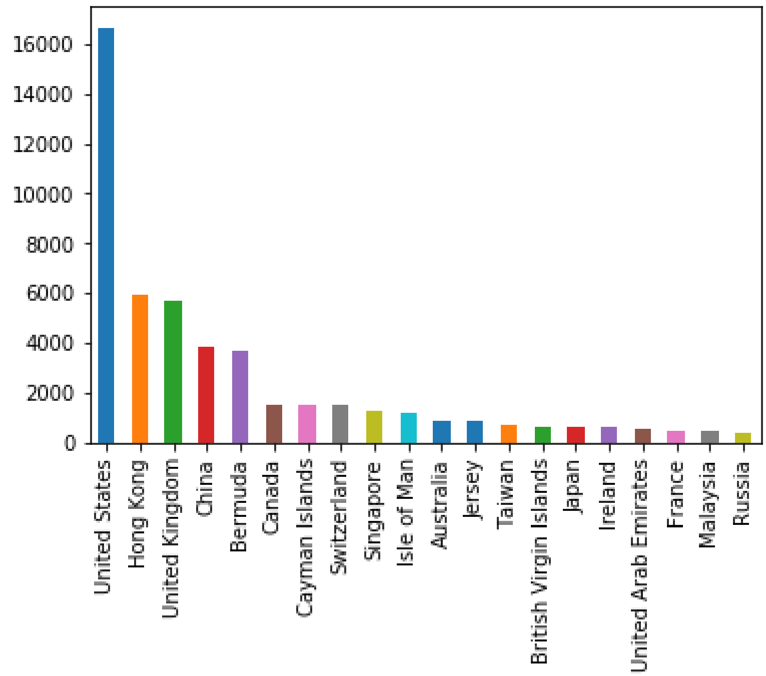


Figure 13 : principaux pays des clients des Paradise papers

On peut, en utilisant le module Folium, représenter les principaux pays impliqués par un cercle de rayon[8] proportionnel au nombre de fois qu'ils sont cités dans les trois fichiers des entités, des exécuteurs et des clients (figure 14).

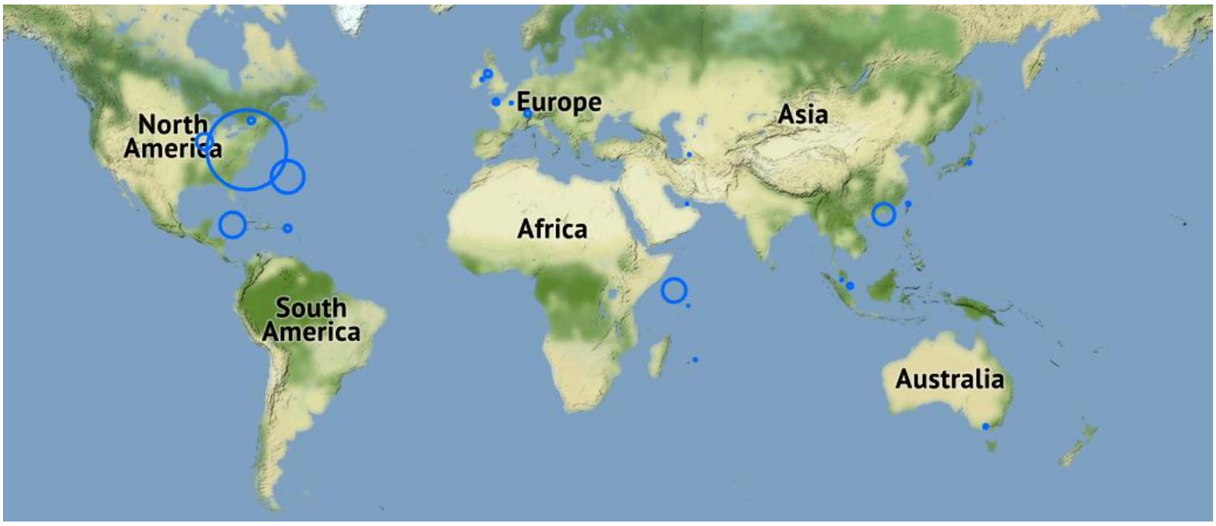


Figure 14 : localisation des principaux pays impliqués dans les Paradise Papers

Le fichier edges.csv, de dimension 364 456 × 7, fournit les liens existant entre les différents acteurs. Un algorithme peut alors permettre d'étudier certains réseaux et de les illustrer. Cet algorithme peut être élaboré avec les élèves de lycée avec plus ou moins d'autonomie selon le niveau de classe et de connaissances en programmation en langage Python.

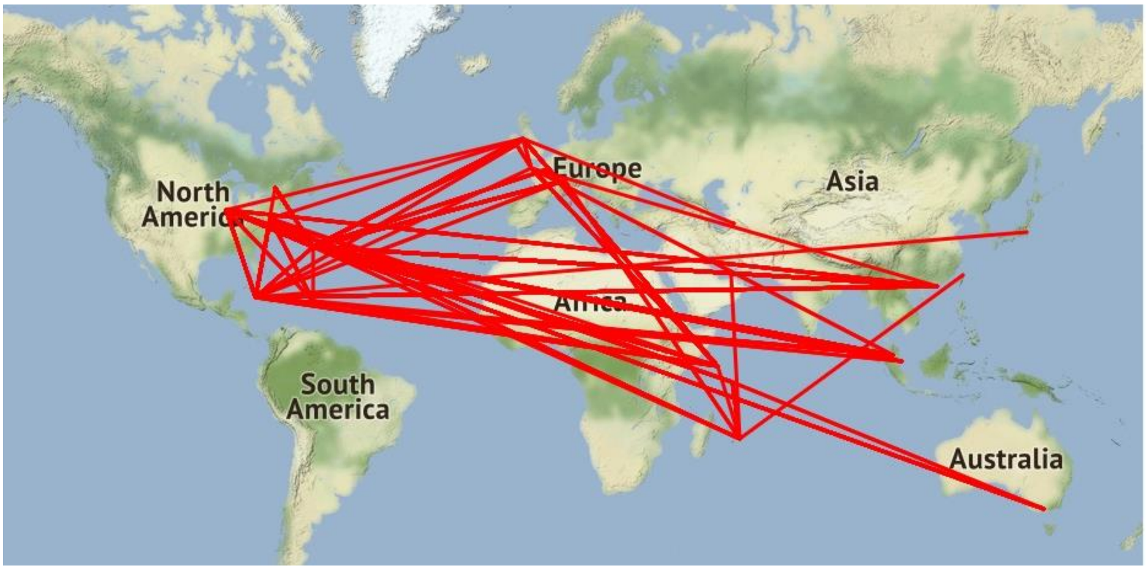


Figure 15 : représentation des principaux liens dans les Paradise papers

[8] Au risque d'une confusion : c'est plutôt l'aire du disque qui est perçue.

CONCLUSION

Les programmes de mathématiques font une part croissante à l'éducation du citoyen, notamment dans le cadre du socle commun. Les exemples développés montrent la place de premier ordre qu'occupe dans ce cadre l'enseignement de la statistique, des probabilités, de l'algorithmique et de la programmation, enseignement qui, lui même, a pris de l'importance dans les programmes de mathématiques. Le développement des « big data » (« mégadonnées »), du rôle de l'algorithmique et de l'intelligence artificielle dans notre quotidien offre de nouvelles perspectives d'apprentissage pour « armer » le futur citoyen des connaissances nécessaires à son jugement critique et pour qu'il puisse jouer un rôle actif et éclairé dans la société.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERHOUET, J., DUTARTE, P., & GLEBA, F. (2017). Statistique, probabilités et jugement critique. In *Actes du séminaire académique Sciences et jugement critique,* Académie de Créteil 2017, maths.ac-creteil.fr.

BERNARD, A., & EHRHARDT, C. (2017). *Les lois du hasard : enjeux mathématiques, historiques, citoyens*. In T. Barrier & C. Chambris (Eds.), *Actes du séminaire national de l'ARDM de l'année 2017*. Paris : IREM de Paris.

DELAHAYE, J.-P., & GAUVRIT, N. (2012). *Comme par hasard !* Book-e-book.com.

DUTARTE, P., DELZONGLE, F., MAATI, H., CARDINAL, J.-P., COUPRY, A., & DHERISSARD, S. (2007). *Statistique et citoyenneté, le citoyen face au chiffre*. Brochure 135 de l'IREM de Paris Nord.

DUTARTE, P. (2011). Évolution de la pratique statistique dans l'enseignement du second degré en France. *Statistique et Enseignement, 2*(1), 31-42.

ZEISEL, H., & KAYE, D. (2006). *Prove It with Figures Empirical Methods in Law and Litigation.* Springer.

DEMOCRATIE ET DIDACTIQUE

Corine **CASTELA**

LDAR-Université de Rouen-Normandie, France

Corine.Castela@univ-rouen.fr

Résumé

Ce texte se propose de montrer que les propositions qui se développent pour dépasser l'état actuel de la démocratie électorale, démocratie intermittente basée sur la délégation de pouvoir, introduisent des genres de tâches nouveaux dont il s'agit de diffuser l'exercice parmi tous les citoyens. Face à un tel défi, une société démocratique ne peut se contenter d'espérer la présence chez certains de ses membres d'une compétence individuelle à traiter ces tâches, il lui faut 1. développer des praxéologies, 2. former ses citoyens à l'usage des techniques correspondantes. Les tâches en question sont avant tout des tâches d'étude, de textes ou de questions. Radicaliser la démocratie comme le dit D. Rousseau suppose donc de développer une didactique de l'étude. Le dispositif des conventions de citoyens est une contribution à ce besoin de développement de la société. Pour sa part, la recherche en didactique s'est déjà explicitement engagée dans cette direction grâce aux travaux initiés par Y. Chevallard dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique. Je rappellerai les éléments clés qui ont été développés autour des notions d'enquête et de parcours d'étude et de recherche, sans chercher à dresser un état des lieux des travaux expérimentaux réalisés, pour l'essentiel en didactique des mathématiques. On verra que le dispositif des conventions de citoyens peut tout à fait être interprété dans le cadre du modèle du processus d'enquête proposé par cette théorie.

Mots clés

Démocratie, citoyen, humanitude, convention de citoyens, théorie anthropologique du didactique, modèle herbartien de l'enquête.

INTRODUCTION

« Mathématiques et citoyenneté » tel est le thème du *colloquium* 2017. Les mathématiques, en vérité des mathématiques, fournissent au citoyen certains outils lui permettant de mieux occuper sa position dans un régime démocratique, elles peuvent même contribuer à l'analyse du régime en question, comme l'a montré N. Saby en abordant dans sa conférence les formes électorales du choix collectif. Mais de quel citoyen parle-t-on ? S'agit-il de celui qui, au niveau d'une commune, terrain sur lequel je possède une petite expérience, assiste aux réunions de quartiers pour formuler quelques demandes individuelles, souvent très ponctuelles (ah, les problèmes de voirie !) et ainsi permettre à l'équipe municipale de se faire une idée des attentes des habitants qu'elle se chargera ensuite de satisfaire… ou pas ? S'agit-il du citoyen consulté au début d'un projet dont il n'entendra plus parler jusqu'au moment où on lui en présentera la forme totalement finalisée, au point qu'on ne peut plus rien en changer ? S'agit-il de l'acteur d'une démocratie municipale où le terme « délibération » désigne non un

processus mais un texte très codifié, soumis au vote du conseil municipal, après qu'un « projet de délibération » tout aussi formel ait été présenté à une commission formée d'élus, qui ne délibère donc pas sur une question puisqu'elle n'a pas été associée à l'élaboration de ce projet, mais interroge les auteurs d'une réponse à cette question, déjà ficelée. Certes toutes les communes ne fonctionnent pas sur ce mode, mais la majorité au pouvoir dans celle que je connais est convaincue d'avoir des pratiques démocratiques et je ne lui fais pas le procès de jouer un double jeu. C'est que démocratie et citoyenneté sont des notions qui ne peuvent être prises comme allant de soi. C'est à les travailler que je veux consacrer ce texte, je n'y parlerai pas de mathématiques mais j'espère que la réflexion menée offrira un cadre élargi aux mathématiciens et didacticiens des mathématiques qui veulent prouver l'utilité citoyenne de leur discipline.
Un bref parcours étymologique m'aidera à éclairer ce qu'est ce peuple dont la démocratie proclame la souveraineté, une réflexion sur laquelle je ne m'étendrai pas et que les lecteurs devront prendre pour ce qu'elle est, c'est-à-dire le fruit d'un travail mené par quelqu'un qui est totalement néophyte dans le domaine. Néanmoins, je m'en suis sentie un peu mieux outillée pour penser des questions d'actualité comme celle du droit des peuples à disposer d'eux-mêmes mis en avant par les indépendantistes catalans ou corses, c'est pourquoi j'ai voulu partager cette réflexion. J'espère par ailleurs qu'elle rendra sensible la ligne de neutralité politique que j'ai tenté de suivre dans cet exposé, malgré mes engagements personnels[1].
Nous en viendrons ensuite à la présentation des réflexions sur la démocratie développées par P. Rosanvallon (2015) et D. Rousseau (2015) dont on peut dire qu'ils sont des spécialistes professionnels, par J. Testart conduit à s'y intéresser par ses interrogations sur l'éthique des sciences et enfin par Y. Chevallard qui, dans le cadre de ses recherches sur les phénomènes didactiques, travaille depuis 2007 à définir une figure du citoyen à l'ère d'Internet.
La troisième partie sera consacrée à de nouveaux dispositifs d'étude et de formation des citoyens, d'une part les conventions de citoyens présentées par J. Testart (2015) et formalisées par la Fondation Sciences citoyennes, d'autre part la pédagogie de l'enquête développée par la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD dans la suite) et expérimentée dans le cadre scolaire et universitaire, essentiellement pour l'enseignement des mathématiques.
Nous conclurons en envisageant les perspectives ouvertes aux recherches en didactique par un processus de radicalisation de la démocratie.

PRECISER LE SENS DONNE AU MOT 'PEUPLE' : LES RESSOURCES DE L'ETYMOLOGIE

Le mot 'Démocratie' est formé à partir des mots du grec ancien '*dêmos'*, peuple, et '*kratos'*, pouvoir, autorité ; la démocratie est un régime de souveraineté du peuple. Plus précisément, le *dêmos* est la fraction de la population autorisée à participer au gouvernement de la cité, l'ensemble des citoyens. Dans la Grèce antique, ce sont les hommes, de plus de 18 ans, libres, dont le père était déjà habitant de la même cité. 'Cité' et 'citoyen' se disent respectivement '*pólis*' et '*polítês*' dont dérive en français 'politique'. Dans la Rome antique qui connut également un régime démocratique, l'exact équivalent de *'dêmos'* est *'populus'*, '*pólis' et* '*polítês*' se disent respectivement '*civitas*' et '*civis*'. C'est donc le latin qui produit en français

[1] Mes engagements se démarquent nettement de ceux de P. Rosanvallon et D. Rousseau, tels qu'ils apparaissent clairement dans les notes 3 et 4.

‘peuple’, ‘cité’, ‘citoyen’ et ‘civique’, ainsi que ‘publique’ et ‘république’ puisque ‘*populus*’ donne naissance à ‘*publicus*’ qui désigne ce qui concerne le peuple, ce qui concerne l’état et à ‘*res publica*’ pour la chose publique, l’intérêt général et la république en tant que régime. Ces éléments sont figurés dans le schéma suivant qui montre donc les sources étymologiques des principaux termes que nous utiliserons dans la suite pour réfléchir sur la démocratie.

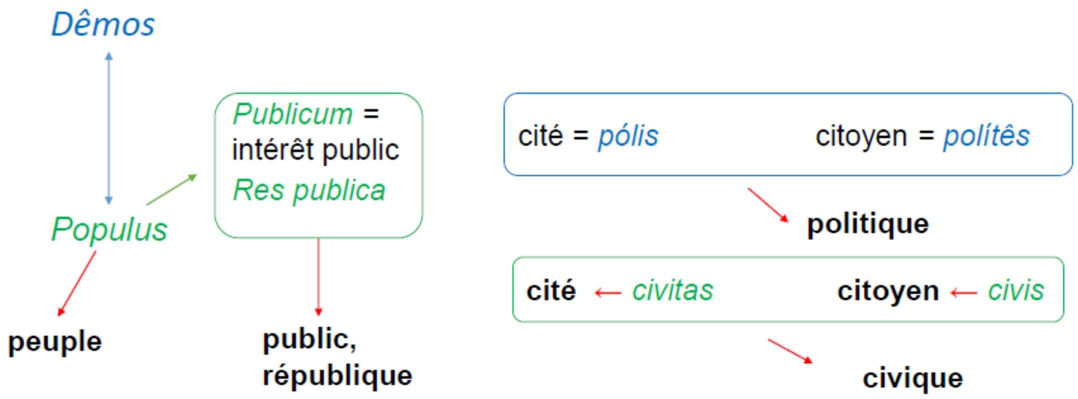


Figure 1. Du grec et du latin au français

Mais le grec ancien possède plusieurs termes qui se traduisent en français par le nom ‘peuple’. Outre ‘*dêmos*’ dont nous venons de parler, on trouve ‘*ethnos*’ et ‘*laos*’. Le premier désigne le peuple au sens de l’ethnie, le groupe humain qui se reconnaît dans un certain nombre de caractéristiques culturelles (langue, mode de vie…) et parfois physiques. Le second désigne l’ensemble d’une population sans distinction interne, sans sous-groupes ; ce terme vise l’égalité, la non-discrimination, et donc ce qui est commun à tous les membres d’une population qui vit sur un espace donné, par-delà leurs éventuelles différences ethniques. Ajoutons que le terme ‘*plethos*’ qui désigne la foule, la multitude, s’oppose aux trois précédents en ce qu’il n’est pas porteur d’une vision unitaire. Il a donné le terme qui en grec moderne désigne la population[2].

Conjointement à la souveraineté du Peuple, la démocratie repose sur un second principe, celui de l’égalité des citoyens, indépendamment de leur naissance, genre, fortune, religion, compétence, etc. Le Peuple dont il est question est donc un corps biface, à la fois *dêmos* et *laos*, ce que D. Rousseau (2015) formalise en parlant du peuple-corps politique et du peuple tout-un-chacun. Le premier, entité abstraite transcendant les citoyens qui la composent, détient théoriquement le pouvoir en démocratie, un pouvoir concrètement exercé par des citoyens, acteurs politiques porteurs de la volonté générale, mise au service de l’intérêt général. Le peuple tout-un-chacun est l’association des individus concrets, qui font corps dans la mesure où, par-delà leurs différences (c’est pourquoi je pense pouvoir parler ici de peuple laïc), ils se perçoivent semblables, particulièrement parce qu’ils sont dotés d’un ensemble de droits partagés, individuels et civiques. Ces droits, qui « confèrent à tout-un-chacun la légitimité à intervenir et agir dans toutes les sphères de la Cité » (*ibidem*, p. 63), c’est-à-dire à être citoyen membre du corps politique, sont définis par la Constitution, c’est pourquoi D. Rousseau utilise l’expression ‘peuple constitutionnel’. Toutefois, on ne pourrait parler du droit d’un peuple à disposer de lui-même s’il fallait une constitution pour que des individus forment un peuple aspirant à l’autonomie ou à l’indépendance ; je ferai l’hypothèse que c’est dans ce cas l’existence d’un peuple-*ethnos* qui est un préalable.

Pour terminer, reconnaissons comme le fait D. Rousseau (2015) dans son chapitre 3, que les deux catégories de peuple corps-politique et peuple tout-un-chacun (ou peuple laïc) qui sont des catégories de l’unité ne suffisent pas à décrire la réalité sociale. C’est pourquoi on

[2] Voir les sites suivants : https://www.institut-jacquescartier.fr/tags/laos/

trouvera dans la figure 2, deux catégories prenant en charge la diversité avec les termes de 'société' et de 'population'. La société est ici considérée comme le lieu des multiples niveaux d'organisations humaines, associations, entreprises, communautés religieuses, syndicats (institutions pour la Théorie Anthropologique du Didactique), notamment donc ce qu'on appelle usuellement Corps Intermédiaires. Alors que le Peuple souverain de la démocratie est porteur de l'intérêt général, la société est le champ où s'expriment et s'affrontent les volontés et les intérêts particuliers. En m'appuyant sur l'étymologie du terme utilisé en grec moderne pour désigner la population (lié à '*plethos*' : multitude), j'ai enfin utilisé de ma propre initiative le terme de 'population' pour prendre en charge la juxtaposition des personnes concrètes, de leurs volontés et intérêts privés.

Catégories de la diversité		Catégories de l'unité	
Population	Société	Peuple-corps	
personnes concrètes	associations, corps intermédiaires	Corps politique citoyens	Corps laïc Peuple tout-un-chacun Semblables, Le Commun Egalité des droits civiques et individuels
Volonté et Intérêts privés	Volonté et Intérêts particuliers	Volonté et Intérêt général	Peuple constitutionnel

Figure 2. Du privé au général

Notons pour finir, que l'exploration étymologique que nous avons menée ici n'a pas épuisé le champ lexical dérivant du latin *populus* et construit autour du nom peuple, champ qui contient : 'Populaire' comme dans « registre de langue populaire » et dans « classes populaires », 'Populace', 'Populisme'. Dans ces exemples, le peuple n'est pas une catégorie de l'unité, mais au contraire de la différence : il désigne un sous-ensemble de la société vu comme n'ayant pas la même culture ou la même langue ou les mêmes intérêts que d'autres sous-ensembles, comme on le trouve explicitement dans des expressions comme « le peuple contre l'oligarchie », « le peuple contre les élites ». Si je m'attarde sur ce point, c'est pour souligner l'absence d'engagement partisan dans les analyses qui sont développées dans ce texte : il s'agit de réfléchir aux moyens nécessaires à l'exercice de la citoyenneté par tous, sans préjuger des orientations politiques qui résulteraient de cette participation totale.

FORME ELECTORALE DE LA DEMOCRATIE REPRESENTATIVE : 1+1 = 1

Dans les parties suivantes, nous nous intéresserons à la forme représentative de l'exercice par le peuple des pouvoirs législatif et exécutif. Les considérations présentées sont essentiellement nourries par l'étude de (Rosanvallon[3], 2015) et (Rousseau[4], 2015), elles ne se

[3] Professeur au Collège de France depuis 2001. Chaire Histoire moderne et contemporaine du politique. A exercé des responsabilités successivement à la CFDT, au PSU et au PS. A fondé en 1982, avec François Furet, la Fondation Saint-Simon qui a réuni des hauts fonctionnaires et des responsables libéraux ainsi que des hommes d'affaires jusqu'à sa dissolution en 1999, puis en 2002 la République des idées, dont les publications irriguent la pensée socialiste.

prétendent ni exhaustives, ni fidèles : dans le cadre de l'exposé, une sélection s'imposait et c'est la reconstruction personnelle que j'en ai faite qui a été présentée lors du *Colloquium* et qui reste l'objet du présent texte.

La forme représentative de la démocratie introduit deux positions au sein des pouvoirs législatif et exécutif, celle de représentant et celle de représenté (Rousseau), de gouvernant et de gouverné (Rosanvallon). Les représentants législateurs sont élus par les citoyens, aujourd'hui au suffrage universel, ce qui est considéré comme une caractéristique d'un régime démocratique. Pour l'exécutif, la désignation du gouvernement est moins uniforme ainsi que ses rapports au pouvoir législatif. De 1789 à nos jours, la France est passée d'un régime parlementaire, mettant en avant le pouvoir législatif et rejetant toute occasion d'une puissance individuelle à un régime présidentiel personnalisé où l'exécutif l'emporte sur le législatif (voir Rosanvallon pour un descriptif de cette évolution).

La dichotomie des positions est d'abord une division des tâches, considérée par les deux auteurs comme inévitable quand il est question de gérer l'État et ce pour différentes raisons. D'une part, parce que, dans une société moderne en mouvement permanent, le pouvoir, particulièrement l'exécutif, doit être directement et continûment actif, faisant la preuve de sa capacité à prendre des décisions efficaces, contraint de s'exprimer et réagir en permanence. Cette « urgence » est incompatible avec le long travail qu'il faudrait à un Peuple travaillé par les intérêts privés et particuliers pour prendre des décisions d'intérêt général. D'autre part, le Peuple ne pourrait être responsable devant lui-même, la responsabilité étant affaire d'individus.

Division des tâches donc. Celle du représentant est invariable selon le type de représentation : elle est d'agir et de parler au nom du groupe représenté. En revanche, la tâche des représentés varie radicalement d'une forme de démocratie à l'autre. Nous nous intéressons dans la présente partie à ce qu'elle est au sein de la forme électorale de la démocratie représentative, la partie suivante étant consacrée à ce que D. Rousseau nomme la forme continue.

L'article 6 de la *Déclaration des Droits de l'Homme et du Citoyen* votée le 26 août 1789 statue que « La loi est l'expression de la volonté générale. Tous les citoyens ont droit de concourir personnellement, ou par leurs représentants, à sa formation ». Mais ce droit individuel, se voit immédiatement dénier toute réalité. Dans son discours du 7 septembre 1789[5], Sieyès énonce que : « Les citoyens qui se nomment des représentants renoncent et doivent renoncer à faire eux-mêmes la loi ; ils ne peuvent agir et parler que par leurs représentants ». Le vote est un permis donné par le Peuple à ses représentants d'exercer sa souveraineté à sa place ; il s'agit là de ce que P. Rosanvallon nomme une « démocratie d'autorisation » (Rosanvallon, 2015, p. 20). On pourrait également parler de 'démocratie de délégation'. Entre deux élections, la tâche des représentés est de se taire. Ainsi, sur les scènes du pouvoir ne sont pas simultanément présents le Peuple et ses représentants, sauf à croire en la fiction d'une représentation-fusion, que D. Rousseau symbolise par l'égalité 1+1=1 reprise dans le titre de cette partie : le Peuple serait présent parce qu'incarné en sa représentation, dont la politique serait, dès lors, l'expression de la volonté du Peuple. Une telle interprétation est sans doute favorisée par la présidentialisation des démocraties et c'est un argument fréquemment utilisé par les majorités présidentielles pour légitimer les décisions prises.

[4] Professeur de droit constitutionnel à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, ancien membre du Conseil supérieur de la magistrature de 2002 à 2006. A présidé le groupe de travail « Justice et pouvoirs », de Terra Nova.

[5] « Dire de l'abbé Sieyès, sur la question du veto royal : à la séance du 7 septembre 1789 » *Archives parlementaires de 1787 à 1860*, Librairie administrative de Paul Dupont, 1875, p. 594.

Quelle vision du Peuple et des citoyens sous-tend cette forme délégataire de la démocratie ? Montesquieu (1762) et J-J. Rousseau (1762), grands inspirateurs des révolutionnaires français, apportent une réponse claire à cette question : le Peuple est irrémédiablement incompétent à gouverner.

> Le grand vice dans la plupart des anciennes Républiques, c'est que le peuple avait droit d'y prendre des résolutions actives qui demandent quelques exécutions, choses dont il est entièrement incapable. Il ne doit entrer dans le gouvernement que pour y choisir ses représentants. (Montesquieu. *De l'esprit des lois. Livre XI. Ch. VI,* De la constitution d'Angleterre, p.240)
>
> De lui-même, le peuple veut toujours le bien, mais de lui-même, il ne le voit pas toujours. La volonté générale est toujours droite, mais le jugement qui la guide n'est pas toujours éclairé […] il faut lui montrer le bon chemin ; tous ont également besoin de guides […] Voilà d'où naît la nécessité d'un législateur. (Rousseau, *Le contrat social, Livre 2, Ch.6*[6], lignes [80] et [81])

On pourrait croire ce point de vue dépassé avec l'élévation du niveau d'éducation. Il n'en est rien, comme le confirme les réactions de certains députés réagissant à l'idée de jurys citoyens (cités par J. Testart, 2015, pp. 28-29) :

> « Les gens nous ont élus parce que nous sommes plus compétents ».
>
> L'organisation de conférences de citoyens « crée l'illusion qu'un panel de citoyens pourrait sérieusement éclairer la représentation nationale ».

Une telle vision des citoyens est bien souvent sous-jacente aux modalités de la gestion municipale que j'ai évoquées dans l'introduction, présente chez les élus comme chez les chefs de service. C'est un pari tout à fait opposé sur les capacités des citoyens qui sera mis en évidence dans la partie suivante.

FORME CONTINUE DE LA DEMOCRATIE REPRESENTATIVE : 1+1= 2

Dans la forme électorale de la démocratie, le Peuple n'est actif sur les scènes du pouvoir qu'aux moments électoraux, donc de manière épisodique, ponctuelle. Les propositions de P. Rosanvallon et D. Rousseau visent au contraire à rendre cette présence temporellement continue, en un sens qui parlera nécessairement aux mathématiciens : la « démocratie continue » ne s'arrête pas avec le geste électoral, mais se poursuit et se déploie entre deux moments électoraux. Il s'agit de substituer à la démocratie d'autorisation ou de délégation évoquée précédemment ce que P. Rosanvallon nomme « démocratie d'appropriation » (2015, Chapitre III, pp. 187-301) ou « démocratie d'exercice » (Ibidem, p. 21) : les citoyens s'approprient le pouvoir en exerçant plus directement des fonctions démocratiques qui ont longtemps été accaparées par le seul pouvoir parlementaire ; aux représentants, la tâche de légiférer et de gouverner ; aux représentés, celle de réclamer et de contrôler. La représentation-fusion du 1+1=1 est remplacée par une représentation-écart, 1+1=2, (Rousseau, 2015, Première partie, Ch. 1, pp. 23-53).
Extension temporelle de l'exercice du pouvoir par le Peuple donc, mais, selon D. Rousseau, il s'agit aussi d'étendre le champ d'intervention de ce pouvoir démocratique, au-delà de la sphère étatique nationale :

> La démocratie continue ne se réduit pas à une forme de gouvernement, elle est une forme de société. Elle n'est pas assignée à un lieu particulier, ni à un espace ni à une géographie ; elle est débordement du lieu où le système représentatif voudrait la maintenir et se répand là où le peuple tout-un-chacun s'accomplit c'est-à-dire dans toutes les sphères de la société. La démocratie continue se distingue ainsi radicalement du système représentatif qui se réalise dans un lieu unique, la sphère étatique, celle où s'exprime le peuple-corps-politique (Rousseau, 2015, p. 85)
>
> Elle ne s'arrête pas non plus aux frontières des États mais s'ouvre sur l'espace-monde (Ibidem, p.19)

On conçoit bien que cette radicalisation du régime démocratique ne peut pas être atteinte par un simple perfectionnement du système électoral et des modalités de scrutin. Il s'agit d'inventer les formes et les institutions d'un exercice citoyen continu du pouvoir politique. On trouvera des propositions précises dans l'un et l'autre ouvrages déjà cités, je n'en dirai rien ici, me contentant de présenter plus loin le dispositif des conventions de citoyens (Testart, 2015), dont D. Rousseau propose d'ailleurs l'institutionnalisation. En revanche, je résumerai dans la suite ce qui, à mes yeux, constitue les soubassements conceptuels de la démocratie continue.

Pierre Rosenvallon : Trois principes de « bon gouvernement »

Comme l'indique le titre de l'ouvrage dont l'étude a contribué à la réflexion ici présentée, P. Rosenvallon s'y consacre à l'action gouvernementale en énonçant dans le chapitre III trois principes de bon gouvernement, lisibilité, responsabilité et réactivité. Dans le chapitre IV sont analysées les qualités nécessaires aux gouvernants. Le pendant du côté des gouvernés n'est l'objet d'aucun chapitre spécifique. Pourtant, nous allons voir dans les extraits cités ci-dessous que la satisfaction des principes énoncés implique à la fois gouvernants et gouvernés.

Lisibilité

La publicité de l'action des institutions représentatives ne suffit pas, les politiques doivent être lisibles pour être appropriables par les gouvernés.

> La possibilité pour les citoyens de prendre connaissance eux-mêmes du fonctionnement des institutions publiques [est] une des expressions contemporaines de la démocratie directe. Exigence qui n'est pas seulement celle de l'information mais bien celle d'une lisibilité […] qui implique une capacité d'interprétation des faits, de compréhension de la marche des choses. Cette lisibilité s'est dorénavant imposée comme une des figures clefs de l'idéal républicain. (Rosanvallon, 2015, p.234)
>
> La lutte citoyenne sur ce terrain [celui du droit d'accès aux données] représente dans l'ordre de la démocratie d'appropriation l'équivalent de ce qu'avait été la conquête du suffrage universel dans l'ordre de la démocratie d'expression. (Ibidem, p. 246)

Comme on le voit très clairement dans la première citation, à un engagement de lisibilité de la part des gouvernants doit correspondre chez les gouvernés, non seulement une volonté, mais aussi une faculté, de lire, au sens de comprendre.

Responsabilité

La lisibilité ne contribuerait pas à la réappropriation citoyenne du pouvoir entre les élections si elle n'était complétée par la responsabilité des représentants.

> Si la détention d'un pouvoir procède immédiatement de l'élection, son exercice doit être lié à d'autres mécanismes de validation et de mise à l'épreuve qui sont, eux, permanents. (Ibidem, pp.253-254)

La responsabilité des gouvernants les engage à s'expliquer de leurs actes, non seulement devant le Parlement, mais aussi devant les gouvernés, devant l'opinion publique. Mais, si les représentants rendent des comptes (à l'origine, il s'agissait en Angleterre de l'usage des deniers publics, d'où le terme '*accountability*', reddition de compte), les représentés doivent savoir étudier ces comptes rendus et produire un jugement à leur sujet.

> Il est donc nécessaire pour donner son plein effet à l'exercice de la responsabilité-justification que se trouvent peu à peu les moyens de constituer l'opinion […] la question de la formation d'un nouveau type d'organisations, ayant une fonction de canalisation et de structuration de l'expression sociale est posée avec urgence. (Ibidem, p. 273)

Nous reviendrons dans la section suivante sur la question de la constitution de l'opinion. Retenons que lisibilité de l'action gouvernementale et responsabilité des gouvernants sont deux conditions nécessaires à l'exercice du contrôle par les gouvernés et qu'elles ne peuvent s'actualiser sans que soient développées chez les citoyens des capacités de lecture et de jugement, autrement dit d'étude.

Réactivité

Reste la seconde dimension de l'exercice du pouvoir évoquée précédemment, le pouvoir de réclamer. Les citoyens se sentent de moins en moins écoutés et représentés par ceux qu'ils ont élus. Leurs attentes, préoccupations, volontés ne sont pas celles que ces représentants leur attribuent. Les gouvernements semblent atteints de surdité.

> Une démocratie d'interaction entre gouvernement et société redonnerait du pouvoir aux citoyens en obligeant les gouvernements à mieux réagir à leurs attentes. Mais ce sont simultanément les modes d'expression de la société qui doivent être refondés, tant ils sont aujourd'hui atrophiés, rétrécis aux manifestations d'une démocratie négative [parole contestataire] ou à la réduction sondagière comme à l'atomisation des réseaux sociaux. (Ibidem, pp. 287-288)

Ainsi, il ne s'agit pas seulement que se constitue une opinion publique, juge de l'action gouvernementale, mais aussi une volonté publique : le Peuple doit pouvoir forger ses réponses aux questions qu'il juge importantes et formuler les demandes qui en découlent.

Dominique Rousseau : primauté de l'espace public

D. Rousseau fait écho à cette vision du bon gouvernement en introduisant le concept d'Espace Public. La société est traditionnellement divisée en deux espaces, l'espace civil et l'espace politique. Le premier est celui des intérêts privés et particuliers (cf. figure 2), des individus pris dans leurs déterminations sociales, leurs activités professionnelles et leurs conflits ; le second est celui des institutions publiques, de la représentation, de l'État. L'espace public s'intercale entre les deux.

il [l'espace public] est en effet compris, ici, comme un lieu où toutes les questions issues de l'espace civil -la protection sociale, l'organisation du travail, l'expression publique des croyances religieuses, la place des artistes … - sont « travaillées » pour aboutir à la formulation de réponses, à la formulation de propositions normatives, c'est-à-dire de propositions de règles de droit. Bref, l'espace public est ici, l'espace où se forme la volonté générale. Et elle se forme par la délibération, par la communication des idées, par la confrontation des opinions, par l'échange d'arguments. (Rousseau, 2015, p. 112)

Pour chacun des principes énoncés par P. Rosanvallon, cet espace public est l'interlocuteur du gouvernement, mais il l'est aussi du Parlement qui fait la loi et de toute institution représentative.

Pour que l'État ne se referme pas sur la démocratie, il faut que le droit garantisse aux hommes la faculté d'agir dans l'espace public, de proposer, d'inventer, de redéterminer sans cesse les exigences normatives. (Ibidem, p.113)

La démocratie continue, elle, ne peut exister que par un espace public vivant, démultiplié, mobilisant sans cesse ses ressources sociales, associatives, intellectuelles pour […] peser, y compris en dehors des moments électoraux, sur l'espace politique pour lui imposer son « agenda », pour le contraindre à répondre aux questions sur lesquelles il s'est mobilisé et si possible, dans le sens des propositions qu'il a formulées [cf. réactivité]. (Ibidem, p. 114)

D. Rousseau souligne qu'une telle conception de la démocratie définit une nouvelle forme de citoyenneté :

Le « métier » de citoyen change tout aussi radicalement […] le pouvoir du citoyen de la démocratie continue prolonge celui de l'électeur du système représentatif en soumettant le lien électoral et donc les élus au contrôle permanent de l'espace public [. Cf. lisibilité et responsabilité]. (Ibidem, p. 115)

Constitutionnaliste, Rousseau s'attache dans la deuxième partie de son livre à définir les institutions de la démocratie continue, j'oserai dire qu'il s'agit surtout de former des contre-pouvoirs aux gouvernement et parlement, dotés de la même pérennité mais représentatifs de la société et de l'espace public dans sa diversité. Il envisage par exemple la création d'une assemblée sociale, dont les membres seraient élus selon une modalité permettant de tenir compte « des forces productives dans la vie économique et sociale, des grands secteurs d'activité […] et des formes dans lesquelles ces forces et activités se sont organisées - syndicats, associations, coopératives. » (Ibidem, pp. 151-152). On retrouve cependant ainsi une forme délégataire. Pour dépasser cette limite et impliquer également les « citoyens qui-ne-sont-nulle-part » (Ibidem, p. 153), citoyens non organisés ne participant ni à l'espace politique ni à l'espace public, D. Rousseau table sur l'inscription dans la Constitution des conventions de citoyens (voir la quatrième partie, première section). Il rejette le présupposé de l'incapacité définitive du citoyen ordinaire à participer à la vie politique, aux côtés des experts et des représentants, présupposé à la base de la démocratie de délégation.

Jacques Testart : un pari sur le potentiel humain, l'humanitude

J. Testart[7] (2015) introduit son livre par une critique de l'état présent de la démocratie que je résumerai par les titres des sous-parties de ce premier chapitre : 'L'oligarchie des élus : au-dessus du peuple ou représentants ?', 'La concertation comme leurre démocratique', 'La participation toujours inaboutie'. Le lecteur intéressé se reportera au livre pour en savoir plus. S'appuyant sur l'expérience des jurys d'assises en France et celle des jurys citoyens initiés

[7] Biologiste de la procréation. Connu pour son analyse critique de la science et des technosciences. Cofondateur en 2002 de la Fondation Sciences citoyennes.

simultanément en Allemagne et aux USA en 1972, J. Testart, comme D. Rousseau, postule que tout être humain peut se convertir en sujet actif de la démocratie, en ce citoyen dont l'article 6 de la déclaration des Droits de l'Homme et du Citoyen proclame le droit de concourir personnellement à la formation de la volonté générale. Ce potentiel anthropologique est désigné par le néologisme 'humanitude'.

> L'humanitude embrasse toutes les qualités que peut manifester une personne en communion avec ses semblables pour proposer, en responsabilité, des actions bénéfiques au plus grand nombre. [Ce terme renvoie à] l'intelligence collective qui permet d'apporter des propositions concrètes. (Testart, 2015, p.38)

> L'humanitude n'est pas une qualité individuelle, elle ne jaillit pas d'un mouvement solitaire, mais par l'émulation qui naît au sein d'un groupe en effervescence intellectuelle, morale et affective. (Ibidem, p. 39)

> Croire aux vertus de la citoyenneté, ce n'est pas célébrer les êtres humains en l'état où les a placés la société, c'est ne pas douter qu'un citoyen sommeille en chacun et s'efforcer de l'éveiller, c'est cultiver l'humanitude pour faire du gogo un citoyen. (Ibidem, p. 43)

Ainsi émerge des trois contributions que nous venons d'évoquer la figure d'un citoyen capable de concourir à la formation de la volonté générale à travers la formulation et l'étude de questions jugées cruciales et au contrôle des actions de ses représentants par l'examen critique des comptes rendus par ces derniers. Mais ce potentiel est latent, c'est un problème pour la démocratie continue que de l'actualiser chez tout-un-chacun. On perçoit qu'il s'agit là d'une question d'éducation, ce qui justifie qu'un didacticien comme Y. Chevallard se soit, depuis plus de dix ans, penché sur une analyse du citoyen démocratique.

Yves Chevallard : Pour une épistémologie démocratique

Dans un texte publié dans les Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques en 2007, Y. Chevallard utilise l'expression « épistémologie démocratique ». Comme le précise les citations suivantes présentées chronologiquement, il s'agit pour tout-un-chacun d'avoir le droit de poser toute question qui lui plaira et d'enquêter pour y répondre :

> Une démocratie accomplie [est une démocratie], où chaque citoyen ou collectif de citoyens doit pouvoir enquêter sur toute question qu'il lui plaira, en usant notamment d'un équipement praxéologique de base dont la formation scolaire l'aura muni. (Chevallard, 2009, p.2)

> Historically, raising questions, which was a privilege of the mighty, has become a definite right of citizens, but it is a right not fully exercised as it should be in a fully developed democracy. (Chevallard, 2015, p. 181)

Mais le plein exercice d'un tel droit suppose un équipement praxéologique adéquat (ensemble de savoirs et savoir-faire). Pour Y. Chevallard comme pour D. Rousseau (2015, p. 113) et J. Testart (2015, p. 43), recevoir cet équipement, être formé à l'enquête, est un nouveau droit de l'Homme et du Citoyen, ce qui crée un nouveau devoir pour les institutions de l'Éducation dans une République démocratique.

À mesure que la Théorie Anthropologique du Didactique développe des travaux sur ce qu'elle nomme pédagogie de l'enquête (voir par exemple, Chevallard & Ladjage, 2010), progresse la description de ce que doit être un citoyen (et un élève) démocratique. Il doit développer trois attitudes essentielles :

Attitude herbartienne*[8] *: ne fuir aucune question et aussi souvent que possible la mettre à l'étude de façon à aboutir à une réponse valable.

Attitude procognitive : ne pas se limiter à ce qu'on sait déjà, savoir vers l'avant

> Ce que le nouveau paradigme scolaire doit fabriquer, ce sont des citoyens qui vont de l'avant au lieu de regarder seulement en arrière, étudiant et apprenant aussi à tout âge et à tout instant les connaissances qui s'avèrent utiles. (Chevallard, 2012, p.9)

Attitude exotérique*[9] *: « se regarder toujours -qu'on soit une personne ou une institution-comme ayant à étudier pour apprendre encore ou pour vérifier ce qu'on croit savoir » (Sinae, 2016, p. 678)

Y. Chevallard souligne la portée du changement de rapport au didactique dont il est question partout dans la société et pour tous les citoyens : l'étude et l'apprentissage ne sont plus réservés ni à un âge donné et ni à certains. Il n'hésite pas à qualifier ce changement de civilisationnel.

DE NOUVEAUX DISPOSITIFS D'ETUDE ET DE FORMATION

Des analyses présentées dans la partie précédente émerge une conception de la vie démocratique que je tiens à mettre en évidence car c'est, selon moi, un changement lui aussi radical, changement qui est au fondement du titre de ce texte. Ni le vote, ni le débat, fût-il 'démocratique' ne suffisent à caractériser la démocratie continue. A ces deux composantes de la citoyenneté, il faut adjoindre l'étude car, pour formuler une réponse pertinente à une question ou étudier un rapport gouvernemental, on ne peut a priori supposer que vont suffire les connaissances présentes chez les citoyens qui délibèrent, c'est l'attitude exotérique. Cette partie présente deux dispositifs visant à organiser l'étude, les conventions de citoyens présentées par (Testart, 2015) et la pédagogie de l'enquête développée par la TAD.

La Fondation Sciences Citoyennes : Les conventions de citoyens

Le modèle initial sous la dénomination de jurys citoyens fut élaboré simultanément en Allemagne et aux USA en 1972. On dénombre 700 expériences de ce type, portant essentiellement sur des questions d'urbanisme entre 1972 et 2006. D'autres expériences ont été menées et se poursuivent aujourd'hui, par exemple, depuis 1992, au Danemark. Face à ce qu'elle considère comme un dévoiement du dispositif initial, la Fondation Sciences Citoyennes[10] (FSC dans la suite) a défini un protocole définissant un certain nombre de règles « sans lesquelles les *conventions* de citoyens perdraient leur crédibilité et donc leur vertu exceptionnelle d'aide à la décision » (Testart, 2015, pp. 79-80). Ce qui suit reprend la description proposée par (Testart, 2015) dans son chapitre 5.

- *L'objet de la convention* : un sujet d'intérêt général suscitant des controverses et ayant acquis un certain degré de maturité.

---

[8] Johann Friedrich Herbart est un pédagogue allemand qui vécut de 1776 à 1841.

[9]Les termes ésotériques et exotériques viennent de l'école de Pythagore : les élèves ésotériques savent, les exotériques ont à apprendre.

[10] https://sciencescitoyennes.org/wp-content/uploads/2014/02/CdC_Loi_FSC.pdf

Notons que le document de la FSC se situe dans la perspective de conventions de portée nationale, il s'agit d'aider à la décision du gouvernement ou du Parlement. Certaines des conditions qui suivent devraient être adaptées pour des échelons plus locaux de la vie politique.

- *Le commanditaire* : il doit être en capacité de prendre en compte les avis délivrés par la convention.
- *L'organisateur* : une structure permanente prenant en charge les aspects pratiques, dont la constitution du panel de citoyen ; elle recrute le facilitateur.
- *Le comité de pilotage* : il assure l'objectivité du processus, comprend des spécialistes du débat public et des spécialistes du thème. Il conçoit le programme de formation afin que soient exposés savoirs consensuels comme aspects controversés, en éclairant sur les raisons de ces controverses. Il recrute le *facilitateur*, professionnel de l'animation dont le rôle est notamment d'aider le groupe de participants à organiser ses débats internes, en amortissant d'éventuels conflits.
- *Le panel de citoyens* : 15 à 20 personnes, désignées à partir du tirage au sort sur les listes électorales d'un échantillon plus nombreux, suivi de plusieurs correctifs de façon à assurer la diversité socioprofessionnelle, l'indépendance vis-à-vis de groupes de pressions. Les citoyens possédant un savoir particulier vis-à-vis du thème abordé sont également écartés, ils pourront être auditionnés au titre d'experts. Les participants doivent accepter la mission. Ils resteront anonymes jusqu'à la première session publique (voir plus loin).
- *Les conditions matérielles* : leur qualité participe de la dévolution aux participants de l'importance de leur mission ; ils doivent se sentir investis d'une responsabilité citoyenne. Des défraiements sont assurés, en revanche aucune rémunération n'est consentie.
- *Le travail de la convention* : il se déroule pendant au moins trois week-ends, il prend appui sur l'intervention d'experts. Les deux premiers, séparés par plusieurs semaines de façon à permettre la « maturation des idées », sont consacrés à la formation : le premier week-end aborde les connaissances qui ne font pas débat, le second fait intervenir des experts d'avis variés. Le troisième week-end est occupé par l'audition publique de nouveaux intervenants, choisis par les citoyens du panel.

  À la suite de cette formation, les citoyens délibèrent entre eux, avec l'aide régulatrice du facilitateur, et rédigent un avis, non nécessairement consensuel, communiqué au commanditaire et au grand public.
- *Les suites de la convention*

> La convention ne prétend pas établir la loi mais participer à l'éclairage du législateur. […] il est impératif que le commanditaire d'une convention de citoyens s'engage en amont à en respecter les conclusions. […] La puissance compétente, dans l'idéal le Parlement, doit examiner chaque proposition des citoyens, à l'issue de la procédure, lors d'un débat suivi d'un vote transparent. C'est-à-dire que l'élu [individuellement], qui est seul habilité à légiférer, doit engager clairement sa responsabilité devant l'avenir s'il s'oppose aux propositions de ces citoyens indépendants et avertis. (Testart, 2015, p. 104)
>
> Les citoyens ayant contribué à la procédure et la population, en général, doivent être tenus informés régulièrement des effets de leurs avis. (Ibidem, p. 106)

Des procédures sont prévues en cas de rejet majoritaire par le Parlement (examen contradictoire par la ou les autres chambres de représentants, référendum dans des conditions précisément définies (information contradictoire et soutenue, élaboration démocratique des questions soumises au vote).

Comme on le voit, si les conventions de citoyens ne sont pas décisionnelles, leurs avis doivent être pleinement pris au sérieux et étudiés par les institutions représentatives. En cela, elles diffèrent de la plupart des dispositifs de consultation en vigueur aujourd'hui. Ceci est considéré comme la condition incontournable de l'investissement des participants dans le travail requis par une convention et, en reprenant un concept de la Théorie des Situations Didactiques, de la dévolution à des individus non organisés de la mission de représenter, non des intérêts privés ou particuliers, mais l'intérêt général, agissant ainsi en tant que membres du Peuple comme corps politique.

S'appuyant sur l'expérience des jurys d'assises et des réalisations effectives de jurys citoyens, D. Rousseau comme J. Testart postulent que ce changement de position se réalise effectivement chez les participants à une convention si les conditions formalisées sont réunies. Ils ne s'interrogent pas sur la qualité des avis produits, semblant confiants en la capacité collective des citoyens impliqués à s'approprier la formation dispensée pour élaborer un avis valide. Si la dimension pédagogique[11] du dispositif est soigneusement prise en compte, sa dimension didactique est ignorée. Ceci n'est évidemment pas le cas des travaux réalisés dans le cadre de la TAD sous l'intitulé de 'pédagogie de l'enquête'.

La théorie anthropologique du didactique : l'enquête

Le paradigme du questionnement du monde

Depuis une dizaine d'années (voir par exemple, Chevallard, 2007a et 2009), la TAD propose de substituer au paradigme dominant de l'étude scolaire, dit de la « visite des œuvres », un paradigme nouveau, dit du « questionnement du monde ». Dans le premier, les étudiants[12] sont amenés à rencontrer un certain nombre d'œuvres humaines (parmi lesquelles les savoirs et techniques mathématiques au programme), regardés comme des monuments qu'ils sont sommés de visiter sans qu'eux-mêmes en aient eu besoin et, pire, sans que leur soient enseignées les raisons qui ont conduit l'humanité à créer ces œuvres, ni celles qui les rendent aujourd'hui utiles.

Inversement, le paradigme nouveau place, comme son nom l'indique, le questionnement à la racine de l'étude scolaire, étude de questions qui se posent sur le monde et auxquelles les étudiants cherchent à répondre, étude d'œuvres dont l'appropriation suppose la mise en questions : qu'est-ce qui assure la validité de cette œuvre ? Quelles sont ses raisons d'être ? À quoi est-elle utile ?

Quelques exemples.

- La géométrie du triangle est une œuvre (ensemble d'organisations praxéologiques, c'est-à-dire de savoirs et techniques). Pourquoi est-elle enseignée ? Comment sont établies les propriétés qui la constituent ?
- Est de même une œuvre l'utilisation du calcul intégral en physique pour affronter le passage du discret au continu, par exemple pour déterminer la position du centre de

[11] Est pédagogique ce qui est fait pour amener les étudiants, ici les participants à la convention, jusqu'à l'objet à étudier, est didactique ce qui vise au processus d'étude lui-même -appropriation du discours des experts, étude de la question. Le mot de pédagogue est entendu ici métaphoriquement à partir du sens antique du mot, que le Wiktionnaire précise en ces termes : « Du latin *paedagogus* ("esclave qui accompagne les enfants, précepteur"), tiré du grec ancien *παιδαγωγός, paidagôgós* ("esclave chargé de conduire les enfants à l'école, précepteur d'un enfant").

[12] Le terme 'étudiant' recouvre ici tout participant à une étude, quel que soit son niveau scolaire.

gravité d'une répartition linéaire de masse. Qu'est-ce qui en assure la validité ? Quels sont les contrôles à appliquer ?

- Un rapport gouvernemental, de reddition de compte ou d'exploration d'une question, un budget municipal, sont des œuvres dont le questionnement relève de la fonction de contrôle à exercer par les citoyens. Dans le cas du budget par exemple, quelles sont les principes qui le déterminent ? Existe-t-il d'autres possibilités ? Est-il vrai qu'une gestion reposant sur un endettement nul de la commune et l'autofinancement de ses investissements est la meilleure solution pour une politique publique ?

Quel que soit son point de départ, question ou œuvre, l'étude à mener reçoit en TAD le nom d'enquête, c'est un processus dont le moteur est une *dialectique des questions et des œuvres* : il n'est en effet aucune question humaine qui puisse être résolue grâce aux seules ressources intrinsèques des individus qui l'étudient, la solution utilisera des œuvres déjà produites, qui à leur tour devront être interrogées. Le déroulement d'une enquête se concrétise en un certain « Parcours d'Étude et de Recherche » ou PER.

Une première schématisation de l'enquête

Sans perte de généralité comme l'on dit en mathématiques, on peut donc considérer que l'état initial d'une enquête correspond au système didactique suivant :

$$S\ (X, Y, Q_0, M_0)$$

où X désigne l'ensemble des personnes engagées dans l'étude d'une question initiale Q_0, dite question génératrice, Y l'ensemble des personnes qui aident ou dirigent l'étude ; M_0 est ici l'ensemble des ressources, y compris cognitives (les connaissances), disponibles pour X, c'est-à-dire que X connaît suffisamment, au début de l'enquête pour les utiliser ; cet ensemble est nommé milieu, dans un sens emprunté à l'écologie. Le but de l'enquête est d'élaborer une réponse, notée $R^{\heartsuit}$ qui convienne à X.

Dans le système scolaire, X correspond par exemple aux élèves d'une classe, Y est le professeur. Dans une convention de citoyens, X est le panel de citoyens, Y l'organisateur, le comité de pilotage ainsi que le facilitateur, lesquels ne semblent pas réaliser des interventions didactiques, c'est-à-dire visant à aider à l'étude, c'est pourquoi j'ai considéré précédemment qu'ils constituaient des aides pédagogiques. Quant aux experts impliqués dans la formation, ils mettent certaines œuvres à disposition des participants, jouant ainsi un rôle de media sur lequel nous reviendrons, rien n'est dit sur leur éventuelle fonction didactique. Ceci ne signifie pas qu'elle n'existe pas, mais qu'elle n'est pas problématisée.

Notons que la « qualité » de la réponse finale $R^{\heartsuit}$ dépend de la nature de la question dont il a été fait dévolution au groupe X : dans la Théorie des Situations Didactiques, il faut faire accepter par les élèves la règle du jeu mathématique, dans les conventions de citoyens, les participants doivent se sentir en charge de l'intérêt général.

Dialectiques de la recherche et de l'étude (des œuvres), des médias et des milieux

X peut s'attaquer à la question qui lui est posée en cherchant à élaborer tout ou partie de la réponse à partir des ressources du collectif d'étude qu'il constitue, en s'appuyant sur le milieu initial de l'enquête. Dans certains cas, qui intéressent particulièrement quiconque veut enseigner des mathématiques, X peut ainsi modéliser mathématiquement la question et s'engager dans une procédure de résolution de problème qui le conduiront peut-être à certaines innovations (ce postulat est à la base de la notion de situation a-didactique au sein de la Théorie des Situations Didactiques). Les ressources du milieu seront sollicitées en particulier pour écarter des réponses erronées. Plus largement, X peut organiser un dispositif d'expérimentation ou de recueil de données sur le terrain. On peut reconnaître là certaines

démarches des chercheurs de métier. Mais, à l'instar de ces mêmes chercheurs, X peut aussi supposer qu'existent dans la culture des connaissances pertinentes pour l'étude de la question posée, connaissances qu'il ignore et gagnerait à s'approprier (attitude procognitive). Il se met donc à la recherche dans tous les médias accessibles d'éléments susceptibles de lui être utiles : des éléments de savoir éclairant la question, des réponses $R^\lozenge$ déjà produites dans des institutions qui les ont légitimées (d'où le poinçon), c'est-à-dire d'œuvres qu'il devra étudier, donc 1. questionner, 2. s'approprier suffisamment pour les utiliser comme nouvelles ressources, autrement dit pour les intégrer au milieu de l'enquête. Le premier point suppose de réunir certaines informations sur la source qui a mis à disposition les nouvelles ressources ; mais quelle que soit la confiance qui puisse être accordée à ce media, une analyse critique du contenu devra être réalisée, en consultant plusieurs médias et croisant plusieurs $R^\lozenge$ mais aussi en construisant des épreuves de contrôle à partir des ressources du milieu M_0, maîtrisées par X (par exemple, en mathématiques, telle formule générale permet-elle de retrouver les cas particuliers connus par X ? Une preuve de la formule peut-elle être produite ?). Cette capacité à juger de la validité d'une ressource est cruciale dans la mesure où aucune limite n'est a priori fixée au champ des médias possibles : le professeur dans un dispositif scolaire, des personnes possédant à divers titres une expertise vis-à-vis de la question à l'étude comme dans les conventions de citoyens[13], des manuels, articles de journaux, livres, ressources en ligne, mais aussi toute personne sollicitée par X, voire des membres du collectif d'étude lui-même. Ce premier point est délicat, le second l'est encore plus car il s'agit d'apprentissage. En milieu scolaire, il peut être réalisé via des ateliers proposés par le professeur. Qu'en est-il dans un contexte non scolaire, dans les cas où faute d'aides didactiques, le collectif d'étude est engagé dans une démarche autodidacte ? On voit que le problème est complexe.
On parle de dialectique de la recherche et de l'étude et de dialectique des médias et des milieux à propos du processus qui vient d'être décrit. Notons que le terme recherche renvoie à deux activités, d'une part la recherche par X d'une solution au problème à résoudre, d'autre part la recherche d'œuvres mises à disposition par les médias. Ces œuvres deviennent ensuite objets d'étude, ce qui donnent lieu à de nouvelles questions mais aussi, moyennant un travail d'apprentissage, enrichit le milieu qui évolue donc au fil de l'enquête. La capacité à mettre en œuvre ces deux dialectiques, étroitement coordonnées, consistant, en résumé, à se procurer, évaluer et s'approprier des ressources nouvelles et donc à étendre le milieu (ou à créer des milieux), est cruciale pour la réussite d'une enquête.

Deux schémas, dits herbartiens, l'un réduit (Chevallard & Adjage, 2010, p. 3), l'autre développé (Chevallard, 2016, p .19) représentent le processus de l'enquête dont nous venons d'esquisser une description, mettant en avant par la première flèche la dynamique de développement du milieu qui n'apparaissait pas dans la première modélisation.

$$[S(X ; Y ; Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^\heartsuit$$

Figure 3. Le schéma herbartien réduit de l'enquête

Le second modèle propose une vision développée du milieu, tel qu'il a été construit à un certain moment de l'enquête, avec l'introduction de réponses estampillées, d'œuvres, de nouvelles questions et de données.

$$M = \{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots R_m^\lozenge, O_{m+1}, O_{m+2}, \ldots, O_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}, \ldots Q_p, D_{p+1}, D_{p+2}, \ldots D_q\}$$

Figure 4. Le modèle développé du milieu

[13] Par exemple, dans une convention ayant à traiter de questions médicales, des malades peuvent être sollicités en tant qu'experts. La notion d'expert dans le protocole de la FSC est à prendre en un sens très large qui ne se limite pas aux experts scientifiques.

Dialectique des questions et des réponses

À partir de la question initiale, le processus d'enquête fait vivre une dialectique des questions et des réponses dont la richesse va conditionner la qualité de la réponse finale. Dans les limites de ce texte, je me contenterai de donner une idée du travail possible en m'appuyant sur l'exemple proposé par M. Bosch et C. Winslow (2015, pp. 380-389).
La question génératrice, Q_0, qui concerne le jeu de billard est la suivante : étant donné une position initiale de la boule, comment l'envoyer dans une poche donnée après un rebond sur une bande ?

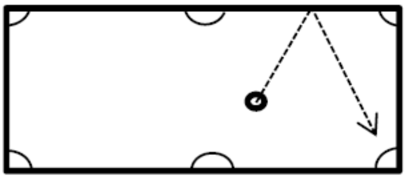


Figure 5. Table de billard et rebond sur une bande

L'enquête engendre une première série de questions mobilisant uniquement le milieu initial. Par exemple :

> Q_1 : Quelle est la trajectoire initiale de la boule après qu'on l'ait frappée avec la queue *?* De quoi dépend-elle ? Peut-on la prévoir ? Comment ?
> Q_3 *:* Une poche étant choisie comme but de la trajectoire, à quel endroit du pourtour de la table la boule doit-elle rebondir ?

La deuxième série de questions est engendrée par la recherche de ressources permettant d'avancer sur chacune de ces questions. Par exemple, après consultation des très nombreux sites consacrées aux techniques de billards, Q_1 donne naissance à
Q_{11} *:* Comment la trajectoire dépend-elle du point particulier où la queue tape la boule ?
Q_{12} : Comment la trajectoire dépend-elle de l'angle du coup appliqué à la boule ?
Pour répondre à ces questions, de nouveaux médias doivent être consultés : interviews d'experts, directement ou en ligne, références académiques concernant la dynamique des corps en rotation.
Je n'irai pas plus loin, renvoyant le lecteur intéressé à l'article en question. Mais la richesse du travail possible apparaît clairement dans le schéma de la figure 6, qui utilise un outil sémiotique utilisé au sein des PER déjà expérimentés pour représenter une dimension du processus, à savoir la génération des questions mises à l'étude.

Autres dialectiques

Comme on l'entrevoit déjà, la réussite du processus d'enquête dépend de conditions complexes qui sont bien loin d'être maitrisées, dans l'état actuel des recherches développées dans le cadre de la TAD. D'autres dialectiques sont considérées comme participant à la dynamique de l'enquête. On en trouvera la description la plus complète aujourd'hui dans la thèse de K. Sinae (2016, pp. 680-683). J'en retiendrai trois.
La ***dialectique des boites noires et des boites claires*** est d'une certaine façon le pendant de la dialectique des questions et des réponses, laquelle semble donner naissance à un processus infini ou du moins qui ne se termine qu'une fois que le collectif d'étude se sera approprié toutes les connaissances permettant de contrôler dans les moindres détails la validité des ressources qu'il utilise et de la réponse finale sur laquelle il s'accorde. Il est clair qu'un tel parti pris de la défiance, du doute systématique et de la recherche d'une compréhension totale est irréaliste. Au fil de l'enquête, le collectif d'étude doit pouvoir décider de ne pas ouvrir certaines boites ou d'arrêter son enquête d'élucidation à un certain niveau de gris. Ceci

suppose une capacité à évaluer la fiabilité du média qui les lui a procurées, ce qui ne l'empêche pas de mettre en œuvre certaines modalités d'évaluation du contenu de la boite. Par exemple, pour des techniques mathématiques, *X* pourra s'abstenir de se former à la théorie qui produit ces techniques, cherchant éventuellement à en contrôler la validité en les mettant en œuvre sur des cas particuliers qu'il sait traiter. Par contre, il lui faudra créer les conditions d'un usage maitrisé de ces techniques. Ainsi, nombreux sont les chercheurs en sciences humaines qui utilisent les logiciels d'analyse qualitative des données sans avoir la moindre idée de la théorie géométrique sous-jacente.

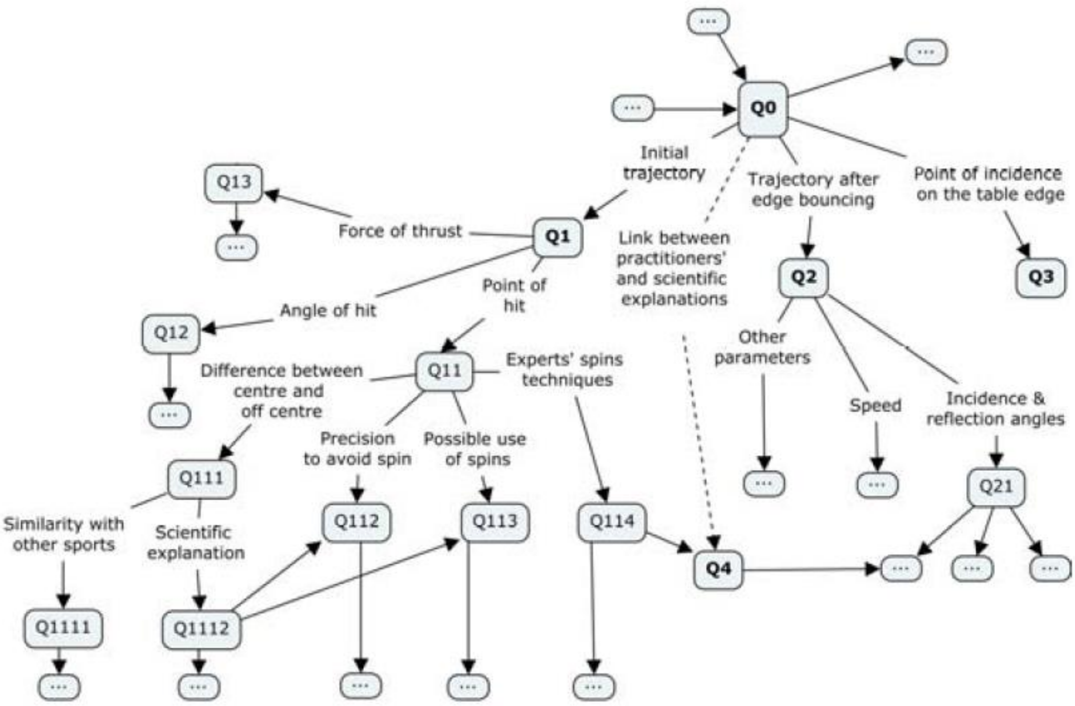


Figure 6. L'arbre des questions produites lors d'une enquête sur les trajectoires de billards.

La ***dialectique de l'individuel et du collectif*** qu'il n'est, me semble-t-il, pas besoin de définir est absolument cruciale. Elle intègre le rôle de la délibération dans la formation d'une réponse de qualité, celle-ci doit donc par contrat de l'étude être construite et validée par le collectif. Dans le cas des conventions citoyennes, cette dialectique est la condition de l'éveil du potentiel d'humanitude des participants, c'est-à-dire de la capacité à décider dans l'intérêt général. Elle contribue sans aucun doute également à la réalisation des processus de validation, mais aussi d'appropriation des ressources nouvelles, à l'œuvre dans la dialectique des médias et des milieux.

Une autre dialectique complète la précédente, la ***dialectique de la diffusion et de la réception***. Tout au long de l'enquête, tout participant doit être prêt à présenter ce qu'il propose dans l'attention de ce que les autres peuvent en recevoir. De même, le collectif doit, non seulement s'accorder sur la réponse finale, mais aussi se mettre en situation de la défendre à l'extérieur de lui-même. On voit l'importance de cette dimension dans les conventions citoyennes, dont le travail donne lieu à un rapport à l'intention des représentants d'une part, des représentés d'autre part.

En conclusion de cette section, retenons que la pédagogie de l'enquête est une proposition très ambitieuse. Les expérimentations effectives qui en sont réalisées, au niveau scolaire et universitaire mais aussi maintenant en formation des enseignants, font apparaître des problèmes qui sont loin d'être résolus. En même temps, elles produisent des résultats qui encouragent à persévérer dans cette voie, d'autant que les outils d'analyse des processus à l'œuvre se développent. Les lecteurs intéressés pourront consulter les travaux du groupe (CD)Ampères sur ~~sur~~ le site[14] de l'IFÉ ainsi que les actes des congrès internationaux de la TAD (par exemple, ceux de CITAD 4 sont en ligne sur le site https://citad4.sciencesconf.org). La pédagogie de l'enquête commence à être diffusée en dehors de l'enseignement des mathématiques pour de nouvelles disciplines scolaires, mais pour ce qui est de son usage citoyen en dehors des systèmes scolaires, tout reste à faire.

CONCLUSIONS

Comme j'ai essayé de le montrer, la réflexion sur le régime démocratique actuel et sur les manières de permettre au Peuple d'exercer continûment sa souveraineté fait émerger un défi que toute intention de radicalisation de la démocratie se doit de relever : répandre partout dans la société des pratiques délibératives basées sur l'étude et pour ce faire, construire une nouvelle figure du citoyen, ne reculant devant aucune question, capable d'apprendre à tout moment ce qu'il ne sait pas encore et critique par rapport à ce qu'il croit savoir.

Les auteurs sur lesquels j'ai appuyé le travail présenté ici en sont convaincus ; l'humain en a le potentiel, il a le droit qu'on l'aide à le développer. Le système éducatif tel qu'il est n'est pas à la hauteur de cette ambition, une révolution y est nécessaire, au niveau des pratiques enseignantes et au niveau des programmes : Y. Chevallard propose de les définir par un ensemble de questions primordiales, des questions que la société a le devoir de faire étudier par les élèves, et secondairement, par une liste des éléments disciplinaires qu'il faudra leur faire rencontrer. Ceci induit un bouleversement des organisations pédagogiques et didactiques (voir Sinae, 2016, pp. 672-677)

Cependant, il est clair qu'un tel bouleversement n'est pas envisageable sans être soutenu par une demande de la société. Ceci me conduit à considérer qu'on ne peut pas attendre que l'Éducation Nationale se soit réformée au point de former le citoyen dont la démocratie continue a besoin, il faut engager cette formation chaque fois que l'occasion s'en présente, c'est-à-dire chaque fois que des citoyens se trouvent confrontés à une question qui les concerne et à laquelle ils veulent élaborer une réponse, sans attendre que des représentants le fassent à leur place. Une telle vision de la vie politique n'est pas nouvelle : on peut considérer qu'elle fait écho à une approche théorisée et mise en pratique par S. Alinsky à Chicago dans les années 40, la 'méthode Alinski' qui réapparaît aujourd'hui dans les stratégies de certains mouvements (voir l'article de C. Petitjean, intitulé 'Politiser les colères du quotidien' dans *Le Monde Diplomatique* de mars 2018). Voulant croire, comme le font D. Rousseau et J. Testart, que l'expérience concrète de collectifs citoyens d'étude transforme les participants et éveille leur humanitude, j'y vois l'occasion d'une nouvelle forme d'éducation « populaire ».

Mais je n'ai pas la naïveté de croire à la simplicité d'un tel projet. Cela me semble un terrain possible pour l'engagement citoyen des didacticiens mais aussi un champ nouveau de recherches pour la didactique, puisqu'il s'agit bien de saisir toute occasion de faire vivre des phénomènes didactiques ambitieux au sein de la vie politique et plus généralement sociale.

[14] http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes)

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BOSCH, M., & WINSLOW, C. (2015). Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 35(3),* 357-399.

CHEVALLARD, Y. (2007a). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. In Ruiz-Higueras & Al. (Eds.) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén: publicaciones de la Universidad de Jaén. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134

CHEVALLARD, Y. (2007b). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In Gueudet, G. & Matheron, Y. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques-2007* (pp. 344-366). Paris : ARDM. HTTP://WWW.IREM.UNIV-PARIS-DIDEROT.FR/UP/PUBLICATIONS/AAR08001.PDF

CHEVALLARD, Y. (2009). La notion de PER : problèmes et avancées. Toulouse http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf

CHEVALLARD, Y. (2012), Des programmes, oui. Mais pour quoi faire ? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement. Conférence Nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_CNEM_-_13-03-2012.pdf

CHEVALLARD, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming paradigm. In Cho S.J. (Ed.) *The proceedings of the 12th ICME. Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 173-188). Dordrecht: Springer.

CHEVALLARD, Y. (2016). Praxeological Issues in the Development, Reception and Use of ATD: Some Remarks. 5ème Congrès International de la TAD, Janvier 2016. http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2016/03/Chevallard_TAD-5_TexteCoference_EN.pdf

CHEVALLARD, Y., & LADJAGE, C. (2010). Enquêter pour connaitre. L'émergence d'un nouveau paradigme scolaire et culturel à l'âge de l'Internet. Colloque de Liège http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Colloque_de_Liege_15-10-2010_YC_CL_-2.pdf

MONTESQUIEU, C. (1762/1951). *L'esprit des lois.* In *Montesquieu, Œuvres complètes, tome II.* Paris : Gallimard-Bibliothèque de la Pléiade. Récupéré sur http://institutdeslibertes.org/wp-content/uploads/2013/09/Montesquieu_esprit.pdf

ROSANVALLON, P. (2015). *Le bon gouvernement*. Paris : Seuil.

ROUSSEAU, D. (2015). *Radicaliser la démocratie. Propositions pour une refondation*. Paris : Seuil.

ROUSSEAU, J-J. (1762). *Du contrat social.* Amsterdam : M.M. Rey. Récupéré sur https://fr.wikisource.org/wiki/Du_contrat_social/%C3%89dition_1762/Livre_II/Chapitre_6

SINAE KIM. (2016). *Les besoins mathématiques des non-mathématiciens : quel destin institutionnel et social ? : études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques*. Thèse de doctorat : université d'Aix-Marseille. www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2016/02/SKim-These.pdf

TESTART, J. (2015). *L'humanitude au pouvoir. Comment les citoyens peuvent décider du bien commun*. Paris : Seuil

LES LOIS DU HASARD : ENJEUX MATHEMATIQUES, HISTORIQUES, CITOYENS

Alain **BERNARD**

UPEC - ESPE, Centre Koyré (UMR 8560)

alain.bernard@u-pec.fr

Caroline **EHRHARDT**

Université Paris 8, Centre de recherches historiques:

Histoire des pouvoirs, savoirs et sociétés (EA 1571)

caroline.ehrhardt@univ-paris8.fr

Résumé

Le projet de recherche "les lois du hasard : enjeux mathématiques, historiques et citoyens" vise depuis 2017 à documenter la conception de nouvelles activités et ressources pédagogiques, articulée à l'étude d'un matériel historique, et permettant de concilier un enseignement des mathématiques, des lettres ou de l'histoire (ou les trois conjointement) avec les nouvelles formes d'éducation à la citoyenneté. La première partie détaille le volet historique du projet, qui explore une documentation composite datant de la fin du 19e et du début du 20e siècle. Elle est faite d'une part d'articles destinés à un public cultivé et consacrés soit au rôle social et politique des probabilités soit à leur aspect récréatif; et d'autre part de textes destinés à un public enseignant et étudiant. Le second volet du projet est ensuite présenté : il touche à l'insertion d'une perspective historique dans l'enseignement et vise à étudier un système symbiotique où recherche historique et scénarisation pédagogique de problèmes et de dossiers documentaires intéressants se co-construisent, s'entre-informent sans que leurs finalités respectives, par nature distinctes, se voient confondues. En conclusion nous discutons de l'élargissement de cette perspective à d'autres thématiques que les statistiques et probabilités.

Mots clés

Histoire des mathématiques, citoyenneté, probabilités, statistiques.

INTRODUCTION : CONTEXTE ET OBJECTIF DE CETTE PRESENTATION

Les attentats de 2015 ont ravivé au niveau politique et éducatif les problématiques “d'éducation à la citoyenneté”. Ces dernières sont apparues au début des années 1970, elles ont été accentuées par la loi d'orientation de 2005 et l'adoption de principes éducatifs renforçant l'éducation du fait religieux (Debray, 2002) puis, plus récemment, par le renouveau des problématiques

d'éducation laïque de la morale (Loeffel, Schwartz & Bergounioux, 2013). Pourtant, cette éducation à la citoyenneté a maintenu un clivage disciplinaire très ancré entre sciences humaines et sciences "dures" (les sciences de la vie et de la terre faisant le plus souvent seules exception).
La question du lien entre mathématiques et citoyenneté était déjà soulevée au début des années 2000 par une ambitieuse réforme des programmes d'enseignement secondaire coordonnée par Claudine Robert. Cette réforme introduisait, entre autres, un enseignement renouvelé des statistiques et probabilités, en lien explicite avec une démarche de résolution de problèmes et d'apprentissage de la modélisation. Plusieurs des problèmes préconisés étaient volontairement choisis en fonction de l'actualité sociale, industrielle ou politique pour donner une dimension "citoyenne" à cet enseignement (Dutarte, 2011). Comme l'a fait remarquer Viviane Durand Guerrier au cours de la discussion lors du colloquium de novembre 2017, cette compréhension des rapports entre mathématiques et citoyenneté est restrictive : en privilégiant les probabilités et statistiques, elle exclut de fait d'autres domaines qui seraient légitimes pour mener cette réflexion, grandeurs et mesures par exemple, ou algorithmique et programmation aujourd'hui. Plus généralement, on néglige la question centrale de modes de raisonnement en mathématiques qui ne relèvent pas seulement des pratiques de modélisation - nous revenons sur ce point important en conclusion.
Cette compréhension, pour restrictive qu'elle soit, est en tout cas celle qui orientait les programmes au début des années 2000, ainsi que les travaux de plusieurs IREM dont celui de Paris-Nord dans l'Académie de Créteil. Plusieurs collègues avaient alors activement contribué à ce renouveau en proposant des activités pédagogiques expérimentées en classes et nourries de questions d'actualité (Dutarte et al., 2007). Nous avons, nous-même, contribué en 2005-2006 à cet effort pour conjoindre enseignement des mathématiques et éducation à la citoyenneté, en y ajoutant une dimension historique et épistémologique, dans le cadre d'un stage de formation continue sur le thème « mathématiques et citoyenneté », en collaboration entre l'IREM et l'ex-IUFM (Bernard, 2012). Cette réflexion a été prolongée par une publication commune (Bernard, Chambon & Ehrhardt, 2010).
Depuis 2017 nous prolongeons l'esprit de ces travaux dans un nouveau projet de recherche, soutenu par la "mission recherche" coordonnée par l'ESPE de l'académie de Créteil. Ce projet vise à documenter la conception de nouvelles activités et ressources pédagogiques, articulée à l'étude d'un matériel historique, et permettant de concilier un enseignement des mathématiques, des lettres ou de l'histoire (ou les trois conjointement) avec les nouvelles formes d'éducation à la citoyenneté.
Le premier volet du projet explore depuis 2017 une documentation composite datant de la fin du 19e et du début du 20e siècle. Elle est faite d'une part d'articles destinés à un public cultivé et consacrés soit au rôle social et politique des probabilités soit à leur aspect récréatif; et d'autre part de textes destinés à un public enseignant et étudiant. Il s'agit d'étudier cette documentation sur un double point de vue historique et sociologique : qui écrivait sur ces sujets, dans quels cercles et pour quel lectorat ? Quelles étaient les finalités de l'apprentissage des probabilités aux yeux de ses promoteurs, quel était son périmètre, ses pratiques ? Quelles modalités d'écriture, notamment par problèmes, ont-ils élaborés ?
Le second volet du projet touche à l'insertion d'une perspective historique dans l'enseignement. Il vise à étudier un système symbiotique où recherche historique et scénarisation pédagogique de problèmes et de dossiers documentaires intéressants se co-construisent, s'entre-informent sans que leurs finalités respectives, par nature distinctes, se voient confondues.
Dans le présent article, nous détaillons les enjeux, attendus et premiers résultats de ces deux volets de recherche. La conclusion nous permettra d'élargir la discussion à partir des remarques de V. Durand Guerrier lors du colloquium rappelées ci-dessus.

1. UNE ENQUETE HISTORIQUE AUTOUR DE LA VALEUR PRATIQUE ET SOCIALE DES PROBABILITES, AU DEBUT DU 20E SIECLE

1.1 Ambitions générales

Afin de faire le lien avec les ambitions décrites en introduction, l'enquête se concentre sur des sources qui, discutent explicitement de situations et de problématiques qui ont fait débat à l'époque, ces situations appelant à la fois (i) à une forme de théorisation ou du moins de discussion probabiliste, et (ii) à une discussion de type politique, philosophie ou sociale.
Le volet historien du projet consiste ainsi à mettre au jour les questions soulevées par l'usage croissant des probabilités et statistiques dans la vie sociale, politique, scientifique et industrielle à la fin du 19e et au début du 20e siècle. Nous nous intéressons aussi à la manière dont ces questions s'articulent avec des projets d'enseignement et de popularisation, et aux formes d'écriture originales que ces projets mobilisent.

1.2 Une première enquête autour de la *Revue du Mois* éditée par Émile Borel à partir de 1906

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la manière dont Émile Borel, un mathématicien issu des milieux académiques, a pris en charge ces questions - on peut même ajouter qu'il a contribué dans une large mesure à la fois à les définir et à les faire connaître. Nous nous sommes ainsi concentré sur les articles, livres et fascicules d'Émile Borel, sur la période 1906-1939, qui sépare la fondation de la *Revue du Mois* par Borel et son épouse Camille Marbo (où sont parus un nombre importants d'articles liés aux probabilités) et la parution du dernier fascicule du *Traité des probabilités*, où Borel revient sur les questions qui lui tiennent à cœur sur le hasard et ses dimensions philosophiques, sociales et morales (Mazliak, Bustamante & Cléry, 2015).
En effet, les recherches de Borel ont non seulement joué un rôle majeur dans le développement de la discipline, mais il est aussi l'un des premiers mathématiciens français à avoir pris conscience de ce qu'il appelle « la valeur pratique » des probabilités. De par son activité éditoriale et son réseau de connaissances et de correspondants (Ehrhardt, 2011), Borel s'avère par ailleurs être une figure majeure pour saisir la richesse et l'ampleur des débats. Plusieurs controverses qui l'opposent à des contemporains montrent que ses préoccupations étaient partagées dans des cercles variés, qui dépassaient largement les milieux académiques.
Un premier article issu de ces recherches (Ehrhardt & Gispert, 2018) se concentre sur la fondation de la *Revue du Mois*. À une période où des périodiques de format similaire se multiplient, l'entreprise s'avère originale par le choix qu'elle fait d'associer des articles destinés à faire comprendre à un large public les enjeux des recherches récentes, notamment en sciences exactes et expérimentales mais aussi en sciences humaines, et des thèmes plus « légers », comme des chroniques théâtrales et littéraires. Le créneau choisi impose à Borel et à son comité de rédaction un véritable numéro d'équilibriste pour conjuguer exigences de contenus, mobilisation des auteurs, contraintes matérielles et éditoriales et succès public.
L'article s'appuie sur la correspondance de Borel conservée aux archives de l'Académie des sciences pour mettre au jour les intentions et la mise en acte de ce projet éditorial au cours des mois de préparation des premiers numéros. Il étudie en particulier comment a été définie la ligne éditoriale, comment ambition scientifique et vocation généraliste ont pu coïncider, et enfin comment la revue est parvenue à conquérir son public.

Un second article (Bernard, à paraître), s'appuyant largement sur le travail précédent, s'intéresse au contenu et au contexte intellectuel de deux articles publiés par Borel dans sa propre Revue, articles qui s'avèrent particulièrement importants pour notre projet: le premier écrit en 1906, porte sur la "valeur pratique du calcul des probabilités" et le second, publié en 1908, sur "le calcul des probabilités et la mentalité individualiste", c'est-à-dire sur l'acceptabilité individuelle et sociale de ce calcul. Nous montrons que ces deux articles prennent sens dans le cadre d'un débat à la fois politique, philosophique et éducatif dans lequel on questionne les fondements scientifiques d'un enseignement de la morale. On montre ainsi les parentés, sur le fond de l'argumentation comme sur sa forme, entre les textes de Borel et les argumentaires inspirés du solidarisme de Léon Bourgeois, bien reflétés par deux autres articles également publiés dans la Revue du Mois en 1906, l'un sur l'enseignement de la morale laïque (A. Croiset), l'autre sur le solidarisme (C. Bouglé). Cette étude resitue donc les premières interrogations de Borel sur "les probabilités en société" (leur valeur sociale et épistémologique) dans le contexte des débats socio-éducatifs de l'époque.

1.3 Un approfondissement en cours : le mode d'écriture par problèmes et la recherche de "récréations probabilistes"

Si nos premières études se sont concentrées sur le contexte d'émergence des productions qui motivaient le projet (§1.2), l'enquête doit maintenant être approfondie en direction du mode d'écriture de ces productions. Il s'avère en particulier que les articles de Borel sont structurés autour de choix de problèmes visant à faire percevoir le sens de sa démarche au lecteur. Or le choix de situations et de problèmes visant à faire réfléchir sur les probabilités et leurs enjeux n'est qu'une originalité relative. En effet elle puise visiblement à une tradition alors bien établie d'exposition des probabilités, par un mélange de situations des problèmes philosophiques qu'elles posent, par une écriture par problèmes. Cette direction de recherche rejoint les préoccupations d'une collègue hongroise de l'université de Budapest qui travaille déjà en partenariat avec le LDAR, Katalin Gosztonyi : cette dernière a déjà contribué au projet en 2017 et explore des questions semblables sur la tradition hongroise d'enseignement des probabilités (Gosztonyi, 2015). Ce contrepoint nous permet de situer nos recherches dans une perspective internationale.

Cette préoccupation pour le mode d'écriture par problème, rejoint une autre partie de l'enquête initiale, qui visait à questionner généralement la place des questions probabilistes dans les mathématiques « non académiques » pour la période 1870-1930, c'est-à-dire au sein d'associations ou de revues qui se situent à la marge des milieux scientifiques (Association française pour l'avancement des sciences, *Intermédiaire des mathématiciens*, etc.). On a exploré plus particulièrement, à la suite de (Schwer & Autebert, 2006) la rencontre entre probabilités, combinatoires et récréations mathématiques.

Les premiers dépouillements sur les "récréations probabilistes" n'ont pas donné pour l'instant de résultats probants, même si on sait par ailleurs que Borel a présidé pour un temps l'AFAS. Mais il ne semble pas qu'on trouve le type de "récréation" que nous nous attendions à trouver. Il faut néanmoins approfondir ce point, car Borel lui-même fait allusion, dans ses *Éléments de probabilités* de 1909, et au sujet des problèmes les plus élémentaires sur lesquels il s'appuie, au fait qu'elles constituent des "questions amusantes": il semble donc que ce type de problèmes avait bien un sens pour les contemporains. Nous comptons à ce titre explorer les revues pour étudiants et enseignants à la fin du 19^{e} et au début du 20^{e} siècle, étudiées par Caroline Ehrhardt d'un point de vue général dans le cadre du projet ANR Cirmath (Ehrhardt, à paraître). Il s'agira ici d'examiner la place des probabilités, statistiques et combinatoires, ainsi que les questions et les pratiques qui leur sont associées.

Nous comptons également étendre nos enquêtes vers les premiers textes d'enseignement des probabilités "grand public". Nous souhaitons notamment nous intéresser à l'ouvrage que le sociologue Maurice Halbwachs publie avec le mathématicien Maurice Fréchet (Fréchet & Halbwachs, 1924), et dont une réédition est actuellement sous presse. Les travaux liant sciences sociales et statistique publiés dans les années 1930 par Halbwachs, ainsi que le livre *Le point de vue du nombre*, qu'il publie avec Alfred Sauvy en 1936, contribuent quant à eux à nourrir les probabilités et la statistique de questions liées à la démographie, et en particulier celle du sex ratio, tout en tentant de donner à ces mêmes questions des réponses scientifiques quantitatives. Le principe de cette enquête a été exposé par Isabelle Gaudron lors de notre première journée d'étude[1], il s'agit en 2018-19 de le consolider, en lien au développement de ressources pour l'enseignement universitaire de niveau L3/M1[2] (voir partie suivante).

2. LES ECHOS DE CES ENQUETES, DANS LA CONSTRUCTION COLLECTIVE DE RESSOURCES ET SCENARIOS PEDAGOGIQUES

2.1 Problématiques générales

En lien au second type de questions de recherche — celle de la genèse de ressources pédagogiques en lien au thème du projet – , l'un d'entre nous (Alain Bernard), dans la lignée des travaux soutenus par l'Université Paris-Est Créteil (UPEC) et l'Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education (ESPE) en 2013 (Bernard, Dell'Angelo et al., 2014) et poursuivis depuis (Bernard & Petitgirard, 2017), développe avec Katalin Gosztonyi une théorisation des situations de formation visant à l'intégration d'une perspective historique dans l'enseignement (Bernard & Gosztonyi, 2017).
Dans cette perspective, il s'agit d'étudier et de comprendre des situations d'échanges et de construction documentaire où interprétations historiques et pédagogiques peuvent être confrontées sans être confondues. Il s'agit d'étudier un système symbiotique où recherche historique et scénarisation de problèmes intéressants se co-construisent, s'entre-informent sans voir confondues leurs finalités, par nature distinctes (Fried, 2001).

2.2 Contexte de travail : les prémices d'un groupe IREM

En 2017, un premier groupe de travail associant les chercheurs du projet avec quatre enseignants en stage ou en poste en collège ou lycée dans l'académie, a permis de confronter l'investigation de la documentation historique explorée dans le 1er volet avec des activités de scénarisation pédagogique, inspirées de l'ancien groupe « mathématiques et citoyenneté » de l'IREM de Paris Nord. Le principe de fonctionnement respecte l'idée fondamentale que les objectifs des participants ne sont pas les mêmes, sans être incompatibles. Considérant que tous sont en situation de produire collectivement de nouvelles ressources documentaires, *dont* des scénarios d'enseignement, l'enjeu est d'interroger la façon dont les questions et thématiques de recherche historiques rencontrent, influencent ou sont en sens inverse stimulées par, l'élaboration de scénarios pédagogiques. Le cadre théorique de recherche nous est fourni d'une

1 On peut consulter la vidéo de son intervention à l'adresse suivante : https://vimeo.com/album/4394778 (mot de passe : hasard2017).

2 3e année du 1er cycle et 1e année du 2nd

part par les travaux en didactique sur les constructions collectives de ressources par les enseignants (Gueudet, Pepin & Trouche, 2011), et d'autre part par les théories d'origine sociologique et anthropologique sur les espaces d'intéressement et les objets frontières, déjà mis en œuvre pour penser des situations de formation semblables (Vinck & Trompette, 2009 ; Bernard & Petitgirard, 2017). Ces questions doivent être approfondies en 2018, dans le cadre d'une communication sur ces questions au colloque "Re(s)sources 2018" organisé à l'Ifé de Lyon[3].
L'enjeu pour les années 2018 et 2019 est à la fois de consolider les projets qui ont émergé en 2017 et de mettre en place leur étude raisonnée selon une méthodologie appropriée à ce type d'approche, visant à clarifier la dynamique de tels collectifs et à en étudier l'impact sur les ressources produites.

2.3 Quelques exemples de travaux en cours

Nos premiers échanges courant 2017 ont permis de dégager plusieurs sous-projets pédagogiques, visant à expérimenter puis produire des ressources pédagogiques pour l'enseignement des probabilités dans le secondaire et le supérieur. Nous les décrivons ici succinctement, sachant qu'il est encore trop tôt pour en faire connaître les résultats. Le point important est plutôt de repérer à chaque fois les interactions complexes qui, comme par un système d'échos, relie les questionnements pédagogiques aux questionnements historiques, sans que les uns puissent être réduits aux autres.

2.3.1 Travaux autour du sex ratio en licence, inspirés par Halbwachs et Sauvy

Ce travail s'inspire de textes de Halbwachs et Sauvy publiés entre les deux guerres (Sauvy & Halbwachs, 1936). Prévu pour fournir une matière à des projets d'étudiants en 3e année de licence (1er cycle) à l'université Paris 13, sous la forme la production d'un dossier avec documents et exercices. Ces étudiants sont potentiellement des "montants" en M1 MEEF[4], la problématique est donc susceptible de toucher à terme la formation initiale des enseignants sur l'université Paris 13.

2.3.2 Autour du vocabulaire des probabilités et des statistiques

Ce travail s'inspire des débats sur les questions touchant aux ambigüités du vocabulaire des probabilités au tournant des 19e-20e siècles, chez Joseph Bertrand, auteur du manuel le plus utilisé à l'époque, et ses successeurs. Les textes de Borel sur la valeur pratique des probabilités (voir ci-dessus, partie 1.2) s'en font largement écho, sous une forme simplifiée et accessible à un large public : ils questionnent plus particulièrement les notions de *probabilité* et *d'espérance*. Ces questionnements historiques rejoignent les pratiques pédagogiques (au niveau secondaire ou formation des enseignants) visant à éclaircir avec les élèves ou étudiants, éventuellement mais pas nécessairement en s'appuyant sur une documentation historique, des points de vocabulaire probabiliste. Il s'agit d'élaborer un questionnaire pour les élèves en partant d'un recensement des termes utilisés dans des dictionnaires anciens, afin de comprendre les fluctuations des mots et des concepts, les non-dits et les implicites. Le travail préparatoire est effectué collectivement et doit être testé dans les classes, essentiellement en collège.

---

[3] Institut français de l'éducation
[4] 1e année de master Métier de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation

2.3.3 Élaboration d'un recueil problématisé de situations et problèmes visant à développer l'esprit critique

Ce projet est destiné à introduire l'enseignement des probabilités et des statistiques en lien au développement de l'esprit critique. Il s'agit de réunir une collection d'exercices permettant aux élèves de développer et d'apprendre à acculturer les élèves à la pratique des probabilités et des statistiques ainsi qu'à développer leur esprit critique, en s'inspirant à la fois du mémoire d'une étudiante MEEF associée en 2017 au projet (Chabot-Déjà, 2017, part. II.1) et des travaux d'autres membres du groupe dans le cadre d'un travail académique coordonné par Philippe Dutarte. (Berhouet, Gleba & Dutarte, 2017). L'originalité du projet consiste à catégoriser ce recueil en fonction de critères tirés des réflexions récentes sur l'éducation à l'esprit critique (voir les pages dédiées sur le site Eduscol[5]).
Ce projet est en bonne partie à l'origine des questionnements historiques relevés plus haut sur les "récréations probabilistes" au tournant 19e-20e. C'est donc un bon exemple de projet, qui sans s'inspirer directement d'un questionnement historique, renforce cependant ce dernier dans une direction bien particulière, qui est celle que nous avons décrite plus haut au sujet de l'écriture par problèmes (partie 1.3).

3. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

3.1 Une thématique disciplinaire limitée ?

Comme indiqué en introduction, le projet dont nous avons résumé ici les enjeux et les premiers résultats, s'ancre dans une compréhension très spécifique des rapports entre mathématiques, histoire, et citoyenneté : celle qui privilégie les réflexions et travaux autour des "lois du hasard" : les approches statistiques et probabilistes des phénomènes aléatoires, et les conclusions qu'on peut (ou non) en tirer pour une existence citoyenne "moderne". Ce sont les questions que commencent à poser les différents acteurs historiques qu'on a évoqués plus haut (partie 1), ce sont aussi les questions que se posent les enseignants qui élaborent des ressources pédagogiques autour du développement de l'esprit critique *sur ce type de thème* (partie 2). On peut cependant questionner le choix de cette thématique en partant du constat simple qu'elle est loin d'être la seule permettant d'étudier les liens entre mathématiques, histoire et citoyenneté.
Nous en avons un témoignage intéressant dans le cadre du projet, puisque deux nouveaux enseignants (l'un d'histoire, l'autre de mathématiques) s'apprêtent à rejoindre le groupe auquel on a fait allusion plus haut. Leurs réflexions ne les portent pas directement à s'intéresser aux statistiques et probabilités, mais d'abord aux questions de système de vote et de représentation qui intéressent par ailleurs des chercheurs comme Nicolas Saby (voir son texte ce volume). Ce dernier indique à juste titre que ce questionnement sur la manière de théoriser mathématiquement les modes de représentation démocratiques, a une histoire déjà ancienne. Si elle recoupe en partie l'histoire à laquelle nous avons fait allusion plus haut, elle s'en distingue toutefois par sa temporalité et ses thématiques privilégiées.
Un autre exemple nous est naturellement fourni par les liens qui unissent les méthodes d'invention en mathématiques, en liens aux activités de résolution de problèmes ou en général d'étude de situations de recherche. C'est cette compréhension qu'on retrouve dans les propositions de Corine Castela (voir son texte dans ce volume) lorsqu'elle pointe les dimensions

[5] http://eduscol.education.fr/

"citoyennes" des travaux de didactique visant à l'étude de tâches et de travaux qui favorisent chez les élèves un esprit de recherche. Or cette idée n'est pas tout à fait nouvelle et comporte de forts ancrages historiques : depuis le 18e siècle au moins, on a souligné la portée très générale de cette approche des contenus mathématiques par problèmes, pour la définition d'une citoyenneté éclairée. Une bonne partie de l'enjeu à la fois politique et philosophique de l'écriture puis de la publication de traités comme les *Éléments de Géométrie* (1741) ou plus tard des *Éléments d'Algèbre* (1746) de Clairaut se situe à cette articulation entre un mode d'exposé des mathématiques par problèmes (classiques dans les milieux d'ingénieurs éclairés), et le projet philosophique des Lumières d'éclairer les esprits en apprenant "à chercher et à découvrir". Dans le groupe IREM "histoire et épistémologie", nous étudions présentement ces textes pour en renouveler la lecture sous le point de vue des questions contemporaines "d'éducation à la citoyenneté" (Bernard, Gosztonyi & Darley, à paraître).

3.2 Vers une généralisation de notre perspective de recherche aux rapports entre mathématique, histoire et citoyenneté

Ces quelques exemples montrent que la double problématique du projet dont nous avons ici résumé les grandes lignes, est susceptible d'être généralisée à d'autres thèmes qu'aux questions traditionnelles, et vivaces aujourd'hui encore, portant sur l'éducation aux statistiques et probabilités et à leurs enjeux philosophiques et sociétaux. Les rapports entre mathématiques et citoyenneté peuvent être abordés à de multiples niveaux, thématiques ou épistémologiques (c'est-à-dire touchant au mode raisonnement et de recherche mathématique lui-même). S'ils ont en outre une dimension historique, c'est évidemment parce que la notion même de citoyenneté est par essence une question non seulement chargée d'histoire, mais dont la définition même ne peut être que située historiquement, en particulier dans l'histoire de régimes politiques qui, comme le nôtre, ont donné à l'éducation universelle de la citoyenneté un rôle central. L'autre raison, moins bien connue[6], est que la définition d'un enseignement général des mathématiques n'est pas dissociable à son tour, de la construction d'une notion apparue au début du 20e siècle, et qu'on voit réapparaître aujourd'hui dans les nouveaux projets de réforme du lycée : celle "d'humanités scientifiques" (on ajoute aujourd'hui : "et numériques").
C'est ce qu'illustre la conférence aujourd'hui célèbre d'Émile Borel où il proposait, très précocement dans sa carrière académique et institutionnelle, d'instituer des "laboratoires de mathématiques" dans tous les lycées, et en général un esprit pratique dans tout l'enseignement des mathématiques (Borel, 1904). Ce propos, élaboré à l'occasion de la réforme de 1902 dont les conséquences sur l'enseignement secondaire des mathématiques ont été si profondes (Gispert, Hulin & Robic, 2007), illustre à la fois le caractère historiquement situé de ces questions (la conférence a été rendue possible par une réforme, qui dépendait elle-même d'une vaste enquête parlementaire débattue au niveau politique) et le fait qu'on ne peut guère le dissocier d'une réflexion épistémologique sur la nature même des mathématiques : ce texte est un des premiers, où Borel fait connaître un point de vue épistémologique qui fait valoir le caractère à ses yeux indissociables du développement des mathématiques et de celui des sciences expérimentales. Qu'une compréhension des dimensions citoyennes de l'enseignement des mathématiques, doive être aussi à la fois historique et épistémologique, et impliquer à ce titre les enseignants les plus directement concernés, reste une question d'actualité.
Cela veut dire aussi, du point du type de recherche que nous conduisons ici, que le propos et le type d'étude entrepris pourrait être généralisé. Le "terrain" de l'éducation à la citoyenneté forme une sorte d'observatoire favorable pour le système d'écho, entre études historiques sur la

6 Elle semble en tout cas ignorée visiblement par les rapporteurs qui ont conseillé le ministre Peillon lorsqu'il a institué l'enseignement moral et civique.

construction d'une "citoyenneté par les mathématiques", et les travaux pédagogiques visant à maintenir vivant le sens de ce lien entre mathématiques et citoyenneté, dans l'enseignement d'aujourd'hui.

BIBLIOGRAPHIE

BERHOUET, J., DUTARTE, P. & GLEBA, F. (2017). Statistique, probabilités et jugement critique. *Brochure inédite de l'académie de Créteil, diffusée dans le séminaire "sciences et jugement critique" (nov. 2017).*

BERNARD, A. (2012). Au sujet d'une formation continue sur « mathématiques et citoyenneté », en rapport à notre axe 1. *Sciences et Techniques en Interférences [Carnet de recherche], 18 déc. 2012.* [en ligne]. http://interferences.hypotheses.org/341 (consulté le 4.3.18)

BERNARD, A. (2015). L'accompagnement des mémoires de master MEEF 2nd degré en mathématiques: Le choix d'un dispositif partenarial ouvert à un large choix de thématiques et de types de projets. In *Questions de pédagogie dans l'enseignement supérieur 2015* (pp. 86-96). Brest : UBO. [en ligne] http://www.colloque-pedagogie.org/sites/default/files/colloque_2015/Actes-QPES2015.pdf (consulté 4.3.18)

BERNARD, A. (2016). Penser la place des sciences humaines dans la formation des enseignants de sciences et techniques : quels types de recherches possibles? In B. Marin & D. Berger (Ed), *Recherches en éducation, recherches sur la professionnalisation : consensus et dissensus* (pp. 217-229). Paris : Réseau national des ESPE. http://www.reseau-espe.fr/sites/default/files/documents/prespe15-bernard.pdf (consulté 4.3.18)

BERNARD, A. (2015). Les séries de problèmes, un genre au carrefour des cultures : une première synthèse. In A. Bernard (Ed.), *SHS Web of Conferences,* 22. doi:10.1051/shsconf/20152200001.

BERNARD, A. (à paraître). Borel, la valeur pratique des probabilités et le débat sur la morale laïque au début du 20e siècle. *Revue d'Histoire des Sciences Humaines.*

BERNARD, A., BRECHENMACHER, F. & HUSSON, M. (2014). Points cardinaux pour la conception de formations universitaires pluridisciplinaires en épistémologie et histoire des sciences pour les enseignants du secondaire, ou comment s'appuyer sur des dilemmes. *SHS Web of Conferences*, 13. http://doi.org/10.1051/shsconf/20141305004 (consulté 4.3.18)

BERNARD, A., DELL'ANGELO, M., DE MONTGOLFIER, S., GODFROY, A.-S., HUCHETTE, M., MAYRARGUE, A. & ROUX, C. (2014). Les sciences humaines dans les parcours scientifiques et techniques professionnalisants : quelles finalités et quelles modalités pratiques ? Présentation générale. *SHS Web of Conferences*, 13. http://doi.org/10.1051/shsconf/20141300001 (consulté le 4.3.18)

BERNARD, A. & GOSZTONYI, K. (2014). Series of Problems, at the Crossroads of Research, Pedagogy and Teacher Training. In *Proceedings of 7th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 141-151). Aarhus University : Aarhus Univ. Danish School of Education. http://conferences.au.dk/fileadmin/conferences/ESU-7/ESU7_e-version-red.pdf (consulté 4.3.18)

BERNARD, A. & GOSZTONYI, K. (2018). Combiner recherche en histoire des mathématiques et formation professionnelle des enseignants : la mise en place expérimentale d'un nouveau groupe IREM. *Tréma, 48,* 17-33.

BERNARD, A., CHAMBON, G. & EHRHARDT, C. (2010). *Le sens des nombres. Mesures, valeurs et information chiffrée : une approche historique*. Paris ;, Vuibert/Adapt.

BERNARD, A. & PETITGIRARD, L. (2018). L'histoire des sciences et des techniques dans cinq dispositifs innovants de formation professionnelle : une analyse comparative. *Tréma, 48,* 1-16.

BERNARD, A., DARLEY, C. & GOSZTONYI, K. (*à paraître*). Pourquoi lire Clairaut aujourd'hui ? Les enjeux citoyens de l'enseignement des mathématiques. *En préparation pour la revue Repères IREM*.

BOREL, É. (1904). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. Conférence faite le 3 mars 1904 au musée pédagogique. *Texte présenté par H. Gispert (2002). La Gazette des mathématiciens*, *93,* 47-64. http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf (consulté 4.3.18)

BOREL, É. (1906). La valeur pratique du calcul des probabilités. *La Revue du Mois, 1*, 425-437.

BOREL, É. (1908). Le calcul des probabilités et la mentalité individualiste. *La Revue du Mois, 6*, 641-650.

CHABOT-DEJA, F. (2017). *Quatre approches de l'éducation à l'esprit critique en classes de mathématiques en seconde*. Mémoire de master MEEF non édité, Université Paris-Est Marne la Vallée. https://drive.google.com/open?id=0B_PZx7hdnEJQbUloM0ZlS2M4VXM (consulté 4.3.18).

CLOT, Y. (2008). *Travail et pouvoir d'agir.* Paris : Presses Universitaires de France.
DEBRAY, R. (2002). *L'enseignement du fait religieux dans l'école laïque : rapport au Ministre de l'Education nationale*. Paris : O. Jacob.
DURAND, A. & MAZLIAK, L. (2011). Revisiting the Sources of Borel's Interest in Probability: Continued Fractions, Social Involvement, Volterra's Prolusione. *Centaurus, 53*(4)*,* 306-332.
DUTARTE, P., DELZONGLE, F., MAATI, H., CARDINAL, J.-P., COUPRY, A. & DHERISSARD, S. (2007). *Statistiques et citoyenneté, le citoyen face au chiffre*. Brochure 135 de l'IREM de Paris Nord. http://irem.statistiques.free.fr/telechargement/brochure135.pdf (consulté 4.3.18)
DUTARTE, P. (2011). Évolution de la pratique statistique dans l'enseignement du second degré en France. *Statistique et Enseignement, 2*(1)*,* 31-42.
EHRHARDT, C. (2011). Du cours magistral à l'entreprise éditoriale. *Histoire de l'éducation, 130*, 111-139.
EHRHARDT, C. (à paraître). The Locus of Transnational Exchanges: Mathematical Journals for Students and Teachers, 1860s -1914. *Historia Mathematica*.
EHRHARDT, C. & GISPERT, H. (2018). Mettre en acte un projet éditorial à la Belle Époque : les débuts de la Revue du mois. *Philosophia Scientae, 22,* 99-118.
FRECHET, M. & HALBWACHS, M. (1924). *Le Calcul des probabilités à la portée de tous*. Evreux ; Ch. Hérissey.
FRIED, M. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education, 10*(4), 391–408.
GISPERT, H., HULIN, N. & ROBIC, M.-C. (Ed) (2007). *Science et enseignement. L'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XX*[e] *siècle*. Paris : Vuibert & INRP.
GOSZTONYI, K. (2015). Séries de problèmes dans une tradition d'enseignement des mathématiques en Hongrie au 20[e] siècle. *SHS Web of Conferences, 22, 00013*. http://doi.org/10.1051/shsconf/20152200013 (consulté 4.3.18)
GUEUDET, G., BIRGIT, P. & TROUCHE, L. (2011). *From Text to « Lived » Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*. Dordrecht, New York : Springer.
LOEFFEL, L., SCHWARTZ, R. & BERGOUNIOUX, A. (2013). *Pour un enseignement laïque de la morale. Ministère de l'éducation nationale*.
http://cache.media.education.gouv.fr/file/04_Avril/64/5/Rapport_pour_un_enseignement_laique_de_la_morale_249645.pdf (consulté 4.3.18)
MAZLIAK, L., BUSTAMANTE, M.-C. & CLÉRY, M. (2015). Le Traité du calcul des probabilités et de ses applications: étendue et limites d'un projet borélien de grande envergure (1921-1939). *North-Western European Journal of Mathematics, 1,* 85–123.
ROGER, J.-L, (2007). *Refaire son métier : essais de clinique de l'activité.* Ramonville-Saint-Agne : Érès.
SAUVY, A. & HALBWACHS, M. (1936). *Le point de vue du nombre*. Édition critique sous la direction de Marie Jaisson et Éric Brian. INED 2005.
SCHWER, S. & AUTEBERT, J.-M. (2006). Henri-Auguste Delannoy, une biographie (1e partie). *Mathématiques et sciences humaines, 174,* 25–67.
VINCK, D. & TROMPETTE. P. (2009). Retour sur la notion d'objet-frontière. *Revue d'anthropologie des connaissances, 3*(1), 5-27.

CONTROLE, PREUVE ET DEMONSTRATION. TROIS REGIMES DE LA VALIDATION

Nicolas **BALACHEFF**

Laboratoire d'Informatique de Grenoble, Univ. Grenoble Alpes, CNRS

nicolas.balacheff@imag.fr

Résumé

« - Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion ;

- Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation. »

Les mots preuve, démonstration, argumentation sont ainsi utilisés par les textes des programmes de mathématiques du cycle 4 « dont la formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration sont des objectifs essentiels », de même que par leurs commentaires, notamment dans le document d'accompagnement intitulé « Raisonner ».

Au cours de cet exposé j'interrogerai les avancées de la recherche sur l'apprentissage et l'enseignement de la démonstration et leur capacité à éclairer la mise en œuvre des programmes actuels. Ces questions seront approchées avec la problématique de la validation au sens de la théorie des situations didactiques. Les principaux thèmes seront ceux de l'articulation entre preuve et connaissance, démonstration et argumentation. Une dernière partie portera sur les perspectives ouvertes par l'introduction des technologies informatiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BALACHEFF, N. (2011). *cK¢, un modèle pour relier connaissance et preuve*. Grenoble : PUG

BALACHEFF, N., MARGOLINAS C. (2005) cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In Claire Margolinas; Alain Mercier. *XII° école d'été de didactique des mathématiques, Aug 2003, Corps, France. Balises pour la didactique des mathématiques.* (pp. 1-32). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics, 18*(2), 147-176. [https://doi.org/10.1007/BF00314724]

LA VALIDATION DANS L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES AU NIVEAU SECONDAIRE EN FRANCE

Assia **Nechache**
ESPE de Créteil et LDAR
assia.nechache@hotmail.fr

Résumé
Ce texte présente une partie de la recherche d'une thèse portant sur la question de la validation dans l'enseignement des probabilités en quatrième et cinquième année du secondaire en France. Cette recherche a été menée du point de vue du modèle des Espaces de Travail Mathématique. Pour caractériser le statut de la validation nous avons conduit trois sortes d'enquêtes. La première est exploratoire, et vise à comparer la validation pratiquée dans deux domaines : probabilités et géométrie. La deuxième enquête s'appuie sur l'analyse de tâches mises en œuvre dans les quatre dernières années de l'enseignement secondaire et relevant de différentes catégories (simple, standard, riche). Enfin, la dernière enquête, sous forme d'entretien, vise à obtenir le point de vue des enseignants sur les formes de validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités. L'analyse de l'ensemble des résultats de ces trois enquêtes permet de caractériser des formes validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités au niveau du secondaire.

Mots clés : validation, probabilités, ETM, modélisation, enseignement secondaire

INTRODUCTION-CONTEXTE

Notre travail de thèse est né du questionnement d'enseignants du secondaire portant sur l'enseignement du domaine des probabilités, notamment le nôtre. En effet, lorsque nous étions enseignante dans les classes de 3^{e} et de 2de (quatrième et cinquième année du secondaire en France), nous avions l'habitude d'utiliser les logiciels de géométrie dynamique afin de conjecturer des résultats qui par la suite étaient démontrés à l'aide des propriétés géométriques institutionnalisées dans le cours. Ce schéma ne semblait néanmoins pas disponible dans le contexte des probabilités. Prenons l'exemple d'un exercice donné aux élèves dans lequel il fallait déterminer la probabilité d'un événement à l'aide de la simulation informatique. Après leur avoir expliqué certaines fonctions du tableur, les élèves ont effectué la tâche demandée et ont obtenu la probabilité cherchée. Certains élèves ont alors posé la question : « Comment prouver que la probabilité obtenue par la simulation est bien celle attendue ? ». Nous avons répondu que cela n'était pas demandé et qu'il fallait admettre le résultat obtenu par l'expérience. Ils ne disposaient pas en effet à leur niveau de classe des propriétés nécessaires. Les résultats (obtenus par la simulation) seraient démontrés dans les classes supérieures. Certains élèves ne furent pas convaincus par la réponse et posèrent alors la question : « Pourquoi, en géométrie, demandez-vous d'écrire la démonstration en citant les propriétés alors qu'en probabilités vous ne le demandez pas ? ». Cette question avait fini par provoquer un certain malaise car nous n'avions aucun argument à leur opposer. En effet, dans les programmes de 2008, le domaine des probabilités introduit en classe de 3^e^ est étroitement lié à celui de la statistique. Tel qu'il est envisagé par l'institution, l'enseignement des probabilités accorde une place privilégiée au domaine expérimental, à aux notions de simulation et de modélisation. Cela induit une nouvelle démarche et des raisonnements différents des autres branches des mathématiques. Les enseignants sont donc confrontés à un enseignement où le domaine expérimental a une place importante dans les raisonnements conduisant à des formes spécifiques de validation. Cela nous a conduit à étudier le statut de la validation dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^e^ et de 2^de^ en France.

1. OUTILS THEORIQUES ET QUESTION DE RECHERCHE

Nous avons choisi d'étudier la validation dans le domaine des probabilités en fin de scolarité obligatoire lors des séances d'enseignement. Il s'agit pour nous d'identifier les formes de validation en jeu, mais également la manière dont le travail de validation s'effectue.

1.1 Des précisions sur la validation

Pour étudier la validation dans le cadre scolaire nous nous sommes référée aux travaux de Balacheff, Duval et Pedemonte. Pour Balacheff, la démonstration est une validation s'appuyant sur des connaissances théoriques (théorèmes et définitions) reconnues et institutionnalisées, utilisant un formalisme où la langue naturelle et le langage symbolique sont incorporés, et obéissant à des règles de déduction. Par ailleurs, Balacheff (1987) souligne l'importance de l'interaction sociale dans la production de la preuve, et cette interaction est selon lui est un levier dans la production d'arguments pour convaincre un autre que soi-même. Cet aspect social de la preuve constituerait alors le point de rapprochement de l'argumentation et de la démonstration chez Balacheff :

> L'argumentation est ainsi constitutive des processus de validation engagés dans un contexte social. (Balacheff, 1987, p. 574)

L'écart entre l'argumentation et la démonstration chez Balacheff porte sur le fait que l'argumentation vise à obtenir l'adhésion de l'interlocuteur, tandis que la démonstration vise à établir la vérité de l'énoncé indépendamment des interlocuteurs. Balacheff reconnait cependant l'existence de la pratique de l'argumentation dans le cadre de la résolution de problème. De son côté, Duval (1993) souligne que l'argumentation et la démonstration sont deux raisonnements fondamentalement différents. Il ajoute que « pour qu'un raisonnement puisse être une démonstration, il est nécessaire qu'il soit un raisonnement valide » (Duval, 1995, p. 212). Ainsi, une démonstration est désignée par Duval comme un raisonnement valide ayant pour objectif d'établir la justesse d'une proposition (Duval & Egret, 1993, p. 115). Contrairement à la démonstration, l'argumentation est un raisonnement qui obéit non pas aux contraintes de validité mais à celles de pertinence. Chez Duval, la démonstration est caractérisée par une suite de pas déductifs. Un pas a une structure ternaire, composée de trois propositions ayant l'un de ces statuts opératoires : prémisse, énoncé-tiers (ou règle d'inférence), énoncé-cible (ou conclusion). L'énoncé-tiers permet le passage des prémisses à la conclusion. Les statuts opératoires déterminent l'organisation interne et la possibilité du fonctionnement d'un pas. La démonstration est donc un raisonnement organisé en un enchainement de pas de déductions ou d'inférences. Cet enchaînement de pas est articulé de manière à ce que la conclusion d'un pas soit recyclée en la prémisse d'un autre pas, ou dans le cas du pas terminal en la conclusion cible de la démonstration. Ce recyclage entraîne donc un changement du statut opératoire d'une proposition.

L'analyse de Duval concernant l'argumentation et la démonstration révèle l'existence d'une distance cognitive entre ces deux types de raisonnement. Ces deux raisonnements ont donc des structures complètements différentes et du point de vue cognitif. Dans la démonstration, la valeur épistémique d'une proposition dépend de son statut théorique, alors que dans l'argumentation elle dépend entièrement de son contenu. Contrairement à Duval, Pedemonte affirme que les raisonnements en mathématiques ne se réduisent pas seulement aux démonstrations et qu'il existe des raisonnements mathématiques, comme ceux de l'argumentation, qui ont pour objectif de fournir des « raisons » (ou « arguments ») pour accepter ou refuser certaines propositions :

> Les raisonnements mathématiques ne peuvent être réduits aux raisonnements démonstratifs qui permettent de déduire des conclusions à partir des prémisses données par le moyen de règles d'inférence explicites à l'avance. Il y a des raisonnements mathématiques, spécifiques à l'argumentation qui veulent simplement donner des « raisons » de l'acceptation ou de la réfutation de certaines propositions. (Pedemonte, 2002, p. 23)

Pedemonte ajoute que les « raisons » d'acceptation ou de réfutation de certaines propositions sont « tous les permis d'inférer possible qui composent l'argumentation » (Ibid., p.24). C'est pourquoi elle défend la thèse selon laquelle« l'argumentation en mathématiques est avant tout une justification rationnelle […].L'argumentation ne se contente pas de la compréhension, elle veut convaincre » (Ibid., p. 24).

Pedemonte affirme que la fonction de l'argumentation en mathématique est de fournir une justification rationnelle et que l'objectif de l'argumentation en mathématique est la détermination de la vérité :

> L'objectif principal de l'argumentation en mathématique est la recherche de la vérité. En mathématique on argumente quand on veut convaincre quelqu'un (soi-même ou un interlocuteur) de la vérité d'un énoncé. L'argumentation est alors un discours construit avec l'objectif de rechercher le « vrai ». (Ibid., p. 30)

Chez Pedemonte, la démonstration a un objectif spécifique qui est celui de valider un énoncé. Selon elle, cela revient « à attester la vérité à l'intérieur d'une théorie mathématique » (Pedemonte, 2002, p. 44).Il en résulte que la démonstration et l'argumentation ont un objectif commun, celui de « la recherche des raisons du « vrai » » (Pedemonte, 2002, p. 44). Pedemonte ajoute que la démonstration est élaborée à partir d'un raisonnement reposant sur un langage et par des règles particulières. De ce fait, ce raisonnement est bien de « la même nature que le raisonnement argumentatif » (Pedemonte, 2002, p. 44). Néanmoins, elle note une différence entre la démonstration et l'argumentation qui provient du fait que « la démonstration apporte une justification à l'intérieur d'un domaine théorique, alors que l'argumentation n'y est pas obligée » (Pedemonte, 2002, p. 45).

Ainsi, Pedemonte (2002) conclut qu'une démonstration est une argumentation particulière. Dans le contexte scolaire, Pedemonte souligne que les raisonnements mathématiques pratiqués dans les classes sont plus souvent des raisonnements argumentatifs que des démonstrations.

Dans notre étude, nous nous intéressons aux validations produites par les enseignants (en interaction avec les élèves) ou par les élèves et approuvées par l'enseignant pendant les séances d'enseignement. C'est pourquoi, nous considérons que dans le cadre de l'enseignement (au niveau secondaire) des mathématiques, les validations pratiquées et institutionnalisées par les enseignants sont avant tout des argumentations rationnelles (au sens de Pedemonte).

1.2 Le modèle des Espaces de Travail Mathématique

La question de la validation dans l'enseignement des mathématiques a été étudiée sous l'angle des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011), notés ETM. Le modèle des ETM a pour objectif de décrire et d'analyser la nature du travail mathématique attendu des élèves (ou plus généralement de ceux qui mettent en œuvre ce travail) au sein d'une institution scolaire donnée. Pour analyser le travail mathématique, les ETM sont organisés suivant deux plans :

- le *plan épistémologique,* composé de trois pôles : representamen, artefact et référentiel théorique. Il permet de structurer le contenu mathématique (et définit les attentes *a priori* sur le travail mathématique par rapport aux exigences de la discipline).
- le *plan cognitif*, composé de trois processus cognitifs : visualisation, construction et preuve. Il vise à structurer l'ETM lorsqu'il est proposé à un individu dont l'intention est d'effectuer le travail mathématique. Ce plan rend compte du travail mené par l'utilisateur de cet espace de travail pendant la résolution d'une tâche.

Le passage d'un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux pôles :

- la *genèse sémiotique* donne aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires ;
- la *genèse instrumentale* a pour fonction de rendre opératoires les artefacts dans le processus constructif ;
- la *genèse discursive* permet de donner sens aux propriétés pour les mettre en œuvre dans le raisonnement mathématique.

Ces trois genèses favorisent la circulation entre les plans épistémologique et cognitif en activant une articulation entre les composantes respectives des deux plans. L'étude des trois genèses passe par l'étude des dimensions (sémiotique, instrumentale, discursive) qui leurs sont respectivement associées et permet de rendre compte du développement du travail mathématique élaboré dans l'Espace de Travail Mathématique.
Cet ensemble de relations peut être visualisé grâce au diagramme suivant :

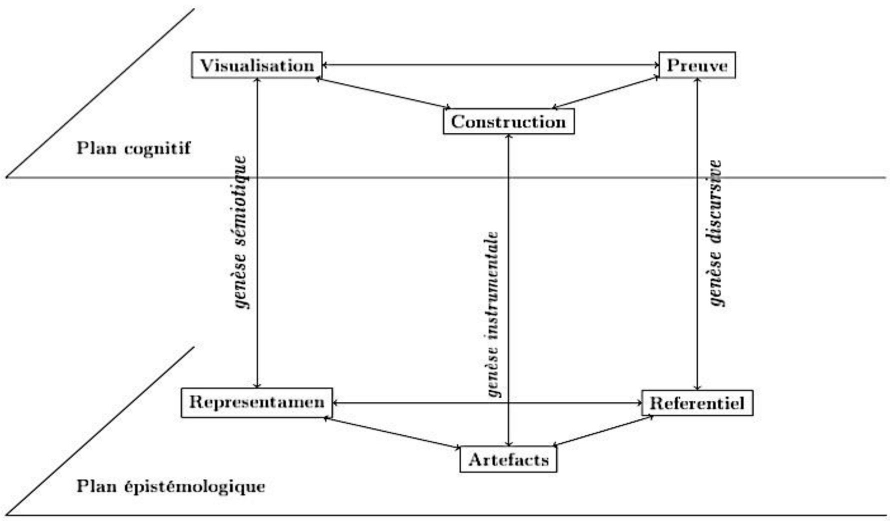


Figure 1. Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011)

Articulation des genèses de l'Espace de Travail Mathématique

Le diagramme de la Figure 1 fait apparaître un certain nombre de plans verticaux qui rendent compte des connexions entre les trois genèses et de la circulation du travail mathématique au sein de l'ETM. Ces trois plans sont décrits à partir des genèses qu'ils mettent en œuvre :

sémiotique-instrumentale [Sem-Ins], instrumentale-discursive [Ins-Dis] et sémiotique-discursive [Sem-Dis].

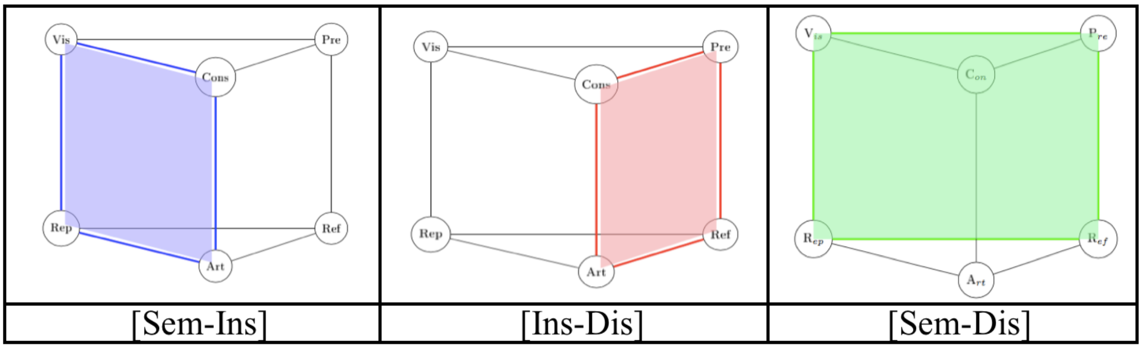


Figure 2. Les plans verticaux de l'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak & Nechache, 2014)

L'analyse du travail de mathématique via ces trois plans verticaux permet de comprendre la manière dont les trois genèses interagissent afin de constituer un travail mathématique complet (Kuzniak & Nechache, 2016).

Les différents types d'ETM

Il existe trois types d'Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) permettant de décrire le travail mathématique dans le cadre scolaire.

ETM de référence. Une communauté d'individus se met d'accord sur un paradigme donné afin d'énoncer des problèmes et de structurer leurs solutions en favorisant des outils ou des manières de penser. Le contenu mathématique à enseigner est défini par une institution et est décrit dans les ETM de *référence*.

ETM idoine. Il s'agit d'un environnement organisé de telle manière qu'un élève s'engage dans la résolution de problème. Cet ETM permet un travail dans le paradigme correspondant à la problématique visée et ses différentes composantes doivent être organisées de manière valide.

ETM personnel. Des ETM idoines sont mis en œuvre dans les classes pour que les élèves se les approprient grâce aux connaissances, et aux fonctions cognitives qui leur sont propres. Ces espaces deviennent par la suite ce que nous appelons les ETM personnels.

En conclusion, dans une institution scolaire donnée, les ETM de référence sont aménagés en des ETM idoines par les professeurs pour permettre la mise en place effective dans les classes où chaque élève travaille dans son ETM personnel.

L'étude de la validation dans le domaine des probabilités, nous conduit à analyser la manière dont ces validations sont construites. Il s'agit pour nous d'examiner le travail de validation lors de la résolution de tâches probabilistes du point de vue des différents plans et différentes genèses de l'ETM. Il s'agit également d'identifier le discours de la validation produit à l'issue de ce travail. Cela nous permet par la suite de caractériser les formes de validation pratiquées par les enseignants dans l'enseignement des probabilités.

1.2 Tâches mathématiques et ETM

Dans ses travaux sur les tâches de problématisation, Sierpinska (2004) procède à une revue exhaustive de la littérature autour de la notion de tâche mathématique dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques. Sierpinska retient alors la définition suivante de la tâche mathématique :

> J'utilise l'expression *tâche mathématique* dans un sens large pour se référer à n'importe quel type de problèmes mathématiques, dont les hypothèses et les questions sont clairement formulées, et dont on sait que les élèves peuvent les résoudre dans un temps que l'on peut prévoir.[1] (Sierpinska, 2004, p. 10)

En adaptant la définition de Sierpinska au modèle des ETM, la tâche mathématique est pour nous tout exercice, question ou problème réalisé dans un temps limité et dans un contexte donné. Les conditions de réalisation de ce travail mathématique sont définies par l'Espace de Travail Mathématique dans lequel la tâche est proposée.

Niveau d'exigence d'une tâche

L'étude du travail de validation produit lors de l'exécution des tâches probabilistes nécessite d'analyser ces tâches mises en œuvre dans les ETM idoines. L'analyse d'une tâche à travers les ETM a été conduite selon deux points de vue :

- D'un point de vue épistémologique, l'analyse prend en compte les outils *sémiotique, technologique et théorique* du plan épistémologique (Kuzniak, Nechache & Drouhard, 2016) pour résoudre la tâche. Ces outils sont associés respectivement à la genèse sémiotique, instrumentale et discursive. Nous avons également utilisé, pour cette analyse, la notion de praxéologie (Bosch & Chevallard, 1999) pour déterminer les différentes techniques utilisées dans la résolution de la tâche et les technologies de référence justifiant ces techniques.
- D'un point de vue cognitif, l'analyse de la tâche permet de rendre compte de la manière dont le sujet utilise les outils (sémiotiques, technologiques, théoriques) pour résoudre la tâche. Cette analyse s'appuie sur l'identification des *demandes cognitives* (Stein & Smith, 1998) nécessaires pour effectuer la tâche et des différentes *adaptations des connaissances* (Robert, 2007) que le sujet doit réaliser.

Cette analyse de la tâche prend donc en compte les exigences épistémologiques liées à la conception de la tâche et les exigences cognitives liées à sa réalisation. L'analyse d'une tâche dans les ETM est donc associée à deux aspects qui définissent le niveau d'exigence d'une tâche (Nechache, 2017).

Catégorisation des tâches et du travailleur sujet

L'analyse du travail de validation lors de la résolution de tâches via les ETM nous a conduite à catégoriser les tâches en fonction de leur niveau d'exigence. A partir des travaux de Stein et Smith (1998), White et Mesa (2014) et Robert (2007), nous avons construit trois catégories de tâches : simples, standards et riches. Un sujet qui est confiné constamment dans l'une des trois catégories de tâches mathématiques acquiert une identité de travailleur mathématicien. Le travail mathématique de ces catégories de tâches au sein de l'ETM entraîne différentes formes du travail du sujet. Ces formes dépendent fortement de la catégorie des tâches. Ainsi à chacune des trois catégories de tâches, nous associons respectivement une catégorie de travailleur-sujet : tâcheron, technicien et ingénieur.

Tâches simples

La résolution de ces tâches nécessite l'usage de procédures « simples » qui font appel aux connaissances déjà mémorisées et aux techniques de résolution connues. Ces connaissances et ces techniques sont indiquées dans l'énoncé de la tâche et font partie de l'ETM idoine et de l'ETM personnel du sujet. Ce sont des tâches à faible niveau d'exigence. Un travailleur-sujet exerçant ces tâches est qualifié de travailleur « tâcheron ».

[1] Notre traduction

Tâches standards
La résolution de ces tâches nécessite d'identifier et d'appliquer des connaissances ou des techniques utiles. Ces connaissances et ces techniques ne sont pas indiquées dans l'énoncé de la tâche mais elles font parties de l'ETM idoine et l'ETM personnel du sujet. Ces tâches nécessitent éventuellement d'enchaîner et de mettre en lien plusieurs procédures. Ce sont des tâches à un niveau d'exigence moyen. Un travailleur-sujet exerçant ces tâches est qualifié de travailleur « technicien ».
Tâches riches
La résolution de ces tâches fait appel à des connaissances et à des techniques de résolution qui ne sont pas nécessairement apprises et qui ne sont disponibles ni dans l'ETM idoine, ni dans l'ETM personnel du sujet. La résolution de ces tâches peut recourir au changement de domaines mathématiques (Montoya & Vivier, 2014), de registres de représentation sémiotique (Duval, 1995) et à la modélisation. Ces changements sont à la charge du sujet. Un travailleur-sujet exerçant ces tâches est qualifié de travailleur « ingénieur ».
Cette double catégorisation constitue un outil méthodologique pour étudier et identifier le travail mathématique produit lors de la mise en œuvre des tâches dans les ETM idoines.

1.3 Questions de recherche

Nous avons choisi d'utiliser le modèle des ETM pour étudier le travail de validation et les formes de validation pratiquées et institutionnalisées par les professeurs dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^{e} et de 2de. Les questions principales qui ont guidé notre travail de thèse sont les suivantes :

1) Jusqu'à présent dans l'enseignement des mathématiques en France, la démonstration est une forme de validation privilégiée, en particulier dans le domaine de la géométrie, dont l'apprentissage débute au collège. Existe-t-il alors des différences entre les formes de validation dans l'enseignement de la géométrie et dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^{e} et de 2de ?
2) Notre travail de recherche vise à caractériser les formes de validation pratiquées dans le domaine des probabilités dans les classes de 3^{e} et de 2de. Quelles sont les formes de validation privilégiées dans la résolution de tâches dans le domaine des probabilités en classe de 3^{e} et en classe de 2de ? Ces formes de validation sont-elles propres à ces deux niveaux de classe ou sont-elles caractéristiques de l'enseignement du domaine des probabilités au niveau secondaire ?
3) Le choix de la validation et l'orientation du discours de validation lors des séances de résolution de tâches probabilistes paraissent dépendre de l'enseignant, en particulier de ses représentations et de ses conceptions sur la forme de la validation et sa place dans le domaine des probabilités. Quels sont les points de vue de l'enseignant sur la forme de la validation dans l'enseignement des probabilités ?

2. ÉLEMENTS METHODOLOGIQUES

Pour répondre aux questions de recherche, nous avons mené trois enquêtes. Dans la première enquête, nous avons cherché à répondre à la première question. Pour ce faire, une étude comparative des formes de validation et du travail de validation mis en œuvre dans le domaine de la géométrie et des probabilités a été conduite. Cette comparaison a été effectuée tout d'abord à travers l'analyse des programmes officiels et des documents ressources des deux niveaux de classe 3e et 2de. Par la suite, nous avons procédé à une série d'observations de séances d'enseignement dans deux classes de 3e et deux classes de 2de. Ces observations sont centrées sur les phases de correction d'exercices où il est question d'exposer les validations. Nous avons observé au total 21 séances. Ces dernières ont été filmées et transcrites intégralement.

Dans la deuxième enquête dont l'objectif est de répondre à la deuxième question, quatre tâches probabilistes extraites des documents ressources de différents niveaux de classe (3e, 2de, 1re S, T S)[2] ont été sélectionnées. Ces tâches ont été choisies en fonction de leur niveau d'exigence. Elles ont été proposées à 5 enseignants ayant plus de 10 ans d'expérience, exerçant dans différents établissements et dans différents niveaux de classe. La mise en œuvre de ces tâches en classe a été laissée à l'initiative de chacun de ces enseignants. Les séances observées (soit 9 séances au total) ont été filmées et transcrites intégralement.

Pour répondre à la dernière question, nous avons mené une enquête sous forme d'un entretien (enregistré à l'aide d'un dictaphone) avec chacun des cinq enseignants ayant participé à notre étude. Les questions que nous avons posées sont semi-ouvertes afin d'obtenir davantage d'éléments de réponse. Ces entretiens ont duré 45 minutes et ont été retranscrits intégralement.

Dans la suite, nous avons choisi de présenter une des quatre tâches que nous avons proposées dans la deuxième enquête aux enseignants ayant participé à notre étude. Cela nous permettra d'illustrer la manière dont nous avons conduit l'analyse du travail de validation du point de vue des ETM. Cela nous permettra également de présenter les principaux résultats de notre recherche.

Exemple d'analyse d'une tâche et de sa mise en œuvre

Dans ce paragraphe, nous proposons à partir d'un exemple d'une tâche probabiliste proposée aux enseignants d'illustrer la manière dont nous avons mené l'analyse des tâches et de leurs mises en œuvre dans les classes. La tâche choisie intitulée « segment et son milieu » est extraite des documents ressources de la classe de 3e (RESCOL-PROB, 2008) :

> Sur un segment *S*, on prend au hasard deux points *A* et *B*. On considère l'événement « la longueur du segment [*AB*] est strictement supérieure à la moitié de celle du segment *S* ». Quelle est la probabilité de cet événement ?

L'analyse de la tâche a été conduite dans l'ETM idoine potentiel[3] pour décrire le travail de validation produit *a priori* à l'issue de l'exécution de la tâche et identifier le rôle *a priori* des élèves. Ensuite, nous avons analysé la mise en place de cette tâche dans un ETM idoine effectif[4] afin d'étudier le travail de validation réellement produit. L'analyse détaillée de cette tâche dans l'ETM idoine potentiel et effectif est décrite dans notre travail de thèse (Nechache, 2016).

Analyse de la tâche dans l'ETM idoine potentiel

L'expérience aléatoire décrite dans cette tâche consiste à choisir au hasard deux points *A* et *B* sur un segment noté *S* de longueur donnée. Le choix d'un point sur un segment suit donc une

[2] Soit les quatre dernières années de l'enseignement secondaire, filière scientifique pour les deux dernières.

[3] L'ETM *idoine potentiel* est celui qui est construit au préalable pour être mis en place dans les classes.

[4] Les ETM *idoines effectifs* sont les ETM *idoines* potentiels effectivement mis en place dans les classes par les professeurs

loi uniforme sur *S*. Il y a indépendance entre les deux événements respectivement « choisir le premier point » et « choisir le second point ». Il s'agit de déterminer la probabilité de l'événement *D* : « la longueur du segment [*AB*] est strictement supérieure à la moitié de celle du segment *S* ».
Dans le document ressource de la classe de 3e (RESCOL-PROB, 2008), deux méthodes ont été suggérées. Nous présentons ci-dessous ces méthodes que nous avons détaillées.

Méthode 1 : Simulation à l'aide d'un tableur

Pour déterminer la probabilité de l'événement *D*, les auteurs du document ressource de la classe de 3e (Ibid., 2008) proposent d'abord d'effectuer une simulation de l'expérience aléatoire et de déterminer la fréquence de *D* (phase 1), puis d'estimer la valeur de la probabilité à partir de cette fréquence (phase 2).
Phase 1 : Simulation et détermination de la fréquence de *D*
On considère par exemple que la longueur du segment *S* est égale à 1. L'information « choisir deux points au hasard sur le segment *S* » est interprétée comme le choix de deux nombres réels appartenant à l'intervalle [0 ; 1]. Ces deux nombres réels sont respectivement les abscisses (notées *X* et *Y*) respectifs des points *A* et *B*. L'univers de l'expérience aléatoire est alors $[0; 1] \times [0; 1]$. La résolution de la tâche revient alors à résoudre l'inéquation $|X\text{-}Y| > 1/2$.
Dans une feuille de calcul et à l'aide de la fonction ALEA(), les nombres réels *X* et *Y* sont écrits de la manière suivante : *X* = ALEA() et *Y* = ALEA().
De même, la longueur *AB* qui est égale à la distance entre *X* et *Y* est écrite dans la feuille de calcul sous la forme suivante : *AB* = ABS(*X*-*Y*). La longueur *AB* est par la suite comparée au nombre 1/2 (*cf. Figure 3*) :

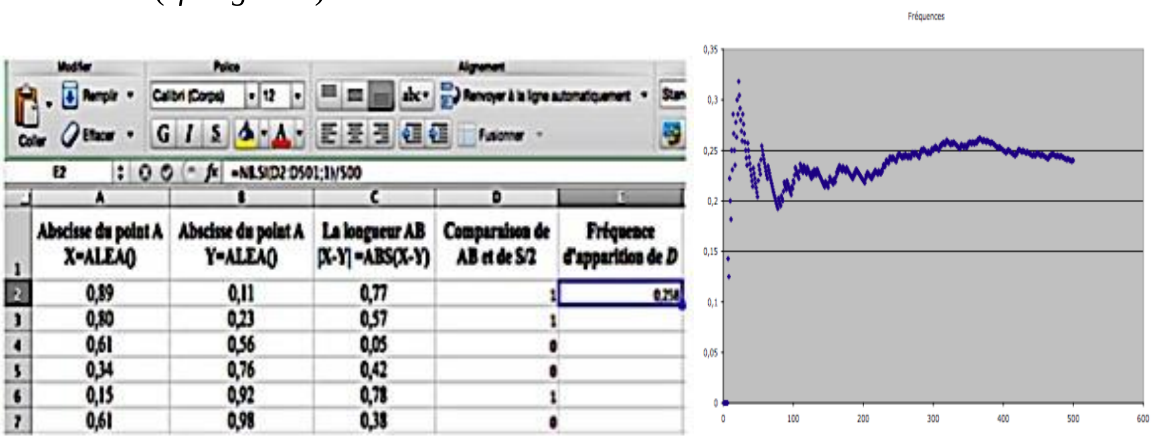


Figure 3

On décide par exemple de simuler 500 fois l'expérience, les fréquences de l'apparition de l'événement *D* sont données par la feuille de calcul. À partir d'un certain rang, on constate que les fréquences de l'événement *D* ont tendance à se stabiliser autour du nombre 0,25. Les auteurs du document ressource proposent également d'utiliser les ressources graphiques (*cf. Figure 3*) du tableur afin de visualiser l'évolution des fréquences au fur et à mesure de l'augmentation du nombre d'expériences.
Phase 2 : Estimation de la valeur de la probabilité de D
Selon la loi des grands nombres, la valeur de la fréquence de l'événement *D* se rapproche de la probabilité de l'événement *D*. Donc 0,25 est une valeur (arbitraire) possible estimée de la probabilité de l'événement *D*.
Dans cette première méthode, le travail de validation débute par une exploration visuelle sur le segment *S* (dimension sémiotique) liée à l'usage d'un outil technologique de la dimension instrumentale, ici un tableur, pour obtenir des nombres réels compris entre 0 et 1 avec la

fonction ALEA(), pour calculer la distance entre deux nombres réels (ici |*X*-*Y*|) à l'aide la fonction ABS (), et pour déterminer la fréquence de l'événement *D*. De ce fait, le travail de validation commence dans le plan [Sem-Ins]. Par la suite, à partir des résultats donnés par le tableur (dimension instrumentale) dans la première phase, et en utilisant la loi des grands nombres, outil théorique de la dimension discursive, une valeur de la probabilité de l'événement *D* est estimée et justifiée. Ainsi le travail de validation se termine dans le plan [Ins-Dis]. Dans cette méthode, les auteurs du document ressource de la classe de 3^{e} ne proposent aucun discours de la validation.
Dans cette méthode, le travail de validation est basé sur des outils technologiques complexes tels que la feuille de calcul et les fonctions du tableur. La dimension instrumentale est alors privilégiée dans le travail de validation.

Méthode 2 : Utilisation d'un support géométrique (carré de dimension 1)

De la même manière que dans méthode précédente, on considère que la longueur du segment *S* est égale à 1. Dans cette deuxième méthode, le travail de validation est basé sur l'étude de la distance |*X* - *Y*| entre deux variables aléatoires continues *X* et *Y* qui suivent la loi uniforme sur [0 ; 1] (outils théoriques de la dimension discursive).

La longueur *S* étant prise comme unité, on choisit au hasard un point de coordonnées (*X* ; *Y*) dans le carré de côté 1 (*cf. Figure 4*). Le carré $[0\,;1]\times[0\,;1]$ devient alors le support géométrique de la validation (outil de la dimension sémiotique). De ce fait, la détermination de la probabilité de l'événement *D* revient à trouver tous les couples tel que |*X*-*Y*| > 1/2. L'inéquation |*X*-*Y*| > 1/2 est alors résolue graphiquement (*cf. Figure 5*) sur le carré $[0\,;1]\times[0\,;1]$ en considérant deux cas :
- Si $X > Y$ alors $Y < X - 1/2$
- Si $X < Y$ alors $Y > X + 1/2$

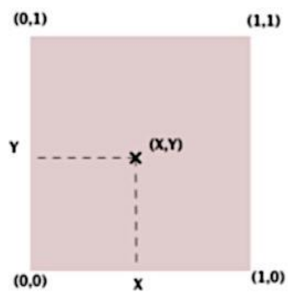


Figure 4

Ces deux inéquations sont résolues graphiquement, en traçant les deux droites (d1) et (d2) d'équations respectives *Y*= *X*- 1/2 et *Y*= *X*+ 1/2. L'ensemble des points (*X* ; *Y*) solutions est composé des deux triangles rectangles bleus (*cf. Figure 5*).
La probabilité de l'événement *D* est obtenue par un calcul simple de la somme des aires des deux triangles bleus divisée par l'aire du carré :
p(*D*) = $\frac{2 \times Aire(bleu)}{Aire\ carré} = \frac{1}{4}$

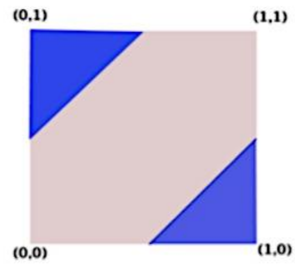


Figure 5

Dans cette méthode, le travail de validation est basé sur le carré de dimension 1 en tant qu'outil sémiotique (dimension sémiotique). Le traitement de la tâche dans cette méthode nécessite l'usage des outils théoriques (dimension discursive) tels que la résolution graphique d'inéquations et le calcul de la probabilité dans le cas continu qui n'est pas un objet d'enseignement en classe de 3^{e}. Ce travail de validation est placé principalement dans le plan [Sem-Dis].
Le niveau d'exigence de cette tâche est ici élevé. Dans ce cas, cette tâche est considérée comme une tâche riche et le rôle *a priori* de l'élève est celui d'un ingénieur.

Exemple de mise en œuvre dans une classe 3^{e}

Dans ce paragraphe, nous présentons une analyse de la mise en œuvre de la tâche présentée précédemment dans une classe de 3e. Nous précisons que le scénario de la mise en œuvre de cette tâche a été entièrement conçu et mis en place par le professeur responsable de cette classe. En effet, notre objectif est d'analyser le travail de validation produit à l'issue de la résolution de cette tâche et d'identifier la forme de validation pratiquée par ce professeur.
Le travail de validation proposé par le professeur est élaboré en trois phases : exploration de l'expérience aléatoire, simulation de l'expérience aléatoire et estimation de la probabilité, et justification de la probabilité estimée.

Phase 1 : Exploration de l'expérience aléatoire

Dans cette phase, les élèves de la classe ont construit un segment *S* (à l'aide d'une règle graduée) d'une longueur choisie arbitrairement (ici la longueur est de 6 *cm*). Puis, ils ont choisi (en fermant les yeux) deux points *A* et *B* sur le segment S (autrement dit selon la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 6]). Ils ont alors mesuré à l'aide d'une règle graduée la longueur *AB*. Enfin, ils ont comparé la mesure *AB* obtenue à la moitié de celle de *S*, soit 3 *cm*.

Le professeur relève au tableau chacun des résultats obtenus (*cf. Figure 6*) par les élèves afin de les discuter. À travers les questions du professeur, les élèves ont conclu que la procédure qu'ils utilisaient ne leur permettait pas d'estimer convenablement la probabilité de l'événement *D* en raison de l'insuffisance de la taille de l'échantillon. Le professeur ajoute que le choix au hasard de deux points sur le segment S avec « les yeux fermés » n'est pas évident. Un élève intervient en proposant d'effectuer une simulation de l'expérience aléatoire, ce que le professeur approuve.

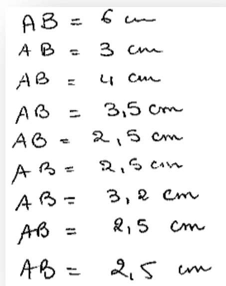


Figure 6

Phase 2. Simulation de l'expérience aléatoire et estimation de la probabilité

Le professeur propose aux élèves d'assimiler le choix au hasard de deux points sur un segment d'une longueur donnée à un lancer de deux dés. Il ajoute que la simulation du lancer des dés doit se faire réellement à l'aide de deux dés.
Le passage de l'expérience initiale vers l'expérience aléatoire à simuler induit un changement de domaine en passant du domaine de la géométrie plane vers celui des probabilités. Ce passage induit également un changement de l'univers de l'expérience en passant de $S \times S$ à $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Précisons que ce changement de domaine et d'univers est pris intégralement en charge par le professeur. Nous résumons dans le tableau ci-dessous le passage de l'expérience initiale à l'expérience simulée effectué par le professeur :

Expérience initiale	Expérience simulée
S un segment d'une longueur donnée *L*	*S* un segment de longueur 5 cm et gradué de 1 à 6
On prend au hasard deux points *A* et *B* sur le segment *S*	On lance deux dés et on s'intéresse au résultat affiché sur chacune des faces supérieures. Le premier dé donne l'abscisse du point *A* (notée x_A) et le deuxième dé donne l'abscisse du point *B* (notée x_B)
On mesure la longueur *AB*	On calcule la valeur absolue de la différence entre x_A et x_B avec 2,5

La longueur AB est strictement supérieure à la moitié de S soit 1/2	On compare la valeur absolue de la différence entre x_A et x_B avec 2,5
Les issues réalisant l'événement D sont dans l'intervalle $]L/2\ ;L]$	Les issues réalisant l'événement D appartiennent à l'ensemble $\{3, 4, 5\}$. Ces valeurs correspondent aux différentes longueurs possibles de AB lorsque la longueur du segment S vaut 5 cm.

Tableau 1. Traduction de l'expérience aléatoire en une expérience simulée

L'expérience initiale est simulée réellement « à la main » 50 fois par chacun des dix groupes (constitués de deux élèves) de la classe. Ces derniers ont eu pour consigne de noter les résultats de chacun des 50 lancers, mais aussi le résultat de la différence des valeurs des faces supérieures dans un tableau. Les élèves ont dénombré toutes les issues réalisant l'événement D sur les 50 lancers et ont calculé « à la main » la fréquence d'apparition de l'événement D. L'observation des dix résultats permet d'affirmer que les fréquences fluctuent autour de 30%. Le professeur propose ensuite de regrouper les résultats obtenus dans un tableur et de calculer la fréquence de l'événement D sur un échantillon de taille 500. Cela a permis de constater la stabilisation des fréquences et d'estimer la valeur de la probabilité de D, égale à environ 0,3.

Phase 3 : Justification de la probabilité estimée

Le professeur insiste sur le fait que les résultats obtenus par la simulation permettent seulement de conjecturer la valeur de la probabilité et de ce fait, qu'il est nécessaire de démontrer ce résultat estimé. Pour ce faire, il leur suggère de construire (et de remplir) un tableau à double entrée tel que :

- la première ligne corresponde au lancer du premier dé,
- la première colonne corresponde au lancer du deuxième dé,
- chacune des 36 cases du tableau corresponde à la différence en valeur absolue des valeurs affichées sur les faces supérieures des deux dés.

1[er] dé / 2[e] dé	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Tableau 2. Résultats des lancers de deux dés

En entourant le nombre de cas favorables (tous les nombres supérieurs à 2,5) et en utilisant la formule de Laplace, les élèves déduisent que la probabilité de l'événement D est égale à 1/3. Cette valeur est approuvée par le professeur car elle est relativement proche de la valeur estimée dans la phase 2 (30%). Or, la probabilité obtenue ici est différente de celle qui obtenue dans l'ETM idoine potentiel (égale à 1/4). Cela s'explique par le fait que le professeur a changé l'univers de l'expérience aléatoire en considérant l'univers $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ au lieu de $S \times S$. Cela implique un calcul de probabilité sur un ensemble fini et discret au lieu d'un ensemble infini et continu. Les deux expériences aléatoires (initiale et simulée) n'ont donc pas le même univers.

Le travail de validation mis en œuvre par le professeur pour résoudre la tâche est réalisé en trois phases. Ce travail de validation débute (phase 1) par une exploration visuelle sur le segment S (dimension sémiotique) liée à l'usage de la règle graduée (outil technologique de la

dimension instrumentale) pour construire le segment et mesurer sa longueur. Le travail de validation commence dans le plan [Sem-Ins].
Dans la deuxième phase, les élèves ont simulé « à la main » l'expérience aléatoire proposée par le professeur. Les résultats obtenus par les élèves sont relevés dans une feuille de calcul du tableur (outil technologique de la dimension instrumentale) afin de calculer la fréquence d'apparition de l'événement *D* sur un échantillon de taille plus grande. À partir de la fréquence observée, une valeur de la probabilité de l'événement *D* est estimée et justifiée selon la loi des grands nombres (outil théorique de la dimension discursive). Le travail de validation est placé dans le plan [Ins-Dis]. Dans la troisième phase, le professeur propose une justification de la probabilité estimée. Cette justification est basée sur le tableau à double entrée (outil sémiotique) pour dénombrer les cas favorables et sur la formule de Laplace (outil théorique) pour calculer la probabilité de *D*. Ainsi, le travail de validation se termine dans le plan [Sem-Dis]. Dans l'ensemble, le travail de validation mis en œuvre par le professeur favorise l'articulation entre les différentes genèses de l'ETM idoine impliquant une circulation du travail de validation dans les différents plans verticaux de l'ETM idoine. Il en résulte que le travail de validation produit est complet (Kuzniak & Nechache, 2014).
Par ailleurs, le discours de la validation institutionnalisé par l'enseignant à l'issue du travail de validation (*cf. Figure 6*) est constitué d'un tableau à double entrée (outil sémiotique) présenté dans la phase 3 et de l'égalité « $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ » représentant la probabilité de l'événement *D*. Dans ce cas, les outils de la dimension sémiotique sont utilisés pour justifier les résultats obtenus dans la phase 2.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

Figure 6. Le discours de la validation

Tel qu'il est produit, le travail de validation semble être pris en charge par le professeur. La construction de la simulation (dans la phase 2) et la justification de la probabilité (dans la phase 3) sont suggérées directement par le professeur. Les élèves ont, pour leur part, eu à leur charge la simulation réelle de l'expérience et le calcul de la probabilité (avec la formule de Laplace). Le professeur a non seulement changé la tâche qui est *a priori* riche en une tâche quasi simple, mais il a également modifié le rôle des élèves en les assignant à la fonction de tâcheron au lieu d'ingénieur comme nous l'avions prévu.
Les résultats issus de cette analyse de tâche et de sa mise en œuvre en classe de 3^e, nous ont permis de constater que dans le cadre de la résolution de tâches riches au niveau de la classe de 3^e, où les outils théoriques nécessaires à cette résolution ne font pas partie du référentiel théorique de l'ETM idoine et personnel de l'élève, les outils sémiotiques sont privilégiés pour construire la validation. Ces outils constituent également le discours de la validation. En revanche, cela n'est pas le cas, lorsque l'on propose la résolution d'une tâche riche pour une classe de Terminale S. En effet, notre analyse de mise en œuvre de tâche riche en classe de 3^e met en évidence, que la validation construite est fondée principalement sur les outils théoriques (dimension discursive). Ainsi, dans le cas d'une résolution d'une tâche riche, le travail et les formes de validation sont différents selon le niveau de classe dans la tâche est proposée.

4. PRINCIPAUX RESULTATS

Dans le paragraphe précédent, à travers un exemple nous avons présenté quelques-uns des résultats obtenus (dans la deuxième enquête) dans notre thèse. Précisons que ce choix d'exemple de tâche est justifié par le fait que cette tâche, que l'on qualifie de riche, rend compte des enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités au niveau du secondaire. En particulier, cette tâche rend compte de la complexité de la validation dans le cas où les outils nécessaires pour l'élaborer ne sont pas des éléments du programme du niveau de classe dans lequel elle est proposée.
L'analyse des résultats des trois enquêtes menées dans la thèse met en évidence qu'il existe différentes formes de validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire qui dépendent du référentiel théorique et du niveau de la classe, de la catégorie de la tâche, de la place accordée à la dimension sémiotique et instrumentale par l'enseignant dans l'élaboration de la validation.

4.1 Le référentiel théorique et le niveau de la classe

Au début de l'enseignement et l'apprentissage des probabilités (en classes de 3^{e} et de 2de), le référentiel théorique est en cours de cours de construction. De ce fait, il ne peut pas assurer sa mission de fournir les outils théoriques pour bâtir des discours de validation fondés sur des théorèmes ou des propriétés au même titre qu'en géométrie. Mais, à partir de la classe de 1re S, le référentiel évolue et permet de produire des discours de validation basés sur des outils théoriques.

4.2 La catégorie de la tâche (simple, standard, riche)

Lorsqu'il s'agit de résoudre des tâches standards (ou simples), les outils de la dimension sémiotique tels que les arbres ou les tableaux sont utilisés. Les formes de validation mobilisent alors des raisonnements de type diagrammatique (Nechache, 2016). En revanche, lorsqu'il s'agit de résoudre des tâches riches, les outils de la dimension instrumentale, en particulier dans le cas des simulations, sont utilisés dans le travail de validation. Les formes de validation mobilisent alors des raisonnements assistés par des simulations. Il en résulte des formes de validation distinctes.

4.3 La place accordée à la dimension sémiotique et à la dimension instrumentale par l'enseignant dans l'élaboration de la validation

En classes de 3^{e} et de 2de, les enseignants s'appuient essentiellement sur les outils de la dimension sémiotique pour mettre en œuvre le travail de validation. Les enseignants utilisent également ces outils (les arbres et les tableaux) dans le discours écrit de la validation. Mais à partir de la classe de 1re S, le référentiel théorique évolue en termes de propriétés. De ce fait, les formes de validation produites prennent appui sur les outils du référentiel théorique. Lorsqu'il s'agit d'utiliser la simulation, les enseignants font appel aux outils de la dimension instrumentale. Ces outils sont très souvent utilisés pour vérifier, contrôler ou découvrir un résultat et non pas pour le justifier. Pour justifier les résultats obtenus par la simulation, ces enseignants proposent d'utiliser soit les intervalles de confiance, soit la loi des grands nombres. D'autres enseignants proposent d'utiliser un arbre ou un tableau.

5. BILAN ET PERSPECTIVES

Nous avons identifié plusieurs formes de validation privilégiées dans l'enseignement qui sont caractérisées par leur dépendance à la catégorie de la tâche (simple, standard ou riche), au niveau de la classe considérée et à certains choix du professeur. Une étude complémentaire serait d'observer si ces formes de validation sont également présentes dans d'autres niveaux de classes et s'il existe d'autres formes de validation que nous n'avons pas identifiées dans ce travail de thèse.

Pour les besoins de cette recherche, nous avons développé dans le cadre des ETM un nouvel outil méthodologique qui est la catégorisation des tâches (simple, standard, riche) et du travailleur sujet (tâcheron, technicien, ingénieur). Cette catégorisation s'est révélée intéressante pour analyser le travail de validation et a permis de caractériser des formes de validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités, mais aussi d'identifier le rôle (la responsabilité) des élèves dans le travail. Cet outil méthodologique de la catégorisation des tâches et du travailleur-élève a été adapté par la suite pour analyser dans le cadre des ETM le travail mathématique mis en œuvre dans la résolution des tâches probabilistes (Nechache, 2017) et nous a permis d'identifier et de caractériser des transformations par les professeurs dans la nature des tâches probabilistes ayant pour conséquence d'abaisser le niveau d'exigence. Cela nous amène à questionner l'origine de ces transformations et la manière de conserver le niveau d'exigence des tâches lorsqu'elles sont proposées dans les classes.

Nous avons identifié une diversité de tâches probabilistes qui sont potentiellement porteuses d'un travail mathématique complet (Kuzniak & Nechache, 2016). L'analyse de ces tâches via l'ETM nous a permis d'identifier des difficultés d'enseignement voire des blocages lors de la mise en œuvre de certaines d'entre elles dans les classes. Il s'agit alors de comprendre comment et pourquoi ces blocages surviennent. Un travail de recherche portant sur cette question à partir de l'étude plus fine des ETM personnels des enseignants (en formation initiale) et des ETM idoines conçus par ces enseignants) autour de tâches emblématiques est en cours de réalisation.

Les tâches que nous avons identifiées comme étant potentiellement riches peuvent être un levier pour questionner le travail mathématique autour de l'enseignement des probabilités en mettant notamment l'accent sur le rôle de l'analyse *a priori* des tâches. La dialectique entre ces analyses *a priori* et les mises en œuvre effectives de ces tâches dans les classes permet de créer une dynamique de formation basée sur les trajectoires de problèmes (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2013). Ce type de formation a fait objet d'un travail de recherche portant sur la notion de tâche emblématique dans le domaine des probabilités (Kuzniak & Nechache, 2016). Par ailleurs, on peut utiliser l'outil de la catégorisation des tâches et du travailleur-sujet dans le cadre de la formation des enseignant pour analyser des séances d'enseignement. Cela peut permettre aux enseignants de prendre conscience des formes de travailleur-sujet qu'ils développent chez leurs élèves.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18(2)*, 147–176.
BOSCH, M. & CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité scientifique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(1),* 77–125.
DUVAL, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x, 31,* 37–61.
DUVAL, R., & EGRET, M. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères-Irem, 12,* 114–140.
DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Bern : Peter Lang.
KUZNIAK, A., NECHACHE, A. & DROUHARD, J.-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education, 48(6),* 861–874.
KUZNIAK, A. & NECHACHE, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines : existence et usages. *Cinquième symposium des Espaces de Travail Mathématique,* Florina, Grèce, juillet 2016.
KUZNIAK, A. & NECHACHE, A. (2014). Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. In *Actes du 41e colloque COPIRELEM*, Mont de Marsan.
KUZNIAK, A., PARZYSZ, B. & VIVIER, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training. *The Mathematics Enthusiast, 10,* 407– 440.
KUZNIAK, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 9–24.
MONTOYA-DELGADILLO, E., & VIVIER, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des espaces de travail mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19,* 73–101.
NECHACHE, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22,* 67–90.
NECHACHE, A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot, Paris. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01345747.
PEDEMONTE, B. (2002). Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble 1, Grenoble.
RESCOL-PROB. (2008). Ressources pour les classes de collège - Probabilités. Repéré à http://eduscol.education.fr
ROBERT, A. (2003). Tâches mathématiques et activités des élèves une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices cherchés en classe de collège. *Petit x, 62,* 61–71.
ROBERT, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 27(3),* 271–311.
SIERPINSKA, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: task problematization. *International Journal of Mathematics Education, 24(2),* 7–15.
STEIN, MK. & SMITH, MS. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4),* 268–275.
WHITE, N. & MESA, V. (2014). Describing cognitive orientation of Calculs I tasks across different types of coursework. *ZDM Mathematics Education, 46(4),* 675–690.

LA FONCTION DE DENSITE AU CARREFOUR ENTRE PROBABILITES ET ANALYSE. UNE INGENIERIE DIDACTIQUE EN CLASSE DE TERMINALE SCIENTIFIQUE

Charlotte **DEROUET**

ESPE de Strasbourg, LISEC équipe AP2E, Université de Strasbourg

charlotte.derouet@espe.unistra.fr

Résumé

Dans cet article, nous présentons un aperçu global sur notre travail de thèse portant sur l'articulation entre les lois à densité et les intégrales dans la filière scientifique de la dernière année de l'enseignement secondaire français (grade 12). Les deux sous-domaines mathématiques, les probabilités à densité et le calcul intégral, nouveaux pour les élèves à ce niveau scolaire, sont mis en relation notamment à travers l'égalité $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ où f est la fonction de densité associée à la variable aléatoire X. Dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique et de la théorie de l'activité, nous donnons, dans un premier temps, quelques résultats des analyses préalables de notre méthodologie de type ingénierie didactique. Nous montrons ensuite comment les outils méthodologiques que nous avons mis en place pour étudier des déroulements de séances nous permettent d'analyser un épisode d'une des séances d'introduction conçues, dans le but de répondre à notre question de recherche. Enfin, nous concluons par des prolongements possibles à nos recherches.

Mots clés

Probabilités, analyse, fonction de densité, Espace de Travail Mathématique, théorie de l'activité, ingénierie didactique.

INTRODUCTION

A la rentrée 2012, la mise en place des nouveaux programmes de lycée en France a lancé des débats au sein de la communauté mathématique. Certains mathématiciens et enseignants remettaient en question la place de plus en plus importante accordée aux probabilités et à la statistique dans l'enseignement au lycée (Colmez, 2012 ; Perrin, 2015), tandis que d'autres mettaient en avant la possibilité de connecter l'enseignement des probabilités à celui d'autres domaines des mathématiques ou encore à d'autres disciplines (Raoult & Arnoux, 2013).
Notre travail de thèse porte sur l'articulation qui peut exister entre le domaine des probabilités et celui de l'analyse à travers la notion de fonction de densité dans la filière scientifique de la dernière année de l'enseignement secondaire français (grade 12), que nous appelons terminale S. L'objectif principal de notre thèse (Derouet, 2016) a été de concevoir et de mettre en œuvre une séquence d'enseignement et plus particulièrement des problèmes d'introduction de la notion de fonction de densité articulant à la fois les lois à densité et le calcul intégral. Le choix

de la classe s'est arrêté sur le grade 12 car il s'agit actuellement de la classe dans laquelle les lois à densité sont étudiées pour la première fois et le choix de la filière scientifique est lié au fait que c'est dans cette section que l'enseignement sur les lois à densité et le calcul intégral est le plus conséquent, notamment en probabilités où trois lois différentes sont au programme (les lois uniforme, exponentielle et normale).

Les probabilités à densité : quel(s) lien(s) avec le calcul intégral ?

Jusqu'au début de la classe de terminale (grade 12), les élèves rencontrent seulement des lois de probabilité discrètes. Dans le passage aux lois continues, on peut observer une rupture avec les probabilités discrètes. En effet, pour définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue, il faut préciser la probabilité de l'événement « X appartient à l'intervalle $[a\,;\,b]$ », pour tout intervalle $[a\,;\,b]$, et non plus donner la probabilité pour chaque événement élémentaire (qui est toujours nulle dans ce cas).
Dans le cas particulier des lois à densité, on arrive à une égalité entre une probabilité et une intégrale : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ $(*)$, où f est la fonction de densité associée à la variable aléatoire X. Cette égalité met en relation deux domaines mathématiques : les probabilités, d'un côté, et l'analyse, de l'autre ; et plus particulièrement, deux sous-domaines : les probabilités à densité et le calcul intégral.
Notre question de départ, qui a ensuite été précisée, était la suivante : Est-il possible de concevoir et de mettre en œuvre des problèmes d'introduction aux lois à densité qui permettent aux élèves de terminale S de construire conceptuellement cette égalité $(*)$? Il s'agit finalement de se demander si ce type de problèmes existe.
Revenons sur ce lien entre probabilité et calcul intégral. Si nous nous penchons sur les définitions données dans le programme de terminale S (MEN, 2011), l'égalité $(*)$ n'est pas présente sous cette forme. D'une part, dans la partie sur le calcul intégral, on définit « *l'intégrale d'une fonction continue et positive sur* $[a\,;\,b]$ *comme aire sous la courbe* » (p. 7). D'autre part, dans la partie sur les probabilités continues :

> On définit […] une variable aléatoire X, fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $X \in J$ comme aire du domaine : $\{M(x;y); x \in J \; et \; 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I. (p. 12).

On voit donc apparaître une nouvelle notion, l'aire sous la courbe. Il y a donc trois objets mathématiques en interaction : l'intégrale, l'aire sous la courbe et la probabilité (figure 1).

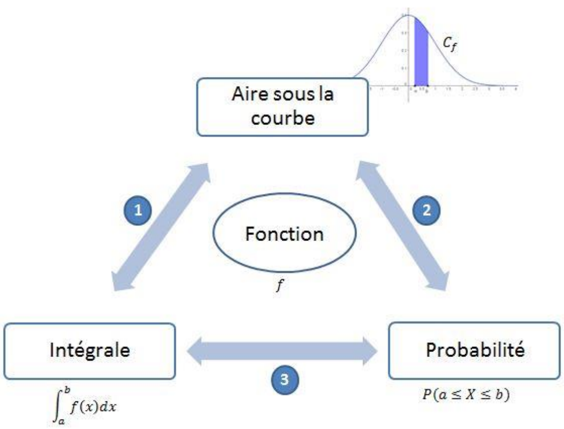


Figure 1. Relations entre intégrale, aire sous la courbe et probabilité

Ces trois objets mathématiques sont reliés, mais les relations deux à deux ne sont pas de même nature. Entre intégrale et aire sous la courbe (flèche 1), le lien est directement fait dans le programme, par la définition de l'intégrale. En revanche, entre probabilité et aire sous la courbe (flèche 2), le lien apparaît aussi dans le programme mais de façon indirecte. Il se fait par l'intermédiaire d'une fonction, la fonction de densité de probabilité. Enfin, entre probabilité et intégrale (flèche 3), la relation se fait à nouveau par l'intermédiaire de la fonction de densité f, de la même manière qu'entre probabilité et aire sous la courbe. On voit donc apparaître un objet central dans les différentes relations qui est la fonction. Cependant, la fonction f fait partie intégrante de l'intégrale (intégrale de la fonction f) et de l'aire sous la courbe (courbe représentative de la fonction f), ce qui n'est pas le cas pour la probabilité. Il y a un passage implicite de X variable aléatoire à f fonction de densité.
Vu la définition de l'intégrale, il est assez naturel de « rassembler » intégrale et aire sous la courbe et de ne considérer plus que la relation entre ce bloc, que nous considérons comme faisant partie du sous-domaine du calcul intégral, et la probabilité, appartenant au sous-domaine des probabilités à densité (figure 2). On peut donc voir la fonction de densité comme l'objet central pour faire la mise en relation entre les probabilités et l'analyse. Pour cette raison, nous avons décidé de focaliser notre recherche sur la notion de fonction de densité.

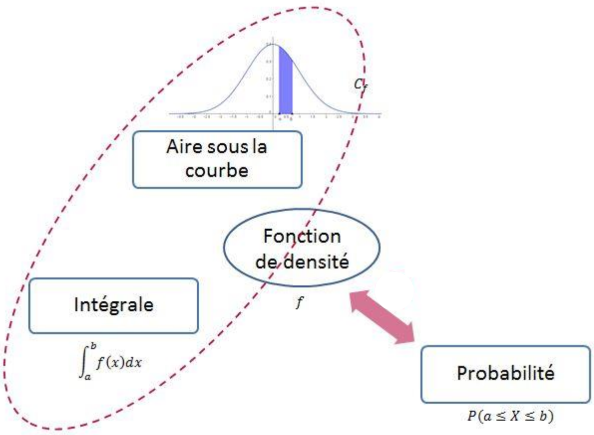


Figure 2. Relation entre calcul intégral et probabilités à densité

Dans cet article, nous allons donner un aperçu global sur la recherche menée dans le cadre de notre travail de thèse. Nous allons commencer par préciser le cadre théorique choisi et les questions de recherche. Nous poursuivrons en présentant la méthodologie générale que nous avons mise en œuvre. Ensuite, nous mettrons en évidence quelques résultats concernant les analyses préalables de la thèse. Enfin, après avoir présenté les problèmes d'introduction conçus dans le cadre du travail de thèse, nous montrerons comment les outils méthodologiques que nous avons mis en place pour l'étude des déroulements de séances nous permettent d'analyser un épisode d'une des séances d'introduction conçues pour répondre à notre question de recherche et nous dégagerons les résultats majeurs qui en ont découlé. Nous conclurons par des perspectives de recherche, faisant suite à ce travail.

Le modèle des Espaces de Travail Mathématique

Pour aborder cette question de l'articulation entre deux domaines mathématiques (les probabilités et l'analyse) dans les classes, nous avons fait le choix de nous placer dans le cadre du modèle des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011). Le modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM) permet de décrire le travail mathématique des élèves en situation de résolution de problèmes (figure 3). Il permet notamment de mettre en évidence des dynamiques dans le travail mathématique en prenant en compte deux plans : le plan épistémologique (en rapport avec les contenus mathématiques) et le plan cognitif (axé sur l'action de l'élève résolvant un problème). Ce modèle permet aussi de décrire les dynamiques entre trois dimensions (appelées genèses dans Kuzniak, 2011) :

- la dimension sémiotique, quand le travail mathématique porte sur les signes,
- la dimension instrumentale, liée à l'utilisation d'artefacts matériels ou non, et
- la dimension discursive, rattachée à un discours de preuve s'appuyant sur des définitions ou des théorèmes (ce qui est appelé le référentiel théorique).

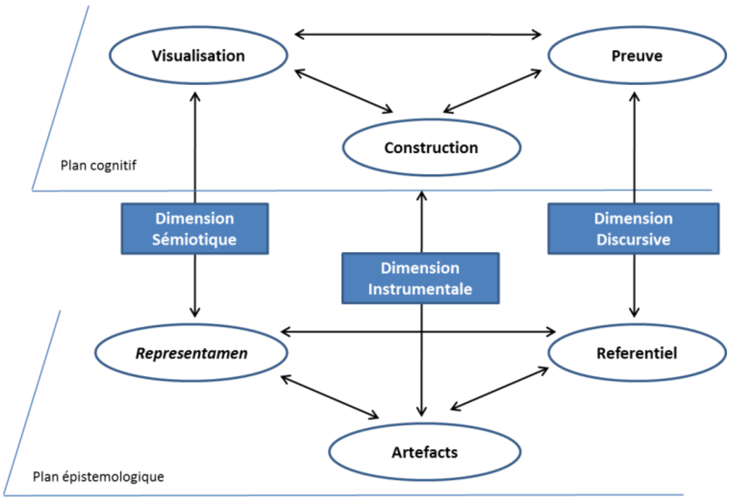


Figure 3. Le modèle des ETM

Le travail mathématique peut être décrit à plusieurs niveaux : l'ETM de référence, qui constitue le travail mathématique visé par l'institution, qui doit ensuite être aménagé en ETM idoine pour permettre une mise en place effective dans les classes, où chaque élève travaille dans son propre ETM personnel. Notre étude se concentre plutôt sur les ETM idoines potentiels (par exemple ceux proposés dans les manuels) et les ETM idoines effectifs (qui sont effectivement mis en place dans une classe), en appui sur l'ETM de référence (souvent ne pouvant être décrit que partiellement).

S'agissant de se questionner sur l'articulation entre deux sous-domaines, nous n'avons pas considéré un ETM global mais plutôt des ETM associés aux sous-domaines en jeu (Montoya Delgadillo & Vivier, 2014), à savoir les probabilités à densité (PaD) et le calcul intégral (CI). Ce point de vue nous permet de questionner les articulations entre ces deux ETM et d'identifier les dimensions en jeu lors de la résolution des tâches d'introduction de la notion de fonction de densité, en particulier pour vérifier s'il y a effectivement une construction du référentiel théorique autour de la notion de fonction de densité.

Quelques éléments de théorie de l'activité

Dans le modèle des ETM, la tâche mathématique prescrite active le travail mathématique mais n'est pas directement présente dans le modèle. Pour cette raison, nous avons pris en compte quelques éléments de la théorie de l'activité, plus particulièrement des éléments relatifs à l'analyse de tâches comme ceux utilisés dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique. Nous utilisons notamment les termes de *tâche mathématique*, qui renvoie à ce qui est à faire (le but à atteindre), et d'*activité mathématique*, qui renvoie à ce que développe l'élève pour réaliser cette tâche et donc atteindre son objectif (Rogalski, 2008). L'analyse de tâches et de déroulements, développée par Robert (2008b), permet des analyses fines des activités des élèves, qui peuvent ensuite être décrites de manière plus globale à l'aide du modèle des ETM.

Formulation de nos questions de recherche

Ce cadre théorique nous a permis de formuler trois questions de recherche. La question de recherche centrale est la suivante (QR3) :
Quels éléments didactiques peut-on prendre en compte pour concevoir et mettre en œuvre effectivement des tâches d'introduction qui permettent aux élèves de construire la notion de fonction de densité ?
A travers cette question, nous voulons montrer un « théorème » d'existence : nous cherchons à montrer qu'il existe bien des tâches, réalisables en classe de terminale S, qui permettent la mise en place d'activités mathématiques des élèves qui amènent à la construction de connaissances sur la fonction de densité ; mais de plus, nous voulons mettre en évidence par quels moyens ces activités sont possibles, du point de vue du travail mathématique en jeu mais aussi du point de vue de la gestion du travail mathématique de la classe par l'enseignant.
Cette question de recherche est précédée par des questions préalables qui la nourrissent. La première question (QR1) est relative à des préoccupations d'ordre épistémologique et historique :
Comment historiquement et épistémologiquement sont apparus les liens entre probabilités à densité et calcul intégral ? Comment a émergé le concept de loi à densité et tout particulièrement la notion de fonction de densité ?
La deuxième question (QR2) est quant à elle d'ordre didactique, elle concerne les enjeux didactiques derrière l'égalité ($*$) en classe de terminale S, repérables dans le programme et les manuels :
Quelles tâches sont proposées et quelles activités sont attendues des élèves pour, dans un premier temps, l'introduction de la notion de fonction de densité, et dans un second temps, pour exploiter les articulations entre l'ETM relatif aux probabilités à densité (ETM_{PaD}) et l'ETM relatif au calcul intégral (ETM_{CI}) ?

METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Méthodologie de type ingénierie didactique collaborative

L'objectif principal de cette recherche est de concevoir et mettre en œuvre des tâches mathématiques d'introduction de la notion de fonction de densité de probabilité, en restant dans le cadre du programme de terminale S, avec en particulier la contrainte que les séances proposées soient réalisables dans des classes de terminale S « ordinaires », tout du moins dans des conditions de fonctionnement habituelles c'est-à-dire sans aménagement du temps de classe, sans utilisation de matériel nouveau, sans modification des objectifs de l'enseignant pour sa classe (une des priorités en classe de terminale restant toujours la réussite des élèves au baccalauréat). Une question méthodologique s'est donc posée : quelle méthodologie de recherche mettre en place pour assurer la viabilité des séances conçues dans la classe ?
Le travail de recherche s'est inscrit dans une méthodologie de type ingénierie didactique, à laquelle nous avons cependant souhaité ajouter une dimension collaborative. Nous avons donc défini une méthodologie de type ingénierie didactique collaborative.

L'ingénierie didactique

La méthodologie de recherche de type ingénierie didactique est un processus expérimental constitué de quatre phases (Artigue, 1988) :

1. Les analyses préalables (analyse épistémologique des contenus visés, analyse curriculaire, analyse de l'enseignement usuel et de ses effets…), sur lesquelles s'appuie la conception de l'ingénierie ;
2. La conception et l'analyse *a priori* de l'ingénierie dans lesquelles le chercheur agit sur un certain nombre de variables permettant, *a priori*, d'engager le processus de validation ;
3. L'expérimentation permettant de recueillir diverses données ;
4. L'analyse *a posteriori* s'appuyant sur ces données et la validation qui se fonde essentiellement sur la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori*.

Cependant, dans ce type de méthodologie de recherche, les productions réalisées pour l'enseignement ne sont pas directement à destination des classes « ordinaires ».

Les recherches collaboratives

Des chercheurs canadiens (Bednarz, Poirier, Desgagné & Couture, 2001) proposent d'aborder la question de la production de séquences d'enseignement dans une autre perspective que celle de l'ingénierie didactique. Pour eux, une telle production ne peut se passer du point de vue des praticiens, c'est-à-dire des enseignants. Ils parlent alors de recherche collaborative.
Cette approche accorde une place importante à l'association chercheurs et enseignants. Bednarz *et al.* (2001) expliquent l'importance de cette collaboration :

> Il ne s'agit pas seulement […] de développer des situations d'enseignement riches et pertinentes sur le plan des apprentissages […] mais de produire des situations qui soient aussi viables en contexte (que valent en effet des scénarios s'ils ne rencontrent aucun écho dans l'expérience ?). (p. 45)

Ce travail d'équipe entre enseignants et chercheurs permet de donner plus de poids aux scénarios d'enseignement considérés et de « construire des activités, des interventions non seulement fécondes au plan des apprentissages mais aussi viables dans la pratique » (Bednarz *et al.*, 2001, p. 46). La recherche collaborative est caractérisée par une double dimension : une dimension formation, du côté de l'enseignant qui cherche à « se perfectionner », à améliorer ses pratiques, et une dimension recherche, du côté du chercheur.

Vers l'ingénierie didactique collaborative

Le couplage des deux méthodologies a donné ce que nous avons appelé une méthodologie de type ingénierie didactique collaborative (Derouet, en relecture). Tout comme pour les recherches collaboratives, ce type de recherche a une double finalité : les produits de la démarche et la diffusion doivent à la fois avoir des retombées pour la communauté de pratique (les enseignants) et pour la communauté de recherche (Desgagné, Bednarz, Lebuis, Poirier & Couture, 2001, p. 40). C'est le deuxième axe qui nous a intéressée dans le travail de thèse. Cependant, le premier axe n'a pas été oublié dans le processus, nous y reviendrons dans les perspectives.

Profil de l'enseignante impliquée dans le travail collaboratif

Dans le cadre de notre méthodologie d'ingénierie didactique collaborative, nous avons travaillé avec une enseignante de terminale S. Ce qui a conditionné le choix de l'enseignante est tout simplement une motivation de sa part de se former sur ces notions pour lesquelles elle n'était pas satisfaite de son enseignement. Elle était notamment en demande de problèmes d'introduction « plus convaincants » (citation de l'enseignante) pour la notion de fonction de densité et cherchait un moyen de plus motiver le besoin du calcul intégral. L'enseignante a plus de 20 ans d'expérience dans l'enseignement. C'est une ancienne formatrice de l'IUFM (Institut Universitaire de Formation des Maîtres) et elle est membre de plusieurs groupes IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). Son profil est bien entendu à prendre en compte. Sa classe de terminale S de l'année scolaire 2014-2015 (année de l'expérimentation) est de 35 élèves de milieu social plutôt favorisé dans un lycée parisien du 16è arrondissement.

Dans la méthodologie de type ingénierie didactique collaborative, le travail collaboratif implique une prise en compte du point de vue de l'enseignante et des contraintes de son contexte d'enseignement. Les contraintes posées par l'enseignante étaient de plusieurs ordres :

- des contraintes de temps : la séquence et en particulier les séances d'introduction ne devaient pas avoir une durée supérieure à ce qu'elle consacrait pour la séquence les années précédentes (2h pour l'introduction du calcul intégral et 2h pour l'introduction des lois à densité) ;
- des contraintes de résultats : les élèves devaient être capables de résoudre les mêmes tâches sinon plus que les années précédentes ;
- des contraintes matérielles : les séances d'introduction devaient être en classe entière, dans une salle de classe équipée d'un ordinateur et d'un vidéoprojecteur (mais pas d'ordinateur pour chaque élève).

Ensuite, des recherches ont montré que les pratiques chez les enseignants expérimentés sont stables (Robert, 2008a). Pour cette raison nos propositions de séances devaient être suffisamment proches des pratiques habituelles de l'enseignante.

Méthodologies spécifiques

Pour chacune des questions de recherche, nous avons mis en place des méthodologies spécifiques, qui sont résumées dans la figure 4.

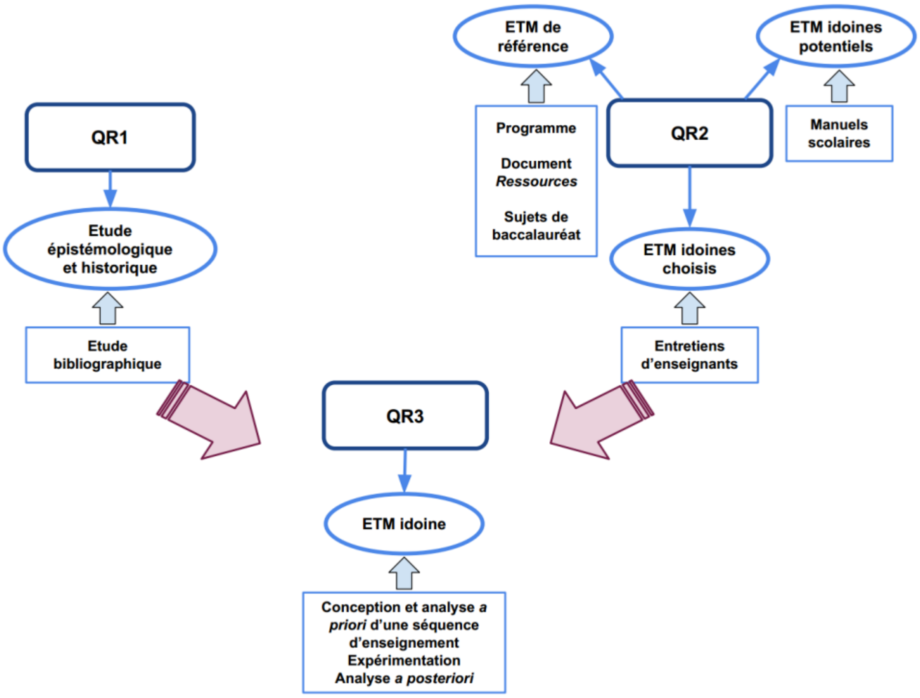


Figure 4. Schéma de la méthodologie générale

Pour la question d'ordre historique et épistémologique (QR1), l'étude a été bibliographique. Pour la question QR2, portant notamment sur l'introduction de la notion de fonction de densité dans les classes de terminale S, nous avons procédé à trois types d'analyse. Une première au niveau de l'ETM de référence, en s'intéressant au programme, au document Ressources en probabilités et statistique en terminale (MENJVA & DGESCO, 2012) et aux énoncés de baccalauréat. Ensuite, nous avons analysé les ETM idoines potentiels, ceux proposés par les manuels scolaires de mathématiques de terminale S, pour avoir une idée de ce qui peut être rencontré dans les classes. Nous avons aussi analysé des ETM idoines choisis par quatre enseignants, par le biais d'entretiens, seulement dans un but de conforter ce que l'on trouve dans les manuels. Ces différentes analyses forment la phase d'analyses préalables de l'ingénierie didactique. Les trois dernières phases de l'ingénierie didactique ont été mises en place pour répondre à la troisième question de recherche (QR3). L'expérimentation a duré un peu plus de trois semaines. Nous avons assisté à l'ensemble des séances (13 séances de 55 minutes ou 1h50). Les données dont nous disposons sont les enregistrements audio des séances, des photos du tableau et de cahiers d'élèves, et aussi de prises de notes. Nous avons ensuite transcrit les séances d'introduction (4 séances).

QUELQUES RESULTATS DES ANALYSES PREALABLES

Analyse historique et épistémologique

Rappelons la première question de recherche (QR1) :
Comment historiquement et épistémologiquement sont apparus les liens entre probabilités à densité et calcul intégral ? Comment a émergé le concept de loi à densité et tout particulièrement la notion de fonction de densité ?

L'étude historique et épistémologique (Derouet, 2017) a fait ressortir plusieurs points. Tout d'abord, les véritables problèmes qui ont fait émerger les lois à densité sont les problèmes de théorie des erreurs (erreurs d'observations) : au XVIII^e siècle, les instruments de mesures sont de plus en plus précis mais le problème des écarts entre les différentes mesures observées d'une même quantité (par exemple la distance entre la Terre et la Lune) se pose toujours. Les mathématiciens cherchent alors à déterminer la « vraie » valeur de la quantité mesurée et à trouver une loi des erreurs. Le point de départ est donc des données statistiques, qui sont ensuite aussi utilisées pour valider ou non les lois proposées. Dans les différents écrits que nous avons analysés, nous avons observé une place assez importante laissée au graphique. Un exemple semble très intéressant dans le cours de Géodésie de Faye (1928). Il s'agit de la détermination empirique d'une loi en partant d'un histogramme des données récoltées. L'histogramme apparait donc comme un outil intéressant pour passer à la fonction de densité.

Analyse des ETM idoines potentiels

Maintenant abordons la deuxième question (QR2) :
Quelles tâches sont proposées et quelles activités sont attendues des élèves pour, dans un premier temps, l'introduction de la notion de fonction de densité, et dans un second temps, pour exploiter les articulations entre l'ETM_{PaD} et l'ETM_{CI} ?
L'analyse de l'ETM de référence a permis de montrer que très peu de liens sont faits entre probabilités et analyse. Aucune proposition n'est faite, dans le programme ou dans le document Ressources, pour introduire la notion de fonction de densité. Ensuite, les tâches proposées au baccalauréat montrent une étanchéité totale entre les deux domaines mathématiques, bien que des connexions pourraient être faites.

Activités d'introduction de la notion de fonction de densité

Nous avons alors mené une analyse des ETM idoines potentiels proposés par les manuels. Nous avons étudié l'ensemble des activités d'introduction de la notion de fonction de densité des manuels de terminale S de l'édition 2012 qui sont au nombre de 8. Contrairement à ce que pouvait laisser présager le document Ressources, il ressort que 7 manuels sur 8 proposent une activité d'introduction. Les approches peuvent être différentes suivant les manuels. En particulier, 5 manuels sur les 8 proposent une introduction utilisant un passage par l'histogramme de fréquences. Nous nous sommes principalement focalisée sur ces manuels. Certains points ont pu être mis en évidence (Derouet & Parzysz, 2016). Nous en énonçons quelques-uns ici : dans ces introductions, le travail mathématique est essentiellement lié à de la visualisation au niveau de l'histogramme et de la courbe, notamment l'histogramme et la courbe de densité sont pratiquement toujours donnés dans le manuel. Il y a un fort appui sur la notion d'histogramme, mais les auteurs des manuels considèrent comme indispensable de faire des rappels sur les propriétés relatives à l'histogramme. Le référentiel théorique lié à l'histogramme n'est donc pas considéré par les auteurs comme disponible pour les élèves. On peut repérer aussi des erreurs sur les représentations graphiques d'histogrammes. Les différentes activités d'introduction font ressortir que la courbe de densité doit « lisser » ou « épouser » l'histogramme, mais la nécessité que l'aire sous la courbe soit égale à 1, par exemple, ne ressort jamais explicitement comme une condition nécessaire. On peut donc conclure qu'il n'y a pas réellement de construction du référentiel théorique lié à la fonction de densité. Les manuels proposent des démarches différentes, soit en partant de données statistiques, soit des probabilités. Dans tous les cas, il n'y a pas de démarche de modélisation ; le modèle est déjà choisi. La fonction de densité n'arrive jamais comme une réponse à un problème, car le problème est déjà résolu.

Liens autour du calcul d'aire

Pour mieux comprendre les liens qui peuvent être faits entre intégrale et probabilité, nous avons regardé les chapitres associés (celui sur le calcul intégral et celui sur les lois à densité) de façon plus globale. En analysant les manuels, dans la partie relative au calcul intégral, on peut repérer trois niveaux de calcul d'aire :

- Le premier niveau A1 : le calcul d'aires élémentaires. Il s'agit des calculs d'aires sous la courbe de fonctions affines par morceaux, ce qui revient à des calculs d'aires de rectangles, de trapèzes…
- Le deuxième niveau A2 : le calcul d'aires à l'aide de primitives. Il s'agit des calculs d'aires qui se font par utilisation du théorème fondamental de l'analyse : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f. Ce type de calcul est possible lorsque l'expression explicite d'une primitive de f est connue des élèves. Ce niveau de calcul d'aire peut aussi être mobilisé pour des fonctions affines par morceaux bien entendu.
- Le troisième niveau A3 : le calcul approché d'aires. Les calculs approchés reposent essentiellement sur la méthode des rectangles qui est au programme de terminale S. Ce niveau concerne les fonctions dont les élèves ne connaissent pas d'expression explicite d'une primitive, mais pas seulement, cela peut aussi être un niveau à mobiliser pour retrouver un résultat obtenu par calcul avec une primitive.

Dans l'ordre du chapitre, on peut constater que, dans un premier temps, apparaissent des calculs d'aires de niveau A1, puis de niveau A3 pour enfin arriver au niveau A2, qui est le cœur du chapitre du calcul intégral. Le constat de ces trois niveaux est intéressant dans notre cas car nous pouvons remarquer que les trois lois au programme (lois uniforme, exponentielle et normale) sont à relier prioritairement à un des niveaux de calcul d'aire (respectivement niveau A1, A2 et A3).

Vers des pistes à explorer

A la suite de ces analyses préalables, nous avons pu formuler des pistes à explorer pour concevoir une séquence et notamment des séances d'introduction de la notion de fonction de densité afin que les élèves construisent réellement cette nouvelle notion mathématique et lui donnent du sens. Les points qui nous semblent importants sont les suivants :

- La fonction de densité doit être introduite comme réponse à un problème, il faut donc réellement qu'un problème soit posé aux élèves.
- Un appui sur la statistique descriptive (avec les histogrammes) et notamment sur des données statistiques réelles est porteur de sens.
- La notion d'histogramme doit être en amont retravaillée pour être un appui pour introduire la fonction de densité.
- Il est intéressant de s'appuyer sur les trois niveaux de calculs d'aire.

Il semble donc indispensable que les élèves cherchent eux-mêmes l'expression de la fonction de densité pour se poser des questions sur les propriétés que celle-ci doit vérifier. Une démarche de modélisation est à considérer. Ce sont ces pistes qui ont été prises en compte dans la conception et testées dans le cadre de l'ingénierie.

La séquence conçue

En partant des pratiques habituelles de l'enseignante sur les chapitres relatifs au calcul intégral et aux lois à densité, nous avons essentiellement proposé une articulation des deux domaines avec une réorganisation de l'ordre d'apparition des notions. Plutôt que voir les probabilités comme une application du calcul intégral, l'idée générale de la séquence conçue est de commencer par deux problèmes de modélisation probabiliste pour ensuite motiver le besoin de calculer des aires sous des courbes et donc d'introduire un nouvel outil mathématique permettant de répondre à ce problème, l'intégrale. Le cours ensuite est assez « traditionnel » mais avec toujours des allers-retours sur les problèmes de probabilités de l'introduction. Enfin, un retour sur les trois lois au programme permet de conclure la séquence. Dans cette séquence, qui articule les deux chapitres habituellement séparés, le calcul intégral n'est pas un prérequis à l'introduction des lois à densité.
Les deux problèmes introductifs, qui correspondent aux séances qui nous intéressent tout particulièrement dans la recherche, ont des objectifs plus précis. Pour le premier problème, que nous appelons le problème de la rencontre (en Annexe 1), il s'agit de faire émerger la notion de fonction de densité, alors que dans le second problème, le problème du volcan Aso (en Annexe 2), il s'agit plus d'un réinvestissement pour consolider ce qui a émergé du premier problème. Du point de vue du calcul intégral, le premier problème aboutit à une fonction de densité affine donc les calculs d'aires sont élémentaires (niveau A1) et ne vont pas poser de difficultés aux élèves. Dans le second problème, il s'agit cette fois d'une fonction de type exponentiel donc du niveau A3 pour les élèves (qui ne connaissent pas encore les intégrales), ce qui va ensuite aboutir sur un travail d'approximation de l'aire sous la courbe. Dans les deux cas, la statistique descriptive (et donc un troisième sous-domaine mathématique) est présente, et notamment avec la notion d'histogramme. Cependant dans le premier cas, le passage par la statistique descriptive se fait via la simulation, tandis que dans le second, il s'agit de données statistiques réelles. Dans cet article, nous ne présenterons que le second problème.

Outils méthodologiques pour analyser les séances

Dans le cadre de la méthodologie de type ingénierie didactique, les analyses de ces séances d'introduction sont constituées d'analyses *a priori* et *a posteriori*. Du fait que les problèmes d'introduction soient des problèmes de modélisation, nous avons voulu prendre en compte dans les analyses le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007), qui a été adapté (figure 5).

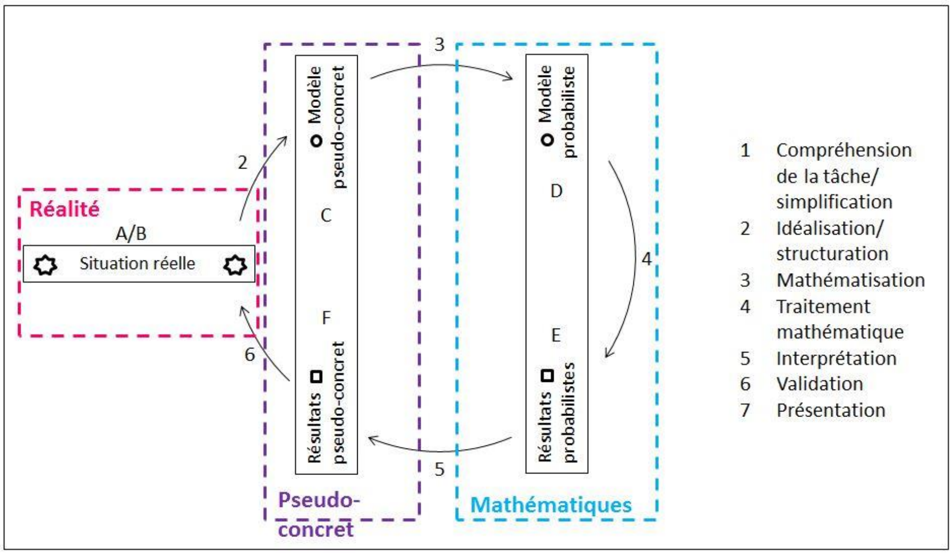


Figure 5. Le cycle de modélisation, inspiré de Blum et Leiss (2007)

Nos analyses ont été de deux niveaux. Des analyses globales sur toute la démarche de modélisation et des analyses plus locales sur les étapes du cycle importantes pour la construction de la notion de fonction de densité, à savoir les étapes de mathématisation (4) et de traitement mathématique (5), qui font donc l'objet d'analyses plus fines.
Pour répondre à la question de recherche sur les éléments didactiques à prendre en compte du point de vue du travail mathématique, nous avons adapté pour les analyses globales les outils d'analyse de tâches et de déroulement (Robert, 2008b) à des tâches de modélisation en prenant donc en compte le cycle de modélisation et en l'adaptant. La démarche de modélisation implique que l'on ne peut pas tout prévoir, pour cette raison nous parlons de canevas dans l'analyse *a priori*, dans lequel nous indiquons parfois plusieurs possibles. Pour l'analyse *a posteriori*, il s'agit du scénario choisi par la classe. Pour les analyses des moments plus révélateurs de la construction de la notion de fonction de densité, nous avons procédé à une analyse plus fine prenant en compte les sous-domaines en jeu, les registres, les dimensions de l'ETM, les adaptations, les activités de traitement, de reconnaissance et d'organisation (Robert & Vandebrouck, 2014) mais aussi ce que nous avons appelé les activités stratégiques, qui correspondent aux activités pour lesquelles les élèves ont un choix à faire.
Du côté de la gestion du travail mathématique dans la classe, nous avons identifié qui, des élèves ou de l'enseignante, prenait en charge le travail mathématique dans la classe. Nous avons introduit la notion d'ETM collectif de la classe, en parlant du collectif classe lorsqu'un élève prenait la parole au niveau mathématique. Nous avons aussi plus particulièrement regardé le rôle de l'enseignante en identifiant les aides qu'elle apportait, les reformulations, les bilans…
Dans la suite, nous allons présenter comment ces outils méthodologiques ont été utilisés pour décrire le travail mathématique lors d'un épisode particulier de la séance sur le problème du volcan Aso.

Analyse de déroulement

Le problème du volcan Aso

L'énoncé du problème du volcan Aso se trouve en annexe 2. L'enseignante a distribué aux élèves la feuille avec l'énoncé, où se trouvent les années des 73 éruptions entre le 13è et 19è siècle et les temps d'attente entre deux éruptions. La question posée est la suivante :
Le volcan est actuellement en éruption [nous étions en mars 2015]. Comment évaluer la probabilité que la prochaine éruption : Ait lieu dans les 5 ans ? Pendant l'année 2030 ?
Nous ne présentons pas ici l'analyse *a priori* de ce problème (se reporter à Derouet & Parzysz, 2016).
A partir des transcriptions et d'autres données telles que les photos du tableau, nous avons reconstitué le déroulement de cette séance. Nous avons notamment identifié les sous-tâches qui sont apparues dans la classe. Elles sont résumées dans la figure 6.

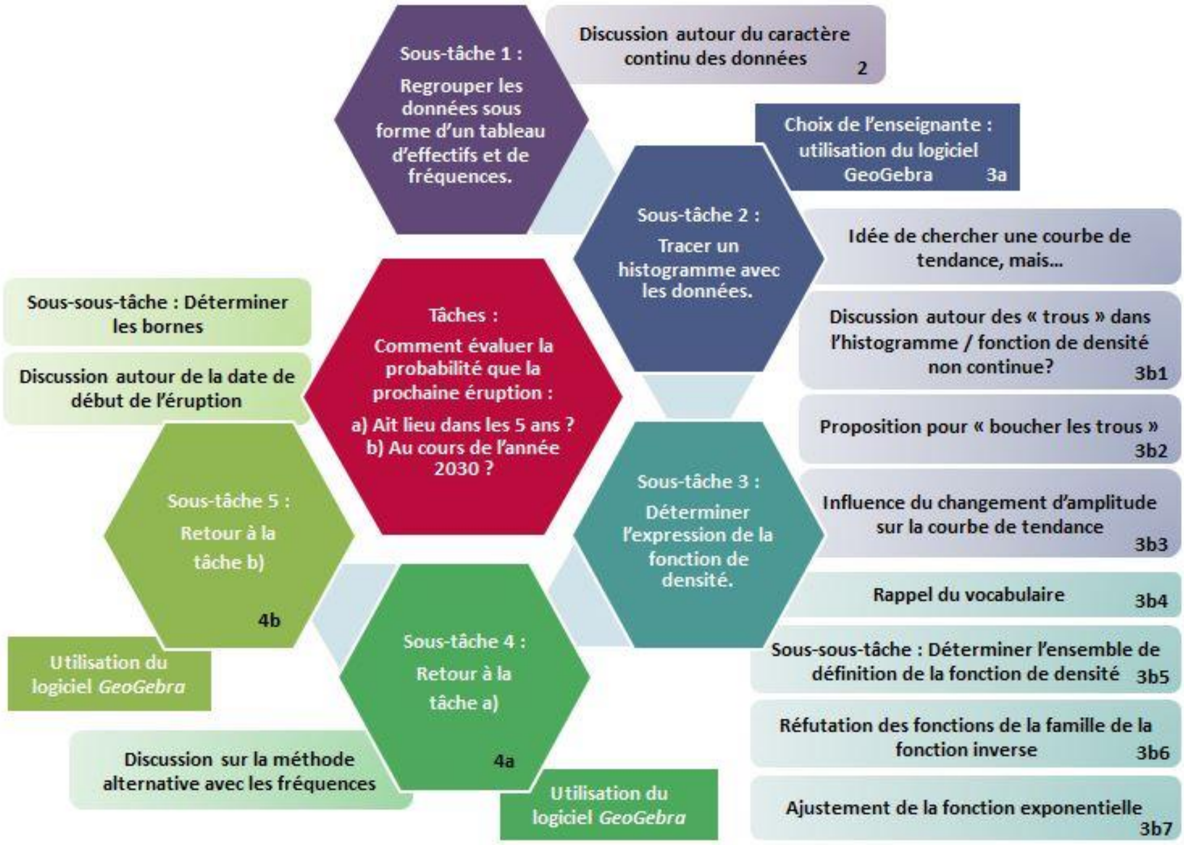


Figure 6. Diagramme illustrant les différentes sous-tâches dans le déroulement de la séance

A l'intérieur de ces sous-tâches, nous avons identifié les phases liées aux étapes du cycle de modélisation. Les moments révélateurs, autour de la construction de la notion de fonction de densité, sont les quatre sous-phases : 3b6, 3b7, 4a et 4b, qui font partie des phases de mathématisation et de traitement mathématique (phases 3 et 4 du cycle de modélisation).

Analyse d'un épisode du déroulement de la séance

Dans cet article, nous allons présenter, sur un épisode précis de la séance, comment nous avons mené nos analyses. Nous allons exposer nos éléments d'analyse de la phase 3b6 de réfutation des fonctions de la famille de la fonction inverse.

Nous sommes au moment de la séance où la classe s'est mise d'accord sur le choix d'un histogramme d'amplitude 4 ans des données des temps d'attente entre deux éruptions (figure 7).

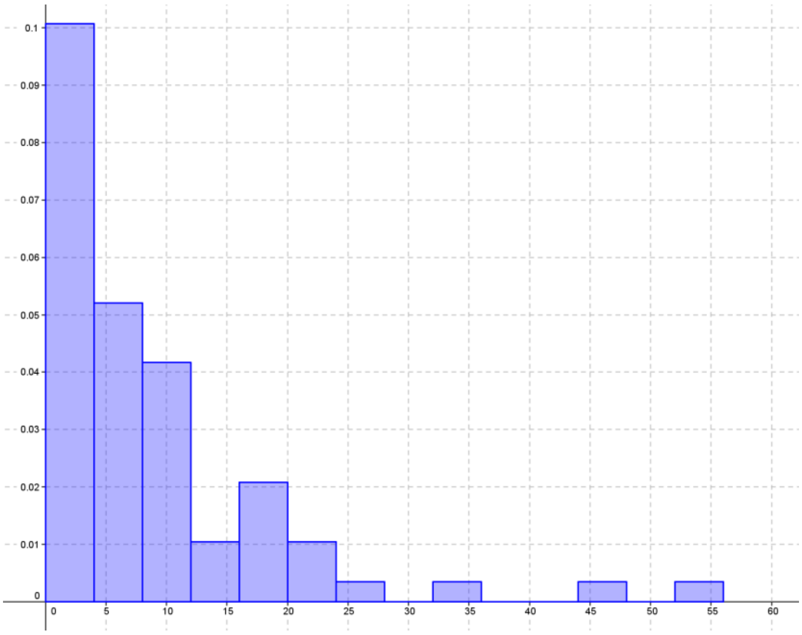


Figure 7. Histogramme retenu par la classe

La tâche écrite au tableau à ce moment-là est la suivante : *On cherche une fonction f définie sur* $[0;+\infty[$ *qui approche « au mieux » l'histogramme*. Il y a une phase de recherche individuelle où les élèves tracent à main levée une courbe qui semble leur convenir. L'enseignante leur demande de trouver l'expression de la fonction. Beaucoup d'élèves pensent à la fonction inverse. L'enseignante décide ensuite de faire une mise en commun.
Dans la première sous-phase (3b6.1), l'enseignante commence en traçant sur le logiciel GeoGebra la fonction $x \to 1/x$. Les élèves entrent alors dans un travail de visualisation et demandent à l'enseignante de déplacer la courbe pour qu'elle approche au mieux l'histogramme. Les dimensions en rouge sont celles sollicitées par les élèves, en vert par l'enseignante. Nous remarquons donc un travail de visualisation entre les sous-domaines de la statistique (SD) et du calcul intégral (CI) (figure 8). La dimension instrumentale est prise en charge par l'enseignante, car c'est elle qui est sur l'ordinateur, cependant elle agit sous commande des élèves (d'où les pointillés). Il s'agit ici d'une activité de traitement dans le registre graphique.

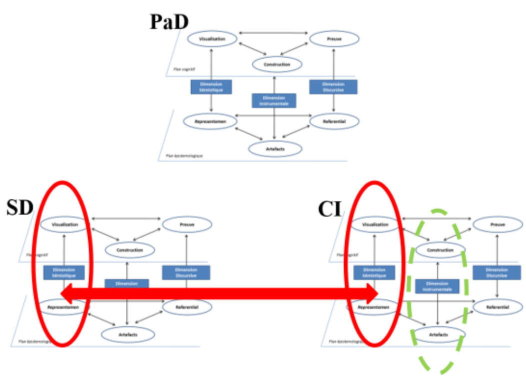


Figure 8. Diagramme représentant la sous-phase 3b6.1

Ensuite (sous-phase 3b6.2), l'enseignante dit : « *Alors oui mais est-ce que je peux la décaler…? Regardez bien ce qu'il se passe partout parce que…* ». Un élève alors répond que la fonction doit être positive. Cette aide procédurale indirecte de l'enseignante induit l'activité de reconnaissance d'une propriété d'un élève et donc il y a une mobilisation du référentiel théorique de la fonction de densité, qui relance le travail de visualisation (figure 9). Les élèves s'arrêtent sur cette fonction, mais finalement un élève propose de déplacer la fenêtre, et ils s'aperçoivent que la courbe coupe en effet l'axe des abscisses.

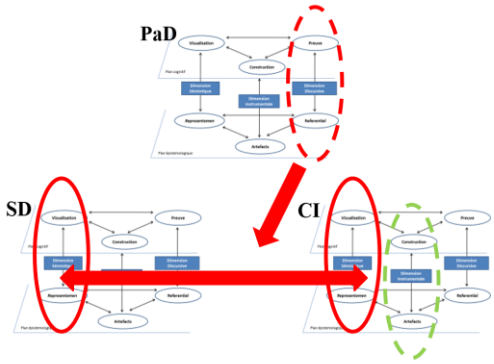


Figure 9. Diagramme représentant la sous-phase 3b6.2

L'enseignante propose ensuite aux élèves un changement de registre pour passer au registre algébrique de la fonction. L'enseignante va prendre à sa charge ce travail sur les fonctions, pour arriver à considérer les fonctions du type $f(x) = a/(bx + c)$ (sous-phases 3b6.3 et 4), qu'elle va introduire dans le logiciel GeoGebra avec des curseurs a, b et c (dont les valeurs peuvent varier). La dimension instrumentale va à nouveau relancer le travail de visualisation des élèves (sous-phase 3b6.5).

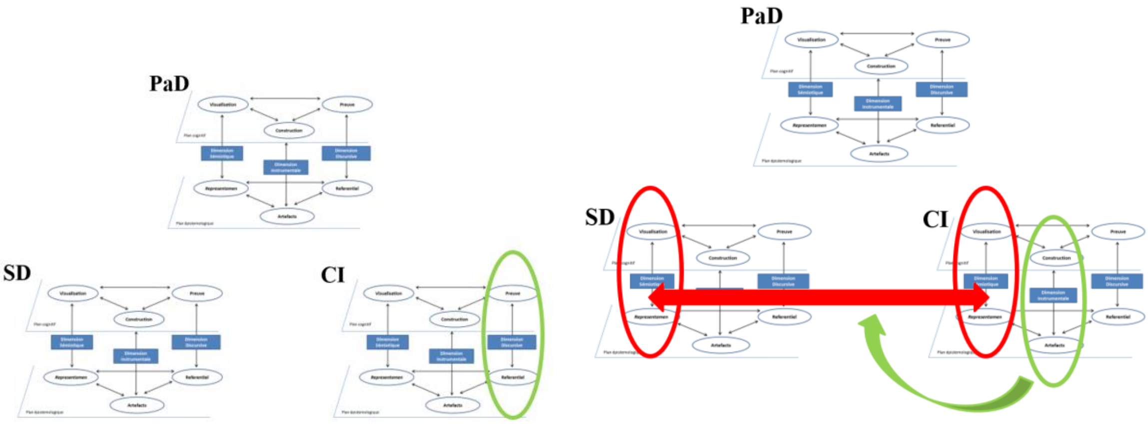


Figure 10. Diagramme représentant les sous-phases 3b6.3 et 4 (à gauche) et la sous-phase 3b6.5 (à droite)

Finalement, l'enseignante va à nouveau proposer une aide procédurale indirecte (phase 3b6.6) : « *Rappelez-moi, il y avait une contrainte sur la courbe qu'on cherche quand même. C'est quoi ?* ». Plusieurs élèves vont alors dire que l'aire sous la courbe doit être égale à 1. Cette reconnaissance d'une propriété va à nouveau relancer le travail de visualisation (figure 11). La commande GeoGebra, précisant la valeur de l'aire sous la courbe, va permettre de réfuter le choix d'une fonction de cette famille.

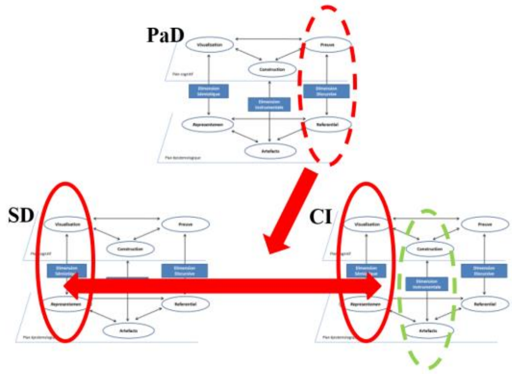


Figure 11. Diagramme représentant la sous-phase 3b6.6

En résumé, l'enchaînement des différents diagrammes permet de visualiser les dynamiques entre les sous-domaines et les dimensions de l'ETM au cours de cette phase. On peut notamment repérer qu'il y a véritablement une circulation entre les trois sous-domaines, où chaque sous-domaine a son propre rôle. Pour le sous-domaine des probabilités à densité, il y a une véritable mobilisation de la dimension discursive pour relancer le travail de visualisation : cela montre bien un réinvestissement du référentiel théorique de la fonction de densité, introduit dans les séances précédentes. Nous remarquons aussi que le travail mathématique est en majorité guidé par l'ETM collectif, et donc par certains élèves. Cependant, le rôle de l'enseignante est très important, notamment du point de vue des relances qu'elle fait.

Résultats majeurs

A l'issue de toutes les analyses, nous avons pu faire une confrontation entre analyses *a priori* et *a posteriori* pour valider l'ingénierie didactique. Il ressort des analyses des déroulements une véritable construction par le collectif classe du référentiel théorique sur la notion de fonction de densité, ce qui était l'objectif de ces séances. Le rôle de l'enseignante n'est cependant pas à négliger, nous avons pu le voir notamment à travers les aides procédurales indirectes qu'elle peut apporter. Nous avons aussi mis en évidence l'importance des anticipations, liées aux contenus mathématiques, avec notamment des devoirs maison préparatoires indispensables au bon déroulement des séances, mais aussi des anticipations du côté de l'enseignante au niveau des stratégies et des blocages éventuels des élèves qui ont permis à l'enseignante d'accompagner les élèves dans le travail mathématique pendant les séances.

La dimension collaborative du travail nous a conduite aussi à considérer dans la validation le point de vue de l'enseignante. Son opinion *a posteriori* sur la séquence est très positive. Tout d'abord, les contraintes imposées au départ ont bien été respectées, de plus, elle est très satisfaite de la séquence tant du point de vue de son ressenti personnel que de celui de l'investissement des élèves lors des séances d'introduction notamment. Elle a finalement décidé d'inclure dans ses pratiques cette séquence, qu'elle refait tous les ans depuis 2015.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Conclusion

Nous avons montré dans cette thèse que les deux problèmes, celui de la rencontre et celui du volcan Aso, sont effectivement réalisables en classe de terminale S et que le travail mathématique en jeu dans la classe et plus spécifiquement les activités de la classe amènent à une construction du référentiel théorique de la notion de fonction de densité, ce qui n'est pas le cas dans les manuels. L'inversion dans l'ordre d'apparition des notions d'intégrale et de loi à densité est bénéfique dans la construction de la fonction de densité. Le fait que les élèves ne connaissent pas le calcul intégral ôte la priorité au calcul et permet de focaliser le travail mathématique sur l'objet fonction de densité, de questionner cette notion pour en faire émerger les caractéristiques pour ensuite permettre de faire apparaître le besoin de calculer des aires sous une courbe. Cette démarche permet de donner un véritable sens à l'égalité $(*)$.
La démarche de modélisation, qui fait intervenir les trois sous-domaines : statistique descriptive, probabilités à densité et calcul intégral, joue un rôle important pour faire émerger les lois à densité comme réponse à un problème.
Les conclusions au sujet de cette ingénierie didactique sont positives. Cependant, il faut rester prudent car cette recherche présente des limites. Tout d'abord, du point de vue de l'expérimentation, l'enseignante avec qui nous avons travaillé en collaboration présente un profil particulier, ce qui est à prendre en considération dans les résultats. Il en est de même pour l'établissement dans lequel a eu lieu l'expérimentation, de milieu social plutôt favorisé. Cela joue nécessairement un rôle dans le déroulement des séances, notamment dans le fait qu'il n'y avait aucun problème de discipline par exemple. Un autre point, d'ordre méthodologique cette fois-ci, constitue une limite de notre travail. Nous avons fait le choix dans nos analyses de considérer le collectif classe (quand un élève prenait la parole sur des contenus mathématiques) plutôt que les élèves individuellement. Dans ces conditions, nous perdons des informations sur les activités personnelles des élèves en individuel, en les considérant dans un tout. Nos conclusions sont donc à prendre pour le collectif mais pas pour chacun des élèves. Après avoir compté le nombre d'élèves à prendre la parole au cours des quatre séances d'introduction, nous avons pu tout de même mettre en évidence une bonne participation des élèves, ce qui nous permet de dire que dans ce cas cette considération du collectif était une possibilité envisageable, mais d'autres choix auraient pu être faits.

Apport de ce travail de thèse

Malgré les limites de ce travail, nous pouvons identifier différents apports de cette thèse. Le premier est un apport pour le champ de la didactique. Ce travail spécifiquement centré sur la fonction de densité apporte une nouveauté dans le domaine car peu de travaux s'intéressent aux probabilités continues et encore moins à la notion générale de fonction de densité. D'un point de vue théorique, il s'agit d'un premier travail de recherche essayant d'articuler le cadre des Espaces de Travail Mathématique et des éléments de théorie de l'activité. Nous pensons avoir montré à travers nos analyses une compatibilité des deux cadres théoriques et même une complémentarité. Il nous semble que les analyses des tâches et des déroulements permettent une analyse fine. Le modèle des ETM quant à lui permet dans un second temps de porter un regard plus global sur les activités des élèves. Le dernier apport est d'ordre méthodologique avec la méthodologie de type ingénierie didactique collaborative.

Perspectives

Pour revenir sur la méthodologie d'ingénierie didactique collaborative, le point de vue recherche collaborative nous invitait à considérer à la fois des finalités pour la recherche, ce que nous avons mis en avant dans la thèse, mais aussi des finalités pour la communauté de pratique. Pour cette raison, il nous semble important dans les perspectives d'aborder la question de la diffusion de cette séquence. Après différentes interventions en formation continue des enseignants, nous cherchons maintenant à travailler sur la création d'une ressource en ligne, avec toujours un point de vue pratique (pour les enseignants) et un point de vue recherche. Nous chercherons à mettre en évidence les éléments nécessaires et indispensables pour créer une ressource en ligne à destination des enseignants qui soit pertinente, utilisable et bénéfique sans que soient dénaturés les objectifs didactiques et pédagogiques des tâches mathématiques proposées. Cette étude aura pour but de soutenir la conception et l'implémentation de la ressource. Nous étudierons ensuite l'appropriation de la ressource par des enseignants qui ne l'ont pas conçue. Cela nous permettra aussi de tester la reproductibilité de la séquence dans d'autres contextes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *9*(3), 281–308.

BEDNARZ, N., POIRIER, L., DESGAGNE, S., & COUTURE, C. (2001). Conception de séquences d'enseignement en mathématiques : une nécessaire prise en compte des praticiens. In A. Mercier, G. Lemoyne, & A. Rouchier (Eds.), *Le génie didactique. Usages et mésusages des théories de l'enseignement* (pp. 43–69). Paris : De Boeck Université.

BLUM, W., & LEISS, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? The example "Sugarloaf" and the DISUM Project. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12) – Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester : Horwood.

COLMEZ, P. (2012). Faut-il arrêter d'enseigner les statistiques au lycée ? *Images Des Mathématiques*. Repéré à http://images.math.cnrs.fr/Faut-il-arreter-d-enseigner-les-1321.html

DEROUET, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en oeuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral*. Université Paris Sorbonne Cité, Université Paris Diderot.

DEROUET, C., & PARZYSZ, B. (2016). How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions? *ZDM - Mathematics Education*, *48*(6), 757–773.

DEROUET, C. (2017). Emergence historique des lois à densité. Des pistes pour l'enseignement. *Statistique et Enseignement*, *8*(2), 3–24.

DEROUET, C. (en relecture). Co-construction d'une séquence d'enseignement articulant lois à densité et calcul intégral en terminale S : présentation d'une méthodologie de type ingénierie didactique collaborative. In *XIXe école d'été de didactique des mathématiques, Paris*.

DESGAGNE, S., BEDNARZ, N., LEBUIS, P., POIRIER, L., & COUTURE, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, *27*(1), 33–64.

FAYE, H. (1928). *Cours d'astronomie et de géodésie de l'école polytechnique*. Paris : Gauthier Villars.

KUZNIAK, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9–24.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN) (2011). Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques. Classe terminale de la série scientifique.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE DE LA JEUNESSE ET DE LA VIE ASSOCIATIVE (MENJVA), & DGESCO (2012). Ressources pour la classe terminale générale et technologique. Probabilités et statistique.

MONTOYA DELGADILLO, E., & VIVIER, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *19*, 73–101.

PERRIN, D. (2015). Remarques sur l'enseignement des probabilités et de la statistique au lycée. *Statistique et Enseignement*, *6*(1), 51–63.

RAOULT, J.-P., & ARNOUX, P. (2013). Pourquoi enseigner les probabilités et la statistique dans les cours de mathématiques. *Images Des Mathématiques*. Repéré à http://images.math.cnrs.fr/+Pourquoi-enseigner-les+

ROBERT, A. (2008a). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 59–68). Toulouse : Octarès Editions.
ROBERT, A. (2008b). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45–58). Toulouse : Octarès Editions.
ROBERT, A., & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZDP des élèves : analyse de séances sur des tâches complexes. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *34*(2-3), 239–285.
ROGALSKI, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 23–30). Toulouse : Octarès Editions.

ANNEXES

Annexe 1. Enoncé du problème de la rencontre

Karine et Olivier décident de se retrouver au café de l'Hôtel de Ville entre 7h et 8h. Ils peuvent arriver à tout moment entre 7h et 8h. Que peut-on dire du temps d'attente du premier arrivé ?

Annexe 2. Enoncé du problème du volcan Aso

Le volcan Aso, situé sur l'île de Kyushu au Japon, est l'un des plus actifs au monde. On possède les statistiques de ses éruptions, régulièrement tenues depuis le XIIIè siècle. Nous avons, dans le document tableur, les années d'éruptions jusqu'au XIXè siècle (à partir du XXè siècle, les données, d'une autre nature, ne sont pas compatibles(*)).

Années des 73 éruptions du volcan Aso du XIIIe au XIXe siècle

Donnée n°	Année	Temps d'attente		Donnée n°	Année	Temps d'attente
1	1229			34	1562	4
2	1239	10		35	1563	1
3	1240	1		36	1564	1
4	1265	25		37	1576	12
5	1269	4		38	1582	6
6	1270	1		39	1583	1
7	1272	2		40	1584	1
8	1273	1		41	1587	3
9	1274	1		42	1598	11
10	1281	7		43	1611	13
11	1286	5		44	1612	1
12	1305	19		45	1613	1
13	1324	19		46	1620	7
14	1331	7		47	1631	11
15	1335	4		48	1637	6
16	1340	5		49	1649	12
17	1346	6		50	1668	19
18	1369	23		51	1675	7
19	1375	6		52	1683	8
20	1376	1		53	1691	8
21	1377	1		54	1708	17
22	1387	10		55	1709	1
23	1388	1		56	1765	56
24	1434	46		57	1772	7
25	1438	4		58	1780	8
26	1473	35		59	1804	24
27	1485	12		60	1806	2
28	1505	20		61	1814	8
29	1506	1		62	1815	1
30	1522	16		63	1826	11
31	1533	11		64	1827	1
32	1542	9		65	1828	1
33	1558	16		66	1829	1
				67	1830	1
				68	1854	24
				69	1872	18
				70	1874	2
				71	1884	10
				72	1894	10
				73	1897	3

QUAND LE POINT DE VUE DES ELEVES SUR LES SITUATIONS SCOLAIRES BOULEVERSE LES DISCIPLINES SCOLAIRES

Claire **MARGOLINAS**

Laboratoire ACTé EA4281

claire.margolinas@uca.fr

Marceline **LAPARRA**

CREM

marceline.laparra@univ-lorraine.fr

Résumé

Quand les élèves investissent des situations, ils interagissent avec un milieu qui n'est qu'en partie installé délibérément par le professeur. De ce fait, les intentions didactiques de l'enseignant et notamment l'inscription dans une discipline scolaire, ne préjugent en rien des connaissances que les élèves vont investir et rencontrer en situation. Les savoirs qui pourraient être institutionnalisés ne sont donc pas aisés à déterminer.

Nos travaux en fin d'école maternelle (Grande Section : GS) et en début d'année d'élémentaire (Cours Préparatoire : CP) ont permis une rencontre entre une didacticienne du français (Marceline Laparra) et une didacticienne des mathématiques (Claire Margolinas). Cela nous a permis de mettre au jour des savoirs qui ne sont pas véritablement définis disciplinairement. Ces savoirs sont comme « transparents » en situation alors que les connaissances que ces savoirs formalisent sont essentielles pour réussir les tâches proposées. Nous sommes donc amenées à interroger les didactiques des disciplines concernées.

Mots clés

Didactique des mathématiques ; didactique du français ; anthropologie de l'écrit ; théorie des situations ; savoir transparent ; oralité ; littératie

QUESTIONS ET HYPOTHESES DE DEPART

L'école française accroit les inégalités d'origine socio-culturelle au lieu de les réduire (Duru-Bellat & van Zanten, 2016). Il est indéniable que ce phénomène est multifactoriel. Réunir autour de ces problèmes des chercheurs de disciplines différentes (sociologues, didacticiens, psychologues, etc.) semble donc indispensable. C'est l'ambition du réseau RESEIDA (REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages, dirigé par Jean-Yves Rochex et Élisabeth Bautier, Université de Paris 8).

Des didacticiens des mathématiques font partie de ce réseau ou bien y ont participé, ce qui a donné lieu à des travaux soit internes à la didactique des mathématiques soit croisés avec d'autres disciplines et dans notre cas à une collaboration entre des didactiques de disciplines différentes : mathématiques (Claire Margolinas) et français (Marceline Laparra). C'est dans le

cadre de ce réseau que nous menons ensemble des travaux depuis une dizaine d'années (Rochex & Crinon, 2011).
Nos premières observations de classe en commun nous ont conduites à poser ces questions de départ : *Pourquoi les professeurs renforcent-ils les inégalités scolaires, à l'inverse de leur but ? Quels sont les déterminants qui s'imposent aux professeurs ?*
Pour contribuer à répondre à ces questions, nous avons observé des situations scolaires « ordinaires » (non organisées pour la recherche) en dernière année de maternelle (Grande Section : GS) et première année de primaire en France (Cours Préparatoire : CP) en suivant un même groupe d'élèves durant deux ans (2004-2006) et nous avons mené des observations moins systématiques à d'autres niveaux scolaires, en recueillant principalement des séances de « mathématiques » ou de « français » (nous justifierons plus loin l'emploi des guillemets, qui visent à avertir le lecteur d'un questionnement possible).
Notre hypothèse de départ est la suivante : *Parmi les déterminants qui contribuent au renforcement des inégalités scolaires, il existe sans doute des déterminants didactiques : c'est-à-dire des déterminants liés aux savoirs enseignés par le professeur et aux connaissances nécessaires aux élèves pour investir les situations scolaires.*
Au plan méthodologique, nous avons analysé notre corpus en nous imprégnant des données (une soixantaine d'heures de vidéos et de très nombreux autres documents : photos de travaux d'élèves, notamment) jusqu'à saturation (Aubin-Auger et al., 2008) : nous avons visionné ensemble et séparément de nombreuses fois chaque vidéo ; des transcriptions ont été établies, centrées non seulement sur les interactions langagières mais aussi sur les gestes et les déplacements. Ces transcriptions ont été réanalysées de nombreuses fois. Notre regard portait moins sur le travail du professeur que sur celui des élèves.
Nous n'avons jamais séparé *a priori* le corpus en considérant que l'une (Claire Margolinas) aurait été spécialiste des leçons de « mathématiques » alors que l'autre (Marceline Laparra) l'aurait été des leçons de « français ». Tout au contraire, nous avons utilisé chacune toutes les ressources théoriques à notre disposition et tout particulièrement en anthropologie de l'écrit, les travaux de Goody (1979) et en didactique des mathématiques, ceux de Brousseau (1998).
Nous allons essayer de restituer le dialogue qui a été le nôtre au cours de l'analyse d'observation d'élèves en classe et de sujets hors classe, au cours d'activités qui peuvent être considérées comme relevant des « mathématiques » et du « français ».
Dans une première partie, nous allons chercher à construire le point de vue des élèves dans des situations scolaires. Nous allons présenter des activités ordinaires de « mathématiques » examinées par le filtre de l'anthropologie de l'écrit, puis des activités ordinaires de « français » analysées dans le cadre de la théorie des situations, en didactique des mathématiques. Nous nous sommes mises progressivement à regarder les « mêmes choses », ce qui nous a conduites à expliciter ce qui était en jeu. Dans les deux cas, nous chercherons à construire ce qui peut être l'indice d'un point de vue de l'élève qui, surtout au niveau que nous observons, ne considère pas ses activités en termes de discipline scolaire (Cohen-Azria, Lahanier-Reuter & Reuter, 2013).
Dans un second temps, nous allons mettre en perspective les concepts et les champs théoriques qui fondent ces analyses.
Nous allons enfin questionner les disciplines et les didactiques des disciplines.

CONSTRUIRE LE POINT DE VUE DES ELEVES DANS DES SITUATIONS SCOLAIRES

Le regard d'une didacticienne du français intéressée par l'anthropologie de l'écriture va contribuer à pointer des phénomènes qui, pour une didacticienne des mathématiques, ne pouvaient être considérés que comme des « particularités » sans importance de l'activité. Le point de vue anthropologique développé ici considère les actions humaines comme se déroulant dans un réseau de routines et d'usages qui permettent ces actions. Les objets du monde (voir Laparra et Margolinas, 2016, glossaire) qui sont parfois importés à l'école y transportent – souvent à l'insu des professeurs – leur routines et leurs usages spécifiques. Les connaissances acquises à l'école ou non sont parfois susceptibles de transformer de telles routines ou d'en déterminer de nouvelles. Un tel point de vue permet souvent de prêter attention à des « détails » qui sont, pour nous, révélateurs de connaissances. Les exemples que nous développons ici nous permettrons, dans la partie suivante, de détailler les concepts sous-jacents à nos analyses.

Analyses de tâches scolaires « de mathématiques »

La première tâche « scolaire » que nous analysons est issue d'une recherche menée dans cadre du projet DéMathÉ[1]. Même si elle n'a pas été recueillie en classe, la tâche proposée concerne une activité de tri qui s'inscrit dans une pratique assez courante à l'école maternelle. Dans un deuxième temps, nous empruntons à notre corpus une séance au CP concernant la résolution d'un problème arithmétique puis d'un problème de géométrie.

Tri de « jetons marqués »

Nous considérons ici le tri de jetons marqués à l'école maternelle dans le cadre de tâches scolaires « de mathématiques », ce qui doit être justifié. À l'école maternelle, le mot « mathématique » n'intervient pas dans les programmes officiels en France (2018). Cependant, tous les enseignants savent qu'une partie du programme concerne les concepts mathématiques (quantité, position, nombre, forme, grandeur, etc.) : la partie intitulée « Construire les premiers outils pour structurer sa pensée ». C'est dans cette section qu'apparaît (une seule fois dans le programme complet de maternelle) le mot « tri » dans la sous-partie « Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées » :

[1] Le groupe Développement des Mathématiques à l'École (DéMathÉ) a fonctionné de 2003 à 2010, sous la direction de Claire Margolinas, avec Olivier Rivière et Floriane Wozniak et la collaboration technique de Bruno Mastellone ; de 2003 à 2007 avec Bruno Canivenc et Marie-Christine de Redon ; de 2005 à 2007 avec Catherine Aurand ; de 2003 à 2004 avec Colette Andreucci et Alain Mercier. Ce groupe a été créé à l'UMR ADEF (INRP – Université de Provence – IUFM d'Aix-Marseille) puis soutenu par le projet EducMath (INRP) et l'IUFM d'Auvergne.

« Très tôt, les enfants regroupent les objets, soit en fonction de leur aspect, soit en fonction de leur utilisation familière ou de leurs effets. À l'école, ils sont incités à « mettre ensemble ce qui va ensemble » pour comprendre que tout objet peut appartenir à plusieurs catégories et que certains objets ne peuvent pas appartenir à celles-ci.

Par des observations, des comparaisons, des tris, les enfants sont amenés à mieux distinguer différents types de critères : forme, longueur, masse, contenance essentiellement. »

Dans les programmes le tri n'intervient pas nettement comme un but en soi mais plutôt comme un moyen de travailler sur différents critères, dans le cadre des grandeurs. Par la suite (cycle 2, cycle 3), le tri est cité dans le programme de 2018 comme un moyen de travailler dans d'autres domaines.

Nous ne sommes pas les seuls didacticiens de mathématiques à nous intéresser au tri à l'école maternelle, comme en témoigne l'article de Briand (1999-2000).

Cependant, la raison principale qui justifie cet exemple est qu'il permet de montrer qu'un point de vue qui inclue l'anthropologie de l'écrit représente un apport à l'analyse des procédures des élèves (pourtant déjà très détaillée) présentées dans la thèse en didactique des mathématiques d'Olivier Rivière (2017).

Dans le cadre du projet DéMathÉ, ont été recueillis des films hors classe dans lesquels les chercheurs ont demandé à des sujets de trier des jetons suivant leur caractère marqué (une gommette collée sur une seule face) ou non marqué (aucune gommette). L'analyse mathématique des stratégies de tri conduit à distinguer : le tri systématique (examen des jetons un par un pour déterminer le caractère marqué ou non) et le tri par extraction (extraction des jetons marqués) (voir Rivière, 2017, chapitre 3). L'analyse de l'énumération permet de considérer plusieurs statuts : les jetons non traités, les jetons traités qui sont marqués, les jetons traités qui sont non marqués. Suivant la stratégie adoptée, ces statuts peuvent être matérialisés dans des espaces (Margolinas, 2012).

Même si ces analyses sont extrêmement précises, elles ne rendent pas compte de ce qui retient notre attention ici. Examinons ce que fait Lisa (deuxième année de maternelle (Moyenne Section : MS, Figure 1) qui réalise un tri par extraction (réussi) (Rivière, 2017, p. 325).

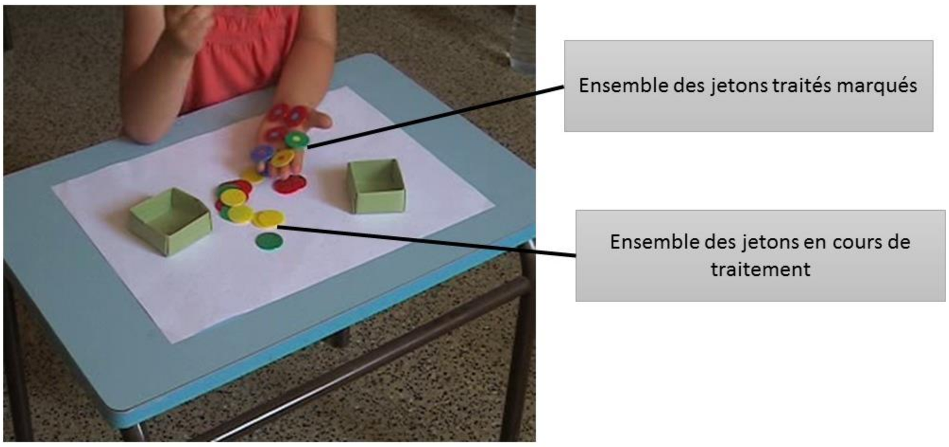


Figure 1. Tri de jetons marqués Lisa (MS) au bout d'une minute

Lisa, qui est droitière, utilise sa main gauche pour déposer les jetons marqués, mais elle ne le fait pas en faisant un tas dans sa paume, mais en alignant les jetons suivant les lignes formées par ses doigts. Certains jetons vont tomber et elle recommencera trois fois à aligner les jetons dans sa main. Mais Lisa a une feuille de papier sous les yeux et au bout de deux minutes, elle va produire une organisation qui, au plan de l'anthropologie de l'écrit (au sens de Goody, 1979 et Privat, 2018), est tout à fait différente (Figure 3).

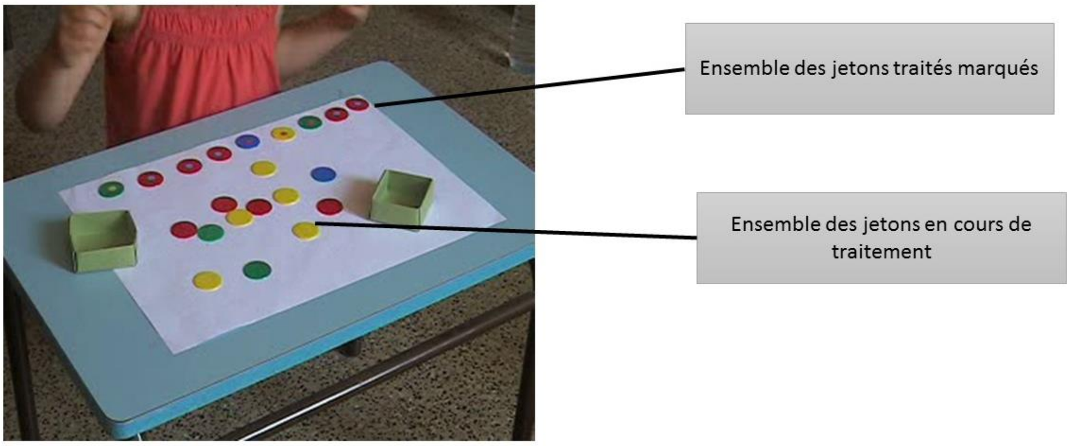


Figure 2. Tri de jetons marqués Lisa (MS) au bout de 2 minutes

Lisa dépose les jetons marqués au bord de sa feuille de papier, ce qui constitue une ligne. Elle ne saurait sans doute pas désigner cela par le mot « ligne », mais elle manifeste la construction d'une connaissance qui est centrale dans l'univers de l'écrit, qui est la ligne, d'abord matérialisée par les lignes de ses doigts puis par le bord d'une feuille de papier. En mettant les jetons marqués en ligne, elle les distingue des autres qui sont en cours de traitement et qui restent sans organisation.
À la lumière de cette première observation, examinons le travail deux sujets de GS qui réussissent la tâche proposée avec des procédures de tri identiques : en réalisant un tri systématique (voir Rivière, 2017).
Ce n'est pas le cas si l'on adopte le point de vue de l'anthropologie de l'écrit.

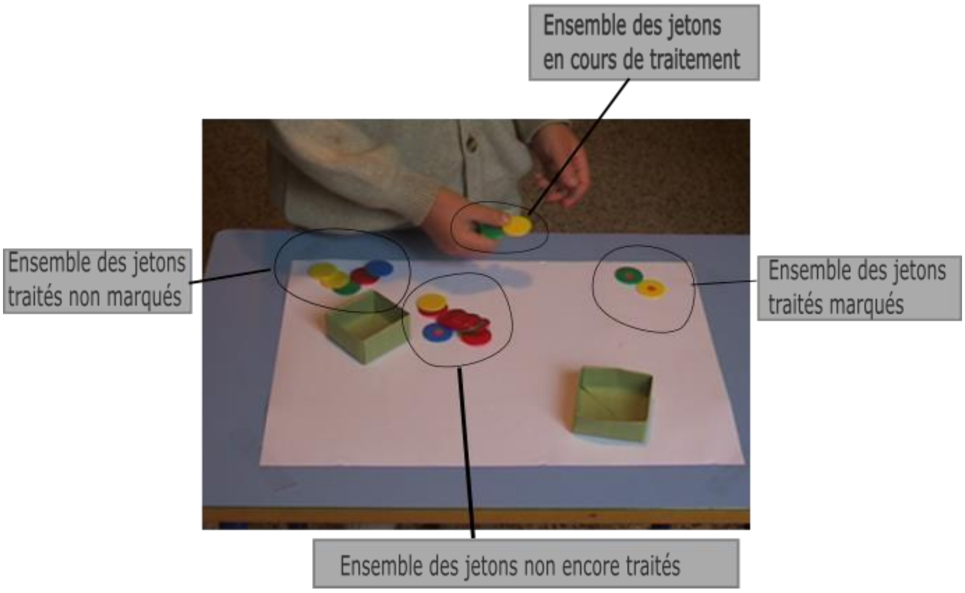


Figure 3. Image du tri de Gaëlle (GS) en cours de traitement (Rivière, 2017, p. 328)

Gaëlle, qui est gauchère, dépose près de sa main gauche les jetons marqués et près de sa main droite les jetons non marqués, elle utilise les ressources de son corps pour constituer des tas dont la fonction est spatialement distinguée.

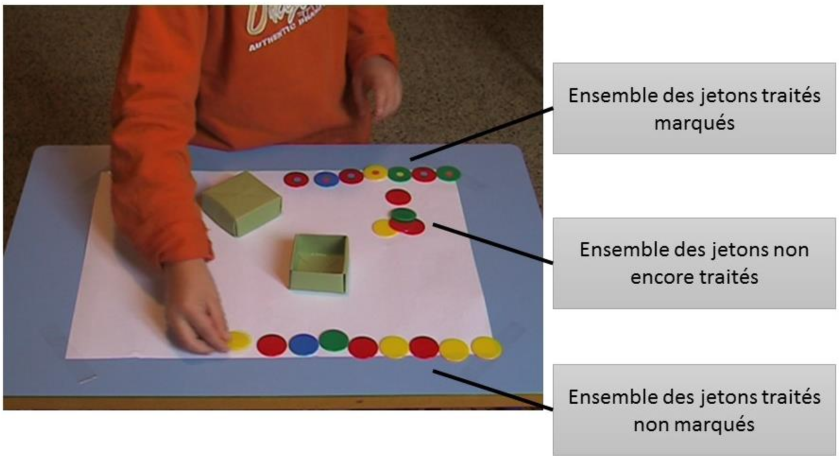


Figure 4. Image du tri de Thomas (GS) en cours de traitement (Rivière, 2017, p. 328)

Thomas se sert des ressources de la ligne pour distinguer les deux espaces des jetons traités : jetons marqués (ligne qui suit le bord de la feuille proche de son corps) et jetons non marqués (ligne qui suit le bord de la feuille éloignée de son corps), les jetons non marqués se distinguent parce qu'ils sont encore en tas.
Si Thomas et Gaëlle opèrent bien le même type de tri, ils ne se servent pas des mêmes ressources pour le réaliser. Gaëlle opère une segmentation de l'espace à partir de la position de son corps. Ce qui est non traité est en face d'elle, ce qui est traité est à gauche ou à droite : à gauche pour les jetons marqués, à droite pour les jetons non marqués. Thomas, comme le faisait Lisa, se sert de l'organisation de l'espace que lui fournit la feuille de papier sur laquelle il travaille : le bord supérieur lui permet d'aligner les jetons traités non marqués, le bord inférieur les jetons traités marqués.
À ce stade de l'analyse, nous constatons une différence très nette dans l'investissement de ressources permettant de désigner des espaces, à l'intérieur de procédures de tri identique. Examinons maintenant une situation observée dans notre corpus en classe de CP.

Résolution d'un problème dans le champ additif

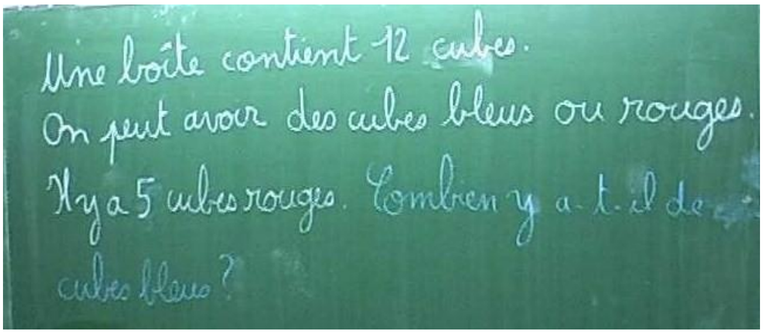


Figure 5- Consigne d'un problème étudié au CP

Après avoir demandé aux élèves de résoudre ce problème, le professeur leur impose de représenter celui-ci par un schéma (Laparra & Margolinas, 2009).

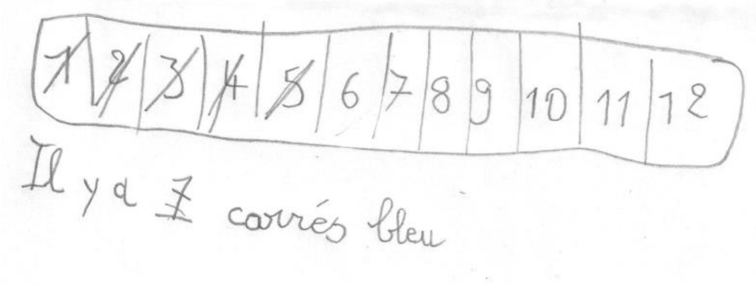


Figure 6- Schéma d'Audrey

Audrey (Figure 6) représente une bande numérique jusqu'à 12, bande numérique qui, dans l'univers de l'écrit, est un objet extrêmement contraint, ce qui va à la fois la gêner et l'aider. Elle dispose d'une ressource de l'écrit pour distinguer sur la bande les 5 cubes rouges (donnée de l'énoncé) : les barrer.

Lors de la phase de résolution du problème, le résultat (7) a été obtenu par les premiers élèves qui ont donné la bonne réponse par une autre procédure, qui consiste à sur-compter, c'est-à-dire à compter oralement jusqu'à cinq puis à lever ses doigts les uns après les autres en comptant oralement de six jusqu'à douze, puis en comptant le nombre de doigts levés. Le corps est alors utilisé comme une ressource de collection que l'on parcoure dans un sens convenu : du pouce à l'annulaire de la main droite puis de même sur la main gauche.

Pour utiliser la bande numérique qu'elle a dessinée, Audrey aurait dû compter les « cases » non barrées en s'affranchissant de ce qui est écrit : un pour la case 6, deux pour la case 7, etc. Ce qui ne posait pas de problème avec le corps dans la procédure de sur-comptage contrevient ici aux règles de la correspondance entre le nombre écrit et sa désignation orale. Il est improbable qu'elle puisse agir de cette manière.

Figure 7- Schéma de Hamdi

Hamdi (Figure 7), trouve une solution qui est très semblable à celle d'Audrey. Mais, parce qu'il ne représente pas de bande numérique mais un alignement de douze carrés vides, il ne pose pas le même problème : il peut sans difficulté compter les sept carrés qui ne sont pas rayés.

Il s'essaye ensuite à l'écriture mathématique « en ligne » qui est en cours d'enseignement au CP et écrit 12+5=7, ce que le professeur va considérer comme une erreur qui témoignerait de ses difficultés en mathématiques. Hamdi sait très bien que 12+5 ne fait pas 7 (même s'il ne sait pas nécessairement que le résultat de l'addition est dans ce cas 17). Mais il sait que l'écriture doit pouvoir rendre compte des opérations qu'il a faites. Il écrit la première donnée traitée (12) puis la deuxième donnée traitée (5) il les réunit par (+) pour signifier qu'il s'agit de deux traitements successifs et que la deuxième donnée s'ajoute à la première, il annonce le résultat (=) et l'écrit (7). C'est d'ailleurs ce qu'il a toujours fait jusque-là[2], cela fonctionne bien de cette manière quand il s'agit de 5+3=8 : on m'a donné cinq et puis on m'a donné trois et ça fait huit. La succession des opérations dans le temps (comme le temps de la parole) est pour lui marquée de la même manière, de gauche à droite et il a compris que l'annonce du

[2] D'autant que la soustraction n'avait pas encore été étudiée dans la classe.

résultat se marquait par un signe spécifique. Hamdi produit une écriture dans la logique fondamentale de la linéarisation, où ce qui est à gauche est antérieur dans le temps à ce qui est à droite. S'il contrevient à la logique de l'écriture mathématique, c'est parce que celle-ci obéit à des impératifs tout à fait différents de ceux de l'écrit linguistique. L'égalité n'annonce pas un résultat mais la possibilité de substitution dans toutes circonstances d'un nombre par rapport à un autre qui lui est égal.
Notre analyse permet de rendre compte d'une logique dans la production des écrits de la part des élèves, logique qui s'appuie sur leurs connaissances de l'écrit et qui contrevient parfois au fonctionnement de l'écriture mathématique, dont la spécificité par rapport à l'écrit linguistique n'a sans doute pas été enseignée (Margolinas, 2016).

Résolution d'un problème de géométrie

Lors d'une autre résolution de problème au CP (Laparra & Margolinas, 2017), en géométrie, le professeur propose la situation suivante : les élèves disposent d'un gabarit de carré en carton. Ils doivent reproduire ce carré sur un papier de couleur, puis le professeur trace les deux diagonales et les élèves doivent découper le carré de papier suivant ces traits. Le professeur demande alors de reconstituer le gabarit en carton avec les pièces de papier de couleur. Malgré le fait qu'ils viennent eux-mêmes de découper le carré en quatre triangles, il s'agit d'une activité difficile pour la grande majorité des élèves.
Les élèves investissent cette situation avec des connaissances qui proviennent des objets du monde qui ressemblent à cette activité : les puzzles. Ils vont considérer une règle centrale du puzzle : une pièce ne peut occuper qu'une place et une seule, dans un puzzle « normal » comme ceux qu'ils ont rencontrés à l'école maternelle et peut-être aussi dans leur famille, toutes les pièces sont différentes par leur forme et/ou par leur décor. Le « puzzle » du carré contrevient à cette règle car toutes les pièces sont identiques. Les élèves ont aussi des connaissances sur les stratégies de reconstitution des puzzles : il faut commencer par les « coins ». Tous sans exception commencent par poser leur première pièce comme dans la Figure 8, puis ils cherchent à compléter le puzzle en posant trois autres pièces dans les « coins », mais les pièces se chevauchent. Ils vont alors chercher à déplacer leur première pièce dans un autre « coin » du carré, ils continuent alors de poser les autres pièces sans y arriver. Cela peut durer assez longtemps sans que les élèves ne s'épuisent, sans doute parce qu'ils ont l'habitude de résoudre des problèmes de puzzle qui sont parfois difficiles.
Dans une perspective anthropologique, nous ne considérons pas l'angle rectangle du carré mais, comme les élèves, le « coin », ce n'est pas seulement une question terminologique. On ne fait pas n'importe quoi avec un puzzle qui s'inscrit dans un cadre et ses éléments sont désignés en référence à une organisation horizontale et verticale comme celle de l'écrit sur une feuille.

Figure 8. Une position erronée essayée par tous les élèves au début du travail (reconstitution)

Nous mettons ici en évidence l'importance de la matérialité : les pièces du puzzle apportent avec elles des modalités d'action et des connaissances qui interfèrent et contredisent les connaissances mathématiques que le professeur souhaite faire rencontrer aux élèves.
Dans ces trois exemples, nous avons montré ce qu'un regard outillé par l'anthropologie de l'écrit permet de comprendre dans des situations dans lesquelles il n'y a pas nécessairement d'écrit (au sens de représentation du langage sur un support) et qui n'appartiennent pas à la discipline emblématique de l'écrit : le « français ». Nous voulons insister sur le fait que les élèves ont des connaissances et qu'ils investissent toutes leurs connaissances dans les situations qui leur sont proposées. Ces connaissances ne sont pas celles d'une « discipline », ce sont celles qui leur apparaissent comme appropriées d'après les indices de la situation. À l'opposé des discours sur les difficultés du transfert de connaissances d'une situation à une autre, nous constatons que les élèves transfèrent en permanence des connaissances d'une situation à l'autre, mais pas nécessairement celles que le professeur voudrait…

Analyse d'une tâche scolaire « de français »

Comme nous l'avons annoncé précédemment, nous allons maintenant procéder de la même manière, en inversant les rôles, puisque ce sont maintenant des concepts issus de la théorie des situations et donc de la didactique des mathématiques qui vont nous servir pour analyser une tâche scolaire de « français ». Le regard d'une didacticienne des mathématiques va permettre de mettre en évidence les particularités des situations qui sont d'ordinaire considérées comme sans importance par les didacticiens du français.
La richesse – et la longueur – de l'analyse de cet exemple nous a conduites à ne choisir qu'une seule tâche scolaire de « français » (pour d'autres exemples d'analyse, voir Laparra & Margolinas, 2016 et la dernière partie de ce texte).

Reconstitution de prénoms

Partons d'une activité extrêmement banale en maternelle dont voici une variante observée dans deux classes de première année de maternelle (Petite Section : PS) : la reconstitution par l'élève de son prénom avec des étiquettes-lettres (Gros & Heyries, 2015). Un élève reçoit une étiquette sur laquelle est écrit son prénom et une boîte dans laquelle se trouve une collection d'étiquettes-lettres plus ou moins nombreuses.

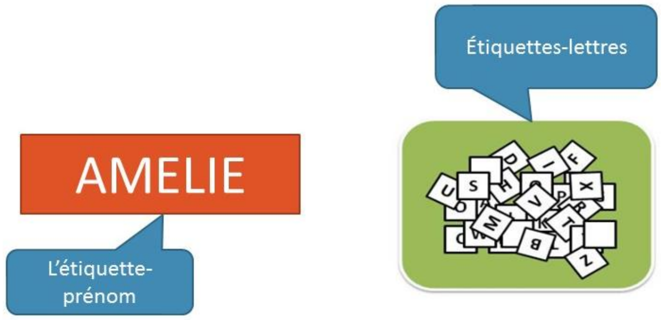


Figure 9. Matériel utilisé pour la reconstitution du prénom

Les étiquettes-lettres dans la boîte forme une collection à trier, puisqu'il va falloir traiter les étiquettes-lettres de manière à en extraire les lettres permettant de reconstituer le prénom. Pour réaliser ce tri, il faut énumérer la collection des étiquettes-lettres dans la boîte, au sens de l'énumération faible introduite par Rivière (2017) : il n'est pas obligatoire pour réussir que chaque lettre-étiquette soit traitée une fois et une seule. Certaines étiquettes peuvent être manipulées plusieurs fois (ce qui ralentit le processus de tri) alors que d'autres peuvent ne jamais être manipulées (particulièrement si le prénom est déjà reconstitué et qu'il n'est plus nécessaire de le faire). Que veut dire ici « traiter » une étiquette-lettre de la boîte ?

Pour traiter une étiquette-lettre, il faut :

- Déterminer un critère de sélection ;
- *Saisir une étiquette-lettre* ;
- Examiner ce qui est écrit sur cette étiquette-lettre par rapport au critère de sélection : détermination du statut de l'étiquette-lettre ;
- *Décider d'un espace où déposer cette étiquette-lettre*.

Les passages en italiques sont caractéristiques de l'énumération de la collection des lettres-étiquettes alors que le passage sans italiques correspond à une autre connaissance qui relève ici de la lecture (cf. Briand, 1999, p. 52).

Cependant, pour déterminer un critère de sélection et donc décider du statut d'une étiquette il faut énumérer une autre collection, qui est la collection des lettres de l'étiquette-prénom, sachant qu'en PS les élèves ne savent pas encore épeler de mémoire les lettres de leur prénom, ils doivent donc se référer aux lettres écrites de l'étiquette-prénom. Contrairement aux étiquettes-lettres de la boîte, dans la réalisation finale, les lettres de l'étiquette-prénom doivent être énumérées au sens fort (Rivière, 2017), c'est-à-dire que pour réussir, chaque lettre doit être représentée une fois et une seule à l'aide d'une étiquette-lettre. Au cours du travail, les lettres de l'étiquette-prénom peuvent être énumérées plusieurs fois pour décider du statut d'une étiquette-lettre. La suite des lettres de l'étiquette-prénom joue donc un double rôle et peut être considérée de deux façons différentes.

En effet, puisqu'il faut énumérer de façon coordonnée deux collections, deux types de stratégies sont possibles, qui correspondent à une priorité donnée à l'une ou à l'autre de ces collections. Intéressons-nous d'abord à ce qui se passe au tout début du travail.

L'organisation spatiale de la collection des lettres de l'étiquette-prénom permet de la considérer comme une liste (collection ordonnée). Même les élèves qui ne savent pas lire, parce qu'ils vivent dans une société fortement littératiée et tout particulièrement à l'école, peuvent savoir déjà qu'une suite de lettres ne se parcoure pas dans n'importe quel ordre, qu'elle constitue une ligne qui a un début (à gauche, même si ce mot n'est pas toujours disponible) et une fin (de l'autre côté – à droite). Cette organisation peut être renforcée par des marques disposées par le professeur : dans la Figure 10 une gommette est déposée sous la première lettre de MELISENDE, habitude d'une des deux classes observées (classe A) alors que ce n'est pas le cas pour GWENAËLLE dans la classe B. Les enseignantes qui ont réalisé cette expérimentation (les auteures de Gros & Heyries, 2015) n'avaient pas discuté de ce point, qui faisait partie des usages non interrogés de la classe, alors qu'elles ont minutieusement prévu de faire la même expérimentation dans leurs deux classes de PS et qu'elles ont considéré de nombreuses variables.

Dans le cas d'une priorité à la liste ordonnée des lettres du prénom, une élève qui se prénomme Mélisende va d'abord chercher le M dans la boîte des étiquettes-lettres, puis le E, etc. (Figure 10). Le processus s'arrête quand la dernière lettre de la liste des lettres de l'étiquette-prénom est atteinte.

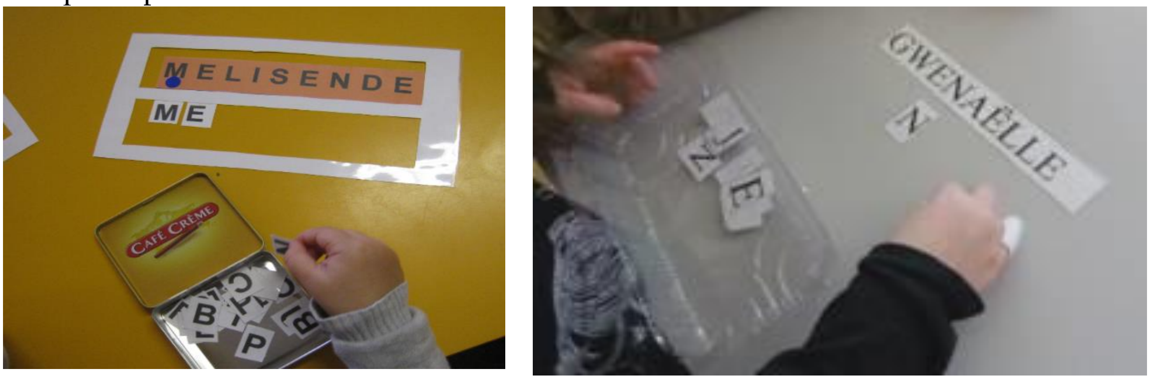


Figure 10. Les conditions matérielles de reconstitution du prénom dans la classe A (à gauche) et de la classe B (à droite) (Gros & Heyries, 2015)

Si la priorité est donnée à la collection des étiquettes-lettres dans la boîte, alors cette première collection n'est pas ordonnée et ses éléments peuvent se déplacer. L'élève saisit une étiquette-lettre au hasard dans la boîte, et doit alors décider ce qu'il doit en faire. Il lui faut comparer cette étiquette-lettre avec la collection des lettres de l'étiquette-prénom pour décider du statut de cette étiquette-lettre. Pour cela, il doit comparer l'étiquette-lettre avec les lettres de l'étiquette-prénom, ce qui fait que cette collection de lettres est énumérée aussi. Le processus s'arrête quand la reconstitution et le modèle sont identiques, exactement comme dans un puzzle.

Dans les deux cas, la nature du traitement des lettres-étiquettes n'est pas le même et cela va jouer fortement sur le coût et la fiabilité de la stratégie.

Dans le cas de la priorité donnée à la liste des lettres du prénom, il faut énumérer plusieurs fois (énumération faible) la collection des lettres-étiquettes. En théorie, la stratégie la moins coûteuse consiste à :

- énumérer visuellement la collection des lettres-étiquettes pour déterminer si la lettre cible s'y trouve : dans cet examen, les connaissances de l'écriture des lettres interviennent, en particulier, les connaissances des formes des lettres quelle que soit leur orientation ;
- enlever toutes les lettres qui ne conviennent pas pour les déposer dans un espace « poubelle temporaire », par exemple sur la table, à côté de la boîte et continuer le processus jusqu'à la découverte de la bonne lettre.

En théorie, l'élève se retrouve alors avec des lettres déposées sous l'étiquette-prénom, à leur place définitive (comme sur la Figure 10 le M et le E de MELISENDE), des étiquettes-lettres déposées dans un espace « poubelle temporaire » et des étiquettes-lettres qui sont restées dans la boîte. Pour continuer et chercher une autre lettre, l'élève doit alors savoir que toutes les étiquettes-lettres qui n'ont pas été choisies deviennent alors des candidates potentielles pour la recherche suivante (par exemple, recherche du L), ce qui pourrait logiquement conduire à les réunir à nouveau, soit dans la boîte, soit sur la table. L'élève pourrait alors s'apercevoir qu'il est plus simple de réaliser la recherche visuelle de la bonne étiquette-lettre en disposant toutes les lettres sur la table (possibilité de les étaler face visible, voire même de les étaler face visible dans le sens de lecture). Autrement dit, le geste qui consiste à renverser la boîte sur la

table et à étaler les lettres-étiquettes, loin de relever d'une décision purement matérielle, se révèle décisif dans la stratégie de recherche de la bonne étiquette-lettre.
Dans le cas de la priorité donnée aux étiquettes-lettres, il faut énumérer plusieurs fois la liste des lettres du prénom de l'étiquette-prénom, ce qui est facilité par la disposition en ligne et par d'éventuelles connaissances de l'écriture des lettres. Une fois une étiquette-lettre piochée, il faut comparer la lettre avec celles du prénom, ce qui dépend de plusieurs connaissances dans le champ de la lecture : orientation littératiée de la lettre (parfois facilitée par des marques graphiques sur les étiquettes, en particulier soulignement), désignation orale de la lettre (qui facilite la mémorisation durant la recherche), éventuelle mémorisation de certaines lettres du prénom de l'enfant (je m'appelle Gwenaëlle et je sais que j'ai un N dans mon prénom, Figure 10). Si l'étiquette-lettre ne correspond à aucune lettre du prénom, alors elle peut être définitivement rejetée dans un espace « poubelle ». Si l'étiquette-lettre correspond à une des lettres du prénom, alors elle est conservée et, quand c'est possible, déposée dans un espace immédiatement sous le modèle de l'étiquette-prénom. Il faut ensuite recommencer à piocher dans la boîte des étiquettes-lettres.
La stratégie de priorité aux étiquettes-lettres est plus économique, ce qui est d'ailleurs vrai pour tous les puzzles : même quand on cherche une pièce particulière, quand on rencontre une autre pièce qui peut être posée dans un endroit connu, on a intérêt à le faire au lieu de la rejeter, avant de continuer à chercher la pièce initiale.
Dans la réalité de l'activité, l'élève passe souvent d'une stratégie à l'autre, en particulier quand, dans la stratégie de priorité à la liste, l'élève rencontre une étiquette-lettre dont il sait qu'elle fait partie de son prénom, ce qui peut le conduire soit à la déposer dans un espace « étiquette-lettre en attente », soit à la déposer dans le puzzle des étiquettes-lettres du prénom.
Cette description minutieuse montre:

- que l'énumération des deux collections représente une part très importante des connaissances en jeu dans la situation, associée à des connaissances de reconnaissance des lettres ;
- que la stratégie donnant la priorité à la liste ordonnée des lettres dans le prénom n'est pas la plus économique ni la plus fiable.

Elle montre aussi qu'il y a des décisions très importantes pour la réussite de la tâche, qui reposent toujours sur des connaissances mêlées de « lecture » et d'énumération :

- l'utilisation de l'espace de la table ;
- le renversement de la boîte et l'organisation des lettres-étiquettes de la boîte.

Elle montre enfin qu'il y a des variables de la situation qui n'apparaissent souvent pas aux professeurs :

- la taille de la boîte par rapport aux lettres-étiquettes ;
- la taille des étiquettes-lettres du modèle par rapport à celles qui sont dans la boîte ;
- les indices de priorité de la liste des lettres par rapport à la collection des lettres-étiquettes.

La Figure 10 montre que les deux professeures, qui réalisent ensemble un (excellent) mémoire de Master concernant l'énumération dans la reconstitution du prénom n'ont pas pris ces variables en considération :

- dans la classe A, le début de la liste des lettres du prénom est marquée ce qui donne implicitement la priorité à la stratégie privilégiant la liste des lettres ;
- dans la classe B, la taille des étiquettes-lettres est plus grande que celle du modèle (voir infra) ;
- dans la classe A, la taille de la boîte est trop petite pour permettre aux élèves d'étaler toutes les lettres à examiner.

Nous sommes donc en mesure de mieux prévoir les variables d'une tâche de « français » mais aussi de mieux comprendre l'activité effective de l'élève mais aussi du professeur, en

situation. Sandrine Vignon (2014) a ainsi décrit, dans une situation similaire, comment une professeure qui a après avoir observé une élève renverser la boîte des étiquettes-lettres et en étaler le contenu, a ensuite suggéré cette procédure à d'autres élèves (mais pas à tous). La professeure reconnaît l'efficacité de la procédure, par contre elle ne fait aucun commentaire sur les raisons de cette efficacité, ce qui limite la portée de la reconnaissance de l'utilité des connaissances en jeu.
Dans une autre observation où les élèves doivent reconstituer une recette avec des étiquettes-phrases, la « meilleure » élève de la classe est la seule à renverser la boîte des étiquettes-phrases et elle termine son travail en un temps record (Margolinas & Laparra, 2010).
De plus, il se produit très souvent, dans l'activité réelle des élèves, une sorte de catastrophe au plan de l'énumération, quand une étiquette-lettre rejetée est déposée à nouveau dans la boîte d'où elle provient, ce qui bien entendu va ralentir très fortement le travail puisque le nombre d'étiquettes-lettres à traiter ne diminue jamais, et ceci sans aucune intervention du professeur, dans la majorité de nos observations.
Nous constatons qu'il y a une forme de contradiction à considérer une telle activité, du point de vue de l'enseignement du français, comme une forme de « pré-écriture ». En effet, il est plus efficace, en situation, de contrevenir à l'engendrement du mot (prénom) dans l'ordre de l'écriture et de procéder à la reconstitution d'un puzzle.
D'autres déterminants interviennent qui vont contredire à la fois la logique de l'écriture et celle du puzzle puisque, dans la Figure 11, Hugues (classe B), confronté à des étiquettes-lettres plus grandes que le modèle, décide de les présenter au final avec un chevauchement compatible avec l'alignement vertical lettre modèle / étiquette-lettre qui convient à une correspondance terme à terme mais ni à un puzzle, ni à la lisibilité de son prénom.
Hugues s'appuie sur ses connaissances de reconnaissance des lettres qui composent son prénom mais il ne considère pas cet alignement de lettre comme une écriture.

Figure 11. Trois phases du travail de Hugues (classe B) (Gros & Heyries, 2015).

Les étiquettes comme collection matérielle rentrent en conflit avec la logique de l'écriture, raison pour laquelle nous sommes très attentives à toujours parler d'étiquette-lettre et non pas de lettre, toutes les fois où le matériel permet un déplacement, car cette caractéristique, souvent transparente pour le professeur (il le sait mais ne le voit pas), est très importante pour comprendre la situation effective de l'élève.
L'analyse de l'activité de l'élève dans ces tâches qui sont à la fois très courantes à l'école maternelle et emblématiques de la discipline « français » dans les petites classes contemporaines, est susceptible de révéler aux professeurs l'importance de ce qu'ils ont souvent observé sans y prêter attention et permet d'interroger la pertinence didactique de ce type de tâches pour enseigner les premiers éléments de l'écrit. Nous montrons en effet que certaines connaissances de l'écrit sont bien impliquées : reconnaissance de chacune des lettres, indépendamment les unes des autres ; mais d'autres sont des freins à l'efficacité de l'action : ordre d'engendrement de l'écrit.
L'analyse de l'énumération impose à l'observateur de s'intéresser de très près à la matérialité, car des variations minimes changent profondément la situation et donc l'activité effective des élèves. La perspective de l'énumération permet de montrer qu'il existe des connaissances spécifiques qui permettent de décrire d'une façon générale des questions d'organisation et que

ces connaissances interviennent dans de très nombreuses situations, ce qui va nous conduire à interroger la pertinence des découpages disciplinaires dans l'institution scolaire, qui sont repris dans la dénomination des didactiques « disciplinaires » : didactique du français, didactique des mathématiques.

METTRE EN PERSPECTIVE LES CONCEPTS ET LES CHAMPS THEORIQUES

Nos références théoriques principales pour cette mise en perspective sont d'une part Guy Brousseau (1998), ce qui est banal dans la communauté à laquelle nous nous adressons ici (didactique des mathématiques) mais pas si banal que cela dans la mesure où notre discours s'adresse tout aussi bien à d'autres communautés ; d'autre part Jack Goody, anthropologique britannique (1919-2015) dont l'œuvre a été consacrée à l'écrit en tant que phénomène anthropologique (Goody, 1979, 1986).

La théorie des situations

Nous considérons la théorie des situations comme un outil d'analyse extrêmement puissant, alors que cette théorie est souvent considérée à tort exclusivement comme un outil de construction de situations adéquates. Il s'agit d'une théorie qui permet (notamment) : de modéliser l'action (au sens large) d'un actant en situation ; de mettre en évidence l'importance de la matérialité au travers du concept de milieu ; de distinguer savoir et connaissance (Margolinas, 2014). Si nous avons besoin de la théorie des situations, c'est que nous observons les élèves d'une façon suffisamment précise pour que la matérialité soit déterminante dans ce que les élèves vivent ici et maintenant. Pour le professeur, une situation peut être extrêmement semblable à une autre, parce que ces situations relèvent de la même intention et parce qu'elles s'appuient sur les mêmes idées voire le même matériel, mais pour l'élève, la situation qu'il investit dépend très souvent d'un milieu qui n'a pas été pensé en amont comme important et qui pourtant détermine les connaissances qu'il rencontre et qu'il investit, soit comme des connaissances nouvelles, soit comme des connaissances qui seront renforcées.

La théorie des situations n'est pas connue dans la communauté de didactique du français ou si elle l'est, c'est pour la repousser aussitôt comme non pertinente en français. C'est pourtant en didacticienne du français que Marceline Laparra considère au contraire que la théorie des situations lui permet maintenant de comprendre l'importance des situations et l'extraordinaire diversité de celles qui sont présentes dans une même classe : deux élèves peuvent être assis l'un à côté de l'autre et ne pas être confrontés au même milieu (voir l'interview filmée de Marceline Laparra[3], 2009). Cela pose la question des concepts et de leur domaine de validité. Guy Brousseau, en particulier, considère que la didactique des mathématiques se définit par les mathématiques et même au sein des mathématiques en tant que domaine universitaire. Cependant, cela n'empêche pas aux concepts de migrer d'un champ à l'autre, sans « garantie », peut-être, mais peut-être avec efficacité… ce que d'autres chercheurs ont entrepris, tout particulièrement dans le champ de la « didactique comparée » (voir notamment le numéro de la revue Éducation et Didactique dirigé par Ligozat, Coquidé, & Sensevy, 2014).

[3] *Profession Chercheur 8*. (2009).
Consulté à l'adresse https://videos.univ-lorraine.fr/index.php?act=view&id=368

La théorie des situations nous a notamment permis de considérer l'énumération comme une connaissance investie dans de très nombreuses situations scolaires alors que le savoir qui formalise ces connaissances n'est pas enseigné. L'énumération devient alors l'exemple paradigmatique d'un savoir qui n'est pas enseigné[4] mais qui peut être reconnu par l'observateur dans les connaissances nécessaires pour réussir dans les tâches scolaires de disciplines variées, ce qui permet d'interroger la responsabilité de l'institution scolaire dans les difficultés des élèves, voire dans la construction des inégalités.
La théorie des situations est donc devenue partie prenante dans notre regard sur les situations et non pas seulement dans le regard de l'une d'entre nous.

L'oralité et la littératie

Ce que nous apprennent les travaux de Jack Goody

Les concepts que nous convoquons maintenant sont issus de l'anthropologie et non pas de la didactique du français car cette communauté, quand elle convoque les travaux de Goody, le fait plutôt pour les concepts de raison graphique[5] et de littératie (Goody, 1979). Quand cette communauté s'intéresse à la raison graphique, elle ne le fait que pour ses enjeux cognitifs et quand elle s'intéresse à la littératie, elle ne s'intéresse qu'à la littératie linguistique.
Goody a joué un rôle essentiel dans la démonstration du rôle de l'écriture dans l'évolution de la pensée rationnelle. Il considère que l'être humain communique à l'aide de son corps dans toutes les dimensions corporelles et qu'il est alors dans l'univers de l'oralité. Celle-ci ne doit pas être confondue avec l'oral : il peut y avoir oralité sans parole, quand le corps est impliqué en relation avec les objets et les autres corps avec lesquels il cohabite. C'est la coprésence plus que l'oral qui définit l'oralité[6] ; elle va permettre de construire des procédures spécifiques : désignation gestuelle ; déictiques ; recherche d'accord entre les présents, etc.
Goody a aussi montré que l'évolution des sociétés dépendait de l'évolution des moyens matériels de l'écriture et que l'écrit permet de structurer l'espace et le temps dans toutes les activités humaines. Il considère différentes fonctions de l'écrit, en particulier dans leurs dimensions historiques et il décrit la fonction bureaucratique : fonction qui organise et permet de rationaliser les activités humaines. L'une des raisons de la naissance de l'écriture est le besoin qu'ont les êtres humains de gérer les objets du monde. La fonctionnalité première de l'écriture n'est en effet pas de transcrire la langue, ce qui n'est arrivé que progressivement. La fonction bureaucratique est la première fonction que vont rencontrer les enfants, quand ils entreprennent de gérer des objets du monde. Les autres fonctions liées à la langue sont pour eux plus abstraites, plus sophistiquées et plus tardives.
Goody nous a enfin appris que toutes les sociétés contemporaines fonctionnent dans les univers mêlés de l'oralité et de la littératie, les sociétés d'oralité « primaire » (Ong, 2002) n'existant pratiquement plus. Les enfants petits ne vivent pas dans un univers d'oralité pure, ils vivent dans l'univers social qui est littératié, y compris dans des milieux où personne ne sait ni lire ni écrire. Les objets du quotidien sont organisés comme des « tableaux » en lignes horizontales, verticales et cases, par exemple un réfrigérateur, une armoire, etc. On ne peut

[4] Dans le programme scolaire de 2015-2016, le mot « énumération » apparaît une seule fois, dans le programme de l'école maternelle (cycle 1), associé à des « connaissances pré-numérique » et c'est sa première apparition dans le texte d'un programme scolaire.

[5] Expression qui a été forgée par le traducteur de Jack Goody en français : Alain Bensa, l'ouvrage portant, en anglais le nom de *The domestication of the savage mind* (Goody, 1977)

[6] « Il y a oralité quand un groupe humain pratique en coprésence des échanges verbaux ou non, à l'aide d'objets du monde et sur ceux-ci, en mettant en jeu les ressources verbales et corporelles dont il dispose de façon fortement routinisée. » (Laparra & Margolinas, 2016, p. 169, glossaire)

pas vivre dans un univers de ce type sans acquérir des connaissances de la littératie, ce que manifestent les sujets et les élèves observés dans les situations ci-dessus.

Ce que nous observons à la lumière des travaux de Jack Goody dans les situations scolaires

Brousseau nous oblige à ne jamais oublier que les élèves investissent les situations en fonction de tous les éléments qui les composent et que notamment ils réagissent à la matérialité des objets qui y sont présents. Goody nous permet alors de comprendre comment les élèves convoquent en situation des connaissances appartenant aussi bien à l'univers de l'oralité qu'à celui de la littératie[7]. Dès lors, les objets liés au monde de l'écrit doivent toujours être considérés dans leur matérialité et pas seulement dans leurs usages linguistiques pour l'observateur qui veut comprendre le point de vue des élèves. À leur tour, les objets du monde qui ne servent pas à l'écrit doivent être considérés comme pouvant être traités par les élèves avec des connaissances de la littératie aussi bien qu'avec des connaissances de l'oralité.

Par exemple, il ne faut jamais oublier que quand on présente une « lettre » à un enfant, pour l'adulte c'est une lettre, pour l'enfant c'est un carton sur lequel il y a quelque chose d'écrit, et qu'il est impossible de comprendre sa situation si l'on oublie qu'il manipule des cartons. L'existence d'un écrit sur un carton ne fait en rien basculer l'univers de l'enfant vers la littératie. Quand une lettre est écrite sur une carte, le professeur ne voit que la lettre et certains élèves ne voient que la carte et ce qu'on fait habituellement avec des cartes (les distribuer, les battre, les comparer pour savoir qui a gagné, etc.).

Nous devons donc analyser comment les connaissances de l'oralité et de la littératie se gênent, s'épaulent, et plus généralement interagissent dans toutes les situations et notamment en ce qui concerne les élèves, dans toutes les situations scolaires. Il faut noter qu'en didactique du français, c'est un discours inaudible, car tant qu'il n'y a pas de langue, de texte, de phrase, il n'y aurait rien à étudier.

Certaines conséquences de ce que nous retenons de l'œuvre de Goody concernent directement la didactique des mathématiques, parce que les mathématiques jouent un rôle très important dans la fonction bureaucratique, c'est-à-dire dans l'entrée dans l'écrit. Gérer les objets par l'écrit c'est notamment pouvoir se souvenir d'une quantité en faisant usage des ressources de l'écrit. Mais aussi, la façon dont l'élève organise les objets qu'il essaye de traiter (par exemple de dénombrer, de trier), en les organisant en lignes, en colonne, en tableau, etc. tout cela relève de la littératie même quand aucun écrit n'est impliqué : il y a donc littératie sans écriture (Privat, 2010).

Au contraire, quand l'élève dépose des tas autour de son corps en référant à celui-ci : un tas près de sa main droite, un tas près de sa main gauche, un tas près de son corps et un tas loin de son corps, il est alors dans des procédures qui sont typiques de l'oralité. Nous pouvons maintenant comprendre que les procédures de Pauline et de Lisa sont différentes du point de vue de l'énumération (tri systématique chez Pauline, extraction chez Lisa), mais aussi du point de vue du continuum oralité-littératie (proche de l'oralité en organisation autour du corps chez Pauline, bascule de Lisa dans l'univers de la littératie : organisation de la ligne qui s'oppose au tas).

Nous pouvons notamment retenir que dès qu'il y a une organisation en ligne, « il se passe quelque chose », ce n'est jamais par hasard et c'est le signe d'une progression dans le continuum oralité - littératie.

[7] « Il y a littératie quand un groupe humain utilise les ressources de l'écrit non seulement pour noter la langue mais aussi pour organiser les corps et les objets du monde et qu'il en a un usage raisonné. » (Laparra & Margolinas, 2016, p. 168, glossaire)

Où sont donc les disciplines scolaires ? Nous venons de voir que les problèmes posés aux élèves ne relèvent d'une « discipline » que pour le professeur et pour l'institution scolaire. Les élèves investissent toutes les situations avec toutes leurs connaissances, notamment de l'oralité et de la littératie, qui interviennent en particulier dans les relations qu'ils entretiennent avec la matérialité des situations et donc avec la partie matérielle du milieu.
Rappelons que, dans la théorie des situations, le concept de situation adidactique ne désigne pas une situation d'enseignement particulière mais, dans toute situation didactique, une partie de la situation dans laquelle l'élève poursuit un enjeu en interaction avec un milieu perçu comme dénué d'intention didactique. En observant de façon minutieuse les vidéos de notre corpus, nous témoignons de l'investissement par les élèves de telles situations adidactiques, non pas parce que le professeur aurait agi pour faire la dévolution de telles situations, mais parce que les élèves rencontrent des enjeux qui les poussent à agir sur des milieux, quoi que puissent être les intentions de l'enseignant.
Ces situations adidactiques n'ont souvent pas été délibérément construites et sont de ce fait très souvent inadéquates, car elles ne conduisent pas à la rencontre de connaissances formalisables par les savoirs visés. Le contrat didactique, quand il est reconnu par l'élève, est supposé indiquer à celui-ci les limites de son action et les attendus du professeur (Brousseau, 1990). Cependant, les objets du monde convoqués par le milieu entrainent avec eux les usages routinisés construits dans leur univers quotidien et pas seulement les usages scolaires et encore moins les usages spécifiés par les contrats disciplinaires. Il est peu efficace de dire aux élèves que parce qu'on est en mathématiques, pour dessiner six pommes, il ne faut s'intéresser qu'à la quantité et pas à la forme de la pomme. On joue sur un contrat qui s'oppose à celui qui prévalait la veille quand, avec les mêmes élèves, on a fait représenter les pommes avec de la peinture en arts plastiques.

Retour à la construction des inégalités scolaires

En adoptant le point de vue que nous venons de développer, nous allons montrer que de très petites différences dans les connaissances de l'énumération et de la littératie considérée dans sa dimension spatiale et temporelle (que nous avons appelé la littératie chronotopique (Laparra & Margolinas, 2016) produisent de très grands écarts dans la réussite de tâches très banales.
Nous allons nous appuyer sur un dernier exemple (développé dans le chapitre 5 de Laparra & Margolinas, 2016). Dans la Figure 12, nous avons reproduit une fiche dont nous avons observé l'utilisation en GS, au mois de juin, dans le cadre d'un atelier « autonome »[8].

[8] Modalité courante à l'école maternelle : le professeur est prioritairement avec un autre groupe dans un atelier « dirigé ». Dans la séance observée, il n'interviendra auprès des élèves que nous observons qu'à la fin, au bout d'une vingtaine de minutes.

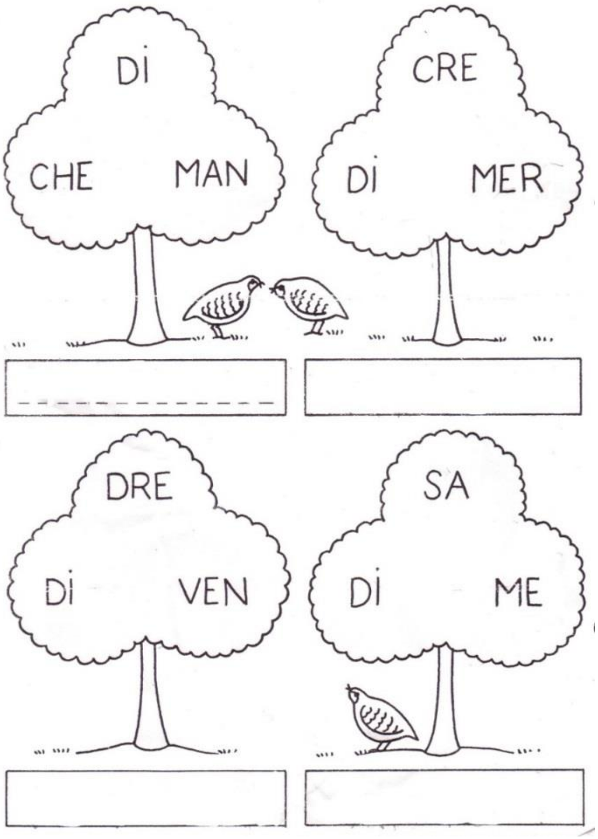


Figure 12. Une fiche proposée à l'école maternelle en fin de Grande Section issue de la revue « La classe maternelle n°70 »

En fin de GS, les élèves ont rencontré les jours de la semaine, à l'oral et à l'écrit, de très nombreuses fois. De plus, une frise écrite des jours de la semaine respectant les couleurs d'une comptine connue des élèves[9] se trouve affichée dans la classe (derrière les élèves). Cependant, dans cette classe, les élèves n'ont pas appris à écrire les jours de la semaine et ils n'ont jamais eu à les reconnaître à l'écrit sans l'aide de la couleur correspondant à la comptine. Ils doivent donc partir de leur connaissance des jours de la semaine à l'oral pour résoudre le problème qui leur est posé.

Nous allons montrer comment ces élèves peuvent interagir avec les différents éléments du milieu (la fiche, la frise, la liste orale des jours, la chanson des jours de la semaine) et surtout comment des connaissances minimes vont, parce qu'elles se cumulent entre elles, induire de très grandes différences entre une élève (Carla, « meilleure élève » de la classe) et les autres. Carla termine avec succès son travail au bout de 4 minutes 30 puis s'applique à colorier sa fiche alors que la moitié des élèves n'aura pas fini la tâche donnée au bout de 50 minutes.

Une connaissance de la littératie chronotopique partagée par tous les élèves de ce niveau les conduit à commencer par l'arbre en haut à gauche et, dans cet arbre, plutôt par DI. Vous, adultes qui savez lire, lisez automatiquement [di] car vous opérez sans vous en rendre compte la transcription graphophonique. Un élève qui sait que DI représente le son [di] et qui connaît la suite des jours de la semaine peut malheureusement vérifier que cette information ne permet pas de savoir de quel jour il s'agit puisque le son [di] se trouve dans tous les jours, le plus souvent à la fin du mot, sauf pour dimanche. Comme les segments ont été mélangés, l'indication début-fin n'est pas un indice. Un élève qui connaît seulement la comptine orale des jours de la semaine ne peut pas utiliser cette information. S'il se lève pour aller voir les

[9] Le lundi est tout gris. Jaune clair est le mardi. Mais voici mercredi rose, on se repose. Jeudi bleu vient à son tour.Vendredi vert le suit toujours. Samedi rouge. Dimanche blanc. C'est la joie des enfants !

jours de la semaine et qu'il cherche le segment DI (mémorisé D-I) il va le trouver dès le premier mot rencontré dans l'ordre littératien (LUNDI).
Comment savoir alors si ce mot écrit a pu être découpé et se trouver dans le premier arbre de la fiche ? L'élève pourrait vérifier que L n'est pas dans le premier arbre. Cependant, cela suppose des connaissances d'énumération permettant une énumération systématique très rigoureuse de plusieurs collections :

- la collection des arbres de la fiche, la collection des segments de chaque arbre et, dans chaque segments, la collection des lettres ;
- la collection des mots de la frise, la collection des lettres de chaque mot, éventuellement groupées par deux ou par trois.

Si l'élève a pu éliminer le mot LUNDI d'après sa première lettre, il n'en va pas de même pour le second (MARDI) puisque MA se trouve dans DI-MA-NCHE.
Si vous analysez chaque arbre de cette manière, vous comprendrez que certains sont plus difficiles que d'autres, certains segments sont plus facile à oraliser que d'autres (par exemple MAN et CHE sont plus difficile que SA pour la plupart des élèves).
Cependant, les prénoms, qui sont les écrits les plus présents à l'école depuis le début de la scolarité, peuvent par hasard jouer pour ou contre l'un ou l'autre des élèves dans cette situation :

> AE[10] : ça commence par quelle lettre sam(e)di
> Cyril : c [pointe C dans CRE de l'arbre mercredi]
> AE : t'es sûr qu(e) c'est un c
> Samuel : non

On comprend bien pourquoi Samuel sait que SA se prononce [sa] (début de son prénom) alors que Cyril pense que c'est C qui, comme dans son prénom, se prononce [s] ce qui fait que s'il cherche comme s'écrit [samdi] il va chercher la lettre C.
Vous vous êtes maintenant familiarisés avec la complexité de cette situation apparemment banale. Nous allons maintenant montrer pourquoi, dans cette situation, une petite connaissance littératienne et une bonne connaissance de l'énumération vont produire des différences considérables dans la rapidité d'exécution.
Une des premières connaissances de l'énumération à intervenir peut s'énoncer ainsi : la complexité diminue s'il y a moins d'éléments à traiter. Il faut chercher quel arbre peut être traité sans erreur au lieu de traiter un des arbres au hasard ou de suivre un ordre littératien.
En examinant attentivement la fiche, une élève qui énumère d'abord la suite des segments peut repérer un segment qui est déterminant si elle sait oraliser une lettre de l'alphabet : V (qui s'appelle [ve] et ne se prononce que [v]). Ce n'est donc nullement par hasard que Carla commence par VENDREDI, et qu'elle écrit rapidement dans le cadre placé sous l'arbre le mot vendredi. Cela lui permet ensuite de n'avoir plus à chercher que parmi 6 jours au lieu de 7 et d'avoir à traiter 3 arbres parmi 4. Les toutes petites connaissances qui sont disponibles pour Carla trompent les observateurs et l'enseignant, qui peuvent penser qu'elle sait presque lire, alors qu'un examen attentif permet de comprendre que ce n'est pas le cas, mais que les quelques connaissances qu'elle a de la correspondance graphophonique, et une très bonne stratégie de réduction de la complexité de l'énumération lui permettent de diminuer très vite la difficulté.
D'autres élèves errent littéralement dans la classe en se déplaçant de très nombreuses fois à leur place, puis sous la frise des jours de la semaine, puis à leur place, ils emportent ou non leur feuille sous la frise, etc.
Nous pouvons transcrire ces déplacements[11], qui nous permettent de voir notamment que Carla est la première à se déplacer pour obtenir une information (déplacement vers l'assistante

[10] Assistante d'éducation, présente dans la classe, qui régule les ateliers non dirigés.

d'éducation), et que Cyril est lui aussi actif (en termes de déplacement) au même moment, et qu'à la fin de l'atelier, Cyril est toujours actif au bout de 44 minutes. Le professeur, qui a été occupé avec d'autres élèves pendant la majeure partie du temps, ne peut se douter ni de l'ampleur de la difficulté ni de l'investissement acharné des élèves, que seul le chercheur peut observer.

Code Time	N° déplacement	Elève	Direction du déplacement		Objectif déplacement	Déplacement objet
			De	A		
0:07:10.4	D1	Carla	Sa place	AE	Montrer sa feuille	feuille
00:07:13	D2	Carla	AE	Sa place	revenir	
00:07:23	D1	Cyril	Sa place	J de la semaine	consultation étiquettes	
00:07:35	D2	Cyril	J de la semaine	Sa place	revenir	
00:08:09	D3	Cyril	Sa place	J de la semaine	consultation étiquettes	
0:08:24.3	D4	Cyril	J de la semaine	Sa place	revenir	
0:08:24.3	D1	Rémy	Sa place	J de la semaine	consultation étiquettes	feuille
0:08:33.5	D1	Husseyin	Sa place	AE	Montrer sa feuille	feuille
0:08:43.9	D5	Cyril	Sa place	J de la semaine	consultation étiquettes	crayon
0:08:44.5	D3	Carla	Sa place	Ingrid? [à sa place]	bavarder [?]	
0:08:52.6	D4	Carla	Place Ingrid	Sa place	revenir	
0:08:55.8	D2	Husseyin	AE	Sa place	Revenir avec AE	feuille
0:08:55.8	D6	Cyril	J de la semaine	Sa place	revenir	crayon
0:09:13.6	D7	Cyril	Sa place	J de la semaine	consultation étiquettes	crayon
0:09:27.1	D8	Cyril	J de la semaine	Sa place	revenir	crayon
00:10:58	D5	Carla	Sa place	AE	Montrer sa feuille	feuille
00:10:52	D6	Carla	AE	Sa place	revenir	feuille

Figure 13 Premières minutes du travail

0:46:35.7	D19	Cyril	Sa place	J de la semaine	consultation étiquettes	feuille
0:46:51.2	D25	Samuel	J de la semaine	Sa place	revenir	feuille et crayon
0:46:53.9	D20	Cyril	J de la semaine	Sa place	revenir	feuille
0:47:44.4	D26	Samuel	Sa place	J de la semaine	consultation étiquettes	feuille et crayon
0:48:10.6	D21	Cyril	Sa place	J de la semaine	consultation étiquettes	AE l'accompagne et prend ses affaires
0:48:32.7	D10	Rémy	Sa place	? (hors champ)	se promener?	crayon
0:49:08.4	D24	Ingrid	Sa place	J de la semaine	consultation étiquettes	pot à crayon et feuille
0:49:17.5	D27	Samuel	J de la semaine	Sa place	revenir	feuille et crayon
0:49:18.5	D11	Rémy	? (hors champ)	Maître	demander de l'aide?	crayon
0:49:35.3	D25	Ingrid	J de la semaine	Sa place	mettre tampon du jour	feuille
0:50:05.4	D22	Cyril	J de la semaine	J de la semaine	prendre sa feuille	feuille au retour
0:51:19.1	D12	Rémy	avec Maître hors champs	Sa place	prendre sa feuille et la ranger	feuille au retour
0:51:35.2	D28	Samuel	Sa place	AE	donner sa feuille	feuille et pot à crayon
0:51:36.7	D23	Cyril	J de la semaine	AE	donner sa feuille?	feuille

Figure 14 Au bout de 40 minutes, des élèves n'ont pas fini et n'ont pas abandonné

Ainsi, dans cette situation comme dans beaucoup d'autres, des difficultés d'énumération et des difficultés spécifiques de la situation (ici la transcription graphophonique, notamment) se renforcent l'une l'autre jusqu'à provoquer soit un blocage, soit un allongement déraisonnable du temps de travail.

Une telle combinaison de difficultés n'est pas propre aux tâches de « français », nous avons observé sensiblement le même phénomène dans des activités « mathématiques », comme par exemple, dans la même classe et dans la même période de l'année au cours d'un travail sur fiche (Figure 15).

[11] Nous tenons à remercier Judith Margolinas, qui a conçu ces tableaux, pour son remarquable travail de transcription.

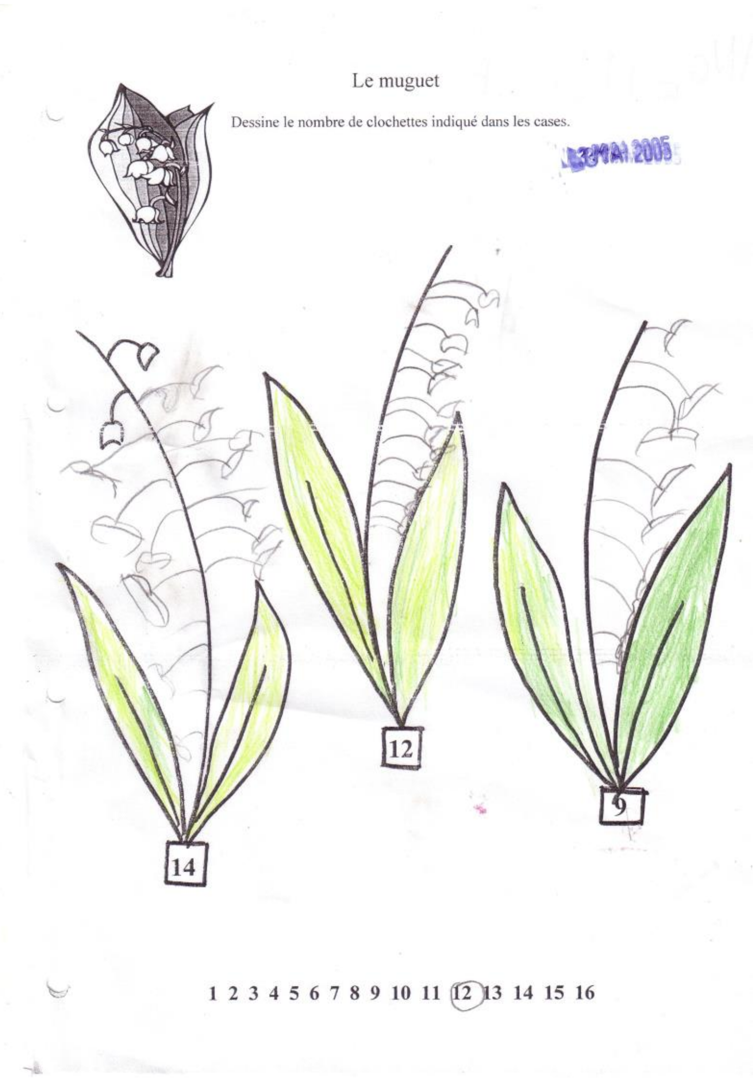


Figure 15. Fiche du muguet. Production finale d'Angélique

Dans cette classe de GS, les élèves ne savent pas lire les deux premiers nombres écrits en chiffre : quatorze et douze. Ils doivent donc se servir de la bande numérique en repérant le nombre visé (par exemple en entourant le 12, comme sur la fiche reproduite) puis en comptant oralement à partir de 1 de manière à identifier le nom de 12. Il faut alors mémoriser le nombre à atteindre.

Cependant, cette mémorisation est difficile car il faut dessiner des clochettes de muguets tout en gardant ce nombre en mémoire, les dénombrer pour vérifier, etc. Plus l'énumération pour dénombrer est complexe, plus la mémorisation du nombre à atteindre est difficile.

Nous observons des élèves qui, comme dans le cas de la référence à la frise des jours de la semaine, font des allers-et-retours frénétiques (à leur table, cette fois) entre leur dessin des clochettes en cours d'élaboration et la bande numérique de leur fiche.

Dans la fiche d'Angélique, nous pouvons constater qu'elle diminue fortement la difficulté de dénombrement pour le deuxième muguet en disposant les douze clochettes en ligne, ce qu'elle reproduira pour le brin suivant. Cette élève qui d'ordinaire est plutôt en grande difficulté, démontre des connaissances littératiennes qui, malheureusement, ne seront pas identifiées et pas valorisées.

C'est vraisemblablement la présence systématique de quelques connaissances non enseignées à l'école qui permet de comprendre pourquoi ce que nous analysons peut être associé à des déterminations sociales. L'énumération fait partie de ces connaissances non enseignées mais en jeu dans de très nombreuses situations et pas seulement dans des activités bien spécifiques,

par exemple de tri (comme les jetons marqués évoqués ci-dessus), ou de dénombrement (Brousseau, 1984).
À notre connaissance, il n'y a pas de travaux systématiques qui permettent de montrer ce qui, dans les pratiques familiales, permet à certains enfants de faire preuve à l'école d'une meilleure capacité à énumérer, mais nous pouvons formuler quelques hypothèses. Les jouets sont en effet différenciés socialement (Vincent, 2000) et l'on peut supposer que certains jeux conduisent à développer des connaissances d'énumération (gestion de beaucoup de petits objets identiques nombreux, comme certains jeux de construction) alors que d'autres ne le permettent pas (objets déjà entièrement construits). De plus l'énumération est très liée aux connaissances de la littératie chronotopique, qui se développent à la fois en relation avec l'environnement mais aussi en relation avec des objets comme les livres, dont le parcours ne peut s'interpréter qu'avec de telles connaissances (même sans savoir « lire »), comme par exemple tourner les pages d'un livre les unes après les autres.

Conclusion

En décrivant les connaissances d'énumération, de l'oralité et de la littératie, nous contribuons à la production de savoirs… dans un champ disciplinaire qui n'existe pas !
Le professeur ne peut pas relier les difficultés qu'il perçoit plus ou moins précisément à un savoir à enseigner (identifié dans les programmes, notamment) et ne peut donc pas agir sur ces difficultés. Les savoirs qui permettraient de reconnaître l'utilité de certaines connaissances et qui pourraient conduire à une institutionnalisation manquent dans l'institution d'enseignement. De ce fait, les élèves restent inégalement exposés à la reconnaissance de l'utilité de certaines connaissances, qui ne sont pas identifiées à l'école.
Finalement, si certaines connaissances ne sont disponibles que pour une minorité d'élèves, c'est tout simplement que les savoirs correspondants ne sont pas enseignés. Cette remarque est à la fois triviale et importante : ce n'est pas la « méthode » d'enseignement qui est en cause selon nous mais tout simplement la présence de l'enseignement de certains savoirs que nous identifions.
Les didactiques des disciplines se sont constituées historiquement, en référence aux disciplines de l'enseignement secondaire. Les didacticiens des mathématiques n'en ont pas toujours conscience car les mathématiques correspondent à la seule discipline qui existe sous le même nom pratiquement de l'école primaire à l'université… En contraste, le « français » n'existe pas à l'université en tant que discipline. Plusieurs disciplines : « sciences du langage » et « lettres » correspondent, à l'université, à l'unique discipline « français » de l'enseignement primaire et secondaire. Nous considérons que la constitution des didactiques par disciplines, qui a été très utile historiquement, freine maintenant leur développement. Il faudrait pouvoir refonder les frontières des didactiques en partant d'une organisation des savoirs justifiée par des considérations didactiques. L'énumération est l'exemple paradigmatique d'un savoir qui a été institué en didactique des mathématiques, alors que sa portée s'étend bien au-delà de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AUBIN-AUGER, I., MERCIER, A., BAUMANN, L., LEHR-DRYLEWICZ, A.-M., IMBERT, P., & LETRILLIART, L. (2008). Introduction à la recherche qualitative. *Exercer*, *19*(84), 142‑145.

BRIAND, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 41‑76.

BRIAND, J. (1999). Trier en petite section. *Grand N, 65*, 7‑14. Consulté à l'adresse http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/65/65n2.pdf

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU, G. (1984). L'enseignement de l'énumération. Consulté à l'adresse http://guy-brousseau.com/2297/l%E2%80%99enseignement-de-l%E2%80%99enumeration-1984/
BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 309‑336.
COHEN-AZRIA, C., LAHANIER-REUTER, D., & REUTER, Y. (Éd.). (2013). *Conscience disciplinaire. Les représentations des disciplines à la fin de l'école primaire*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
DURU-BELLAT, M., & VAN ZANTEN, A. (2016). *Sociologie du système éducatif*. Paris : Presses Universitaires de France.
GOODY, J. (1977). *The domestication of the savage mind*. Cambridge : University Press.
GOODY, J. (1979). *La raison graphique*. (A. Bensa, Trad.). Paris : Les éditions de minuit.
GOODY, J. (1986). *La logique de l'écriture. Aux origines des sociétés humaines*. Paris : Armand Colin.
GROS, C., & HEYRIES, C. (2015). *Quelles sont les différentes stratégies d'organisation mises en place par des élèves de petite section de maternelle dans une situation de découverte de l'écrit mettant en œuvre des connaissances d'énumération ?* ESPE Clermont-Auvergne, Université Blaise-Pascal, Clermont-Ferrand.
LAPARRA, M., & MARGOLINAS, C. (2009). Le schéma : un écrit de savoir ? *Pratiques*, *143‑144*, 51‑82.
LAPARRA, M., & MARGOLINAS, C. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe*. Bruxelles : De Boeck.
LAPARRA, M., & MARGOLINAS, C. (2017). Simple ou complexe, oui mais pour qui? *Cahiers Pédagogiques*, *541*, 15‑16.
LIGOZAT, F., COQUIDE, M., & SENSEVY, G. (Éd.). (2014). Didactiques et/ou didactique? D'une question polémique à la construction d'un espace de problématisation scientifique. *Éducation et Didactique*, *8(1)*. https://journals.openedition.org/educationdidactique/1847
MARGOLINAS, C. (2012). Des savoirs à la maternelle ? Oui, mais lesquels ? In *XXXIX colloque COPIRELEM*. Consulté à l'adresse http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00744279
MARGOLINAS, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques? *Revue Française de Pédagogie*, *188*, 13‑22.
MARGOLINAS, C. (2016). Ce que peut apporter l'analyse des implicites et des conversions à la compréhension des difficultés des élèves concernant l'écrit mathématique au début de l'école primaire. Présenté à Rencontre autour des travaux de Jean-Philippe Drouhard, Nice. Consulté à l'adresse https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01689104v1
MARGOLINAS, C., & LAPARRA, M. (2010). Analyse de situations et production des inégalités scolaires. In F. Leutenegger, M. Schubauer-Leoni, F. Ligozat, N. Lambiel, A. Forget, F. Audigier, T. Thévenaz-Christen (Éd.), *Où va la didactique comparée ? Didactiques disciplinaires et approches comparatistes des pratiques d'enseignement et d'apprentissage*. Genève : Université de Genève FPSE-SSED & ARCD. Consulté à l'adresse http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00429565/fr/
ONG, W. J. (2002). *Orality and Literacy*. London & New York : Routledge.
PRIVAT, J.-M. (2010). Un bain de littératie. *ethnographiques.org*, *20* (septembre 2010 [en ligne]). Consulté à l'adresse http://www.ethnographiques.org/2010/Privat
PRIVAT, J.-M. (2018). Sur la raison graphique. La domestication de la pensée sauvage de Jack Goody. *Questions de Communication*, *33*, 299‑324.
RIVIÈRE, O. (2017). *Continuité des connaissances d'énumération et conséquences sur les savoirs : mieux comprendre les difficultés des élèves confrontés à des problèmes d'énumération*. Université Clermont-Auvergne, Clermont-Ferrand.
ROCHEX, J.-Y., & CRINON, J. (2011). *La construction des inégalités scolaires*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
VIGNON, S. (2014). *L'observation au service de l'énumération. L'influence de l'observation de l'enseignant dans le repérage des difficultés rencontrées par les élèves de maternelle dans le cadre de l'énumération*. Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.
VINCENT, S. (2000). Le jouet au coeur des stratégies familiales d'éducation. *Sociétés contemporaines*, *40*(1), 165‑182. https://doi.org/10.3406/socco.2000.1819

TITRE

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, 2017

AUTEURS

Thomas Barrier

Christine Chambris

RESUME

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM, session 2017

Le séminaire national de didactique des mathématiques, organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration d'une communauté de chercheur-e-s.

Au fur et à mesure de la finalisation des textes des interventions, ceux-ci sont mis à disposition sur le site de l'ARDM. Ils sont ensuite regroupés en un volume. Le présent ouvrage regroupe les textes issus des séminaires de l'année 2017.

Signalons que, depuis 2014, le groupe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM organise une session de posters durant les sessions du séminaire. En 2017, pour le colloquium CFEM-ARDM, des intervenants, issus de la diversité des communautés préoccupées par l'enseignement des mathématiques, sont venus éclairer une thématique choisie dans la concertation. C'est le thème *mathématiques et citoyenneté* qui a été retenu pour cette première. Ces interventions donnent lieu à des textes dans ce volume.

MOTS CLES

Didactique des mathématiques

IREM de Paris – Université Paris Diderot
Directeur de publication Christophe Hache
www.irem.univ-paris-diderot.fr
Dépôt légal : 2019 – ISBN : 978-2-86612-389-5