

Brochure IREM

n°100

Septembre 2021

**2^o édition – revue
et augmentée**

Enseigner la géométrie au cycle 4

Comparer des triangles pour démontrer

Par le Groupe Géométrie de l'IREM de Paris

Éditeurs : Daniel Perrin et Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Préface de *Patrick Popescu-Pampu* (Université de Lille)

ISSN : 0993-6947

Imprimé par l'IREM de Paris – Université de Paris

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication

<https://irem.u-paris.fr/>

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):
Université de Paris, Bâtiment Sophie-Germain,
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,
75013 Paris 13ème arrondissement
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de France)

Nous Contacter

Pour téléphoner : 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:

Locufier Nadine
IREM de Paris – Case 7018
Université de Paris
75205 Paris cedex 13

par voie électronique :

nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

<https://irem.u-paris.fr/> (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé :

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

Enseigner la géométrie

au cycle 4

Comparer des triangles pour démontrer

Groupe géométrie de l'IREM de Paris

Auteurs

Martine Bühler

Guillaume Didier

Bernard Parzysz

Daniel Perrin

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Anne Pinvidic

Charlène Piot

Sébastien Planchenault

Avec la participation de : René Cori, Bernadette Denys, Gislain Dufraisse, Jean-Christophe Masseron

Préface

Patrick Popescu-Pampu

Professeur de l'Université de Lille

<https://math.univ-lille1.fr/~popescu/>

J'ai accepté sans hésiter d'écrire cette préface car je suis de ceux qui ont découvert le plaisir de faire des mathématiques grâce aux inépuisables richesses de la géométrie dans le plan et dans l'espace. C'était à Bucarest, au début des années 1980. Ceaușescu faisait table rase de vénérables quartiers historiques et les remplaçait par l'Avenue de la Victoire du Socialisme et le Palais du Peuple. Mais au collège subsistait un enseignement de la géométrie à la manière d'antan, dont l'esprit avait été ramené de France par de jeunes scientifiques partis à la fin du XIX^e siècle y faire leur doctorat.

Par exemple, Spiru Haret, Gheorghe Țițeica et Trajan Lalesco, qui firent leurs thèses avec Victor Puiseux, Gaston Darboux et enfin Émile Picard, marquèrent tous les trois l'enseignement de la géométrie en Roumanie. Ainsi, le premier réforma l'enseignement primaire et secondaire roumain en tant que ministre de l'éducation, le deuxième écrivit un recueil de problèmes de géométrie que l'on utilisait encore lorsque j'étais au collège et le troisième composa un traité sur la géométrie du triangle¹.

Je me souviens avec tendresse de la géométrie que j'ai apprise au collège. En traçant des figures auxiliaires, on faisait surgir d'un contexte insolite des motifs familiers. Parfois un simple segment était la clé d'un grand théorème, comme lorsqu'en menant dans un triangle rectangle la hauteur à partir de l'angle droit, on obtenait soudain le célèbre théorème de Pythagore².

Quel plaisir d'apercevoir brusquement une construction auxiliaire salvatrice, après avoir beaucoup expérimenté avec des constructions infructueuses ! Pour ne pas oublier la vision lumineuse, fuyante et fragile, et pour la communiquer aux autres, l'on devait ensuite rédiger les démonstrations avec rigueur, en appliquant des règles strictes, en faisant attention à bien montrer où servait chaque hypothèse, et comment les étapes intermédiaires se combinaient pour mener petit à petit au résultat. Quel refuge dans une société où les mots perdaient leur sens, détournés par la langue de bois qui dominait tout

¹La fin du XIX^e siècle était un âge d'or des recherches sur la géométrie du triangle, comme on peut l'apprendre dans l'article *La nouvelle géométrie du triangle à la fin du XIX^e siècle : des revues mathématiques intermédiaires aux ouvrages d'enseignement*, de Pauline Romera-Lebret, *Revue d'Histoire des Mathématiques* **20** No. 1 (2014), 253–302. Le site *Encyclopedia of triangle centers* de Clark Kimberling tente de recenser les dizaines de milliers (sic !) de points remarquables des triangles répertoriés jusqu'à présent, et leurs diverses relations et interprétations. Cette abondance témoigne de la passion d'innombrables personnes pour ce domaine des mathématiques élémentaires. Je parie que nombre d'enseignants de collège en sont fêrus.

²En effet, cette hauteur découpe deux triangles plus petits, mais semblables au grand ; il suffit alors d'invoquer le fait que le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport de leurs côtés homologues et que l'aire du triangle initial est égale à la somme des aires des deux triangles plus petits. On pourra découvrir bien d'autres preuves du théorème de Pythagore, ainsi que des phénomènes mathématiques reliés, dans l'article *Le théorème de Pythagore : un petit guide*, de Serge Cantat, *Images des Mathématiques*, CNRS, 2020. Et encore d'autres dans le livre *Curiosités géométriques* d'Émile Fourrey, que j'ai présenté dans l'article *Mettez la gomme !*, *Images des Mathématiques*, CNRS, 2017.

le domaine public !

On a beaucoup insisté à travers les siècles sur le rôle de la géométrie dans l'éducation à la rigueur. Mais je trouvais déjà à l'époque que c'était l'imagination qui jouait le beau rôle, car elle permettait d'entrevoir une preuve au milieu des esquisses et des ratures³. Imagination et rigueur, leur harmonieuse combinaison ressentie pendant que j'apprenais la géométrie m'attira tellement, qu'à la fin du collège je me mis à rêver de devenir mathématicien.

C'est en France que j'ai réalisé ce rêve, après la chute de Ceaușescu. J'y découvris une communauté mathématique complexe, aux multiples écoles, formant un écosystème traversé par des idées provenant de tous les horizons. Par exemple, en ce qui me concerne, je fus attiré vers mon domaine de recherche, la théorie des singularités, par un cours du russe Vladimir Arnold, je fis ma thèse avec le français Bernard Teissier, dont le maître avait été le japonais Heisuke Hironaka, qui avait fait sa thèse aux États Unis avec le russe Oscar Zariski, qui avait fait la sienne à Rome avec l'italien Guido Castelnuovo, qui ... je suis émerveillé que des personnes d'origines et cultures si variées participent à une même aventure, en se transmettant à travers les âges les fruits de leur imagination.

Pour que l'écosystème mathématique ne s'appauvrisse pas et pour que ses créations enrichissent par leurs formes de pensée ou par leurs applications le reste de la société, il est essentiel que dans chaque école les enfants puissent ressentir à quel point les mathématiques nécessitent de l'imagination, de l'inventivité, et à quel point les cultiver avec rigueur donne un sentiment de plénitude. La géométrie plane, lorsqu'elle est bien enseignée, permet de transmettre de manière inégalée un tel ressenti. Et c'est à la bien enseigner qu'œuvre le présent ouvrage.

Plus précisément, ses auteurs ont travaillé avec soin et subtilité afin de fournir aux professeurs des collèges la matière pour faire découvrir à leurs élèves la puissance des critères d'égalité et de similitude des triangles. Ils insistent sur l'importance de ne pas se cantonner à des exercices-type, mais d'utiliser ces critères comme outils d'exploration de problèmes géométriques apparemment bien différents. Par exemple, les auteurs montrent comment ces critères permettent de comprendre les procédés de triangulation qui étaient utilisés à l'époque de la Révolution Française pour mesurer la méridienne⁴ et la justesse d'une construction au compas seul du centre d'un cercle donné⁵.

Les critères d'égalité et de similitude avaient été bannis pendant un certain temps des programmes, mais ils y sont revenus en 2016. Le but de cette brochure est de faire voir à quel point ils permettent d'aiguiser le regard géométrique. Le texte aborde de nombreux aspects qui se complètent mutuellement : des réflexions épistémologiques, pédagogiques et historiques sur l'enseignement de la géométrie, une étude du programme, des conseils de progression, des chroniques d'expérimentation pédagogique, des rédactions d'élèves, des banques de problèmes et, enfin, des considérations théoriques permettant aux enseignants

³Plus tard, lorsque j'étais en thèse, j'ai dévoré l'un des joyaux de la diffusion mathématique, le livre *Geometry and the imagination*, de David Hilbert et Stefan Cohn-Vossen, qui illustre de manière éclatante le rôle crucial de l'imagination en géométrie.

⁴On pourra aussi lire à ce sujet l'article *Géométrie, mesurer la terre, mesurer la Terre ?* de Michèle Audin, Images des Mathématiques, CNRS, 2020.

⁵Plus généralement, on pourra découvrir dans le Chapitre III.5 du célèbre livre *Qu'est-ce que les Mathématiques ?* de Richard Courant et Herbert Robbins la théorie élaborée par Lorenzo Mascheroni, concernant les constructions géométriques qui peuvent s'effectuer au compas seul. J'ai présenté ce livre dans *Le Courant et Robbins*, Images des Mathématiques, CNRS, 2016.

de prendre du recul⁶.

Une fois la résolution d'un joli problème de géométrie comprise grâce à des expérimentations et des discussions en classe, puis correctement rédigée, le moment est-il venu de passer à un autre problème ? C'est ce que je croyais avant de découvrir il y a quelques années l'étonnante édition des six premiers livres des *Éléments* d'Euclide faite par Oliver Byrne au milieu du *XIX^e* siècle⁷. Ses figures en noir, bleu, jaune et rouge peuvent faire penser à des tableaux de Mondrian. Les preuves manipulent non pas des lettres, comme il est traditionnel de le faire, mais des fragments de la figure principale, simplement translétés dans le texte. On se rend compte ainsi que le coloriage n'a pas été fait au hasard, mais pour aider le regard dans ses incessants voyages entre le texte et la figure principale. Pourquoi ne pas proposer en classe de rédiger-dessiner-colorier certaines démonstration de la sorte ?

À ce sujet, j'invite les maîtres à méditer sur ces réflexions platoniciennes de René Thom concernant les démonstrations mathématiques⁸ :

« [...] toute démonstration est avant tout la révélation d'une nouvelle structure, dont les éléments gisaient séparés dans l'intuition, et dont le raisonnement reconstruit la genèse progressive. En ce sens, toute démonstration est une maïeutique : il s'agit de recréer chez le lecteur les processus psychologiques propres à la manifestation de la vérité implicite, dont il détenait toutes les données mais qui restait voilée dans l'informulé. »

⁶Pour prendre du recul on peut aussi réfléchir à l'apparition de la géométrie du triangle dans des situations insolites, comme l'étude mathématique de l'origami. On pourra démarrer avec l'article *Le pliage du papier et l'histoire des mathématiques* de Michael Friedman, et continuer avec le livre *Geometric folding algorithms* d'Erik D. Demaine et Joseph O'Rourke paru en 2007 aux Cambridge University Press.

⁷J'ai présenté cette édition dans mon article *On a colorié Euclide*, Images des Mathématiques, CNRS, 2020. Ceux qui désirent avoir une vue d'ensemble du contenu des treize livres des *Éléments* d'Euclide pourront lire le livre *Euclid – the creation of mathematics* de Benno Artmann, paru en 1999 chez Springer.

⁸Il s'agit d'un extrait de l'article *Les mathématiques « modernes » : une erreur pédagogique et philosophique ?*, paru dans l'Âge de la Science III (1970), 225–242, et republié dans les *Œuvres Mathématiques II* de René Thom, Vol. 17 de la collection *Documents Mathématiques* de la Société Mathématique de France, 2019, 493–510.

Introduction et mode d'emploi de cette brochure

Cette brochure émane du groupe « Géométrie » de l'IREM de Paris. Elle s'adresse aux professeurs de collège mais aussi aux formateurs, aux IA-IPR et plus généralement à tous ceux qui s'intéressent à l'enseignement de la géométrie élémentaire.

Elle est motivée par le retour dans les programmes des cas d'égalité et de similitude des triangles. En effet, ces notions étaient depuis longtemps absentes de l'enseignement et cela a pour conséquence qu'une majorité des professeurs de collège n'y ont jamais été confrontés. Au vu de ce que proposent les manuels et les documents d'accompagnement, il nous a paru utile de les compléter sur ces points et notamment sur l'utilisation des cas d'isométrie et de similitude des triangles comme outils de démonstration.

Il ne faut cependant pas voir dans cette brochure une proposition de mise en œuvre des programmes. Il s'agit d'une réflexion plus fondamentale sur la possibilité d'appuyer l'enseignement actuel de la géométrie élémentaire au collège sur une axiomatique cohérente et compatible avec le développement des élèves, permettant en particulier une continuité avec l'enseignement primaire.

Le travail du groupe « Géométrie » s'appuie sur un certain nombre de réflexions mathématiques et didactiques, ainsi que sur des séquences réalisées en classe. La position que nous adoptons consiste à préférer, au Collège, l'usage des cas d'isométrie et de similitude ainsi que des invariants (longueurs, angles, aires) à celui des transformations. Nous en déduisons une proposition de progression compatible avec les programmes.

L'ordre choisi pour la présentation de la brochure repose sur une structure en trois parties. La première partie (chapitres 1 à 4) donne les fondements théoriques, épistémologiques et didactiques de l'approche proposée. La deuxième partie (chapitres 5 à 10), après un regard sur les programmes, les ressources institutionnelles et les manuels, propose et analyse des activités pour les classes. La première des quatre annexes qui constituent la troisième partie donne les fondements mathématiques de notre progression : les axiomes sur lesquels elle repose et les principales démonstrations. La deuxième annexe fournit quelques compléments utiles au professeur pour gérer sa classe. Enfin, les troisième et quatrième annexes donnent des exemples de situations permettant d'aborder des sujets qui ne sont pas traités explicitement dans la brochure : l'annexe 3 présente un projet long mené en classe de cinquième sur le thème des pavages par un professeur du groupe et l'annexe 4 donne des exemples de situations dans lesquelles on peut travailler la différence entre hypothèses et conclusions dans un raisonnement à partir de la construction d'une même figure par des voies différentes.

Plusieurs niveaux de lecture de cette brochure sont possibles et il n'est nullement obligatoire de suivre l'ordre des chapitres. Ainsi, le professeur trouvera des activités directement utilisables avec les élèves en lisant le compte-rendu de séances réalisées dans les classes de membres du groupe sur les triangles isométriques (ch. 6), sur les aires et le théorème de Thalès (ch. 7), sur l'homothétie et les triangles semblables (ch. 8). Il trouvera aussi de nombreux exercices commentés dans le chapitre 10. Les principes généraux sur lesquels nous souhaitons fonder l'enseignement de la géométrie sont énoncés au chapitre 1. Les justifications des choix didactiques de notre progression sont présentées au chapitre 4, à partir de la comparaison de l'utilisation des cas d'isométrie et des transformations comme outils de démonstration. Le chapitre 5 montre la compatibilité de ces choix avec les programmes actuels et propose une première analyse des ressources. Le chapitre 9 donne des exemples historiques d'utilisation des triangles isométriques ou semblables pour modéliser des

situations de la vie réelle ou pour réfléchir sur les constructions au compas. Le chapitre 2 rappelle les contours historiques du sujet. Le chapitre 3 propose une ouverture didactique qui montre que le choix d'un appui de l'enseignement sur une axiomatique proche de celle d'Euclide permet une meilleure continuité entre l'enseignement de la géométrie en primaire et en collège. Les professeurs y trouveront notamment matière à réflexion pour leur enseignement en sixième.

Le professeur peut ainsi faire des allers et retours entre les chapitres plus pratiques et les chapitres plus théoriques, par exemple commencer par le chapitre 4, puis passer aux chapitres 5 à 8 et revenir ultérieurement aux chapitres 1, 2, 3, 9. Tout au long de sa lecture, il pourra piocher dans les exercices du chapitre 10 et se reporter aux annexes pour trouver la démonstration des résultats le plus souvent admis dans l'enseignement.

Sommaire

PARTIE 1. Quelle organisation de l'enseignement de la géométrie au cycle 4 ?	11
Chapitre 1. Quelques principes soutenant nos propositions pour l'enseignement de la géométrie au collège	13
I. Pourquoi enseigner la géométrie ?	13
II. Les mots pour le dire	17
III. Les outils pour l'enseignement de la géométrie	20
Chapitre 2. Des références historiques pour l'enseignement de la géométrie	27
I. Les Éléments d'Euclide	27
II. Transmission et postérité : d'autres Éléments de géométrie.	29
Chapitre 3. Penser la continuité de l'apprentissage au long de la scolarité obligatoire	33
I. Des objets matériels aux objets géométriques	33
II. Géométrie physique et géométrie théorique	34
III. Articulation texte et figure dans une démonstration	36
IV. Les instruments pour reproduire ou construire des figures	40
Chapitre 4. Comment choisir une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie au cycle 4 ?	47
I. Diverses organisations de l'enseignement de la géométrie depuis les années 1950	47
II. Comparaison des approches par les cas d'isométrie et les transformations : quelques exemples	50
III. Une organisation appuyée sur les cas d'égalité des triangles	59
PARTIE 2. Activités dans les classes	65
Chapitre 5. Le programme et les manuels	67
I. Le programme et les repères de progression	67
II. Les manuels scolaires	71
Chapitre 6. Les triangles isométriques en classe	77
I. Chronique dans les classes de 5 ^{ème} de Sébastien	77
II. Chronique dans la classe de 4 ^{ème} de Charlène	87
III. Chronique dans la classe de 4 ^{ème} de Guillaume	98
IV. Synthèse	112
Annexes du chapitre 6	116
Chapitre 7. Démonstrations par les aires et théorème de Thalès	123
I. Les théorèmes indispensables sur les aires	123
II. La droite des milieux en 4 ^{ème}	130
III. Une démonstration du théorème de Thalès en 3 ^{ème}	138
IV. Une introduction possible du théorème de Thalès	144
V. Exercices	151
Annexe du chapitre 7	153
Chapitre 8. Applications du théorème de Thalès à l'homothétie et à la similitude	155
I. Homothétie	155
II. Triangles semblables	162

III. Problèmes mettant en jeu les triangles semblables et d'autres notions	169
Chapitre 9. Quelques applications des triangles isométriques et semblables	175
I. La méridienne	175
II. Les constructions au compas seul	178
Chapitre 10. Banque d'exercices et de problèmes	183
1. Utilisation des cas d'isométrie	183
2. Autour des cas de similitude	198
3. Exercices utilisant les angles	202
4. Exercices utilisant les aires	203
5. Exercices utilisant les transformations	206
Références des parties 1 et 2	209
Annexe 1. Les fondements de notre progression : axiomes et démonstrations	213
1. Axiomes d'incidence et d'ordre	216
2. Axiomes de « groupes »	219
3. Applications des cas d'égalité : quelques propriétés essentielles	226
4. Axiomes des aires	232
5. Isométries, similitudes, trigonométrie, etc.	236
6. Le bréviaire du professeur de collègue	239
7. Exercices	240
Annexe 2. Quelques compléments mathématiques	245
8. Deux résultats	245
9. Le premier cas d'égalité dans la mauvaise position	246
10. Une autre preuve du théorème de Thalès	248
11. Sur les réciproques en géométrie	249
12. Des mesures entières ?	251
13. Applications dans les classes	252
Annexe 3. Pavages et symétrie centrale	255
Annexe 4. Travailler la différence entre hypothèses et conclusions via la construction de figures	261
1. Une figure et plusieurs énoncés	261
2. Comparaison de deux configurations	264
Références des annexes	268

Partie 1

Quelle organisation de
l'enseignement de la
géométrie au cycle 4 ?

Chapitre 1

Quelques principes soutenant nos propositions pour l'enseignement de la géométrie au collège

I. Pourquoi enseigner la géométrie ?

La question de l'utilité de l'enseignement de la géométrie est traitée dans de nombreux textes. On se référera notamment au rapport de la commission Kahane (Kahane, 2002). Par rapport à ce texte, qui date de 2002, la place de la géométrie dans l'enseignement du second degré s'est considérablement restreinte, notamment au lycée où elle n'apparaît plus que sous forme de géométrie analytique. Cependant, les nouveaux programmes du cycle 4 offrent, avec le retour des cas d'égalité¹ et de similitude et des transformations, une opportunité nouvelle qu'il nous semble important de saisir. Rappelons, pour commencer, quelques arguments en faveur de l'enseignement de la géométrie.

Il y a au moins trois raisons² d'enseigner la géométrie : parce qu'elle est utile, parce que c'est un mode de pensée qui nourrit les autres domaines des mathématiques, voire des sciences et, enfin, parce qu'elle permet un premier apprentissage du raisonnement. Nous évoquons succinctement ces trois points ci-dessous.

1. Parce qu'elle est utile

Il ne faut jamais perdre de vue la question de l'utilité lorsqu'on défend la géométrie ou même les mathématiques. L'exemple du latin est là pour montrer que les meilleurs arguments sur la valeur formatrice d'une discipline ne pèsent pas bien lourd quand il s'agit de la supprimer. Il est donc absolument nécessaire de rappeler, encore et toujours, que les mathématiques sont partout présentes, y compris dans les endroits les plus improbables.

Un exemple historique : le tunnel de Samos

Cet exemple très ancien, met en évidence l'une des utilités de la géométrie : atteindre l'inaccessible. Bien entendu, il peut se transposer dans de très nombreuses situations, historiques ou actuelles, élémentaires ou non.

Samos est une île grecque de la mer Égée, proche de la Turquie, dont les habitants ont construit, au VI^e siècle avant notre ère, un tunnel d'un kilomètre de long à travers le mont Castro. Ce tunnel permettait d'assurer l'approvisionnement en eau de la ville (fortifiée) de Samos. Il a été construit par l'architecte Eupalinos de Megara, en partant des deux extrémités et en faisant la jonction au milieu, avec une erreur négligeable.

Il n'y a pas de textes expliquant comment ils ont fait, mais il est clair qu'une telle performance nécessite des connaissances de géométrie³. Une hypothèse (contestée) sur la méthode a été fournie

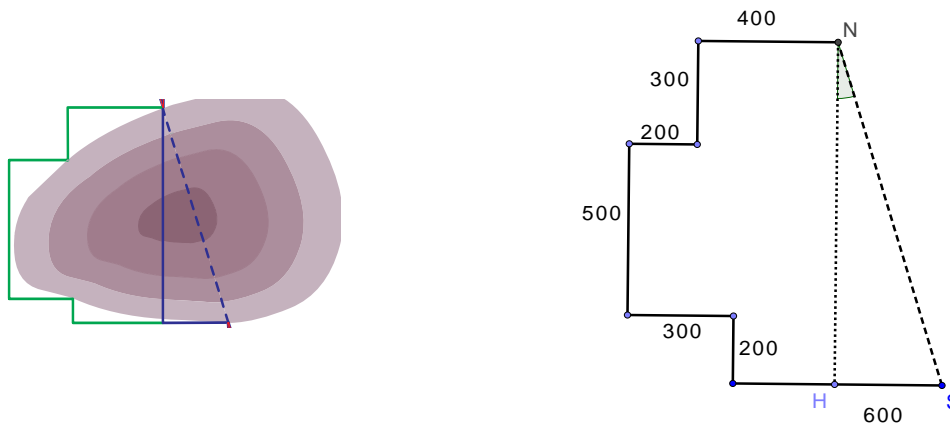
¹ Pour le vocabulaire, voir le paragraphe II de ce chapitre.

² Le lecteur trouvera d'autres arguments et d'autres exemples dans (Kahane, 2002) et (Perrin, 2014b).

³ Rappelons que cela se passe plusieurs siècles avant Euclide.

par Héron d'Alexandrie (premier siècle après J.-C.)⁴. Elle repose sur l'usage des triangles semblables, qui sont un outil de modélisation auquel on peut donner une place importante dans le cadre des programmes actuels du collège.

L'hypothèse de Héron d'Alexandrie est que les habitants de Samos ont mesuré les longueurs dans deux directions perpendiculaires, en restant à une même altitude et en joignant ainsi par une ligne brisée les entrées nord et sud du tunnel. La figure de droite montre un exemple (avec des distances imaginaires, disons en mètres).



Les mesures permettent de calculer les longueurs SH et HN : $SH = 600 + 300 - 200 - 400 = 300$, $HN = 200 + 500 + 300 = 1000$. Comment peut-on savoir dans quelle direction creuser ?

La réponse attendue est de construire en S et N des triangles semblables à SHN et même homothétiques, mais plus petits, de façon à obtenir l'angle qui donne la direction du tunnel. La question a été proposée de très nombreuses fois à des collégiens, en leur donnant la figure tronquée et la version GeoGebra. La réponse la plus fréquente (mais non pertinente !) est de calculer SN par Pythagore, c'est un résultat que les collégiens connaissent ! Ensuite, lorsque l'idée de l'angle se fait jour, l'idée des rapports trigonométriques (la tangente) arrive assez vite pour des élèves de troisième. Lorsqu'on leur explique qu'il s'agit d'un anachronisme, l'idée de construire un modèle réduit finit par sortir mais le mot triangle semblable a beaucoup de mal à être prononcé.

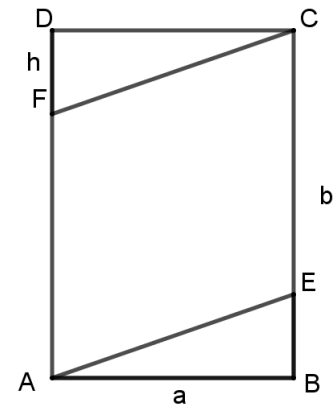
Et aujourd'hui ? Petit inventaire à la Prévert...

Heureusement, l'utilité de la géométrie n'est pas seulement une histoire ancienne, sinon ses détracteurs auraient beau jeu de la liquider. De fait elle est utile actuellement dans de très nombreux domaines : l'architecture, l'urbanisme, la topographie, les mesures agraires, l'horticulture, l'imagerie, la CAO, l'infographie, le dessin industriel, le design, la robotique, l'astronomie, la mécanique, la physique, la balistique, la charpente, la menuiserie, la carrosserie (courbes de Bézier), la typographie (idem), la biologie (ADN et double hélice), la tomographie, la statistique, la recherche opérationnelle, l'optique, la cristallographie, la navigation, la cartographie, le bricolage, etc. (Perrin, 2014b).

Nous nous contenterons d'un petit exemple pratique. Un vitrier doit remplacer une vitre en forme de parallélogramme, par exemple à la mairie de Metzeral (Haut Rhin) (photo ci-dessous). Ce qu'il fait d'habitude pour une vitre rectangulaire, à savoir mesurer longueur et largeur sur les bords, ne suffit plus. En effet, trois paramètres sont nécessaires pour déterminer un parallélogramme. S'il veut découper sa vitre dans un rectangle, il lui faut la hauteur totale ($BC = b$ sur la figure), la largeur (hauteur du parallélogramme, $AB = a$) et le décalage par rapport à l'horizontale ($DF = h$). S'il mesure les deux

⁴ Voir l'article de Tom Apostol, *The tunnel of Samos* : <http://calteches.library.caltech.edu/4106/1/Samos.pdf>

côtés de la fenêtre, il lui faudra aussi une des diagonales pour reconstituer le parallélogramme comme assemblage de deux triangles.



2. Penser géométriquement

Au-delà de l'utilité directe de la géométrie, il est un second point, peut-être plus important encore, comme moyen de découverte, en mathématiques et ailleurs, qui est le fait de penser géométriquement.

Face à une situation qui n'est pas *a priori* géométrique, penser géométriquement signifie d'abord être capable de faire un dessin [...]

Au-delà de cet aspect pratique, penser géométriquement c'est aussi être capable de s'appuyer sur l'intuition géométrique qu'on a acquise dans le plan et l'espace pour l'appliquer à des situations plus complexes. (Kahane, 2002)

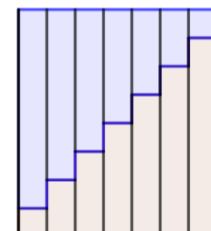
En résumé, penser géométriquement, c'est avoir une vision globale d'une question mathématique, la perception plus locale intervenant ensuite, notamment avec les calculs.

Un premier exemple

Pour calculer la somme S des n premiers entiers, plusieurs méthodes relèvent d'une pensée géométrique.

- on peut repérer une symétrie pour simplifier les calculs en associant 1 et n , 2 et $n-1$ etc. qui donnent toujours la somme $n+1$. Deux cas se présentent suivant la parité de n . On peut surmonter cette difficulté en disposant l'une sous l'autre les suites 1, 2... n et $n, n-1... 1$, ce qui donne $2S = n(n+1)$.

- une idée est de penser aux diagrammes en bâton et d'emboîter deux escaliers tête bêche.



Au-delà du collège

Nous proposons ci-dessous un exemple en analyse (du niveau d'un élève de terminale). L'objectif est d'expliquer en quoi l'apprentissage de la géométrie du collège est utile pour la suite des études. Ce

point a souvent été mis en avant, par exemple voici ce que dit Gaspard Monge à la fin du XVIII^e siècle, dans ses leçons à l'École Normale de l'an III :

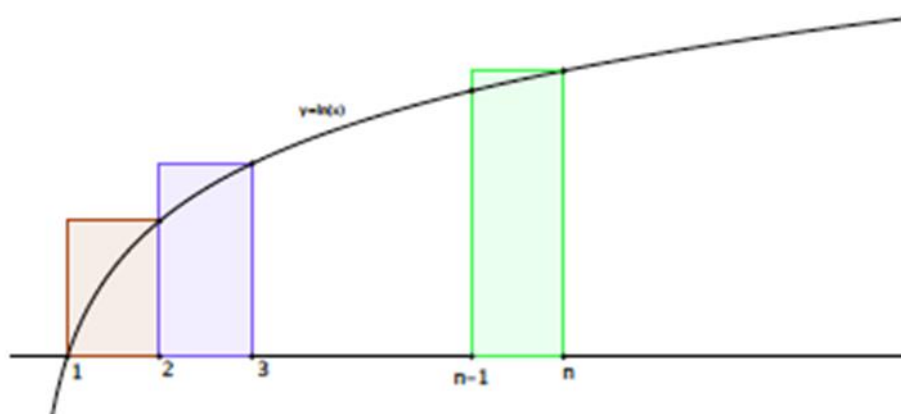
Il faut donc que l'élève s'accoutume de bonne heure à sentir la correspondance qu'ont entre elles les opérations de l'analyse et celles de la géométrie ; il faut qu'il se mette en état, d'une part, de pouvoir décrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture.

Plus près de nous, voici un extrait des motivations des récents programmes de classes préparatoires :

La disparition de chapitres de géométrie un tantinet poussiéreux⁵ est souhaitable, mais l'importance de la représentation géométrique en mathématiques garde tout son intérêt et toute sa force. L'intuition géométrique doit rester un guide essentiel, en Algèbre comme en Analyse.

Exemple de la formule de Stirling

Il s'agit de déterminer l'ordre de grandeur de la suite $n!$. La formule de Stirling en donne un équivalent : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$. On peut obtenir, de manière presque immédiate, un ersatz de cette formule, suffisant dans la plupart des applications, que l'on peut expliquer à des élèves de lycée⁶. L'idée est de transformer le produit $n!$ en somme en prenant son logarithme. On étudie donc $\ln(n!) = \ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(n)$ et on contemple la figure suivante, qui illustre la méthode des rectangles :



Elle nous donne le résultat sous la forme de l'encadrement suivant :

$$\ln(1) + \ln(2) + \dots + \ln(n-1) \leq \int_1^n \ln(x) dx \leq \ln(2) + \dots + \ln(n-1) + \ln(n).$$

Mais on sait calculer l'intégrale $\int_1^n \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^n = n \ln(n) - n + 1$. On en déduit $n \ln(n) - n + 1 \leq \ln n! \leq (n+1) \ln(n) - n + 1$ et, en passant à l'exponentielle, $e n^n e^{-n} \leq n! \leq e n^n e^{-n} n$, ce qui n'est pas si mal⁷.

Commentaire. On voit ici de manière éclatante la force de la *vision* géométrique : la seule vue de la figure montre qu'on a une estimation de $\ln(n!)$ par l'aire sous la courbe et il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale pour avoir explicitement cette valeur. L'encadrement de l'aire sous la courbe par les aires

⁵ Le paradoxe c'est que ces mêmes personnes ont balayé tout ce qui restait de géométrie dans ces programmes. On peut donc leur poser la question : *Mais comment penser géométriquement quand on n'a pas fait de géométrie ?*

⁶ Pour des détails, voir : <http://www.math.upsud.fr/~perrin/CAPES/analyse/Suites/Stirling.pdf>.

⁷ On obtient un encadrement de la forme $k\sqrt{n} n^n e^{-n} \leq n! \leq K\sqrt{n} n^n e^{-n} n$ en remplaçant la méthode des rectangles par celles des trapèzes et du point médian.

des rectangles s'appuie sur une familiarité avec la notion d'aire (additivité et inclusion) qu'il est essentiel d'acquérir dès le collège.

3. L'apprentissage du raisonnement

Le dernier argument, et non des moindres, en faveur de l'apprentissage de la géométrie est qu'il concourt à développer l'aptitude au raisonnement. Rappelons l'objectif affiché dans (Kahane, 2002) : poser des problèmes, observer, réfléchir, raisonner, essayer, se tromper, surmonter ses erreurs. Cet objectif reste tout à fait d'actualité et vaut pour la formation de tous les citoyens, notamment les scientifiques, mais pas seulement. Bien entendu, les mathématiques ne sont pas le seul lieu de l'apprentissage du raisonnement, mais elles en sont une composante essentielle. Citons Jean-Pierre Kahane⁸ :

Les mathématiques permettent de comprendre la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, elles font le lien entre le général et le particulier, elles conduisent à organiser la pensée, à catégoriser les problèmes.

Elles forcent à expliciter les évidences, à décomposer les difficultés, à enchaîner les résultats, à dénombrer tous les cas possibles : elles sont la logique cartésienne en action.

Bien entendu encore, en mathématiques, d'autres domaines que la géométrie contribuent à réaliser cet objectif. Cependant, c'est sans doute en géométrie (et en arithmétique) qu'on rencontre les problèmes les plus intéressants parmi ceux que l'on peut aborder de manière précoce. C'est aussi l'opinion d'Alain Connes, médaille Fields 1982 :

J'ai toujours pensé que l'on progressait davantage en s'échouant sur un problème de géométrie qu'en absorbant toujours plus de connaissances mal digérées.

Pour que la géométrie remplisse cette fonction d'apprentissage du raisonnement, encore faut-il qu'elle soit enseignée en laissant aux élèves la possibilité de raisonner. Ce n'est pas si simple car le raisonnement géométrique ne se réduit pas à l'apprentissage formel de la démonstration. Le programme de cycle 4 de 2016 ne dit pas autre chose :

La formation au **raisonnement** et l'initiation à la **démonstration** sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées. Le fait de distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure, de prouver un résultat général par une démonstration, comme celui de valider ou de réfuter une conjecture, relèvent de la formation de la personne et du citoyen.

À trop vouloir obtenir des rédactions conformes aux canons des mathématiciens, on en vient à ne proposer que des exercices trop simples, tout découpés en rondelles, où les élèves n'ont à accomplir que des tâches simples et isolées. Une solution est peut-être de poser (de temps en temps) des problèmes ouverts (modestes évidemment), mais où il s'agit de trouver son chemin (pas trop long, mais pas en une seule étape). Nous donnerons quelques exemples dans la suite, voir aussi (Duperret, Perrin, Richeton, 2001) ou (Perrin, 2003).

II. Les mots pour le dire

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous tentons ici de préciser à la fois les mots et les définitions autour des cas d'égalité des triangles et d'autres notions géométriques auxquelles nous nous intéressons plus particulièrement et nous explicitons les choix que nous faisons à ce sujet.

⁸ Mathématicien français qui s'est beaucoup intéressé à l'enseignement des mathématiques et a présidé la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (voir Kahane, 2002).

1. Les mots

Le problème (cas des triangles égaux)

Une première difficulté, s'agissant des cas d'isométrie, est la profusion de mots pour désigner la propriété correspondante des triangles. En voici au moins quatre : *égaux*, *isométriques*, *superposables*, *congruents*. Bien entendu, le choix d'un mot n'est pas essentiel⁹, pourvu qu'il soit explicité et motivé. Encore faut-il que toutes les parties prenantes (inspection, professeurs, manuels, etc.) s'entendent sur ce choix afin d'éviter la cacophonie. Examinons donc d'abord les défauts et les avantages de chacun des termes en usage :

– Le mot « *congruents* », très utilisé par les Anglo-saxons et les Italiens, a l'avantage d'être sans ambiguïté, mais présente deux défauts rédhibitoires à notre avis : il n'a pas un sens suffisamment transparent et pratiquement personne ne l'emploie en France.

– Le mot « *égaux* » est le mot traditionnel, utilisé par Euclide et tous ses successeurs, et en vigueur dans l'enseignement jusque dans les années 1960. C'est un argument de poids en sa faveur. Il n'empêche qu'il est sans doute trop imprécis¹⁰. Depuis la réforme des mathématiques modernes le mot « égal » a pris le sens plus restrictif d'identique et cet usage est celui admis par tous les mathématiciens¹¹.

– Le mot « *isométriques* » a un sens clair lorsqu'on a défini les isométries : deux triangles sont isométriques s'ils sont échangés par une isométrie. Cette vision est conforme à l'arrière-plan théorique (le programme d'Erlangen) que nous adoptons dans cette brochure et qui privilégie groupes de transformations et transitivité. Cependant, même si les isométries sont en filigrane dans notre approche, ce n'est pas *via* les isométries que nous avons choisi d'entrer dans la géométrie, de sorte que la définition ne pourra pas être donnée en toute rigueur de cette manière, au moins au début. Par ailleurs, le mot isométrique a le défaut de ne contenir que la référence aux longueurs (« mètre ») et pas aux angles.

– Le mot « *superposables* » a l'avantage d'être intuitif. Il était d'ailleurs utilisé dans l'enseignement jusque dans les années 1960, notamment pour justifier les cas d'égalité. En réalité, il a le même sens qu'isométriques, mais avec une référence moins précise aux transformations.

Notre conclusion

Les trois mots « égaux », « isométriques » et « superposables » ont chacun leur intérêt et il n'est pas inutile que les élèves connaissent les trois. Dans un premier temps, le mot « superposables » est sans doute le plus facile à comprendre même s'il reste un peu vague. Au fil des ans, on pourra lui préférer le mot « isométriques », lorsque les isométries auront progressivement été introduites. Quant au mot « égaux », s'il semble difficile de s'en affranchir, il convient de l'utiliser avec prudence, en le présentant comme un abus de langage bien utile¹². En particulier, on peut se permettre de dire « cas d'égalité » au lieu de « cas d'isométrie ». Nous commettrons souvent ces abus de langage dans ce qui suit.

⁹ Il y a beaucoup de cas où plusieurs mots désignent la même notion mathématique, par exemple *application*, *fonction*, *transformation* ou encore *partie*, *sous-ensemble*, etc.

¹⁰ Dans l'usage d'Euclide, cette imprécision peut être vraiment abusive car il utilise le mot « égaux » pour des triangles à la fois au sens « isométriques » et au sens « de même aire », le contexte seul permettant de distinguer.

¹¹ Les triangles « égaux » le sont dans un ensemble quotient (les triangles modulo l'action des isométries), mais il n'est guère envisageable de réintroduire les relations d'équivalence au collège !

¹² Gardons-nous de tomber dans un excès de pédantisme ! Ce n'est pas un crime de dire « côtés égaux » au lieu de « côtés de même longueur ». Pour les angles, à condition de les voir comme des grandeurs, le mot « angles égaux » est même parfaitement correct, voir ci-dessous.

Le cas des triangles semblables

Dans ce cas, il nous semble préférable de garder le mot traditionnel, plutôt que d'en inventer un autre (comme les *triangles de même forme*¹³ des programmes 2000). Le défaut est évidemment que, dans le langage courant, le mot « semblables » signifie « pareils » et qu'on peut l'entendre comme « égaux ». Il faut donc expliciter sa signification en géométrie, qui n'est pas exactement le sens usuel¹⁴.

2. Les définitions

Les triangles isométriques

La référence au *programme d'Erlangen* que nous avons indiquée nous conduirait en bonne logique à donner une définition des triangles isométriques comme échangés par une isométrie. Le problème est que ce n'est pas possible puisque nous avons choisi de ne pas entrer dans la géométrie par le truchement des transformations. Il faut donc faire un compromis et il y en a deux possibles.

- On peut définir les triangles superposables comme deux triangles obtenus l'un à partir de l'autre par glissement ou retournement. Ces mots n'ayant pas été définis précisément, cette définition est imprécise, mais elle peut être formalisée¹⁵. Dans cette hypothèse, les cas d'égalité donnent des critères qui permettent d'éviter de faire explicitement l'opération et c'est leur principal intérêt.

- On peut aussi définir des triangles égaux comme des triangles qui ont leurs côtés et leurs angles deux à deux égaux. Les cas d'égalité apparaissent alors comme des théorèmes permettant de conclure que les triangles sont égaux avec seulement trois des égalités sur les six (et d'en déduire les autres).

Mais ce qu'il faut selon nous absolument éviter, c'est de définir (comme le font certains manuels) des triangles égaux comme des triangles ayant leurs côtés deux à deux égaux. C'est en effet ne pas comprendre que les cas d'égalité sont des *théorèmes*, en particulier, le cas CCC qui a comme hypothèse l'égalité des côtés et qui implique que les triangles sont égaux, donc qu'ils ont aussi les mêmes angles. Ce choix, contrairement à ce qu'on pourrait penser, ne permet pas de diminuer le nombre de théorèmes à mémoriser puisqu'on aurait alors besoin d'un autre théorème : Si deux triangles sont isométriques, leurs angles homologues sont deux à deux égaux.

On notera que les manuels qui utilisent cette définition sont aussi souvent ceux qui ne proposent aucun exercice utilisant les cas d'isométrie, leurs auteurs n'ayant sans doute pas compris à quoi ils pouvaient servir.

Les triangles semblables

La situation est plus délicate pour les triangles semblables. Là encore, il y a deux voies :

- On définit les triangles semblables comme obtenus l'un à partir de l'autre par une similitude, c'est-à-dire la composée d'une isométrie et d'une homothétie. La même objection que ci-dessus vaut encore (au départ on ne dispose ni de la notion d'isométrie ni de celle d'homothétie). On peut la surmonter de la même manière en parlant intuitivement de glissement et de retournement, mais il reste le cas de l'homothétie, plus difficile. On peut parler d'agrandissement et réduction comme on le fait dans les programmes, mais cette formulation est porteuse d'ambiguïté. En effet, il ne suffit pas,

¹³ Mais on peut tout à fait utiliser cette locution dans les explications.

¹⁴ Que les mots du langage courant prennent parfois un autre sens en mathématiques est un fait incontournable. On pensera aux mots *anneau*, *appartenance*, *produit*, *différence* ou *facteur* entre autres.

¹⁵ Ce qui est essentiel, c'est l'existence d'un groupe de transformations qui conserve forme et taille des objets et il suffit de demander qu'il soit simplement transitif sur les drapeaux, voir l'annexe 1 ou, un jour peut-être, (Perrin, 2050).

pour faire un tel agrandissement-réduction d'un polygone, de diviser ou de multiplier les longueurs des côtés par un même facteur¹⁶.

- On définit les triangles semblables comme ayant leurs angles deux à deux égaux et les côtés qui les bordent proportionnels. On a alors trois théorèmes correspondant aux trois cas de similitude (angles égaux, un côté égal entre des côtés proportionnels, trois côtés proportionnels). Définir les triangles semblables par l'égalité de deux angles homologues ne fait pas l'économie d'un théorème car il faut alors montrer que des triangles semblables ont leurs côtés proportionnels¹⁷.

3. Secteurs, angles et mesures

Lorsqu'on travaille avec des objets géométriques et qu'on considère une grandeur attachée à ces objets, il y a trois notions¹⁸ qui entrent en jeu :

- l'objet lui-même, par exemple un segment, un polygone plan ou un solide de l'espace,
- la grandeur à laquelle on s'intéresse, respectivement ici la longueur, l'aire ou le volume,
- et enfin la mesure de cette grandeur avec une unité, qui est un nombre réel positif.

Dans le cas des angles, notre proposition est de réserver le mot « angle » à la grandeur, l'objet géométrique étant le secteur (angulaire), et enfin la mesure (en degrés, en radians, etc.) un nombre une fois l'unité choisie. Un nombre suivi d'une unité est une écriture d'une grandeur qu'on peut appeler grandeur mesurée ; c'est un angle. Si l'on voit l'angle de cette manière, c'est-à-dire comme une grandeur, l'égalité de deux angles ou leur comparaison ont un sens parfaitement correct, indépendamment des mesures. On peut donc parler d'angles égaux, dire qu'un angle est plus petit qu'un autre, etc. sans commettre le moindre abus de langage.

Le problème, c'est qu'il n'y a pas consensus sur cette position, certains appelant angle l'objet géométrique et occultant la grandeur pour ne parler que de la mesure. D'une certaine manière, c'était aussi, s'agissant des surfaces, le point de vue qui prévalait au temps des mathématiques modernes, la grandeur (l'aire) ayant totalement disparu. On est fort heureusement revenu là-dessus et l'on peut espérer qu'il en sera de même pour les angles.

III. Les outils pour l'enseignement de la géométrie

Nous nous plaçons dans la perspective d'un enseignement de la géométrie et plus généralement des mathématiques qui ne se limite pas à l'apprentissage de résultats, mais vise surtout leur utilisation : il s'agit, avant tout, de **faire** de la géométrie. **Faire** comprend au moins deux phases, éventuellement imbriquées, l'une où il s'agit surtout de voir (et sur ce plan, les logiciels de géométrie ont un rôle majeur à jouer), l'autre où il s'agit de prouver et il convient de préciser de quels outils l'on dispose pour cet objectif. On peut en répertorier au moins quatre :

- L'utilisation des invariants (longueurs, angles, aires).
- Les cas d'égalité et de similitude.
- Les transformations.

¹⁶ Le seul cas où il n'y a pas de difficulté est justement le cas des triangles, mais dès les quadrilatères, la difficulté existe : un carré dont on multiplie les longueurs des côtés par 2 sans préciser qu'on conserve les angles peut devenir un losange.

¹⁷ Il est naturel, lorsqu'on donne la définition des triangles isométriques et qu'on énonce les cas d'égalité (en classe de cinquième selon notre proposition de progression), de signaler que trois angles égaux deux à deux ne suffisent pas à assurer l'isométrie des triangles. On peut alors dire que deux triangles qui ont seulement leurs angles égaux sont dits semblables et que cette notion sera étudiée en classe de 3^{ème}.

¹⁸ Sur ce sujet, on pourra consulter (Perrin, 2011, Annexe du chapitre 4) et aussi Perrin-Glorian (1999), pour le cas des aires.

- Le calcul (coordonnées, produit scalaire, vecteurs, matrices, produit vectoriel...).

Notre but est, dans ce paragraphe, de discuter des différentes approches possibles de la géométrie sur un plan purement mathématique. Attention, il ne s'agit pas ici de disqualifier certains de ces outils, tous sont utiles, et ils sont complémentaires. Le point est plutôt de préciser lesquels sont les mieux adaptés au niveau du collège.

Réglons tout de suite le cas du calcul. Il est clair que le calcul est un outil essentiel de la géométrie. L'exemple des problèmes de construction à la règle et au compas est révélateur en ce sens : sans l'usage des coordonnées, on ne comprend rien aux problèmes d'impossibilité des constructions (par exemple la duplication du cube) que les Grecs n'avaient pas su traiter. De plus, le calcul est aussi l'outil essentiel pour aborder les problèmes plus avancés qui concernent les courbes et surfaces de plus grands degrés. Tout cela est clair, mais il nous semble que l'apprentissage de cet aspect de la géométrie ne doit pas être le premier que rencontrent les élèves et qu'il vaut mieux le garder pour le lycée. Il y a à cela une raison essentielle : nous pensons que la géométrie des figures est plus propice à l'apprentissage de la vision géométrique et du raisonnement. Comme le dit Jean-Jacques Rousseau :

Je n'ai jamais été assez loin pour bien sentir l'application de l'algèbre à la géométrie. Je n'aimais pas cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait, et il me semblait que résoudre un problème de géométrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle. La première fois que je trouvai par le calcul que le carré d'un binôme était composé du carré de chacune de ses parties, et du double produit de l'une par l'autre, malgré la justesse de ma multiplication, je n'en voulus rien croire jusqu'à ce que j'eusse fait la figure. Ce n'était pas que je n'eusse un grand goût pour l'algèbre en n'y considérant que la quantité abstraite ; mais appliquée à l'étendue, je voulais voir l'opération sur les lignes ; autrement je n'y comprenais plus rien. (Les confessions, Partie I, livre 6).

Dans ce qui suit nous allons discuter des mérites respectifs d'une approche par les cas d'égalité et par les transformations (l'usage des invariants étant largement lié à ces deux points).

1. Un cadre théorique : programme d'Erlangen et transitivité

Pour des précisions sur ce sujet, voir par exemple (Kahane, 2002) ou (Perrin, 2014a).

Le programme d'Erlangen

Le texte fondateur de la géométrie "moderne" est sans conteste le programme d'Erlangen de Felix Klein¹⁹, voir (Klein, 1872) : une géométrie consiste, pour l'essentiel, en la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X , autrement dit d'un groupe G opérant sur X . Par exemple, ce groupe est celui des isométries (affines) pour la géométrie euclidienne, ou des transformations affines pour la géométrie du même nom, ou encore des homographies pour la géométrie projective.

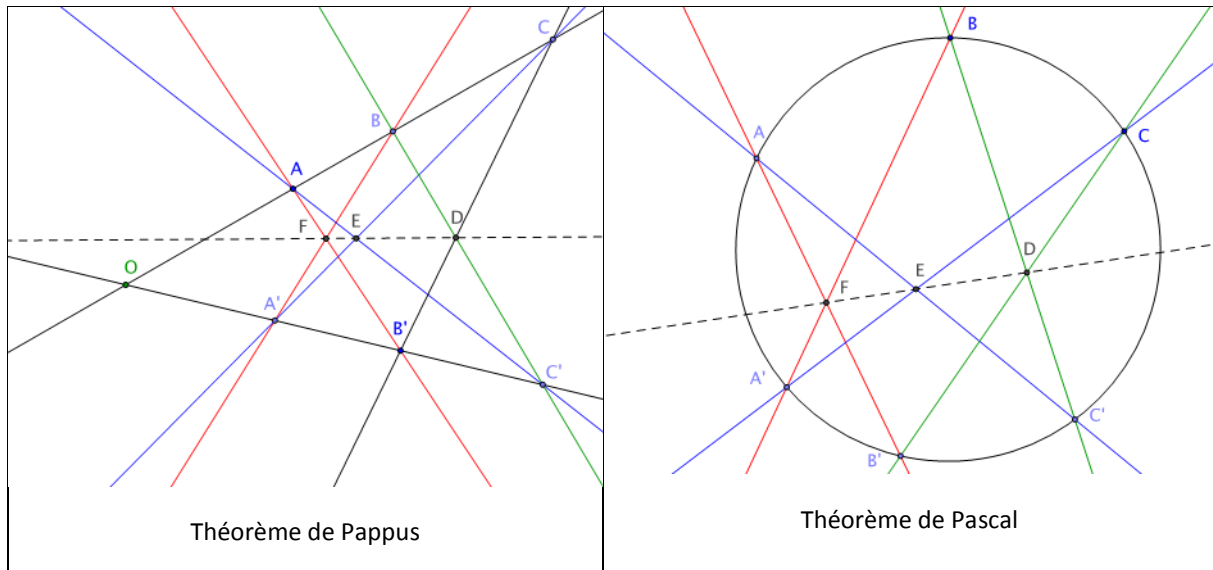
Ce souci d'unification, qui fait suite à l'explosion des géométries du XIX^e siècle (géométries projective, anallagmatique, non euclidiennes, etc.), permet d'abord de *classifier* les propriétés géométriques selon le groupe qui les laisse invariantes, ainsi que le dit Klein : « *étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe* » (Klein, 1872 p.7).

Par exemple, pour citer trois résultats célèbres, le théorème de Pappus²⁰, qui n'emploie que les notions de concours et d'alignement, est un théorème projectif, tandis que Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un

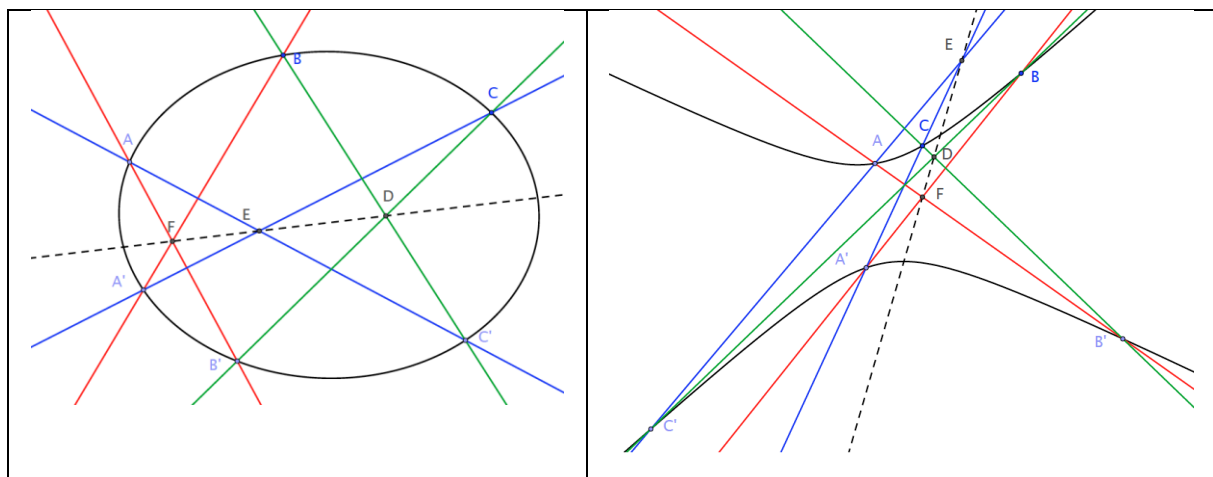
¹⁹ Il s'agit de sa thèse, soutenue en 1872 dans cette ville.

²⁰ Voir Figure ci-dessous. Les points A, B, C et A', B', C' sont alignés, les droites (BC') et (CB') se coupent en D , (CA') et (AC') en E , (AB') et (BA') en F . Alors D, E, F sont alignés. Pour le théorème de Pascal, A, B, C, A', B', C' sont sur un cercle mais la suite est identique.

théorème euclidien. On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une *niche écologique privilégiée*, qui correspond au cadre dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité et, souvent, où il se démontre avec le plus de facilité.



C'est particulièrement clair sur l'exemple du théorème de Pascal (voir figures) qui peut s'énoncer avec un cercle et se démontrer en utilisant le théorème de l'angle inscrit (ce serait donc un théorème euclidien ?). Pourtant, ce théorème n'est pas énoncé là dans sa plus grande généralité puisqu'il vaut aussi pour une ellipse (ce serait donc un théorème affine ?). Mais il vaut aussi pour une parabole ou une hyperbole (finalement c'est un théorème projectif !). C'est d'ailleurs dans ce cadre qu'il est le plus facile à prouver.



On consultera au besoin : <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Perrin-Pascal.pdf>

Erlangen et transitivité

Si le programme d'Erlangen met évidemment en avant les transformations, ce serait une erreur²¹ de penser que les cas d'égalité n'ont plus droit de cité dans ce cadre. En effet, ils vont apparaître comme critères de transitivité. Ce point mérite une explication. Les géométries usuelles vérifient toujours une propriété *d'homogénéité* : les objets de la géométrie (points, droites, etc.) doivent être identiques, quel que soit l'endroit de l'espace où ils se trouvent, ce qui signifie qu'il existe une transformation du groupe qui peut les transporter l'un sur l'autre. En termes mathématiques, on demande que le groupe

²¹ Qu'ont commise les promoteurs de la réforme des mathématiques modernes.

soit *transitif* sur ces objets. D'ailleurs, cette propriété est implicitement utilisée par Euclide dès le début des *Éléments* lorsqu'il démontre le cas d'isométrie CAC (livre I, proposition 4). Quand il dit « *En effet, si l'on appliquait le triangle ABC sur le triangle DEF de manière à faire coïncider d'abord les points A et D, puis les côtés AB et DE, le point B coïnciderait avec E, car AB = DE [...]* » Il y a implicitement dans le mot *appliquait* une hypothèse de transitivité sur ce qu'on appelle maintenant les drapeaux (un point et une demi-droite issue de ce point).

Erlangen et transitivité : une application en géométrie affine

Voici un exemple qui montre en quoi le programme d'Erlangen peut être utile aux professeurs et notamment deux des idées évoquées ci-dessus : la classification des géométries et la transitivité. Le principe est le suivant. Supposons qu'on ait un problème à traiter (voir les exemples ci-dessous).

1) On repère que le problème est affine. Cela signifie que ce problème met en jeu des propriétés d'incidence (alignement, concours) ou de parallélisme, ou des rapports de mesures algébriques sur une même droite ou des droites parallèles (milieux, barycentres, tout ce qui s'écrit en termes de vecteurs) ou d'aires²², mais pas de longueur, d'angle et d'orthogonalité qui sont des notions euclidiennes.

2) On effectue une transformation affine f de façon à transformer le problème en un problème plus simple. Cela revient souvent à traiter un cas particulier du problème présentant une propriété euclidienne supplémentaire (un triangle quelconque devient équilatéral, un parallélogramme devient un carré, etc.). C'est dans cette phase qu'intervient la *transitivité*.

3) On résout le problème simplifié (éventuellement avec des outils euclidiens) et on revient au cas initial par la transformation inverse f^{-1} .

Voici un exemple, élémentaire mais révélateur, d'application de cette technique. On veut montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes. Comme la notion de médiane est affine, on aura gagné si l'on montre qu'on peut transformer le triangle en un triangle équilatéral par une application affine. En effet, les médianes seront alors aussi les médiatrices et on montre facilement que celles-ci sont concourantes. Le point crucial est donc :

Lemme : Le groupe affine est transitif sur les triangles.

Démonstration Il s'agit d'envoyer trois points A, B, C (non alignés) sur A', B', C'. On commence par envoyer A sur A' par une translation t . Les points B et C sont transformés par t en B'' et C''. Il ne reste plus qu'à effectuer la transformation linéaire (avec A' comme origine) qui envoie la base $\overrightarrow{A'B''}, \overrightarrow{A'C''}$ sur $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ et on a gagné.

Le lecteur vérifiera l'intérêt de la méthode en résolvant le problème suivant par réduction au cas équilatéral²³ (voir au besoin (Perrin, 2014a p. 16) :

Soit ABC un triangle, I, J, K des points situés respectivement sur les côtés [BC], [CA], [AB] au tiers le plus proche de B, C, A. Les droites (AI) et (BJ), (BJ) et (CK), (CK) et (AI) se coupent respectivement en P, Q, R. Déterminer l'aire du triangle PQR en fonction de celle de ABC.

²² Les aires (ou plutôt leurs rapports) sont un invariant affine, et pas seulement euclidien, comme on le voit en regardant la symétrie oblique par rapport à la médiane d'un triangle (voir chapitres 7, 10 et Annexe 1, le lemme de la médiane).

²³ L'avantage du cas équilatéral, c'est qu'il devient clair que certains triangles comme AQR, BRP, CPQ ou BCP, CAQ, ABR sont isométriques, donc ont même aire. Cet exercice est traité sans cette réduction dans le chapitre 10 (exercice 4.16).

Ce type de technique est universel en géométrie, soit pour ramener un problème à un cas particulier : une conique à un cercle, voir l'exemple du théorème de Pascal, deux cercles disjoints à deux cercles concentriques, ou encore lorsqu'il s'agit de trouver une position propice aux calculs ou aux démonstrations. Pour des détails sur ce point, voir (Perrin, 2014a).

Bien entendu, il n'est pas question d'enseigner le programme d'Erlangen, sous quelque forme que ce soit, au collège et au lycée. Mais si les professeurs en ont compris le principe, cela peut leur être utile en leur donnant un temps d'avance sur leurs élèves comme le montre l'exemple suivant. Il s'agit d'un exercice de collège ou de seconde :

Soit ABCD un parallélogramme et M un point intérieur. Comment doit-on choisir M pour que les aires des triangles AMB et BMC soient égales ?

Le professeur, avec les idées d'Erlangen, notera d'abord que le problème est affine et qu'on peut donc le transformer sans risque en supposant que ABCD est un carré. Il verra alors aussitôt en comparant les hauteurs des triangles que M doit être sur la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} . Comme les notions de hauteur et de bissectrice ne sont pas affines, il devra traduire cette condition dans le cas général en disant que M doit être sur la diagonale [BD]. Le professeur aura donc ici un temps d'avance sur les élèves puisqu'il aura immédiatement trouvé le résultat. Il devra ensuite imaginer une preuve accessible à des élèves. Ce n'est pas difficile pourvu qu'il dispose des outils adaptés (voir théorèmes sur les aires, chapitres 7 et 10).

2. Cas d'égalité des triangles et transitivité

Le but de ce paragraphe est de montrer que, même si l'on se place délibérément dans le cadre du programme d'Erlangen, donc en mettant en avant les transformations, les cas d'égalité des triangles gardent un intérêt théorique essentiel. C'est une question de transitivité, dont on a vu ci-dessus l'importance.

Orbites et invariants

Bien entendu, l'action d'un groupe G sur un ensemble X n'est pas toujours transitive, par exemple l'opération du groupe des isométries du plan euclidien sur l'ensemble des couples de points du plan ne l'est pas. Lorsque le groupe n'est pas transitif, l'objectif est de décrire ses orbites, c'est-à-dire de donner un critère commode pour savoir si deux éléments peuvent ou non être transportés l'un sur l'autre. Beaucoup d'invariants géométriques peuvent s'interpréter en ces termes de description d'orbites, en visant un théorème du genre :

Deux éléments de X peuvent être échangés par l'action de G (i.e. sont dans la même orbite) si et seulement si certains de leurs invariants sont les mêmes.

Par exemple, deux segments peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même longueur. Deux couples de demi-droites peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même angle.

Fondements mathématiques de l'usage des cas d'isométrie comme outil

Or, que font les cas d'isométrie des triangles ? Ils décrivent exactement les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des autres éléments que ceux utilisés) *sans être obligé d'exhiber celle-ci*. Parodiant le célèbre sketch de Pierre Dac et Francis Blanche on pourrait avoir ce dialogue :

- Votre sérénité, pouvez-vous envoyer ce triangle ABC sur cet autre triangle A'B'C' ?
- Oui

- Vous pouvez le faire ?
- Oui
- Il peut le faire ! On l'applaudit bien fort.

On voit que les cas d'isométrie (et de similitude), loin d'être inutiles dans une approche par les transformations, en sont un élément théorique important. Mais ce qui est bien plus important pour notre propos, c'est qu'ils jouent un rôle essentiel sur le plan didactique. Nous en verrons au chapitre 4 l'importance pour l'accessibilité des démonstrations aux élèves : ils évitent d'avoir à montrer quelle transformation envoie un triangle sur un autre.

3. Utilisation des invariants

Les invariants

On a vu que les invariants sont intimement liés à la vision de la géométrie de Felix Klein car ce sont les quantités qui ne changent pas sous l'action du groupe. En géométrie plane euclidienne, le groupe est celui des isométries (translations, symétries, rotations et leurs composées), voire celui des similitudes. Quant aux invariants, on en a vite fait le tour, il s'agit des longueurs, des angles et des aires. Attention, l'aire joue un rôle un peu différent des autres car c'est un invariant non seulement sous le groupe des isométries, mais aussi sous le groupe affine. L'importance de ces invariants vient d'un résultat purement mathématique, qui ne se comprend qu'à travers un détour par la géométrie analytique. Si l'on pense en ces termes, le plan devient l'espace \mathbf{R}^2 et les invariants peuvent s'écrire en termes de produits et de carrés scalaires (par exemple $x^2 + y^2$ pour la longueur) ou de déterminants (pour l'aire) et ce sont donc des polynômes en les coordonnées. Le résultat est alors une sorte de méta-théorème qui affirme que tout théorème d'une géométrie donnée correspond à une relation (polynomiale) entre les invariants (polynomiaux) de cette géométrie, voir (Perrin, 2014, Partie II). Au fond, c'est cela qui explique le rôle essentiel des invariants dans la géométrie.

Ce rôle, si l'on regarde les textes historiques ou même les manuels anciens (d'avant 1970), est évident. Cependant, la réforme des mathématiques modernes a minoré la place que tenaient les invariants, allant presque jusqu'à les bannir. Notre opinion est qu'il s'agit là d'une erreur et qu'il est important de remettre à l'honneur ces outils. En vérité, cela vaut surtout pour les angles et les aires, les longueurs ayant gardé une part importante dans l'enseignement de la géométrie. Les arguments en faveur de l'usage des invariants ont été développés dans plusieurs textes, notamment le rapport de la commission Kahane, voir (Kahane, 2002).

L'outil angle et ses accessoires

Lorsqu'on pratique la géométrie euclidienne à la manière d'Euclide, c'est-à-dire en utilisant les cas d'égalité et de similitude des triangles, on est aussitôt confronté à la nécessité d'établir des égalités de longueurs et d'angles. Pour les angles, cela repose sur plusieurs accessoires qui permettent de faire efficacement ce travail. On peut en répertorier quatre types :

- les notions de complémentaire et supplémentaire,
- les propriétés des angles vis à vis des parallèles (alternes-internes, etc.),
- la somme des angles d'un triangle,
- le théorème de l'angle inscrit.

On notera que ces accessoires, à l'exception du premier, sont caractéristiques de la géométrie euclidienne. En géométrie non euclidienne tous ces outils disparaissent : les propriétés des parallèles ne subsistent pas, la somme des angles d'un triangle n'est plus égale à deux droits, il n'y a plus de théorème de l'angle inscrit. Autrement dit, on n'a plus à disposition de quoi utiliser les cas d'isométrie (pour la similitude, c'est encore plus radical puisqu'elle n'existe plus). Cette difficulté d'utilisation des

angles en géométrie non euclidienne ne fait que renforcer en creux leur importance en euclidien où l'on dispose d'outils efficaces pour les utiliser : *l'invariant angle est vraiment l'un des fondements essentiels de la géométrie euclidienne.*

On trouvera des exemples d'utilisation de ces accessoires dans la banque d'exercices du chapitre 10.

Juste un mot à propos des angles orientés. Le programme ne les évoque pas (sauf pour préciser le sens des rotations) et c'est raisonnable, il vaut mieux garder cette approche pour le lycée (si tant est qu'on les y aborde). Signalons tout de même qu'ici aussi, l'existence de tels invariants orientés est caractéristique de la géométrie euclidienne : en géométrie hyperbolique par exemple il n'y a ni angles orientés, ni vecteurs « raisonnables » (au sens où ils vérifient la relation de Chasles).

L'outil aire et les lemmes du collègue

Nous avons vu ci-dessus que l'aire est un invariant de la géométrie affine. Mieux, l'aire est l'unique invariant de cette géométrie. Cela signifie que si un problème est de nature affine (voir ci-dessus) on peut le résoudre en utilisant seulement l'invariant aire. Pour cela on utilise les « lemmes du collègue » au sens de (Perrin, 2011), lemmes du parallélogramme, de la médiane, du trapèze, des proportions et du chevron (voir chapitre 7 et chapitre 10, exercices 4.1 à 4.5, Annexe 1, théorème 9.5), lemmes qui, pour la plupart, remontent à Euclide. On trouvera des exemples d'utilisation dans le chapitre 7 (la droite des milieux, Thalès, le concours des médianes du triangle), et dans la banque d'exercices du chapitre 10 (Ménélaüs, Céva, etc.).

On notera que, là encore, l'aire n'a guère d'intérêt en géométrie non euclidienne (car elle est déterminée par les angles).

Chapitre 2

Des références historiques pour l'enseignement de la géométrie

I. Les Éléments d'Euclide

On ne sait à peu près rien de la biographie d'Euclide. Nos sources principales sur la géométrie grecque sont les ouvrages de Pappus et Proclus. Proclus (412 après J.C., -486 après J.C.) a écrit un *Commentaire au premier livre des Éléments*, précédé d'un prologue traitant entre autres de la géométrie et de son histoire. Pappus est connu pour sa *Collection Mathématique* écrite au IV^e siècle après J.C.

Les témoignages écrits sont donc fort tardifs : on estime qu'Euclide a été actif au début du troisième siècle avant Jésus-Christ et qu'il appartenait à l'École d'Alexandrie. Il a écrit d'autres ouvrages que les *Éléments*, la plupart perdus. Les *Éléments* sont une compilation de travaux antérieurs avec des ajouts personnels. Ce texte a été abondamment édité, commenté et traduit (en arabe, latin, hébreu, syriaque...) ; on possède de nombreux manuscrits des *Éléments* (tous très tardifs : les plus anciens datent du IX^e siècle après J.C.) et le nombre d'éditions imprimées de cet ouvrage en fait le second best-seller (loin) derrière la Bible. Les *Éléments* ont donc eu une grande influence sur le développement des mathématiques, ainsi que sur leur enseignement.

Les *Éléments* suivent une structure axiomatique-déductive et furent considérés comme un modèle de rigueur pendant plus de 2000 ans. Le traité comporte treize livres : les livres I à IV sont consacrés à la géométrie plane, le livre V traite de la théorie des proportions, le livre VI est l'application du livre V à la géométrie plane, les livres VII à IX sont des livres d'arithmétique, le livre X traite de grandeurs commensurables et incommensurables et les livres XI à XIII de géométrie dans l'espace. Nous nous intéresserons ici principalement au livre I.

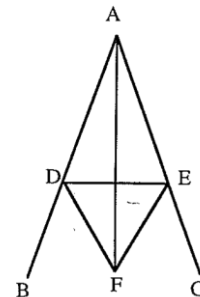
Le livre I débute par des définitions, des demandes ou postulats (par exemple : *Qu'il soit demandé de mener une ligne droite²⁴ de tout point à tout point*), des axiomes ou notions communes (par exemple : *Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles* (idem)). Suivent 48 propositions, démontrées à l'aide des demandes, notions communes et/ou propositions précédentes. Ces propositions ont la forme, soit de théorèmes, c'est-à-dire de résultats énoncés et justifiés, soit de problèmes, c'est-à-dire ici de constructions géométriques effectuées à l'aide de droites et de cercles, constructions décrites, puis justifiées. On peut distinguer trois groupes de propositions : des résultats sur les triangles et des constructions fondamentales de géométrie (propositions 1 à 28), des propositions sur les parallèles (propositions 29 à 33) et des propositions concernant la méthode des aires, aboutissant aux propositions 47 et 48, qui énoncent ce que nous appelons théorème de Pythagore et sa réciproque.

²⁴ Une droite est pour Euclide une droite finie, c'est-à-dire un segment. Les citations réfèrent ici à la traduction de Vitrac.

Un outil fondamental est l'utilisation des cas d'égalité des triangles. Le premier cas énoncé par Euclide est le cas d'un angle égal entre deux côtés égaux (proposition 4), justifié par superposition :

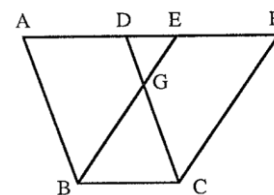
Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent (Vitrac).

Les trois cas d'égalité permettent de justifier des constructions ou de démontrer des résultats. Par exemple (voir figure), pour couper un angle rectiligne \widehat{BAC} en deux parties égales, on construit les points D et E sur [AB] et [AC] tels que $AD = AE$, puis le triangle équilatéral EDF, et on montre que les triangles ADF et AEF sont égaux.



La théorie des parallèles, avec les égalités d'angles alternes²⁵ et correspondants, combinée à ces cas d'égalité de triangles, permet ensuite d'établir des résultats sur les parallélogrammes et les triangles, par exemple le fait que la diagonale d'un parallélogramme le coupe en deux triangles égaux (I, 34), ou l'équivalence en aire de deux parallélogrammes de même base et situés entre les mêmes parallèles (I, 35).

En effet, sur la figure ci-contre, les triangles ABE et DCF sont superposables (cas de la proposition 4). On enlève le triangle commun DGE pour obtenir des quadrilatères équivalents en aire (ABGD et EGCF), puis on ajoute le triangle commun BCG pour obtenir l'équivalence en aire des parallélogrammes ABCD et EBCF.



Ainsi, Euclide démontre des résultats sur les grandeurs géométriques, sans introduire de mesure de ces grandeurs, mais par une comparaison des aires grâce aux cas d'égalité des triangles et à des « puzzles » abstraits, en collant et découpant des figures. La proposition 47, notre théorème de Pythagore, est un théorème sur les grandeurs qui énonce que le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent en aire aux deux carrés construits sur les deux autres côtés, mis ensemble.

Une des raisons du rejet du numérique dans la géométrie est la découverte de grandeurs incommensurables : pour un mathématicien de l'Antiquité Grecque, les nombres sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 2. L'existence de grandeurs incommensurables, comme par exemple le côté et la diagonale d'un carré, montre qu'on ne peut pas décrire les rapports de grandeurs à l'aide des seules proportions de nombres entiers.

On peut trouver des démonstrations d'Euclide avec les cas d'égalité pour la classe ainsi que divers textes historiques en relation avec le contenu de ce chapitre sur le site de l'IREM de Paris dans les travaux du groupe « M:ATH » : <https://irem.u-paris.fr/histoire-et-geometrie>

²⁵ Vitrac dit simplement « alternes », là où nous disons habituellement « alternes internes ».

II. Transmission et postérité : d'autres Éléments de géométrie.

1. Diffusion des Éléments jusqu'au XVI^e siècle

Les *Éléments* d'Euclide ont été abondamment traduits et commentés. À la fin du huitième siècle, les savants arabes connaissaient le texte d'Euclide, traduit du grec en arabe dès le début du neuvième siècle, traduction suivie de plusieurs autres. De nombreux travaux originaux furent effectués en langue arabe sur les *Éléments*, en particulier sur la question des parallèles, le cinquième postulat et la théorie des proportions.

Au début du douzième siècle, on assiste à l'appropriation des sciences musulmanes par l'Occident médiéval, à commencer par la traduction en latin et en hébreu d'ouvrages scientifiques en langue arabe. Les lieux de cette transmission sont l'Espagne et la Sicile. C'est dans ce cadre que les manuscrits arabes des *Éléments* sont traduits en latin, d'abord au douzième siècle par Gérard de Crémone et Adélarde de Bath. Campanus de Novare rédige au treizième siècle une version latine à partir de l'arabe, avec une volonté explicative.

À la fin du quinzième siècle, l'imprimerie permet une meilleure diffusion des écrits : la version de Campanus est imprimée en 1482. On établit de nouvelles traductions latines à partir de textes grecs, comme celle de Commandino (1572).

Le seizième siècle voit apparaître des traductions en langues vernaculaires : italien et allemand, puis français avec Forcadel (1564/66), suivi par Henrion (1615), avec de nombreux commentaires.

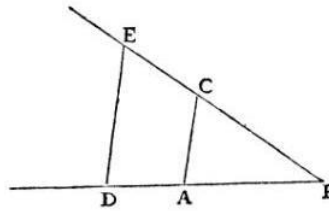
2. XVII^e et XVIII^e siècles

Au XVII^e siècle, puis au XVIII^e, on voit naître des critiques d'Euclide et des traités de géométrie ne suivant plus l'ordre euclidien.

Descartes

Dans son *Discours de la Méthode* (1637), Descartes énonce quatre préceptes, dont le troisième est « de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusqu'à la connaissance des plus composés ». La *Méthode* comporte trois essais en appendice : la *Dioptrique*, les *Météores* et la *Géométrie*, devenue un ouvrage fondamental en mathématiques. Quels sont donc les objets « *les plus simples* » en géométrie ? Le livre premier traite « *Des problèmes qu'on peut construire en n'y employant que des cercles & des droites* » et commence ainsi : « *Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à de tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire* ». Descartes procède ensuite à une arithmétisation de la géométrie, en expliquant comment les opérations de l'arithmétique s'appliquent aux lignes droites, introduisant une ligne unité pour la multiplication, la division et l'extraction d'une racine carrée. Il utilise pour cela des résultats de géométrie "élémentaire", qu'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide, considérés comme connus, sans préciser lesquels, ni donner la démonstration de ses affirmations : pour la multiplication et la division, notre « théorème de Thalès » permet de justifier le résultat ; pour la racine carrée, on peut utiliser notre "théorème de Pythagore" ou des triangles semblables.

La Multi-
plication.

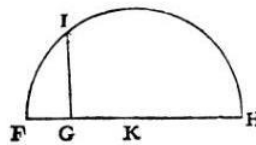


Soit par exemple
A B l'vnité, & qu'il fail-
le multiplier B D par
B C, ie n'ay qu'a ioindre
les poins A & C, puis ti-
rer D E parallele a C A,
& B E est le produit de
cete Multiplication.

La Divi-
sion.

Oubien s'il faut diuifer B E par B D, ayant ioint les
poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C est le
produit de cete diuifion.

l'Extra-
ction de la
racine
quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine
quarrée de G H, ie luy ad-
ioufte en ligne droite F G,
qui est l'vnité, & diuifant F H
en deux parties esgales au
point K, du centre K ie tire

le cercle F I H, puis esleuant du point G vne ligne droite
iufques à I, à angles droits sur F H, c'est G I la racine
cherchée. Je ne dis rien icy de la racine cubique, ny des
autres, à caufe que i'en parleray plus commodement cy
après.

Arnauld

Antoine Arnauld d'Andilly publie de *Nouveaux Éléments de géométrie*²⁶ en 1667, un traité de mathématiques destiné à compléter les ouvrages de grammaire et logique déjà publiés pour les Écoles de Port-Royal. L'auteur reproche à Euclide de préférer un ordre logique à un « *ordre naturel* » des choses, allant du simple au composé : « *on doit commencer par la ligne comme par la plus simple étendue* » et ne s'occuper des figures composées de lignes qu'après avoir traité des problèmes sur les lignes, ce qui amène Arnauld à donner de nouvelles démonstrations sur les lignes, par exemple pour le théorème des lignes proportionnelles (notre « théorème de Thalès »), n'utilisant pas les triangles. L'ouvrage commence par quatre livres sur les grandeurs et les proportions, le livre IV traitant des « *grandeurs commensurables et incommensurables* ». Arnauld reconnaît dans sa préface qu'on peut « *trouver les quatre premiers livres un peu difficiles* » et qu'on peut donc commencer directement par le cinquième livre, en admettant quelques résultats des quatre premiers. Les conceptions d'Arnauld auront beaucoup d'influence sur les traités ultérieurs.

Clairaut

Au XVIII^e siècle (1741), Clairaut écrit des *Éléments de géométrie*. Dans la préface, il explique que les difficultés de l'apprentissage de la géométrie viennent de ce qu' « *on y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes & de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au Lecteur* » et présente un moyen d'aider aux « premiers pas » des commençants :

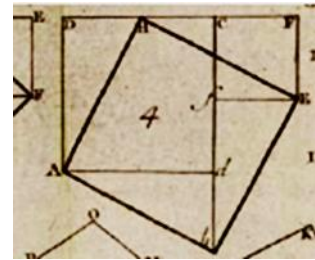
« La mesure des Terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières propositions de Géométrie. [...] je m'attache d'abord à faire découvrir aux Commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des Terrains, & des distances accessibles ou inaccessibles, &c. De là je passe à d'autres recherches qui ont une telle analogie avec les premières, que la curiosité naturelle à tous les hommes, les porte à s'y arrêter ; & justifiant ensuite cette

²⁶ Le mot « géométrie » peut prendre à l'époque le sens plus général de « mathématiques ».

curiosité par quelques applications utiles, je parviens à faire parcourir tout ce que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant. »

Le livre s'appuie ainsi sur des problèmes concrets de mesure pour introduire d'abord la notion de perpendicularité, puis de rectangles et triangles et mesures de ceux-ci. Les problèmes de mesure des aires sont traités dans la seconde partie de l'ouvrage.

Le problème de « Faire un carré avec deux autres pris ensemble », résolu par découpage et recollement (c'est-à-dire par la méthode des aires) amène au théorème de Pythagore (voir figure ci-contre).



Legendre

On assiste avec *les Éléments de géométrie* de Legendre (1794) à un retour à l'ordre et la rigueur euclidiens, avec de nouveau l'utilisation de la méthode des aires pour les démonstrations, en particulier du « théorème de Thalès », mais avec un point de vue différent, Legendre ayant recours à la mesure des grandeurs et au numérique pour ses démonstrations.

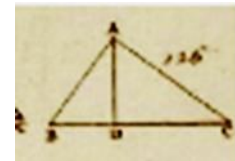
Le livre I débute par des définitions (droite, perpendiculaire, parallèles...). Puis Legendre justifie très vite les cas d'égalité des triangles (par superposition avec, pour le cas de trois côtés égaux, un raisonnement par l'absurde). Ceci lui permet de démontrer²⁷ des résultats de géométrie élémentaire. Il développe ensuite la théorie des parallèles, puis démontre les propriétés des parallélogrammes en utilisant les cas d'égalité. Le livre II est consacré au cercle et à la mesure des angles.

Le livre III s'intéresse aux figures semblables et aux proportions. Il débute par des propositions semblables à celles du livre I d'Euclide, démontrées également par découpage et recollement (équivalence en aires de parallélogrammes de même base et de même hauteur), mais, contrairement à Euclide, il se place très vite dans le cadre de la mesure des grandeurs, en démontrant la formule de calcul de l'aire d'un rectangle, et en en déduisant celles d'un parallélogramme et d'un triangle. Le « théorème de Thalès » s'appuie sur la même figure que celle d'Euclide, mais, là où Euclide ne parlait que de grandeurs, Legendre parle de rapports de mesures de ces grandeurs, comme nous le ferions nous-mêmes avec nos élèves. Il utilise le premier cas de similitude des triangles pour donner une deuxième démonstration du théorème de Pythagore (la première est calquée sur Euclide), dont le principe est déjà présent chez Arnauld.

Le triangle ABC étant rectangle en A et [AD] la hauteur issue de A, les trois triangles ABC, DBA et DAC sont semblables donc

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

et donc $AB^2 = BD \times BC$. De même, $AC^2 = DC \times BC$ et, par addition, on obtient le théorème de Pythagore.



Le traité de Legendre aura une influence certaine sur des traités ultérieurs. En particulier, la preuve du théorème de Pythagore indiquée ci-dessus était celle qui était donnée au collège dans les années 1950-60.

²⁷ Legendre prétend démontrer, sans le recours au postulat des parallèles, que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits. L'exemple de la géométrie hyperbolique montre que son raisonnement est inexact.

Lacroix

Ce rapide tour d'horizon ne peut pas oublier les *Éléments de géométrie* de Lacroix (première édition en 1799, avec de multiples rééditions) qui reprend les idées d'Arnauld sur le vrai ordre de la nature tout en conservant la rigueur euclidienne.

L'ouvrage commence par un « Supplément au traité élémentaire d'Arithmétique, nécessaire pour passer immédiatement de ce Traité aux Éléments de géométrie ». On retrouve chez Lacroix les cas d'égalité des triangles, justifiés comme chez Legendre, comme outil de démonstration. Après des définitions et notions préliminaires (droites, cercle, perpendicularité, angles...), des résolutions de problèmes de constructions et la démonstration de résultats de géométrie élémentaire, Lacroix développe la théorie des parallèles.

Il abandonne la méthode des aires pour démontrer le « théorème de Thalès » : il commence par montrer, en utilisant les cas d'égalité des triangles, que, si deux droites quelconques sont coupées par deux parallèles menées par des points pris à des distances égales sur la première droite, leurs points d'intersection avec la deuxième sont également équidistants.

Ceci lui permet d'obtenir le « théorème de Thalès » sous la forme *Trois parallèles coupent toujours deux droites quelconques en parties proportionnelles*, autrement dit, (Figure 1 ci-contre) :

$$\frac{AD}{DF} = \frac{GK}{KM}$$

La démonstration découle facilement du théorème précédent dans le cas de lignes commensurables et demande un double raisonnement par l'absurde dans le cas incommensurable. Le « théorème de Thalès » sous la forme triangles (Figure 2 ci-contre) n'est alors qu'un cas particulier.

Ce résultat sur deux droites coupées par des sécantes parallèles était encore à l'honneur en collège dans les années quatre-vingt, avec une démonstration semblable à celle de Lacroix, mais limitée à un exemple générique de rapport rationnel.

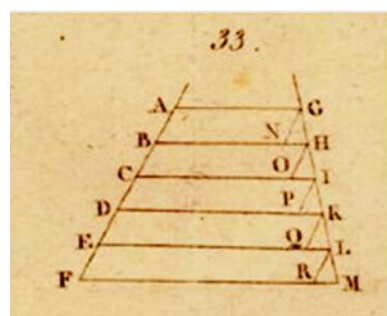


Figure 1

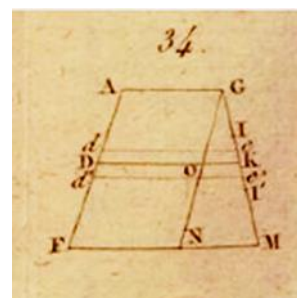


Figure 2

Chapitre 3

Penser la continuité de l'apprentissage au long de la scolarité obligatoire

I. Des objets matériels aux objets géométriques

Comme dans le reste de la brochure, nous nous limitons à la géométrie plane mais, même avec cette limitation, le terme « géométrie » ne peut pas recouvrir les mêmes pratiques au début du primaire, vers 6 ans, et au milieu du collège, vers 13 ans. Les objectifs évoluent en même temps que les objets sur lesquels portent les pratiques géométriques. En maternelle et au début du primaire, l'activité géométrique vise essentiellement à aiguïser la perception des objets de l'espace et des déplacements dans l'espace pour construire des repères et un vocabulaire qui permettent de gérer nos rapports à l'espace dans les déplacements et la reconnaissance des formes. Dès ce moment, on peut reproduire des formes planes en faisant le contour d'un gabarit ; l'activité porte alors non sur les objets eux-mêmes (comme ce serait le cas dans une activité de puzzle par exemple) mais sur des traces graphiques sur le papier, voire sur un écran d'ordinateur. Au cours du primaire, des instruments sont introduits pour outiller la perception et donner des moyens de décrire ou reproduire plus facilement des formes, des positions, des déplacements. Les propriétés identifiées se réfèrent encore le plus souvent aux objets graphiques eux-mêmes, même si on commence à comprendre qu'elles peuvent s'appliquer à n'importe quel objet graphique de même type (une expérience particulière commence à prendre une valeur générique). Au collège, on introduit progressivement des objets idéaux, théoriques, auxquels on suppose certaines propriétés et c'est à partir de ces propriétés et d'hypothèses explicites qu'il faut désormais raisonner pour établir de nouvelles propriétés : c'est l'entrée dans la démonstration.

Prenons l'exemple du rectangle. À la maternelle, il s'agit de reconnaître les rectangles, aussi allongés ou aussi proches du carré soient-ils, parmi d'autres objets plats, par exemple dans les activités de tri. En fin de maternelle ou au cours préparatoire, les enfants peuvent à peu près dessiner des rectangles à main levée ou en faisant le tour d'un gabarit. À ce niveau, les carrés ne sont pas des rectangles puisqu'ils ont une propriété supplémentaire. Quelques années plus tard, les élèves découvrent de nouvelles propriétés, par exemple concernant les diagonales ou l'inscription dans un cercle et ils savent utiliser une équerre, une règle et des reports de longueurs pour construire de différentes manières des rectangles sur le papier, sur un écran d'ordinateur ou sur le terrain avec des instruments adaptés. Ils utilisent les propriétés utiles pour leur construction suivant les instruments dont ils disposent. L'objet de leur travail et de leur raisonnement est un tracé matériel, même si le raisonnement a une portée plus large et concerne des classes d'objets. Mais, dans la géométrie de la démonstration, le tracé matériel devient un représentant d'un objet théorique défini axiomatiquement (même si les axiomes ne sont pas précisés explicitement). Les objets sur lesquels on travaille et les méthodes qu'on utilise sont bien différents, pourtant on emploie les mêmes mots (rectangle, carré, angle droit, parallèle...) pour désigner ces réalités différentes.

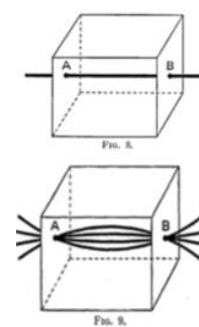
Derrière la continuité des mots et des actions matérielles sur les figures, il y a une rupture entre la géométrie de l'observation et de la réalisation matérielle (du primaire) et la géométrie de la démonstration (qui s'installe au cours du secondaire) dans les significations et les modes de validation.

Comment gérer la transition ? Faut-il insister sur la rupture entre les objets et les pratiques ou sur la continuité ? Peut-on organiser une progression cohérente de la géométrie élémentaire pour les élèves sur toute la scolarité obligatoire ? C'est cette question qui nous occupe principalement dans ce chapitre. Nous y présentons quelques pistes de réflexion issues de recherches en didactique de la géométrie qui se sont intéressées à cette rupture dans les années 1990 et 2000. On peut aussi se reporter à Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq (2013), Perrin-Glorian et Godin (2014), Perrin-Glorian et Godin (2018), Mathé, Barrier et Perrin-Glorian (2020) pour plus de détails, des exemples et d'autres références bibliographiques.

II. Géométrie physique et géométrie théorique²⁸

Une des raisons de la complexité de l'enseignement de la géométrie est qu'elle est à la fois un modèle de l'espace sensible dans lequel nous vivons, et une théorie axiomatique, sans doute la plus ancienne des théories axiomatiques. *Comme science de l'espace, la géométrie fournit des outils pour résoudre, à l'aide d'instruments adaptés, des problèmes pratiques portant sur des objets matériels, dans une démarche de modélisation.* Dans une perspective pratique, les énoncés ont besoin d'être valides à la précision des instruments ; par exemple, des constructions approchées peuvent être acceptables. *Comme théorie mathématique déductive, la géométrie refuse la validation perceptive s'appuyant sur l'espace sensible, même outillée par des instruments.* Ses énoncés portent sur des objets théoriques, idéaux, elle déduit, par des règles purement logiques, ses théorèmes d'axiomes préalablement posés. Nous parlerons de *géométrie physique* dans le cas où le contrôle des propriétés se fait avec des instruments et de *géométrie théorique* dans le cas où il se fait par la démonstration. La nature différente des objets et surtout les rapports différents à la figure dans ces deux géométries sont source de malentendus entre professeurs et élèves au début du collège (Berthelot et Salin, 1993-1994 ; Houdement, 2007 ; Salin, 2008). Au cœur du problème de l'enseignement de la géométrie se trouve donc le traitement du rapport entre les objets géométriques et les objets matériels de l'espace sensible, entre les figures théoriques définies par des relations entre des objets géométriques et les figures matérielles qui les représentent, contrôlées par la perception ou par les instruments.

Dans l'enseignement, jusqu'aux années 1960, on assume l'appui sur l'espace sensible pour définir les objets géométriques : ils sont évoqués à partir d'objets matériels idéalisés puis on les caractérise par des propriétés qui sont en fait des axiomes. Par exemple, dans le manuel Monge et Guinchan (1958), dans un paragraphe intitulé « Propriétés de la droite », la droite est matérialisée par une aiguille à tricoter fine bien droite qui passe par deux trous percés dans les faces opposées d'une boîte et qu'on peut faire glisser ou tourner (figure ci-contre) ; on constate que, dans ces déplacements, l'aiguille paraît fixe entre les points A et B. On évoque ensuite une tige curviligne dont le pivotement engendrerait un fuseau entre A et B. On admet que les résultats de l'expérience sont vrais pour une droite géométrique et on énonce des propriétés qui feront partie des fondements du cours de géométrie :



Monge et Guinchan, 5^{ème}, 1958.

- Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.
- Deux points déterminent une droite.
- Deux droites qui ont deux points communs coïncident.
- Deux droites distinctes peuvent se rencontrer, au plus, en un point.
- Pour nommer une droite, il suffit de nommer deux de ses points.

²⁸ Sur ce sujet, voir aussi Rouche (2008).

À la suite de la réforme des mathématiques modernes et de la contre-réforme des années 1980, on insiste au collège sur la méfiance qu'il faut garder vis-à-vis de la figure et la géométrie de la classe de 6^{ème} devient le lieu d'introduction des notations ensemblistes. Cependant, les élèves de ce niveau sont loin de voir les objets géométriques comme des ensembles de points. Le plus souvent n'existent pour eux que les points marqués sur la figure. Les sommets de polygones ne sont pas perçus de la même manière que les points d'intersection. Ainsi, dès la classe de 6^{ème}, l'enseignement tend à réduire la géométrie à la géométrie théorique. Pourtant, *le rapport à la géométrie comme théorie physique de l'espace nous semble mériter d'être développé dans l'enseignement obligatoire d'une part pour lui-même et les applications qu'il peut avoir, d'autre part comme appui pour accéder à une théorie axiomatique.* Cette géométrie physique comprend une théorie sur laquelle s'appuie le raisonnement, c'est-à-dire un corpus de savoirs validés dans l'espace sensible à partir d'expériences de tracés et de mesures à l'aide d'instruments. Ce premier rapport à la géométrie nous paraît insuffisamment construit à l'entrée en 6^{ème}. Une question qui nous occupe ici est de voir comment on peut travailler sur les figures géométriques en fin de primaire et au début du secondaire pour développer ce rapport à la géométrie comme théorie physique de l'espace, tout en aidant les élèves à construire les concepts géométriques sur lesquels pourra s'appuyer la géométrie de la démonstration.

L'espace graphique interface entre l'espace physique et l'espace géométrique

Les figures tracées sur papier ou écran d'ordinateur peuvent référer à trois points de vue au moins : elles peuvent représenter des objets ou des situations de l'espace sensible dans le cadre d'une modélisation, elles peuvent représenter des objets d'une théorie axiomatique, elles peuvent être considérées pour elles-mêmes du point de vue de leurs propriétés graphiques vérifiables avec des instruments matériels (qui peuvent être des outils numériques dans le cas de l'écran d'ordinateur). Pour éclairer le rôle des figures en géométrie, nous avons proposé (Perrin-Glorian, Mathé, & Leclercq, 2013) de considérer, en plus de l'espace sensible et de l'espace géométrique, *une partie spécifique de l'espace sensible que nous appelons l'espace graphique des représentations.* On y trouve à la fois des représentations en dimension 2 d'objets ou de situations du monde sensible en dimension 3 et des représentations d'objets géométriques. *Nous faisons l'hypothèse qu'il joue un rôle d'interface entre les espaces sensible et théorique.*

Dans un *problème de géométrie théorique*, l'espace sensible n'intervient que via l'espace graphique. Le géomètre interagit avec l'espace graphique qui joue le rôle de terrain d'expérimentation pour l'espace géométrique. C'est notamment le cas lors de l'expérimentation avec un logiciel de géométrie dynamique sur un écran d'ordinateur, bien plus efficace que la feuille de papier avec les instruments traditionnels. La théorie de référence est une théorie axiomatique et le mode de validation est la démonstration, l'objet d'étude est une situation géométrique définie par un texte. La figure matérielle représente toutes les figures matérielles possibles définies par ce texte.

Dans le cas où *la géométrie sert à modéliser un problème de l'espace sensible* de dimension 3, on traduit ce problème dans un modèle géométrique, en choisissant les éléments de la réalité pertinents pour la représentation dans le modèle. On résout ensuite le problème dans ce modèle géométrique (qui peut être aussi bien celui d'une théorie physique que d'une théorie axiomatique) avant d'interpréter la solution dans l'espace sensible. Pour faire cette modélisation et utiliser dans la réalité les résultats établis dans le modèle, *il est nécessaire d'identifier dans le problème concret les éléments qui pourront se traduire dans le modèle à la fois comme hypothèses et conclusions du résultat qu'on utilise.* La représentation dans l'espace graphique est un moyen de le faire. La validation de la modélisation se fait dans l'espace sensible (voir dans Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq (2013) l'analyse

d'un exercice proposé dans un manuel de lycée professionnel et visant à calculer la surface vitrée de la pyramide du Louvre).

Dans la géométrie physique, la figure matérielle peut modéliser une situation de l'espace sensible, mais elle *peut être un objet d'étude en soi* dont on peut explorer les propriétés avec des instruments et discuter des moyens de la construire avec ces mêmes instruments. Elle peut être représentée par un schéma à main levée qui indique des propriétés à prendre en compte dans la réalisation de la figure aux instruments. Dans ce cas, la validation se fait avec les instruments mais les instruments sont des moyens de représenter graphiquement des propriétés géométriques.

Nous faisons l'hypothèse qu'on peut faire avec les élèves un travail dans l'espace graphique qui puisse jouer le rôle d'interface entre la géométrie physique et la géométrie théorique. Nous reviendrons sur ce point, très important, dans un prochain paragraphe. Arrêtons-nous auparavant sur la nécessaire articulation entre texte et figure dans l'activité géométrique (théorique).

III. Articulation texte et figure dans une démonstration

Les travaux de Duval pointent depuis longtemps l'activité cognitive spécifique que demandent l'appréhension des figures en géométrie et son articulation avec le langage (Duval, 1994, 2005 ; Duval & Godin, 2005). Pour construire une figure ou faire une démonstration en géométrie il faut dépasser l'appréhension perceptive iconique, celle qui nous permet de reconnaître les formes au premier coup d'œil et qu'on utilise constamment au quotidien, pour identifier des éléments constitutifs des formes qui permettent soit leur construction avec des instruments soit leur description et l'identification de propriétés. Le premier cas suppose une appréhension séquentielle et une déconstruction instrumentale des formes qui demandent en particulier de mettre un ordre et de reconnaître des propriétés qu'on peut produire avec les instruments. Le second, et en particulier la démonstration, demande une appréhension discursive et la déconstruction dimensionnelle des formes. En effet, la perception naturelle privilégie les formes fermées de dimension 2 alors que les propriétés géométriques s'énoncent la plupart du temps en termes de relations entre des points et des droites. Dans les deux cas, il faut de plus désimbriquer des formes qui se recouvrent partiellement et voir des droites là où n'apparaissent que des segments. Pour en savoir plus, on peut se reporter à Duval (2005). Nous illustrons ceci à partir de l'analyse de quelques exemples.

1. Exemple 1 : Cercle et losange

Soit \mathcal{C} un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ et un point D sur ce cercle, tel que $AD = AO$.
 La perpendiculaire à (DO) passant par A recoupe le cercle \mathcal{C} au point E .
 Montrer que le quadrilatère $ADEO$ est un losange.

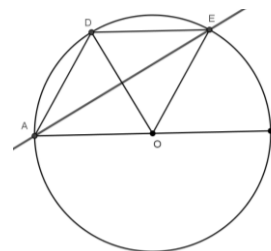
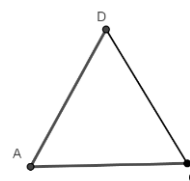


Figure 3

De nombreuses démonstrations sont possibles en 4^{ème} ou 3^{ème} selon les connaissances disponibles des élèves et donc les programmes en vigueur. Les sous-figures extraites et leurs propriétés diffèrent. Examinons-en une avec, en italiques, les changements de regard sur la figure qu'elle suppose :

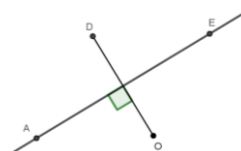
$AD = AO$ donc A est sur la médiatrice de $[DO]$.

Isolement du triangle isocèle ADO comme sous-figure et mobilisation d'une des définitions de la médiatrice après avoir traduit une égalité de longueur en termes d'équidistance.



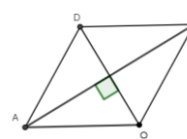
La médiatrice de $[DO]$ est perpendiculaire à $[DO]$. Or il existe une seule perpendiculaire à $[DO]$ passant par A donc (AE) est la médiatrice de $[DO]$.

Sous-figure : segment $[DO]$ et segment $[AE]$ perpendiculaire à $[DO]$. Mobilisation de l'autre définition de la médiatrice et d'un axiome.



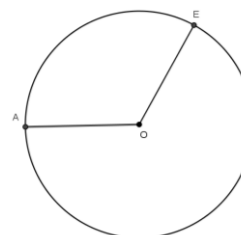
E est sur la médiatrice de $[DO]$ donc $DE = EO$

Voir les deux autres côtés du quadrilatère comme joignant un point de la médiatrice aux extrémités du segment. Mobilisation à nouveau de la définition de la médiatrice en termes d'équidistance pour un autre point.



Mais $[OA]$ et $[OE]$ sont des rayons du même cercle donc $OA = OE$.

Isoler le cercle et ses rayons. Identifier deux points du cercle comme équidistants du centre.



Finalement, $AD = AO = OE = ED$.

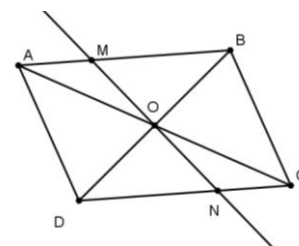
Relier les deux points de vue pour conclure en utilisant la caractérisation du losange par l'égalité des quatre côtés.

2. Exemple 1 bis : Construction d'une figure

Supposons qu'on veuille reproduire la figure précédente (figure 3) donnée comme modèle (sans qu'aucune propriété n'en soit spécifiée) à partir du triangle ADO déjà tracé (il est équilatéral mais ce n'est pas dit aux élèves). De nombreuses constructions sont possibles avec les instruments de géométrie usuels (un logiciel donnerait de plus l'outil « parallèle »). Regardons celles (ce sont les plus économiques en tracés) qui commencent par reproduire le cercle de centre O et passant par A . Il passe aussi par D , ce qui nous permet de vérifier que le triangle AOD est au moins isocèle en O (en mettant en œuvre la connaissance de l'égalité de tous les rayons d'un cercle). Il suffit alors de prolonger avec la règle non graduée $[AO]$ du côté de O pour obtenir B à l'intersection avec le cercle (ce qu'on repère facilement sur le modèle). Pour terminer la construction, il suffit de repérer que, sur le modèle, E est à l'intersection de deux lignes (déconstruction dimensionnelle) qu'on peut tracer avec les instruments (déconstruction instrumentale). On pourra en effet alors tracer les segments $[DE]$ et $[OE]$. Or E se trouve sur le cercle déjà tracé ; il faut donc trouver une autre ligne. L'analyse du modèle avec les instruments permet d'identifier des propriétés utiles à la construction : soit la perpendicularité de $[OD]$ et $[AE]$ avec l'équerre, soit l'égalité $AD = DE$ avec un compas ou une bande de papier qui permet de reporter des longueurs. Si l'on a repéré l'angle droit sur le modèle, on peut facilement terminer la figure en reproduisant cet angle droit. Si l'on a repéré l'égalité des longueurs, il faut la relier au tracé avec le compas d'un cercle de centre D et de rayon DA . Ici la déconstruction instrumentale demande un pas de plus. Remarquons que, dans ces constructions, on peut très bien ne pas avoir vu que le triangle ADO est équilatéral. Elles sont réalisables si le triangle est seulement isocèle en O mais, dans ce cas, on peut seulement affirmer que le quadrilatère $ADEO$ est un cerf-volant qui a (OD) comme axe de symétrie. Il n'est un losange que si, de plus, $AD = AO$.

3. Exemple 2²⁹ : comparaison de deux démonstrations

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O .
Soit M un point du segment $[AB]$, distinct de A et B .
La droite (OM) coupe $[CD]$ en N .
Faire une figure.
Le but de cet exercice est de démontrer que O est le milieu de $[MN]$,
de deux manières différentes.



Les points O, M, N sont alignés par construction ; il reste donc à montrer qu'on a $OM = ON$.

Une première démonstration possible consiste à considérer les triangles BOM et DON ou MOA et NOC : on montre facilement que les angles sont égaux par les théorèmes sur les angles entre parallèles et sécantes et sur l'égalité des angles opposés par le sommet. En utilisant de plus $AO = OC$ ou $OB = OD$, on conclut par le cas d'égalité ACA (angle, côté, angle) que les triangles sont superposables (égaux, isométriques) et on en déduit que $OM = ON$.

Une autre démonstration consiste à s'appuyer sur la symétrie de centre O qui conserve le parallélogramme $ABCD$. Dans cette symétrie A a pour image C , B a pour image D . Le point M est l'intersection des droites (AB) et (MN) . L'image du point M dans la symétrie est donc l'intersection des images des droites (AB) et (MN) dans la symétrie. La droite (AB) , définie par A et B , a pour image la droite (CD) . La droite (MN) passe par le centre de symétrie donc est (globalement) invariante par la symétrie : elle se transforme en elle-même. L'image de M est donc l'intersection des droites (CD) et (MN) , c'est donc le point N par définition. Le centre de symétrie est le milieu du segment qui joint un point et son image, donc O est le milieu de $[MN]$.

La première démonstration demande de connaître les relations d'angles entre parallèles et sécantes et les cas d'égalité des triangles. La deuxième démonstration demande de connaître les propriétés de la symétrie centrale. Toutes ces connaissances ont été, à une époque ou à une autre, enseignées en classe de 5^{ème}. Cependant, le regard à porter sur la figure et la déconstruction dimensionnelle à opérer sur les figures ne sont pas du tout du même niveau dans les deux démonstrations. Dans le premier cas, il faut voir que $[OM]$ et $[ON]$ sont des côtés de triangles dont on peut essayer de démontrer qu'ils sont superposables, c'est-à-dire que sur des triangles vus comme surfaces, on identifie des côtés ou des sommets. Dans le deuxième cas, il faut voir une droite comme définie par deux points et voir un point comme défini par l'intersection de deux droites, c'est-à-dire une déconstruction dimensionnelle de la figure d'une tout autre complexité. Si l'on utilise le fait que l'image de (AB) est une droite parallèle passant par C , la déconstruction dimensionnelle est pratiquement de même niveau.

4. Trois manières de regarder les figures géométriques

En s'appuyant sur les travaux de Duval, Perrin-Glorian et Godin (2018) proposent une typologie des regards que les élèves peuvent porter sur les figures, précisée par Mathé, Barrier et Perrin-Glorian (2020). Cette typologie prend en compte à la fois la dimension des unités figurales perçues (surfaces, lignes ou points) mais aussi la possibilité de concevoir de nouvelles unités figurales qui pourraient être construites à partir de celles qui sont effectivement tracées.

La vision naturelle, celle du sens commun comme des jeunes enfants, est de voir des surfaces juxtaposées ou, ce qui est déjà beaucoup moins naturel, partiellement superposées, ce que nous

²⁹ Cet exemple sera repris avec d'autres détails au chapitre 4.

appellerons une vision « surfaces » (ou D2) des figures. Dans une vision « surfaces », des lignes et des points peuvent apparaître mais les lignes sont seulement des bords de surfaces, les points sont des sommets de surfaces ou des intersections de bords. On ne peut pas créer de nouvelles lignes sans faire intervenir de surfaces dont elles soient un bord. De plus, ces surfaces sont limitées par un bord extérieur qu'il est difficile de dépasser. Ainsi, dans l'exemple 1, on verra un quadrilatère découpé en triangles et posé sur un disque ; dans l'exemple 2, on verra le découpage du parallélogramme en triangles, surtout si, dans un tracé à la main, on n'a pas fait déborder les droites du contour de la figure, comme le fait nécessairement un logiciel de géométrie dynamique quand on lui demande de tracer une droite.

Cependant, les énoncés de géométrie plane (définitions ou théorèmes) portent le plus souvent sur des relations entre des lignes et des points. Nous nous limiterons ici aux lignes qu'on peut obtenir avec des instruments classiques (droites, demi-droites, segments, cercles). La vision géométrique demande de voir sur une figure des lignes qui ne sont pas nécessairement tracées, qui ne sont pas des bords et dépassent éventuellement la figure ainsi que des points qu'on peut obtenir ou définir par intersection de ces lignes. Ainsi dans l'exemple 1, A et E doivent être vus alternativement comme points de la médiatrice et comme points du cercle, dans la démonstration par la symétrie centrale de l'exemple 3, le point M doit être vu comme l'intersection des droites (AB) et (MN) alors qu'il a été pris sur le segment $[AB]$ et qu'il a servi à définir la droite (MN) .

Dans une vision « lignes » (ou D1), la figure est constituée de lignes qui peuvent se tracer avec des instruments : la règle pour les droites, les demi-droites (qu'on peut prolonger) et les segments, le compas pour les cercles ou les arcs de cercles. La figure de l'exemple 2 doit être vue comme un réseau de lignes et de points, intersections de ces lignes (Figure 4). Il reste difficile de prolonger des segments pour définir des points extérieurs au contour de la figure donnée et dont le lien avec la figure n'est pas direct. Par exemple, sur la figure ci-contre (Figures 5, 6), il est plus difficile de prolonger les segments, côtés du quadrilatère ou des triangles, pour obtenir les points E et G que de voir que $[HC]$ et $[BI]$ sont portés par les diagonales du quadrilatère. En le faisant on voit la figure comme un réseau de lignes et on peut conjecturer l'alignement de E, F, G (Figure 6).

Dans une vision « points » (ou D0) de cette figure, on peut créer des lignes nouvelles pour obtenir un point à leur intersection et les points peuvent définir des lignes : il faut deux points (ou un point et une direction) pour déterminer une droite, une demi-droite ; pour un segment, il faut deux points ou un point et une longueur sur une demi-droite déjà tracée ; il faut deux points pour déterminer un cercle (le centre et un point du cercle) ou un point et une longueur.

Dans l'exemple, on pourra comprendre que la donnée des cinq points A, B, C, D et G suffit à définir la figure. Si E, F, G ne sont pas alignés, il faut six points pour définir la figure initiale : A, B, C, D, H, I .

Notons que, même avec cette vision points, les lignes ne sont peut-être pas encore vues comme ensembles de points. Beaucoup des élèves de collège regardent spontanément la figure avec une vision surface sans essayer d'y trouver des relations entre des lignes et des points et sont encore plus loin de voir les lignes comme des ensembles de points. Remarquons que l'utilisation des cas

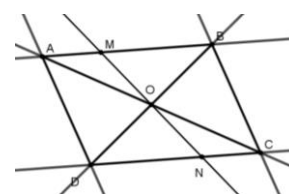


Figure 4

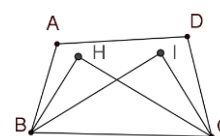


Figure 5

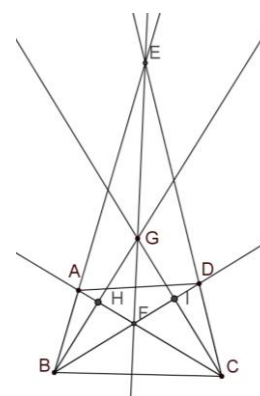


Figure 6

d'isométrie des triangles dans les démonstrations est compatible avec une vision surface de la figure. Nous y reviendrons dans le chapitre 4.

IV. Les instruments pour reproduire ou construire des figures

Nous avons émis plus haut l'hypothèse qu'on peut faire avec les élèves un travail dans l'espace graphique qui puisse jouer le rôle d'interface entre la géométrie physique et la géométrie théorique. Nous allons maintenant voir comment les instruments peuvent jouer un rôle essentiel dans le passage du contrôle des propriétés des figures par la seule perception au contrôle par des énoncés et donc dans la construction progressive d'un point de vue théorique. Pour cela, nous définissons les instruments théoriques nécessaires pour représenter les différentes fonctions géométriques des instruments matériels et nous explicitons les conditions d'un usage géométrique de ces instruments.

1. Instruments de tracé et de reports de grandeurs sans mesure

Dans la suite, nous nous intéressons uniquement aux instruments de tracé et de report de longueur ou d'angle à l'exception des instruments de mesure (les graduations des règles, équerres ou rapporteurs). Nous pensons en effet que les grandeurs géométriques et leurs opérations jouent un rôle essentiel dans la construction des nombres, en particulier l'extension des entiers et de leurs opérations aux nombres décimaux, rationnels et réels, et même au-delà pour l'algèbre. Dans la perspective de penser une progression cohérente de la géométrie du cours préparatoire jusqu'à la fin du collège, coordonnée à une progression sur les nombres, *il est essentiel d'aborder les opérations (addition, soustraction, multiplication et division par un entier) sur les grandeurs géométriques (longueurs d'abord, angles et aires ensuite) indépendamment de leur mesure pour qu'elles puissent servir d'appui pour la construction des nombres*³⁰. Ainsi, nous parlons de grandeur, de report de grandeurs ou de rapport de grandeurs et non de mesure : quand c'est nécessaire, la taille des figures est fixée par des longueurs données par des segments et non par leur mesure.

Bien sûr, nous ne voulons pas dire qu'il ne faut pas apprendre à mesurer avec la règle graduée ou avec le rapporteur. Mais la mesure est pour nous du côté des nombres et pour qu'elle puisse jouer son rôle dans la conceptualisation des nombres, il faut aussi (d'abord ou simultanément) travailler la mise bout à bout des longueurs, l'addition des aires et des angles... La place à donner aux mesures dans l'enseignement élémentaire de la géométrie est un sujet sur lequel on manque de travaux. En primaire et en sixième, l'usage très fréquent des mesures pour fixer les figures (taille et forme) facilite le contrôle du professeur sur le travail des élèves mais il se peut qu'il enlève de la généralité et de la richesse aux problèmes concernant les figures et qu'il enlève ainsi aux élèves des occasions de construire des concepts géométriques.

2. Instruments théoriques

Dans la géométrie théorique achevée, les seuls instruments théoriques indispensables sont *la règle* et *le compas*. Mais, quand les connaissances sont limitées, d'autres instruments sont nécessaires pour reporter les propriétés des figures sans recourir à la mesure et aux nombre³¹s. La *règle* (non graduée) permet de tracer des lignes droites ; elle est liée à la conceptualisation de l'alignement. La règle théorique n'est pas limitée dans sa longueur. L'*équerre* permet de tracer des droites et des angles droits ; elle est liée à la conceptualisation de la notion d'angle droit avec ses deux côtés infinis. Le

³⁰ On peut à ce propos consulter Perrin-Glorian (2014).

³¹ Le recours à des instruments autres que la règle et le compas peut être utile aussi lorsqu'on veut se faciliter (alléger) certaines procédures de tracé, même si (par exemple) le tracé d'une parallèle à la règle et au compas est plus précis qu'à l'équerre.

compas permet de tracer des cercles. Il permettra aussi (plus tard) de reporter des longueurs sur une droite déjà tracée (en produisant l'intersection d'une demi-droite et d'un cercle). Avant d'utiliser le compas dans ce but, le report de longueur peut se faire avec d'autres instruments, par exemple une bande de papier avec un bord droit sur lequel on peut porter des repères ; le compas à pointes sèches a le même usage mais la longueur à reporter n'est pas matérialisée par un segment. Nous appellerons *reporteur de longueurs* l'instrument théorique qui permet de *reporter une longueur sur une droite déjà tracée*. Deux autres instruments théoriques sont nécessaires aux tracés de la géométrie élémentaire quand on n'a pas encore toutes les connaissances nécessaires pour s'en passer : *le médiateur de segments*³² qui permet de prendre le milieu d'un segment et *le reporteur d'angles* qui permet de reporter un angle à partir d'une demi-droite déjà tracée. Ces instruments théoriques peuvent être réalisés de différentes manières par des instruments matériels qui remplissent une ou plusieurs fonctions des instruments théoriques. Par exemple, une bande de carton rigide avec un bord droit sur lequel on peut écrire est un reporteur de longueurs mais ne permet pas de prendre le milieu d'un segment ; une bande de papier avec un bord droit remplit aussi cette fonction mais, comme on peut la plier, c'est aussi un médiateur. D'autres outils (bien sûr le compas, mais aussi, par exemple, un papier transparent, réglé par une famille de parallèles équidistantes, appelé aussi guide-âne ou règle à bords parallèles) peuvent servir de médiateurs en s'appuyant sur des propriétés géométriques que l'on établira au cours du collège (propriété de Thalès ou des diagonales du parallélogramme). Un morceau de papier sans bord droit, mais qu'on peut plier ou sur lequel on peut écrire, peut jouer le rôle de reporteur d'angles. Un reporteur d'angle peut aussi être matérialisé par un cercle sur lequel on peut écrire, avec son centre.

Réduction du nombre des instruments

À mesure que les connaissances des élèves évoluent, on peut réduire le nombre des instruments théoriques (et matériels) nécessaires pour reproduire des figures : par exemple, le reporteur de longueur peut assez vite (dès le cours moyen) être remplacé par le compas. Il faut pour cela que les élèves voient l'écart entre la pointe et la mine comme une longueur et les points d'un cercle comme situés à une distance fixée du centre, ce qui n'implique pas qu'ils voient le cercle comme un ensemble de points à la même distance du centre. Par la suite, ils disposeront d'un répertoire de théorèmes et de procédés de construction qui leur permettra de se passer aussi du médiateur de segment et de l'équerre puis du reporteur d'angle.

3. La géométrie des tracés

Pour que les instruments matériels qu'utilisent les élèves puissent jouer le rôle d'interface entre la géométrie physique et la géométrie théorique, il est important que ceux-ci apprennent à en faire un *usage* que nous appelons *géométrique* parce qu'il respecte des règles qui correspondent à la représentation par les instruments théoriques de propriétés géométriques et qui réfèrent implicitement à des axiomes, des définitions ou des théorèmes de géométrie. Cet apprentissage n'est actuellement pas pris en charge par l'enseignement. Or il nous paraît essentiel pour éclairer les liens entre géométrie physique et géométrie théorique parce qu'il met l'accent sur la justesse de la construction plutôt que sur sa précision (Petitfour, 2017). En effet, l'usage des instruments est à relier à la finalité de l'activité géométrique : si la finalité est pratique, on cherche à avoir le plus de précision possible en fonction des instruments dont on dispose ou à adapter l'usage des instruments pour obtenir plus de précision dans le tracé, ce que nous appelons un usage technique des instruments ;

³² Nous introduisons ce mot pour faciliter l'écriture de ce texte. Nous ne proposons pas de l'introduire auprès des élèves parce que c'est un instrument provisoire dans le cours de géométrie. On disposera en sixième des connaissances qui permettront de prendre un milieu à la règle et au compas et du mot « médiatrice ».

évidemment un minimum de justesse est quand même nécessaire³³ ; si la finalité est théorique, on cherche à avoir une construction juste grâce à un usage géométrique des instruments. Un des enjeux de la classe de 6^{ème} pourrait être de passer d'un usage technique à un usage géométrique des instruments ou au moins de distinguer ces deux usages. Précisons *l'usage géométrique* des instruments théoriques définis ci-dessus ou de leur réalisation matérielle :

- La *règle* sert à tracer des segments, des droites, elle permet de vérifier ou de produire l'alignement de trois points (ou plus), d'un segment et d'un point, de deux segments. Pour la placer, il faut deux points ou un segment déjà tracé.

- Le *reporteur de longueur* sert à reporter une longueur connue sur une droite déjà tracée à partir d'un point connu. On prend la longueur avec le reporteur de longueur et on la reporte sur la droite connue, à partir du point connu, d'un côté ou de l'autre de ce point. En revanche, on ne peut pas trouver un point d'une droite à une distance fixée d'un point donné non situé sur la droite avec un usage géométrique du reporteur de longueur et de la règle. Il faut un compas.

- Le *médiateur de segment* sert à reporter la moitié de la longueur d'un segment connu. Le milieu d'un segment est aligné avec les extrémités et se trouve à la même distance de ces deux extrémités ; pour l'obtenir, on prend la moitié de la longueur du segment à l'aide du médiateur de segment et on la reporte à partir d'une des extrémités du segment, vers l'intérieur.

- L'*équerre* sert à reporter des angles droits. Pour poser l'équerre, il faut une droite sur laquelle on pose un côté de l'angle droit, on peut la faire glisser sur cette droite si l'on veut que l'autre côté de l'angle droit passe par un point donné. En revanche, on ne peut pas tracer un triangle rectangle dont on connaît les longueurs de l'hypoténuse et d'un côté de l'angle droit avec un usage géométrique de l'équerre et de la règle. Il faut un compas.

- Le *compas* sert à tracer des cercles. Il a deux branches différentes : la pointe se pose sur le centre du cercle, la mine décrit un arc de cercle quand on tourne. Pour reproduire un cercle, il faut repérer le centre et prendre l'écartement jusqu'à un point du bord. Cet écartement représente une longueur : la distance entre le centre et n'importe quel point de la circonférence. On peut donc reporter une longueur à partir d'un point sur une droite avec le compas en plaçant la pointe sur ce point et en faisant un arc de cercle qui coupe la droite.

- Le *reporteur d'angles* sert à reporter des angles. On peut ne pas avoir de contrainte quand ce report commence la reproduction d'une figure ; dans ce cas, le repérage des directions des deux côtés de l'angle sur un papier (calque ou non) suffit. Mais, le plus souvent, on reporte l'angle à partir d'une demi-droite qu'on a déjà : on reporte alors le sommet sur le point origine de la demi-droite et un côté sur la demi-droite qu'on a déjà et on reporte l'autre côté de part ou d'autre de cette demi-droite. Comme pour le report de longueur, il y a deux possibilités.

Nous appelons *géométrie des tracés* l'activité de reproduction et construction de figures matérielles qui vise un usage géométrique des instruments matériels de tracé ou de report de longueur ou d'angle avec pour objectif la conceptualisation des objets géométriques.

4. Apprendre à porter un regard géométrique sur les figures : la restauration de figure

Dans ce paragraphe, nous décrivons un type de situation de la géométrie des tracés qui nous paraît susceptible, par un jeu sur les variables didactiques, d'aider les professeurs à faire évoluer les

³³ Remarquons par exemple que, dans les logiciels de géométrie, les constructions sont de fait approchées, ce qui montre la complexité des rapports entre justesse et précision.

conceptions des objets géométriques de leurs élèves. Il s'agit de reproduire une figure à partir d'un modèle à la même taille ou à une taille différente, à partir d'une amorce fournie, avec des instruments variés sur lesquels il peut être intéressant de mettre un coût d'usage. Quand les élèves pensent avoir terminé, ils peuvent tester leur production par un calque disponible auprès du professeur. Nous parlons plutôt de restauration de figure quand le choix des variables didactiques est fait de façon qu'on puisse démarrer la reproduction avec une vision « surfaces » de la figure modèle mais que la réussite nécessite de passer à une vision « lignes » voire à une vision « points » de cette figure. C'est le cas notamment quand l'amorce fournie est une partie de dimension 2 de la figure ou quand on fournit un instrument (par exemple un gabarit, éventuellement tronqué) qui permet de reporter des informations « surfaces » du modèle. On peut trouver de nombreux exemples de restauration de figure dans Keskesa, Perrin-Glorian et Delplace (2007), Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq (2013), Perrin-Glorian et Godin (2014) ainsi que sur le site géré par Marc Godin www.aider-ses-eleves.com.

Exemple introductif

Pour expliquer le jeu possible sur les variables didactiques dans la restauration d'une même figure de la maternelle à la 6^{ème}, nous reprenons en partie un exemple déjà utilisé dans Mangiante et Perrin-Glorian (2014).

Considérons la figure ci-contre (Figure 7). À la maternelle, on peut la reproduire en tant que puzzle à trois pièces (Figure 8) qu'on pourra par la suite reproduire sous forme de dessin avec les mêmes pièces utilisées comme gabarits. Au cours du cycle 2, on peut rendre la tâche problématique en donnant le cadre et un seul gabarit bien choisi (Figure 9) : une fois le contour du gabarit tracé, il reste un segment à tracer à la règle en joignant deux sommets. On pourrait aussi couper un coin d'un ou plusieurs gabarits pour obliger les élèves à retrouver le sommet comme intersection des côtés (Figure 10). Au cycle 3, on peut proposer une amorce de la figure à reproduire (Figure 11). La restauration peut se faire à la règle seule si l'on repère d'abord certains alignements et intersections sur le modèle (Figure 12) que l'on reporte sur l'amorce pour obtenir le sommet manquant par intersection de lignes déterminées à partir des éléments déjà présents sur la figure (Figure 13). Cela demande de voir qu'il manque un sommet que l'on peut rechercher comme intersection de lignes, c'est-à-dire une vision points de la figure. Si l'on ne repère pas toutes ces propriétés du modèle, on peut s'en tirer en reportant des longueurs et des angles. Par exemple ici, sans aucune amorce, on peut reconstituer toute la figure en reportant quatre angles (ce que l'on peut faire avec un seul morceau de papier) et cinq longueurs (Figure 14). Avec une vision points, on peut aussi reconstituer toute la figure à partir du pentagone violet (Figure 15).

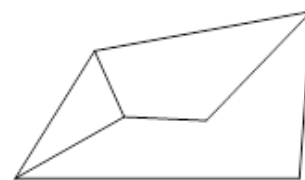


Figure 7

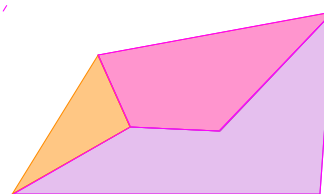


Figure 8

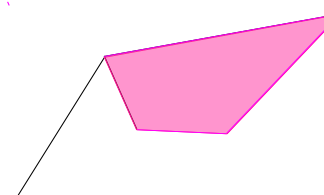


Figure 9

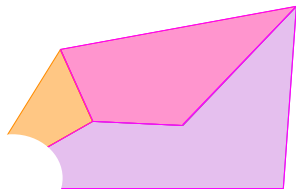


Figure 10

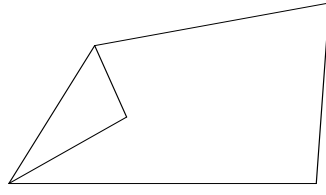


Figure 11

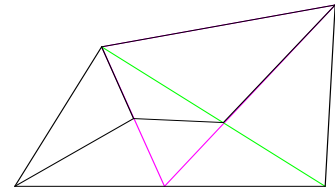


Figure 12

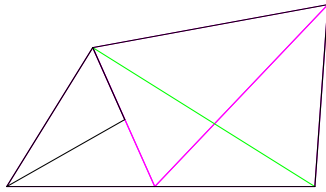


Figure 13

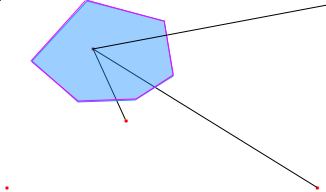


Figure 14

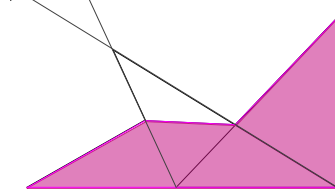


Figure 15

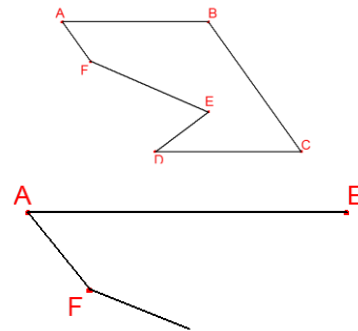
Nous n'avons pas présenté cet exemple sous forme de situation clés en mains pour les élèves mais pour montrer la richesse de telles situations pour faire travailler au cycle 3 et notamment en 6^{ème} les notions de droite et point mais aussi angle ou report de longueur et introduire en 6^{ème} la manière de nommer les segments et droites à partir des noms des points. Le choix de la figure modèle et de l'amorce sont des variables didactiques importantes ainsi que le choix des instruments disponibles ou le barème que l'on choisit pour leur utilisation. Dans l'exemple, la figure modèle est construite à partir d'un quadrilatère et de ses diagonales et d'un point sur un côté qu'on joint aux extrémités du côté opposé (donc cinq points déterminent la figure). On ne garde que certaines lignes pour le modèle et un peu moins pour l'amorce. La restauration amène à retrouver les points manquants à partir des points et des lignes présents sur l'amorce. Suivant ce que l'on veut plus particulièrement travailler (alignement, intersection, report d'angles ou de longueurs), on pourra faire des choix différents. Quel que soit le choix, mettre en place ces situations en classe demande de faire vivre un contrat didactique différent de celui qui prévaut habituellement dans la reproduction de figures. En particulier, il faut que les élèves analysent la figure à reproduire en recherchant sur le modèle des lignes et des points qui ont pu servir à le construire mais qui ne sont pas visibles, donc qu'ils s'autorisent à ajouter au modèle pour le reproduire, en tenant compte des éléments déjà fournis dans l'amorce. Il faut aussi s'interdire la règle graduée qui est l'outil prépondérant pour les élèves et les empêche de voir le reste. Des questions essentielles à se poser dans la restauration de figure, et qui préfigurent des questions essentielles à se poser quand on cherche une démonstration, sont « Qu'est-ce que j'ai ? Qu'est-ce qui me manque ? Comment le trouver à partir de ce que j'ai déjà ? ». C'est ce type d'aide qu'on peut donner aux élèves pendant la recherche et quand ils comparent le calque de vérification à leur production.

Un autre exemple pour le collège

Nous avons imaginé l'exemple suivant (un peu modifié par rapport à la présentation faite dans Perrin-Glorian et Godin, 2018) qui pourrait se donner en cinquième ou quatrième pour faire travailler, outre l'alignement, la notion de perpendiculaire et les propriétés du parallélogramme.

On veut reproduire le polygone $ABCDEF$ à partir de l'amorce fournie. L'amorce n'est pas à la même taille que le modèle. On ne peut donc pas reporter de longueur du modèle sur l'amorce. Il faut chercher des propriétés du modèle qu'on peut reproduire sur l'amorce avec les instruments de géométrie.

Première consigne : rechercher des propriétés utiles.



La recherche de propriétés pour reproduire amène à prolonger (FE) pour constater qu'elle passe par C . Mais il faut un autre renseignement pour trouver C , soit une longueur qu'on n'a pas, soit l'intersection avec une autre droite, ici (BC) , dont il faut voir qu'elle est parallèle à (AF) pour la tracer. On peut voir que D est sur (AF) mais il faut encore reporter une longueur qu'on n'a pas ou trouver une autre ligne sur laquelle se trouve D . On peut voir que (CD) est parallèle à (AB) ou que (BD) est perpendiculaire à (EF) . Pour trouver E , il faut reporter une longueur qu'on n'a pas ou voir que (DE) est perpendiculaire à (BC) .

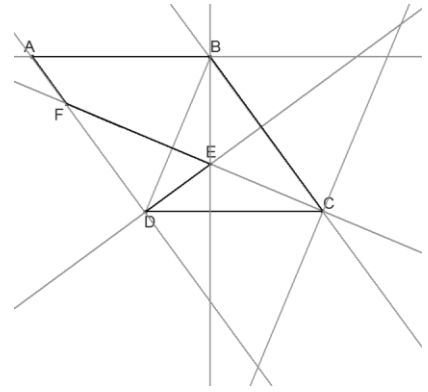
Après ce premier temps de travail, la mise en commun et l'accord sur les propriétés que vérifie la figure : $ABCD$ a ses côtés opposés parallèles et de même longueur, F est sur $[AD]$, E sur $[CF]$, (CF) est perpendiculaire à (BD) , (DE) perpendiculaire à (BC) et (BE) perpendiculaire à (DC) , on passe à la reproduction. Mais les instruments ont un coût d'utilisation : la règle non graduée est gratuite, le compas et le report de longueur valent 5 points et l'équerre 10 points. Il faut essayer de reproduire la figure en dépensant le moins de points possible.

On peut proposer le défi de trouver une solution qui vaut 25 points. En effet le point D se trouve à l'intersection de (AF) et de la perpendiculaire à (FE) passant par B . La règle est gratuite, on utilise 10 points pour l'équerre. On peut alors trouver C en coupant la droite (FE) par un cercle de centre D et de rayon AB ou par un cercle de centre B et de rayon AD . Cela vaut 5 points. Reste à trouver E . Il se trouve sur (FE) . Les seules autres propriétés utilisables sont qu'il se trouve sur la perpendiculaire à (CD) passant par B et sur la perpendiculaire à (BC) passant par D , soit 10 points pour l'utilisation de l'équerre dans chaque cas et donc 25 points en tout. Le tracé des parallèles par double perpendiculaire est plus cher que l'utilisation des alignements et des égalités de longueur. Remarquons cependant qu'on peut réaliser la restauration pour 20 points. On peut en effet obtenir la perpendiculaire à (DC) passant par B en prenant l'intersection de (DC) avec le cercle de diamètre $[BD]$. Le centre de ce cercle s'obtient par l'intersection des deux diagonales du parallélogramme.

Remarquons aussi que, puisque E peut s'obtenir par l'intersection de la droite (FE) avec deux droites différentes : la perpendiculaire à (CD) passant par B et la perpendiculaire à (BC) passant par D , on peut se demander pourquoi ces droites seraient concourantes. Cela résulte du fait que (FE) , (BE) et (DE) sont les trois hauteurs du triangle BCD . C'est d'ailleurs ainsi que nous avons fabriqué le problème de restauration.

Fabrication du problème :

La figure à restaurer est construite à partir de la figure de démonstration du concours des hauteurs d'un triangle : les hauteurs du triangle sont les médiatrices d'un autre triangle obtenu en traçant les parallèles à chaque côté par le sommet opposé. Nous obtenons ainsi un réseau de droites sur lequel nous avons tracé le polygone $ABCDEF$ dont les côtés vérifiaient des propriétés intéressantes pour la construction.



De telles reproductions de figures matérielles avec cahier des charges (propriétés que doit vérifier la figure) peuvent aussi donner aux élèves l'occasion de s'apercevoir que des constructions différentes peuvent aboutir à une même figure et s'interroger sur différents cahiers des charges donnant la même figure...

Chapitre 4

Comment choisir une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie au cycle 4 ?

Dans ce chapitre nous développons quelques arguments qui nous conduisent à proposer une progression cohérente de la géométrie du cycle 4 appuyée sur les cas d'isométrie des triangles. D'abord, il nous semble important d'avoir une progression de l'enseignement de la géométrie cohérente. Cela signifie que, même si toutes les démonstrations du cours ne sont pas faites, elles pourraient l'être et que les professeurs doivent savoir comment l'ensemble pourrait s'organiser dans une axiomatique qui, bien qu'implicite, structure l'ensemble. Dans un premier paragraphe, nous examinons rapidement les deux grandes progressions qui ont structuré l'enseignement au XX^e siècle : la progression classique appuyée sur l'axiomatique d'Euclide, avec quelques nuances et compléments apportés au cours des siècles et la progression en vigueur dans les années 80, après la révolution des « *mathématiques modernes* », qui reposait sur l'usage des transformations. Dans un deuxième paragraphe, nous comparons sur quelques exemples des démonstrations utilisant soit les cas d'isométrie soit les transformations. Dans un troisième paragraphe, nous proposons une progression conforme aux analyses menées, compatible³⁴ avec les programmes actuels du cycle 4 aussi bien que du cycle 3.

I. Diverses organisations de l'enseignement de la géométrie depuis les années 1950

Dans ce paragraphe, nous décrivons brièvement les organisations utilisées dans l'enseignement de la géométrie plane au collège, notamment les deux progressions qui ont encadré la réforme des mathématiques modernes. La première utilise les cas d'isométrie, la seconde utilise principalement les transformations.

1. Avant 1970 : une progression reposant sur les cas d'isométrie

Elle est utilisée dans l'enseignement secondaire depuis qu'il existe et jusqu'aux années 1970. Un bon exemple de cette démarche est fourni par le livre de seconde de la collection Lebossé-Hémery de 1947, qui fait le bilan des connaissances du collège et les complète. Le cours commence par des définitions des objets de la géométrie, avec les axiomes qui les gouvernent (par exemple l'axiome classique : *Par deux points donnés, il passe une droite et une seule*), mais aussi des axiomes concernant le déplacement des figures, dont la signification mathématique est plus douteuse, comme : *On peut déplacer dans l'espace une figure invariable* ou encore *Deux figures égales sont deux figures superposables par déplacement*. Viennent ensuite les définitions des longueurs et des angles. Les cas d'égalité des triangles apparaissent très vite et sont des outils utilisés constamment dans la suite. On notera cependant que les symétries axiales et centrales sont définies, ainsi que les translations et les homothéties (mais pas les rotations, même si le mot est parfois utilisé). D'ailleurs, les transformations

³⁴ Les repères de progression parus en 2019 suggèrent de traiter les cas d'isométrie en 4^{ème} mais ils ne sont pas impératifs.

sont présentes dans les grandes classes du lycée (y compris, en Terminale, l'affinité et l'inversion). On trouve aussi dans les programmes de l'époque nombre de notions qui ont disparu depuis longtemps comme la division harmonique, l'arc capable ou les relations métriques dans le triangle rectangle.

2. La réforme des mathématiques modernes

Elle intervient au tout début des années 1970, pour les classes de 6^{ème} et de seconde dès la rentrée 1969, influencée par le structuralisme (représenté en mathématiques par le groupe Bourbaki, alors à son apogée). De nombreux mathématiciens en sont à l'origine (Lichnerowicz, Dieudonné, Choquet, etc.) et elle est fortement soutenue par l'APMEP, avec des personnalités aussi marquantes que Paul Vissio, Gilbert Walusinski, André Revuz, etc.

En géométrie, les cas d'égalité des triangles disparaissent complètement. On connaît l'anathème de Dieudonné : *à bas Euclide, plus de triangles*. Il n'est pas inutile de rappeler une autre phrase du même auteur (Dieudonné, 1964) : [...] *tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints « cas d'égalité » ou « cas de similitude » des triangles [...]* L'une des raisons invoquées pour justifier cet ostracisme est l'imprécision des prémisses d'Euclide sur le sujet qui pouvait faire penser que ce bel édifice était bâti sur du sable.

Au collège, la géométrie est régie par une axiomatique inspirée de celle proposée par Choquet, dont le summum est la « fameuse » définition de la droite affine comme un ensemble muni d'une famille de bijections :

Par définition, une droite affine D est un ensemble E muni d'une famille F de bijections de E sur \mathbf{R} telle que :

a) pour tout f élément de F , et pour tout élément (a,b) de $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, l'application définie par $g(M) = af(M) + b$ appartient aussi à F ;

b) réciproquement, si f et g sont deux éléments quelconques de F , il existe (a,b) dans $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ tel que $g(M) = af(M) + b$.

L'ensemble E est appelé le support de la droite affine D , un élément M de E est appelé un point de la droite affine D .

Au lycée, la géométrie se réduit à l'étude des espaces vectoriels et affines (et ce dès la seconde !). Il est inutile d'insister sur cette réforme dont l'échec a été patent, surtout en géométrie³⁵.

3. La réforme des années 1980

Prenant acte de l'échec de la réforme des maths modernes, un virage s'opère dans les années 1980, avec un enseignement de la géométrie plus conforme à l'intuition et plus adapté à l'utilisation pratique. Cependant, l'anathème jeté sur les cas d'égalité des triangles demeure et ceux-ci ne réapparaissent pas, les programmes mettant au contraire en avant l'outil « transformations ». Sur ce point, il faut bien comprendre que l'approche par les transformations est cohérente sur le plan mathématique et que le choix entre cette progression et celle qui utilise les cas d'égalité n'est pas fondé sur leur cohérence mathématique, mais sur une analyse didactique (du cours et de nombreux exercices), analyse qui sera proposée dans la suite du chapitre.

Pour une justification mathématique de cette approche, étayée par une axiomatique, le lecteur se reportera au livre d'Annie Cousin-Fauconnet (Cousin-Fauconnet, 1995). Il pourra aussi consulter les bulletins Inter-IREM de l'époque (appelés *Suivi scientifique*). Voici la progression retenue pour la

³⁵ voir l'analyse proposée dans (Kahane, 2002).

géométrie plane par les programmes de 1985 retouchée au fil des années mais sans modification majeure jusqu'en 2005.

En sixième

Un premier paragraphe s'intitule « Reproduction de figures planes simples. Comparaisons d'aires planes ». Le paragraphe sur la symétrie orthogonale qui fait son apparition pour la première fois en 6^{ème} est détaillé. On y rattache les notions de médiatrice et bissectrice en tant qu'axes de symétrie d'un segment ou d'un angle ainsi que la construction des triangles isocèles et de quadrilatères possédant un axe de symétrie parmi lesquels rectangle et losange. À titre d'exemple, dans la version de 2004, un premier paragraphe intitulé *Figures planes* comprend les points suivants : Notions de parallèle, de perpendiculaire. Cercle. Quadrilatères usuels. Médiatrice d'un segment. Bissectrice d'un angle. Vient ensuite le paragraphe sur la symétrie orthogonale par rapport à une droite. Notons dans les commentaires la phrase suivante : « *Dans la continuité du travail entrepris à l'école élémentaire, les activités s'appuient encore sur un travail expérimental (pliage, papier calque) permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures simples, à partir desquelles sont dégagées les propriétés de « conservation » de la symétrie axiale (conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires) »*. Ces propriétés essentielles sont admises avec un support expérimental. Concernant le calcul des aires, on traite de l'aire du rectangle et du triangle rectangle.

En cinquième

Une nouvelle figure plane est introduite : le parallélogramme, et, en liaison avec elle, la notion de symétrie centrale. Comme dans le cas de la symétrie axiale, les propriétés de conservation sont vérifiées expérimentalement et admises. Les propriétés des angles vis à vis des parallèles sont étudiées, avec comme application la somme des angles du triangle. Il est à noter que le programme de 2004 contient un paragraphe sur les constructions de triangles qui, outre l'inégalité triangulaire, mentionne les points suivants :

Construire un triangle connaissant :

- la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents,
- les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés,
- les longueurs des trois côtés.

Le lecteur aura reconnu les trois cas d'isométrie des triangles.

En quatrième

Dans les programmes de 1985, on définit la projection sur une droite selon une direction avec la propriété de conservation du milieu et les « configurations triangulaires qui prennent appui sur cette propriété ». Le cosinus est lié à la projection orthogonale. On trouve aussi les problèmes de plus courte distance avec l'inégalité triangulaire et la distance d'un point à une droite. Les droites remarquables du triangle et leurs points d'intersection respectifs sont étudiés ainsi que les théorèmes relatifs au triangle rectangle : cercle circonscrit et théorème de Pythagore. Les isométries nouvelles sont la translation avec une notion naïve de vecteur et la rotation avec comme application l'étude des polygones réguliers. Par la suite, en 1998, la projection disparaît et le cosinus est défini dans le triangle rectangle, la translation reste, définie à partir du parallélogramme mais la notion de vecteur n'est plus au programme, la rotation passe en 3^{ème}. Le principe est toujours d'admettre les propriétés des transformations, après un travail expérimental. Il y a toujours la droite des milieux et le théorème de Pythagore, ainsi que la notion de tangente à un cercle (réapparue en 1998) et celle de cosinus d'un angle. Dans les programmes de 2005, les transformations ont disparu mais la tangente à un cercle, la droite des milieux et les théorèmes autour des triangles rectangles et le cosinus restent. On parle maintenant d'agrandissements et réductions.

En troisième

Dans le programme de 1985, le théorème de Thalès se traite en 3^{ème}. On poursuit l'étude des lignes trigonométriques avec le sinus et la tangente. On revient sur les translations en introduisant la notion de vecteur (à partir des translations). Le mot « composition » est explicitement au programme de 1985 (pour les translations et les symétries centrales et les symétries par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires). La rotation est introduite en 3^{ème} et non plus en 4^{ème} à partir de 1998. Enfin, le théorème de l'angle inscrit est au programme (mais seulement sous sa forme moitié de l'angle au centre et sans réciproque). Nous avons déjà dit que les transformations ont disparu dans les programmes de 2005, mais l'angle inscrit et les polygones réguliers restent. Le théorème de Thalès reste un point important du programme mais il est abordé dès la quatrième dans la configuration triangle. On poursuit le travail sur les lignes trigonométriques, les agrandissements et réductions.

Commentaires

On notera, dans ces programmes, deux faits importants :

– **Toutes** les propriétés des transformations étudiées sont admises³⁶.

– Il y a très peu d'applications des transformations envisagées. On dit seulement en quatrième : « Définition et propriétés pourront être utilisées dans la résolution d'exercices très simples de construction » et en troisième : « Ces propriétés pourront être utilisées dans la résolution d'exercices simples de construction. Dans des pavages, on rencontrera des figures invariantes par rotation. »

Notons aussi que les cas d'égalité et de similitude des triangles font leur réapparition dans les programmes **de seconde** de l'an 2000. Malheureusement, les professeurs de l'époque, qui pour la plupart n'avaient jamais rencontré ces outils, ne s'en emparent guère et ils disparaissent des programmes suivants. Il faut dire que la classe choisie pour leur introduction était particulièrement mal choisie : les cas d'égalité, pour être des outils efficaces, doivent être introduits tôt, c'est-à-dire dès le début du collège. C'est ce que préconise à cette époque la commission Kahane, (Kahane, 2002). C'est finalement ce qui est retenu dans les programmes de 2015.

II. Comparaison des approches par les cas d'isométrie et les transformations : quelques exemples

Comme on l'a dit précédemment, les deux approches de la géométrie, par les transformations et par les cas d'égalité, sont toutes deux cohérentes sur le plan mathématique. La question se pose maintenant de faire un choix entre les deux. En effet, il ne semble pas raisonnable de traiter vraiment les deux au collège. La question posée est donc d'ordre didactique. Le chapitre 3 donne déjà quelques arguments didactiques concernant le regard qu'il est nécessaire de porter sur les figures dans une démonstration, en particulier comment interviennent les points et les lignes qui permettent de définir une figure. Pour aller plus loin, nous avons choisi d'analyser à fond deux exercices afin de décider pour chacun quelle approche permet le mieux de le traiter au niveau souhaité. Nous reprenons d'abord l'exemple du parallélogramme déjà discuté dans le chapitre 3 avant d'analyser en détail un autre exercice. Beaucoup d'autres exemples pourraient faire l'affaire, on en trouvera plusieurs dans la banque d'exercices (chapitre 10). Mais il est bien sûr des cas où les transformations sont plus

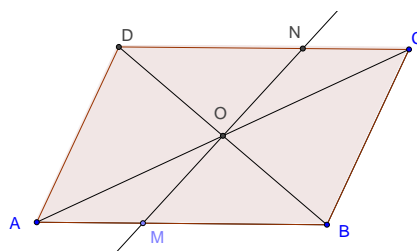
³⁶ Soyons clairs : cette remarque est une réponse à tous ceux qui font remarquer que dans la progression ancienne les cas d'égalité ne sont pas vraiment démontrés. Cela étant, le travail d'Annie Cousin-Fauconnet montre comment on pourrait prouver ces propriétés, en admettant seulement celles de la symétrie axiale.

pertinentes que les cas d'égalité. On en donnera un exemple ici pour finir et d'autres seront proposés dans la banque d'exercices.

1. Exemple 1 : le parallélogramme

Nous commençons par reprendre un exemple déjà analysé au chapitre 3. C'est un exercice très simple, sans réelle difficulté mathématique, mais où une première différence entre l'approche par les cas d'isométrie et par les transformations va apparaître clairement. Avec la progression que nous proposons, il s'agit d'un exercice de niveau cinquième³⁷.

Soit ABCD un parallélogramme de centre O, M un point de]AB[. La droite (OM) coupe (CD) en N. Montrer que O est le milieu de [MN].



La preuve par les cas d'égalité

Le principe de l'utilisation des cas d'égalité pour prouver une propriété, ici $OM = ON$, peut être résumé en un mot clé : **incorporer**. Cela signifie qu'on repère sur la figure deux triangles qui contiennent les éléments en question et qui, visuellement, semblent « pareils », puis qu'on montre qu'ils sont isométriques en utilisant l'un des cas d'égalité, ce qui permet de conclure. Ici, il y a deux choix, absolument équivalents, les triangles OMA et ONC ou les triangles OMB et OND. Traitons par exemple le premier. Sur les côtés, la seule chose connue est $OA = OC$ (les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu). On considère donc les angles adjacents à ces côtés. Les angles en O, \widehat{MOA} et \widehat{NOC} sont égaux car opposés par le sommet, ceux en A et C, \widehat{MAO} et \widehat{NCO} le sont comme alternes-internes. Il en résulte que les triangles sont égaux (c'est le deuxième cas, dit ACA, angle-côté-angle), donc les côtés OM et ON qui font face aux angles en A et C, sont égaux.

La preuve par les transformations

Ici, la transformation à utiliser est évidente : il s'agit de la symétrie s de centre O . On sait qu'elle conserve le parallélogramme et, en particulier qu'elle échange A et C (c'est encore la propriété des diagonales). On considère M et N. Par définition de la symétrie, on a gagné si l'on montre que s transforme M en N. Pour voir cela, il faut noter que M est l'intersection des droites (AB) et (OM), donc que $s(M)$ est l'intersection des images de ces droites. L'image $s((AB))$ est une droite parallèle à (AB) (propriété de la symétrie centrale), qui passe par $s(A) = C$, c'est donc la droite (CD). Comme (OM) contient O, son image est elle-même. L'image de M est donc l'intersection de (CD) et de (OM), c'est bien le point N.

Discussion

Dans l'exemple ci-dessus, il n'y a pas de difficulté pour trouver la transformation pertinente. En revanche, comme nous l'avons déjà dit au chapitre 3, une difficulté importante pour des collégiens, est la vision des points comme intersections de droites et l'usage des transformations comme applications, en lien avec les propriétés ensemblistes. Cet exercice avait été proposé par des professeurs stagiaires à des élèves de seconde en 2000, au moment où les cas d'isométrie étaient

³⁷ Cela disqualifie des solutions utilisant Thalès, ou les vecteurs, ou les coordonnées.

réapparus à ce niveau, avec deux démonstrations et en demandant aux élèves laquelle ils préféraient. Le texte de l'exercice donnait toutes les étapes à suivre pour chacune des démonstrations.

Partie A :

- 1- Montrer que $\widehat{MAO} = \widehat{OCN}$ et que $\widehat{AOM} = \widehat{NOC}$.
- 2- Démontrer alors que AOM et OCN sont isométriques.
- 3- Quelles égalités de longueur peut-on déduire ?
- 4- En déduire que O est le milieu de [MN].

Partie B

Soit s la symétrie centrale de centre O.

- 1- a- Déterminer l'image des points A et B par s . Justifier votre réponse.
- 1- b- Déterminer l'image des droites (AB) et (OM) par s . Justifier votre réponse.
- 2- En déduire que N est l'image de M par s .
- 3- Montrer que O est le milieu de [MN].

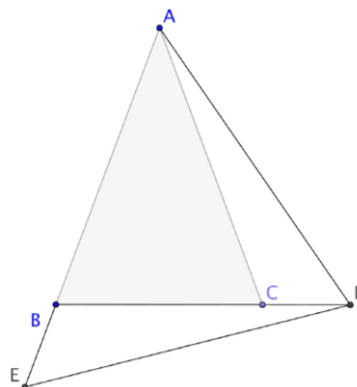
Contrairement aux attentes des stagiaires (pour qui les cas d'égalité n'étaient pas un outil familier et qui pensaient la symétrie centrale plus familière aux élèves puisqu'ils la connaissaient depuis la 5^{ème}), les élèves avaient plutôt préféré la démonstration avec les cas d'égalité. Une des élèves avait avancé une raison pour expliquer ce choix : *avec la symétrie j'ai du mal avec les points.*

2. Exemple 2 : le triangle isocèle

L'exemple que nous étudions maintenant figurait comme exercice dans certains livres de cinquième des années 1950-60. Bien que très simple, il permet de montrer tous les avantages de l'utilisation des cas d'isométrie. En ce sens, il est emblématique de ce que nous voulons faire.

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte un point D sur la demi-droite [BC) et un point E sur la demi-droite [AB) de telle sorte qu'on ait $BE = CD = AB - BC$.

Que peut-on dire du triangle ADE ?



Si l'exercice est posé ainsi, de manière ouverte et sans figure, le premier travail est de faire une figure (en faisant attention aux indications de sens). Ensuite, comme on demande une propriété du triangle ADE, on peut penser à isocèle (voire équilatéral). Pour élucider ce point, on peut mesurer les longueurs (si l'on est sur papier) ou les faire afficher (si l'on est sur l'ordinateur). On constate l'égalité $DA = DE$ (mais pas $DA = AE$), de sorte que le triangle ADE est isocèle en D.

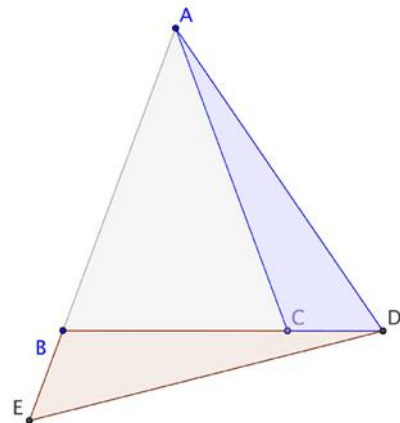
Il s'agit maintenant de **prouver**³⁸ cette assertion. Il y a au moins deux méthodes : en utilisant les cas d'isométrie et en utilisant les transformations.

La preuve par les cas d'isométrie

Comme il a été dit, le principe est d'**incorporer**, c'est-à-dire de voir les segments qui nous intéressent, à savoir [DA] et [DE], comme côtés de deux triangles qui vont être isométriques.

³⁸ C'est un point important : nous ne renonçons pas à l'idée que la géométrie permet un premier contact avec le raisonnement déductif et la démonstration. La question est de savoir quelle approche est la meilleure en ce sens.

L'observation de la figure montre facilement les deux triangles pertinents qui sont ACD et BDE . Si on les colorie comme sur la figure ci-contre, on voit les deux triangles comme des surfaces et on imagine bien qu'on va pouvoir transporter l'un sur l'autre. On le voit encore mieux si l'on fait la figure sur papier et qu'on découpe les triangles ou si l'on utilise un papier calque³⁹.



Pour le prouver, une précaution importante est d'écrire les noms des triangles l'un sous l'autre en faisant se correspondre les sommets homologues. Ici c'est facile car il y a des sommets bien repérables : ceux où l'angle est obtus, c'est-à-dire C pour CDA et B pour BED. Ensuite on fait se correspondre les petits côtés qui partent de ces sommets, donc $[CD]$ et $[BE]$ (et donc les sommets D et E) et enfin les sommets restants A et D. On écrit ainsi les triangles dans l'ordre CDA et BED.

Pour montrer que ces triangles sont isométriques il faut exhiber trois éléments égaux (deux côtés et un angle, deux angles et un côté ou trois côtés). Les hypothèses donnent $CD = BE$ (c'est écrit), puis $BD = BC + CD = AB$ (car $CD = AB - BC$), mais AB c'est aussi AC car ABC est isocèle, d'où $BD = CA$. Il ne reste plus qu'à prouver l'égalité des angles obtus en C et B (on n'oublie pas que le premier cas d'isométrie demande⁴⁰ que l'angle soit celui qui est compris entre les côtés). Mais, l'un et l'autre sont supplémentaires des angles en C et B du triangle isocèle ABC . Ils sont donc égaux. Le premier cas d'isométrie assure que les triangles CDA et BED sont isométriques, donc tous leurs éléments sont égaux, en particulier les côtés non utilisés $DA = DE$ et on a gagné.

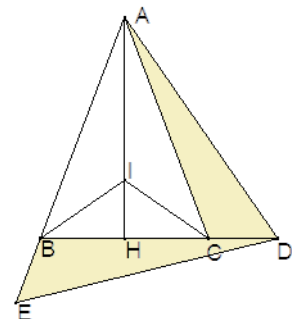
Trois preuves par les transformations

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème par les transformations. Partant du principe : « *qu'est-ce qu'on cherche ?* », il suffit de trouver une isométrie qui transforme $[AD]$ en $[DE]$, voire ACD en DBE . Mais cette transformation n'est pas évidente. Si l'on pense en termes de triangles, en imaginant qu'on les découpe⁴¹, on voit qu'on passe de ACD à DBE sans retourner le triangle, donc par un déplacement. Comme ce n'est visiblement pas une translation, c'est une rotation. Mais trouver son centre et son angle n'est pas évident comme nous allons le voir.

La recherche d'une rotation qui envoie ACD sur DBE

Phase heuristique

S'il existe une rotation transformant le triangle ACD en le triangle DBE , son centre est nécessairement situé sur la médiatrice de $[CB]$ et sur celle de $[AD]$. Or, le triangle ABD étant isocèle de sommet B par construction, celle-ci est aussi bissectrice de $(\widehat{BD}, \widehat{BA})$. De même, ABC étant isocèle de sommet A , la médiatrice de $[BC]$ est aussi bissectrice de \widehat{BAC} . Il en résulte que le centre de rotation, s'il existe, est nécessairement le point I , centre du cercle inscrit dans le triangle ABC .



³⁹ Il n'est pas interdit de penser à ce transport de manière physique, y compris en passant par l'espace.

⁴⁰ En réalité ici, comme on a un angle obtus, cette précaution est inutile, voir Annexe 2.

⁴¹ Si l'on pense triangles, autant utiliser les cas d'égalité ...

Calculs préliminaires

a) On a $(\widehat{CB}, \widehat{CI}) + (\widehat{BI}, \widehat{BC}) + (\widehat{IC}, \widehat{IB}) = \pi$, et, comme BIC est isocèle, $(\widehat{CB}, \widehat{CI}) = (\widehat{BI}, \widehat{BC})$ d'où $(\widehat{IC}, \widehat{IB}) = \pi - 2(\widehat{BI}, \widehat{BC}) = \pi - (\widehat{BA}, \widehat{BC})$.

Ou encore $(\widehat{IC}, \widehat{IB}) = (\widehat{BD}, \widehat{BE})$ (1).

b) On a $(\widehat{CD}, \widehat{CA}) = (\widehat{BE}, \widehat{BD})$ (2) (angles ayant des suppléments égaux)

Démonstration

Considérons la rotation de centre I et d'angle $(\widehat{IC}, \widehat{IB})$.

a) Cette rotation transforme $[IC]$ en $[IB]$ et, puisque $IB = IC$, elle transforme C en B .

b) Elle transforme $[CD]$ en la demi-droite $[BX]$ telle que $(\widehat{CD}, \widehat{BX}) = (\widehat{IC}, \widehat{IB}) = (\widehat{BD}, \widehat{BE})$ (1),

Comme \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{BD} sont colinéaires et de même sens, il en va de même de \overrightarrow{BX} et \overrightarrow{BE} . Donc $[BX] = [BE]$. Et comme de plus $BE = CD$, le point D a pour image le point E .

c) La rotation transforme $[CA]$ en la demi-droite $[BY]$ telle que $(\widehat{CD}, \widehat{CA}) = (\widehat{BE}, \widehat{BY})$. Mais comme $(\widehat{CD}, \widehat{CA}) = (\widehat{BE}, \widehat{BD})$ (2), on en déduit $(\widehat{BE}, \widehat{BY}) = (\widehat{BE}, \widehat{BD})$, d'où $[BY] = [BD]$. La demi-droite $[CA]$ est donc transformée en $[BD]$. Et comme de plus $CA = BD$, l'image du point A est le point D .

Ainsi on a, dans cette rotation : $C \rightarrow B, D \rightarrow E, A \rightarrow D$. Le triangle CDA est donc transformé en le triangle BED . Il en résulte $DA = DE$: le triangle DAE est isocèle de sommet D .

Commentaires

Remarquons d'abord que l'heuristique qui permet de trouver le centre et l'angle de la rotation utilise les deux triangles CDA et BED , ceux-là même dont on montre l'égalité dans la première version, et que tous les ingrédients de la preuve par les cas d'égalité ($BE = CD, CA = BD, \widehat{DCA} = \widehat{EBD}$ apparaissent aussi dans cette preuve).

Par ailleurs, cette preuve est hors de portée des élèves de collège. Déjà la bissectrice n'est plus dans les programmes, ce qui est un problème mineur. Il y a une difficulté bien plus grande : celles des angles orientés. En effet, pour montrer que la rotation transforme bien les point A en D, C en B, D en E , il est nécessaire de prouver qu'elle transforme bien les demi-droites et pour cela d'utiliser des égalités d'angles orientés, ce qui demande beaucoup de soin (par exemple pour énoncer précisément la somme des angles du triangle ou la propriété des angles à la base du triangle isocèle) et est tout à fait hors des programmes actuels. Cherchons donc des preuves à la portée des élèves de collège.

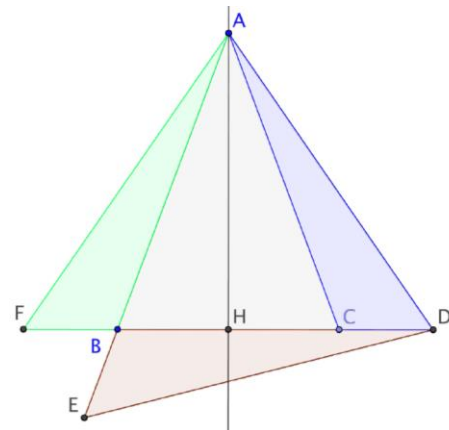
La preuve par les symétries

On change notre fusil d'épaule en partant cette fois de « *qu'est-ce qu'on sait ?* ». On sait que ABC est isocèle en A et, en termes de transformations, cela signifie qu'il est invariant par la symétrie⁴² s_1 d'axe la médiane-médiatrice-hauteur (AH) issue de A . Certes, mais si l'on part par exemple⁴³ de $[AD]$, il s'envoie sur un segment qui n'est pas encore tracé sur la figure. Qu'à cela ne tienne, traçons le point F symétrique de D par rapport à (AH) . Le segment $[AD]$ est devenu $[AF]$ qu'il faut comparer à $[ED]$.

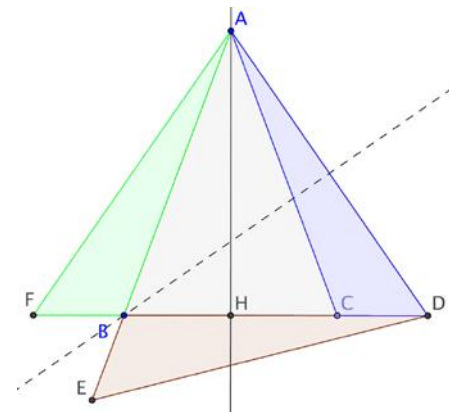
⁴² Si l'on est savant, on sait qu'une rotation est composée de deux symétries axiales et cela peut conduire à chercher une symétrie naturelle. Mais ce résultat n'est plus nulle part au collège ni au lycée.

⁴³ Le lecteur vérifiera que l'idée de partir de $[ED]$ est vraiment plus tordue.

Une nouvelle idée est d'utiliser une autre symétrie axiale et comme on veut envoyer F en E, on peut prendre la symétrie par rapport à la médiatrice⁴⁴ de [FE]. C'est bien, mais il faut aussi envoyer A en D et pour cela il faudrait plutôt prendre la symétrie par rapport à la médiatrice de [AD]. Certes, on voit bien sur la figure que ces deux médiatrices ont l'air confondues, mais pourquoi ? Il y a ici une triple difficulté pour des élèves de collège. La première c'est qu'ils risquent de sauter à pieds joints par-dessus le problème en pensant que ces deux médiatrices sont évidemment les mêmes. Il faudra déjà les convaincre qu'il y a quelque chose à prouver, ce qui n'est jamais facile.



La deuxième raison tient à la preuve elle-même qui nécessite d'utiliser les propriétés de deux triangles isocèles. On note d'abord que FBE est isocèle (car $FB = CD$ par symétrie et $CD = BE$ par hypothèse). La médiatrice de [FE] est donc aussi la bissectrice de l'angle (FBE). Ensuite, ABD est isocèle car $AB = BD = BC + CD$. Là encore, la médiatrice est égale à la bissectrice, cette fois de (ABD), mais comme ces angles sont opposés par le sommet, les bissectrices sont les mêmes.



Mais voilà la troisième raison qui rend ce raisonnement difficile : c'est le mot bissectrice qui n'est plus nulle part dans les programmes.

En fait, si l'on voulait rédiger cette preuve, il serait plus simple de partir directement de la bissectrice de l'angle en B du triangle ABC et de la symétrie s_2 par rapport à cette droite. Cette symétrie échange les droites (BA) et (BD) et précisément les demi-droites [BA) et [BD) et aussi les demi-droites opposées [BF) et [BE). Il en résulte qu'on a $s_2(F) = E$ (à cause de $BF = BE$) et $s_2(A) = D$ (à cause de $BA = BD$). En définitive, on a $AF = DE$ et comme $AF = AD$ on a gagné.

Remarque : La transformation qui fait passer de ACD à DBE est maintenant évidente : c'est la composée⁴⁵ $s_2 \circ s_1$, une rotation dont le centre est à l'intersection des deux axes de symétrie. Comme ces axes sont deux bissectrices de ABC, cette intersection est le centre du cercle inscrit dans ABC.

La preuve par composition d'une translation et d'une rotation

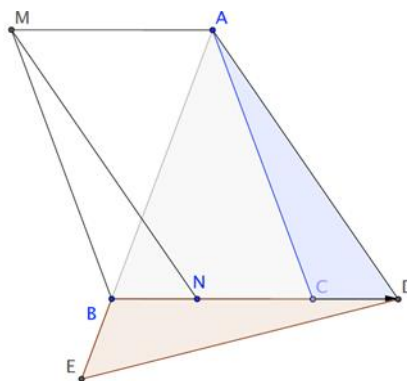
Cette preuve nous a été suggérée par Michel Arnould, professeur de lycée à la retraite. Voici ce qu'il dit (nous ajoutons la figure) :

Je ne suis pas très convaincu par l'analyse du premier exercice ; le choix fait pour la démonstration par les isométries ne me paraît pas très judicieux. En effet, puisqu'il paraît évident que la transformation à trouver est un déplacement, est-ce vraiment le plus simple et le plus intuitif (naturel) de l'obtenir en composant des antidéplacements, d'autre part, même si on se doute qu'il doit s'agir d'une rotation, rien n'empêche de l'obtenir comme composée d'une rotation et d'une translation même si cette décomposition n'est pas « la forme canonique », dans la mesure où cette construction de l'isométrie cherchée est plus intuitive :

⁴⁴ Le cheminement est repris ici tel qu'il est apparu dans le groupe IREM.

⁴⁵ Bien entendu, ce mot est proscrit au collège et même au lycée.

Je définis le point M tel que ACBM soit un parallélogramme et le point N de la droite (BC) image de B par la translation de vecteur CD ; la rotation de centre B et d'angle (BE, BC) transforme le triangle BDE en le triangle BMN tandis que la translation de vecteur BC transforme ce dernier triangle en le triangle CAD. Est-ce vraiment plus compliqué que l'utilisation des cas d'isométrie ?



Bien sûr, pour démontrer la première affirmation, on a besoin de constater que l'angle (CD, CA) est égal à l'angle (BE, BC) comme dans la démonstration à l'aide des cas d'isométrie si bien que les deux méthodes ne sont pas si éloignées mais laquelle est la plus intuitive et la plus visuelle ?

Analyse de cette preuve

Nos commentaires apparaissent en italiques.

1) Cette preuve nécessite deux constructions supplémentaires : celle du point M complétant le parallélogramme ACBM et celle du point N image de B par la translation de vecteur CD.

Même si ces constructions sont « naturelles », il semble difficile, comme dans la preuve utilisant les symétries, d'en laisser la charge aux élèves.

2) Elle nécessite de connaître deux types de transformations : la translation t de vecteur CD (donc les vecteurs ?) et la rotation r de centre B et d'angle⁴⁶ (orienté ?) (BE, BC) .

Même aux plus beaux temps de l'utilisation des transformations au collège, ces transformations n'étaient introduites qu'en quatrième, voire en troisième, alors que la preuve avec les cas d'isométrie a naturellement sa place en cinquième, dès que ces résultats ont été vus.

3) Discutons maintenant de la démonstration des propriétés annoncées, si on la fait vraiment (telle qu'elle est proposée, il y a beaucoup de zones d'ombre).

Il est un peu plus simple de traiter le deuxième point d'abord : la translation $s := t_{BC}$ transforme BNM en CDA. C'est clair qu'elle envoie B sur C par définition, elle envoie M sur A à cause de l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MA}$ dans le parallélogramme et elle envoie N sur D car on a $s(B) = C$, $t(C) = D$ et $t(B) = N$, donc $s(N) = st(B) = ts(B) = D$. (Ce dernier point aurait pu être évité en définissant N comme image de D par la translation de vecteur CB).

On notera tout de même qu'on utilise ici nombre de propriétés de la translation et des vecteurs, le lien avec le parallélogramme, la composition, la commutativité, etc.

Il s'agit ensuite de montrer que r transforme BDE en BMN (tiens, tiens : on a besoin de triangles ?). Il est clair qu'on a $r(B) = B$, mais pour les autres, rien n'est évident. Pour voir que E s'envoie sur N, ce qui est clair c'est que la demi-droite $[BE)$ va sur $[BN)$. Pour dire que E va sur N, il suffit de noter qu'on a $BE=BN$, ou encore, par la translation, que $BE = CD$. *On notera que c'est l'un des ingrédients de la preuve avec les triangles isométriques et qu'on en a aussi besoin ici.* Pour voir que D s'envoie sur M maintenant, il faut d'abord montrer l'égalité d'angles de vecteurs $(BE, BD) = (BN, BM)$ Cela résulte des remarques suivantes : on a $(BN, BM) = (CD, CA)$ car la translation s conserve les angles orientés *Encore faut-il savoir cela.* Il suffit donc de montrer l'égalité $(BE, BD) = (CD, CA)$. Bien entendu, ce sont des angles supplémentaires des angles à la base du triangle, mais ici, pour conclure avec une rotation, les angles non orientés ne suffisent plus. *C'est l'un des avantages techniques importants de la preuve avec les cas d'égalité : point n'est besoin d'angles orientés.*

⁴⁶ La notation de l'angle devrait d'ailleurs être précisée : ici il s'agit d'un angle orienté de vecteurs.

On peut continuer la preuve ainsi : on a $(BC, BA) = -(CB, CA) = (CA, CB)$ (c'est la propriété des angles orientés du triangle isocèle). *On notera ici qu'il faut avoir compris qu'il y a des transformations directes et indirectes pour avoir les deux changements de signes.* Ensuite, on a $(BE, BD) + (BD, BA) = (BE, BA) = \pi$ par Chasles et, de même, $(CD, CA) + (CA, CB) = (CD, CB) = \pi$ et on a fini (pourvu qu'on observe qu'on a $(BC, BA) = (BD, BA)$, évidemment).

On a presque fini, on voit que r envoie bien la demi-droite $[BD)$ sur $[BM)$, et il reste à voir qu'on a $r(D) = M$, et pour cela $BM = BD$. On a $BM = CA$ par le parallélogramme et $BD = CA$: ce dernier point a été vu lors de la preuve par les cas d'isométrie ! *On voit que, dans cette preuve par les transformations, on doit montrer les trois propriétés utilisées dans la preuve avec les cas d'isométrie, à côté de beaucoup d'autres choses.*

4) Où en est-on ? On a vu que la composée⁴⁷ $to r$ envoie le triangle BDE sur le triangle CDA, on a donc $DE = DA$ comme annoncé car ces transformations sont des isométries.

Discussion

Si l'on compare les quatre démonstrations qui précèdent en pensant à leur utilisation au collège, nul doute que celle par les cas d'isométrie apparaît comme bien plus simple et plus intuitive.

- Elle est plus visuelle : les triangles, vus comme des surfaces sont bien plus apparents que les droites et les points.

- Les preuves par composées de transformations nécessitent toutes deux une construction supplémentaire (le point F dans le premier cas, les points M et N dans le second), ce qui rend presque impossible qu'un élève les invente tout seul.

- Quelle que soit la variante utilisée, les preuves par les transformations sont bien plus difficiles à rédiger. Comme dans l'exemple 1 il y a la difficulté de voir les points comme intersections de droites et de décrire les images de ces intersections par les transformations. Mais ici, il y a bien d'autres difficultés : qu'on pense à la coïncidence des deux médiatrices, à l'irruption de la bissectrice, aux problèmes de position avec les demi-droites, aux propriétés des vecteurs et des angles orientés... En revanche, avec les cas d'isométrie, la rédaction est facile : la seule précaution est de bien préciser les sommets homologues. En fait, dans la preuve qu'il suggère, M. Arnould admet pratiquement toutes les propriétés des transformations r , s , t . Si l'on se permet cela, que répondre à un élève qui se contentera de mesurer les segments pour dire qu'ils sont égaux, ou pire encore, de demander confirmation à GeoGebra ?

- Si l'on pense que l'on peut introduire les cas d'égalité en cinquième, la première preuve peut être produite à ce niveau. En revanche les autres (surtout celles qui utilisent les rotations) nécessitent plus de matériel et ne peuvent être abordées que plus tard.

- Enfin il y a un dernier argument, très important, et qui va nous faire toucher le cœur du problème. D'une certaine manière, les preuves par les transformations manifestent une répugnance à utiliser les cas d'égalité. Pourtant, si l'on pense que ces propriétés sont bien des théorèmes, pourquoi ne pas les utiliser, plutôt que d'en redonner, à chaque fois, des (pseudo)-démonstrations, qui d'ailleurs reviennent au mieux à reprendre les mêmes arguments que les cas d'égalité (c'est particulièrement éclatant dans la preuve qui combine translation et rotation) ? Utiliser un théorème ne fait-il pas partie des tâches habituelles en mathématiques ? Nous pensons que cette attitude, qui remonte à la réforme des mathématiques modernes, témoigne de la suspicion qui pesait à l'époque sur les cas d'égalité,

⁴⁷ Rappelons que cette notion n'existe plus dans les programmes, mais on n'est pas obligé de prononcer ce mot.

dont la preuve ne semblait pas suffisamment rigoureuse à certains. Nous revenons dans l'annexe 1 sur cette question de la justification des cas d'égalité.

Attention toutefois à une difficulté, un proverbe russe dit : *le chemin le plus court est celui que tu connais*. Cela signifie qu'il ne faut pas sous-estimer le déficit de la formation des maîtres sur le sujet des cas d'isométrie et de similitude qui ne sont pas familiers à la plupart d'entre eux. Mais c'est l'un des objectifs de cette brochure d'y remédier...

Remarque : Lors de la première séance du stage 2018-2019 une autre preuve nous a été proposée par un stagiaire, Bertrand Rivière. Elle consiste à utiliser la composée de deux rotations, la première de centre A qui envoie C sur B , la seconde de centre B qui envoie A sur D . On montre que la composée envoie D sur E , ce qui donne $AD=DE$. C'est effectivement une méthode valable, mais techniquement, cette preuve n'est pas plus simple que celles vues ci-dessus et les critiques émises valent aussi pour elle.

Une minute de polémique

On sait que les promoteurs de la réforme des mathématiques modernes avaient pris pour cible les cas d'égalité des triangles. Souvenons-nous, par exemple, de ce que disait Dieudonné à ce sujet, voir I.2 ci-dessus.

Pourtant, il y a en leur faveur de solides arguments, mathématiques et surtout didactiques, comme l'exemple précédent l'a montré, voir aussi les exemples de (Duperret, Perrin, Richeton, 2001). À la lumière de ces exemples, on pourrait reprendre la citation de Dieudonné, en la renversant :

[...] tout s'obtient de la façon la plus directe en utilisant les « cas d'égalité » ou « cas de similitude » des triangles, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions, afin de se ramener vaillamment à la transformation pertinente [...]

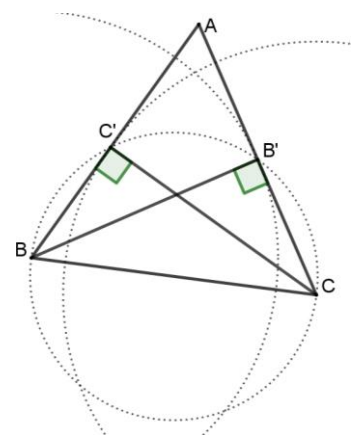
3. Exemple 3 : les hauteurs égales

Dans un triangle ABC , les hauteurs BB' et CC' sont égales. Montrer que le triangle est isocèle.

Il y a plusieurs preuves très simples via les aires ou les cas d'égalité (voir Ch. 10 exercice 1.6). Il y a bien entendu aussi une preuve par les transformations.

Contrairement à l'exemple précédent, la transformation pertinente est ici évidente : il s'agit de la symétrie s par rapport à la médiatrice de $[BC]$. Mais attention, il est difficile de prouver qu'elle fait ce qu'on voit. En effet, et c'est une très grande difficulté pour les élèves, on ne sait pas d'avance que cette médiatrice passe par A (il faudrait pour cela utiliser la conclusion).

La méthode consiste à montrer qu'on a $s(B') = C'$, ce qui donnera $s((CB')) = (BC')$ et le point A sera sur l'axe comme intersection de droites symétriques. Pour cela, il faut voir B' comme intersection de deux lignes (c'est une autre difficulté). L'hypothèse de l'angle droit en B' montre qu'il est sur le cercle de diamètre $[BC]$. Comme ce cercle est invariant par s , $s(B)$ est aussi sur ce cercle.



Ensuite, on note que B' est sur le cercle de centre B et de rayon BB' . Son image est donc sur le cercle image, de centre C et de rayon $BB' = CC'$. Le point $s(B)$ est donc à l'intersection de deux cercles, mais, attention, il y a deux tels points, C' comme attendu, mais aussi son symétrique par rapport à (BC) . Pour conclure il faut un argument de position (le demi-plan limité par (BC) qui contient B' est stable par la symétrie par rapport à la médiatrice de $[BC]$, troisième difficulté).

Le problème est analogue pour l'exercice 1.30 du chapitre 10 (le papillon). Le lecteur trouvera au chapitre 10 beaucoup d'autres exercices où l'usage des cas d'isométrie est plus simple que celui des transformations.

4. Des cas où les transformations sont plus efficaces

On renvoie au chapitre 10 pour des exemples de problèmes de constructions où les transformations sont souvent pertinentes. S'agissant de problèmes du type étudié ci-dessus, en voici deux où les transformations, sous réserves de quelques connaissances, sont plutôt plus commodes.

Segments égaux

Les triangles ABC et ADE sont tous deux isocèles en A et ont même angle en A. Montrer qu'on a $BD = CE$.

On notera que l'énoncé n'est pas assez précis : il faut que les angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ soient égaux, sinon l'assertion est fautive, sauf si D est sur (AC). Cette irruption des angles orientés peut indiquer une solution : on considère la rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Elle envoie B sur C à cause de $AB = AC$ et D sur E à cause de l'égalité d'angles et de $AD = AE$ et on en déduit $BD = CE$ par conservation des distances. Cette solution est très simple, mais elle nécessite une bonne connaissance des rotations (et pratiquement celle des angles orientés).

Une autre solution est d'utiliser les triangles égaux ABD et ACE. Dans cette optique, l'assertion de position intervient pour calculer les angles \widehat{BAD} et \widehat{CAE} . Il y a en effet plusieurs cas de figure et si $\alpha = \widehat{BAC}$ est l'angle⁴⁸ commun des triangles, on a $\widehat{BAD} = \alpha + \widehat{CAD}$ ou $\alpha - \widehat{CAD}$ ou encore $\widehat{CAD} - \alpha$ selon les cas. Une manière d'éviter ces difficultés est d'imposer la figure.

Triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral.

1) Soient A', B' et C' les symétriques de B par rapport à C, de C par rapport à A et de A par rapport à B respectivement. Que peut-on dire du triangle A'B'C' ?

2) Les droites (BB') et (CC'), (CC') et (AA'), (AA') et (BB') se coupent respectivement en P, Q, R. Que peut-on dire du triangle PQR ?

Ici, si l'on sait que le triangle équilatéral est invariant par les rotations r, r' de $\pm 120^\circ$ par rapport à son centre, les deux questions sont faciles car on a $r(A')=B'$, etc. Cela étant, il n'est pas très difficile non plus de raisonner avec des triangles égaux.

Fort de toutes ces remarques, nous proposerons donc un principe :

Principe

Il est naturel d'utiliser les transformations quand elles sont évidentes (c'est-à-dire quand on les voit !). Sinon, si l'on ne perçoit pas d'emblée quelle est la transformation pertinente, ou si l'on ne sait pas montrer que son effet est bien celui qu'on pense⁴⁹, il est souvent plus simple d'utiliser les invariants et les cas d'isométrie.

III. Une organisation appuyée sur les cas d'égalité des triangles

La progression que nous proposons, tout en respectant les programmes, vise plusieurs objectifs.

- 1) Montrer l'utilité de la géométrie en proposant des situations concrètes d'application.

⁴⁸ Au sens grandeur

⁴⁹ Et l'on a vu que ce n'est pas toujours évident.

- 2) Développer la vision géométrique des élèves.
- 3) Développer leur capacité de raisonnement et de démonstration.

Pour atteindre ces objectifs, il est nécessaire de disposer des bons outils. De ce point de vue, les principes de la progression proposée sont les suivants :

- On introduit de manière précoce les cas d'égalité des triangles (en cinquième si possible) et on les utilise pour montrer de nombreuses propriétés géométriques.
- On utilise les invariants : longueur, angle et aire en mettant l'accent sur les aires qui sont utilisées pour montrer les théorèmes de Thalès et de Pythagore.

1. Description de la progression proposée par le groupe IREM

Voici la progression proposée par le groupe IREM. Les démonstrations correspondantes se trouvent dans l'annexe 1. D'autres progressions sont possibles et les repères de progressivité récemment parus⁵⁰ sont sensiblement différents de ce que nous proposons. Nous y revenons plus loin.

En sixième

Outre les points habituels (notions de droite, de segment, de point, de parallèle, etc.), on commence à parler (*sans aucune formalisation*) de déplacement (ou de glissement) et de retournement des figures et cela justifie la notion de longueur d'un segment et d'angle⁵¹. On note que longueurs et angles sont invariants par déplacement et retournement. On a les notions d'angles plat, droit (comme moitié du plat), aigu, obtus, complémentaire et supplémentaire.

La notion d'angle droit donne celle de perpendiculaire. La notion de hauteur s'ensuit (et elle est utile pour les calculs d'aires.) On travaille sur la grandeur aire avec les procédures de découpage et recollement. *On utilise une axiomatique implicite de l'aire (additivité, invariance par déplacement, comportement par agrandissement-réduction)*. On explique les formules de l'aire du carré et du rectangle et on montre celle de l'aire du triangle par découpage.

On définit les triangles particuliers (isocèle, rectangle, équilatéral) et les quadrilatères (carré, losange, rectangle, parallélogramme) qui sont explicitement au programme du cycle 3 actuel.

On introduit la symétrie axiale (construction, symétrie d'une droite, d'un segment, d'un point), axe de symétrie, conservation des invariants, médiatrice. Parmi les exercices, on peut rencontrer la bissectrice, les axes de symétrie du carré, du rectangle et du losange.

À ce moment du cours, on ne peut qu'admettre les propriétés de la symétrie (conservation des longueurs et des angles) à partir des manipulations, notamment du pliage. Ces propriétés pourront être revues en cinquième avec les cas d'égalité des triangles.

En cinquième

Le point principal est l'introduction des cas d'égalité des triangles et une première approche de leur utilisation.

On commence par énoncer l'inégalité triangulaire : c'est la formalisation de la propriété du plus court chemin, vue en sixième. Il semble raisonnable de l'admettre. On passe ensuite aux triangles égaux (ou une autre appellation). On les définit comme obtenus par déplacement et retournement et on note que tous leurs éléments (longueurs et angles) sont égaux ce qui fournit une autre définition. On travaille sur les constructions de triangles à partir de leurs éléments, on fait remarquer que trois

⁵⁰ voir : <https://eduscol.education.fr/pid38211/consultation-reperes-et-attendus.html>

⁵¹ Vu comme grandeur.

d'entre eux suffisent (sauf les angles). On énonce les cas d'égalité, justifiés par la méthode de superposition.

On peut introduire l'expression « triangles semblables » (faire remarquer qu'ils ont même forme, mais sans parler de la proportionnalité des longueurs des côtés.) en disant qu'on les étudiera en 3^{ème}.

On revient sur la médiatrice (voire la bissectrice) comme application de ces outils, ainsi que sur les propriétés des triangles isocèles (hauteur-médiane, etc.). On propose quelques exercices d'utilisation des triangles égaux pour prouver des propriétés géométriques. On peut ajouter le concours des médiatrices et le cercle circonscrit.

On introduit les propriétés des angles vis à vis des parallèles : angles alternes-internes (la justification demande le postulat des parallèles). On montre la somme des angles du triangle et les propriétés des parallélogrammes (à l'aide des cas d'égalité).

On peut, si l'on veut, introduire la symétrie centrale (en pensant à l'usage des logiciels) et ses propriétés, justifiées éventuellement avec les cas d'isométrie.

En quatrième

On utilise les cas d'isométrie pour prouver des propriétés géométriques. *Il y a beaucoup d'exercices sur ce thème et ils sont très formateurs.* On montre le théorème de la droite des milieux et sa réciproque (la démonstration peut se faire par les aires ou avec les parallélogrammes, voir chapitre 7).

On montre le théorème de Pythagore et sa réciproque, par exemple en utilisant les aires et un cas d'égalité. On peut proposer une première approche de la translation et de la rotation (en lien avec l'usage de *GeoGebra*). Construction de frises, lien entre parallélisme et translation *Il semble difficile d'aller bien loin du côté des transformations, vu l'absence de définitions ponctuelles et le manque de notions essentielles : vecteurs, orientation, composition, etc.* On énonce le théorème de Thalès et sa réciproque, dans le cas du triangle. On le démontre, par exemple en utilisant les aires. La question se pose d'une première approche de la *trigonométrie dans le triangle*.

En troisième

On étend le théorème de Thalès et sa réciproque, au cas du papillon.

On introduit la notion d'*homothétie* (en lien avec Thalès). On revient sur le comportement des grandeurs par agrandissement-réduction.

On définit les triangles semblables. Grâce à Thalès et aux triangles égaux on peut montrer (ou justifier) le premier cas de similitude (les angles égaux donnent les côtés proportionnels).

On introduit les *rappports trigonométriques* dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente). *On peut maintenant justifier le fait que les rapports ne dépendent que de l'angle et pas du triangle dans lequel on opère en utilisant la similitude.*

Une belle application de la similitude ou de la trigonométrie est de prouver les relations métriques dans le triangle rectangle (Voir chapitre 10, exercice 2.1.) : *si ABC est rectangle en A et si H est le pied de la hauteur issue de A on a $AH^2 = BH \times CH$ et $AB^2 = BH \times BC$, avec application à la construction d'une moyenne géométrique.*

On utilise les cas d'isométrie et de similitude pour faire des démonstrations dans les exercices.

2. Articulation avec le reste de l'enseignement de la géométrie

Dans ce paragraphe, nous abordons la question du lien de notre progression (centrée sur les cas d'égalité et de similitude des triangles) avec le reste de la géométrie : les invariants, les transformations, la trigonométrie et la géométrie dans l'espace.

Les invariants

Nous avons explicité au chapitre 1, paragraphe II.3 nos positions sur l'utilisation des invariants, notamment angles et aires et l'importance d'un certain nombre d'accessoires associés. Nous y renvoyons le lecteur, ainsi qu'aux chapitres 7 et 10.

Les transformations

Nous avons choisi ici l'entrée dans la géométrie par le truchement des cas d'égalité et de similitude plutôt que par les transformations et nous nous en sommes expliqués dans le paragraphe précédent. Cela étant, ce choix n'est en aucune manière une négation de l'importance des transformations, il s'agit seulement du choix du moment où elles sont introduites et de ses conséquences didactiques. Au niveau du collège, nous avons vu dans un certain nombre d'exercices que les cas d'égalité sont souvent mieux adaptés, sauf (peut-être) lorsque les transformations sont évidentes, voir le principe énoncé au paragraphe II.4 du présent chapitre. On se reportera aux exercices du chapitre 10 pour mesurer l'application de ce principe.

Il y a toutefois un domaine où les transformations sont très efficaces, c'est celui des constructions (mais ce thème est malheureusement de moins en moins présent dans l'enseignement). Voir chapitre 10, paragraphe 5 pour des exemples. Un autre type d'exemples est celui des frises et des pavages⁵², mis en avant dans les programmes. Voici un exemple de problème où les transformations font merveille :

Montrer qu'on peut paver le plan par un quadrilatère quelconque (en utilisant des symétries centrales), voir Ch. 10 Exercice 5.5.

Enfin, s'il est un endroit où les transformations devraient avoir toute leur place c'est au lycée. Les objectifs qui nous semblent pertinents pour la fin du lycée sur ce thème des isométries planes (et qui ne sont pas atteints le moins du monde à l'heure actuelle) sont les suivants :

3. Une classification selon le signe et les points fixes.
4. La notion de composition, la décomposition en réflexions, la notion de groupe.
5. Les homothéties et les similitudes (avec les complexes).

Et nous n'évoquerons⁵³ pas, par pudeur, les transformations de l'espace, ni l'inversion.

La trigonométrie

Sur ce sujet, les programmes actuels nous conviennent assez bien en introduisant au collège les lignes trigonométriques dans le triangle rectangle, réservant au lycée l'approche des fonctions trigonométriques périodiques. Nous notons avec plaisir que les repères de progression demandent de montrer que le cosinus d'un angle ne dépend pas du triangle rectangle dans lequel on le calcule, en quatrième grâce au théorème de Thalès. Remarquons cependant que ce résultat nécessite d'être

⁵² On trouvera en annexe 3 un exemple de situation de pavage mettant en œuvre la symétrie centrale, proposé comme un projet long pour des classes de 5^{ème}.

⁵³ On conseille à ceux qui trouveraient ces objectifs trop ambitieux de revoir le livre de Terminale de Deltheil et Caire, dont la première édition date tout de même de... 1939, pour voir que cette position n'est ni nouvelle, ni excessive.

complété en troisième dans le cas où les triangles rectangles ayant un angle aigu commun sont semblables sans être homothétiques.

La géométrie dans l'espace

Ce n'est pas notre sujet ici, mais c'est un point important, notamment pour la formation de tous les citoyens. Rappelons ce que dit à ce sujet le rapport de la commission Kahane (voir (Kahane, 2002)) :

Si l'on interroge des non mathématiciens, c'est souvent le point que chacun s'accorde à mettre en avant en premier : la géométrie est le lieu où l'on apprend à appréhender l'espace. De fait c'est la géométrie **dans l'espace** qui est le plus souvent citée. Les arguments sont variables selon les professions ...

Il nous semble donc que, parmi les missions sociales qui incombent à l'enseignement des mathématiques, celle de donner à tout citoyen le moyen d'avoir une perception efficace de l'espace qui l'entoure soit l'une des priorités.

Partie 2

Activités pour les classes

Chapitre 5

Le programme et les manuels

Dans ce chapitre, après avoir rappelé la version des programmes remaniée en 2018 et les repères de progression parus ensuite, nous examinons les manuels et ressources toujours en vigueur qui sont parus en 2016, à la sortie de la première version des programmes actuels, rédigés par cycle. La pauvreté de leurs propositions concernant les cas d'isométrie des triangles est d'ailleurs une des motivations du travail du groupe et de l'écriture de la présente brochure.

I. Le programme et les repères de progression

1. Le programme paru en 2018

Le programme paru en 2015 (B.O. spécial n°11 du 26 novembre 2015) est donné par cycles. Des ressources, parues au cours de l'année 2016, l'accompagnent sur le site Eduscol. Il a été revu en 2018 (BO n° 30 du 27/07/2018) et des repères de progression répartissent alors les contenus sur les trois années du cycle.

L'introduction

Dès l'introduction de la partie « Mathématiques », le programme met l'accent sur l'importance du raisonnement et de la démonstration. En voici quelques extraits⁵⁴ :

- La formation au **raisonnement** et l'initiation à la **démonstration** sont des objectifs essentiels du cycle 4.
- L'apprentissage de la démonstration doit se faire de manière progressive, à travers la pratique (individuelle, collective, ou par groupes), mais aussi par l'exemple. C'est pourquoi il est important que le cours de mathématiques ne se limite pas à l'application de recettes et de règles, mais permette de mettre en place quelques démonstrations accessibles aux élèves. De nombreux résultats figurant dans ce programme peuvent être démontrés en classe, selon des modalités variées : certaines démonstrations peuvent être élaborées et mises au point par les élèves eux-mêmes (de manière individuelle ou collective), sous la conduite plus ou moins forte du professeur ; d'autres, inaccessibles à la recherche des élèves, tireront leur profit des explications et des commentaires apportés par le professeur.
- Certaines démonstrations possibles (aussi bien sur les nombres et le calcul qu'en géométrie) sont identifiées dans le programme. Les enseignants ont la liberté de choisir ceux des résultats qu'ils souhaitent démontrer ou faire démontrer, en fonction du niveau et des besoins de leurs élèves. Enfin, il vaut mieux déclarer « admise » une propriété non démontrée dans le cours (qui pourra d'ailleurs l'être ultérieurement), plutôt que de la présenter comme une « règle ». Une propriété admise gagne à être explicitée, commentée, illustrée.
- En complément, dans le cadre du travail personnel soumis aux élèves, beaucoup d'exercices et de problèmes peuvent servir de support à la démonstration. De manière à encourager les élèves dans l'exercice de la démonstration, il est important de ménager une progressivité dans l'apprentissage de la recherche de preuve et de ne pas avoir trop d'exigences concernant le formalisme.

⁵⁴ Les caractères gras sont dans les programmes mais c'est nous qui soulignons.

Cette introduction insiste aussi sur l'importance de l'écrit :

- Une trace de cours claire, explicite et structurée aide l'élève dans l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, de découverte, d'appropriation individuelle ou collective, de présentation commentée, de débats, de mise au point, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les procédures et les stratégies étudiées. Ne se limitant pas à un catalogue de recettes, mais explicitant les objectifs et les liens, elle constitue pour l'élève une véritable référence vers laquelle il pourra se tourner autant que de besoin et tout au long du cycle. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche d'exercices et de problèmes, sous la conduite du professeur ou en autonomie) favorise à la fois la mise en mémoire et le développement de compétences. Le professeur doit avoir le souci de la bonne qualité (mathématique, rédactionnelle) des traces figurant au tableau ou dans les cahiers d'élèves. En particulier, il est essentiel de distinguer le statut des énoncés (définition, propriété – admise ou démontrée –, conjecture, démonstration, théorème) et de respecter les enchaînements logiques.

Et sur la nécessité d'activités diverses qui ont chacune un rôle à jouer dans l'apprentissage :

La diversité des activités concerne aussi bien les contextes (internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines) que les types de tâches proposées : « questions flash » pour favoriser l'acquisition d'automatismes, exercices d'application et d'entraînement pour stabiliser et consolider les connaissances, exercices et problèmes ouverts favorisant la prise d'initiatives, débats et mises au point collectives d'une démonstration, production d'écrits individuels formalisant une démarche ou un raisonnement, etc.

Le programme lui-même

Voici la partie géométrie plane du programme du cycle 4 paru au BO 30 du 26/07/2018.



Bulletin officiel n° 30 du 26-7-2018

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Connaissances

- caractérisation angulaire du parallélisme : angles alternes internes, angles correspondants ;
- triangle :
 - somme des angles d'un triangle (démonstration possible en utilisant les angles correspondants) ;
 - hauteurs et médiatrices ;
 - inégalité triangulaire ;
 - cas d'égalité des triangles ;
 - triangles semblables (une définition et une propriété caractéristique).
- parallélogramme (une définition et une propriété caractéristique) ;
- le théorème de Thalès et sa réciproque (configurations des triangles emboîtés et du papillon) ;
- le théorème de Pythagore et sa réciproque ;
- lignes trigonométriques dans le triangle rectangle : cosinus, sinus, tangente.

Compétences associées

- mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique ;
- faire le lien entre les cas d'égalité des triangles et la construction d'un triangle à partir de la donnée de longueurs des côtés et/ou de mesures d'angles ;
- comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure ;
- mobiliser les connaissances des figures, des configurations et des transformations au programme pour déterminer des grandeurs géométriques ;
- mener des raisonnements et s'initier à la démonstration en utilisant les propriétés des figures, des configurations et des transformations.

Les définitions ponctuelles d'une rotation, d'une translation, d'une homothétie ne figurent pas au programme.

À l'issue d'activités rituelles de construction et de verbalisation des procédures et la résolution de problèmes, effectuées tout au long du cycle, les élèves doivent avoir mémorisé des images mentales (configurations de Pythagore et de Thalès, lignes trigonométriques dans un triangle rectangle) et automatisé les procédures de repérage et de constructions géométriques liées aux figures et aux transformations du programme.

Nous notons l'absence des notions et théorèmes liés au cercle : cercle circonscrit, cercle inscrit, tangente, polygones réguliers, angle inscrit. Il sera difficile de les aborder toutes en exercice, ce qui amène à faire disparaître un pan important de la géométrie, utile dans d'autres disciplines.

L'absence de définition des triangles isométriques explique la disparité des définitions choisies par les manuels. Le programme omet aussi d'attirer l'attention sur l'importance, pour l'usage des cas d'égalité ou de similitude, du repérage des éléments homologues des triangles.

Les documents d'accompagnement parus en 2016 sont toujours à disposition sur Eduscol ; ils explicitent les six compétences identifiées dans les programmes comme caractéristiques de l'activité mathématique et fournissent dans chaque domaine des activités pour les classes que nous ne commenterons pas ici.

2. Les repères de progression parus en 2019 sur le site Eduscol

Le ministère a mis en discussion en octobre 2018 des repères de progression qui sont depuis parus sur Eduscol : <https://eduscol.education.fr/cid152614/attendus-fin-annee-reperes-annuels-progression-la.html>

Nous reproduisons ici la partie concernant la géométrie plane et les transformations en incluant la 6^{ème}, dernière année du cycle 3.

6 ^{ème}	5 ^{ème}
<p>Le vocabulaire et les notations</p> <p>Les élèves utilisent la notation AB pour désigner la longueur d'un segment qu'ils différencient de la notation du segment [AB]. Dès que l'on utilise les objets concernés, les élèves utilisent aussi la notation « angle \widehat{ABC} », ainsi que la notation courante pour les demi-droites. Les élèves apprennent à rédiger un programme de construction en utilisant le vocabulaire et les notations appropriés pour des figures simples au départ puis pour des figures plus complexes au fil des périodes suivantes.</p> <p>Les instruments</p> <p>Les élèves se servent des instruments (règle, équerre, compas) pour reproduire des figures simples, notamment un triangle de dimensions données. Cette utilisation est souvent combinée à des tracés préalables codés à main levée. Ils utilisent le rapporteur pour mesurer et construire des angles. Dès que le cercle a été défini, puis que la propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment est connue, les élèves peuvent enrichir leurs procédures de construction à la règle et au compas.</p> <p>La symétrie axiale</p> <p>Les élèves consolident leurs acquis du CM sur la symétrie axiale et font émerger l'image mentale de la</p>	<p>Figures et configurations</p> <p>La caractérisation angulaire du parallélisme (angles alternes-internes et angles correspondants) est énoncée. La valeur de la somme des angles d'un triangle peut être démontrée et est utilisée. L'inégalité triangulaire est énoncée. Le lien est fait entre l'inégalité triangulaire et la construction d'un triangle à partir de la donnée de trois longueurs. Des constructions de triangles à partir de la mesure d'une longueur et de deux angles ou d'un angle et de deux longueurs sont proposées.</p> <p>Le parallélogramme est défini à partir de l'une de ses propriétés : parallélisme des couples de côtés opposés ou intersection des diagonales. L'autre propriété est démontrée et devient une propriété caractéristique. Il est alors montré que les côtés opposés d'un parallélogramme sont deux à deux de même longueur grâce aux propriétés de la symétrie.</p> <p>Les propriétés relatives aux côtés et aux diagonales d'un parallélogramme sont mises en œuvre pour effectuer des constructions et mener des raisonnements.</p> <p>Les élèves consolident le travail sur les codages de figures : interprétation d'une figure codée ou réalisation d'un codage.</p>

<p>médiatrice d'une part et certaines conservations par symétrie d'autre part.</p> <p>Ils donnent du sens aux procédures utilisées en CM2 pour la construction de symétriques à la règle et à l'équerre. À cette occasion :</p> <ul style="list-style-type: none"> - la médiatrice d'un segment est définie et les élèves apprennent à la construire à la règle et à l'équerre ; - ils étudient les propriétés de conservation de la symétrie axiale. En lien avec les propriétés de la symétrie axiale, ils connaissent la propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment et l'utilisent à la fois pour tracer à la règle non graduée et au compas : - la médiatrice d'un segment donné; - la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée. 	<p>Les élèves découvrent de nouvelles droites remarquables du triangle : les hauteurs. Ils poursuivent le travail engagé au cycle 3 sur la médiatrice dans le cadre de résolution de problèmes. Ils peuvent par exemple être amenés à démontrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.</p> <p>Transformations</p> <p>Les élèves transforment (à la main ou à l'aide d'un logiciel) une figure par symétrie centrale. Cela permet de découvrir les propriétés de la symétrie centrale (conservation de l'alignement, du parallélisme, des longueurs, des angles) qui sont ensuite admises et utilisées. Le lien est fait entre la symétrie centrale et le parallélogramme. Les élèves identifient des symétries axiales ou centrales dans des frises, des pavages, des rosaces.</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

4 ^{ème}	3 ^{ème}
<p>Figures et configurations</p> <p>Les cas d'égalité des triangles sont présentés et utilisés pour résoudre des problèmes. Le lien est fait avec la construction d'un triangle de mesures données (trois longueurs, une longueur et deux angles, deux longueurs et un angle). Le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration des triangles emboîtés sont énoncés et utilisés, ainsi que le théorème de Pythagore (plusieurs démonstrations possibles) et sa réciproque. La définition du cosinus d'un angle d'un triangle rectangle découle, grâce au théorème de Thalès, de l'indépendance du rapport des longueurs le définissant.</p> <p><i>Une progressivité dans l'apprentissage de la recherche de preuve est aménagée, de manière à encourager les élèves dans l'exercice de la démonstration. Aucun formalisme excessif n'est exigé dans la rédaction.</i></p> <p>Transformations</p> <p>Les élèves sont amenés à transformer (à la main ou à l'aide d'un logiciel) une figure par translation. Ils identifient des translations dans des frises ou des pavages ; le lien est alors fait entre translation et parallélogramme.</p> <p><i>La définition ponctuelle d'une translation ne figure pas au programme. Toutefois, par commodité, la translation transformant le point A en le point B $\xrightarrow{\quad}$ pourra être nommée «translation de vecteur \overrightarrow{AB} », mais aucune connaissance n'est attendue sur l'objet « vecteur ».</i></p>	<p>Figures et configurations</p> <p>Une définition et une caractérisation des triangles semblables sont données. Le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration du papillon sont énoncés et utilisés (démonstration possible, utilisant une symétrie centrale pour se ramener à la configuration étudiée en quatrième). Les lignes trigonométriques (cosinus, sinus, tangente) dans le triangle rectangle sont utilisées pour calculer des longueurs ou des angles.</p> <p>Deux triangles semblables peuvent être définis par la proportionnalité des mesures de leurs côtés. Une caractérisation angulaire de cette définition peut être donnée et démontrée à partir d'un cas d'égalité des triangles et d'une caractérisation angulaire du parallélisme.</p> <p>Transformations</p> <p>Les élèves transforment (à la main ou à l'aide d'un logiciel) une figure par rotation et par homothétie (de rapport positif ou négatif). Le lien est fait entre angle et rotation, entre le théorème de Thalès et les homothéties.</p> <p>Les élèves identifient des transformations dans des frises, des pavages, des rosaces.</p> <p><i>Les définitions ponctuelles d'une translation, d'une rotation et d'une homothétie ne figurent pas au programme.</i></p> <p><i>Pour faire le lien entre les transformations et les configurations du programme, il est possible d'identifier (à la main ou à l'aide d'un logiciel de géométrie) l'effet, sur un triangle donné, de l'enchaînement d'une translation, d'une rotation et</i></p>

	<i>d'une homothétie, voire d'une symétrie axiale et réciproquement, pour deux triangles semblables donnés, chercher des transformations transformant l'un en l'autre.</i>
--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Commentaires

La principale différence avec la progression que nous proposons consiste à n'introduire les cas d'isométrie qu'en classe de quatrième⁵⁵ et donc à minimiser le rôle des cas d'égalité intervenant dans de nombreuses démonstrations. Rappelons que ces repères ne sont pas prescriptifs. Cependant, il est probable que beaucoup d'établissements les respecteront. Dans ce cas, nous conseillons de traiter les cas d'égalité en tout début de 4^{ème} pour les avoir le plus vite possible comme outils de démonstration (par exemple dans celle du théorème de Pythagore). Remarquons aussi que nous sommes en désaccord avec la définition proposée pour les triangles semblables (voir chapitre 1 et chapitre 8).

Aussi bien dans les repères de progressivité que dans les documents d'accompagnement, il n'y a quasiment pas de propositions concernant les cas d'isométrie des triangles. Cela est d'autant plus incompréhensible que la plupart des professeurs actuels n'ont pas été confronté à cette notion durant leur scolarité (tant dans le secondaire que dans le supérieur)

II. Les manuels scolaires

Nous avons regardé un certain nombre de manuels du niveau du cycle 4, essentiellement sur le sujet des triangles isométriques et semblables. Rappelons que les programmes sont maintenant rédigés par cycle. La version parue en 2015 et applicable en septembre 2016 donnait quelques repères de progression comme le théorème de Pythagore en 4^{ème}, le théorème de Thalès et les homothéties en 3^{ème}, en lien avec la proportionnalité et les agrandissements et réductions, la symétrie centrale au début du cycle en lien avec le parallélogramme, les translations et rotations en milieu de cycle mais rien concernant l'introduction des triangles isométriques ou semblables, laissant à chaque établissement et à chaque manuel la responsabilité de répartir ces contenus entre les trois niveaux du cycle 4. Pour examiner les manuels, nous avons élaboré une grille d'analyse que nous présentons (nous la formulons ici pour les triangles isométriques, mais elle se décline aussi pour les triangles semblables) avant de donner le résultat de notre analyse.

1. La grille d'analyse

Présence du thème et place dans la progression

- 1.1. Le thème des triangles isométriques et/ou semblables est-il abordé dans le manuel ?
- 1.2. Quelle est la place des triangles isométriques dans la progression proposée ?

Situation d'introduction

- 2.1. Y a-t-il une situation pour introduire les cas d'isométrie des triangles ? Si oui, fait-elle le lien avec les constructions de triangles ?

Vocabulaire et définition sur les triangles isométriques

- 3.1. Quel est le vocabulaire utilisé ? (triangles égaux, triangles superposables, triangles isométriques).

⁵⁵ Notons que le document d'accompagnement « Utiliser des notions de la géométrie plane pour démontrer », paru en 2016 et toujours disponible sur eduscol, propose d'admettre les cas d'égalité dès la 5^{ème}.

3.2. Quelle est la **définition** retenue pour les triangles isométriques ?

3.3. Parle-t-on de sommets homologues ? De côtés homologues ? D'angles homologues ?

Les cas d'isométrie

4.1. Les trois cas d'isométrie des triangles (CCA, CAC et ACA) ont-ils le statut de **théorèmes** ?

4.2. L'un des trois cas d'isométrie des triangles (CCA, CAC et ACA) est-il démontré ?

4.3. Y a-t-il des exercices travaillant l'association des sommets, des côtés et des angles ?

L'utilisation des cas d'isométrie

5.1. Les trois cas d'isométrie des triangles sont-ils des **outils** pour montrer une égalité d'angles et/ou une égalité de longueurs, voire d'autres propriétés ?

5.2. Les trois cas d'isométrie des triangles apparaissent-ils tous dans les exercices ?

5.3. Y a-t-il des exercices ne faisant pas intervenir des valeurs numériques ?

Commentaires sur la grille d'analyse

Dans la grille ci-dessus, deux points nous paraissent essentiels :

- Le fait que la définition des triangles isométriques demande à la fois l'égalité des trois longueurs et des trois angles et que, par suite, les cas d'isométrie apparaissent comme des théorèmes permettant de ne vérifier que trois de ces égalités, convenablement choisis.
- Le fait que les cas d'isométrie soient considérés comme des outils pour montrer des propriétés géométriques.

Nous sommes enclins à penser que les manuels qui ne remplissent pas ces deux conditions n'ont pas compris à quoi servent les cas d'isométrie des triangles⁵⁶ ! Nous verrons ci-dessous que c'est malheureusement le cas de la plupart d'entre eux. En effet, lorsque ces notions sont abordées⁵⁷, les seuls exercices proposés consistent à montrer que deux triangles sont isométriques, sans rien en faire. La critique vaut à un degré moindre pour les triangles semblables, car il y a parfois des exercices où l'on utilise la similitude pour démontrer quelque chose. Il y a toutefois un manuel satisfaisant sur le sujet : le Transmath de 4^e-3^e.

Un point important si l'on veut que les élèves s'emparent de la notion de triangles isométriques est qu'elle arrive assez tôt, cet outil permettant de justifier tous les autres (les propriétés des médiatrices, des symétries, du parallélogramme, etc.). En tous cas, le sujet devrait être abordé au plus tard en début de quatrième.

2. Les manuels

La définition

Nombreux sont les manuels qui donnent la définition des triangles isométriques comme ayant leurs côtés égaux. Nous avons dit dans l'introduction combien cette définition nous semblait peu pertinente.

C'est le cas des manuels Kiwi, Delta, Le livre scolaire, Hatier... En revanche, le manuel Sesamath donne une définition vague, mais convenable : « *Deux triangles sont égaux lorsqu'on peut les superposer par glissement ou par retournement* ». Ils donnent ensuite la propriété : « *Si deux triangles sont égaux alors ils ont leurs trois côtés et leurs trois angles de même mesure* ».

⁵⁶ Même s'ils proposent par ailleurs des exercices de géométrie intéressants.

⁵⁷ Il y a plusieurs manuels qui n'abordent pas les triangles égaux (Phare, Myriade, Maths Monde.)

C'est aussi le cas du manuel Transmath qui dit : « Deux triangles sont superposables lorsqu'on peut les faire coïncider par glissement ou par glissement suivi d'un retournement.

Définition. Des triangles égaux sont des triangles superposables, c'est-à-dire qui ont des côtés deux à deux de même longueur et des angles deux à deux de même mesure ».

Il ajoute ensuite une précision de vocabulaire : Lorsque deux triangles sont égaux, deux angles superposables sont dits angles homologues ainsi que leurs sommets, deux côtés superposables sont dits côtés homologues.

Les trois cas d'égalité des triangles sont présentés ensuite comme trois propriétés (admises).

Les exercices

Comme on l'a dit, les exercices sont en général d'une pauvreté désolante. Voici quelques exceptions :

- Dans Sesamath (manuel cycle 4, édition 2016) on trouve un exercice (ex. 47 p. 260) voisin d'un de ceux que nous avons analysés plus haut :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
Une droite qui passe par O coupe [AB] en M et [DC] en N.
Démontrer que les triangles OMA et ONC sont isométriques.
Que peut-on déduire pour les longueurs AM et NC ?

- Dans le manuel Dimensions 3^{ème} (Hatier 2016), il y a un exercice intéressant (ex. 12 p. 177, avec correction) :

On considère deux carrés accolés : ABCD et BEFG (A, B, E alignés dans cet ordre). On montre que (CE) est perpendiculaire à (AG) en utilisant l'égalité des triangles ABG et BCE.

Mais ensuite, il n'y a plus aucun exercice où l'on utilise ainsi les cas d'égalité comme outils.

- Signalons aussi dans la collection Delta (Belin 2016) le seul exercice intéressant sur le sujet (ex. 49 p. 342) :

Construire deux triangles isocèles semblables mais non égaux avec un angle de 70° et un côté de 4 cm.

Un exemple caricatural de la critique que nous faisons aux manuels est l'exercice suivant de la collection Delta 3^{ème} (n° 40 p.) :

ABC est un triangle rectangle en A et ACDE, BCFG sont deux carrés. Montrer que les triangles ACF et DCB sont égaux.

Tel quel, cet exercice n'a d'autre intérêt que de vérifier que les élèves savent appliquer les cas d'égalité, alors qu'on peut utiliser le résultat pour démontrer d'autres propriétés, comme dans Transmath 4^{ème} (Nathan) (Ex. 67 page 184) :

Prouver que $AF = BD$ et que les droites (AF) et (BD) sont perpendiculaires.

La deuxième question est un excellent exercice sur les angles. On notera aussi sa parenté avec l'exercice « Segments égaux » analysé dans le chapitre 4, paragraphe II.4 (deux côtés consécutifs d'un carré forment un triangle isocèle). La rotation est pertinente à condition de disposer des angles orientés. Ici les angles ont la bonne orientation dès lors que l'on précise (éventuellement en fournissant la figure) que les carrés sont extérieurs au triangle ABC.

- Citons encore un exercice (lelivrescolaire.fr, cycle 4, 2016, ex. 32 p. 297) où, non content de ne rien faire du résultat, les auteurs semblent ne pas connaître la différence entre égalité et similitude :

Le triangle ABC est équilatéral, D est le pied de la hauteur issue de C. Montrer que ADC et CDB sont semblables (sic) !

Sur les triangles semblables

Il y a parfois des exercices intéressants, par exemple : utiliser la caractérisation des triangles semblables pour déterminer des longueurs, écrire les rapports des longueurs.

Le manuel Transmath

Nous regardons d'un peu plus près la collection Transmath qui a une proposition plus riche que les autres sur le thème des triangles isométriques. On notera cependant que le manuel du cycle 4 complet est beaucoup plus pauvre sur le sujet que les manuels des classes séparées (notamment, il n'y a pas d'exercices utilisant les triangles isométriques). En revanche, le manuel de 4e propose un chapitre entier pour le cas d'égalité des triangles : « *Connaître et utiliser les cas d'égalité des triangles* ».

Parmi les exercices, certains utilisent les cas d'égalité des triangles pour déterminer des longueurs, des mesures d'angles, pour montrer que deux droites sont perpendiculaires. Outre l'exercice évoqué plus haut, en voici un autre (Exercice 43 page 179 du Transmath, 4^{ème}, Nathan 2016) que l'on pourra retrouver dans notre banque d'exercices : ch.10, Ex. 1.23 et on y montre aussi $AN = DM$.

ABCD est un carré. M est un point du côté [AB], N est un point du côté [BC] tels que $AM = BN$.
Justifier que les triangles ABN et DAM sont égaux.
Qu'en déduit-on pour les angles BAN et ADM ?
Prouver alors que les droites (AN) et (DM) sont perpendiculaires.

Le manuel de 3^e quant à lui propose un chapitre entier pour les triangles semblables : « *Connaître et utiliser les triangles semblables* ». Voici quelques définitions et propriétés :

Définition. Des triangles semblables sont des triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.

Propriété. Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ces triangles sont semblables.

Propriété. Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles.

Propriété. Si les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

Le lien est fait avec les configurations de Thalès. Parmi les exercices donnés, outre montrer que deux triangles sont semblables et utiliser des triangles semblables pour déterminer des longueurs ou des mesures d'angles, on trouve aussi des applications au calcul d'aire. Citons aussi le suivant (Exercice 59 page 518 du Transmath, manuel de cycle, Nathan 2016) :

ABC est un triangle. D est le point de la demi-droite [BC) tel que $\widehat{BAD} = \widehat{BCA}$
Citer deux triangles semblables. Expliquer la réponse. Démontrer alors que $AB^2 = BC \times BD$.

Quelques remarques supplémentaires

Dans nombre de manuels, la distinction entre les définitions et les résultats n'est pas toujours évidente, le mot « théorème » étant souvent réservé à Pythagore et à Thalès, ainsi que le mot « réciproque ». De surcroît, le plus souvent, les résultats (même les « grands » théorèmes) ne sont pas démontrés mais simplement énoncés⁵⁸.

Les transformations planes n'étant pas au programme en tant que telles, c'est « *appliquer telle transformation* » qui fait l'objet d'une définition. Par exemple : « *Appliquer une homothétie de centre*

⁵⁸ C'est le cas, par exemple, du manuel Maths Monde cycle 4. Didier 2016 avec la seule exception de la somme des angles du triangle, traitée en exercice comme application du parallélisme et de la propriété des angles alternes-internes.

O et de rapport k (k différent de 0) consiste à... » mais ni la notion de points homologues ni le mot ne figurent en général dans les manuels autrement que de manière implicite.

La plupart du temps, toutes les propriétés des transformations (notamment symétries axiales et centrales) sont admises, ainsi que celles des médiatrices, parallélogrammes, etc.

Notons enfin que la notion d'aire n'est jamais utilisée comme outil de démonstration.

Chapitre 6

Les triangles isométriques en classe

Dans ce chapitre nous présentons des chroniques du déroulement de séquences mises en œuvre dans des classes de cinquième et quatrième de membres du groupe IREM autour de l'introduction des cas d'isométrie des triangles et de leur utilisation dans des démonstrations.

Ces séances se sont déroulées au cours des années scolaires 2017-2018 à 2019-2020. Les repères de progression des programmes n'étaient pas parus la première année et il existait des progressions communes dans les collèges concernés, qui n'étaient pas nécessairement celle que nous considérons ici comme optimale (voir chapitre 4). Dans chaque cas, nous précisons les conditions.

P désigne le professeur de la classe, E des élèves, « nous » peut indiquer un travail conjoint du professeur et des élèves ou désigner le groupe de rédaction de la brochure, suivant le contexte.

Des commentaires des choix faits relatifs au déroulement seront faits dans un caractère différent.

Des commentaires ayant une portée plus générale seront rassemblés dans un paragraphe intitulé « Synthèse ».

I. Chronique dans les classes de 5^{ème} de Sébastien

Le travail présenté ici a été réalisé au cours de l'année 2017-2018 dans les deux classes de 5^{ème} de Sébastien Planchenault au collège Mondétour aux Ulis (notées classes S). C'est un collège qui n'est pas classé REP mais présente une forte hétérogénéité avec 4 à 5 élèves en grande difficulté par classe (environ 70% de réussite au brevet soit 10% de moins que la moyenne nationale). La disposition de la salle est en îlots et les élèves travaillent régulièrement en groupes (4 élèves en général) ou en tutorat entre pairs. Les consignes sur le travail en groupes sont les suivantes : on ne parle pas d'autre chose, tout le monde travaille, on travaille en silence ou on chuchote, on fait un croquis, on fait le maximum de choses possibles, on se répartit éventuellement les tâches, chaque membre du groupe peut être interrogé. L'institutionnalisation se fait en utilisant les productions des élèves à l'aide d'un visualiseur. Au début de chaque cours, le professeur pose des questions flash pour entretenir les connaissances des élèves sur les notions étudiées dans des séquences d'enseignement précédentes. Ces questions flash se déroulent sur une période longue afin d'aider à la mémorisation de la notion, la consolider et créer des images mentales pour les élèves. Elles permettent aussi de faire le point sur les prérequis nécessaires à la compréhension d'une nouvelle notion ou encore de vérifier son acquisition.

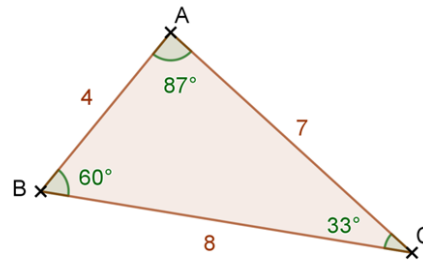
Concernant le thème des triangles isométriques, une première séance d'introduction de la notion de triangles égaux a lieu début octobre. La séquence principale (séances 2 à 6) se déroule en novembre et début décembre. Les questions flash sur le sujet s'étalent sur environ six semaines à partir de janvier.

1. Première séance : introduction de la notion de triangles égaux

La première séquence de géométrie de l'année traite de l'inégalité triangulaire ainsi que de la notion de triangles égaux. L'activité de découverte des triangles égaux choisie est celle du triangle téléphonique, formulée comme suit :

Tu voudrais qu'un ami, à qui tu téléphones, construise sur son cahier un triangle superposable au triangle ABC. Combien de mesures au minimum dois-tu lui donner sur les six dont tu disposes ? Justifie ta réponse.

Il est précisé oralement aux élèves que la figure n'est pas à l'échelle.

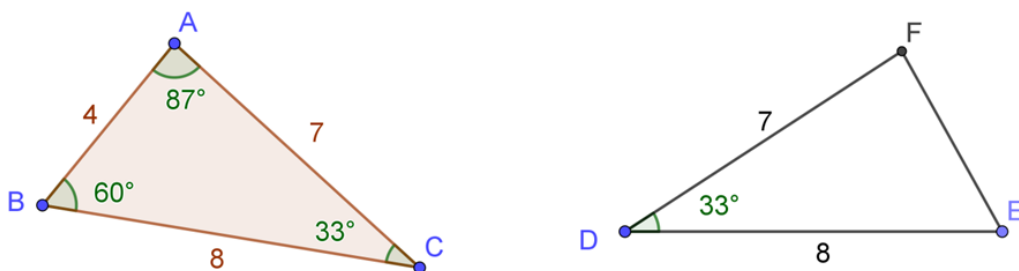


Remarque : les mesures de longueur sont en centimètres et les mesures des angles comme des longueurs sont approchées : il ne peut d'ailleurs guère en être autrement (voir Annexe 2 Th. 17.1).

Déroulement

Le professeur propose d'abord un temps de recherche individuelle afin que chaque élève puisse s'appropriier le sujet et ne pas être influencé par les propositions de ses camarades. Une plénière de régulation permet ensuite de vérifier la compréhension de la consigne par chaque élève. Tous n'ont pas compris. P fait alors reformuler la consigne par plusieurs élèves. L'un d'eux explique l'exercice : on demande de construire le triangle avec le moins possible d'informations.

P propose alors aux élèves en groupes de réaliser cette figure en essayant de la construire avec le moins de mesures possibles. En passant dans les différents groupes, P remarque très vite qu'il y a un consensus pour n'utiliser que trois informations mais aucun élève ne peut dire pourquoi. Cela leur semble naturel. Il ressort des observations faites que la plupart des élèves ont travaillé par élimination : une longueur c'est insuffisant, puis deux également ; avec trois mesures, cela marche mais pas tout le temps. Une mise en commun collective vise à faire partager ces premières constatations. La plupart des élèves confirment que trois mesures sont suffisantes pour construire ce triangle mais pas n'importe lesquelles. P demande alors que chaque groupe construise le triangle et détermine le triplet de mesures nécessaire pour cela. Comme la construction d'un triangle connaissant les trois longueurs des côtés a été réalisée en sixième, l'ensemble des groupes réalise d'abord cette procédure. Cependant P avait remarqué qu'un groupe avait rejeté la procédure de construction du triangle ABC qu'il avait réalisée parce que le triangle n'était superposable qu'après retournement. Il lance donc la discussion avec l'ensemble de la classe : a-t-on ou non le droit de réaliser un retournement pour superposer le triangle et conclure quand même que les triangles sont égaux ? Il construit un tel triangle au tableau à côté du triangle donné.

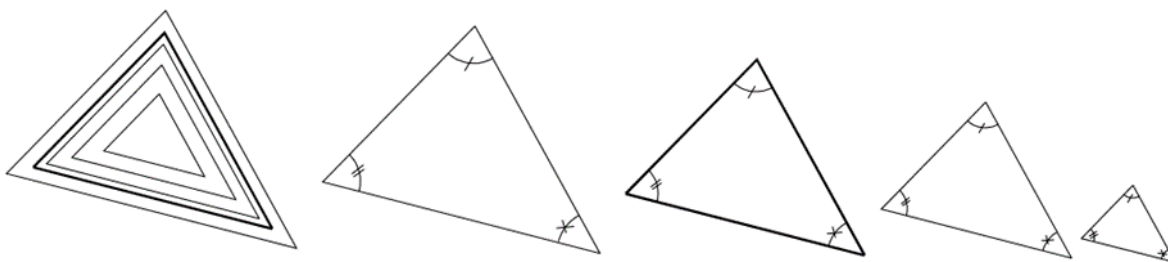


L'ensemble des élèves est d'accord pour dire que les deux triangles sont égaux et que par conséquent la procédure de construction est acceptable.

En résumé, l'ensemble des groupes a travaillé par essais et erreurs et la classe arrive au résultat suivant : Pour que mon ami puisse reproduire ce triangle, trois mesures sont suffisantes mais pas n'importe lesquelles. Les mesures des trois angles ne suffisent pas car il y a une infinité de triangles

qui ont les mêmes angles. La longueur de deux côtés du triangle et la mesure d'un angle non compris entre ces deux côtés ne suffisent pas non plus car on peut obtenir des triangles non superposables.

Des exemples de triangles qui ont les mêmes angles ont été produits :



La conclusion écrite de l'activité (en attendant une reprise dans une séquence ultérieure) a été d'une part que l'on peut construire un triangle connaissant :

- Les longueurs des trois côtés ;
- Les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre ces côtés ;
- La longueur d'un côté et les mesures de deux angles.

De plus, nous avons défini la notion de triangles égaux en écrivant que deux triangles sont égaux lorsqu'ils sont superposables, c'est-à-dire s'ils ont leurs côtés deux à deux de même longueur et les angles deux à deux de même mesure. Nous avons précisé oralement que l'on dit que deux triangles sont superposables si on peut les faire coïncider par glissement avec ou sans retournement.

2. Deuxième séance : énoncé des théorèmes

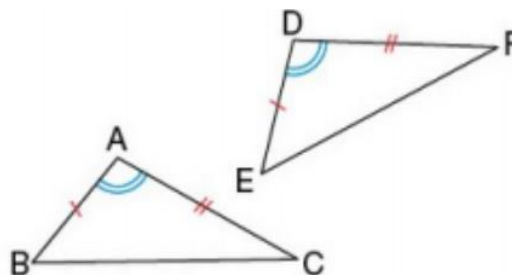
Un mois après environ, une nouvelle séquence de géométrie a porté sur « triangle et construction ». L'objectif était de faire travailler les élèves à partir d'un nouvel outil (les triangles égaux) rencontré précédemment pour effectuer des démonstrations. Une des difficultés du programme de cinquième est justement le premier apprentissage de la rédaction de démonstrations. Les élèves ont déjà eu l'occasion de raisonner en géométrie en sixième et même avant, mais ils n'ont eu jusque-là que très peu d'occasions de rédiger des démonstrations.

La première activité de cette séance a consisté à réactiver la notion de triangles égaux. Pour cela, P propose aux élèves des listes de triangles dessinés à main levée et ceux-ci doivent déterminer lesquels sont superposables et expliquer pourquoi. L'activité a très bien fonctionné et n'a duré que dix minutes. À la fin de la correction, P demande aux élèves de formuler ce qu'il est indispensable de vérifier pour pouvoir affirmer que deux triangles sont superposables. Il rappelle ensuite la définition de triangles égaux avant de faire écrire les trois cas d'égalité dans le cahier de cours.

Théorème 1 (admis): 1er cas d'égalité

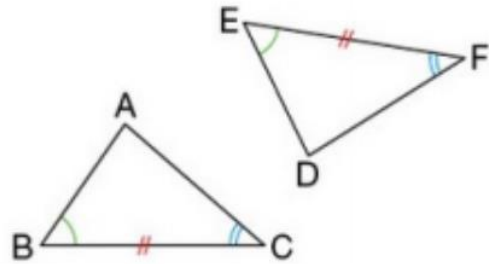
Soient ABC et DEF deux triangles tels que l'on ait :
 $AB = DE$, $AC = DF$ et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$.

Alors les triangles ABC et DEF sont des triangles égaux.



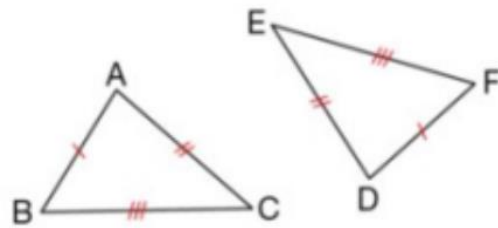
Théorème 2 (admis) : 2^{ème} cas d'égalité

Soient ABC et EFD deux triangles tels que l'on ait :
 $BC = EF$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$.
Alors les triangles ABC et DEF sont égaux.



Théorème 3 (admis) : 3^{ème} cas d'égalité

Soient ABC et EFD deux triangles tels que l'on ait :
 $AB = DF$, $BC = EF$ et $CA = ED$.
Alors les triangles ABC et DEF sont égaux.



Remarque : Dans le cas du théorème 1, les triangles sont nommés dès le début en respectant les points homologues, ce qui n'est pas le cas dans les théorèmes 2 et 3 mais ils le sont dans la conclusion. Dans le cas du théorème 2, il est facile de repérer les points homologues grâce aux sommets des angles. Pour le théorème 3, c'est plus délicat, il faut repérer le sommet commun dans un couple de côtés qui se correspondent. Ici A est commun aux côtés [AB] et [AC]. $AB = DF$ et $AC = ED$ donc A homologue à D, on en déduit B homologue à F et C à E. La reconnaissance des points homologues sera abordée avec les élèves dans la séance suivante.

3. Deux séances d'exercices pour s'appropriier les théorèmes

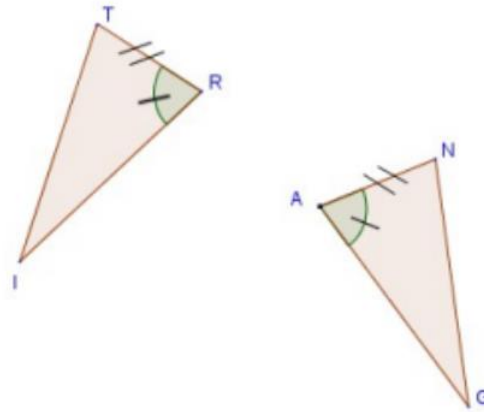
Dans cette première série d'exercices, l'objectif est de faire construire des triangles aux élèves et de leur faire utiliser les cas d'égalité dans des cas très simples. Les élèves rencontrent des difficultés dans la rédaction mais la donnée d'un canevas leur facilite le travail, tel le rappel qu'il est nécessaire d'avoir trois informations dans les hypothèses pour utiliser les cas d'égalité des triangles. L'autre difficulté rencontrée par les élèves est d'associer les côtés et les angles homologues. Quelques exercices supplémentaires du même type que l'exercice 1 ont été proposés à ceux qui rencontraient encore cette difficulté. L'ensemble des élèves a été actif.

Exercice 1

Cet exercice a pour objectif de faire comprendre aux élèves qu'il faut d'abord commencer par analyser la figure en géométrie et que s'il faut travailler avec les triangles égaux alors il est nécessaire d'identifier les côtés et les angles homologues dans les deux triangles.

Les triangles TRI et ANG sont égaux.

- Quel est le côté homologue à $[RI]$?
- Quel est le côté homologue à $[TI]$?
- Quel est l'angle homologue à \widehat{RTI} ?
- Quel est l'angle homologue à \widehat{TRI} ?



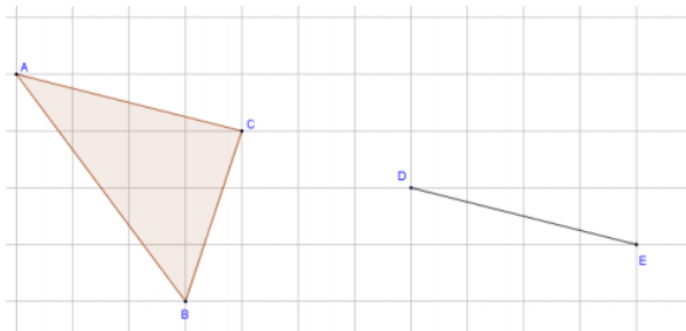
Remarque : Le fait que les triangles soient égaux est une hypothèse. Les indications ne permettent pas de référer à un cas d'égalité mais suffisent pour reconnaître les éléments homologues : d'abord les sommets A et R puis N et T, autres extrémités des côtés égaux, enfin G et I. Une manière commode pour déduire les autres éléments homologues consiste alors à écrire les noms des triangles l'un sous l'autre :

ANG

RTI

Exercice 2

Construire plusieurs triangles superposables à ABC qui ont $[DE]$ pour côté.



L'objectif de cet exercice est de faire comprendre aux élèves qu'il n'y a pas qu'une seule solution mais quatre différentes. On travaille ici sur le sens de triangles égaux et ce que cela signifie. Beaucoup d'élèves n'ont réalisé que deux des quatre possibilités, peut-être en raison des habitudes (le translaté de ABC de vecteur \overrightarrow{AD} et son symétrique par rapport à DE. Les élèves n'ont pas encore vu la symétrie centrale ce qui aurait sûrement eu une influence sur les réponses.

Remarque : Ici $[AC]$ et $[DE]$ ont été choisis parallèles sur fond de quadrillage pour faciliter la reconnaissance de l'égalité des longueurs AC et DE car les élèves ne disposaient que d'une règle non graduée. La présence du quadrillage incite à compter les carreaux. Le parallélisme incite à identifier A et D d'une part, C et E d'autre part. Le même exercice sur fond uni et sans parallélisme entre $[DE]$ et $[AC]$ mais indication de l'égalité des longueurs et, comme instruments, règle non graduée et compas aurait sans doute donné d'autres résultats. Dans une construction au compas, si l'on trace des cercles entiers au lieu de petits arcs, il y a deux points d'intersection. Pour un choix donné d'écartement pour poser la pointe du compas en D ou E, on trouve deux triangles symétriques par rapport à $[DE]$ mais pas quatre. Sans le parallélisme, certains élèves auraient peut-être associé A et D, d'autres A et E ce qui fait que, même si chaque élève n'avait trouvé que deux solutions il y avait alors des chances qu'elles ne soient pas toutes les mêmes.

Exercice 3

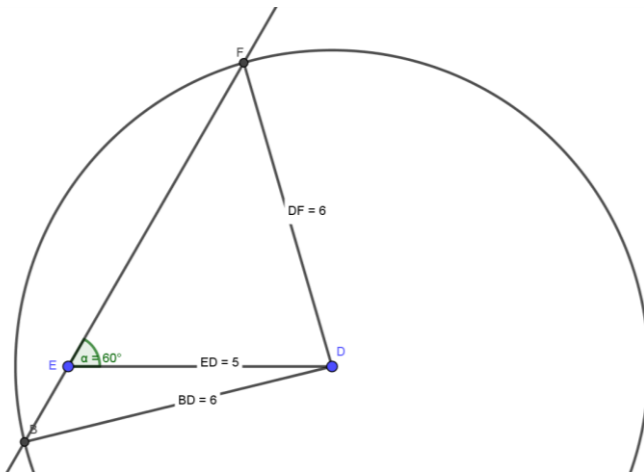
Soient ABC et DEF deux triangles tels que :

$AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$

$DE = 5 \text{ cm}$, $DF = 6 \text{ cm}$ et $\widehat{FED} = 60^\circ$

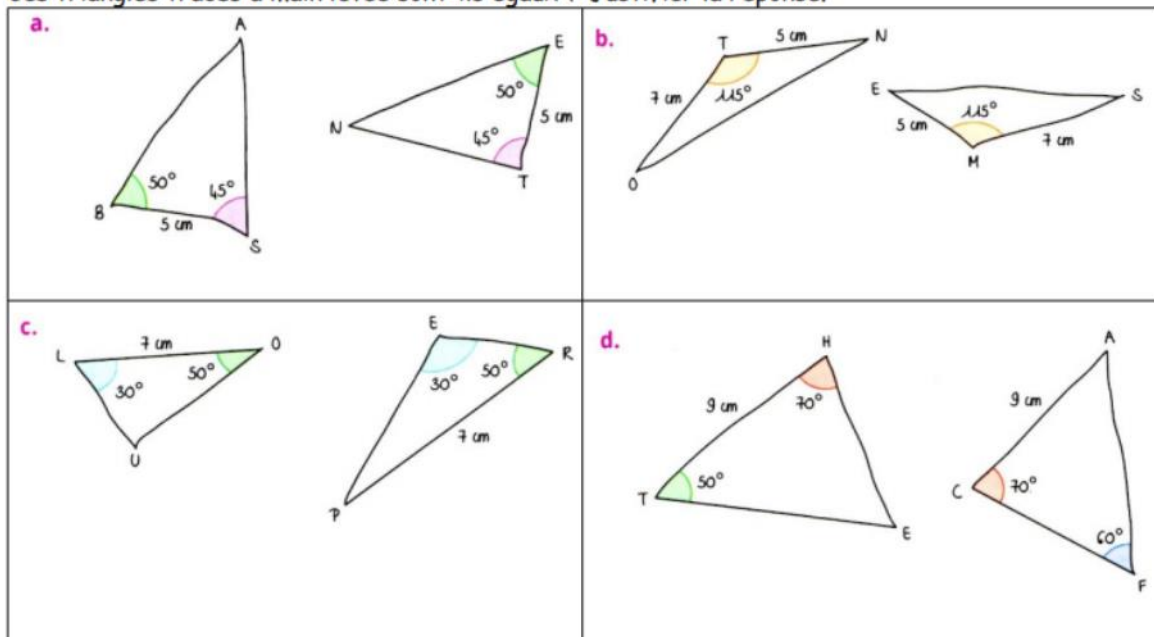
- 1) Faire une figure.
- 2) ABC et DEF sont-ils obligatoirement égaux ?

Remarque : On veut ici que les élèves reconnaissent qu'ils ne peuvent pas appliquer le théorème 1 parce que l'angle égal n'est pas compris entre les côtés égaux. En fait cet objectif ne peut pas être vraiment atteint ici car, si l'on construit les triangles, on s'aperçoit qu'il n'y a aussi qu'une solution pour ABC comme pour DEF puisque le cercle de centre D et de rayon 6 cm coupe la droite (EF) de part et d'autre de E. Le deuxième triangle obtenu a un angle de 120° . Pour avoir un contreexemple, il aurait fallu que BD soit plus petit que 5, mais plus grand que la distance de D à (EF) soit $2,5\sqrt{3}$, faute de quoi le cercle ne couperait pas : par exemple $DF = AC = 4,5 \text{ cm}$. On pourra se reporter à l'annexe 2 pour une étude plus générale des conditions pour avoir un contreexemple.



Exercice 4

Ces triangles tracés à main levée sont-ils égaux ? Justifier la réponse.



Le but est ici simplement de reconnaître les conditions d'utilisation des théorèmes et d'identifier les points homologues.

Exercice 5

- a. Tracer un triangle OLP tel que : $LP = 7$ cm, $\widehat{LOP} = 40^\circ$ et $\widehat{OLP} = 108^\circ$
- b. Tracer un triangle RST tel que : $ST = 7$ cm, $\widehat{SRT} = 40^\circ$ et $\widehat{RST} = 108^\circ$
- c. Les triangles OLP et RST sont-ils égaux ? Justifier votre réponse.

Remarque : On peut conclure à l'égalité sans construire les triangles par reconnaissance des éléments homologues : les segments $[LP]$ et $[ST]$ se correspondent ; l'angle en L est égal à l'angle en S donc les sommets L et S se correspondent donc aussi P et T ainsi que O et R . Les côtés de même longueur ne sont pas entre les angles égaux mais la connaissance de la somme des angles d'un triangle permet de conclure. D'ailleurs, pour construire ces triangles avec règle graduée et rapporteur, il faut s'en servir pour déduire la valeur de l'angle en P , autre extrémité du côté dont on connaît la longueur.

Exercice 6

- a. Tracer un triangle ABC tel que : $AB = 7$ cm, $\widehat{ABC} = 108^\circ$ et $\widehat{BAC} = 40^\circ$.
- b. Tracer un triangle DEF tel que : $EF = 5$ cm, $\widehat{FED} = 40^\circ$ et $\widehat{EFD} = 108^\circ$

Remarque : Les angles sont bien de chaque côté des côtés dont on a la longueur mais ces côtés n'ont pas la même longueur. On peut conclure à la non-égalité des triangles grâce aux éléments homologues car on connaît tous les angles.

4. Les triangles isométriques pour démontrer (2 séances)

Les deux dernières séances ont pour objectif de faire résoudre aux élèves des problèmes de géométrie en utilisant les cas d'égalité des triangles. L'une des difficultés pour les élèves est de faire la différence entre prouver et constater. De nombreux élèves réussissent très rapidement à trouver les triangles égaux et peuvent ainsi répondre à la question mais ils ne justifient pas pourquoi les triangles sont égaux. Cela leur semble une évidence. N'oublions pas que ce sont des élèves de 5^{ème}.

La première de ces séances commence par un rapide rappel des notions étudiées en questionnant les élèves afin de les remettre dans le contexte des séances précédentes et de faciliter la mise en route. Dix minutes de questions flashs permettent de réactualiser les notions vues précédemment qui constituent des prérequis nécessaires à la résolution des problèmes posés. Ensuite, la feuille d'exercices est distribuée à chaque îlot. Les élèves ont l'habitude de travailler en groupes (4 élèves en général). P rappelle les consignes sur le travail en groupes en particulier le fait que chaque membre du groupe peut être interrogé et laisse les élèves travailler pendant environ 30 minutes pour réaliser l'exercice suivant (la médiatrice).

La médiatrice

On rappelle que la médiatrice Δ du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) en le milieu I du segment $[AB]$.

- a) Soit M un point de Δ . Montrer qu'on a $MA = MB$ à l'aide de triangles égaux.
- b) Inversement, soit M un point du plan qui vérifie $MA = MB$. On veut montrer qu'il est situé sur la médiatrice. Pour cela on considère le milieu I de $[AB]$ et la droite (MI) .
1. Que doit-on prouver sur cette droite?
 2. On considère les triangles AIM et BIM . Montrer qu'ils sont égaux.
 3. Conclure.

Ce qui a posé difficulté dans la compréhension de l'énoncé par les élèves a été le mot « médiatrice », la lettre Δ et le fait d'utiliser à la fois les mots « égaux » et « isométriques » dans les reformulations. Il

a fallu expliquer l'ensemble de ces points, ce qui a pris un peu de temps dans la mise en route de l'activité. L'observation du travail des groupes a permis de constater que très peu d'élèves pensaient à faire un schéma ; il a été nécessaire de le leur suggérer. Pour établir $MA = MB$, l'une des élèves a réalisé la figure puis a pris sa règle graduée et mesuré MA et MB . Comme les deux mesures étaient identiques, elle a conclu que $MA = MB$. Il a fallu argumenter pour la convaincre que mesurer n'est pas une preuve en mathématiques et qu'on attend autre chose.

Dans la phase de preuve, même pour un groupe actif et efficace, on rencontre la difficulté de ne pas utiliser les bonnes hypothèses. Beaucoup d'élèves, dans la preuve de la première question, pour montrer que les triangles MAI et MBI sont égaux, utilisent comme hypothèse $AI = BI$, le côté commun MI et $MA = MB$, alors que c'est ce que nous voulons démontrer. Ils ont vraiment rencontré des difficultés pour voir que les angles \widehat{AIM} et \widehat{BIM} étaient égaux. Parmi les choses qui n'ont pas été évidentes, il y avait aussi le fait d'utiliser le côté commun aux deux triangles.

Dans la réciproque, il n'y a pas eu de problème pour montrer l'égalité des triangles MAI et MBI car ici il fallait utiliser le troisième cas d'égalité. Ce qui n'a pas été évident, c'était de déduire que les angles \widehat{AIM} et \widehat{BIM} étaient égaux et mesuraient 90° . Pourtant la question a) permettait de rappeler ce que l'on voulait démontrer, mais les élèves n'arrivaient pas à transcrire ce que cela signifiait vraiment, c'est-à-dire que les angles \widehat{AIM} et \widehat{BIM} étaient des angles droits comme moitiés d'un angle plat. En revanche, l'usage des cas d'égalité en eux-mêmes n'a pas vraiment posé de problème. Ce travail a permis de démontrer la propriété caractéristique de la médiatrice et sa réciproque. P leur a précisé qu'ils connaissaient cette propriété mais l'avaient admise l'an dernier.

Le cerf-volant

La dernière séance est consacrée à la résolution de l'exercice suivant :

Soit $ABCD$ un quadrilatère vérifiant $AB = BC$ et $AD = DC$. On se propose de montrer que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires. On appelle H leur point d'intersection.

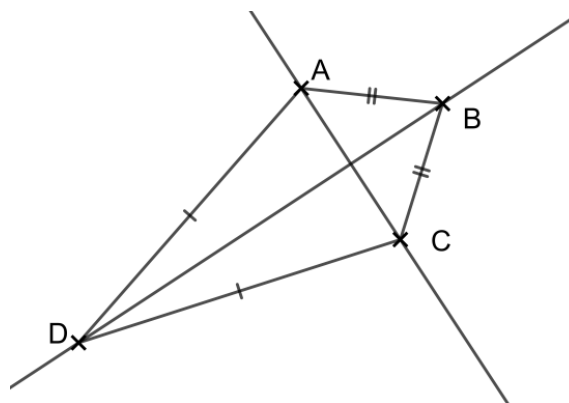
1) Montrer que les triangles BAD et BCD sont égaux.

Comparer les angles \widehat{ADB} et \widehat{CDB} .

2) Montrer que les triangles ADH et CDH sont égaux.

3) Conclure.

La figure est fournie dans le texte.



Pour la question 1), les égalités de côtés $AB = BC$, $AD = DC$ viennent tout de suite, mais les élèves ont encore beaucoup de difficultés pour parler du côté commun. Certains élèves veulent utiliser la conclusion pour la démontrer mais P explique que ce n'est pas possible car c'est l'objectif final. Une élève d'un groupe a spontanément proposé de travailler avec les angles et a fait remarquer qu'il y avait des triangles isocèles. En utilisant cette propriété, elle a démontré que les angles \widehat{DAB} et \widehat{DCB} sont égaux et, en appliquant le premier cas d'égalité, elle a prouvé que les triangles DAB et DBC étaient égaux. Ce n'était pas prévu. Une fois l'égalité des triangles assurée, l'égalité des mesures des angles a été vue aussitôt.

Pour l'égalité des triangles ADH et CDH le professeur rappelle à l'ensemble de la classe qu'il est utile de penser aux questions précédentes. Un grand nombre d'élèves produit la solution avec deux

angles et un côté. Comme dans le cas de la médiatrice, la conclusion avec les angles droits comme moitiés de plats n'a pas été immédiate. Certains élèves, un peu perdus dans la correction, avaient oublié ce que l'on cherchait. Dans une des classes, un élève a trouvé et proposé très clairement la solution.

Voici quelques extraits de copies d'élèves pour cet exercice :

<p>Exercice du Cerf-volant</p> <p>1) \widehat{BAD} et \widehat{BCD} sont égaux car des deux côtés il y a des codages.</p> <p>2) Les angles \widehat{ADB} mesurent 90° et \widehat{CDB} est de 90° donc les angles sont égaux.</p> <p>3) Conclusion: BD est la médiatrice de AC. Les angles \widehat{AC} sont égaux.</p> <p>Exercice des Triangle équilatéraux</p> <p>1) $\widehat{DAC} = \widehat{ADC}$ car peuvent être superposables.</p> <p>2) Le triangle ABE et ACE sont égaux car les figures son superposable.</p> <p>3) $DE = DC$ car ses de la même longueur.</p> <p style="text-align: center;">Copie 1</p>	<p>Exercice du Cerf-volant</p> <p>$DBAD$ et BCD sont égaux car</p> <ul style="list-style-type: none"> - $AB = CB$ - $DA = DC$ - DB est un côté commun <p>Les angles sont égaux car les triangles sont égaux.</p> <p>2) ADH et CDH sont égaux car</p> <ul style="list-style-type: none"> - $AD = CD$ - $\widehat{ADH} = \widehat{CDH}$ <p style="text-align: center;">Copie 2</p>
<p>Les triangles BAD et BCD sont égaux car $DA = DC$ et $AB = BC$ et $DB = DB$ (côté commun)</p> <p>Les angles \widehat{ADB} et \widehat{CDB} sont égaux car les triangles DAB et DCB sont égaux.</p> <p>Les triangles ADH et CDH sont égaux car ils ont le mêmes angles et les même mesure.</p> <p>Conclusion: Les triangles BAD et BCD sont égaux.</p> <p style="text-align: center;">Copie 3</p>	<p>Exercice du Cerf-volant</p> <p>1) On sait que les segment $DA = DC$ et ils ont un côté en commun $AB = BC$ et DB est commun à deux triangle. On d'après le troisième cas d'égalité $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ donc $\widehat{ADB} = \widehat{CDB}$</p> <p>2) On sait que $DA = DC$ et ils ont un côté DB en commun. On d'après le deuxième cas d'égalité. donc les triangles ADH et DHC sont égaux.</p> <p>3) On veut démontrer que les droites (AC) et (DB) sont perpendiculaires.</p> <p>$\widehat{AHC} = 180^\circ$ $\widehat{AHC} = \widehat{AHD} + \widehat{DHC} = 2\widehat{AHD}$</p> <p style="text-align: center;">Copie 4</p>

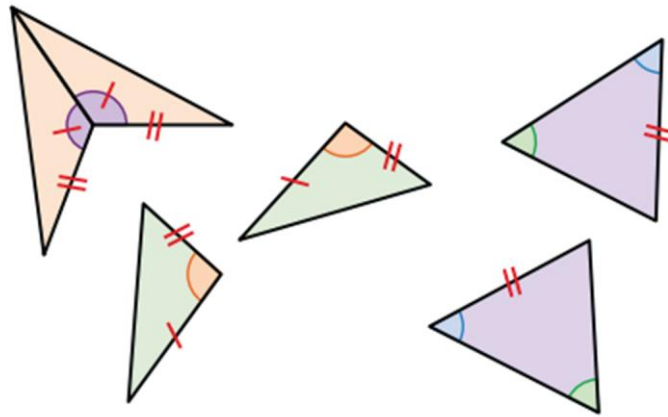
Figure 16. Copies d'élèves de 5^{ème}. Problème du cerf-volant

Remarque : Montrer que les diagonales sont perpendiculaires découle de ce qui a été revu avant sur la réciproque de la médiatrice. Aucun élève n'y a pensé. Le texte de l'exercice les encourageait à considérer des triangles et il n'y a pas eu de phase de recherche avec la seule question finale. L'objectif était d'utiliser les cas d'isométrie comme outil de démonstration. De ce point de vue la situation a assez bien fonctionné comme on peut le voir dans les extraits de copies.

4. Des exemples de questions flash

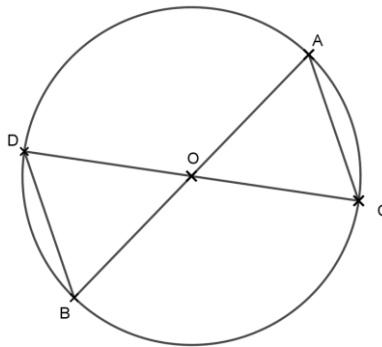
Par la suite, dans des questions flash en début de séance, il a été demandé à l'ensemble des élèves rappeler la définition de triangles égaux et les différents cas d'égalité.

Q1. Les triangles de même couleur sont-ils égaux ? Justifier.

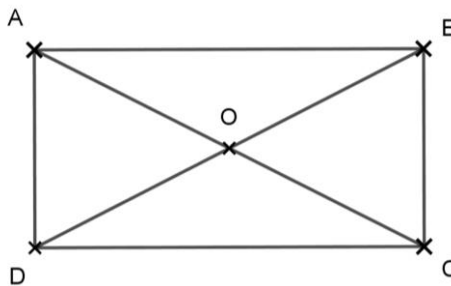


Q2. Vrai ou faux ? Si deux côtés de deux triangles sont respectivement de la même longueur et un angle est respectivement de la même mesure, alors ces deux triangles sont égaux.

Q3. Donner trois informations qui permettront de montrer que les triangles OAC et ODB sont égaux.



Q4. ABCD est un rectangle de centre O. Montrer que les triangles AOB et DOC sont égaux.



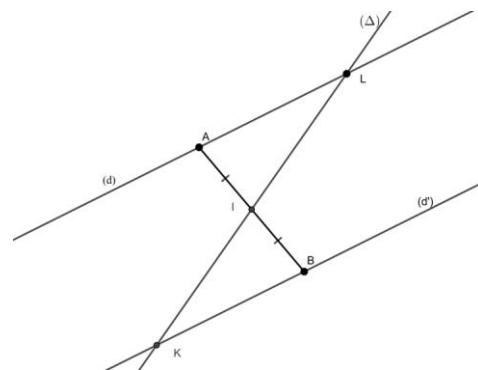
Q5. Donner la méthode pour montrer que I est le milieu de [LK].

(d) et (d') sont deux droites parallèles.

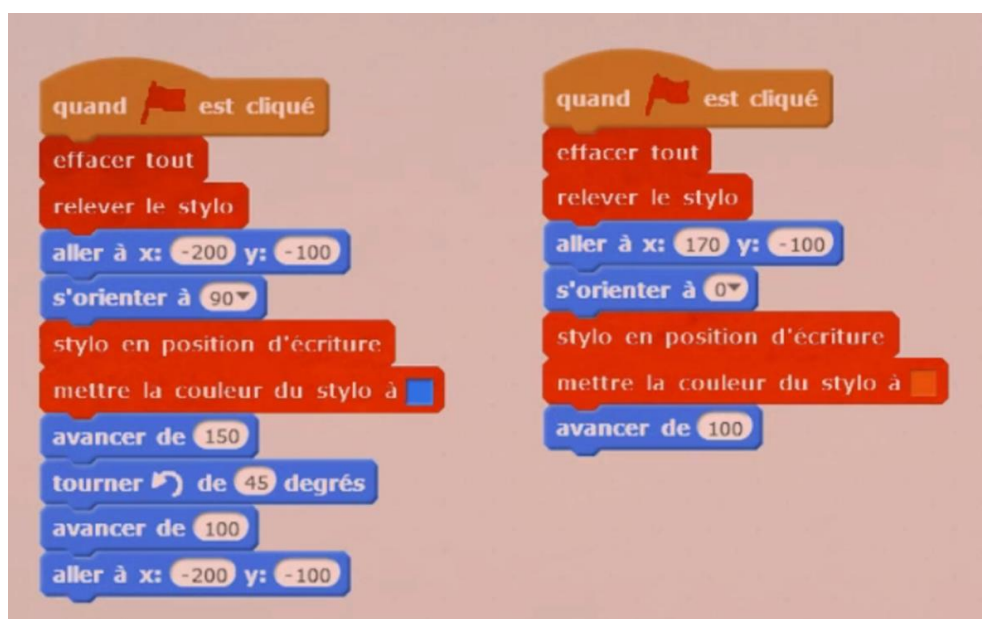
A est un point de la droite (d) et B est un point de la droite (d').

I est le milieu du segment [AB].

Une droite (Δ) passant par I coupe (d) en L et (d') en K.



Q6. Compléter le programme de droite pour obtenir des triangles égaux.



II. Chronique dans la classe de 4^{ème} de Charlène

Il s'agit d'une classe de quatrième au collège Dulcie September d'Arcueil (dans le Val de Marne) dont le professeur est Charlène Piot (classe C). Les observations ont lieu en 2017-2018. C'est un collège où le niveau scolaire et l'implication des élèves sont très hétérogènes, et cela se ressent à l'intérieur de cette classe. Les habitudes de travail des élèves, leurs connaissances et leurs lacunes pour certains sont diverses, ce qui amène à une grande diversité dans les activités proposées, afin de permettre à chacun, à son niveau, de progresser. Les habitudes de l'enseignante intègrent routines quotidiennes (à base de questions flash, ou « d'exercice du jour », un exercice systématique en tout début de cours), phases de mises en commun, exercices individuels et en groupes. La salle est habituellement placée en rangées, mais peut à l'occasion être remaniée en îlots de 4 élèves (c'est le cas pour la séance 3). La rédaction de la chronique est plus condensée dans les premières séances dans la mesure où beaucoup des situations proposées sont les mêmes que dans la classe de Sébastien mais avec une organisation différente. En revanche, nous avons relevé de nombreuses productions d'élèves pour les exercices ouverts qui ont été posés dans cette classe, ce qui permet une réflexion sur l'activité des élèves en termes de conjecture et de démonstration.

Les principaux objectifs de cette séquence, qui se déroule au mois de janvier 2018 en 4 séances, sont d'obtenir un outil pratique et efficace pour effectuer des démonstrations accessibles aux élèves, et d'effectuer un bilan des connaissances sur les triangles. Les élèves ont déjà abordé le théorème de Pythagore et les propriétés des quadrilatères, avec des démonstrations souvent courtes et guidées.

Les deux premières séances visent à introduire les cas d'égalité des triangles et à faire de premiers exercices d'application directe. À la suite de ces exercices, un large champ s'ouvre : on peut proposer de nombreuses activités d'approfondissement, sous de multiples formes. Ici le choix est fait de proposer pour la séance 3 un travail en groupes portant sur un problème ouvert, puis, pour la séance 4, un travail individuel, toujours sur un problème ouvert légèrement plus difficile que le premier.

1. Séance d'introduction par les figures téléphonées

La séance d'introduction porte sur un travail sur des triangles téléphonés. La consigne est la suivante : Vous tracez un triangle de votre choix, et vous devez faire reproduire (ou simplement décrire) aux autres élèves ce triangle avec le moins d'indications possibles.

Plusieurs élèves tracent des triangles en s'aidant des carreaux du cahier, ce qui n'est pas gênant tant que cela n'apparaît pas dans leur description. Certains tracent aussi des triangles particuliers (en grande majorité des triangles rectangles, ce qui est évidemment lié au fait de se servir des carreaux). Dans ce cas, il faut bien sûr expliciter le nombre d'informations que cela sous-entend : une dans le cas des triangles rectangles (un angle de 90°), deux dans le cas des triangles isocèles (2 longueurs, certes égales, sont données), trois dans le cas d'un triangle équilatéral. Ces questionnements, qui peuvent rebuter les élèves les plus fragiles pourraient être éliminés en imposant au départ les triangles (cf. situation d'introduction de Guillaume).

Les premières descriptions terminées sont celles qui comportent les trois longueurs des côtés. En effet, cela reste la méthode la plus utilisée par les élèves pour tracer un triangle. Dans ce cas, P leur laisse le temps de vérifier que cela fonctionne, puis demande de chercher si une autre solution est possible, ou si on peut enlever certaines des informations données. D'autres élèves tiennent à mettre les 6 informations (3 côtés et 3 angles) dans leurs descriptions, de manière à être sûrs que l'élève qui recevra cette description sera capable de retracer le triangle. De manière anecdotique, la remarque « mais je ne sais pas si l'élève qui recevra ma description sait utiliser son rapporteur » est apparue.

Lors de la mise en commun, les échanges avec la classe permettent de faire remarquer que les informations suivantes suffisent :

- les longueurs des 3 côtés,
- deux côtés et l'angle entre les deux,
- deux angles et la longueur du côté entre les deux. C'est la méthode qui est sortie le plus tardivement, sans doute parce que c'est la moins utilisée pour tracer des triangles, et qu'elle implique la difficulté d'utiliser deux fois le rapporteur, et le tracé de deux demi-droites au lieu de segments.

Ces échanges permettent aussi de faire remarquer que les autres configurations (2 côtés et un autre angle placé autrement / 3 angles) ne permettent pas de garantir que les triangles seront les mêmes. P fait remarquer aux élèves que dans le cas des 3 angles donnés, les triangles ne sont pas identiques, mais les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

2. Institutionnalisation et exercices d'application directe

La deuxième séance a pour but l'institutionnalisation des connaissances rencontrées lors de la séance d'introduction et aussi de faire résoudre aux élèves quelques exercices permettant d'assurer la compréhension des énoncés puis d'utiliser les cas d'égalité dans de premières démonstrations.

Institutionnalisation

Définition de l'égalité : deux triangles superposables sont dits « isométriques », ou « égaux ». Ils ont donc leurs angles et leurs côtés égaux deux à deux.

Énoncé des trois cas d'égalité qui permettent de montrer que deux triangles sont isométriques. Les énoncés sont sensiblement les mêmes que dans la classe de Sébastien.

Exercices d'application directe

Les exercices d'application directe proposés aux élèves sont tirés de manuels, notamment du Transmaths 4^{ème}, qui est un des seuls manuels à proposer des exercices où les cas d'isométrie sont outils. Ils ont été utilisés en classe, en question flash pour faciliter l'acquisition des notions ou en devoir à la maison afin de travailler la rédaction des réponses.

Ils sont compilés sur le lien suivant :

https://www.danielou.org/unpeuplusdemaths/documents/3e_20160813_exercices_triangles_egaux.pdf

En voici quelques exemples :

9 Les deux triangles sont-ils égaux ? Justifier la réponse.

26 Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, ainsi que les droites (AD) et (BC). Utiliser le 1^{er} cas d'égalité des triangles pour expliquer pourquoi les triangles ABD et CDB sont égaux.

31 Un géomètre a établi les égalités suivantes : $EG = FH$ et $\widehat{FEG} = \widehat{EFH}$.

a. Justifier l'égalité des triangles EFG et FEH.

b. En déduire que $EH = FG$.

27 **a.** Tracer un tel triangle ABC où M est le milieu de [BC].

b. Sur la demi-droite [AM), placer le point D tel que $AM = MD$.

c. Que peut-on dire des :

- angles \widehat{AMB} et \widehat{CMD} ?
- triangles ABM et DCM ?

3. Séance de recherche en groupes. Le triangle isocèle

Déroulement de la séance

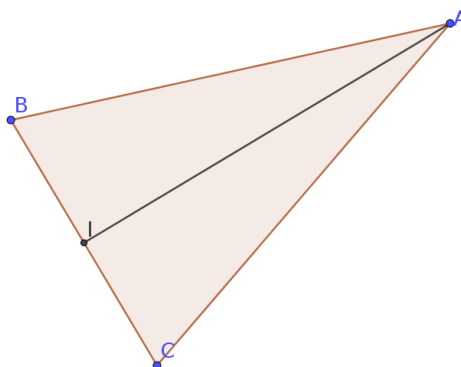
Le déroulement général de la séance est résumé dans le tableau suivant :

Phase	Durée	Déroulé	Commentaires
Installation des élèves et exercice du jour	5-10 minutes	Les élèves s'installent et appliquent la routine : un exercice en lien ou non avec le chapitre en cours	
Questions réponses sur les triangles isométriques	5-10 minutes	Vérifier que la notion de triangles isométriques est comprise par les élèves et répondre à leurs questions sur le fond et la rédaction	Questions à poser : à quoi ça sert de trouver que deux triangles sont isométriques ?
Explication de l'activité	5 minutes	Mise en place d'un travail de groupe dont on rappelle les règles. Explication du sens du mot « conjecture ».	

Mise en activité des élèves	Au moins 20 minutes	Les élèves travaillent en groupes sur l'exercice.	Passage du professeur dans les rangs pour guider les élèves
Fin de l'activité	Jusqu'à la sonnerie	Les élèves terminent leur travail et rendent la fiche avec leurs réponses.	

L'énoncé proposé pour l'activité principale est le suivant :

On a tracé un triangle ABC isocèle en A. Dans ce triangle, on a tracé la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} , c'est à dire la droite qui partage cet angle en deux angles égaux. Cette droite coupe le segment [BC] en I.



1. Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous faire concernant la figure ?

Il semble que

-> Appelez le professeur pour vérifier vos conjectures.

2. Essayez de démontrer ces conjectures, en détaillant vos étapes. Écrivez vos raisonnements, et surtout, n'effacez rien !

Les élèves de cette classe n'ont que très peu de souvenirs de la notion de bissectrice, dont ils ont uniquement vu la définition en classe de 6^{ème}. Concernant les autres droites remarquables, ils ont étudié la médiatrice en classe de 6^{ème}, et la hauteur d'un triangle en classe de 5^{ème}. Ils ont été placés pour cette activité par groupes de 2 ou 3, de la composition de leurs choix. L'énoncé est volontairement très ouvert, la phrase visant à formuler une conjecture est commencée, ce qui permet de préciser ce qu'on entend par « conjecture » et les élèves ont plusieurs lignes pour la compléter.

Lors de la phase d'activité, les élèves

- se lancent assez vite dans les conjectures, mais n'osent pas utiliser leurs instruments de géométrie, puisqu'ils ont le souvenir qu'on leur a très souvent interdit de mesurer sur la figure.
- ont tendance à écrire dans les conjectures des faits déjà établis, comme : « le triangle ABC est isocèle », ou « $AB = AC$ ».

Voici quelques réponses à la première question accompagnées d'un petit commentaire

en ses côtés déjà
 Il semble que $AB = AC$, l'angle entre 2 côtés, I est le milieu de BC,
 et c'est l'angle droit.

Réponse 1

L'élève précise « on les connaît déjà » à propos du triangle isocèle et du cas d'égalité qu'il voudra ensuite utiliser.

1. Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous faire concernant la figure ?

Il semble que $BI = IC$ / $\angle BIA$ forme un angle droit = $\angle AIC$ forme un angle droit. I est la droite I est la médiatrice de AB .
 Il me semble aussi que BIA est isométrique à AIC car d'après mes conjectures $ABI = ACI$ et que $BIA = AIC$.

Réponse 2

Il semble y avoir un début de déduction à l'intérieur de la conjecture

Il semble que $(AB \text{ et } AC \text{ sont égaux})$ I est le milieu de BC .
 $\angle BAI$ et $\angle CAI$ sont isométriques. I est perpendiculaire donc I est la médiatrice de BC .

Réponse 3

Les élèves mettent entre parenthèses, une conjecture qui est évidente. On peut observer une confusion entre point et droite au moins dans la manière de nommer (I pour la droite (AI)).

Précisons qu'aucune des deux copies précédentes (Réponses 2 et 3) ne parle de médiatrice dans la suite de ses démonstrations.

La démonstration

Au moment de se lancer dans la démonstration de leurs conjectures, certains groupes ont un blocage, ne sachant par où commencer. P les incite fortement à commencer par prouver l'isométrie des triangles. À ce moment-là, les groupes sont rapidement capables de citer les trois hypothèses permettant de conclure, à condition de se souvenir des outils disponibles depuis la classe de 5^{ème}. Cependant, ils se sentent très maladroits pour rédiger eux-mêmes leur raisonnement, avec leurs propres mots.



- 1 longueur et 2 angles
 \rightarrow l'angle B et C sont égaux
 \rightarrow les angles \widehat{BAI} et \widehat{CAI}
 \rightarrow les angles BA et CA sont de même longueur

Réponse 4

L'intuition y est et la démonstration est valide (à part un lapsus entre côtés et angles). Les codages ont été faits à la fin de la démonstration.

On sait que le triangle ABC est isocèle en A et que la droite IA est le centre de \widehat{BAC} . On sait aussi que I coupe BC.

IAC et BIA sont des triangles isométriques car on a 1 côté égal et 2 angles égaux.

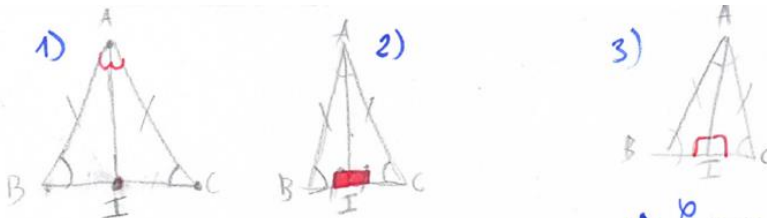
Réponse 5

Des formulations inexactes « la droite (IA) est le centre de \widehat{BAC} » « I coupe BC » ou raccourcies pour le cas d'égalité mais celui-ci (ACA) est pertinent.

AB = AC car c'est un triangle isocèle,
 AI est un côté commun,
 $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$ car on a tracé la bissectrice de l'angle.
 donc les deux triangles sont isométriques

Réponse 6

Une démonstration simple et efficace par une élève en difficulté



1) $AC = AB$ car la bissectrice partage l'angle \widehat{BAC} en deux angles égaux et c'est également un triangle isocèle.
 1 côté entre 2 angles
 [AB] entre ABI et BAI

2) $BI = IC$ en sachant que I est leur milieu car les triangles sont isométriques

3) Comme les triangles AIB et AIC sont isométriques ça veut dire qu'il y a des angles droits aux deux triangles car la bissectrice coupe le triangle isocèle perpendiculairement.

Réponse 7

Trois schémas très clairs de la situation, mettant un ordre sur les conjectures, mais qui montrent bien aussi... la confusion qui règne dans l'esprit de ce groupe au moment de la rédaction. Le 1) semble utiliser le ACA (avec la propriété des angles du triangle isocèle) pour montrer l'égalité des triangles ABI

et ACI mais sans mentionner les éléments correspondants dans ACI. Le 2) semble déduire $BI = IC$ de l'égalité des triangles mais dit « en sachant que I est le milieu » alors que c'est ce qu'ils déduisent. Sur la figure 2, ils marquent en rouge plein des angles droits. Est-ce ce qu'ils veulent montrer ? À moins qu'ils veuillent seulement signifier l'égalité des angles. Le 3) veut montrer les angles droits mais prend la conclusion souhaitée comme argument.

1. \widehat{IAC} est coupé en son milieu (bissectrice)
 $\widehat{ICA} = 70^\circ$ tout comme \widehat{IBA}
 Mes 2 angles repose sur une même longueur $AC = AB$ (égal des chaque côté)
 donc ACI est isométrique par rapport à ABI

Réponse 8

C'est la seule élève qui a visiblement mesuré sur la figure alors que cela ne lui était même pas nécessaire : Pourquoi mesurer, alors que les angles sont égaux grâce aux triangles isocèles ? Sinon le cas ACA est bien utilisé même si la rédaction n'est pas parfaite.

Suite à cette partie essentielle de la démonstration d'une première conjecture, la majorité des groupes ont dû s'arrêter, par manque de temps (certains groupes ont absolument voulu faire un brouillon, et donc recopier au propre), ou parce qu'ils ne se souvenaient plus qu'ils avaient fait plusieurs conjectures. Il est encore difficile pour eux de ne pas perdre le fil de ce qu'ils font, d'où la nécessité d'une rédaction claire.

Certains groupes ont néanmoins continué les démonstrations d'autres conjectures :

Pou notre première conjecture [BI] et [IC] sont égaux car [AI] coupe [BC] en son milieu.

Réponse 9

Les élèves de ce groupe ont réussi à montrer que les deux triangles sont isométriques, mais ne réussissent pas à l'utiliser pour montrer que $BI = IC$. Ils donnent la conséquence comme argument.

Deux groupes ont réussi à montrer l'angle droit en I comme moitié d'un angle plat.

* Comme BI et IC sont de même longueur et que l'angle I est 90° . Une ligne droite = 180° donc $180 \div 2 = 90^\circ$
 L'angle I mesure donc 90° .

Réponse 10

La rédaction est maladroite (il faudrait invoquer l'égalité des angles et non celle des longueurs et surtout ne pas mettre dans les arguments ce qu'on cherche à démontrer), mais l'idée de la démonstration juste.

BC est une droite à 360° et BI la coupe à 180° ,
et comme c'est des triangles isométriques, on divise par 2
et on fait 90° . Et 90° c'est un angle droit. Alors ce sont
des triangles rectangles

Réponse 11

Encore plus confus au niveau de la rédaction, mais l'élève a compris pourquoi il y avait un angle droit.

Une fois qu'ils avaient démontré l'isométrie de leurs triangles, une majorité des groupes se sont arrêtés là, sans se rendre compte qu'une seule de leurs conjectures avait été démontrée, et que les autres en découlaient facilement. Ce peut-être s'expliquer par le fait que les élèves sont habitués à donner une réponse par question et non plusieurs.

À la fin de cette activité, au niveau de l'état d'esprit des élèves, la notion et l'utilisation des triangles isométriques leur a semblé intuitive et plutôt facile. Ils ont ressenti un manque de temps pour terminer leur démonstration, et espéraient pouvoir la terminer correctement au cours suivant. Il serait préférable de prévoir deux séances pour ce travail, dans cette forme, afin d'avoir le temps d'y intégrer un véritable bilan, à chaud, de l'activité et consacrer le temps nécessaire à la mise en forme des démonstrations.

Remarque : Les élèves savent déjà qu'un triangle isocèle a ses angles à la base égaux et il est légitime qu'ils l'utilisent dans la démonstration mais l'exercice permettrait de démontrer, en se servant des cas d'isométrie, que si $AB = AC$ alors les angles en B et en C sont égaux. En effet si $AB = AC$, I sur [BC] et si (AI) est bissectrice de l'angle \widehat{BAC} , Les triangles ABI et ACI sont égaux par le cas CAC et on en déduit l'égalité des angles en B et en C. Ce n'est pas ce que fait Euclide qui n'introduit la bissectrice que plus tard. Pour la réciproque, si on connaît le théorème sur la somme des angles d'un triangle, on peut utiliser les cas ACA (AI est commun aux deux triangles) pour conclure à l'égalité des côtés. Ce n'est pas ce que fait Euclide, parce que la somme des angles d'un triangle nécessite l'axiome des parallèles ; on peut s'en passer en considérant l'égalité des triangles ABC et ACB si le triangle est isocèle en A. Euclide préfère un raisonnement par l'absurde : si $AB < AC$, on considère A' sur [AC] tel que $A'C = AB$; les triangles ABC et $A'CB$ sont égaux par le cas CAC ; on en déduit que $\widehat{A'BC} = \widehat{ACB}$ qui était lui-même égal à \widehat{ABC} par hypothèse ; or A' sur [AC] donc la demi-droite [BA') est intérieure à l'angle \widehat{ABC} ce qui a pour conséquence que $\widehat{A'BC}$ devrait être strictement plus petit que \widehat{ABC} .

Les conjectures des élèves portent sur le fait que I est au milieu de [BC] et que les angles en I sont droits donc que la bissectrice est aussi médiane et hauteur donc médiatrice. Les propriétés de la médiatrice admises en sixième (A est par hypothèse à égale distance de B et C) permettaient d'arriver directement au résultat mais aucun élève n'y a pensé. Bien entendu, pour qu'une démonstration soit valide, il faut que les théorèmes utilisés dans la démonstration soient eux-mêmes valides mais beaucoup d'entre eux ont été admis dans les classes précédentes sans qu'on ait signalé aux élèves qu'on les avait seulement admis et non démontrés. D'où l'intérêt d'une progression cohérente, au moins dans l'esprit du professeur.

4. Séance 4. Le cerf-volant

Le problème est le même que dans la classe de Sébastien mais l'énoncé est différent. D'une part, il est posé sous forme de questions ouvertes, comme pour l'exercice de la séance 3 (on demande de formuler des conjectures, puis de les démontrer). D'autre part, les diagonales ne sont pas tracées sur la figure proposée dans l'énoncé.

Soit ABCD un cerf-volant :

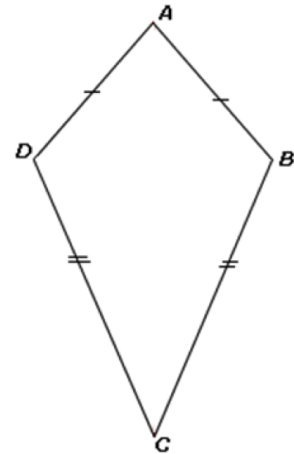
1. Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous faire concernant la figure ?

Il semble que.....

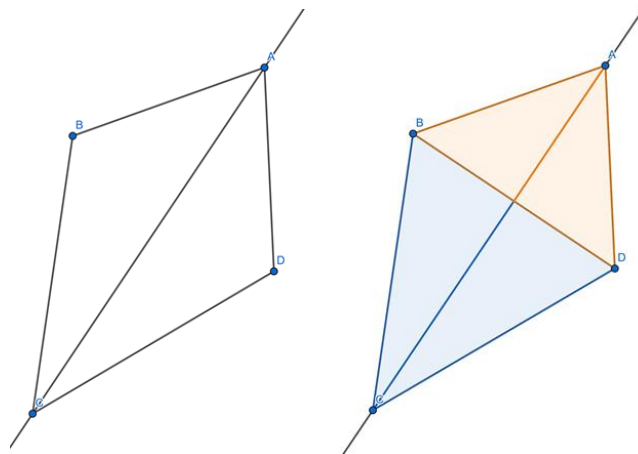
→ Appelez le professeur pour vérifier vos conjectures

2. Essayez de démontrer ces conjectures, en détaillant toutes vos étapes. Écrivez vos raisonnements même si ils sont faux pour finir...

N'effacez rien !



Le fait que les diagonales ne soient pas tracées sur la figure a son importance, puisque le tracé d'une seule des diagonales facilite la visibilité de deux premiers triangles isométriques (figure ci-dessous, dessin de gauche), alors que le tracé des deux diagonales fait apparaître quatre triangles (figure ci-dessous, dessin de droite), dont l'égalité deux à deux est plus difficile à démontrer.



Les élèves ont très vite réalisé qu'il fallait chercher des triangles isométriques, mais ont voulu réutiliser d'un peu trop près l'outil de la bissectrice : ils ont pour beaucoup eu l'intuition que les diagonales du cerf-volant étaient confondues avec les bissectrices des angles, ce qui n'était vrai que pour l'une d'elles, mais aucun d'entre eux n'a pensé à le démontrer.

Une difficulté supplémentaire était de choisir correctement pour quels triangles il était facile de démontrer qu'ils étaient isométriques. En effet, il existait dans cette figure trois paires de triangles isométriques, mais seule une paire pouvait se démontrer en une étape : celle des triangles ADC et ABC. Plusieurs groupes d'élèves ont directement tracé les deux diagonales et ont donc voulu démontrer que les petits triangles (en haut ou en bas) étaient isométriques, en utilisant des informations inexistantes :

ABO et DAO sont isométriques car il y a les angles \widehat{AOB} et \widehat{AOD} égaux et les longueurs BO, AO, AO et DO de même longueur.

Réponse 12

L'élève utilise abusivement une égalité d'angles et de côtés.

AC est un côté commun.
 AC est la bissectrice de $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$

$AD = AB$

Propriétés:

- un angle entre deux longueurs égales,
 - une longueur ~~est~~ égale entre 2 angles égaux.
- D = peut-être un angle
 B = peut-être un angle

Réponse 13

L'élève n'est pas sûre d'avoir le droit d'utiliser la bissectrice, semble se tromper d'angle ou change d'avis pour rechercher des égalités d'angles. Elle hésite sur le cas d'égalité à utiliser (dommage, c'était le dernier qui justement ne nécessite que des égalités de longueur).

DBC est isocèle et [AC] est la bissectrice de C donc, O est au centre de [DB].

DOB est un angle plat et [AC] est la bissectrice de C donc, O a au moins 2 angles droits donc tous ses angles droits.

La longueur [CD] et [BC] sont pareils, [DA] et [AB] sont les mêmes et [CA] fait partie des deux triangles donc, DAC et ABC sont isométriques

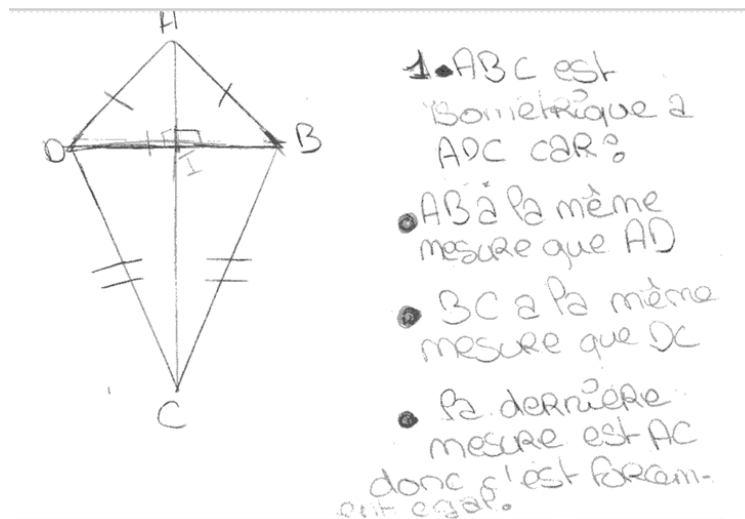
Réponse 14

L'élève réutilise l'activité précédente en remarquant le triangle isocèle DBC. Seul défaut : il réutilise la bissectrice, sans qu'elle soit explicitée comme hypothèse dans l'énoncé. La démonstration de l'égalité des triangles DAC et ABC qui vient ensuite est juste.

1. Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous faire concernant la figure ?

Il semble que AB et AD sont de même mesure et que si on trace un segment de D à B ça fait un triangle isocèle pareil pour C. Ses diagonales sont perpendiculaires. DAB peut être un triangle équilatéral. il ya 2 triangles dans le quadrilatère ADC et ABC.

→ Appelez le professeur pour vérifier vos conjectures



Réponse 15

Les conjectures mêlent des déductions (les triangles sont isocèles), des vraies conjectures (les diagonales sont perpendiculaires, DAB peut être équilatéral et des évidences (il y a deux triangles dans le quadrilatère). Peut-être les élèves voulaient-ils dire triangles égaux car cette dernière conjecture est correctement démontrée par CCC dans la partie démonstration. Notons aussi que l'élève code sur la figure aussi bien des conjectures que des hypothèses.

Bilan

Cette activité s'est révélée très riche, et les productions des élèves relativement fournies (aucune copie blanche, tous les élèves sans exception ont au moins trouvé plusieurs conjectures). On peut remarquer l'intérêt d'entamer l'utilisation de la démonstration avec cet outil, qui s'avère être très intuitif et simple à comprendre et utiliser. Il a été réutilisé dans l'année, par exemple dans cet exercice (voir chapitre 10, n°1.28), donné quelques mois plus tard :

Soit ABCD un parallélogramme.

On construit, à l'extérieur de ABCD, les triangles équilatéraux ADP et ABQ.

Que peut-on dire du triangle PQC ?

Concernant l'apprentissage de la démonstration, un travail essentiel a pu être entamé sur la différence entre les informations de l'énoncé, ce que l'on sait en conséquence de ces informations, ce que l'on conjecture, et ce que l'on démontre. Ce travail doit bien sûr être poursuivi avec d'autres démonstrations ne mettant pas forcément en jeu les mêmes objets et les mêmes outils : les élèves doivent réaliser que la technique de démonstration n'en dépend pas. Il est en effet utile d'entraîner les élèves à être capables de choisir les outils mobilisables dans une situation particulière. On peut pour cela leur proposer de créer une carte mentale (c'est-à-dire un schéma synthétisant des notions autour d'un thème central) résumant les outils disponibles, par exemple pour prouver qu'un angle est droit :

- réciproque du théorème de Pythagore
- reconnaître deux triangles isométriques (cf. Les deux activités présentées ci-dessus)
- propriétés des droites vues en 6^{ème}
- calcul de l'angle grâce à la somme des angles d'un triangle

Il est donc nécessaire de poursuivre le travail sur la démonstration entamé ici, en retravaillant régulièrement une des six compétences mathématiques : le raisonnement.

III. Chronique dans la classe de 4^{ème} de Guillaume

Nous relatons maintenant des séances qui se sont déroulées à l'automne 2019 dans la classe de 4^{ème} (26 élèves) de Guillaume Didier au collège Danton de Levallois-Perret (classe G). C'est un collège où les parents d'élèves appartiennent majoritairement à des catégories socio-professionnelles favorisées. Malgré ce contexte, il y a (comme dans tout établissement) une très forte hétérogénéité dans les classes (5 à 6 élèves en très grande difficulté côtoient 8 à 10 élèves d'un excellent niveau) et la réussite au brevet n'est pas meilleure que la moyenne académique (autour de 90% de réussite). Selon la pratique de ce professeur, les tables sont réparties en îlots de 4 élèves, le tutorat entre pairs est encouragé lors des phases de recherche et le travail en groupe est le plus souvent utilisé lors des situations d'introduction. Toute séquence portant sur une notion importante du programme comporte :

- une évaluation diagnostique
- une situation d'introduction
- une exposition des connaissances
- des exercices purement techniques
- des exercices d'application et/ou d'approfondissement
- une évaluation sommative
- des questions flash

À la suite des phases de recherche les élèves travaillent souvent en binômes. La mise en commun se fait à partir de productions d'élèves avec l'aide d'un visualiseur. Le professeur instaure un débat à partir d'une présentation d'un élève. À l'issue de ce débat, la correction est écrite au tableau.

1. Évaluation diagnostique

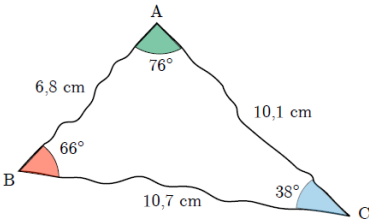
L'évaluation diagnostique vise à vérifier des connaissances censées être acquises par les élèves et qui sont utiles pour ce que le professeur a décidé de travailler durant la séquence. Ici, l'évaluation⁵⁹ porte sur les angles d'un triangle (calculs utilisant la somme des angles d'un triangle et les angles des triangles isocèles), le tracé de la hauteur d'un triangle, y compris quand elle tombe à l'extérieur, la reconnaissance des positions des angles alternes-internes et correspondants, des constructions de triangles (donnée de la mesure d'un côté et des angles aux extrémités pour l'un, donnée de la mesure de deux côtés et d'un angle qui n'est pas compris entre les côtés avec deux solutions pour l'autre) et de parallélogrammes (mesures de deux côtés consécutifs donnés pour l'un, des deux diagonales pour l'autre, donc plusieurs solutions dans chaque cas). L'évaluation d'une durée d'environ 30 minutes a permis de détecter immédiatement que presque aucun élève ne savait construire un triangle lorsque l'algorithme de construction n'était pas congruent à l'ordre d'apparition des données dans l'énoncé et que les notions d'angles correspondants et alternes-internes n'étaient pas disponibles. Il a été remédié à ces lacunes lors de la correction, en insistant sur le fait que ces connaissances seraient indispensables pour maîtriser la nouvelle notion étudiée.

2. Situation d'introduction

Nous voulions relier les cas d'égalité de triangles aux constructions de triangles, ce qui est accessible pour les élèves et cohérent avec l'approche développée dans cette brochure. Nous avons donc choisi d'utiliser le principe des figures (ici, des triangles) téléphonées avec la modalité de mise en œuvre suivante : les élèves travaillent en binôme sur un triangle imposé. Un tel choix permet, lors de la mise en commun, de confronter les messages et les constructions de différents binômes sur un même

⁵⁹ Voir le texte en annexe de ce chapitre.

triangle. À titre d'exemple, nous reproduisons ici la partie « émetteur » et la partie « récepteur » de la fiche reçue par un binôme⁶⁰ et nous donnons dans un tableau l'ensemble des valeurs numériques choisies. Certaines mesures sont nécessairement approchées.

<p>Émetteur 1 : On considère le triangle ABC suivant :</p>  <p>Écrire un texte <u>contenant le moins de données possibles</u>. En lisant ton texte, une personne doit pouvoir construire ce triangle.</p> <p>Récepteur 1 : Les données contenues dans le texte que tu as reçu permettent-elles de construire le triangle ? Justifier (on pourra utiliser les instruments de géométrie).</p>	<p>Mesures choisies pour les triangles</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>AB</th> <th>BC</th> <th>AC</th> <th>\hat{A}</th> <th>\hat{B}</th> <th>\hat{C}</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6,8</td> <td>8</td> <td>7,1</td> <td>70°</td> <td>57°</td> <td>53°</td> </tr> <tr> <td>5,6</td> <td>7,4</td> <td>6,1</td> <td>78°</td> <td>54°</td> <td>48°</td> </tr> <tr> <td>6,8</td> <td>10,7</td> <td>10,1</td> <td>76°</td> <td>66°</td> <td>38°</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>7,1</td> <td>5,8</td> <td>82°</td> <td>54°</td> <td>44°</td> </tr> </tbody> </table>	AB	BC	AC	\hat{A}	\hat{B}	\hat{C}	6,8	8	7,1	70°	57°	53°	5,6	7,4	6,1	78°	54°	48°	6,8	10,7	10,1	76°	66°	38°	5	7,1	5,8	82°	54°	44°
AB	BC	AC	\hat{A}	\hat{B}	\hat{C}																										
6,8	8	7,1	70°	57°	53°																										
5,6	7,4	6,1	78°	54°	48°																										
6,8	10,7	10,1	76°	66°	38°																										
5	7,1	5,8	82°	54°	44°																										

Il est alors bien sûr important que le professeur sache quels sont les binômes qui travaillent sur un même triangle. À cet effet une grille d'observation⁶¹ a été conçue. Elle permet de récolter les informations suivantes pour chaque triangle : données reçues, données utilisées, triangle construit.

Déroulement

Le professeur distribue à chaque binôme une fiche où est dessiné un triangle à main levée avec les mesures des trois angles et des trois longueurs. La consigne est d'écrire un message de construction contenant le minimum d'informations. Les binômes disposent de 10 minutes de réflexion puis de 5 minutes pour écrire leur message sur une feuille que le professeur ramassera. Durant cette phase de recherche, P adopte une posture de retrait, évalue le travail des binômes en les observant et note sur sa grille les données que contiennent les messages. Par exemple, contrairement aux attentes, peu de binômes testent leur message en construisant le triangle. Par contre, la variété envisagée des informations dans les messages est bien présente.

Au bout de ces 15 minutes, les messages sont échangés. Le professeur (P) veille à ne pas donner à un binôme un message demandant de construire « son triangle ». Les binômes disposent de 10 minutes pour réaliser la construction demandée dans le message reçu. Afin de préparer la mise en commun, P demande aux binômes de noter les données qu'ils ont utilisées pour construire le triangle. Durant cette nouvelle phase de recherche, P adopte à nouveau une posture de retrait, évalue le travail des binômes en les observant et note (sur la grille) les données utilisées par les différents binômes. Ainsi, le professeur dispose de tous les éléments pour mener à bien la mise en commun.

La mise en commun a pour objectif de faire constater (en privilégiant l'analyse des productions des binômes) que :

- certains binômes ont donné trop d'informations,
- le nombre minimal d'informations dans les messages est trois,
- la donnée des trois angles ne permet pas de reconstruire le triangle,
- la donnée de deux longueurs et un angle ne permet pas toujours de reconstruire le triangle,
- la donnée de deux angles et une longueur permet de reconstruire le triangle.

Lors de la mise en commun, faite avec l'aide de la grille (non remplie) qui avait permis au professeur de noter les travaux des binômes, P demande à différents binômes de présenter leur travail à l'aide

⁶⁰ Dans la fiche complète (voir annexe), il y a entre les deux une place pour le message.

⁶¹ Voir grille en annexe

d'un visualiseur : son utilisation facilite la comparaison entre le triangle initial et le triangle construit (en les projetant simultanément). Pour un même triangle, des binômes ont utilisé des informations différentes⁶² :

- Un binôme a gardé les 6 informations.
- Un autre binôme a gardé uniquement les 3 angles.
- Un autre binôme a gardé un angle et deux côtés et les deux binômes n'ont pas construit le même triangle.
- Certains binômes ont gardé 4 informations. Les binômes récepteurs ont dit qu'il y avait des informations superflues.

Les échanges ont été très riches et ont permis au professeur d'écrire la trace écrite au fur et à mesure. Cela a permis de s'assurer que les élèves avaient pris conscience qu'un message comportant un angle qui n'est pas compris entre les deux côtés ne permet pas forcément de reproduire le triangle initial (deux triangles sont possibles). C'est indispensable pour préparer la trace écrite qui va suivre.

Trace écrite

Voici la trace écrite élaborée avec les élèves à la fin de la situation d'introduction. Elle comporte la définition des triangles isométriques et les conditions suffisantes pour construire un triangle.

Tout triangle est défini à partir de ses trois angles et des longueurs de ses trois côtés. La construction d'un triangle est possible lorsque l'on connaît

- soit les longueurs de deux côtés et l'angle formé par ces deux côtés,
- soit deux angles et la longueur du segment joignant les sommets de ces deux angles,
- soit les longueurs des trois côtés.

Définition :

On dit que deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont leurs angles deux à deux égaux et leurs côtés deux à deux de même longueur.

D'après les trois cas de construction d'un triangle, pour affirmer que deux triangles sont isométriques, il ne semble pas nécessaire de comparer les trois angles et les trois longueurs des côtés des deux triangles.

3. Exposition des savoirs.

Le cours qui suit la situation d'introduction reprend la définition des triangles isométriques, le vocabulaire associé aux triangles isométriques (angles, sommets et côtés homologues), l'énoncé des trois cas d'égalité des triangles et une « démonstration » du premier cas en suivant Euclide ainsi que, pour chaque cas, un exemple rédigé, son utilité et ses conditions d'utilisation.

Extrait du cours

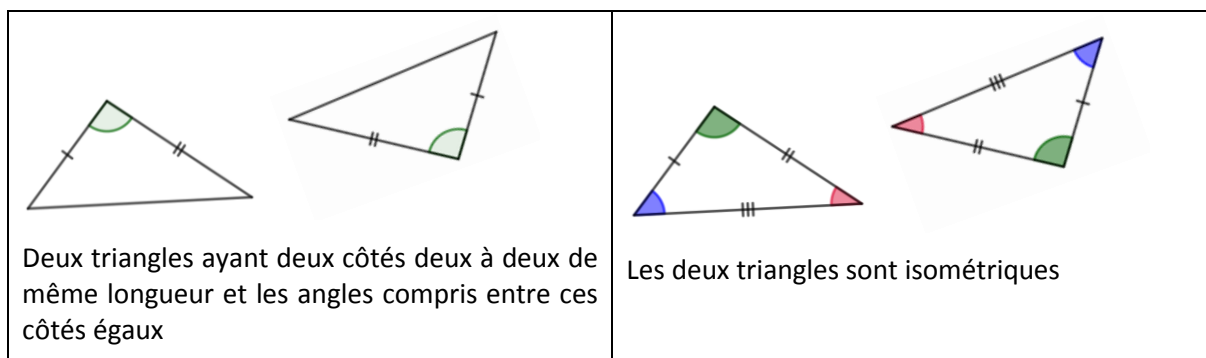
Propriété (admise) :

Si deux triangles ont deux côtés deux à deux de même longueur et si les angles compris entre ces côtés sont égaux alors ces triangles sont isométriques.

Figures clés

Conditions d'utilisation à vérifier	Ce que l'on montre en utilisant cette propriété
-------------------------------------	-------------------------------------------------

⁶² D'ailleurs, c'est pour provoquer l'apparition d'une telle situation que ce professeur a choisi d'imposer les quatre triangles étudiés par les élèves.



Utilité de la propriété : Montrer une égalité entre deux angles.

Montrer une égalité entre deux longueurs.

Document donné aux élèves à la fin de l'exposition des connaissances

Les cas d'égalité des triangles servent à montrer une égalité de longueurs ou d'angles en montrant que deux triangles sont isométriques.

- Incorporer ce que l'on cherche à montrer dans deux triangles (certains sommets des triangles à identifier sont contenus dans ce que l'on cherche à montrer).

- Identifier le cas d'égalité à utiliser

	Cas d'égalité CCC	Cas d'égalité ACA	Cas d'égalité CAC
Dans chaque triangle, il faut connaître	3 longueurs	2 angles et 1 longueur	un angle et les longueurs des côtés de cet angle
conditions à vérifier	3 égalités de longueurs	2 égalités d'angles et 1 égalité de longueurs	1 égalité d'angle et 2 égalités de longueurs

- Conclure en identifiant les trois couples de sommets homologues.

Fiche d'auto-évaluation

Une fiche d'auto-évaluation a, de plus, été donnée aux élèves. Elle donne des niveaux de compétences emboîtés pour l'utilisation des cas d'égalité des triangles avec des exemples (voir annexe de ce chapitre).

4. Exercices techniques

Ce type d'exercices a été utilisé essentiellement en début de séquence (deux séances). Les tâches proposées consistent à identifier les sommets homologues de deux triangles isométriques et à utiliser dans des situations extrêmement simples les cas d'égalité des triangles pour montrer que deux triangles sont isométriques ou calculer un angle ou/et une longueur. Ce travail est soutenu par des questions flash au début de ces séances pour créer des automatismes. Après avoir travaillé les trois cas d'égalité des triangles, un tableau résumant les raisonnements à suivre pour utiliser et reconnaître les cas d'égalité des triangles a été explicité aux élèves (voir paragraphe précédent).

Lors des phases suivantes de recherche, P s'est appuyé sur ce document ainsi que sur la fiche d'auto-évaluation pour aider chaque élève à surmonter ses difficultés et repérer de manière plus objective et fine l'état d'acquisition des connaissances visées. Dans les moments de correction, P favorise le travail sur les erreurs en envoyant au tableau un élève qui a une erreur de rédaction (par exemple non rappel des conditions d'utilisation des propriétés) ou de raisonnement (par exemple mauvais choix du cas d'égalité des triangles) qui n'est pas encore apparue ou qui est très présente chez les élèves. Il demande à cet élève d'expliquer son travail à la classe (un visualiseur permet de projeter

immédiatement la production de l'élève). Le reste de la classe doit analyser le travail (écrit et oral) de cet élève afin de détecter et corriger les erreurs. Les interactions entre élèves qui s'ensuivent peuvent leur permettre de consolider leur niveau d'acquisition des connaissances travaillées. À la fin des échanges, les élèves prennent note de la correction.

On trouvera dans la banque d'exercices (chapitre 10) une version reformulée et analysée du point de vue des savoirs mathématiques enjeux de l'apprentissage, des exercices utilisés dans la phase technique (numéros 1.7 à 1.14) et dans la phase de maîtrise qui suit (numéros 1.15 à 1.18). Nous donnons ici dans chaque cas un exemple ou deux de la version qui a été effectivement donnée aux élèves.

Exercices techniques

Soient SOL et IDE deux triangles isométriques tels que

$SO = 4$ cm, $SL = 8$ cm et $\widehat{OSL} = 117^\circ$, $\widehat{IED} = 20^\circ$, $IE = 8$ cm et $DE = 10,4$ cm.

Calculer OL et \widehat{IDE} .

Remarque : Il s'agit de l'exercice 1.7 de la banque d'exercices. On notera qu'ici la reconnaissance des éléments homologues des triangles isométriques est essentielle mais pas si facile. IE correspond à SL parce qu'ils ont la même longueur, que SO est plus petit et DE plus grand. On ne connaît pas LO mais $LO > SL$ puisque l'angle en S est obtus ; on peut aussi deviner que $OL = 10,4$ puisque les triangles sont isométriques et que cette longueur ne figure pas dans les données concernant SOL . S ne peut pas être homologue à E car les angles en S et E sont différents donc S est homologue à I , L à E et O à D . On en déduit $OL = DE = 10,4$ et $\widehat{IDE} = \widehat{SOL}$ qu'il faut calculer en se servant de la somme des angles d'un triangle.

Peut-on construire deux triangles ISO non-isométriques tels que $\widehat{ISO} = 40^\circ$, $OI = 5$ cm et $SI = 6$ cm ?

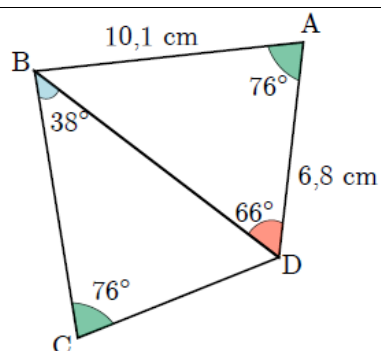
Il s'agit de l'exercice 1.12 de la banque d'exercices. La réponse est oui.

Exercice de maîtrise

On considère la figure suivante.

Calculer le périmètre du quadrilatère ABCD.

Justifier.



Remarque : Il s'agit de l'exercice 1.16 de la banque d'exercices. On notera que la donnée de la figure rend l'exercice plus accessible car la construction de la figure est un problème en soi pour les élèves dans la mesure où il faut prendre les données dans le bon ordre.

5. Exercices d'application et/ou d'approfondissement (4 séances)

Le professeur n'a pas attendu la fin de la séquence pour travailler ce type d'exercices dont l'objectif est que les élèves apprennent à ne plus voir les cas d'égalité des triangles comme des objets d'étude mais à les percevoir petit à petit comme des outils à leur disposition pour résoudre un problème. Les tâches travaillées nécessitent bien souvent l'élaboration d'un raisonnement en plusieurs étapes et/ou

la mise en fonctionnement d'anciennes connaissances. L'énoncé peut se présenter sous la forme d'un problème ouvert nécessitant l'élaboration d'une conjecture ; la présence de valeurs numériques pour des grandeurs et/ou la donnée de la figure ne sont pas systématiques. La gestion de ce type d'exercices ne peut pas être identique à celle des exercices purement techniques. Lors des phases de recherche, l'aide apportée se concentre sur les démarches utilisées par les élèves. Dans la limite des contraintes, l'enseignant ajuste aux besoins le temps de recherche accordé aux élèves. Lors de la mise en commun, les échanges ont pour but de mettre en lumière le ou les cheminement(s) suivi(s) pour élaborer une solution au problème posé. Lors de ces échanges, le professeur n'est pas directif et veille à prendre en considération toutes les démarches des élèves. Avant de lancer la phase de rédaction d'une solution, il écrit au tableau les différentes étapes du raisonnement à suivre. La rédaction elle-même peut être faite en classe ou être l'objet d'un travail personnel hors classe.

Les exercices proposés correspondent aux exercices n° 1.19 à 1.24 de la banque d'exercices que l'on trouve au chapitre 10. Nous donnons ici les exercices 1.19 et 1.24 tels qu'ils ont été proposés aux élèves.

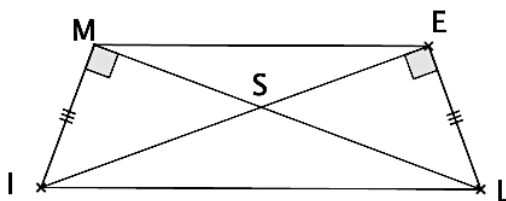
Soient EXPO un carré et L, I, T et S des points respectivement sur les demi-droites $[XP)$, $[PO)$, $[OE)$ et $[EX)$, extérieurs au carré et tels que $PL = OI = ET = XS$.

Quelle est la nature du quadrilatère LITS ? Justifier.

Décrire votre recherche (en particulier, toutes les idées auxquelles vous avez pensé).

Remarque : L'emploi des cas d'égalité est entièrement à la charge des élèves. Il y a une adaptation à faire pour les longueurs des côtés et il faut ensuite utiliser la complémentarité des angles aigus du triangle rectangle, donc mobiliser les cas d'égalité dans une recherche où il y a plusieurs étapes à identifier.

Soient MIL et ILE deux triangles rectangles ayant pour hypoténuse le segment $[LI]$ tels que $MI = LE$ et que le quadrilatère MILE soit non croisé. On note S le point d'intersection des droites (LI) et (ME) .



1) Montrer que les triangles MES et ILS sont isocèles en S (On pourra s'intéresser tout d'abord aux triangles SIM et SEL).

2) Montrer que les droites (ME) et (LI) sont parallèles.

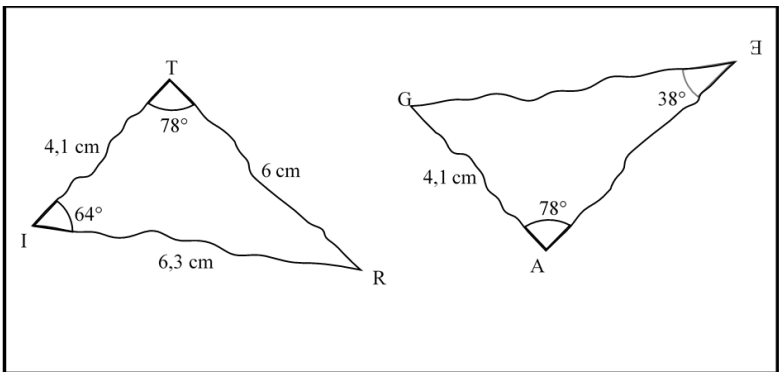
Remarque : Pour la première question, en utilisant les angles opposés par le sommet et la somme des angles d'un triangle, on peut montrer que les triangles SIM et SEL ont les mêmes angles. On peut alors utiliser le cas ACA et déduire les égalités de longueurs qui nous intéressent. On pourrait aussi s'intéresser aux triangles MLI et EIL et passer par l'égalité des angles pour montrer que le triangle LIS est isocèle, mais il faudrait utiliser le cas d'égalité spécifique du triangle rectangle (à moins qu'on ait déjà le théorème de Pythagore, ce qui n'est pas prévu dans la progression que nous envisageons). C'est une occasion de s'y intéresser mais il vaut mieux l'avoir rencontré avant (pour le démontrer on peut par exemple inclure les triangles rectangles dans des triangles isocèles dont ils sont la moitié, voir exercice 12.13 dans l'annexe 1). Mais, dans le cas présent, il n'est pas nécessaire que les triangles MIL et ILE soient rectangles. Il suffit que les angles en M et E soient égaux pour que le quadrilatère MILE soit un trapèze.

Pour la deuxième question, il faut de plus montrer que les deux triangles isocèles ont les mêmes angles (en utilisant l'égalité de leurs angles au sommet et la somme des angles d'un triangle) et les reconnaître en position d'alternes-internes avant de conclure.

6. L'évaluation sommative (1 séance)

L'évaluation sommative respecte scrupuleusement les critères d'évaluation présentés aux élèves. Afin de les responsabiliser et de développer leur autonomie, elle a été annoncée aux élèves environ une semaine à l'avance pour qu'ils puissent organiser leurs révisions. Toutes les copies ont été scannées (26 élèves en 4^{ème}) afin que nous puissions les analyser et ainsi évaluer la séquence d'enseignement sur les cas d'égalité des triangles. Pour chaque exercice, nous donnons les raisons des choix et présentons quelques productions d'élèves représentatives, éventuellement accompagnées de quelques éléments d'analyse.

Exercice 1



L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.
La longueur AE est égale à 6 cm.

Analyse a priori : Les savoirs en jeu sont la somme des angles d'un triangle et le cas d'égalité ACA. Ce type d'exercice ayant été travaillé à plusieurs reprises, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral (via les questions flash), nous attendons que, dans cette configuration, les élèves sachent qu'ils doivent mobiliser la propriété sur la somme des angles du triangle et le cas d'égalité ACA. Le raisonnement comporte deux étapes mais ne nécessite aucune adaptation de ces connaissances. Dans la grille d'évaluation, cet exercice correspond à un niveau 3.

Remarque

Dans cet exercice, comme dans les autres exercices du contrôle, ainsi que ceux travaillés auparavant, les triangles portent des noms variés afin de forcer les élèves à développer des compétences pour associer correctement les sommets, les angles et les côtés. De même, le choix de donner des figures à main levée, vise à éviter que les élèves ne mesurent sur la figure. Bien sûr, on ne peut pas empêcher les élèves de construire les triangles à taille réelle.

Résultats

Rien de correct	Uniquement le calcul d'un angle	Rappel imparfait des conditions d'utilisation du cas d'égalité ACA	Très bonne résolution
2 élèves	6 élèves	3 élèves	15 élèves

Voici une des solutions correctes et bien écrites.

Dans un triangle, la somme des angles est égale à 180° .

$$180^\circ - (\widehat{GAE} + \widehat{GEA})$$

$$= 180^\circ - (78^\circ + 38^\circ)$$

$$= 180^\circ - \{116\}$$

$$= 64^\circ$$

Dans les triangles ITR et GEA, on sait que :

$$TI = GA = 4,1 \text{ cm}$$

$$\widehat{TIR} = \widehat{AGE} = 64^\circ$$

$$\widehat{ITR} = \widehat{GAE} = 78^\circ$$

D'après le cas d'égalité ACA, les triangles ITR et GEA sont isométriques.

Donc la longueur AE est égale à 6 cm.

Exercice 2

Soit SAM un triangle tel $MS = 5 \text{ cm}$, $MA = 3 \text{ cm}$ et $\widehat{AMS} = 70^\circ$ et I un point tel que $SI = 3 \text{ cm}$, $AI = 5 \text{ cm}$ et M et I de part et d'autre de la droite (AS) .

- 1) Construire la figure ci-dessous.
- 2) Montrer que les triangles SAM et ASI sont isométriques
- 3) En déduire que $\widehat{ISA} = \widehat{SAM}$
- 4) Montrer que les droites (SI) et (AM) sont parallèles.

Analyse a priori : En plus de la construction de la figure, les savoirs en jeu sont le cas d'égalité CCC, la réciproque du théorème sur sécante et parallèles. L'algorithme de construction d'une telle figure a été travaillé lors des exercices ; les élèves connaissent la signification de l'expression « de part et d'autre d'une droite ». Il n'y a donc pas de difficulté particulière sur la question qui correspond à un niveau 1 selon les critères d'évaluation de la classe. Les élèves savent aussi qu'à la question 2, ils devront mobiliser un cas d'égalité des triangles (ici, CCC). Le fait que les triangles isométriques ont le côté $[AS]$ en commun nécessite une adaptation du cas d'égalité CCC et donc représente une difficulté. D'après la grille d'évaluation, les questions 2 et 3 correspondent à un niveau 2. Dans la question 4, le fait de devoir utiliser le résultat de la question 3 peut représenter une difficulté pour des élèves. De plus, la propriété sur les angles alternes-internes égaux doit être disponible chez les élèves alors que ce n'est plus l'objet du cours. D'après la grille d'évaluation, la question 4 correspond à un niveau 4.

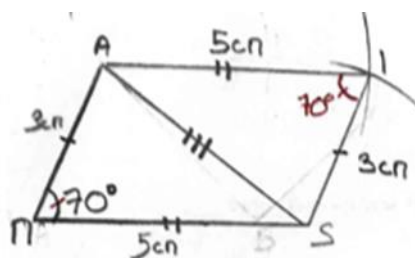
Dans cet exercice, les raisonnements comportent tous une seule étape. Cependant, le fait que la figure tracée (le quadrilatère $AISM$) soit un parallélogramme bien que le texte ne l'indique pas, peut représenter un obstacle (confusion entre « ce que l'on sait » et « ce que l'on voit ») difficilement surmontable pour des élèves. Il n'est pas demandé de le démontrer. Pour le faire, il faut, de manière analogue à la question 4, prouver que les droites (AI) et (MS) sont parallèles ou mobiliser la propriété (étudiée en 5^{ème} dans ce collège) : « Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés deux à deux de même longueur alors ce quadrilatère est un parallélogramme. »

Résultats

Question 1

Construction incorrecte	Construction correcte
1 élève	25 élèves

Deux élèves ont écrit une valeur numérique pour l'angle AIS.



Question 2

Rien	Cas d'égalité ACA	Cas d'égalité CAC	Cas d'égalité CCC
2 élèves	0 élève	8 élèves	16 élèves

Voici deux productions d'élèves, l'une (correcte) utilisant le cas CCC, l'autre utilisant le cas CAC, ce qui aurait demandé de montrer auparavant l'égalité des angles.

2) Dans les triangles SAM et SIA on a:
 $IA = MS = 5\text{cm}$
 $AM = SI = 3\text{cm}$
 SA est commun aux deux triangles
 Don d'après le cas d'égalité CCC les triangles SAI et SAM sont isométriques

Dans les triangles SAM et ASI, on sait que :

- $AM = IS = 3\text{cm}$
- $MS = IA = 5\text{cm}$
- $\widehat{AMS} = \widehat{AIS} = 70^\circ$ car MAIS est un parallélogramme car dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles et de même longueur deux à deux. Aussi, les angles d'un parallélogramme sont égaux deux à deux.

D'après le cas d'égalité CAC, les triangles SAM et ASI sont isométriques.

L'analyse *a posteriori* des copies confirme notre analyse *a priori* de cette question. Les élèves ayant utilisé le cas d'égalité CAC ont considéré que la figure tracée était un parallélogramme ou l'ont « prouvé » en utilisant une donnée issue de l'observation. Le passage d'une géométrie perceptive à une géométrie argumentée représente toujours un obstacle, indépendamment de la notion étudiée.


Question 3

Question non abordée	Pas de justification	Angles mesurés	Angles alternes-internes	Angles homologues
4 élèves	2 élèves	3 élèves	5 élèves	12 élèves

Voici quelques productions d'élèves, chacune représentative d'une des procédures :

3) Par construction $\widehat{ISA} = \widehat{SAM}$ | ③ \widehat{ISA} et $\widehat{SAM} = 75^\circ$

3) D'après la propriété vue en cours disant que les angles alternés-internes sont égaux, $\widehat{ISA} = \widehat{SAM}$.

3)  les triangles SAM et ASI sont isométriques donc $\widehat{SAM} = \widehat{ASI}$.

Sur les 24 élèves ayant répondu la question 2, la moitié (12) ont utilisé les angles homologues pour répondre à la question 3, ce qui montre qu'ils ont été capables d'utiliser les triangles isométriques comme outil de démonstration.

Question 4

Question non abordée	Pas de justification	Parallélogrammes	Angles alternés-internes
7 élèves	4 élèves	7 élèves	8 élèves

Voici des copies relevant de chacune de ces procédures

Par construction (SI) et (AM) sont parallèles

4) Comme deux triangles isométriques créent un parallélogramme et qu'un parallélogramme a des côtés parallèles on en déduit que $(SI) \parallel (AM)$.

Les angles \widehat{ISA} et \widehat{SAM} sont des angles alternés-internes, (SA) est la sécante des droites (SI) et (AM) .
Propriété:
Si deux angles alternés-internes sont égaux, alors les droites coupées par la sécante sont parallèles.
Donc: $(SI) \parallel (AM)$.

Cette question étant d'un niveau 4, il était attendu qu'elle soit moins bien réussie par les élèves, d'autant qu'il y a la présence visuelle d'un « parallélogramme » ! L'analyse *a posteriori* des copies confirme notre analyse *a priori* de cette question. Les copies illustrent bien la difficulté que représente pour les élèves le passage d'une géométrie perceptive instrumentée à une géométrie de la démonstration.

Exercice 3

Soient LAS un triangle isocèle en S tel que $LA = 6$ cm et $SA = 8$ cm, E le point appartenant au côté $[LS]$ tel que $LE = 2$ cm, I le point appartenant au côté $[AL]$ tel que $AI = 2$ cm et M le point appartenant au côté $[AS]$ tel que $AM = 4$ cm.

1) Construire la figure.

2) Montrer que $\widehat{SLA} = \widehat{SAL}$.

- 3) Montrer que les triangles AMI et LIE sont isométriques.
 4) En déduire la nature du triangle MIE .

Analyse a priori : En plus de la construction de la figure, les savoirs en jeu sont ceux sur les côtés et angles des triangles isocèles et le cas d'égalité CAC. La construction de la figure (question 1) ne présente pas de difficulté particulière ; elle correspond à un niveau 1 de la grille d'évaluation. Dans la question 2, les élèves doivent mobiliser la propriété sur les angles relatifs à la base d'un triangle isocèle. Etant donné que ce type d'exercice a été travaillé à plusieurs reprises, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral (via les questions flash), nous pouvons considérer que cette connaissance est disponible. Cependant, l'absence de valeurs numériques pour les angles peut représenter une difficulté pour des élèves. Nous considérons donc que la question 2 correspond à un niveau 3 de la grille d'évaluation. Pour la question 3, les élèves doivent mobiliser un cas d'égalité des triangles (ici, ACA). Le fait de penser à utiliser le résultat de la question 2 peut représenter une difficulté. D'après la grille d'évaluation, la question 3 correspond à un niveau 3. Pour la question 4, la définition d'un triangle isocèle doit être disponible chez les élèves, utilisable sans indication. On peut estimer que cette question correspond à un niveau 4.

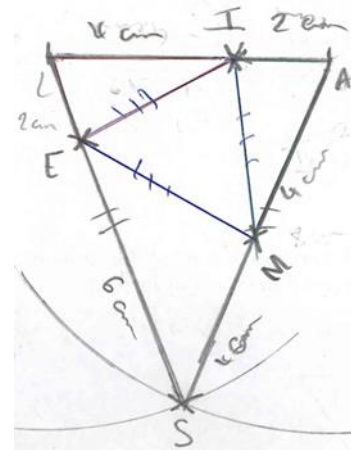
Résultats

Question 1

Pas de construction	Construction incorrecte	Construction correcte
1 élève	3 élèves	22 élèves

On peut constater que les constructions sont très bien réussies par les élèves. Ce point avait été l'objet d'une grande attention de la part de l'enseignant suite aux constats faits lors de l'évaluation diagnostique.

Notons que, sur la copie reproduite ici, correctement construite, l'élève code les trois côtés du triangle EMI comme égaux (et ce sera sa réponse à la question 4).



Question 2

Question non abordée	Très bonne résolution
8 élèves	18 élèves

Tous les élèves qui ont abordé cette question l'ont réussie. Voici quelques réponses :

2) Une propriété du cours explique que les sommets opposés au sommet principal d'un triangle isocèle sont égaux.
 Vu que LAS est isocèle en S , $\widehat{SLA} = \widehat{LAS}$

2) Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont de même mesure.
 Étant donné que le triangle LAS est isocèle en S, les angles à la base sont \widehat{SLA} et \widehat{SAL} .
 Donc $\widehat{SLA} = \widehat{SAL}$

Ex 3

2- Si un triangle est isocèle, alors les angles opposés au sommet principal sont égaux.

Le taux important de réussite à cette question montre que la propriété sur les angles d'un triangle isocèle est très majoritairement disponible chez les élèves. Cela s'explique par un important travail d'entretien de cette notion via des questions flash et quelques questions dans les exercices.

Question 3

Question non abordée	Très bonne résolution
11 élèves	15 élèves

On arrive en fin de contrôle ; le nombre de non réponse augmente. La question est réussie par les 15 élèves qui l'ont abordée, ce qui peut être considéré comme satisfaisant. Voici trois des réponses :

3) Dans les triangles LIE et AMI, on a
 $LI = AM = 4 \text{ cm}$
 $AI = EL = 2 \text{ cm}$
 $\widehat{SLA} = \widehat{LAS}$
 En utilisant le cas d'égalité CAC,
 je prouve que AMI et LIE sont isométriques.

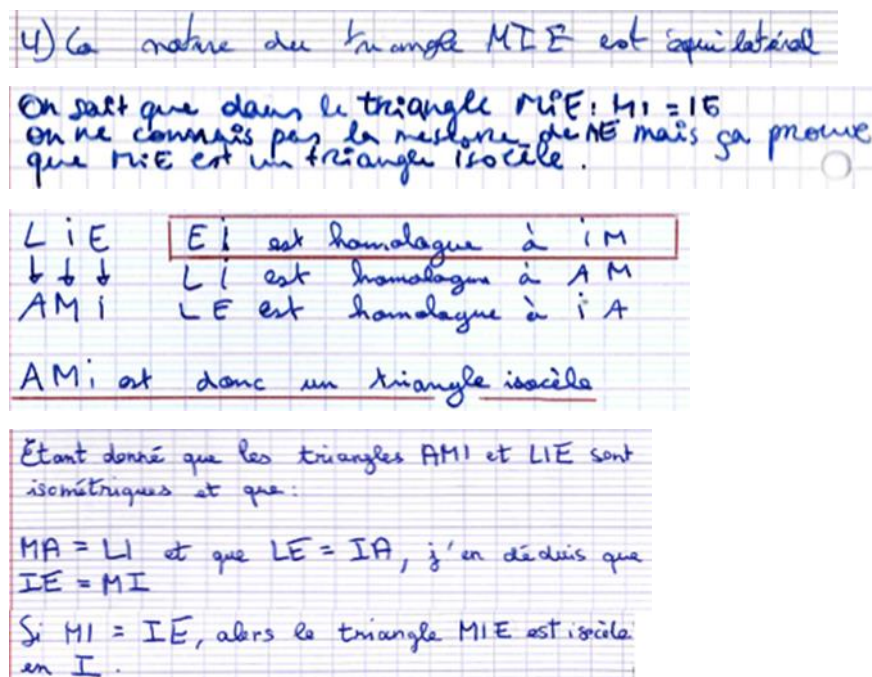
Dans les triangles AMI et LIE, on sait que :
 $LE = IA$
 $LI = MA$
 $\widehat{SLA} = \widehat{SAL}$
 D'après le cas d'égalité CAC, les triangles AMI et LIE sont isométriques.

3- Dans les triangles AMI et LIE on sait que
 • $LE = AI = 2 \text{ cm}$
 • $LI = AM = 4 \text{ cm}$
 • $\widehat{LIA} = \widehat{MAI}$
 Selon le cas d'égalité CAC les triangles AMI et LIE sont isométriques.

Question 4

Question non abordée	Pas de justification	Triangle équilatéral	Triangle isocèle
10 élèves	1 élève	2 élèves	13 élèves

La moitié des élèves (13) montrent correctement qu'il s'agit d'un triangle isocèle en déduisant l'égalité des longueurs en utilisant les triangles isométriques de la question précédente. Voici quelques réponses.



Des élèves pensent que le triangle MIE est équilatéral, ce qui semble être le cas sur la figure. Cela montre une fois encore la difficulté du passage de la géométrie perceptive à la géométrie de la démonstration.

Bilan de l'évaluation

Remarquons d'abord que l'évaluation sommative proposée teste tous les savoirs concernant les cas d'égalité des triangles, chacun d'eux intervenant une seule fois et qu'il y a des questions à tous les niveaux de compétence. Elle nous semble donc permettre d'évaluer de manière assez fiable les acquis des élèves sur les cas d'égalités des triangles.

Le premier exercice reprend des questions travaillées dans les exercices techniques, avec l'adaptation à réaliser concernant la somme des angles d'un triangle. Il y a plus de non réponse dans les dernières questions de l'exercice 3 mais il nous semble pouvoir affirmer qu'à la fin de la séquence sur les cas d'égalité des triangles, une moitié des élèves au moins utilisent les triangles isométriques comme un outil pour démontrer. En comparant les résultats des exercices 2 et 3, on pourrait se demander si les élèves perçoivent mieux les cas d'égalité de triangles comme un outil pour comparer deux longueurs que pour comparer deux angles. Cependant d'autres facteurs interviennent comme la vision du parallélogramme dans l'exercice 2 et le fait que l'exercice 3 soit le dernier. Il serait d'ailleurs intéressant d'échanger l'ordre des exercices 2 et 3 pour voir si cela a une influence sur la réussite des élèves à ces questions.

7. Questions flash

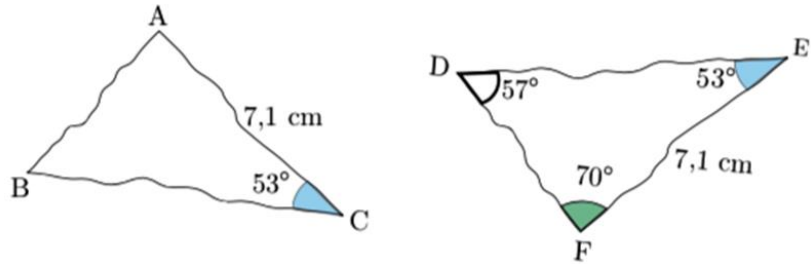
Voici quelques exemples des questions flash proposées aux élèves pour développer des automatismes concernant les cas d'égalité des triangles.

Exercice 1

Voici deux triangles isométriques

L'affirmation suivante est-elle vraie ?

Les angles \widehat{BAC} et \widehat{EDF} sont homologues

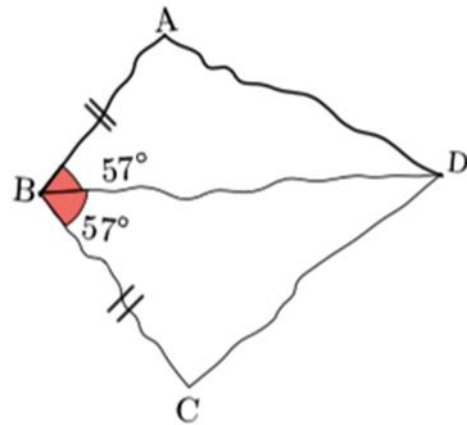


Exercice 2

Voici deux triangles.

Quel est le cas d'égalité que l'on peut utiliser ?

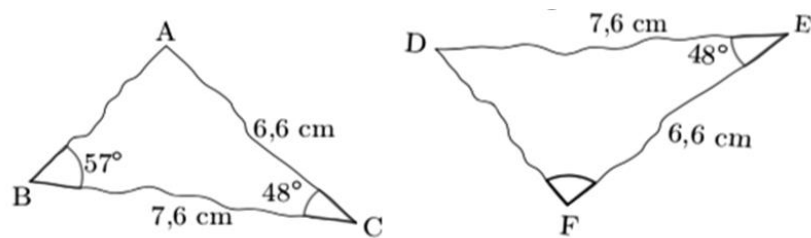
CCC - CAC - Aucun - ACA



Exercice 3

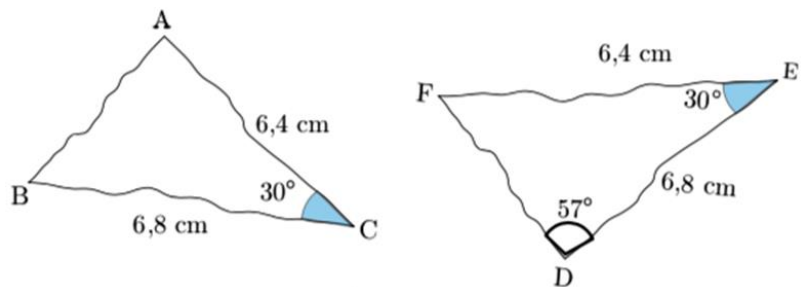
L'affirmation suivante est-elle vraie ?

$\widehat{DFE} = 75^\circ$



Exercice 4

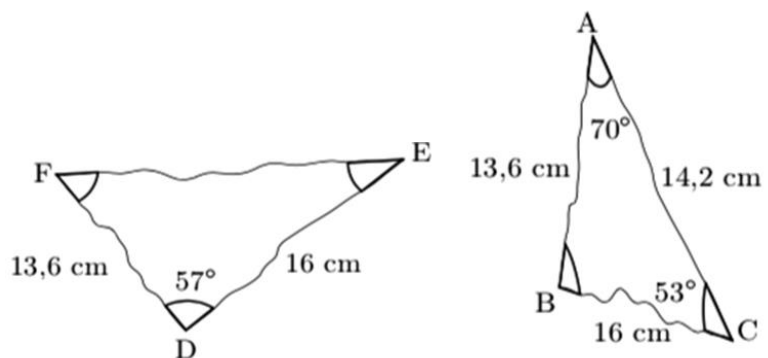
Calculer l'angle \widehat{BAC} .



Exercice 5

L'affirmation suivante est-elle vraie ?

$EF = 14,2$ cm.



IV. Synthèse

Dans ce paragraphe, nous souhaitons revenir sur quelques points qui apparaissent au cours de ces réalisations de classe et qui nous semblent mériter une mise au point (qui est souvent un rappel contextualisé de ce qui a été dit dans les chapitres précédents), ou une discussion un peu plus large.

1. Mises au point

Définition de l'égalité des triangles

Comment définir l'égalité de deux triangles ABC et DEF ? Comme nous l'avons déjà expliqué dans l'introduction, il nous semble que la définition la plus pertinente au collège est de dire que des triangles sont égaux quand ils sont superposables, avec ou sans retournement, c'est-à-dire quand ils ont leurs trois angles et leurs trois côtés égaux deux à deux. Les cas d'égalité sont des théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour l'égalité des triangles sans qu'on ait besoin de vérifier les six conditions. Si, comme dans certains manuels, on définit les triangles égaux par l'égalité des trois côtés homologues, il faut ajouter un théorème, en général absent des mêmes manuels : *Si deux triangles ont leurs côtés égaux deux à deux, leurs angles homologues sont égaux*. On ne fait donc aucune économie sur le nombre de théorèmes du cours et cela demande un pas de plus dans certaines démonstrations.

Sur les points homologues

Dès que l'on parle d'égalité des triangles (et ce sera la même chose pour la similitude), il est essentiel de savoir quels sommets sont homologues, c'est-à-dire se correspondent. Les autres éléments homologues (côtés, angles) s'en déduisent. Pour trouver les sommets homologues, on peut commencer par repérer les angles égaux : ils correspondent à des sommets homologues (il y a deux possibilités si les triangles sont isocèles). Ensuite, si l'on a des côtés égaux, par exemple $AB = DE$ et que l'on sait déjà que A et D sont homologues, on en déduit que B et E le sont aussi. Si l'on n'a que des égalités de côtés, les sommets opposés aux côtés égaux sont homologues (il y a encore deux possibilités pour les triangles isocèles). Pour aider les élèves à être vigilants sur ce point, on peut leur conseiller d'écrire les noms des triangles l'un sous l'autre en faisant se correspondre les sommets homologues. Au moment de la recherche, le repérage des éléments homologues est un moyen heuristique de voir quels triangles pourraient être égaux, et en vertu de quel cas. Une fois l'égalité établie, le respect des éléments homologues dans la manière de nommer les triangles est un moyen de déduire les autres égalités sans même regarder la figure.

Manière de nommer les cas d'égalité des triangles

Il n'y a pas d'accord sur la numérotation des cas. Elle varie selon les époques et les auteurs. Pour éviter toute ambiguïté, nous avons choisi de nommer les cas suivant les éléments présents dans les hypothèses, soit CAC pour angle entre deux côtés, ACA pour côté entre deux angles et CCC pour trois côtés.

Choix de mesures décimales pour les triangles

Quand on veut donner aux élèves des exemples de triangles avec des valeurs numériques fixées, il n'est pas si facile de choisir les mesures. Déjà, on sait que le choix de trois d'entre elles détermine en général les autres, éventuellement à un choix près. On ne peut donc en donner plus que si l'on a vérifié leur compatibilité (ce n'est pas toujours le cas dans les exercices des manuels, voir ch. 10 exercice 2.5). De plus, il est impossible, sauf pour les triangles équilatéraux, que toutes les mesures des angles et des côtés prennent des valeurs entières ou même décimales ; il faut que donc certaines d'entre elles soient approchées. On pourra, pour une étude de la question se reporter à l'annexe 2. Il est aussi fortement recommandé de construire les triangles avec un logiciel comme GeoGebra pour être sûr de

proposer des valeurs numériques qui correspondent vraiment à un triangle. On peut pour cela fabriquer des macros à partir de chacun des cas d'égalité. Cela permet à la fois de construire des triangles et de vérifier la cohérence des données que l'on a proposées.

Contrexemple pour le cas où l'angle n'est pas entre les côtés

Si l'on veut choisir des valeurs numériques pour proposer aux élèves un triangle à reproduire, comme dans la situation des triangles téléphonés, il faut s'assurer qu'on pourra avoir deux solutions avec le choix d'un angle qui n'est pas situé entre les côtés dont on donne la mesure. En fait, c'est très souvent le cas mais cela dépend des choix faits. Il y a des cas où, même si l'angle n'est pas entre les côtés, la construction ne donne qu'une solution. On trouvera une étude complète dans l'annexe 2.

2. Discussion

Choix des variables didactiques dans le problème des figures téléphonées

Le problème des figures téléphonées a été choisi par les trois enseignants pour démarrer la séquence. Il est assez naturel car il permet d'appuyer l'étude des cas d'égalité des triangles sur la construction de triangles, pratique familière aux élèves dès la sixième et même avant. Cependant, les trois enseignants ont fait des choix différents. Laisser la situation ouverte comme l'a fait Charlène donne en principe un caractère de généralité à la situation : on prend n'importe quel triangle. Cependant, les élèves peuvent choisir des triangles particuliers, ce qui risque d'appauvrir les messages. Pour éviter cela, on peut demander aux élèves de tracer un triangle qui ne soit ni isocèle ni rectangle. Au moment de la mise en commun, la gestion est un peu plus difficile mais elle engage les élèves à s'intéresser à la méthode et aux relations plutôt qu'aux valeurs numériques et à la figure particulière. Imposer le triangle à reproduire assure de rencontrer un cas général. Il faut aussi s'assurer que le triangle choisi permet de rencontrer le cas frauduleux : deux côtés et un angle qui n'est pas compris entre les deux côtés. C'est le cas si le triangle n'est pas isocèle. Cependant, ce n'est pas assuré selon les choix des élèves. Pour le triangle ABC choisi par Sébastien, par exemple si l'on donne les longueurs $AC = 7$ cm et $BC = 8$ cm et l'angle $\hat{B} = 60^\circ$, il y a deux solutions mais pour le choix des longueurs $AB = 4$ cm, $BC = 8$ cm et $\hat{A} = 87^\circ$, il n'y a qu'une solution (voir annexe 2). Imposer des triangles mais avec des choix différents pour des binômes différents comme l'a fait Guillaume permet en même temps d'avoir de bonnes chances de rencontrer les exemples qu'on souhaite rencontrer et d'avoir une certaine variété de triangles. Organiser les échanges dans ce cas demande une bonne organisation du professeur car il ne faut pas donner au récepteur d'un message le triangle qu'il avait en tant qu'émetteur.

Sur l'organisation de la séquence

La séquence a été organisée dans des conditions différentes dans les trois classes, car les progressions des établissements n'étaient pas les mêmes. Les élèves n'avaient donc pas les mêmes connaissances au départ. Dans la progression que nous encourageons (voir chapitre 4), les cas d'égalité des triangles se situent assez tôt dans l'année de 5^{ème}, donc au tout début du cycle 4, comme dans la classe de Sébastien. Dans ce cas, les élèves n'ont rencontré que les notions de base et la symétrie axiale.

Les repères de progression parus depuis conseillent de les traiter en 4^{ème} (voir chapitre 5). Il est néanmoins nécessaire de traiter les cas d'égalité des triangles avant le théorème de Pythagore puisqu'on peut les utiliser pour le démontrer. Le cas d'égalité particulier des triangles rectangles (deux côtés et un angle mal placé) peut facilement se démontrer sans utiliser le théorème de Pythagore (annexe 1, exercice 12.13).

Gestion des apprentissages : mise en commun, trace écrite, cours, évaluation

Il peut être utile de réaliser, comme dans la classe de Guillaume, une évaluation diagnostique sur les notions sur lesquelles on compte s'appuyer dans une situation d'introduction. Une mise en commun est essentielle pour expliciter et confronter les productions des élèves issues d'une phase de recherche d'un problème, par exemple pour introduire une notion nouvelle. Il est important d'en garder une trace écrite qui reste une référence contextualisée pour le cours. Dans le cas présent, cette trace écrite doit au moins contenir les conjectures des trois cas d'égalités. Il est souhaitable que la définition des triangles égaux ou isométriques (trois égalités d'angles et trois égalités de longueurs) y figure aussi ; en tout cas, il est indispensable qu'elle figure dans le cours. En effet, quelle que soit la forme retenue, il nous semble important que le cours reprenne la définition des triangles isométriques, donne les énoncés des cas d'égalité (ou d'isométrie), et introduise la notion d'éléments homologues (angles, sommets et côtés) à partir d'exemples.

Les exercices sont essentiels et jouent des fonctions variées dans l'enseignement. La formulation des textes ne sera pas la même suivant qu'on les propose en travail de groupes, individuel, en classe ou à la maison, en devoir maison ou en évaluation. Nous n'avons pas donné dans ce compte-rendu des séquences de classe tous les exercices qui ont été proposés aux élèves. Dès qu'on a introduit les cas d'égalité et fait quelques exercices simples qui permettent leur appropriation par les élèves, le champ d'utilisation possible est vaste. On peut par exemple effectuer des preuves des propriétés connues sur les triangles, les parallélogrammes quelconques ou particuliers. On peut également proposer des applications pour prouver que deux longueurs sont égales ou deux angles sont égaux, avec plus ou moins d'étapes intermédiaires. Bien sûr, plus tard dans l'année, un retour sur la notion est nécessaire. Pour cela, on peut reprendre tous ces types d'exercices après quelques semaines. On trouvera dans le chapitre 10 des exercices classés et analysés. Ils ne sont pas toujours rédigés directement pour les élèves mais donnent des supports que chaque professeur peut adapter à sa classe.

Pour construire l'évaluation finale, il est indispensable d'avoir repéré clairement les connaissances et savoirs qui étaient enjeu d'apprentissage de manière à vérifier que ce sont bien eux qui sont à l'œuvre dans les exercices proposés aux élèves. Ici il s'agit bien sûr de la connaissance des cas d'égalité mais aussi de leur utilisation pour démontrer, et pour cela, de la reconnaissance des points homologues et de l'articulation avec les connaissances géométriques précédentes comme les théorèmes sur sécantes et parallèles ou la somme des angles d'un triangle.

Conjecture et preuve

Nous avons pu voir, dans les productions des élèves de la classe de Charlène (classe C), qu'il est encore difficile pour beaucoup d'entre eux de faire la différence entre ce qui est une conjecture et ce qu'on sait, soit parce que cela figure dans les hypothèses, soit parce qu'on l'a déjà démontré. On trouve parfois parmi les conjectures aussi bien des hypothèses que des preuves. Aussi difficile et ingrat qu'il soit, ce travail de formulation d'énoncés par les élèves eux-mêmes nous paraît essentiel pour les aider à entrer dans la rationalité mathématique et contribue à leur faire distinguer ce qu'on sait déjà de ce qu'on cherche à démontrer. Avant de prouver, il faut avoir une idée claire de ce qu'on cherche à prouver et aussi de ce qu'on sait déjà.

La démonstration est en cours d'apprentissage, et même au tout début pour les 5^{ème}. On peut voir dans les productions d'élèves de toutes les classes des difficultés bien connues concernant le rapport à la figure : constater ne suffit pas, mesurer ne permet que de faire des conjectures, ce n'est pas une preuve acceptable dans le cadre de la démonstration. Certains élèves pensent sans doute que la mesure ajoute un poids supplémentaire à leur preuve puisqu'ils mesurent même quand ils ont vu tous les arguments pour une preuve (voir par exemple réponse 8, classe C : l'élève mesure pour vérifier que

les angles sont égaux alors que le triangle est isocèle par hypothèse). Quand ils ont toutes les bonnes idées, ce n'est pas facile de les ordonner et de les organiser sous forme déductive (réponse 7, classe C). Ils ont du mal à distinguer conséquence et argument (réponses 9, 10 dans la classe C) même quand il suffirait de supprimer cet argument inutile pour que la démonstration soit juste (réponse 10). Il y a aussi des problèmes de vocabulaire et de désignation des objets géométriques (réponse 5, classe C). Au niveau du codage, les élèves codent souvent de la même manière ce qu'ils savent et ce qu'ils cherchent⁶³. Or le codage joue un rôle important dans l'analyse de la figure et la reconnaissance des éléments pertinents, notamment les théorèmes qu'on peut utiliser.

Cependant, on peut voir aussi que beaucoup d'élèves s'emparent des cas d'égalité comme outil de preuve. Bien sûr, il y a des difficultés spécifiques qui doivent être identifiées et prises en compte comme le fait de reconnaître les points homologues et de voir un même segment comme côté de deux triangles différents (en particulier il n'y a pas de codage pour le repérer alors que le codage des égalités intervient fortement dans la reconnaissance des cas d'égalité). Mais la conjonction entre un aspect visuel important dans la phase de recherche et une rédaction facilement algorithmisable fait de cet outil un moyen précieux pour entrer dans la problématique de la démonstration.

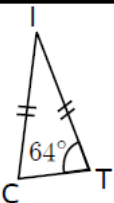
⁶³ A ce propos, on pourra trouver dans l'annexe 4 des exemples de problèmes qui permettent de travailler avec les élèves la différence entre ce qu'on sait de la figure (les hypothèses) et ce qu'on cherche à démontrer.

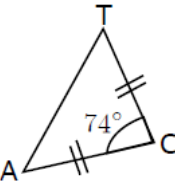
Annexes du chapitre 6

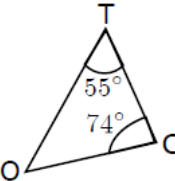
Évaluation diagnostique dans la classe de Guillaume

Exercice 1 :

Dans chaque situation entourer la bonne réponse.

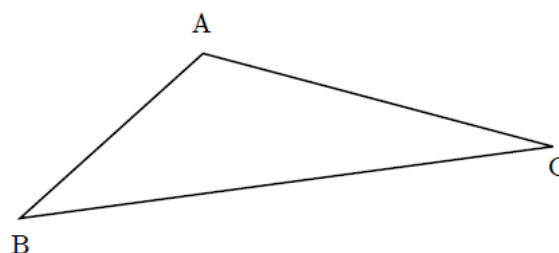
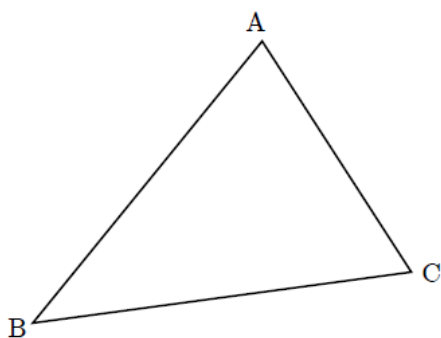
L'angle \widehat{TIC} est égal à :	Réponse A	Réponse B	Réponse C
	64°	52°	29°

L'angle \widehat{TAC} est égal à :	Réponse A	Réponse B	Réponse C
	74°	48°	53°

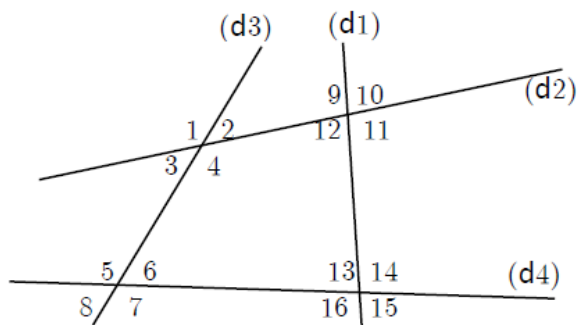
L'angle \widehat{TOC} est égal à :	Réponse A	Réponse B	Réponse C
	48°	51°	55°

Exercice 2 :

Dans les cas ci-dessous, construire la hauteur relative au côté [AB].



Exercice 3 :



Compléter les phrases suivantes :

Les angles n°13 et n°15 sont

Les angles n°4 et n°2 sont

Les angles n°4 et n°11 sont

Les angles n°6 et n°3 sont

Exercice 4 :

Construire un triangle ABC tel que
 $AB = 4 \text{ cm}$, $\widehat{BAC} = 35^\circ$ et $\widehat{ABC} = 45^\circ$

Construire un triangle EDF tel que
 $DF = 4 \text{ cm}$, $FE = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{FED} = 40^\circ$

Exercice 5 :

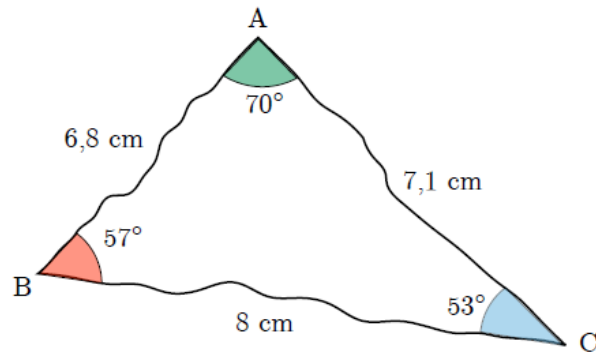
Construire un parallélogramme ABCD
tel que $AB = 5 \text{ cm}$ et $AD = 3 \text{ cm}$.

Construire un parallélogramme EFGH
tel que $EG = 6 \text{ cm}$ et $FH = 4 \text{ cm}$.

Classe de Guillaume. Exemple de fiche pour les élèves dans la situation d'introduction.

Emetteur 2 :

On considère le triangle ABC suivant :



Ecrire un texte contenant le moins de données possibles.

En lisant ton texte, une personne doit pouvoir construire ce triangle.

Texte :

Récepteur 2 :

Les données contenues dans le texte que tu as reçu permettent-elles de construire le triangle ? Justifier (on pourra utiliser les instruments de géométrie).

Classe de Guillaume. Grille utilisée pour prendre des informations pendant la situation d'introduction

Triangle initial		
Données reçues	Données utilisées	Triangle construit
Données reçues	Données utilisées	Triangle construit
Données reçues	Données utilisées	Triangle construit
Données reçues	Données utilisées	Triangle construit

Grille d'évaluation sur les cas d'égalité de triangles

Compétences retenues :

- Je sais construire une figure.
- Je sais calculer un angle dans un triangle quelconque.
- Je connais le nom des trois cas d'égalité des triangles : Cas d'égalité CAC, cas d'égalité ACA et cas d'égalité CCC
- Je sais identifier les côtés homologues pour utiliser le cas d'égalité CCC afin de montrer que deux triangles sont isométriques.
- Je sais utiliser les propriétés des angles d'un triangle isocèle.
- Je sais identifier les côtés homologues pour utiliser le cas d'égalité CCC afin de montrer que deux triangles sont isométriques.
- Je sais utiliser les propriétés des angles d'un triangle isocèle.

- Je sais résoudre des problèmes en utilisant les trois cas d'égalité des triangles.
- Je sais utiliser les propriétés sur les angles alternes-internes.

Exemple de compétences de niveau N3 :

Calculer le périmètre du triangle ABC

$$\begin{aligned} \widehat{BAC} &= 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \\ &= 180^\circ - (66^\circ + 38^\circ) = 76^\circ \end{aligned}$$

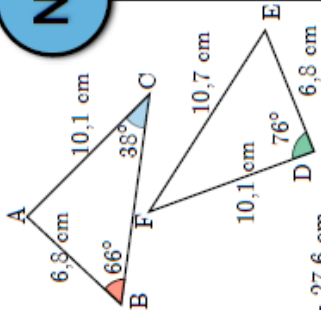
Dans les triangles ABC et DEF,

$$\widehat{EDF} = \widehat{BAC}, DE = AB \text{ et } DF = AC$$

D'après le cas d'égalité CAC, on a :

$$BC = EF = 10,7 \text{ cm}$$

$$\text{Périmètre de ABC} = 10,1 + 10,7 + 6,8 = 27,6 \text{ cm}$$



N3

Exemple de compétences pour le niveau N4 :

Montrer que BCED est un parallélogramme

Les angles \widehat{DCB} et \widehat{CDE} sont alternes-internes, égaux et définis par deux droites parallèles

$$\text{Donc on a : } \widehat{DCB} = \widehat{CDE} = 38^\circ$$

Les angles \widehat{DAE} et \widehat{CAB} sont opposés par le sommet. Donc on a : $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$

Dans les triangles ABC et AED,

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADE}, \widehat{CAB} = \widehat{DAE} \text{ et } DA = AC$$

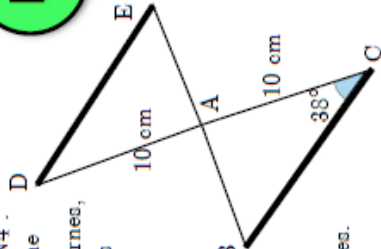
D'après le cas d'égalité ACA, on a :

les triangles ABC et AED sont isométriques.

$$\text{Donc on a : } DE = CB$$

BCED a deux côtés opposés [DE] et [CB] parallèles et de même longueur. Donc BCED est un parallélogramme.

N4



Exemple de compétences de niveau N2 :

Dans les triangles ABC et DEF,

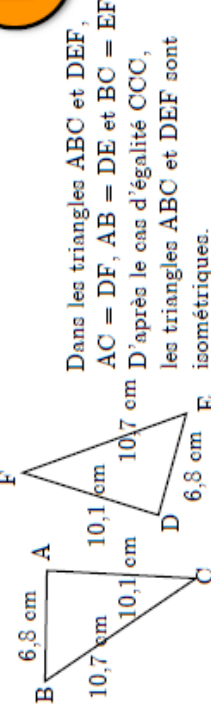
$$AC = DF, AB = DE \text{ et } BC = EF$$

D'après le cas d'égalité CCC,

les triangles ABC et DEF sont

isométriques.

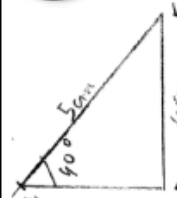
N2



Exemple de compétences de niveau N1 :

Construire un triangle EDF tel que

$$DF = 4 \text{ cm}, FE = 5 \text{ cm} \text{ et } \widehat{FED} = 40^\circ$$



N1

Equivalence de définitions du pentagone régulier

Lors du stage de formation continue 2020-2021, un groupe de stagiaires a travaillé sur l'exercice 1.29 de la banque d'exercices (chapitre 10) et a produit un exercice pour les élèves⁶⁴.

Énoncé de l'exercice

On veut montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Un pentagone non croisé a tous ses côtés de même longueur et ses angles égaux.
- (2) Un pentagone non croisé a tous ses côtés de même longueur et tous les sommets sont sur un même cercle.

A / Montrons d'abord que la condition (1) entraîne la condition (2).

Soit (d) la médiatrice de [DE] et (d') la médiatrice de [AE], O leur point d'intersection.

1/ Expliquer pourquoi O et E sont sur la médiatrice de [AD], en déduire la mesure des angles \widehat{OED} et \widehat{OEA} .

2/ En déduire la mesure des angles \widehat{ODE} et \widehat{OAE} , puis \widehat{ODC} et \widehat{OAB} .

3/ Quelle est l'égalité de type CAC que l'on peut alors écrire entre OED et ODC ?

4/ Prouver que O est équidistant des 5 sommets du pentagone.

B/ Montrons ensuite que la condition (2) entraîne la condition (1).

Que doit-on prouver ?

Expliquer pourquoi tous les triangles ODE, OEA, etc... de sommet O sont égaux.

Cette condition suffit-elle à conclure que les angles du pentagone sont égaux ?

C/ On peut facilement construire un pentagone dont tous les sommets sont sur un même cercle et dont les côtés ne sont pas de même longueur. Et peut-on construire un pentagone qui a tous ses côtés de même longueur sans que ses angles soient égaux ?

Démonstration

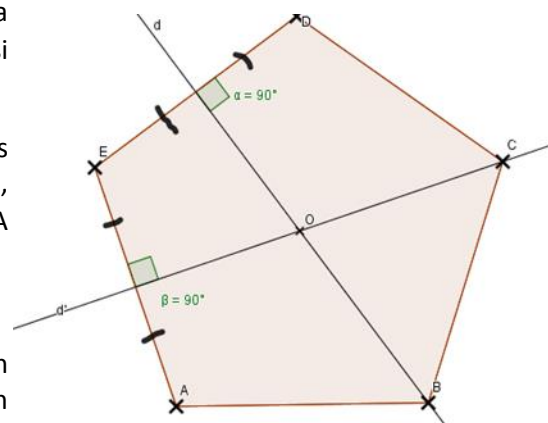
A) O est à la fois sur la médiatrice de [AE] et de [DE] donc $OA = OE = OD$ donc O est aussi sur la médiatrice de [AD]. AED est isocèle en E puisque $EA = ED$ donc E est sur la médiatrice de [AD] et la médiatrice de [AD] est aussi bissectrice de \widehat{AED} .

On en déduit que $\widehat{OED} = \widehat{OEA} = 54^\circ$ puisque tous les angles du pentagone valent 108° (voir remarque finale), puis que $\widehat{ODE} = \widehat{OAE} = 54^\circ$ car les triangles OED et OEA sont isocèles en O.

Finalement $\widehat{ODC} = \widehat{OAB} = 54^\circ$.

Par égalité CAC ($OE = OD$; $\widehat{OED} = \widehat{ODC}$; $ED = DC$), on en déduit que les triangles ODC et OED sont égaux. Il en est de même pour OAB, et donc $OA = OE = OC = OB = OD$, les points A, B, C, D, et E sont bien sur un même cercle de centre O.

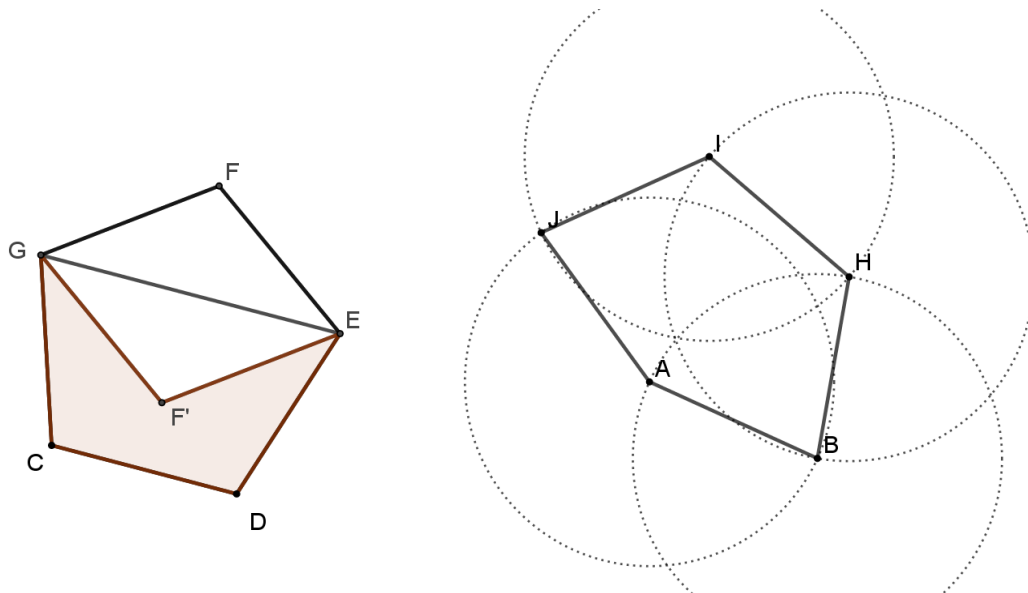
B) On doit prouver que les angles du pentagone sont égaux.



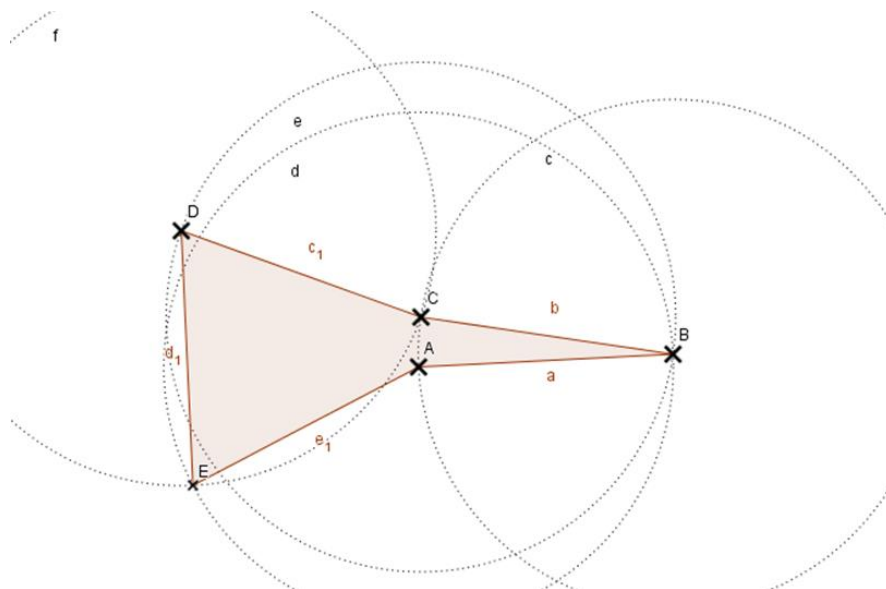
⁶⁴ Rédaction de Mathieu Delzant

Les triangles de sommet O sont tous égaux (CCC) et isocèles, donc leurs angles à la base sont égaux à 54° (puisque les angles au centre sont égaux et valent 72°) et ceux du pentagone sont égaux à 108° .

C) On peut fabriquer beaucoup de pentagones non réguliers ayant tous leurs côtés de même longueur. En partant d'un pentagone régulier et en prenant le symétrique d'un sommet par rapport à la diagonale qui joint les sommets voisins, on obtient un pentagone concave dont tous les côtés sont de même longueur. On peut aussi construire des pentagones convexes non réguliers dont tous les côtés sont de même longueur (penser au jeu de Meccano).



ou d'autres concaves



Remarque

Pour calculer les angles, il faut avoir montré auparavant que les angles du pentagone valent 108° . Il n'est pas nécessaire de calculer les angles à la base des triangles de sommet O : il suffit de montrer qu'ils sont égaux à la moitié de l'angle du pentagone. Cependant, il peut être plus simple pour les élèves de les calculer.

Chapitre 7

Démonstrations par les aires et théorème de Thalès

Dans ce chapitre, nous abordons d'abord la notion d'aire comme outil de démonstration, notamment pour démontrer le théorème de Thalès et le cas particulier du milieu. Une attention particulière est accordée à la démonstration des théorèmes rencontrés afin d'aider les élèves à entrer pleinement dans le monde mathématique où ils pourront émettre des conjectures, les tester, les invalider ou les démontrer. Les activités mises en œuvre se déroulent dans des classes de 4^{ème} et 3^{ème} d'Anne Pinvidic au collège Joliot Curie à Fontenay-sous-Bois dans les années 2018-2019 ou 2019-2020 pour la quatrième et 2019-2020 pour la troisième (classes 4A1, 4A2 et 3A1, 3A2). C'est un établissement non classé du val de Marne avec une grande mixité. Les séquences présentées concernent les théorèmes relatifs aux milieux des côtés d'un triangle en 4^{ème}, le théorème de Thalès et sa réciproque en 3^{ème}. Dans la suite du chapitre, nous proposons des activités d'introduction du théorème de Thalès qui peuvent aussi servir à introduire l'homothétie ou les triangles semblables.

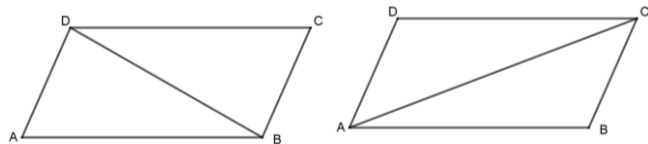
I. Les théorèmes indispensables sur les aires

Les aires sont abordées au cycle 3 (CM et 6^{ème}) et en 5^{ème} mais, comme elles sont rangées dans la rubrique grandeurs et mesures, elles sont traitées principalement du point de vue de la mesure et du calcul pour établir des formules. Pour une réflexion sur l'enseignement des aires et notamment les difficultés des élèves pour appréhender les rapports entre les aspects géométriques et numériques des aires, on peut consulter Douady et Perrin-Glorian (1984, 1985, 1989) et Perrin-Glorian (1990). L'enseignement s'attarde souvent peu sur les relations fondamentales qui existent entre les aires de figures usuelles ce qui a pour effet que, bien que très faciles à établir par le découpage et recollement, addition et soustraction d'aires, elles ne sont pas disponibles pour les élèves quand ils doivent les utiliser au sein d'une démonstration. Surtout, elles ne sont pas disponibles en dehors du registre du calcul parce qu'elles n'ont pas été abordées dans le cadre géométrique. Ce sont des relations fondatrices de la notion d'aire. On les trouve chez Euclide (voir chapitre 2) ; elles sont abordées dans Perrin-Glorian (2001) et traitées dans *Mathématiques d'école* (Perrin, 2011). Nous les reprenons rapidement ici et nous décrivons la mise en œuvre qui en a été faite avec des élèves dans la classe de 3^{ème} d'Anne en 2019-2020 (classe 3A2).

1. Le parallélogramme et le triangle

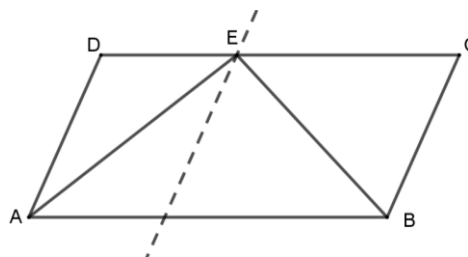
Premier résultat

Une diagonale d'un parallélogramme coupe ce parallélogramme en deux triangles de même aire. La démonstration est immédiate avec le cas CCC ou la symétrie centrale.



Deuxième résultat

Un triangle ayant un côté confondu avec un côté d'un parallélogramme et le sommet opposé à ce côté sur le côté opposé du parallélogramme, a une aire moitié du parallélogramme. On se ramène au premier résultat.



Évidemment, le rectangle est un cas particulier du parallélogramme. Les découpages et recollement qui ramènent le parallélogramme au rectangle sont des moyens d'établir la formule de l'aire du parallélogramme et du triangle à partir de celle du rectangle. Ces résultats sont à la fois fondamentaux et très puissants comme on le verra dans la suite.

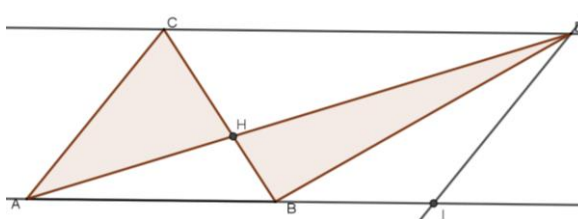
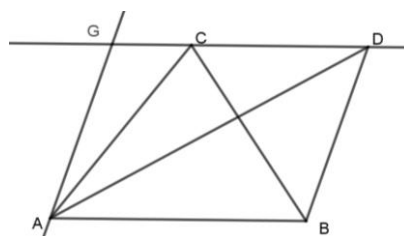
2. La parallèle

L'énoncé et la démonstration sans calcul

Deux triangles qui ont même base et des sommets situés sur une parallèle à la base ont même aire :

- Si $CD < AB$, les triangles ABC et ABD sont tous deux des moitiés du parallélogramme ABDC.

- Mais si $CD > AB$, la figure se complique. Pour montrer que ABC et ABD ont même aire, il suffit de montrer que les aires des triangles colorés (ACH et BDH) sont égales (voir dans les exercices du chapitre 10 « le papillon »). Cela résulte du fait que les triangles CAD et CBD sont tous deux des moitiés du parallélogramme AICD. Une autre façon de voir est de dire qu'en ajoutant l'aire de BDI à chacune des aires de ABC et ABD, on obtient la moitié de l'aire de AICD.



Il en est de même pour des parallélogrammes en raison de la relation entre triangles et parallélogrammes : s'ils ont un côté commun et les côtés opposés sur une même parallèle à ce côté, ils ont même aire. La dernière démonstration est encore un exemple de la flexibilité du regard à porter sur une figure en géométrie élémentaire : il faut changer de point de vue pour considérer les triangles de base commune [CD] au lieu de ceux de base commune [AB].

Évidemment tous ces résultats se déduisent aussi de la formule une fois qu'on l'a établie.

La mise en œuvre dans les classes d'Anne

En 4^{ème}, l'activité s'est déroulée en classe avec la consigne suivante :

On considère un triangle ABC.

Où peut-on placer le point M pour que le triangle MBC ait la même aire que le triangle ABC ?

Trouver toutes les positions possibles pour le point M.

La démonstration se fait avec la formule.

L'activité proposée aux élèves de 3^{ème} utilise Geogebra pour conjecturer et s'appuie sur la formule pour démontrer.

Ouvrir GeoGebra. Cacher les axes s'ils sont visibles.

Créer un triangle EFG.

Créer la parallèle à (EF) passant par G.

Placer un point H sur cette parallèle.

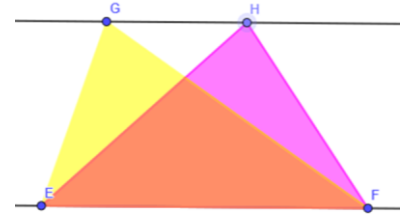
Créer le triangle EHF.

Afficher les aires des triangles EFG et EFH. Que peut-on constater ?

Déplacer le point H. Cette constatation semble-t-elle toujours vraie ?

Quelle conjecture peut-on faire ?

Démontrer la conjecture.



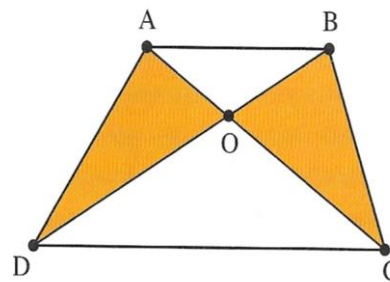
Voici quelques productions d'élèves qui montrent qu'ils ont relié leur conjecture au calcul de l'aire du triangle.

<p>A. 4/ Les aires de EFG et de EFH sont égales 5/ La conjecture semble vraie 6/ Les aires des triangles EFG et EFH sont toujours égales</p> <p>B. L'aire de EFG sera toujours égale à celle de EFH car la base des triangles est la même (EF) et leur hauteur aussi car G et H sont sur la même droite parallèle à la base, ainsi, un segment [GA] perpendiculaire à (EF) et un segment [HB] perpendiculaire à (EF) ont la même distance (pour A et B ∈ à (EF))</p>	
<p>A. 4) Nous pouvons constater que les aires sont les mêmes. 5) Les aires ne changent pas même si le point H est déplacé 6) Deux triangles ont toujours la même aire si ils sont tous les deux créés à partir de deux droites parallèles entre elles</p> <p>B) Les deux triangles ont la même aire car ils ont la même base (EF) [EF] et ont la même hauteur car il y a toujours la même distance entre deux droites parallèles (GH) et (EF)</p>	
<p>A. 4. On constate que l'aire de EFG et EFH sont les mêmes.</p> <p>5, 6 : Oui cette constatation semble vraie. Peut être que EFG et EFH sont les mêmes triangles.</p> <p>B. Sachant que la formule de l'aire est $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ et que ces deux triangles partagent la même base et la même hauteur puisque (GH) et (EF) sont parallèles.</p>	<p>Résultat 1</p> <p>A. Les aires des triangles EFG et EFH sont les mêmes, soit de $24,75 \text{ cm}^2$ soit de 24,75 cm²</p> <p>B. Lorsque l'on bouge le point H, l'aire reste la même pour les 2 triangles, $24,75 \text{ cm}^2$.</p> <p>C. Conjecture: les triangles EFG et EFH ont la même aire.</p> <p>B. Les triangles EFG et EFH ont la même aire car ils ont la même base et la même hauteur grâce aux parallèles.</p> <p>$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \text{aire des triangles}$.</p> <p>BILAN : Si 2 triangles sont entre 2 parallèles et que tout leurs sommets sont sur les parallèles, alors les 2 triangles ont la même.</p>

Dans le bilan de l'activité, on a énoncé le résultat que l'on venait de découvrir et de prouver.

Une application donnée dans la classe d'Anne

ABCD est un trapèze. Ses diagonales se coupent en O.



- a) Comparer les aires des triangles ADC et BCD. Justifier la réponse.
- b) Exprimer les aires des triangles AOD et BOC sous forme d'une différence d'aires.
- c) Dédire de cette expression que les triangles AOD et BOC ont même aire.

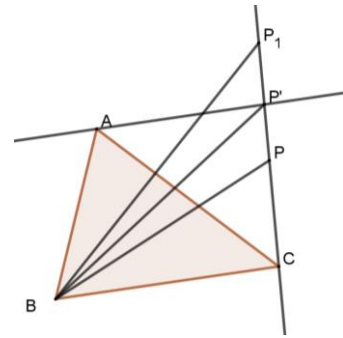
L'exercice (extrait d'Aventure maths 5^{ème}, édition Pôle 2006) a été bien réussi comme le montrent ces quelques productions d'élèves. On aurait sans doute pu donner un énoncé un peu plus ouvert en supprimant la question b.

<p>a) Les aires des triangles sont égales car les droites (AB) et (DC) sont parallèles et elle possèdent tout les deux la même base et donc elle sont la même base plus la même hauteur.</p> <p>b) les aires AOD et BOC font:</p> $ADC - ODC = AOD$ $BCD - ODC = OBC$ <p>c) AOD et BOC ont la même aire car elles sont les triangles ACD et on retire ODC ce qui fait AOD et BDC on retire ODC qui fait BOC</p> <p>On sait aussi que ADC et DBC sont égale.</p>	
<p>d) Ce sont les même car elles ont la même base et la même hauteur car AB // DC</p> <p>a) $A_{AOD} = A_{ADC} - A_{ODC}$ $A_{BOC} = A_{BDC} - A_{ODC}$</p> <p>c) Si A_{ADC} et A_{BDC} ont la même aire et que l'on supprime la même chose, alors $A_{AOD} = A_{BOC}$</p>	
<p>a) Les aires des triangles ADC et BCD sont égales car ils ont la base commune [DC] et ils ont la même hauteur car (DC) // (AB)</p> <p>b) $A_{AOD} = A_{ADC} - A_{ODC}$ $A_{BOC} = A_{BCD} - A_{ODC}$</p> <p>c) $A_{ADC} = A_{BCD}$ $A_{AOD} + A_{ODC} = A_{BOC} + A_{ODC}$ $A_{AOD} = A_{BOC}$</p>	

La réciproque

La réciproque est facile à montrer à l'aide de la formule ou par un petit raisonnement par contraposée :

Si P est du même côté que A par rapport à (BC) et n'est pas sur la parallèle à (BC) passant par A, on peut considérer l'intersection P' par exemple de (PC) avec cette parallèle (d). BP'C a la même aire que BAC par le théorème direct. Le triangle BPC est contenu dans BP'C si P est du côté de (BC) par rapport à (d) et donc l'aire de BPC est plus petite que celle de BAC. Si P est de l'autre côté de cette parallèle, ici P₁, BP₁C contient BP'C et donc son aire est plus grande que celle de BAC.

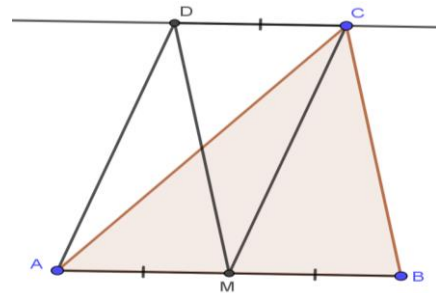


3. La médiane

Une médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.

Grâce au résultat précédent, les parallélogrammes AMCD et MBCD ont même aire. Or AMC est la moitié de AMCD et MBC est la moitié de MBCD.

Bien sûr ce résultat se déduit du calcul de l'aire d'un triangle tout comme le résultat précédent mais, comme on vient de le voir, on peut les établir sans calcul.



On peut montrer une réciproque du théorème de la médiane (si N est un point de [AB] tel que les triangles ANC et BNC aient la même aire, alors N est le milieu de [AB]) par un petit raisonnement par l'absurde : sinon, N serait par exemple sur]MB[et on aurait : $\text{aire}(\text{CNB}) < \text{aire}(\text{CMB}) = \text{aire}(\text{CMA}) < \text{aire}(\text{ANC})$, ce qui est impossible.

Des exercices pour travailler la médiane

Texte donné dans la classe d'Anne

Sur la figure, on a :

KI = 13 cm, SI = 10 cm, OI = 5 cm et BS = 8 cm.

Calculer l'aire du triangle KOI.

Objectif : utiliser la médiane.

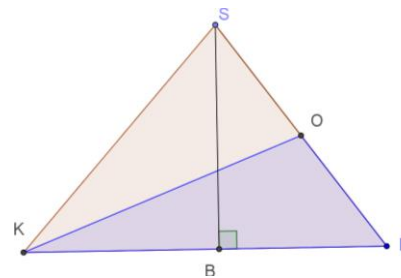
Prolongements possibles : 1) Calculer SK.

2) Calculer OH où H est sur (SK) et (OH) perpendiculaire à (SK).

1) On peut utiliser Pythagore pour calculer BI, en déduire BK puis SK avec Pythagore à nouveau.

2) OH est une hauteur de SKO.

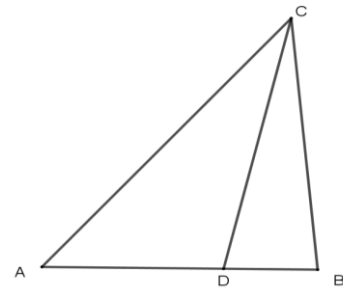
Partager un triangle en quatre triangles de même aire. Trouver le plus de solutions possible.



4. Les proportions

Soit ABC un triangle et D un point de [AB], les aires des triangles ACD et BCD sont dans le rapport $\frac{AD}{BD}$.

Cette fois nous nous appuyerons sur la formule pour le démontrer : les deux triangles ont la même hauteur. Le résultat sur la médiane permettrait de déduire le cas des rapports rationnels mais il faudrait un passage à la limite pour un rapport irrationnel. Cela reviendrait à démontrer la formule de calcul.



Évidemment, le résultat est valable si les bases n'ont pas une extrémité commune : si A, B, D, E sont alignés sur une droite (d) et C à l'extérieur de (d), les aires des triangles ABC et DEC sont dans le rapport $\frac{AB}{DE}$.

On en déduit aussi ce que Perrin (2011) appelle le lemme du chevron : sous les mêmes hypothèses et avec P sur (CD) les aires des triangles PCA et PCB sont dans le rapport $\frac{AD}{BD}$.

Dans la classe d'Anne

Quelques preuves rédigées par les élèves et des formulations du résultat :

L M N sont alignés et LMK et MNK ont la même hauteur donc la même aire

$$\frac{\text{aire KLM}}{\text{aire KLN}} = \frac{LM \times h}{LN \times h} \text{ donc } \frac{LM}{LN}$$

$$\text{aire } \frac{KLM}{KLN} = \frac{LM \times h}{LN \times h} = \frac{LM}{LN}$$

$$A_{KLM} = \frac{LM \times h}{2} \quad A_{KMN} = \frac{MN \times h}{2}$$

Pl. L'aire de deux triangles de hauteur égale est égale et ...

$$\frac{LM \times h}{2} = \frac{MN \times h}{2} \Rightarrow \frac{LM}{LN} = \frac{MN}{LN}$$

Les deux triangles ont la même hauteur

$$A_{LMN} = \frac{LM \times KH}{2} \quad A_{KLM} = \frac{KL \times KH}{2}$$

$$\frac{A_{LMN}}{A_{KLM}} = \frac{LM \times KH}{KL \times KH} = \frac{LM}{KL}$$

car $\frac{KH}{KH} = 1$
et $\frac{2}{2} = 1$

ou

$$\frac{A_{LMN}}{A_{KLM}} = \frac{LM \times KH}{KL \times KH} = \frac{LM}{KL}$$

Si l'on a deux triangles de même hauteur le quotient des aires des deux triangles est égal à celui des deux bases.

$$\frac{\left(\frac{LN \times h}{2}\right)}{\left(\frac{LN' \times h}{2}\right)} = \frac{LN}{LN'}$$

$$\frac{LN}{LN'} = \frac{LN}{LN'}$$

Une formulation du résultat par les élèves

Quand 2 triangles ont le même sommet et des bases alignées alors le quotient de leurs aires est égal au quotient de leurs bases.

5. D'autres exercices pour utiliser ces théorèmes

Pour que ces théorèmes soient suffisamment disponibles pour les élèves, il ne suffit pas qu'ils les aient rencontrés, il faut qu'ils les aient utilisés dans les exercices. On trouvera de nombreux exercices dans la fiche Galion « Démontrer avec les aires » téléchargeable sur le site de l'APMEP : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_e9rie_1-4_D_e9montrer_avec_des_aires_-_Copie.pdf.⁶⁵ En voici deux autres qui, donnés sans indication, sont de vrais problèmes de recherche.

Partage en deux d'un triangle

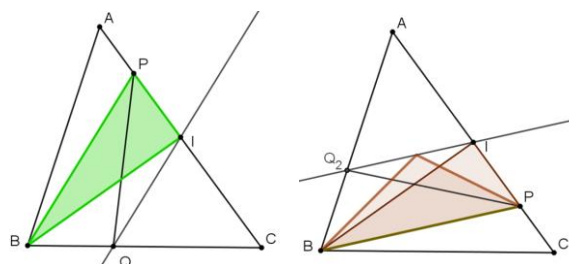
On veut partager un triangle en deux parties de même aire par un segment (on peut imaginer le partage d'un terrain sur un plan) à partir d'un point quelconque (qu'on appellera P) d'un côté (ici [AC]).

Solution 1. Idées : la médiane (BI) et lemme de la parallèle.

Si P est au milieu I de [AC], (BI) convient.

Si P est plus près de A que de C, le triangle APB est trop petit, il lui manque l'aire de BPI. On l'ajoute en faisant glisser I sur une parallèle à (BP) jusqu'à rencontrer [BC]. Le segment [PQ] convient. Le triangle CPQ et le quadrilatère BAPQ ont la même aire.

Si P est plus près de C que de A. On fait le même raisonnement : le triangle BPC est trop petit ; il faut lui ajouter l'aire de BPI mais la parallèle à [BP] passant par I rencontre cette fois [AB] en Q₂. Le



⁶⁵ L'ensemble des fiches Galion se trouve à l'adresse <https://www.apmep.fr/GALION-Themes>.

segment PQ_2 convient : le triangle APQ_2 et le quadrilatère $BCPQ_2$ ont la même aire.

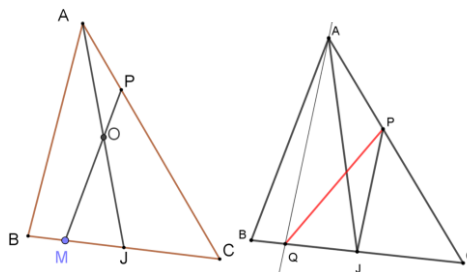
Solution 2. Idées : prévoir de quel côté sera Q, la médiane relative à ce côté et lemme du papillon.

Prenons le cas où P est du côté de A. Q va se trouver sur [BC]. La médiane (AJ) partage le triangle en deux triangles de même aire.

Prenons un point M sur [BC] entre B et J. Pour réaliser le partage en deux il faudrait que les aires des triangles APO et OMJ soient égales.

Le lemme du papillon nous dit que cela se produit si (AM) est parallèle à (PJ) donc si M est en Q.

Le lecteur examinera le cas où P est du côté de C, le point Q est alors sur [AB] et on raisonne avec la médiane issue de C. APJ et PQJ ont alors même aire donc PQC a même aire que AJC, c'est-à-dire la moitié de l'aire de ABC.

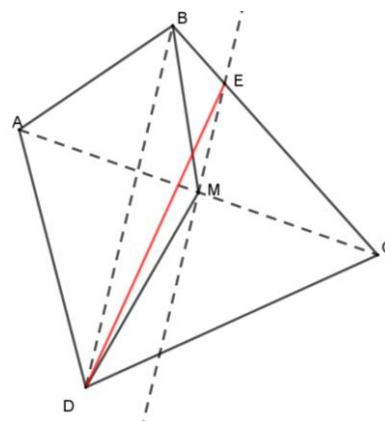


Partage en deux d'un quadrilatère

La même démarche permet de partager un quadrilatère en deux parties de même aire à partir d'un sommet (ici D) par une ligne brisée, qu'on peut ensuite rectifier.

Soit M le milieu du segment [AC], les quadrilatères DMBA et DMBC ont la même aire puisque [BM] et [DM] sont respectivement des médianes des triangles ABC et ADC. Il reste à ramener le point M sur le bord en le déplaçant sur une parallèle au segment [BD] de façon à conserver l'aire du triangle DMB. On obtient un point E sur le bord et le segment [DE] convient.

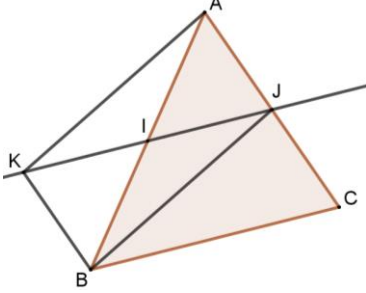
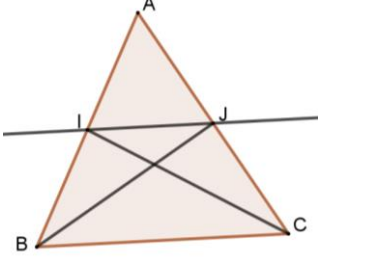
Si on veut partager le quadrilatère à partir d'un autre point du bord, c'est plus laborieux mais on y arrive en utilisant le même type de procédure et en distinguant plusieurs cas de figures.



II. La droite des milieux en 4^{ème}

Le théorème de la droite des milieux s'énonce généralement sous la forme : (1) Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC] alors la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC). Sa réciproque est une forme particulière du théorème de Thalès : (2) Soit ABC un triangle, I le milieu du côté [AB]. La parallèle à la droite (BC) passant par I coupe [AC] en J, alors J est le milieu de [AC]. Un troisième énoncé qui suit l'un ou l'autre assure que (3) $IJ = \frac{BC}{2}$.

On peut montrer d'abord (2) soit avec des parallélogrammes sous différentes formes, soit avec des aires. Par exemple

<p><i>Avec des parallélogrammes</i></p> <p>Soit K le symétrique de J par rapport à I, AJBK est un parallélogramme (les diagonales se coupent en leur milieu) donc (KB) parallèle à (AC) et $KB = AJ$. On en déduit que KBCJ est un parallélogramme donc $KB = JC$.</p> <p>Démonstration très simple mais l'introduction de K n'est pas très naturelle.</p>	
<p><i>Avec les aires</i></p> <p>Comme I est le milieu de [AB], AIC et BIC ont tous deux une aire moitié de ABC. Comme (IJ) est parallèle à (BC), BIC et BJC ont même aire, l'aire de BJC est donc aussi la moitié de celle de ABC. On a donc $\text{aire}(BJC) = \text{aire}(BJA)$. On en déduit que J est au milieu de [AC] par la réciproque de la médiane.</p>	

On déduit alors (1) par un raisonnement par l'absurde : supposons que (IJ) ne soit pas parallèle à (BC). La parallèle à (BC) passant par I couperait [AC] en J' différent de J. Mais, par le théorème direct, J' est au milieu de [AC]. C'est donc J. On pourrait formuler le raisonnement autrement : la parallèle à (BC) passant par I, coupe [AC] en J' qui est le milieu de [AC] par le sens direct (2). On a donc $J' = J$ et le résultat. Le raisonnement par l'absurde avec une figure fautive est peut-être plus accessible.

Remarquons qu'avec la réciproque de la parallèle, on montre facilement (1) directement par les aires.

Dans la classe de 4^{ème} d'Anne en 2018-2019

Le théorème est le premier pas vers le théorème de Thalès. C'est aussi le premier théorème rencontré par les élèves dans l'année. Le choix est de formuler le théorème en trois énoncés distincts :

Soit ABC un triangle, D milieu de [AB], E un point de [AC],

1. Si la droite (DE) est parallèle à (BC), E est le milieu de [AC],
2. Si, inversement, E est le milieu de [AC], la droite (DE) est parallèle à (BC),
3. Si l'on a ces propriétés, on a $DE = \frac{1}{2} BC$.

La séquence s'est déroulée en plusieurs phases.

Phase 1 : Conjecture des énoncés 1 et 2.

Le choix a été fait de suivre la proposition de Jean-Philippe Rouquès et Hélène Stainer dans « Des maths ensemble et pour chacun 4^{ème} » aux éditions CRDP Pays de la Loire. On fournit aux élèves des énoncés incomplets, ce qui leur demande un travail sur les conjectures et la représentation de la situation.

Séance 1 : exercice des énoncés incomplets

Thomas a découvert deux nouveaux théorèmes dans son livre de mathématiques ce matin. Il essaie de les écrire de mémoire sur son cahier de brouillon : aide-le à finir ses phrases.

Théorème 1

Dans un triangle, une droite qui est parallèle à un côté et qui passe par le milieu d'un autre côté....

.....

Théorème 2

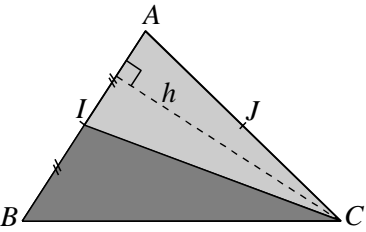
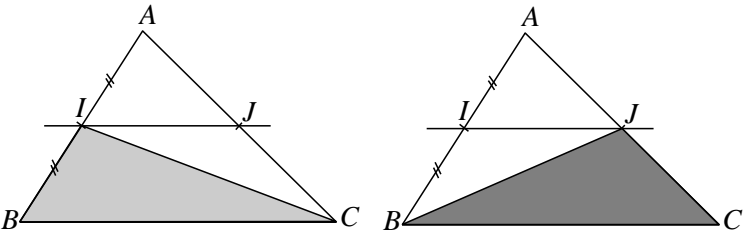
Dans un triangle, une droite qui passe par les milieux de deux côtés

.....

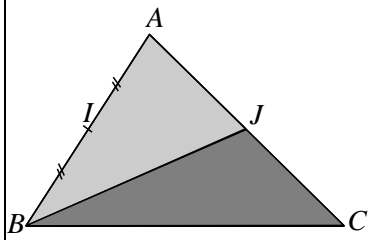
On commence par un temps de travail individuel court sur papier. La représentation de la situation n'est pas toujours aisée. Des élèves viennent ensuite représenter les deux situations au tableau. Les données sont codées (avec un code couleur pour les droites parallèles) et on fait apparaître la différence de codage entre les deux énoncés. Des élèves font des propositions de formulations, corrigées et améliorées par d'autres. P demande ensuite à des élèves de donner des instructions pour représenter chacune des deux figures dans un fichier GeoGebra projeté au tableau, sur lequel est déjà dessiné un triangle. En faisant varier le triangle, on peut visualiser un nombre important de figures et renforcer la compréhension des énoncés.

Phase 2 : démonstration du théorème 1

Elle a été faite collectivement, à l'oral, en suivant les étapes suivantes. Les hauteurs des triangles sont indiquées dans les étapes 1 et 4 parce qu'il n'y avait pas eu le travail préalable sur les aires visant à établir les théorèmes de la médiane et de la parallèle. La justification de l'égalité des aires se fait donc avec la formule au cours de la démonstration, ce qui contribue à l'alourdir sérieusement et risque de perdre certains élèves.

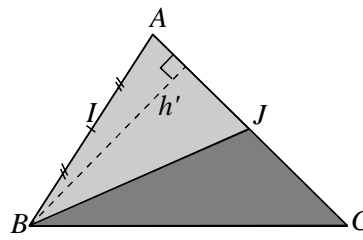
Étape 1	Étape 2
	
<p><i>AIC et BIC ont même base et même hauteur, donc même aire.</i> De plus, cette aire est $a/2$.</p>	<p><i>BIC et BJC ont même base BC.</i> Leur troisième sommet est sur (IJ) qui est parallèle à (BC). Donc ils ont même aire. De plus, cette aire est $a/2$.</p>

Étape 3



Comme l'aire de BJC est $a/2$, celle de BJA est aussi $a/2$.

Étape 4



BJA et BJC ont même aire et même hauteur.
Donc ils ont même base : $AJ = JC$.
Conclusion : J est le milieu de $[AC]$.

Le théorème 2 a été admis sans démonstration.

Phase 3 : formulation et démonstration de l'énoncé 3 par les élèves

Exercice de la distance entre deux milieux

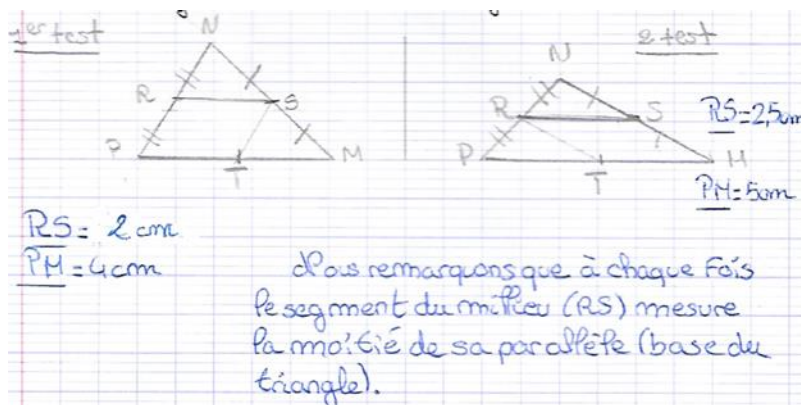
MNP est un triangle.

R et S sont les milieux respectifs des côtés $[MN]$ et $[NP]$.

Faire une conjecture concernant la longueur RS .

Un premier temps de travail individuel a été suivi rapidement d'un bilan en classe entière puis d'un retour au travail individuel pour lister les informations, sélectionner les données et trouver les grandes idées de la démonstration.

Voici quelques productions d'élèves représentatives des conjectures et des éléments de preuve :



Réponse A- 1

L'élève vérifie sa conjecture sur un autre exemple.

Données:

$(RS) \parallel (PM)$ et T milieu de (PM) .
 $(TS) = (RP) = 1,4 \text{ cm}$.
 $(RS) = (PT) = 8,1 \text{ cm}$.
 $(TS) \parallel (RA)$.
 $(RS) \parallel (PT)$.

Réponse A- 2

L'élève ne semble pas distinguer données (1^{ère} ligne), mesures (deux lignes suivantes qui pourraient lui permettre de formuler une conjecture) et déductions (les deux dernières lignes ?) et n'exprime pas de conjecture claire sur la longueur RS.

Données: $(RS) \parallel (MP)$

Je sais que $[RS]$ mesure la moitié du côté $[MP]$

Il faut utiliser le théorème 2

T est le milieu du segment $[MP]$

$RSMT$ forme un parallélogramme donc $[RM]$ et $[ST]$ sont égaux

Si on relie RST cela forme 2 triangles semblables

Réponse A- 3

L'élève écrit « je sais » pour la conjecture mais donne un bon argument pour la démontrer même si la démonstration n'est pas complète. Il parle de triangles semblables pour dire isométriques.

Données: R est le milieu de $[MN]$ $(RS) \parallel (MP)$
 S est le milieu de $[NP]$
 T est le milieu de $[MP]$
Conclusion: Démontrer que RS est 2 fois moins long que sa parallèle $[MP]$ donc prouver que $[RS] = [MT] = [TP]$

Egalités entre segments:

$$[RM] = [ST] = [RN] = 1 \text{ cm}$$

$$[RS] = [MT] = [TP] = 2 \text{ cm}$$

$$[NS] = [SP] = 2,5 \text{ cm}$$

$[RM] = [ST]$ et comme (RS) est \parallel à $[MP]$ et donc à $[NT]$, $(RM) \parallel (ST)$ donc $[RS] = [MT] = [TP]$.

On peut donc dire que $[RS] = \frac{MP}{2}$

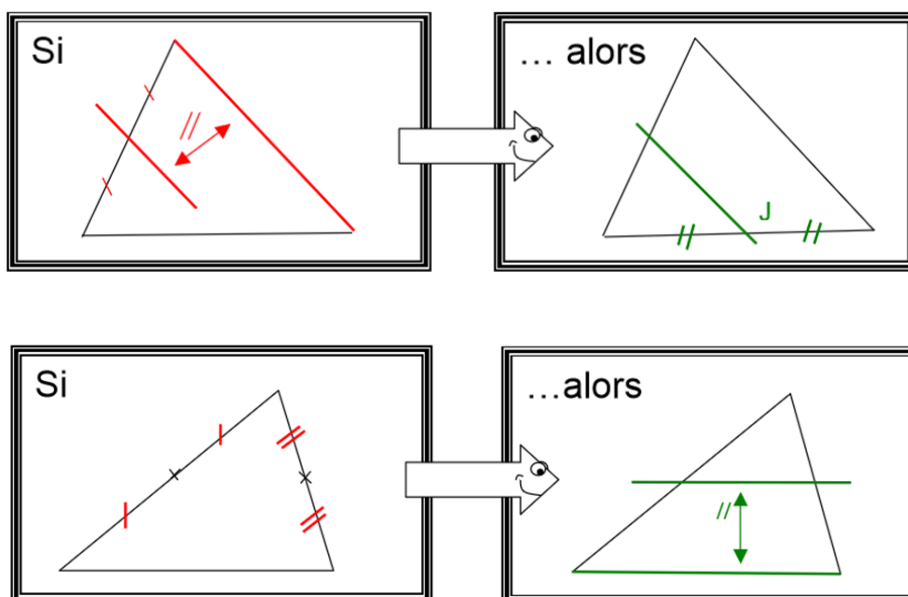
$[RM] = [ST]$ car il y a 2 milieux donc $(RM) \parallel (ST)$ donc $[RT] = [ST]$

Il s'agit de la partie conjecture et preuve du même élève. Il formule bien sa conjecture mais confond les notations des longueurs et des segments (M et P ont été inversés pour nommer le triangle). Dans la preuve, les arguments sont vus, un peu dans le désordre mais le mot « parallélogramme » n'apparaît pas.

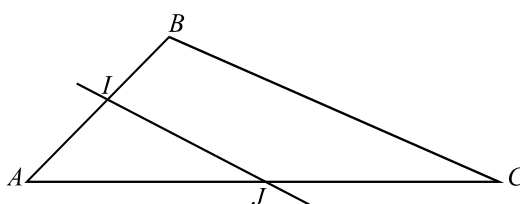
Malgré la difficulté, les élèves ont beaucoup apprécié cette séquence.

Phase 4 : le cours

Il reprend les énoncés et les schémas de « Des mathématiques ensemble et pour chacun, 4^{ème} » Jean-Philippe Rouquès, Hélène Stainer - CRDP Pays de la Loire. Nous reproduisons ici les schémas pour les théorèmes 1 et 2.



Nous y avons joint un tableau aidant à l'utilisation des trois théorèmes dans des démonstrations

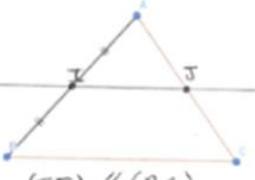
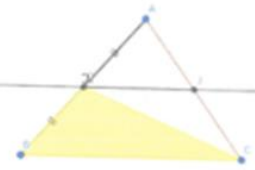
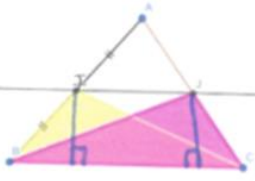
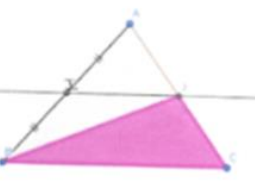
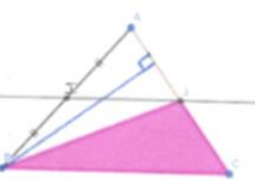


<i>Je sais que</i>	Grâce au théorème n°	<i>Je peux en déduire que</i>
<i>I est le milieu de [AB] (IJ) est parallèle à (BC)</i>	1	<i>J est le milieu de [AC]</i>
<i>I est le milieu de [AB] J est le milieu de [AC]</i>	2	<i>(IJ) est parallèle à (BC)</i>
<i>I est le milieu de [AB] J est le milieu de [AC]</i>	3	$IJ = \frac{BC}{2}$

Dans la classe d'Anne en 2019-2020

En 2019-2020, le travail préalable sur les aires décrit ci-dessus a été mené pour éviter de réintroduire la formule de calcul de l'aire dans les démonstrations. De plus, la découverte des théorèmes s'est faite de façon très différente : en utilisant GeoGebra comme outil de conjecture.⁶⁶ La preuve semble tout à fait accessible à des élèves de 4^{ème}, y compris aux élèves les plus en difficulté qui ont encore une vision surface des figures.

Au lieu d'un traitement collectif, la démonstration a fait l'objet cette année d'une recherche individuelle suivie d'une discussion collective. Un bilan de la preuve a ensuite été complété par chaque élève. Il montre une bonne compréhension des différentes étapes. Cependant, la majorité des élèves reviennent presque systématiquement à l'utilisation de la formule d'aire comme on peut le voir sur cette copie représentative.

 <p>(IJ) // (BC)</p>	<p><u>Données</u> : ABC est un triangle I est le milieu de [AB] (IJ) est parallèle à (BC)</p>
	<p><u>1^{ère} étape</u> : la médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire. [CI] est une médiane donc l'aire de IBC est la moitié de celle de ABC.</p>
	<p><u>2^{ème} étape</u> : Les triangles JBC et IBC ont la même aire car ils ont la même hauteur (car IJ et BC sont parallèles) et la même base.</p>
	<p><u>3^{ème} étape</u> : aire de JBC = aire de IBC = moitié de l'aire de ABC donc l'aire de JBC est la moitié de l'aire de ABC.</p>
	<p><u>4^{ème} étape</u> : ABC et JBC ont la même hauteur donc le côté JC correspondant est la moitié du côté AC correspondant.</p>

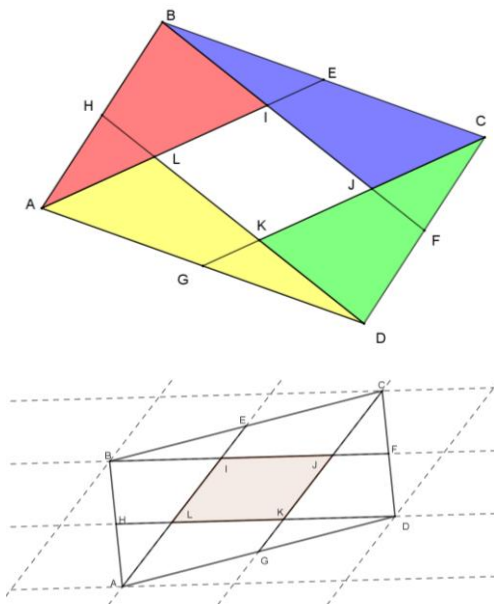
⁶⁶ Cette activité est inspirée du manuel Horizon de 4^{ème} (voir extrait du manuel en annexe de ce chapitre).

Les connaissances sur les aires en tant que grandeurs ne semblent donc pas encore suffisamment disponibles car trop récentes. Pour plus d'efficacité, il aurait fallu faire ce travail bien plus amont c'est-à-dire dans les classes précédentes. Ceci sera discuté en équipe pour la prochaine rentrée.

Un défi : Partage en cinq d'un parallélogramme

Pour approfondir, nous proposons ce problème plus complexe qu'on peut considérer comme un défi pour réinvestir les théorèmes sur les aires et la droite des milieux.

Soit ABCD un parallélogramme et E, F, G, H les milieux respectifs des côtés [BC], [CD], [DA], [AB]. On joint A à E, B à F, C à G, D à H et on appelle I, J, K, L les points d'intersection comme sur la figure. Montrer que IJKL est un parallélogramme et trouver son aire en fonction de celle de ABCD.



On peut montrer que IJKL est un parallélogramme en montrant d'abord que HBFD et AECG en sont. Ensuite il faut voir que I est le milieu de [BJ], etc. (droite des milieux). Enfin le théorème de la médiane permet de dire que BLI a une aire moitié de BAI et une aire égale à celle de IJL qui est elle-même la moitié de celle de IJKL. Donc les quatre triangles ont la même aire que IJKL. Chacune de ces aires est donc le cinquième de celle de ABCD.

On remarquera au passage à quel point il est utile d'avoir des notations cohérentes pour que les résultats montrés sur un des triangles puissent se déduire pour les autres par permutation circulaire sans avoir besoin de chercher les noms sur la figure.

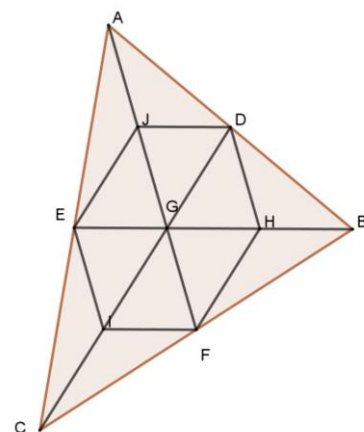
Après avoir établi que IJKL est un parallélogramme et que I est le milieu de [BJ], etc., une autre manière de trouver la relation entre les aires est de sortir de la figure ABCD et de la plonger dans un quadrillage de maille IJKL en traçant les parallèles à (IJ) passant par A et C et les parallèles à (JK) passant par B et D (deuxième figure). Tous les parallélogrammes obtenus se déduisent de IJKL par translation. Ils ont donc même aire que IJKL ($IL = LA = KJ = JC$ et $IJ = IB = LK = KD$) et il est alors clair que les triangles AIB, BJC, CKD et DLA ont tous la même aire que le parallélogramme IJKL comme moitiés d'un parallélogramme double.

Un autre exercice sur les aires : un hexagone à côtés parallèles et des aires égales

Soit un triangle, ses trois médianes [AF], [BE], [CD] et I, J, H milieux respectifs de [CG], [AG] et [BG]. On a un hexagone à côtés opposés parallèles et un partage du triangle en 12 triangles de même aire.

On utilise le lemme de la médiane dans tous les sens et la droite des milieux pour les parallèles.

Exercice à faire après celui sur le partage du triangle en 6 par les médianes (médiane + chevron) et le fait que le centre de gravité se trouve au tiers de chaque médiane à partir de la base (voir chapitre 10, 4.8).



III. Une démonstration du théorème de Thalès en 3^{ème}

1. Démonstration du théorème par les aires

Nous donnons ici la démonstration du théorème de Thalès par les aires élaborée avec les élèves de 3^{ème} de la classe d'Anne (3A) en 2019-2020. On trouvera une autre démonstration classique, appuyée sur des parallèles équidistantes et les cas d'isométrie en annexe 2. Remarquons que si les rapports rationnels se traitent facilement, le raisonnement est plus délicat pour passer aux rapports réels.

En 2018-2019, la démonstration du théorème de Thalès par les aires avait été exposée oralement au tableau sur un exemple numérique générique. Les lemmes sur les aires n'avaient pas été introduits au préalable. Les égalités d'aires et les proportions avaient été établies au fur et à mesure en utilisant la formule de l'aire du triangle. Alors que les élèves connaissent cette formule depuis la sixième, ils avaient eu beaucoup de mal à suivre la démonstration. Trop d'informations à gérer en même temps leur ont fait perdre de vue ce que l'on voulait montrer. De plus, ils ont l'habitude d'utiliser la formule de l'aire du triangle pour calculer et non pour démontrer. Toutes ces difficultés nous ont convaincus que le travail sur les aires était un préalable et que les lemmes sur les aires devaient être disponibles en tant que tels au moment de les utiliser dans une démonstration.

C'est ce qui a été fait en 2019-2020. La démonstration a alors pu être traitée comme un exercice cherché par les élèves, appuyé sur le travail précédent sur les aires, désigné dans le texte par « la première partie ». Le résultat 1 est le théorème de la parallèle, le résultat 2 celui des proportions.

M est un point du segment [AB], N est un point du segment [AC] et la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).

1. En utilisant le résultat 1 de la première partie, quelles aires de triangles sont égales ? En déduire que les triangles AMC et ANB ont la même aire.

2. En utilisant le résultat 2 de la première partie,

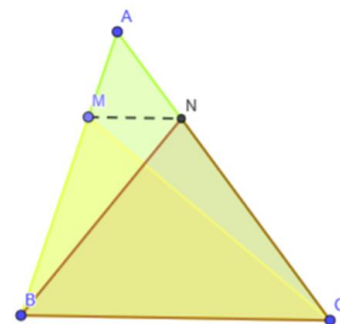
- Exprimer $\frac{\text{aire AMC}}{\text{aire ABC}}$ comme un rapport de longueurs.
- Exprimer $\frac{\text{aire ANB}}{\text{aire ABC}}$ comme un rapport de longueurs.

En déduire que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

3. Tracer la parallèle à (AC) passant par M. Elle coupe [BC] en P.

- Comparer les aires des triangles APC et AMC. Justifier.
- Exprimer $\frac{\text{aire AMC}}{\text{aire ABC}}$ et $\frac{\text{aire APC}}{\text{aire ABC}}$ comme des rapports de longueurs.
- En déduire que $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$.

4. Conclure.



Remarque : La question 3 établit une autre forme du théorème de Thalès dans le triangle : le rapport des « petits bouts » aux côtés.

Voici quelques productions d'élèves

1. $\triangle NBC$ et $\triangle MBC$ ainsi que $\triangle MNB$ et $\triangle MNC$ ont des aires égales.
 $\triangle AMC$ et $\triangle ANB$ font la même aire car
 $MNB + AMN = MNC + AMN$

2. a) $\frac{A_{AMC}}{A_{ABC}} = \frac{AM}{AB}$
 b) $\frac{A_{ANB}}{A_{ABC}} = \frac{AN}{AC}$
 c) comme A_{AMC} est égal à A_{ANB} alors
 $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Réponse A- 5

A-5 et A-6 répondent correctement aux deux premières questions.

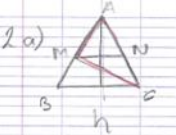
① $A_{AMC} = A_{ABC} - A_{MBC}$ $A_{ANB} = A_{ABC} - A_{BCN}$
 Les triangles MBC et BCN ont la même aire car ils ont la même base et leur 3^e sommets sont sur une même droite parallèle à la base.
 On soustrait donc au même triangle 2 triangles égaux, les aires sont donc les mêmes.

② a) $\frac{\text{aire } AMC}{\text{aire } ABC} = \frac{AM}{AB}$ c) Si $A_{AMC} = A_{ANB}$ et qu'on divise par le même triangle ABC alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ car *

b) $\frac{\text{aire } ANB}{\text{aire } ABC} = \frac{AN}{AC}$

Réponse A- 6

1 L'aire de $\triangle AMC$ et $\triangle ANB$ ont la même aires car $\triangle MCB$ et $\triangle BNC$ sont égaux car il ont la même longueur de bases et la même hauteur car elle se rejoignent en MN , MN est parallèle à BC . On retire $\triangle BCO$ aux deux triangles et on ajoute $\triangle MNO$.
 Donc $\triangle AMC$ et $\triangle ANB$ ont la même aire.

2 a)  $\frac{\text{aire AMC}}{\text{aire ABC}} = \frac{AM}{AB}$ ✓

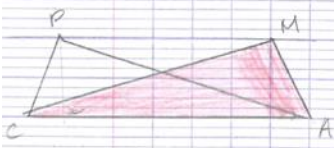
b) $\frac{\text{aire ANB}}{\text{aire ABC}} = \frac{AN}{AC}$ ✓

c. $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ car (MN) parallèle à (BC) et A est le sommet du triangle.

3 a. APC et AMC sont égaux car ^{on voit} elle possèdent la même base et même hauteur.

b. $\frac{\text{aire AMC}}{\text{aire ABC}} = \frac{AM}{AB}$ $\frac{\text{aire APC}}{\text{aire ABC}} = \frac{PC}{BC}$

c. $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ car les triangle AMC et APC sont égaux et qu'il ont tout les deux ABC



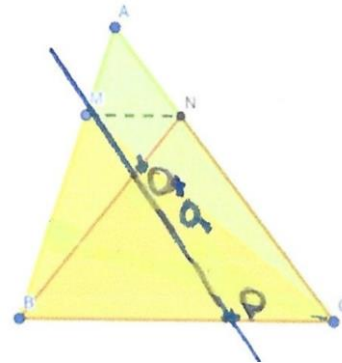
Réponse A- 7

A-7 refait des figures pour chaque question. L'argument en 2c n'est pas correct mais semble bien démarrer à la question 3c. On remarque qu'il a éprouvé le besoin de refaire la figure de cette question pour être dans la même position que pour le lemme.

1. Les aires des triangles BNC et BNC sont égale, ainsi,
 $A_{BNC} = A_{BNC}$ car $A_{BNC} = A_{BNC}$ et $A_{BNC} = A_{BNC}$
 $A_{BNC} + A_{BNC} = A_{BNC} + A_{BNC}$ $A_{BNC} + A_{BNC} = A_{BNC} + A_{BNC}$

2) a. $\frac{A_{AMC}}{A_{ABC}} = \frac{AM}{AB}$
 b. $\frac{A_{ANB}}{A_{ABC}} = \frac{AN}{AC}$
 c. $A_{AMC} = A_{BNC} + A_{ANN}$ on sait que $A_{BNC} = A_{BNC}$ donc
 $A_{ANB} = A_{BNC} + A_{ANN}$ $A_{AMC} = A_{ANB}$ donc:
 $\frac{A_{AMC}}{A_{ABC}} = \frac{A_{ANB}}{A_{ABC}}$
 $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

3) a. $[AP]$ et $[AC]$ se coupent en un point Q ainsi:
 $A_{APC} = A_{ANC}$
 $A_{APC} - A_{AQP} = A_{ANC} - A_{AQP}$
 $A_{APC} - A_{AQP} = A_{ANC} - A_{AQP}$
 b. $\frac{A_{APC}}{A_{ABC}} = \frac{AQ}{AB}$; $\frac{A_{APC}}{A_{ABC}} = \frac{PC}{BC}$
 c. ~~On sait que $A_{APC} = A_{ANC}$ donc $\frac{A_{APC}}{A_{ABC}} = \frac{A_{ANC}}{A_{ABC}}$~~
 On sait que $A_{APC} = A_{ANC}$ donc $\frac{A_{APC}}{A_{ABC}} = \frac{A_{ANC}}{A_{ABC}}$
 $\frac{AQ}{AB} = \frac{PC}{BC}$
 De plus, $(NP) \parallel (AC)$ et $(MN) \parallel (PC)$ donc
 $PN = PC$, ainsi, $\frac{PC}{BC} = \frac{PN}{BC} = \frac{AQ}{AB}$
 h. On voit donc que le théorème de Thalès est vrai.



Réponse A- 8

Pour la question 3, A-8 fait intervenir un point Q, intersection de $[AP]$ et de $[MC]$ (et non AC) comme il l'écrit, l'usage qu'il en fait n'est pas clair mais la suite du raisonnement est correct.

① $A_{MNC} = A_{MNB}$ car dans A_{ABC} et A_{ACB} on retire au deux triangles
 Pour A_{MNC} et A_{MNB} on ajoute la même aire donc $A_{MC} = A_{NB}$

② a) $\frac{A_{MNC}}{A_{ABC}} = \frac{AM \times h}{AB \times h} = \frac{AM}{AB}$
 b) $\frac{A_{MNB}}{A_{ACB}} = \frac{AN}{AC}$
 c) Grâce à Thalès on $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

③ a) elle ont la même base et leur sommet sont sur la même droite donc ils ont la même aire.
 b) $\frac{A_{MNC}}{A_{ABC}} = \frac{AM}{AB}$
 $\frac{A_{MNB}}{A_{ACB}} = \frac{AN}{AC}$
 $\frac{AM \times PC}{CB \times AB}$
 c) Grâce à Thalès on $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Réponse A- 9

Cet élève repasse par la formule pour établir les rapports d'aire et en c), il utilise le théorème de Thalès qu'il s'agit de démontrer.

1. Les aires des triangles MBC et NBC sont égales ainsi que MNB et MNC . On ajoute aux triangles MNB et MNC le même triangle AMN . Les derniers sont les triangles AMC et ANB sont donc égaux

2. a. $\frac{\frac{1}{2} \times AM \times BC}{\frac{1}{2} \times AM \times BC} = \frac{MC}{BC}$ b. $\frac{AM}{AB}$ c. $\frac{AC}{AN} = \frac{AN}{AC}$

c. $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ car $AMC = ANB$ et les deux membres ont le même angle ABC

3. a. APC et AMC sont égaux car les deux triangles ont la même hauteur et base.

b. $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{PC}{BC}$ c. $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ car les deux membres ont ABC et $AMC = APC$

grâce aux résultats on remarque que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ dans un triangle ABC coupé par une droite MN parallèle à BC , le théorème est démontré ouf!

Réponse A- 10

La rédaction est très elliptique sur les questions 2a, 2b et 3b mais on voit que l'élève a compris.

2. Le cas « papillon » et la réciproque

La configuration papillon

La démonstration du cas papillon se fait en se ramenant au cas emboîté par symétrie. Elle a été traitée en faisant varier la position du point M sur (AB) à l'aide d'un tableur. Voici l'énoncé donné aux élèves dans la classe 3A1 en 2018-2019 :

- Place trois points distincts A, B et C non alignés. Trace les droites (AB), (BC) et (CA). Place un point M sur la droite (AB) puis construis la droite parallèle à la droite (BC) passant par le point M. Appelle N le point d'intersection de cette droite avec la droite (AC).
- Quelles sont les différentes possibilités pour la position du point M ? Pour chacune d'elles, fais un dessin sur ton cahier.
- Ouvre la fenêtre du tableur du logiciel et reproduis la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E	F	G
1	Triangle ABC	AB=		AC=		BC=	
2	Triangle AMN	AM=		AN=		MN=	
3							
4							
5							
6							
7							

- Dans la cellule C1 saisir la formule permettant d'afficher la longueur AB.

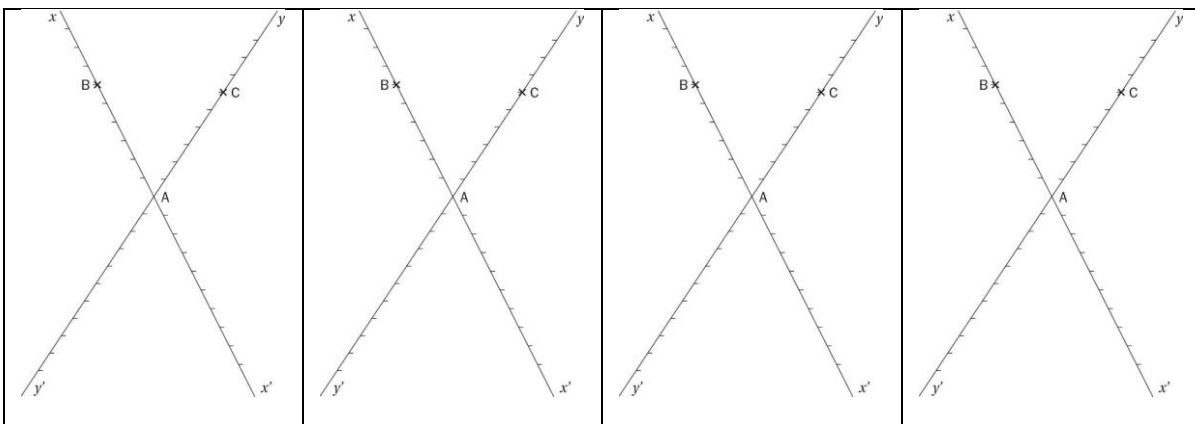
- Compléter de même les cellules C2, E1, E2, G1 et G2.
- Dans les cellules C3, E3 et G3, saisir une formule permettant de savoir si le tableau ainsi obtenu est un tableau de proportionnalité. Compare les résultats et émetts une conjecture.

4. Déplace le point M. La conjecture se confirme-telle ?

La réciproque du théorème de Thalès

La principale difficulté de la réciproque est la condition sur les positions des points. Cet aspect a été géré dans la classe 3A1 en 2018-2019 par l'énoncé suivant donné aux élèves :

Les deux droites graduées sont sécantes en A. B est un point de la demi-droite [Ax) et C est un point de la demi-droite [Ay). On veut placer un point M sur la droite (AB) et un point N sur la droite (AC) de tel sorte que les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ soient égaux. On regarde si les droites (MN) et (BC) semblent parallèles. Pour chaque valeur de $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$, représenter toutes les positions possibles pour les points M et N en utilisant les figures ci-dessous.

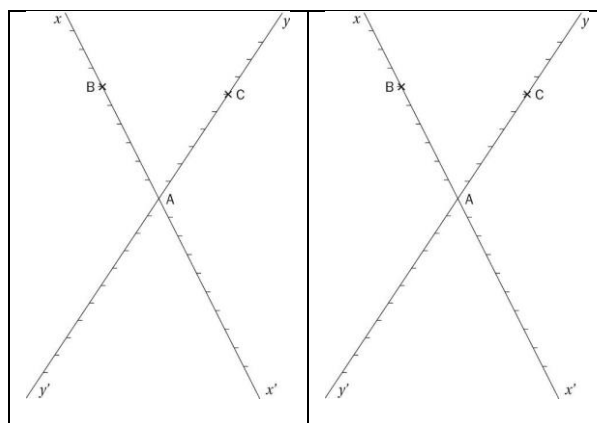


Trois cas ont été traités : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$; $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$; $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{4}{3}$. Il a été demandé aux élèves de formuler une conjecture sur une condition à ajouter à l'égalité des rapports pour que les droites (BC) et (MN) soient parallèles.

La démonstration a été donnée sous forme d'exercice d'abord dans le cas particulier du rapport $\frac{1}{2}$ dans les deux cas de figure (« emboîté » et « papillon ») puis dans le cas général avec l'énoncé suivant :

On a deux droites sécantes en A. Supposons que les hypothèses du théorème soient remplies. Les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont égaux et les points A, M et B sont alignés dans le même ordre que les points A, N et C.

- a. Donne une représentation possible de la situation à l'aide des figures suivantes :



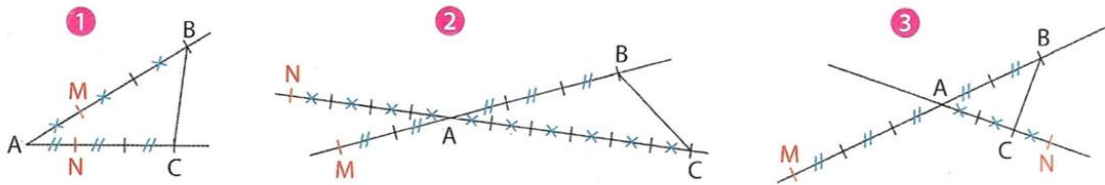
- b. Trace la parallèle à (BC) passant par M. Elle coupe la droite (AC) en un point K. Complète la figure.

- c. Quel théorème peux-tu appliquer ?
- d. Qu'en déduis-tu pour les rapports $\frac{AK}{AC}$ et $\frac{AN}{AC}$?
- e. Que peux-tu conclure pour les points K et N ?

Que peux-tu dire alors des droites (MN) et (AB) ?

Voici une autre activité extraite du Transmath 3^{ème} (éditions Nathan 2012) qui permet de faire apparaître la condition sur la position des points :

Participer à un débat Porter un regard critique



M est un point d'une droite (AB) et N est un point d'une droite (AC).

Tara affirme : « Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles ».

- a. En s'aidant des figures ci-dessus, expliquer pourquoi Tara se trompe.
- b. Conjecturer ce qu'il faut ajouter à l'affirmation de Tara pour qu'elle soit vraie.

IV. Une introduction possible du théorème de Thalès

1. Agrandissement de rectangles

Une mise en œuvre dans une classe de REP

Nous proposons ici une situation qui peut motiver le théorème de Thalès, et aussi la notion d'homothétie et celle de triangles semblables à partir des agrandissements et réductions. Une première version a été élaborée au cours du stage que le groupe a assuré en 2018-2019 et mise en œuvre dans les classes de quelques stagiaires exerçant en REP⁺, notamment la classe de 3^{ème} de Bertrand Rivière (classe B) dont nous reprenons les données numériques. Nous proposons ici une version revue, tenant compte des premières productions des élèves de cette classe. Elle se déroule en plusieurs phases. Il s'agit dans un premier temps de chercher des conditions pour que des rectangles aient la même forme, c'est-à-dire soient un agrandissement ou une réduction l'un de l'autre et d'explicitier la condition d'alignement des diagonales quand on superpose tous les rectangles avec un angle droit (et donc un sommet) commun. Dans un deuxième puis troisième temps, on cherche à fabriquer un rectangle de la famille dans le cadre géométrique puis dans le cadre numérique. Dans un quatrième temps, on s'intéresse aux triangles quelconques.

Phase 1. Comparaison de rectangles

Les élèves travaillent par groupes de quatre. On donne à chaque groupe une feuille photocopie sur laquelle sont dessinés des rectangles (par exemple huit) nommés par une seule lettre à l'intérieur. À titre d'exemple, nous reprenons les dimensions proposées dans la classe B. Elles sont rassemblées dans le tableau suivant où nous avons groupé les rectangles par forme ($l = 0,7 L$ pour A, E, F, H ; $l = 0,4 L$, ou $L = 2,5 l$, pour D, B, G ; $l = 0,9 L$ pour C) alors que bien sûr, pour les élèves, les rectangles se présentent dans l'ordre alphabétique, sans indication de mesure :

Nom	A	E	F	H	D	B	G	C
Longueur	2	3	7	8	5	7,5	12,5	2
Largeur	1,4	2,1	4,9	5,6	2	3	5	1,8

Les élèves se partagent le découpage des rectangles ; on peut limiter le nombre des rectangles mais il faut garder au moins trois familles de rectangles avec plusieurs rectangles dans au moins deux familles. Pour faciliter les comparaisons on peut s'arranger pour que certains rectangles aient une dimension commune (ici c'est le cas pour A et C mais on pourrait remplacer le E par un autre de 5 sur 3,5 pour qu'il ait la même longueur que D).

On pourrait donner les dimensions aux élèves et leur demander de tracer les rectangles sur papier quadrillé (pour ne pas avoir à gérer les angles droits) avant de les découper mais cela risque de prendre un peu plus de temps et l'accent est tout de suite mis sur les dimensions des rectangles et les nombres. Il nous paraît préférable dans cette première phase de donner les rectangles sans les dimensions pour inciter les élèves à rester dans le cadre géométrique.

La consigne est de classer les rectangles selon leur forme, mettre ensemble tous les rectangles qui ont la même forme et expliquer pourquoi on a fait ce classement, comment on a vu que les rectangles avaient la même forme. Dans l'explicitation de la consigne avec les élèves, on peut dire que « même forme » veut dire que l'un des deux est un agrandissement de l'autre. Il faut éviter de parler de « rectangles qui se ressemblent » que les élèves peuvent interpréter en un classement par la taille (les petits, les moyens, les grands). Par exemple, dans la classe B :

1.
Il y a ~~aucun~~^{des} rectangles qui se ressemblent.

2.
Tout ces rectangles n'ont pas le même périmètre à vue d'œil. Ils sont tous différents. Il y en a des grands ^{et} des petits.

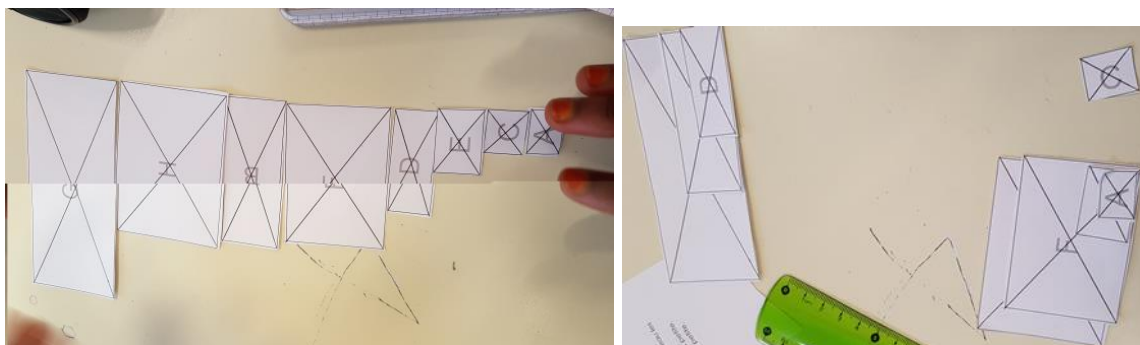
La première phase est une recherche des élèves qui vise à ce qu'ils puissent s'approprier le problème. Les formes des rectangles sont discernables à l'œil nu à condition de mettre en place une certaine organisation. Au départ, c'est la perception qui domine :

1. B / D / ~~A~~ leurs longueurs sont beaucoup plus longues
A / E, F, H

1. Les rectangles qui se ressemblent sont: B / D / G

2. À la vue

Une première mise en commun permet de faire émerger un moyen de comparaison qui consiste à superposer les rectangles avec un sommet et un angle commun. L'alignement des sommets opposés apparaît sans même qu'on ait tracé les diagonales ; le tracé d'une diagonale est un moyen de le vérifier. Dans la classe B, la demande de tracer les diagonales faisait partie de la consigne donnée par écrit en plusieurs questions mais il nous semble préférable que les diagonales apparaissent dans la synthèse d'une première phase de recherche. Voici des classements produits par les élèves de la classe B :



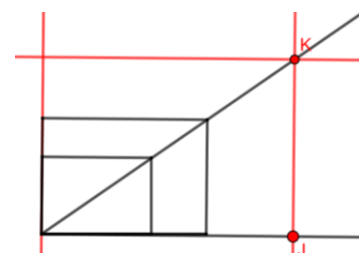
Comparaison des longueurs et empilement des rectangles dans la classe B.

On formulera oralement et dans une trace écrite que, si on superpose dans un angle des rectangles qui ont la même forme, les diagonales qui partent du sommet de l'angle sont alignées. À la fin de la mise en commun de cette première phase, on peut aussi remarquer que réduire ou agrandir des rectangles revient à réduire ou agrandir des triangles rectangles.

Deuxième phase : Production d'un rectangle de la famille dans le cadre géométrique

On donne les mesures des rectangles d'une des familles où il y a trois ou quatre rectangles (par exemple A, E, F, H) et on demande de dessiner la superposition des rectangles sur le cahier. On pourrait laisser les élèves mesurer les dimensions des rectangles mais il risque d'y avoir des différences dans le calcul des rapports par la suite, à cause de la précision des mesures. Cela permet de formuler l'alignement des sommets opposés au sommet commun sur une même droite (d).

On demande ensuite aux élèves de tracer un nouveau rectangle de la famille avec une longueur de leur choix et d'expliquer la manière de le fabriquer sans mesurer. La mise en commun permettra de le formuler oralement puis dans une trace écrite. Si on prend un point (J sur la figure) sur la droite (L) qui porte les longueurs des rectangles et qu'on trace en ce point la perpendiculaire à (L), elle rencontre (d) en un point K, sommet du rectangle cherché. On peut terminer le rectangle avec une nouvelle perpendiculaire. Cette phase peut aussi se réaliser sur GeoGebra.



Troisième phase : Production d'un rectangle de la famille dans le cadre numérique

On s'intéresse maintenant à la deuxième famille de rectangles. On donne les mesures et on demande de fabriquer un rectangle de la famille dont on peut fixer la longueur (par exemple 15 cm) mais sans redessiner les rectangles qu'on connaît déjà : on doit trouver les dimensions du nouveau rectangle par le calcul. On peut donner les mesures dans un tableau, par exemple :

D	B	G
5	7,5	12,5
2	3	5

Les valeurs numériques sont assez simples et les élèves peuvent remarquer que 15 est le double de 7,5 ou le triple de 5 et que, si on double la longueur en voulant conserver la forme du rectangle, il faut aussi doubler la largeur. Remarquons que la forme des rectangles est caractérisée par un rapport $\frac{l}{L}$ constant mais que le rapport qui nous intéresse quand on vise l'introduction du théorème de Thalès, c'est celui qui fait passer d'une dimension d'un rectangle à la même dimension d'un autre rectangle de la famille. Les deux rapports sont néanmoins acceptables pour fabriquer le nouveau rectangle. Les

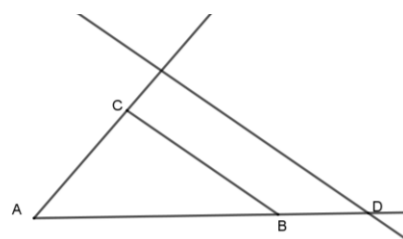
élèves disposent du travail de la phase 2 pour tester leur méthode de calcul. On peut donner des valeurs différentes aux différents groupes d'élèves (par exemple 10 cm ou 16,25 cm pour la longueur, 4 cm ou 6,5 cm pour la largeur).

Au cours de la mise en commun, on peut reprendre le tracé des rectangles de la famille sur une même figure (par exemple en ayant prévu un fichier GeoGebra qui les contient) et on peut s'intéresser aux rapports d'agrandissement et les regarder sur les longueurs et les largeurs mais aussi sur les diagonales dont on peut prendre une mesure approchée avec la règle (ou faire afficher la longueur sur GeoGebra). On peut ensuite remarquer que, pour résoudre le problème, il suffit de s'occuper des triangles rectangles, demi-rectangles. Il est également utile pour la suite de s'intéresser aux angles et de remarquer que tous les triangles ont les mêmes angles à cause des parallèles et de dire que la conservation des angles c'est ce qui conserve la forme du triangle. La trace écrite formule que si on prend deux rectangles de la même famille, le rapport de leurs longueurs est égal au rapport de leurs largeurs et au rapport de leurs diagonales.

Quatrième phase : agrandissement et réduction d'un triangle quelconque

Cette phase se situe dans une deuxième séance. Il se peut d'ailleurs que la phase 3 ne tienne pas dans la première séance. On se pose maintenant la question de fabriquer un triangle de même forme qu'un triangle quelconque donné. On peut aussi voir ce triangle comme demi-parallélogramme pour référer au cas du rectangle traité précédemment.

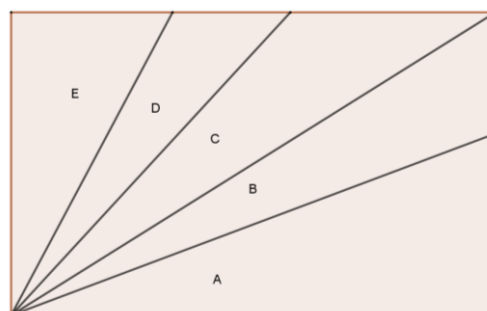
Pour fabriquer un triangle de même forme, il faut conserver les angles et donc tracer par un point (D) de (AB) une parallèle à (BC). La conservation des rapports de longueur est le théorème de Thalès qu'on peut énoncer et démontrer.



2. Agrandissement d'un puzzle à pièces triangulaires

La situation décrite ici est inspirée de celle que propose la brochure *Figure et sens* de l'IREM de Rouen et que Guillaume Didier utilise dans ses classes depuis de nombreuses années pour introduire le théorème de Thalès.

Il s'agit de trouver comment réduire séparément cinq triangles A, B, C, D, E qu'on peut assembler pour former un rectangle (figure 1). Toutes les formes (celles des triangles comme celle du rectangle) doivent se conserver de façon qu'après la réduction des triangles, le puzzle s'assemble de la même manière et qu'on obtienne un rectangle réduit de même forme que le rectangle initial.



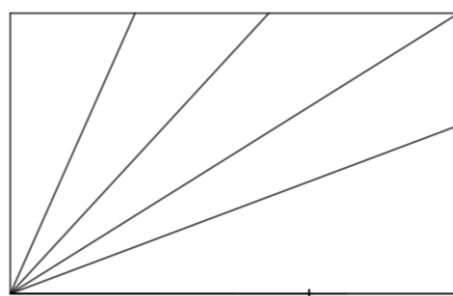
La situation se déroule en deux phases qui correspondent chacune à une séance de classe. Dans la première phase, l'objectif est d'identifier les conditions sur le rectangle, notamment la conservation de la diagonale, ainsi que la conservation des angles des triangles, garantie par le parallélisme des bases relatives au sommet commun de ces triangles. Dans la deuxième phase, il s'agira d'identifier la proportionnalité des longueurs des côtés. On a choisi 24 cm pour longueur du rectangle pour disposer de beaucoup de rapports de réduction faciles. Les élèves n'auront pas tous la même réduction à faire. Nous proposons deux versions : La première est celle qui proposée dans la brochure de l'IREM de

Rouen. La seconde est issue de la recherche d'un choix de variables didactiques qui rende nécessaire le recours à la proportionnalité pour construire les triangles réduits dans la deuxième phase.

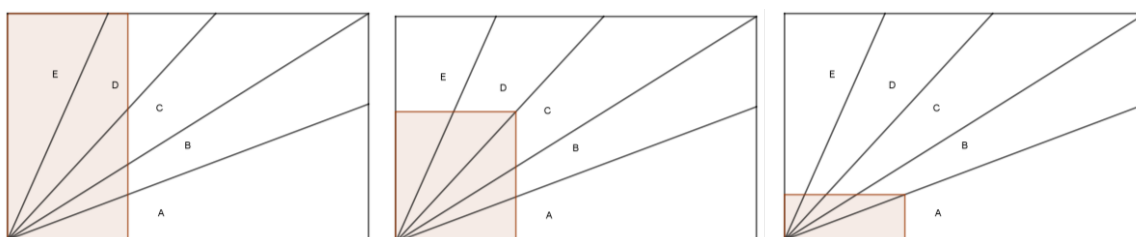
Version 1. Première phase

Les élèves travaillent par groupes de cinq. Dans un premier temps, on distribue à chaque groupe les pièces découpées du puzzle et on demande de faire l'assemblage. On a écrit son nom (A, B, C, D ou E)⁶⁷ sur chaque triangle, ce qui permet de distinguer les faces des pièces : les triangles sont assemblés de façon que les noms soient visibles. On distribue aussi une feuille A4 avec le dessin des cinq triangles séparés. On demande à chaque élève d'en choisir un, de le découper et de vérifier sa conformité avec l'une des pièces du puzzle.

Ensuite on ramasse les pièces et on distribue à chaque groupe le modèle du puzzle tracé à taille réelle sur une feuille A4 avec un trait marqué indiquant la longueur réduite du rectangle (figure ci-contre pour la longueur réduite 16 cm). Les valeurs numériques, différentes pour chaque groupe (12 cm, 6 cm, 8 cm, 16 cm, 18 cm, 19,2 cm, 9,6 cm), sont choisies pour que le rapport soit simple mais elles ne sont pas données pour que les élèves restent dans le cadre géométrique. Les élèves prévoient en dessinant sur le modèle comment ils vont faire leur découpage.



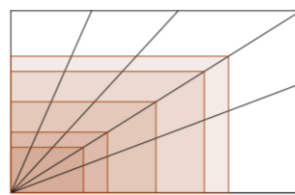
Dans leurs premières tentatives, les élèves produisent des tracés où la longueur du rectangle devient la largeur du rectangle réduit, où certains triangles deviennent des quadrilatères du puzzle réduit, où la diagonale du rectangle n'est pas conservée.



Le professeur observe, répond aux questions et relance la recherche si la forme des triangles ou du rectangle ne sont pas respectées. Pour garder la forme rectangle du puzzle global, il est naturel de faire des parallèles aux côtés du rectangle mais il faut que les réductions qui s'ensuivent sur les triangles soient coordonnées. Comme les exemples ci-dessus le montrent, même si l'assemblage est un rectangle et que la réduction des triangles donne bien des triangles, ceux-ci ne sont pas forcément de même forme que le triangle initial et on n'obtient pas forcément le rectangle attendu. Une mise en commun permet d'exprimer que le sommet opposé au sommet commun du rectangle réduit doit être sur la diagonale du grand rectangle. Le professeur demande ensuite que chaque élève découpe le triangle réduit correspondant à son choix puis que le groupe trace sur un transparent son puzzle réduit.

⁶⁷ Les pièces peuvent être plastifiées de façon que le matériel puisse être réutilisé dans une autre classe. Pour les élèves, l'ordre des lettres ne correspond pas à l'ordre à suivre pour reconstituer le rectangle, que nous adoptons ici pour faciliter la rédaction.

Il superpose ensuite les différents transparents des groupes et les projette à l'aide d'un visualiseur, ce qui permet aux élèves de voir les différents puzzles emboîtés. Dans la discussion qui s'ensuit, le professeur aide au besoin les élèves à identifier et formuler le parallélisme des droites et l'égalité des angles.



La trace écrite de conclusion mentionne que, lors d'une réduction de figure, les longueurs sont réduites mais pas les angles. Si la figure garde la même orientation et un sommet fixe, le côté réduit est sur la même droite que l'ancien ou parallèle à l'ancien. Pour visualiser le cas du triangle, le professeur demande aux élèves de coller le triangle réduit qu'ils ont obtenu sur leur triangle initial. On écrit qu'en traçant une parallèle à un côté, en gardant les supports des autres côtés, on obtient un triangle réduit de même forme.

Version 1. Phase 2

Le professeur demande aux élèves, répartis dans les mêmes groupes qu'à la première séance, de mettre au point une **méthode de calcul** permettant de calculer les longueurs des côtés des triangles réduits. Afin d'éviter toute imprécision due aux mesures, en plus de la longueur du rectangle réduit, il donne à chaque élève les longueurs (approchées) des côtés de son triangle non réduit, par exemple en distribuant un modèle du puzzle où ces longueurs sont inscrites pour le triangle concerné. Le professeur annonce à la classe que la phase de recherche d'une durée de 20 minutes sera suivie d'une phase de présentation et comparaison des recherches de chaque groupe.

Durant la phase de recherche, le professeur observe, répond aux questions des groupes et les relance au besoin. En particulier, il est important de s'assurer que c'est bien dans la recherche d'une méthode que les groupes sont engagés et qu'à l'intérieur de chaque groupe, les idées de chacun sont prises en compte et vérifiées par l'ensemble des membres. Il est parfois nécessaire de rappeler aux groupes les longueurs des rectangles réduits et non réduits ou que la méthode de calcul doit être valable pour tous les triangles du puzzle. Le fait que chaque élève dispose de son triangle réduit permet à tous les groupes d'avoir un moyen de contrôler la validité de la méthode de calcul proposée par l'un de ses membres. Le choix des longueurs des rectangles réduits permet de faire de la différenciation. En effet, les coefficients de réduction correspondent à des divisions par 2, par 4, par 3, par 1,5 (ou multiplication par $\frac{2}{3}$), par $\frac{4}{3}$ (ou multiplication par $\frac{3}{4}$), par 1,25 (ou multiplication par 0,8), par 2,5 (ou multiplication par 0,4). Si un groupe est très en avance par rapport aux autres groupes, on peut lui donner un agrandissement plus difficile (par exemple 24 devient 28 soit un coefficient de $\frac{7}{6}$). Il n'est pas nécessaire que tous les groupes aient réussi pour débiter la présentation des méthodes mises en œuvre dans la classe. Lors de la mise en commun, le professeur a pour objectif de faire émerger la proportionnalité entre les longueurs des triangles non réduits et celles des triangles réduits.

Version 2. Phase 1

La phase 1 est identique à celle de la version 1 à quelques détails près :

- les élèves sont par groupes de quatre au lieu de cinq (la pièce A jouera un rôle particulier dans la phase 2) ;
- on ne demande pas aux élèves de choisir une pièce ni de découper le triangle réduit et de le coller sur une copie du triangle initial. Les élèves découpent seulement le puzzle réduit assemblé.
- Le bilan et la trace écrite ne portent que sur l'alignement des diagonales des rectangles, la conservation des angles et le fait que le côté réduit est sur la même droite que l'ancien ou parallèle à l'ancien.

Version 2. Phase 2

Dans la version 1, on demande une méthode de calcul et non de construire les pièces (les élèves disposent des pièces construites à la séance 1). Le moyen de vérification est la comparaison des mesures calculées à celles des triangles réalisés à la séance 1. Cette deuxième phase se déroule donc dans le cadre numérique.

Dans cette deuxième version, le professeur a ramassé les puzzles réduits de la séance 1 (il les tient à disposition comme moyen de vérification finale). Le problème reste posé dans le cadre géométrique : il s'agit maintenant de savoir comment découper chacun des triangles quand ils sont séparés pour que le puzzle réduit s'assemble correctement. Mais, pour répondre au problème, il sera nécessaire de passer par le cadre numérique. Le triangle A est le seul pour lequel on connaît la mesure d'un côté du puzzle réduit. On attend que les élèves trouvent qu'on peut facilement découper la pièce A par une perpendiculaire au bord. Le problème se pose pour les autres pièces pour lesquelles on ne dispose d'aucune mesure du triangle réduit. Si les élèves d'un même groupe s'occupent des différentes pièces d'un même puzzle réduit, ils peuvent procéder de proche en proche en reportant sur la pièce B les mesures prises sur l'hypoténuse de la pièce A pour trouver à partir de quel point ils doivent tracer une parallèle, etc. Cette méthode peut être explicitée collectivement au début de la deuxième séance. Pour que la situation nécessite de mettre en œuvre la proportionnalité, il faut donc que chaque élève construise son triangle réduit sans le secours du triangle voisin ; il faut pour cela qu'il s'occupe d'une pièce qui n'est pas voisine d'une pièce déjà réalisée ou que le report de longueur soit impossible. On propose l'organisation suivante, avec les mêmes groupes.

Le professeur révèle les longueurs des puzzles réduits de tous les groupes en les affichant au tableau et annonce aux élèves que maintenant, on va réduire les triangles un par un, sans qu'ils soient assemblés dans le rectangle. Dans un premier temps, on s'occupe seulement de la pièce A, collectivement dans le groupe. Le professeur rend le dessin sur papier d'une pièce A dans chaque groupe et demande de tracer sur la pièce au moins quatre réductions différentes dans des couleurs différentes : celle qu'avait le groupe dans la phase 1 et au moins trois autres dont celle qui correspond à la longueur 12⁶⁸. Comme on a des triangles rectangles et que l'on a la valeur d'un côté de l'angle droit, on attend que cette première tâche soit facile à réaliser. C'est aussi l'occasion de rappeler le parallélisme formulé à la première séance. Cette pièce A, disponible dans tous les groupes servira de témoin.

Le professeur distribue des reproductions sur papier des pièces C, D, E dans les groupes (pas B pour rendre impossible la technique du tracé de proche en proche). Tous les membres d'un même groupe ont la même pièce mais chacun doit s'occuper d'une réduction différente : le groupe se répartit celles qu'on a utilisées pour la pièce A. Si l'on a six ou sept groupes, chaque pièce sera reproduite deux fois au moins. Comment faire ? Pour tracer une parallèle, on a besoin de la longueur d'au moins un des côtés. Les longueurs des côtés des triangles initiaux (au moins ceux qui partent du sommet commun) sont fournies pour éviter les erreurs ou différences de mesure. Les élèves doivent se concerter pour trouver une méthode de calcul des longueurs utiles pour tracer leur parallèle dans chaque cas. Le groupe dispose de la pièce A avec ses différents triangles réduits dessinés. Cette pièce peut servir pour tester la méthode de calcul sur les autres côtés et donner des idées pour la modifier si elle n'est pas correcte. Par exemple, si les élèves s'intéressent à la réduction où la longueur devient 8 cm et si leur méthode est autre que la division par 3, elle ne fonctionnera pas sur les autres côtés du triangle A.

⁶⁸ On peut aussi imposer les valeurs de façon que 12 cm figure dans chaque groupe ainsi qu'une autre longueur assez facile (6 cm ou 8 cm). On peut ainsi avoir une différenciation entre les groupes, par exemple 12 cm, 6 cm, 8 cm, 18 cm donne un groupe facile et 12 cm, 8 cm, 9,6 cm, 19,2 cm donne un groupe difficile.

Le rapport $\frac{1}{2}$ présent dans tous les groupes pourrait donner l'idée de la division par 2 pour traiter ce cas, et d'utiliser la même méthode pour d'autres réductions comme la division par 3, par 4. On peut aussi voir que 16 est le double de 8 et 18 le triple de 6 ou bien $12+6$. Pendant la recherche des élèves, le professeur peut attirer leur attention sur le fait que leur méthode doit fonctionner pour tous leurs triangles et aussi pour la pièce A. En fin de compte, les puzzles réduits réalisés à la première séance peuvent être consultés auprès du professeur pour vérification de la méthode en comparant la pièce réalisée à une pièce réalisée à la séance 1 avec les mêmes contraintes (même triangle, même rapport), mais sans mesurer. Il est prudent de demander aux élèves de ne pas découper le triangle réduit pour faire la vérification.

À la fin de la séance, les puzzles qui correspondent à la même réduction peuvent être assemblés. Il manque la pièce B que l'on peut laisser vide ou que les plus rapides peuvent éventuellement découper facilement à partir du modèle : les longueurs utiles se trouvent déjà sur les pièces A et C.

Conclusion de la séquence

Dans les deux versions, la séance se termine par une *trace écrite* sur les méthodes de calcul (lors d'une réduction/agrandissement de figures, les longueurs de la figure initiale et celles de la figure finale sont proportionnelles). Afin de connaître le niveau réel de compréhension de tous les élèves, le professeur peut demander pour la séance suivante de faire sur une feuille (qu'il ramassera) les réductions de tous les triangles dans les cas suivants : 1) le rectangle doit avoir une longueur de 15 cm 2) le rectangle doit avoir une longueur de 20,8 cm. Le cours avec les énoncés du théorème de Thalès et sa démonstration se déroule dans la séance suivante (après correction du travail précédent donné à la maison). Le lien avec les agrandissements de polygones peut être fait en disant que dans le cas des agrandissements et réductions d'un triangle on dispose du théorème de Thalès et qu'un polygone peut se décomposer en triangles.

Cette situation est aussi l'occasion de réinvestir le travail sur les fractions réalisé précédemment, en particulier le fait que la multiplication par une fraction équivaut à la division par la fraction inverse et que multiplier par une fraction plus petite que 1 produit une réduction.

V. Exercices

On trouve en abondance des exercices sur le théorème de Thalès dans les manuels scolaires. Quelques-uns sont analysés dans la banque d'exercices du chapitre 10. Attention notamment aux données superflues qui peuvent être contradictoires (voir exercice 2.5) ! Nous proposons ici un seul exercice qui nous permet d'une part d'illustrer des réflexions développées au chapitre 3 (définition des figures en termes de lignes et points) d'autre part de montrer sur un exemple comment un exercice de manuel restreint peut, avec une légère transformation, être enrichi en faisant apparaître les notions.

Théorème de Thalès et comparaison d'aires : réflexion à partir d'un exercice de manuel

Cet exercice est extrait du manuel Diabolo 3^{ème} 2008 (Exercice 64 p. 19).

Énoncé

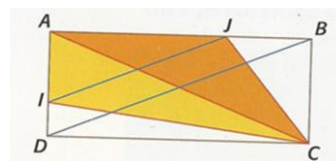
$ABCD$ est un rectangle.

La droite (IJ) est parallèle à la diagonale (BD) .

Les aires des triangles AIC et AJC sont-elles égales ?

La figure est fournie.

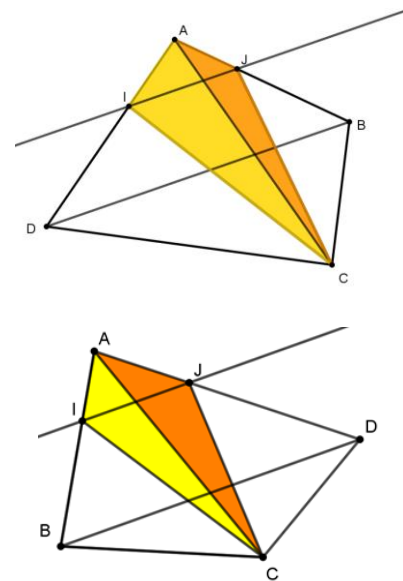
La question porte sur la comparaison des aires des triangles colorés. Pour le calcul de l'aire, il faut penser que les données pertinentes seront les bases $[AI]$ et $[AJ]$ et les hauteurs correspondantes $[CD]$



et $[CB]$ qui sont des côtés du rectangle. C'est une première difficulté car ces hauteurs tombent à l'extérieur des bases. Il faut alors relier AI et AJ aux dimensions du rectangle. Pour cela, il faut oublier les triangles colorés, isoler le triangle ABD et la parallèle $[IJ]$ et appliquer le théorème de Thalès. On déduit l'égalité des rapports $\frac{AI}{AD}$ et $\frac{AJ}{AB}$ et donc $AI \cdot AB = AJ \cdot AD$. Il faut encore se servir de l'égalité des côtés opposés du rectangle pour conclure à l'égalité des aires. Remarquons qu'on peut faire la comparaison des aires sans les calculer en se référant seulement aux rapports : le rapport entre l'aire de ACI et celle de ACD qui ont la même hauteur est égal au rapport des bases $\frac{AI}{AD}$ et le rapport entre l'aire de AJC et celle de ABC est égal à $\frac{AJ}{AB}$. Le théorème de Thalès permet de dire que ces rapports sont égaux ; par ailleurs les aires de ADC et ABC sont égales à la moitié de celle du rectangle, ce qui permet de conclure.

Ce deuxième raisonnement est valable si $ABCD$ est seulement un parallélogramme.

Ce raisonnement permet même de trouver le rapport des aires entre les triangles colorés dans le cas d'un quadrilatère convexe quelconque en disant que le rapport de l'aire de AIC à celle de ADC est le même que celui du rapport de l'aire de AJC à celle de ABD . En général, les aires de ADC et de ABC ne sont pas égales. On a égalité si la diagonale $[AC]$ partage le quadrilatère en deux triangles de même aire, ce qui est le cas du rectangle, du parallélogramme mais aussi d'autres quadrilatères : ceux où une des diagonales ($[AC]$ ici) coupe l'autre ($[BD]$ ici) en son milieu.



La mobilité du regard à porter sur la figure est du même ordre dans les deux démonstrations pour le rectangle (identification des différents triangles qui se chevauchent éventuellement) mais ce ne sont pas les mêmes connaissances sur les aires qui doivent être disponibles. Dans le premier cas, on passe par le calcul de l'aire, dans le second on utilise le fait que les aires de deux triangles qui ont la même hauteur sont dans le même rapport que leurs bases.

Dans les deux cas, il faut considérer des surfaces (triangles ou rectangles) dont on calcule ou compare les aires mais, pour faire ce calcul ou cette comparaison, il faut considérer des éléments caractéristiques de dimension 1 (côtés ou hauteurs) et il faut isoler une autre sous-figure chevauchant les premières (le triangle ABD et le segment $[IJ]$) et identifier les relations entre les segments qui la composent pour mobiliser le théorème de Thalès et conclure à l'égalité des rapports. On trouvera une analyse de ce même exercice du point de vue de l'étude des aires et de leur usage pour démontrer dans Perrin, Perrin & Pinvidic (à paraître).

Annexe du chapitre 7

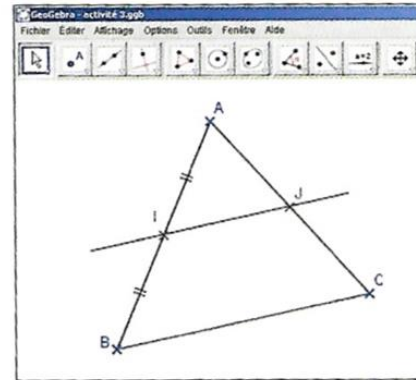
I. Extrait du manuel Horizons 4^{ème} utilisé par Anne en 2019-2020

Un triangle, un milieu, une parallèle

A Conjecture

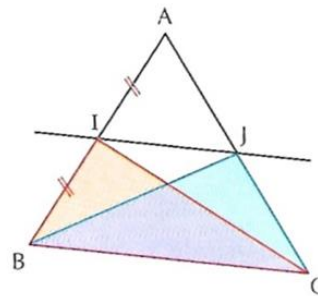
Ouvrir un logiciel de géométrie.
Cacher les axes s'ils sont visibles.

1. Créer un triangle ABC. Créer I le milieu de [AB].
2. Créer la parallèle à (BC) passant par I.
Appeler J le point d'intersection de cette parallèle avec (AC).
3. a. Afficher les longueurs de [AI] et [JC].
Que peut-on constater ?
- b. Déplacer les points A, B et C.
Cette constatation semble-t-elle toujours vraie ?



B Preuve









1. a. Créer le triangle CBI en rouge.
Afficher l'aire du triangle ABC et l'aire du triangle CBI.
Que constate-t-on ?
- b. Déplacer les points A, B et C.
Cette constatation semble-t-elle toujours vraie ?
- c. Pourquoi est-on sûr que l'aire du triangle IBC est toujours égale à la moitié de l'aire du triangle ABC ?
2. a. Créer en bleu le triangle CBJ.
Afficher l'aire du triangle CBJ. Que constate-t-on ?
- b. Déplacer les points A, B et C. Cette constatation est-elle toujours vraie ?
- c. Pourquoi les triangles IBC et CBJ ont-ils la même aire ?
3. a. À partir des questions 1c et 2c, que peut-on dire des aires des triangles ABC et CBJ ?
- b. En déduire que J est le milieu de [AC].



BILAN Énoncer le théorème que l'on vient de découvrir et de prouver.

Aide GeoGebra

Voici quelques icônes à repérer dans la barre d'outils, en partant de la gauche.
Chaque icône donne accès à un menu déroulant.

Créer un triangle	5 ^e icône		Afficher une longueur	8 ^e icône	
Créer un milieu	2 ^e icône		Créer le symétrique d'un point	9 ^e icône	
Renommer un point	Clic droit sur le point		Créer une parallèle	4 ^e icône	
Créer une droite	3 ^e icône		Créer un point d'intersection	2 ^e icône	

Chapitre 8

Applications du théorème de Thalès à l'homothétie et à la similitude

Les situations d'introduction du théorème de Thalès présentées dans le chapitre précédent sont aussi des situations d'introduction de l'homothétie et de la notion de triangles semblables. Dans ce chapitre, nous complétons ce qui a été dit dans le chapitre 7 par quelques réflexions et quelques exercices sur ces deux thèmes.

I. Homothétie

Le théorème de Thalès, tel qu'il est actuellement énoncé dans le triangle, correspond à la transformation d'un triangle par une homothétie dont le centre est situé en un sommet du triangle et c'est un outil essentiel de démonstration dans les problèmes d'homothétie. En effet, on peut faire apparaître des triangles dont un sommet est le centre de l'homothétie, le côté opposé se transformant en un côté parallèle par la réciproque du théorème de Thalès. Comme pour toutes les transformations, et comme le suggèrent les programmes, les logiciels de géométrie dynamique sont pertinents pour étudier l'homothétie.

Pour l'introduction, on peut par exemple faire identifier la transformation qui permet de passer d'une figure à une autre (homothétie avec un rapport très simple : 2 ou 3) et la faire agir sur une autre figure avant de donner des cas de rapports non entiers ou négatifs.

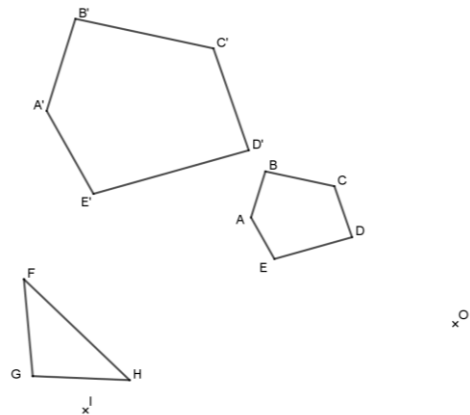
Par exemple, on donne la figure ci-contre en disant qu'on a fait un agrandissement du polygone ABCDE à partir du point O et qu'on demande de réaliser la même transformation sur le triangle FGH à partir du point I.

On peut alors définir l'homothétie et montrer ses propriétés en utilisant le théorème de Thalès.

Des exercices visant à construire l'image de figures en variant la position du centre et les valeurs des rapports (plus grands que 1, plus petits que 1, positifs ou négatifs), à chercher le centre ou les rapports pour des figures homothétiques données, à étudier les rapports des aires, etc. permettent d'unifier ce qui a été vu antérieurement au sujet des agrandissements, réductions et de la symétrie centrale. Nous proposons dans la suite deux situations où l'homothétie intervient comme outil pour résoudre des problèmes.

Exemple 1 : problème de construction

Le premier exemple est le problème assez connu de construction d'un carré inscrit dans un triangle. Il a été proposé par Sébastien à ses élèves de 3^{ème} (classe 3S).



Construire un triangle.

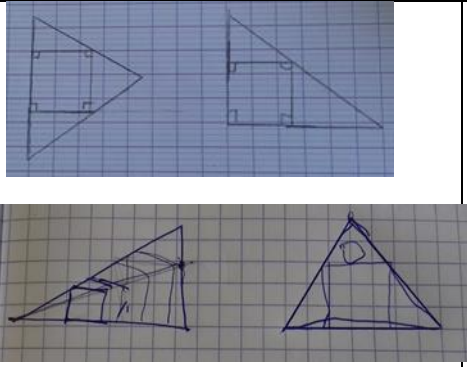

À l'intérieur de ce triangle, construire un carré tel que les sommets du carré appartiennent aux côtés du triangle.

Justifier votre construction.

Comme un carré a quatre sommets et qu'un triangle n'a que trois côtés, on peut déjà dire qu'il y a nécessairement deux sommets du carré sur un même côté du triangle. La solution (voir chapitre 10, exercice 5.3) consiste à construire un carré intérieur au triangle avec un côté inclus dans un côté du triangle et un sommet sur un autre côté du triangle puis à l'agrandir par une homothétie bien choisie.

Dans la classe 3S, le travail s'est déroulé en deux temps. Les élèves ont d'abord travaillé individuellement pour faire des essais, avec pour seule consigne de construire un carré inscrit dans un triangle quelconque. Ils utilisent leur cahier qui a des carreaux et beaucoup commencent par faire des triangles isocèles ou rectangles ou construisent le triangle autour du carré, à la recherche de particularités ou d'éléments communs dans les constructions. Au bout de 10 minutes, un premier bilan des productions permet de voir qu'un côté du carré est nécessairement sur un côté du triangle. Ensuite, le travail s'est déroulé en groupes avec l'obligation de réaliser la figure sur feuille blanche en expliquant la démarche. Dans certains groupes en difficulté, le professeur a suggéré de commencer par dessiner un carré à l'intérieur du triangle, posé sur un côté du triangle et avec un troisième sommet sur un autre côté puis de l'agrandir.

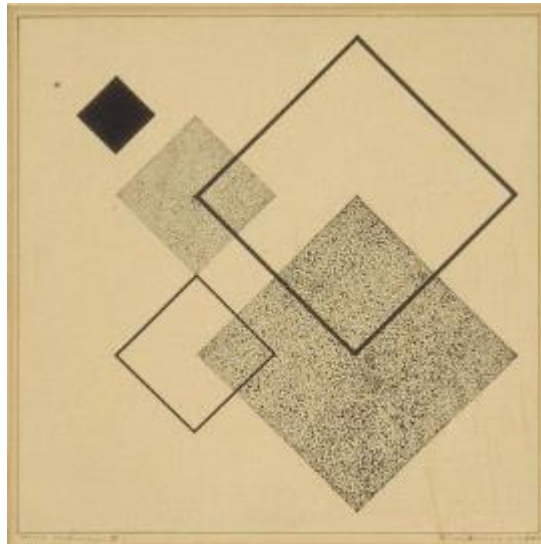
Voici quelques productions d'élèves à différents moments : premiers dessins ou solution finale.

	<p>On a tracé un triangle et un carré qui est dans le triangle et qui est touché par 3 sommets.</p> <p>Ensuite on a tracé une droite passant par l'origine et par le sommet qui ne touche pas le triangle. A l'endroit où la droite touche le triangle, se sera le 4ème sommet du carré.</p> 
<p><u>Justification :</u></p> <ol style="list-style-type: none"> ① Tracer un triangle quelconque. ② Tracer un carré à l'intérieur avec 3 de ces sommets qui doivent toucher. ③ Agrandir ensuite ce carré. ④ Tracer une droite passant par les deux sommets qui ne touchent pas de côté. ⑤ Cette droite doit passer par le côté opposé du triangle. ⑥ Continuer à agrandir le carré jusqu'à ce que le carré quatrième sommet touche à l'endroit où ça se croise. ⑦ On obtient alors un carré carré carré. 	<ul style="list-style-type: none"> * On a tracé un triangle quelconque * on a tracé un carré où 3 sommets touchaient les côtés du triangle. * On a agrandi le carré <p>On a utilisé l'homothétie, car l'homothétie conserve les mesures des côtés du carré et les droites restent parallèles.</p>

On a ensuite réalisé une synthèse générale et justifier la construction à l'aide des propriétés de l'homothétie.

Exemple 2. Reproduire un tableau

L'objectif de la situation que nous proposons ici est de travailler les transformations dans une activité de modélisation géométrique. Il s'agit de reproduire sur feuille blanche ce tableau, où l'on peut reconnaître plusieurs carrés, avec un des carrés comme point de départ. Cette activité nécessite des élèves une analyse préalable du tableau permettant d'identifier les relations entre les carrés pour pouvoir le reproduire. Toutes les étapes de la modélisation⁶⁹ vont s'avérer nécessaires pour réaliser la reproduction.



« Arithmetic ». Theo van Doesbourg (1930)

Nous suggérons d'organiser le travail des élèves en plusieurs étapes.

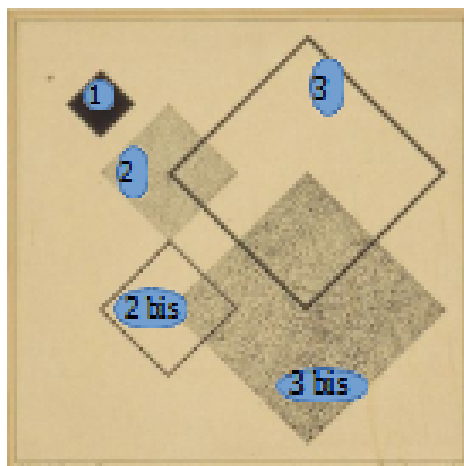
Étape 1 : Du tableau à la figure géométrique

Dans cette première étape, les élèves découvrent le tableau et doivent utiliser tous les outils à leur disposition pour l'analyser : l'utilisation du matériel de géométrie est nécessaire pour comprendre l'organisation de la figure et faire des hypothèses sur la nature des formes géométriques représentées, leurs dimensions et leur agencement. Il peut sembler déroutant aux élèves d'avoir l'autorisation de mesurer, mais il s'agit bien de passer d'un objet d'art (matériel) à un objet mathématique. C'est une caractéristique de la modélisation : la première étape du travail porte sur l'objet matériel et consiste dans le repérage avec les instruments usuels de propriétés graphiques que l'on pourra traduire par des propriétés géométriques dans le modèle abstrait sur lequel on pourra raisonner en utilisant des théorèmes de géométrie.

À l'issue de cette étape, très rapide, on se met d'accord sur les faits suivants (on peut nommer les carrés comme ci-dessous pour faciliter la communication) :

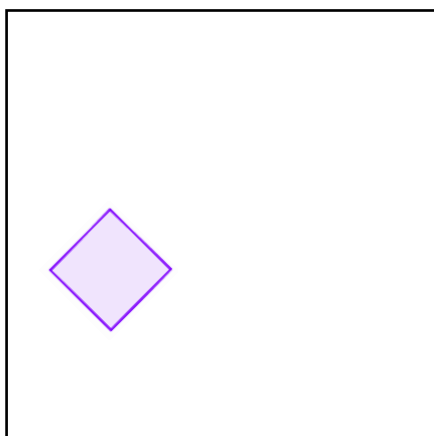
- tous les éléments représentés sont des carrés. Il faudra négliger l'épaisseur du trait de crayon.
- les longueurs des côtés des carrés 3 et 3 bis sont le double de celles des 2 et 2 bis, et les longueurs des côtés des carrés 2 et 2 bis sont le double de celles du carré 1.

⁶⁹ On trouvera des exemples de modélisations historiques de plus grande ampleur au chapitre 1 (tunnel de Samos) et au chapitre 9 (méridienne).



Étape 2 : Raisonnement sur la figure

Une fois que les mesures sont effectuées, les élèves doivent identifier des liens entre les différents éléments de la figure, c'est-à-dire les positions des carrés les uns par rapport aux autres. Le but est d'identifier les transformations géométriques qui permettent d'obtenir un carré à partir d'un autre. Nous proposons cette recherche aux élèves sous la forme d'un problème de reproduction : comment obtenir tous les carrés à partir du carré 2 bis ?



Dans cette étape, on ne fait pas encore la construction : on travaille sur le modèle où l'on peut faire des tracés additionnels pour préparer la construction. Remarquons d'abord qu'en partant du carré 2 bis, on peut obtenir le carré 2 par des prolongements, des reports de longueur et des angles droits. On peut reconstruire les carrés 3 et 3 bis à partir du centre des carrés 2 et 2 bis. Il n'est nécessaire de recourir aux transformations (l'homothétie) que pour obtenir le petit carré.

Plusieurs transformations peuvent néanmoins apparaître spontanément. On pourra demander aux élèves d'en identifier le plus possible lors de la mise en commun, notamment :

- Les carrés 2 et 2 bis sont symétriques par rapport à leur point commun. Les carrés 3 et 3 bis sont eux aussi symétriques, soit par symétrie centrale bien que le centre de symétrie ne soit pas tracé, soit par symétrie axiale par rapport la droite qui joint leurs points d'intersection.

- C'est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui permet de passer du carré 2 au carré 1 ; son centre semble proche du coin supérieur gauche du tableau. La même homothétie permet de passer du carré 3 bis au carré 2. Dans cette étape, on peut ne pas localiser précisément le centre de l'homothétie.

Il est intéressant de remarquer avec les élèves qu'il existe de nombreuses possibilités, ce qui apparaît le plus clairement dans le cas des carrés 2 et 2 bis : il peut s'agir d'une symétrie axiale,

centrale, d'une translation ou d'une rotation (il est évidemment nécessaire de préciser leurs éléments caractéristiques). Bien sûr, les carrés de même taille peuvent tous se déduire l'un de l'autre par translation, symétrie centrale ou symétrie axiale...

Étape 3 : Reconstruction de la figure. Analyse a priori

Pour cette étape, il s'agit de reconstruire tous les carrés à partir du carré 2 bis. Nous ajoutons la contrainte d'utiliser le moins d'instruments possibles, en particulier de ne pas utiliser les graduations de la règle. En effet la construction peut se faire à la règle non graduée et au compas. Elle peut même se faire à la règle seule mais nous n'irons pas jusque-là avec les élèves.

Commençons par une analyse *a priori* du problème. À nos yeux, la procédure la plus efficace, et demandant le moins de coups de crayons est la suivante :

Construction du carré 2 :

On utilise la symétrie centrale de centre le point commun aux deux carrés, en prolongeant les côtés du carré 2 bis et en reportant la longueur du côté au compas. On peut aussi prolonger la diagonale et reporter sa longueur pour obtenir le dernier sommet, ce qui évite de faire un angle droit. Finalement il suffit de 3 prolongements et 3 reports de longueur.

Construction du carré 3 bis :

On construit dans un premier temps sa diagonale horizontale : elle est le prolongement de la diagonale horizontale du carré 2bis, et sa longueur en est le double, en prenant pour point de départ le centre du carré 2 bis. Pour obtenir cette diagonale, il faut utiliser 3 fois la règle et 2 reports de longueur. Une fois cette diagonale construite, on peut terminer ce carré au compas, puisqu'il s'agit de construire deux triangles isocèles, l'un au-dessus et l'autre en dessous de la diagonale, dont le côté manquant mesure le double du côté du carré 2 bis qui apparaît sur la figure comme somme des côtés des carrés 2 et 2 bis, donc 2 fois le compas, 4 fois la règle.

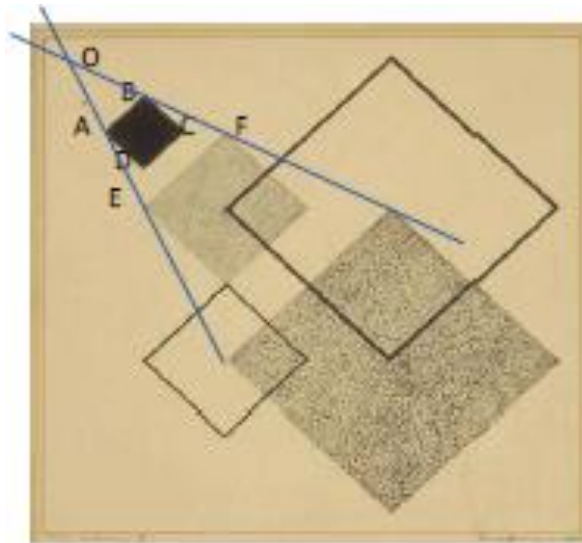
Construction du carré 3 :

Deux sommets de ce carré sont les centres des carrés 2 et 3 bis. Dans chaque cas, on a déjà tracé une diagonale, 1 coup de règle de plus donne le centre de ces carrés. On a aussi le centre du carré 3 (le sommet le plus haut du carré 3 bis). Le reste de la construction est élémentaire. Les autres sommets sont sur les prolongements des diagonales (2 fois la règle) et à une distance connue des sommets qu'on a déjà (1 fois le compas pour tracer le cercle circonscrit au carré) et il reste à tracer les côtés (4 fois la règle).

Construction du carré 1 :

Ce carré demande plus de travail, puisque aucun de ses sommets n'est déjà construit. Il est nécessaire de recourir à l'homothétie et, pour cela, de revenir à l'analyse de la figure modèle pour obtenir les éléments nécessaires à sa construction. Tout d'abord, il faut trouver le centre de l'homothétie qui permet de reconstruire ce carré. Une étude au préalable de l'homothétie est nécessaire pour que les élèves puissent mobiliser la connaissance suivante : tous les points homologues de figures reproduites par homothétie sont alignés avec le centre de celle-ci. Il faut donc tracer les droites reliant les sommets des côtés des carrés 2 et 3 bis, le centre O se trouvant à l'intersection de ces droites.

Nommons les points nécessaires pour plus de clarté :



La première étape de l'analyse avait permis d'établir que le rapport de l'homothétie qui fait passer du carré 2 au carré 1 est $1/2$. Les élèves doivent en déduire que les points A et B sont respectivement milieux des segments [OE] et [OF]. Une mobilisation des propriétés de la médiatrice permet la construction de ces milieux à la règle non graduée et au compas (2 fois la règle pour avoir O, 2 fois le compas et une fois la règle pour avoir le milieu A de [OE], 1 report de longueur pour avoir B milieu de [OF]). Une fois les points A et B construits, on peut construire C et D en sachant qu'ils sont sur la droite passant par O et les sommets homologues à C et D d'un des grands carrés (au choix, 2 ou 3bis) et que $AD = BC = AB$ (2 tracés à la règle puis 2 coups de compas pour avoir C et D, 4 coups de règle pour tracer les côtés de ABCD).

Il est évident que la construction de ce dernier carré demande un travail d'analyse approfondi, une connaissance fine des propriétés de l'homothétie et une mobilisation de connaissances antérieures avec la médiatrice. Il est bien sûr envisageable, pour simplifier l'exercice, de permettre, uniquement pour cette construction, l'utilisation de l'équerre ou des graduations de la règle.

Étape 3 : Organisation de la recherche des élèves

Comme nous l'avons déjà remarqué, seule la construction du carré 1 nécessite le recours à une homothétie. On peut donc prévoir un temps de mise en commun après un premier temps de recherche des élèves pour échanger sur la construction des premiers carrés (sauf le 1) puis relancer la recherche sur le carré 1 seul.

Par ailleurs pour rendre opérationnelle la consigne concernant la minimisation de l'emploi des instruments, on peut prévoir un tableau de deux colonnes (une pour la règle, une pour le compas) où les élèves marquent un trait chaque fois qu'ils utilisent un instrument, ce qui permet de les compter.

Pour différencier, on peut autoriser plus d'instruments (par exemple l'équerre), ou un point de départ différent. On peut aussi, après la construction par les élèves des premiers carrés, rechercher collectivement le centre d'homothétie.

Étape 4 : finalisation de la reproduction du tableau

La dernière étape de modélisation consiste à quitter l'espace géométrique pour revenir à la réalité. Pour cela, on peut proposer aux élèves de vérifier leur construction, d'abord visuellement, puis en mesurant si les dimensions finales correspondent bien aux contraintes fixées. On peut imaginer de corriger l'activité avec un calque sur lequel est tracée la figure finale. Enfin, les élèves peuvent rajouter

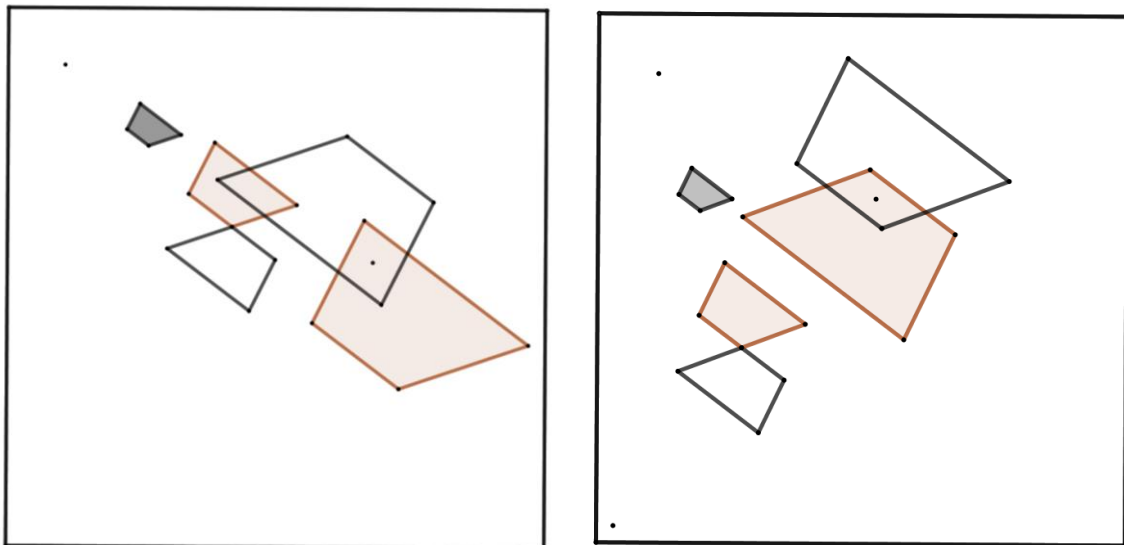
les couleurs, et épaissir les traits de crayons qui permettront une plus grande ressemblance avec le tableau initial.

Conclusion et prolongements possibles

La richesse de cette activité découle de la mobilisation d'une importante quantité de notions mathématiques, ainsi que de la finesse de l'analyse à produire pour être en mesure de reproduire le tableau. Les possibilités d'adaptation de l'exercice sont multiples, selon le niveau de classe auquel on s'adresse et la capacité des élèves à mobiliser des connaissances plus anciennes.

Le carré est une figure qui présente beaucoup de symétries, ce qui donne des solutions multiples pour la reconstruction de la figure. Si l'on veut travailler plus spécifiquement une transformation, on peut choisir un polygone qui n'a pas de symétrie, ce qui limitera le nombre de possibilités. On peut aussi demander aux élèves de construire un tableau à la manière de Theo van Doesbourg à partir d'un polygone donné à la place du carré 2 bis et en n'utilisant que la symétrie centrale et des homothéties de rapport 2.

Mais il n'est pas facile d'obtenir une figure un peu harmonieuse. Voici un exemple avec un quadrilatère qui est presque un trapèze symétrique par rapport à une diagonale du cadre et des centres d'homothétie situés sur les diagonales du carré-cadre. Ici, nous en avons fait deux versions différentes, l'une avec le même centre d'homothétie pour les deux couples de figures comme dans le tableau, l'autre avec deux centres d'homothétie différents (nous avons laissé les centres visibles).



II. Triangles semblables

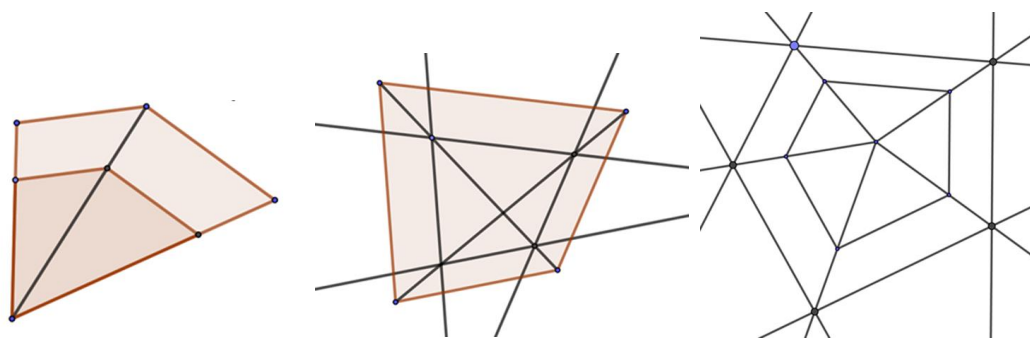
La similitude est la notion mathématique qui permet de rendre compte de la conservation de la forme des objets. Mathématiquement, c'est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

1. Polygones semblables

Lorsque deux polygones ont des angles égaux et des côtés proportionnels, on dit qu'ils sont semblables. L'un est un agrandissement de l'autre.

Les deux conditions, l'égalité des angles et la proportionnalité des côtés sont indispensables. En effet, les angles ne suffisent pas : les rectangles ont tous quatre angles droits mais ne sont pas forcément semblables. Les côtés proportionnels ne suffisent pas : deux parallélogrammes peuvent avoir des côtés proportionnels ou même égaux sans être semblables si leurs angles diffèrent. C'est seulement dans le cas des triangles qu'une des conditions entraîne l'autre d'où l'intérêt des cas de similitude des triangles et du théorème de Thalès. Le nombre de paramètres (ou d'égalités indépendantes) dont on a besoin pour définir un triangle ou un parallélogramme à similitude près est deux, pour un quadrilatère quelconque c'est quatre. En effet c'est la dimension de l'espace de ces figures moins celle du groupe des similitudes (qui est 4 au sens de la dimension des variétés).

En découpant un polygone en triangles on peut facilement en faire un agrandissement ou une réduction avec des parallèles, en partant d'un sommet, en se servant d'une diagonale ou, façon toile d'araignée, à partir d'un point intérieur.



Dans le cas des diagonales d'un quadrilatère ou de la toile d'araignée, pourquoi la dernière parallèle passe-t-elle par le point de départ ou pourquoi le dernier côté obtenu en joignant le dernier point au premier est-il parallèle au côté correspondant ? C'est le théorème de Thalès ou sa réciproque qui permettent de répondre suivant la manière dont on termine la figure ou dont on pose la question.

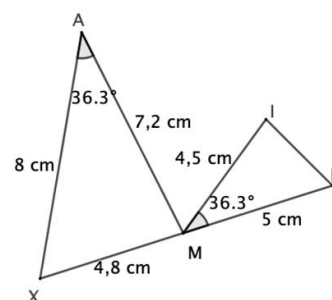
2. Triangles semblables

Etant donné que la condition sur les angles ne suffit pas dans le cas général, il nous paraît cohérent de définir les triangles semblables comme ayant tous leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels, comme pour les polygones semblables. Le fait que l'égalité des angles, et même de deux angles, suffise est un théorème, tout comme les autres cas de similitude (côtés proportionnels ou un angle égal entre des côtés proportionnels). Si l'on prend cette propriété comme définition, il devient nécessaire d'écrire un théorème pour écrire la relation de proportionnalité entre les côtés quand on sait que deux triangles sont semblables. On a donc le même nombre de théorèmes à établir et une étape de plus dans certaines démonstrations.

De plus, le cas de similitude que nous appellerons CAC (angle égal entre des côtés proportionnels) est souvent omis dans les manuels. Il est cependant indispensable dans des exercices comme le suivant :

On considère la figure ci-contre où les points I, M, N sont alignés.

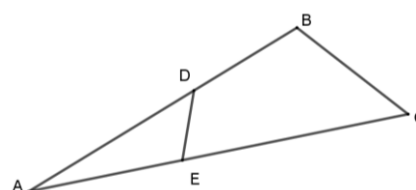
- 1) Montrer que les triangles MIN et MAX sont semblables.
- 2) En déduire IN.



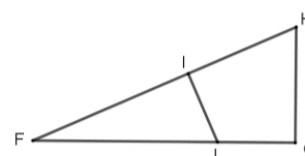
Étant donné que les angles en A et M respectivement des triangles AMX et MIN sont égaux et que les rapports des côtés homologues qui les encadrent sont égaux également, on en déduit que ces triangles sont semblables et donc que les troisièmes côtés homologues sont dans le même rapport, ce qui permet de calculer IN. Montrer directement l'égalité des angles serait ici impossible avec les connaissances dont disposent les élèves.

Par ailleurs, comme les cas de similitude sont des conséquences des cas d'égalité des triangles et du théorème de Thalès, ils ne peuvent venir qu'après le théorème de Thalès dans une progression cohérente du cycle 4, contrairement à ce qu'on trouve dans un certain nombre de manuels actuels. En revanche, ils précèdent le cours sur les lignes trigonométriques car ils constituent un outil pour montrer l'indépendance des lignes trigonométriques du triangle dans lequel on les regarde (voir annexe 1).

Nous avons déjà souligné l'importance de s'intéresser dans l'enseignement aux points homologues pour les triangles isométriques. C'est encore plus important dans le cas des triangles semblables qui sont parfois difficiles à reconnaître dans le cas emboîté et retourné comme dans la figure ci-contre.



C'est notamment le cas quand on veut montrer que le cosinus d'un angle est indépendant du triangle rectangle dans lequel on le considère : les triangles FGH et FIJ étant semblables, les rapports $\frac{FI}{FJ}$ et $\frac{FG}{FH}$ sont égaux.



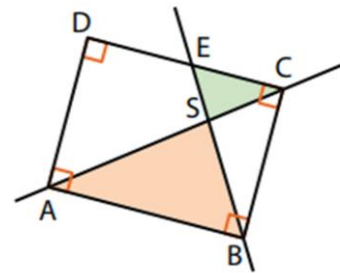
Dans la suite, nous reprenons quelques exercices provenant des classes des membres du groupe IREM. On trouvera de nombreux autres exercices commentés dans le chapitre 10. On trouvera aussi en annexe à ce chapitre une fiche de synthèse sur les triangles semblables inspirée de celle donnée en classe 3S.

Questions flash

Nous reprenons ici certaines des questions flash proposées dans les stages et issues de la classe 3S. Rappelons que ces questions flash, pouvant être utilisées comme mise en route au début d'une séance, ont pour objectif à la fois de familiariser les élèves avec les notions nouvelles (ou d'entretenir les plus anciennes) et d'exercer le calcul mental et l'analyse des figures.

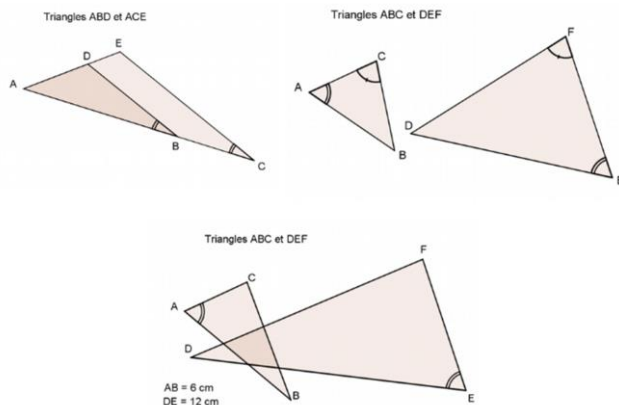
F1. Soit un rectangle ABCD et un point E sur [DC]. Les droites (AC) et (EB) sont sécantes en S. Montrer que ESC et ASB sont des triangles semblables.

Utilisation des théorèmes sur sécantes et parallèles et de la caractérisation des triangles semblables par les angles.



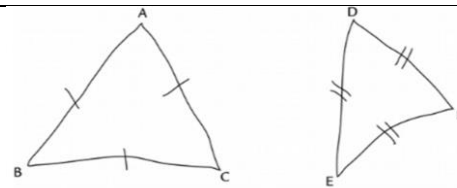
F2. Dans chacune des figures, dire si les triangles sont semblables. Justifier vos réponses.

Utilisation des théorèmes sur sécantes et parallèles et de la caractérisation des triangles semblables par les angles pour les deux premiers exemples. Dans le troisième (angles en A et E égaux, $AB = 6\text{ cm}$, $DE = 12\text{ cm}$), les triangles ne sont pas nécessairement semblables. Pour qu'ils le soient il faudrait l'égalité d'autres angles ou $EF = 2 AC$.



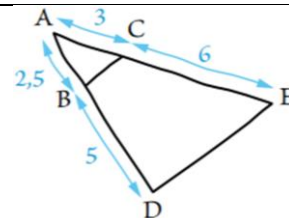
F3. Les triangles ABC et DEF sont-ils égaux ? Semblables ?

Permet de remarquer que les triangles équilatéraux sont tous semblables.



F4. Les triangles ABC et ADE sont-ils semblables ? Justifier.

Nécessite de passer des « petits bouts » aux côtés.

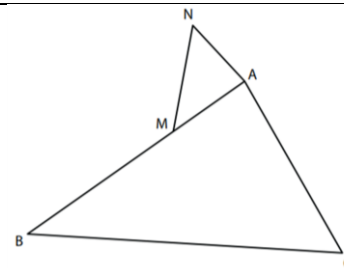


F5. Sur la figure, on a

$AB = 8\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $BC = 9,5\text{ cm}$
 $AN = 1,2\text{ cm}$, $AM = 1,6\text{ cm}$ et $MN = 1,9\text{ cm}$

Les triangles ABC et ANM sont-ils semblables ?

Changer l'ordre des données pour ranger les longueurs des côtés dans l'ordre croissant et repérer les sommets homologues si on veut des égalités d'angles.



F6. XYZ est un triangle tel que $XY = 3\text{ cm}$, $XZ = 7,5\text{ cm}$ et $YZ = 4,5\text{ cm}$.

Les triangles suivants sont-ils semblables au triangle XYZ?

- a) DEF est un triangle tel que $DE = 6\text{ cm}$; $DF = 15\text{ cm}$ et $EF = 9,1\text{ cm}$.
- b) MNO est un triangle tel que $MN = 5,4\text{ cm}$; $MO = 9\text{ cm}$ et $NO = 3,6\text{ cm}$.
- c) ABC est un triangle tel que $AB = 2\text{ cm}$; $AC = 3\text{ cm}$ et $BC = 5\text{ cm}$.
- d) IJK est un triangle tel que $IJ = 5,7\text{ cm}$; $IK = 14,3\text{ cm}$ et $JK = 8,5\text{ cm}$.

Ranger les longueurs des côtés dans le même ordre et comparer les rapports suffit pour dire si les triangles sont semblables ou non. On n'a besoin de repérer les éventuels sommets homologues que

si on veut en déduire des égalités d'angles. En tout cas, il est essentiel de savoir qu'il y a plusieurs manières de nommer un même triangle comme le montre cette réponse d'élève à la question qui suit :

$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{5,9} (\approx 0,77)$ et $\frac{BC}{EF} = \frac{6}{3,9} (\approx 1,54)$
 $\frac{AB}{DE} \neq \frac{BC}{EF}$, donc les triangles ABC et DEF ne sont pas semblables.

Soient ABC et EDF deux triangles tels que :

$AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $ED = 5,2 \text{ cm}$, $EF = 3,9 \text{ cm}$ et $DF = 2,6 \text{ cm}$.

Les triangles ABC et EDF sont-ils semblables ?

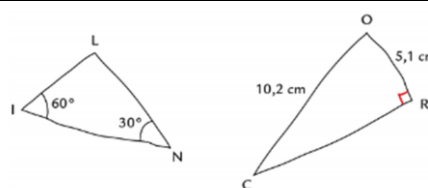
F7. Dans chacun des cas suivants, dire si les triangles ABC ou DEF sont semblables ou non. Justifier vos réponses.

- $AB = 2 \text{ cm}$, $\widehat{ABC} = 83^\circ$, $\widehat{BAC} = 50^\circ$; $EF = 3 \text{ cm}$, $\widehat{FED} = 83^\circ$, $\widehat{EDF} = 47^\circ$.
- ABC et DEF sont deux triangles rectangles tels que $\widehat{ABC} = 68^\circ$ et $\widehat{EDF} = 22^\circ$.
- $AB = 2 \text{ cm}$, $\widehat{ABC} = 31^\circ$; $EF = 4 \text{ cm}$, $\widehat{FED} = 31^\circ$.
- $AB = 2 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$, $\widehat{ABC} = 31^\circ$; $EF = 6 \text{ cm}$, $DE = 9 \text{ cm}$, $\widehat{FED} = 31^\circ$.

Utiliser au besoin la somme des angles d'un triangle. Pour le 4, l'angle est mal placé, les triangles ne pourraient être semblables que s'ils étaient isocèles ; on peut se rendre compte que ce n'est pas possible en faisant la construction ou si on sait qu'au plus grand angle est opposé le plus grand côté (voir annexe 1, proposition 8.3).

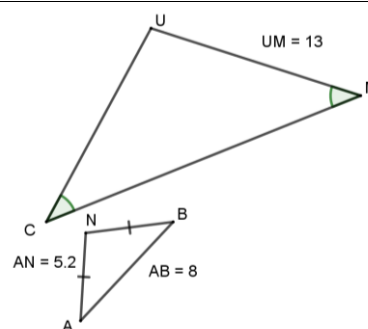
F8. Démontrer que les triangles LIN et ROC sont semblables.

Il est facile de démontrer que LIN est un triangle rectangle mais, pour montrer que les triangles sont semblables, il faut reconnaître que ce sont des demi-triangles équilatéraux ou que le sinus de l'angle en C est $\frac{1}{2}$.



F9. Le triangle ABN et le triangle CMU sont semblables. Déterminer UC et MC.

Reconnaissance des triangles isocèles à travers un codage d'égalité de côtés ou d'angles et utilisation des propriétés des triangles semblables pour calculer des mesures de longueurs.

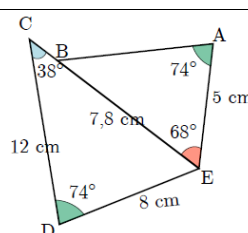


Exercices visant la maîtrise de la notion

Il s'agit d'utiliser la notion comme outil à l'intérieur d'autres problèmes. Voici quelques exercices utilisés dans la classe 3G.

M1. On considère la figure suivante : Calculer le périmètre du polygone ABCDE. Justifier.

Sur la figure c'est BE et non CE qui vaut 7,8 cm comme le lecteur perspicace peut le prouver (voir au besoin annexe 1, prop. 8.3)



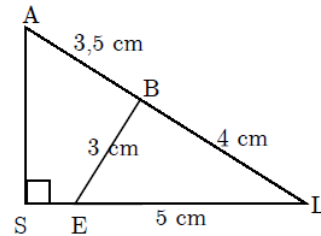
M2. Soient TOI et LES deux triangles semblables tels que : $TO = 16$ cm $TI = 20$ cm, $OI = 28$ cm, $LE = 12$ cm et $ES = 21$ cm. Calculer la longueur LS (on envisagera toutes les possibilités).

Il n'y a ici qu'une solution $LS = 15$ qui correspond au rapport $\frac{3}{4}$; il pourrait y avoir deux solutions si les longueurs du triangle donné étaient de la forme a, ak, ak^2 . Par exemple, on prend 8 cm, 12 cm et 18 cm pour le premier triangle et on donne 18 cm et 27 cm pour le deuxième ; alors le 3^{ème} côté peut avoir une longueur de 12 cm si c'est le plus petit ou de 40,5 cm si c'est le plus grand.

M3. On donne la figure ci-contre

- 1) Les triangles BEL et SAL sont-ils semblables ?
- 2) Calculer le périmètre et l'aire du quadrilatère BASE.

La réciproque du théorème de Pythagore permet de dire que BEL est un triangle rectangle (c'est EL qui vaut 5 cm), ce qui permet de montrer qu'il a les même angles que SAL. On en déduit AS et SL ce qui permet de calculer le périmètre de ABES et l'aire en le découpant par [AE] en deux triangles rectangles.

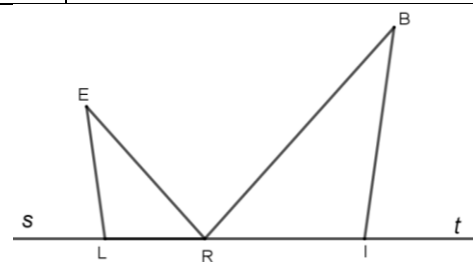


M4. On considère la figure suivante où :

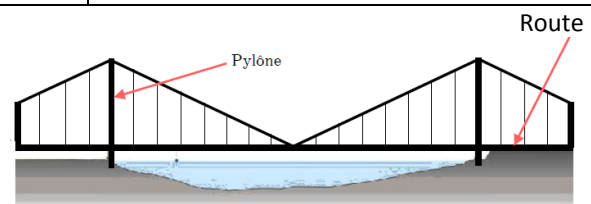
L, R et I sont alignés ; $\widehat{LE} = 82^\circ$; $LR = 3$ cm ; $RI = 4,8$ cm ; $\widehat{ERL} = \widehat{BRI} = 48^\circ$; $ER = 5,3$ cm ; $\widehat{IBR} = 34^\circ$; $BI = 6,4$ cm.

Calculer le périmètre du polygone LIBRE au millimètre près.

Les mesures sont nécessairement approchées (voir annexe 2).



M5. Le schéma représente le projet de construction d'un pont à haubans. Les câbles (les traits fins verticaux) sont espacés de manière régulière. Les deux pylônes (les traits épais verticaux) principaux dépassent la route de 90 m. Calculer la longueur de câble qu'il faut pour construire ce pont. On suppose que les angles au sommet des pylônes sont égaux.



Exercices d'approfondissement

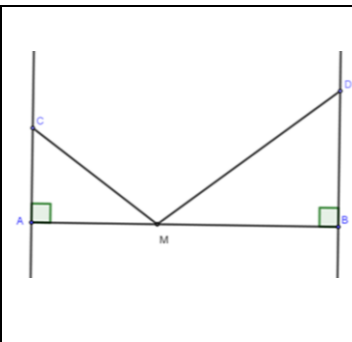
Exercices issus de la classe 3G (voir chapitre 10, exercices 2.3 et 2.4)

A1. Peut-on placer le point M sur [AB] pour que les triangles ACM et BDM soient semblables ? Si oui, donner toutes les possibilités puis les construire.

Recherche de conditions nécessaires : si les triangles sont semblables, les angles CMA et BMD sont égaux (cas 1) ou complémentaires (cas 2).

Cas 1 : (DM) recoupe (AC) en C' symétrique de C par rapport à A.

Cas 2 : l'angle CMD est droit et M se trouve sur le cercle de diamètre [CM].

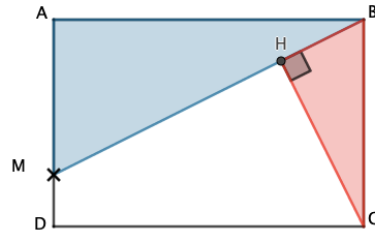


A2. Exercice donné dans la classe 3G.

On considère la figure suivante où ABCD est un rectangle.

$AB = 26,4$ m ; $AM = 11$ m ; $CH = 12$ m.

- 1) Les triangles BAM et HBC sont-ils semblables ?
- 2) Calculer le périmètre du rectangle ABCD.



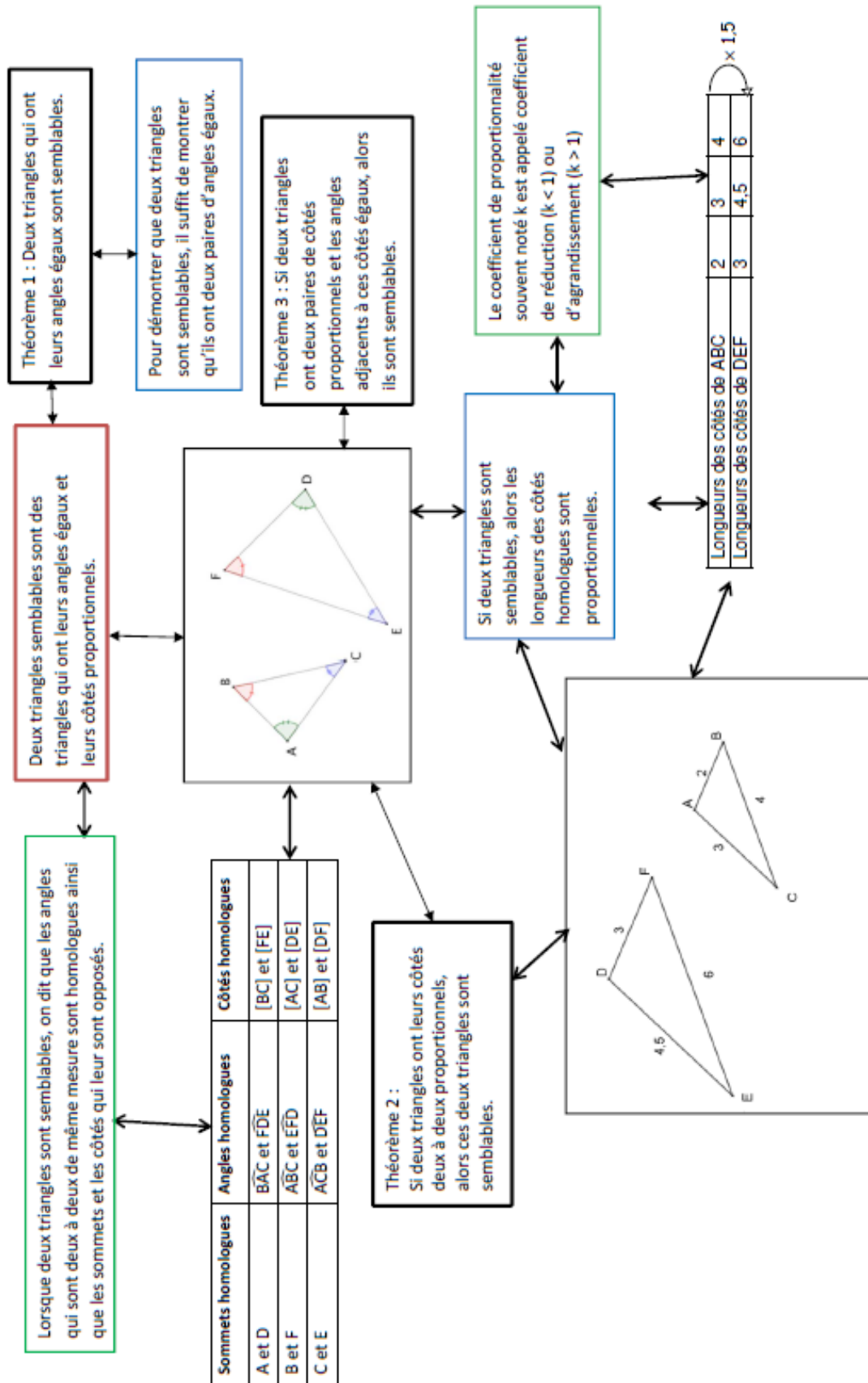
Pour étendre la recherche, on pourrait demander la position du point M sur le segment [AD] pour que les triangles BAM et HBC soient semblables ([AD] peut être aussi bien longueur qu'une largeur du rectangle) ? Le raisonnement sur le cas particulier est valable dans le cas général.

On peut faire varier M sur (AD) à condition de prendre H sur (BM) et pas seulement sur [BM].

Plus difficile (voir exercice 2.4. du chapitre 10)

Après avoir tracé [MC] : À quelle condition les quatre triangles sont-ils semblables ? Quelles conditions sur M pour que d'autres triangles que les deux premiers soient semblables entre eux parmi les quatre triangles ainsi obtenus ? (plus difficile : plusieurs cas à considérer).

TRIANGLES SEMBLABLES



III. Des problèmes mettant en jeu triangles semblables et d'autres notions

1. Construction du pentagone régulier. Une suite de problèmes articulés

Un pentagone régulier est un pentagone dont tous les côtés sont de même longueur et tous les angles égaux. Pour des définitions équivalentes voir chapitre 10, exercice 1.29 et une version pour élèves d'une partie de cet exercice dans l'annexe du chapitre 6. Nous proposons ici une version mise au point lors d'un stage de formation continue en avril 2021 de l'exercice 2.2. de la banque d'exercices et de problèmes du chapitre 10. Nous nous intéressons non seulement au triangle 36, 72, 72 mais aussi à son compagnon le triangle 36, 36, 108, les deux triangles d'or⁷⁰ qui interviennent dans les constructions du pentagone régulier. La construction se fait en quatre étapes rédigées sous forme de parties indépendantes.

Dans la première partie, on étudie des propriétés du pentagone régulier et de deux triangles : l'un formé par un côté et deux diagonales du pentagone, l'autre par deux côtés et une diagonale. Ce sont des triangles isocèles avec un angle de 36° , soit au sommet, soit à la base. Cette étude donne le moyen de construire, à partir de l'un de ces triangles, un pentagone dont tous les côtés sont égaux mais, pour l'égalité des angles, il faut étudier de plus près ces triangles, ce qui est l'objet de la deuxième partie. On peut l'admettre dans un premier temps.

Dans la deuxième partie, on montre que les triangles isocèles qui ont un angle de 36° (il y a deux cas) sont caractérisés par la relation $b^2 = a^2 + ab$ où a est le plus petit côté et b le plus grand.

Dans la troisième partie on construit des triangles isocèles dont les longueurs des côtés vérifient la relation $b^2 = a^2 + ab$. Pour cela on montre comment, étant donné un segment de longueur a , (respectivement b), trouver un segment de longueur b (respectivement a).

Dans la quatrième partie on montre la réciproque de la deuxième partie, à savoir que les triangles isocèles qui vérifient la relation précédente ont leurs angles égaux à 36° , 36° , 108° ou 36° , 72° , 72° .

On conclut par la construction du pentagone régulier de côté donné ou de diagonale donnée sur GeoGebra avec possibilité de fixer le cercle circonscrit au lieu du côté.

Nous donnons deux versions de cette suite de problèmes, d'abord une version très détaillée avec toutes les questions intermédiaires ensuite une version moins détaillée qu'on peut donner en situation de recherche.

Version 1 détaillée

Première partie : Etude du pentagone régulier

Soit un pentagone (convexe) régulier $P = ABCDE$. Cela signifie que ses côtés sont tous égaux : $a = AB = BC = CD = DE = EA$, ainsi que ses angles : $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEA} = \widehat{EAB}$.

- 1) On trace les diagonales $[BD]$ et $[BE]$. Montrer qu'elles ont la même longueur. A l'aide de la somme des angles des triangles, montrer que tous les angles du pentagone sont égaux à 108° .
- 2) Calculer les angles des triangles ABE et BCD .
- 3) En déduire les angles du triangle BDE et que $BD = BE$. On appelle b cette longueur.
- 4) Que peut-on dire des triangles isocèles qui ont un angle de 36° ? Quels sont leurs autres angles ?

⁷⁰ Un triangle d'or est un triangle isocèle dont les longueurs des côtés sont dans le rapport du nombre d'or.

5) Soit un triangle BDE isocèle en B avec des angles à la base de 72° (on donne la figure), construire à la règle et au compas des points A et C extérieurs au triangle BDE tels que $AB = AE = BC = CD = DE$.

Pour prouver que ABCDE est un pentagone régulier, il reste à prouver que ses angles sont égaux. On le montrera dans la quatrième partie.

Deuxième partie : Etude des triangles isocèles qui ont un angle de 36° .

1) Soit un triangle isocèle ABC dont l'angle au sommet A vaut 36° . On prend un point D sur [AB] tel que $\widehat{BCD} = \widehat{DCA}$.

a) Montrer que les triangles ABC et CBD sont semblables et que le triangle CDA est isocèle.

b) On pose $a = BC$ et $b = AB$. Exprimer toutes les longueurs de la figure à l'aide de a et b et montrer que $b^2 = a^2 + ab$.

2) Soit ABC un triangle isocèle en A dont un angle à la base vaut 36° . On considère le point D de [BC] tel que $\widehat{BAD} = 36^\circ$.

a) Montrer que les triangles BAD et ABC sont semblables et calculer les angles de ACD.

b) On pose $BC = b$ et $AB = a$. Exprimer toutes les longueurs de la figure à l'aide de a et b et montrer que $b^2 = a^2 + ab$.

Dans cette deuxième partie on a donc montré que les deux sortes de triangles isocèles avec un angle de 36° vérifient tous les deux la relation $b^2 = a^2 + ab$ si b désigne le plus grand côté et a le plus petit. Des noms différents ont été donnés aux triangles dans les parties 1 et 2 pour les rendre indépendantes. On peut reprendre dans la partie 2 les noms de la partie 1, en particulier quand on les traite à la suite.

Troisième partie : Construction de triangles isocèles dont les côtés vérifient $b^2 = a^2 + ab$.

On se donne un moyen de construire b quand on connaît a :

1) Montrer que la relation $b^2 = a^2 + ab$ peut s'écrire sous la forme $(b - \frac{a}{2})^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$.

2) Soit PMN un triangle rectangle en M et que $MN = a$ et $MP = a/2$. Le cercle de centre P passant par N recoupe la demi-droite [MP) en Q. On pose $b = MQ$. Montrer que a et b vérifient la relation $b^2 = a^2 + ab$.

Variante On va se donner un moyen de construire a quand on connaît b :

On se donne une longueur b. Montrer que la relation $b^2 = a^2 + ab$ peut s'écrire $(a + \frac{b}{2})^2 = b^2 + \frac{b^2}{4}$. Soit PMN un triangle rectangle en M et tel que $MN = b$ et $MP = b/2$. Le cercle de centre P passant par N recoupe la demi-droite [PM) en Q. On pose $a = MQ$. Montrer que a et b vérifient la relation $b^2 = a^2 + ab$.

Quatrième partie : Les triangles isocèles qui vérifient la relation $b^2 = a^2 + ab$ ont un angle de 36° .

1) Soit un triangle isocèle MNI tel que $IM = IN = b$ et $MN = a$ avec $b^2 = a^2 + ab$. On considère le point K sur [MI] tel que $KN = a$.

a) Montrer que les triangles MNK et MIN sont semblables.

b) En déduire que $MK = b - a$ puis que $KI = a$. Quelle relation y a-t-il entre les côtés de KIN ?

c) Montrer que $\widehat{IMN} = 2 \widehat{MIN}$. En déduire les angles de MIN et de INK.

2) Soit SRT un triangle isocèle de base $ST = b$ et de côtés $RS = RT = a$ tels que $b^2 = a^2 + ab$. On prend un point U sur [ST] tel que $TU = a$.

a) Montrer que les triangles SRU et STR sont semblables et donc que SUR est isocèle en U.

b) En déduire que $\widehat{TUR} = 2 \widehat{RSU}$ puis les valeurs des angles des triangles TUR, SUR et TRS.

Ici encore, des noms différents ont été donnés aux triangles pour rendre les questions indépendantes. Pour le premier cas, nous avons choisi de définir K de façon à rendre le triangle MNK isocèle, ce qui permet d'utiliser le cas de similitude par égalité des angles. Dans le second cas, nous aurions pu aussi définir U par $SU = UR$, avoir ainsi deux triangles isocèles avec un angle commun et montrer $SU = b-a$ par le rapport des côtés. Nous avons choisi de définir U par $SU = b-a$ de façon à utiliser le deuxième cas de similitude : un angle commun et les côtés qui l'entourent proportionnels.

Dans les deux cas, on calcule les angles en utilisant le supplémentaire et la somme des angles d'un triangle pour trouver que le plus petit angle vaut 36° .

On a montré dans cette partie que si on a un triangle isocèle de côtés a, b, b avec la relation $b^2 = a^2 + ab$, ses angles valent $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$; si c'est un triangle a, a, b avec la même relation, ses angles valent $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$.

Il est alors facile de montrer que, dans la construction évoquée à la fin de la première partie, les angles du pentagone valent tous 108° . Quand on sait construire de tels triangles, on sait donc construire un pentagone régulier.

Conclusion

1) Construire à la règle et au compas un pentagone régulier connaissant la longueur du côté (a) ou celle d'une diagonale (b).

2) Comment faire pour construire le pentagone régulier à partir du triangle ABE isocèle en A dont les angles à la base mesurent 36° ?

On peut demander à la moitié de la classe de partir de BDE et à l'autre moitié de partir de ABE. Le deuxième cas est un peu plus délicat car il faut construire BDE d'abord.

3) Réaliser les constructions avec GeoGebra.

Complément au travail sur GeoGebra : si c'est non le côté mais le cercle circonscrit au pentagone qui est donné, comment faire ?

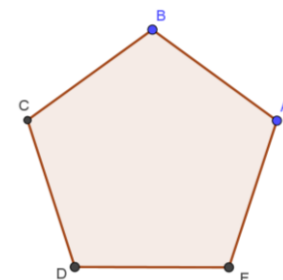
On a donc un cercle (C) de centre O et de rayon R donné. Une solution simple consiste à construire ailleurs un pentagone régulier par la méthode précédente avec n'importe quelle longueur de côté. On trace son cercle circonscrit (cercle passant par 3 points) et on demande son centre O'. Avec l'outil compas, on trace un cercle de rayon R et de centre O'. On trouve le côté du polygone cherché en se servant d'une homothétie de centre O' (intersection avec les rayons). On peut alors reporter la longueur trouvée pour le côté et construire le polygone cherché sur le cercle (C).

Version 2. Thème de recherche pour les élèves en plusieurs étapes

Étape 1. Identification de triangles dans le pentagone.

On fournit aux élèves un pentagone régulier (ou on le produit avec l'outil polygone régulier de GeoGebra) et on donne la définition. On leur demande s'ils peuvent calculer les angles du pentagone et de tous les triangles dont les sommets sont des sommets du pentagone.

Quand ils ont trouvé tous les angles, on leur demande de trouver tous les triangles isocèles qui ont un angle de 36° et dont le plus petit côté mesure 5cm (par exemple).



L'indication qu'on peut fournir au besoin c'est de penser à la somme des angles d'un triangle.

Étape 2. Etude des triangles d'or.

On partage en deux groupes qui étudieront chacun un des triangles d'or.

Groupe A. On fournit aux élèves un triangle isocèle BDE dont l'angle au sommet en B mesure 36° sur lequel on a tracé un segment [EI] avec I sur le côté [BD] et tel que l'angle \widehat{BEI} soit égal à 36° .

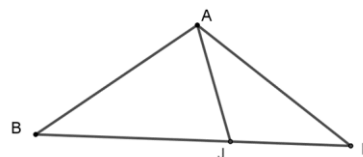
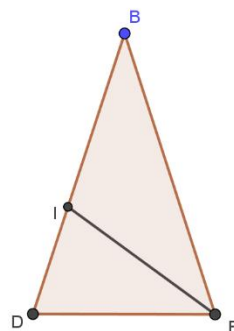
On appelle a la longueur DE et b la longueur BD.

Le problème consiste à trouver toutes les propriétés de la figure et d'en déduire une relation entre a et b.

Groupe B. On fournit aux élèves un triangle isocèle ABE dont les angles à la base mesurent 36° et sur lequel on a tracé un segment [AJ] avec J sur le côté [BE] et tel que l'angle \widehat{EJA} soit égal à 36° .

On appelle a la longueur AE et b la longueur BE.

Le problème consiste à trouver toutes les propriétés de la figure et d'en déduire une relation entre a et b.



L'indication qu'on peut fournir au besoin c'est de penser aux triangles semblables.

Étape 3. Construction des triangles d'or

Etant donnée une longueur a, comment trouver une longueur b telle que $b^2 = a^2 + ab$?

Ici, il semble nécessaire d'aider les élèves à transformer le problème pour le démarrer et de les guider pour comprendre ce qu'on fait dans la troisième partie.

Puisqu'on cherche b en fonction de a, on met tous les b du même côté : $b^2 - ab = a^2$: $b^2 - ab$ est le début du carré de $(b - \frac{a}{2})^2$; en ajoutant $(\frac{a^2}{4})$ aux deux membres de l'équation, on peut écrire $(b - \frac{a}{2})^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$

ou encore $b - \frac{a}{2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$; à gauche, on a une longueur, à droite une autre longueur où on peut reconnaître l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur a et $\frac{a}{2}$. Il faut donc construire un tel triangle rectangle et ajouter $\frac{a}{2}$ à la longueur de l'hypoténuse d'où la construction proposée dans la partie 3 ci-dessus.

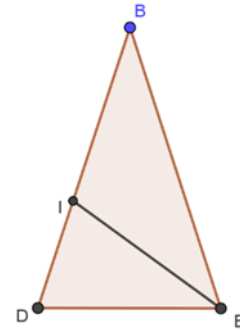
Étape 4. Calcul des angles des triangles d'or

Reste à voir que les triangles isocèles dont les côtés vérifient la relation sont les triangles isocèles ayant un angle de 36° étudiés à la deuxième étape.

Groupe A. On donne aux élèves le même triangle BDE que dans la deuxième partie. Cette fois les hypothèses sont $BD = BE = b$, $DE = IE = a$ et $b^2 = a^2 + ab$.

On demande aux élèves de trouver les propriétés de la figure et de calculer les angles de tous les triangles.

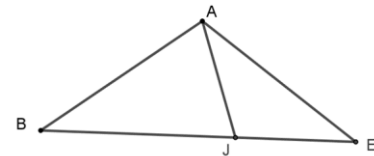
La difficulté est de s'intéresser d'abord aux triangles DEI et BDE pour montrer qu'ils sont semblables en se servant des angles puis d'utiliser la conséquence sur les côtés pour montrer que $DI = b - a$ et donc que BEI est isocèle, ce qui permet ensuite de calculer les angles.



Groupe B. On donne aux élèves le même triangle ABE que dans la deuxième étape. Cette fois les hypothèses sont $BA = AE = a$, $BE = b$, $AJ = JE$ et $b^2 = a^2 + ab$.

On demande aux élèves de trouver les propriétés de la figure et de calculer les angles de tous les triangles.

De même il faut montrer d'abord que les triangles AJE et EAB sont isocèles et semblables parce qu'ayant un angle à la base en commun.



Remarquons que nous avons ici utilisé la même méthode pour les deux triangles, contrairement à ce que nous avons fait dans la partie 4 ci-dessus. Cela permet d'illustrer la variété des choix possibles.

Étape 5. Construction du pentagone.

On peut alors construire le pentagone régulier à partir du triangle BDE et prouver qu'on en a bien un.

On se donne une longueur a

On a une construction qui permet de trouver b tel que $b^2 = a^2 + ab$ (étape 3)

On construit un triangle isocèle de a et de côtés égaux b (triangle d'or). Ses angles valent $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ (étape 4).

On construit sur ce triangle un pentagone dont tous les côtés valent a .

Ses angles valent tous 108° car les angles des triangles ajoutés valent $108^\circ, 36^\circ, 36^\circ$ (étape 4b) et que $72 + 36 = 108$.

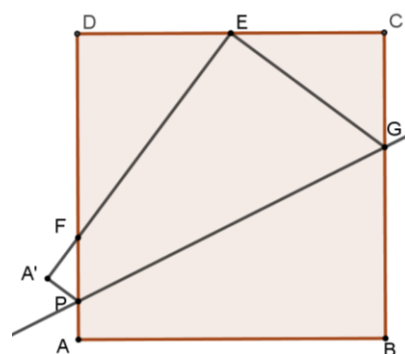
Si l'on part de ABE, il faut construire BDE avant de construire BCD.

2. Pliage d'un carré. Théorème de Haga

Le problème suivant est proposé dans le bulletin de l'APMEP n° 508 de mars-avril 2014

Voici un pliage, connu sous le nom de théorème de Haga, qui permet de déterminer le tiers du côté d'un carré.

Le milieu E du côté [DC] ayant été marqué au préalable (*on ramène [CB] sur [DA] et on ne fait que marquer le pli sur E*), on plie le carré ABCD de manière à amener B sur E. Le côté qui était en [AB] vient en [EA'] et coupe le côté [AD] en F. Il s'agit de prouver que F est au tiers (ou aux deux tiers) de [DA].



Remarque sur la figure B vient en E donc B et sont symétriques par rapport à la médiatrice de [EB] qui passe par G et recoupe le carré en P.

Appelons a le côté du carré.

Démonstration 1 (sans rien ajouter à la figure)

Les triangles CEG et DFE sont semblables (angles en E complémentaires). On en déduit que $\frac{DF}{CE} = \frac{DE}{CG}$.

Mais $DE = CE = \frac{a}{2}$. On en déduit $DF = \frac{a^2}{4 CG}$.

Par ailleurs, Pythagore dans le triangle rectangle CEG donne $EG^2 = CE^2 + CG^2$. Mais $EG = GB$ à cause de la symétrie donc $CE^2 = GB^2 - GC^2$. Ceci nous donne $\frac{a^2}{4} = (GB - GC)(GB + GC)$. Mais $GB + GC = a$ donc $GB - GC = \frac{a}{4}$. En combinant avec $GB + GC = a$, cela donne $GB = \frac{5a}{8}$ et $GC = \frac{3a}{8}$.

En reportant on trouve $DF = \frac{2a}{3}$ donc F est aux deux tiers de DA en partant de D.

On a aussi trouvé que le point G partage [BC] dans un rapport $\frac{3}{5}$.

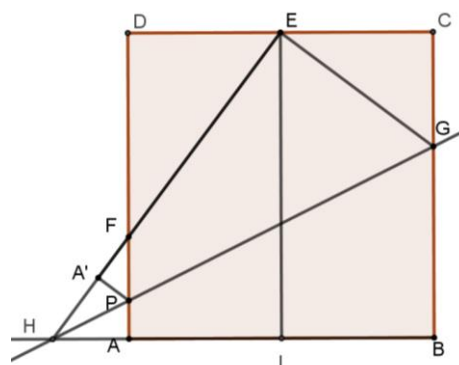
Démonstration 2 (en ajoutant des constructions)

La droite (GF) coupe (AB) en H. A cause de la symétrie, (EF) passe par H. On appelle I le milieu de [AB].

Les triangles AFH et DFE sont homothétiques (les droites (DE) et (HA) sont parallèles.)

Le rapport en valeur absolue est $\frac{FA}{FD}$ ou $\frac{HA}{DE}$. Par ailleurs, grâce à la symétrie, $HE = HB = HA + a$. On a aussi $HI = HA + \frac{a}{2}$.

Le théorème de Pythagore dans le triangle HEI donne $HE^2 = HI^2 + a^2$ soit $(HA + a)^2 = (HA + \frac{a}{2})^2 + a^2$. En développant et simplifiant, on trouve $2 a HA = a HA + \frac{a^2}{4}$ et donc $HA = \frac{a}{4}$. Comme $DE = \frac{a}{2}$, on a $DE = 2 HA$ et donc $DF = 2 FA$ et FA est bien le tiers de AD.



On pourra trouver une autre démonstration, proche de la démonstration 2 dans le bulletin de l'APMEP n° 510 p. 497.

Chapitre 9

Quelques applications des triangles isométriques et semblables

I. La méridienne

En 1792, donc à l'époque de la révolution française, il a été décidé d'unifier les diverses mesures, notamment de longueurs, en créant une unité valable pour la France entière (avec l'idée de l'étendre au monde entier) : le mètre. Pour que cette unité soit admise par tous, il fallait qu'elle soit reliée à une mesure indiscutable qui apparaissait dans la nature. Voici ce que dit un rapport de l'Académie des Sciences⁷¹ :

L'idée de rapporter toutes les mesures à une unité de longueur prise dans la nature, s'est présentée aux mathématiciens, dès l'instant où ils ont connu l'existence d'une telle unité et la possibilité de la déterminer. Ils ont vu que c'était le seul moyen d'exclure tout arbitraire du système des mesures et d'être sûr de conserver toujours le même ...

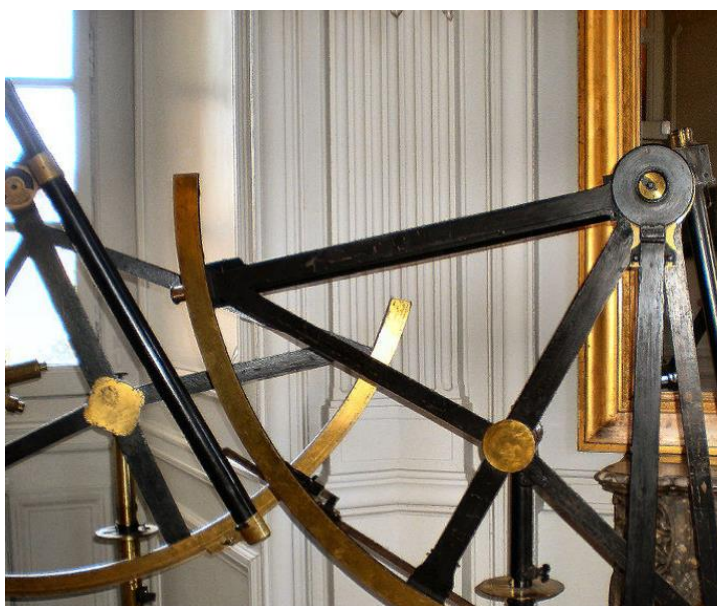
On a donc choisi une unité liée à la Terre. En effet, le kilomètre (c'est-à-dire 1000 m) correspond à la quarante millième partie de la circonférence terrestre C : on a $C = 40000$ km. Bien entendu, cela suppose que l'on ait mesuré le tour de la Terre, soit à l'équateur, soit le long d'un méridien. C'est cette dernière solution qui a été choisie et deux équipes d'astronomes (l'une dirigée par Delambre et l'autre par Méchain) ont mesuré le méridien qui passe par Paris, entre Dunkerque et Barcelone, en commençant par les extrémités et en se rejoignant à Rodez, environ au milieu.

Il y a de nombreux problèmes, à la fois théoriques et pratiques concernant cette mesure. Déjà, il faut être capable, lorsqu'on est en un point, de déterminer la direction du méridien. C'est assez facile car cette direction correspond à la direction de l'ombre d'un bâton lorsque celle-ci est la plus courte. Il faut ensuite mesurer les distances entre des points. Et cela, c'est difficile, voire quasiment impossible, car il faut franchir les collines ou les montagnes, les fleuves, les forêts, les villes, etc. et il est très difficile d'aller en ligne droite dès que le terrain est accidenté. C'est pourquoi ce que l'on fait est de mesurer *une seule distance* que l'on appelle la *base*. Elle est prise entre des points situés en plaine, sans construction ni obstacle entre les deux et suffisamment longue pour diminuer l'effet des erreurs de mesure. Ensuite, on ne mesure plus aucune longueur, mais seulement des angles.

En effet, il est beaucoup plus facile de mesurer les angles. Pour cela on choisit des points de repère élevés : une tour, un château, une église, etc., on se place en un tel point, on en vise deux autres, et on mesure l'angle ainsi déterminé. Les outils utilisés pour cela sont le « quart de cercle » ou le « cercle de Borda. Ils sont munis de lunettes de visée orientables, voir les photos ci-dessous.

⁷¹ Rapport de l'académie des sciences en date du 19 mars 1791, annexe à la séance de l'assemblée nationale du 26 mars 1791 au matin.

https://www.persee.fr/doc/arcpa_0000-0000_1886_num_24_1_13098_t1_0394_0000_6



Dans les exercices proposés on explique comment on déduit de la longueur de la base et des angles les autres longueurs de la triangulation. Une fois mesurée la distance entre deux points d'un même méridien, il faut en déduire la longueur totale du méridien, et pour cela déterminer l'angle par rapport au centre de la Terre (c'est-à-dire la différence de latitude entre les deux points). Pour plus de détails sur le sujet, on consultera [https://fr.wikipedia.org/wiki/Meridienne_\(geodesie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Meridienne_(geodesie)), le livre de Denis Guedj (2000), celui de Ken Alder (1998) qui est plus complet ou le texte de Delambre lui-même⁷².

Quelques exercices sur le thème de la méridienne

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs de ses côtés et $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{CBA}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$ ses angles. Dans toute la suite on suppose que le triangle est *acutangle* c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus.

La méthode de triangulation repose sur le principe suivant : si on connaît deux angles et un côté d'un triangle, on connaît les autres côtés. Les exercices suivants explicitent ce principe. Le fondement de la méthode est le second cas d'égalité des triangles qui explique qu'une longueur et deux angles déterminent les autres longueurs. Si l'on a un second triangle $A'B'C'$ et qu'on note, comme ci-dessus, a' , b' , c' les longueurs de ses côtés et α' , β' , γ' ses angles et si l'on suppose qu'on a $c = c'$, $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$, on a aussi $\gamma = \gamma'$, $a = a'$ et $b = b'$.

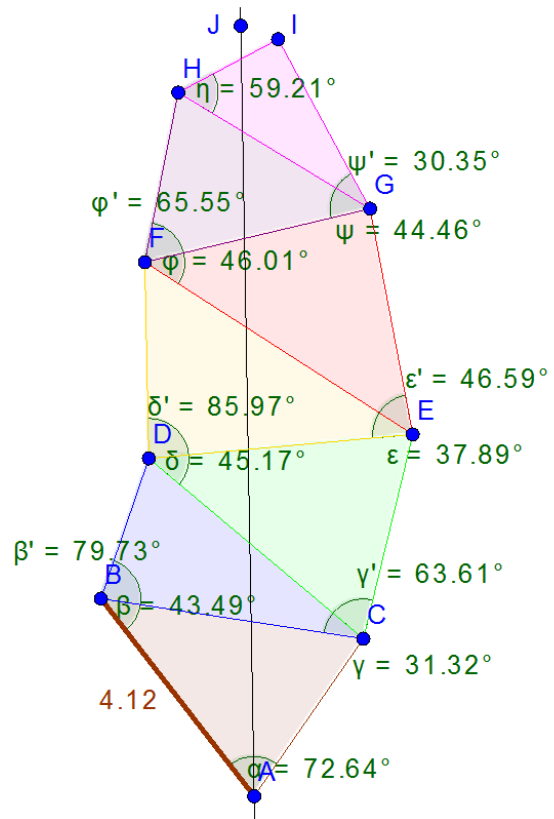
Exercice : On a un triangle ABC sur le terrain, dont on a mesuré le côté c et les angles α, β . On en dessine un modèle $A' B' C'$ sur une feuille de papier avec les mêmes angles α, β mais avec une autre longueur c' . On mesure a' , b' , c' sur le papier. Calculer les longueurs a , b .

Application numérique : on suppose que $c = 17,5$ km, $\alpha = 37,2^\circ$, $\beta = 73,7^\circ$. On mesure $c' = 13$ cm, $a' = 8,41$ cm et $b' = 13,36$ cm. Calculer a et b . (Réponses : $a = 11,33$ km, $b = 17,98$ km.)

⁷² « Mesure de la Méridienne. Observations géodésiques », qui est en ligne (<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110604s/f185.item.zoom>).

On a ici une méthode pratique pour trouver les longueurs manquantes grâce à un modèle semblable au triangle initial. Bien entendu, comme on le verra dans l'exercice suivant, on peut calculer directement ces longueurs.

La figure ci-contre donne un aperçu du type de figures auxquelles ont été confrontés Delambre et Méchain.



La loi des sinus

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). On pose $h = AH$. On désigne par $\mathcal{A}(ABC)$ l'aire du triangle.

- 1) Calculer $\mathcal{A}(ABC)$ en fonction de h et a .
- 2) Calculer h en fonction de c et β et en déduire la formule $\mathcal{A}(ABC) = (1/2) ac \sin \beta$.
- 3) Donner les formules analogues en utilisant les autres angles et en déduire la formule des sinus : $a/\sin \alpha = b/\sin \beta = c/\sin \gamma$.
- 4) On suppose connus α, β et c . Calculer γ , a et b .

Application numérique : $c = 17,5$ km, $\alpha = 37,2^\circ$, $\beta = 73,7^\circ$. (Réponses : $\gamma = 69,1^\circ$, $a = 11,33$ km, $b = 17,98$ km.)

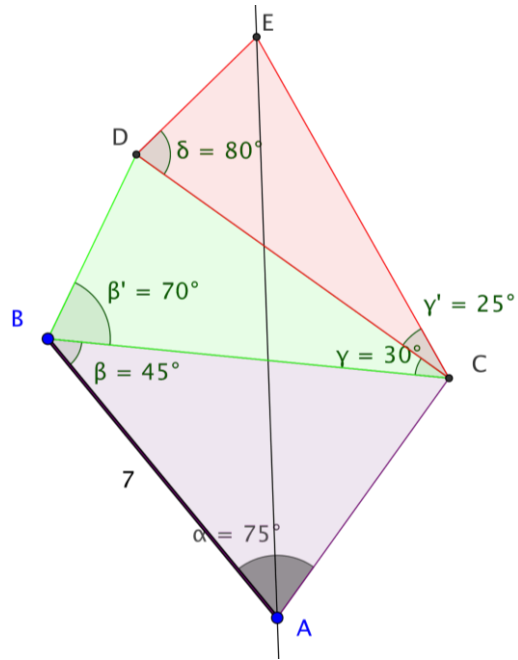
Un exemple simplifié

La figure montre un exemple très simplifié de triangulation. L'objectif est de calculer la longueur AE située le long du méridien.

On suppose que la longueur AB est égale à 7 km et que les angles ont les valeurs indiquées sur la figure. En utilisant l'exercice précédent, calculer successivement les longueurs AC, BC, BD, CD, DE et CE.

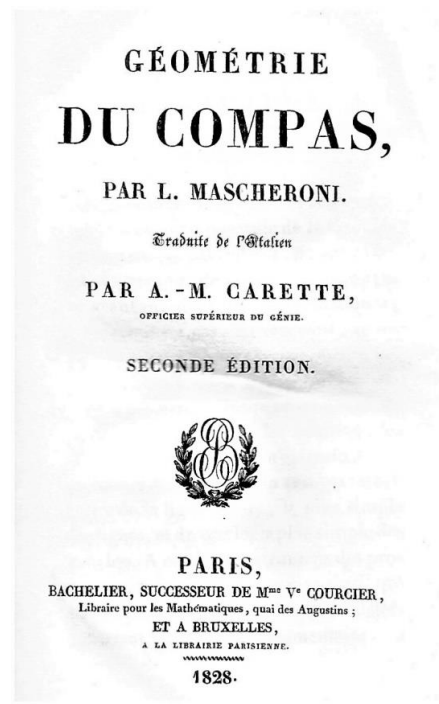
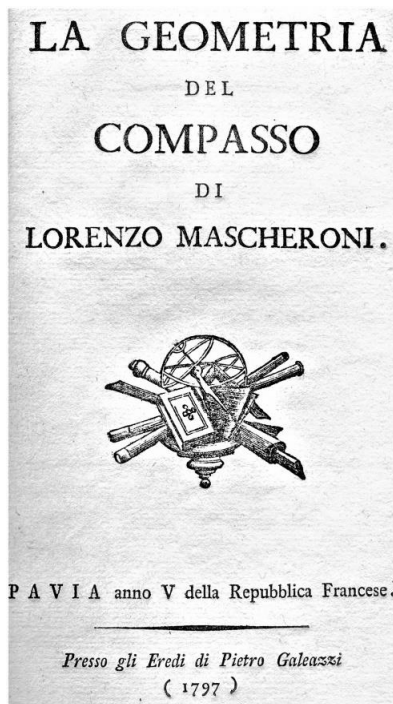
On donne en plus l'angle $\widehat{CAE} = 37,64^\circ$. Calculer la longueur AE.

Question subsidiaire (difficile) : calculer directement l'angle \widehat{CAE} .



II. Les constructions au compas seul

En 1797, l'abbé Lorenzo Mascheroni (Bergame 1750 – Paris 1800), professeur d'algèbre et de géométrie à l'université de Pavie, fait paraître la *Geometria del compasso*. L'année suivante, il gagne Paris pour faire partie de la commission chargée d'effectuer, sous la direction de Jean-Baptiste Delambre, les calculs qui, suite à la mesure de la Méridienne, doivent définir le mètre étalon et les autres unités de mesure. Les travaux de la commission sont présentés le 10 décembre 1799, mais Mascheroni décède peu après, à la suite d'une courte maladie.



L'origine et la raison de cet ouvrage sont d'ordre pratique. Mascheroni souhaitait améliorer la précision des graduations des instruments utilisés en astronomie et en géodésie, qui constituaient l'une des principales sources des erreurs de mesure. Ces graduations étaient traditionnellement réalisées par division du cercle en parties égales à l'aide de la règle et du compas.

Mascheroni commence par remarquer que les tracés au compas sont nettement plus précis que les tracés à la règle :

Pour démontrer en général la supériorité de l'usage du compas sur celui de la règle, quand il s'agit de décrire avec précision des lignes à l'épreuve du microscope, il suffit de dire qu'avec une règle tant soit peu longue, il est presque impossible de garantir la précision de tous les points qu'on trace, tant il est difficile qu'elle soit rigoureusement droite dans toute sa longueur. Fût-elle-même très droite, les praticiens savent que la trace d'une ligne menée le long de la règle porte avec elle une incertitude de parallélisme dans le mouvement de l'axe de la pointe qui marque, ou de parfaite application de cette pointe à l'arête de la règle. Le compas n'est point sujet à ces deux inconvénients, il suffit que son ouverture soit fixe et les pointes très fines ; en plaçant l'une d'elles en un point pris pour centre, l'autre décrit un arc aussi exact qu'il est possible. (Mascheroni 1828, p. 9-10)

Il cherche alors à remplacer la division du cercle à la règle et au compas par une division au compas seul :

Je commençai à croire que j'aurais beaucoup fait, si je réussissais à diviser la circonférence en plus de six parties par le secours du compas seul ; j'aurais rendu aux artistes qui travaillent aux instrumens astronomiques un service d'autant plus important, que mes subdivisions de la circonférence auraient été plus étendues et plus conformes à la division du quart de cercle en 90° . (*op. cit.*, p. 13)

Au cours de cette recherche, Mascheroni s'aperçoit que, non seulement pour la division du cercle, mais *pour toutes les constructions à la règle et au compas*, la règle est théoriquement inutile et le compas seul suffit :

Mais en avançant, j'ai trouvé qu'il n'y avait point de problème de Géométrie élémentaire qui ne puisse se résoudre avec ce seul instrument, c'est-à-dire en ce sens que le compas suffit pour trouver tous les points demandés par le problème pour la position et la détermination des droites dont on a besoin. (*op. cit.*, p. 20)

Ce résultat est maintenant connu sous le nom de théorème de Mohr⁷³-Mascheroni : *si une construction géométrique est possible à la règle et au compas, alors elle est possible au compas seul.*

L'une des motivations principales de Mascheroni étant la division d'un cercle en parties égales, commençons par en voir quelques-unes :

1. Partager un cercle en 6 arcs égaux

Il s'agit de reproduire la rosace classique des écoliers, obtenue par exemple ainsi⁷⁴ :

1° Un point A étant choisi sur le cercle donné Γ de centre O, tracer le cercle de centre A passant par O, qui recoupe le cercle Γ en B et C.

2° Tracer les cercles de centres B et C passant par A (et par O), qui recoupent Γ respectivement en D et E.

3° Tracer le cercle de centre D passant par B et O, qui recoupe Γ en F.

⁷³ Jørgen Mohr (Copenhague 1640 – Görlitz 1697), mathématicien danois, avait démontré le théorème dans son traité *Euclides danicus* (1672), mais ce résultat était resté inaperçu jusqu'à ce qu'on retrouve un exemplaire de l'ouvrage chez un libraire en 1928.

⁷⁴ Il s'agit d'une simple itération de la construction du triangle équilatéral selon Euclide.

Les points A, B, C, D, E, F partagent le cercle Γ en 6 arcs égaux.

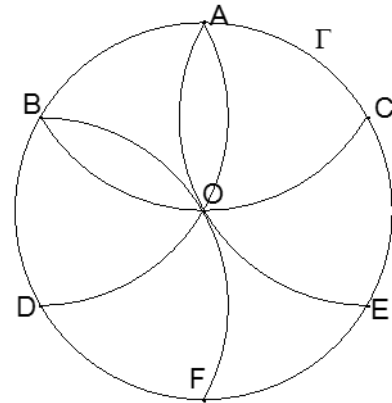
Démonstration

Par construction, les triangles AOB, AOC, BOD, COE, DOF ont leurs trois côtés égaux au rayon R du cercle initial ; ils sont donc équilatéraux et on a :

$$EC = CA = AB = BD = DF$$

$$\widehat{EOC} + \widehat{COA} + \widehat{AOB} + \widehat{BOD} + \widehat{DOF} = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 300^\circ, \text{ donc } \widehat{FOE} = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ.$$

Le triangle EOF est donc équilatéral, et on a $EF = OE = EC$.

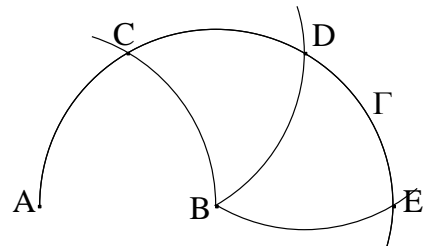


L'hexagone ABDFEC, ayant ses angles égaux (à 120°) ainsi que ses côtés, est par conséquent régulier (voir aussi exercice 1.29).

2. Application : construire le symétrique d'un point A par rapport à un point B

Puisque l'hexagone ci-dessus est régulier, le point F est le symétrique de A par rapport à O. Soit alors à construire le symétrique d'un point A par rapport à un point B

- 1° Tracer le cercle Γ de centre B passant par A.
 - 2° Tracer le cercle de centre A passant par B, qui coupe Γ en C.
 - 3° Tracer le cercle de centre C passant par B, qui coupe Γ en D.
 - 4° Tracer le cercle de centre D passant par B, qui coupe Γ en E.
- Le point E est le symétrique de A par rapport à B.

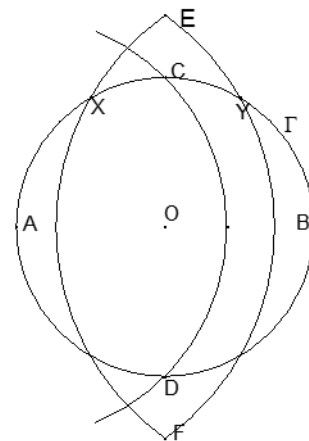


3. Partager un cercle en 4 arcs égaux

Soit A un point du cercle donné Γ de centre O.

- 1°. Tracer le point B, symétrique de A par rapport à O, obtenu à l'aide de deux points intermédiaires successifs X et Y (voir ci-dessus).
- 2° Tracer le cercle de centre A passant Y et le cercle de centre B passant par X, qui se coupent en E et F.
- 3° Tracer le cercle de centre A et de rayon OE, qui coupe le cercle Γ en C et D.

Les points A, C, B, D partagent le cercle Γ en 4 arcs égaux.



Démonstration

Appelons R le rayon du cercle Γ . Par construction, $[AY]$ est le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle, donc $AY = R\sqrt{3}$.

Les constructions effectuées étant symétriques par rapport à la médiatrice Δ de $[AB]$, les points E et F sont situés sur Δ .

Le triangle AOE est donc rectangle en O, et on a, par le théorème de Pythagore :

$$OE^2 = AE^2 - AO^2 = 3R^2 - R^2 = 2R^2.$$

Dans le triangle rectangle AOC on a donc $AC^2 = OE^2 = 2R^2$.

On a aussi $AO = OC = R$, d'où $AC^2 = AO^2 + OC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AOC est donc rectangle en O, et C se trouve donc sur Δ . Il en va de même pour le point D, et il en résulte que les points C et D partagent les deux arcs AB en deux arcs égaux.

4. Partager un cercle en 12 arcs égaux

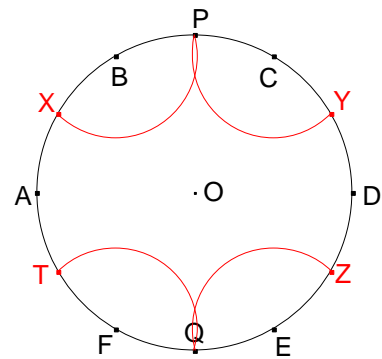
Sachant maintenant partager, au compas seul, un cercle en 4 parties égales et en 6 parties égales, on pourra le partager en 12 parties égales.

En effet, partant d'un point A du cercle :

1° Le partage en 6 fournira les points B, C, D, E, F.

2° Le partage en 4 fournira les points supplémentaires P et Q

3° Les cercles de centres B et C passant par P fourniront les points X et Y, et les cercles de centres E et F passant par Q fourniront les points Z et T.



Démonstration

Les triangles BOP, POC, QOE, QOF sont isocèles et ont un angle au sommet de 30° .

Les triangles isocèles BOX, COY, EOZ et FOT leur sont égaux (cas d'égalité CCC), donc leur angle au sommet est également de 30° . Les angles résiduels \widehat{AOX} , \widehat{DOY} , \widehat{DOZ} , \widehat{AOT} mesurent donc eux aussi 30° , et les triangles isocèles AOX, DOY, DOZ et AOT sont par conséquent égaux aux précédents.

Pour terminer, voici deux constructions qui sont faciles à réaliser à la règle et au compas, mais qui sont incontestablement plus ardues au compas seul.

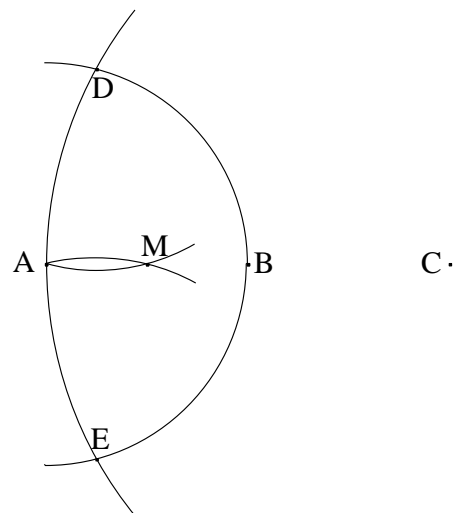
5. Construire le milieu d'un bipoint (A, B).

1° Construire le point C, symétrique de A par rapport à B (voir plus haut).

2° Tracer le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre C passant par A ; ils se coupent en D et E.

3° Tracer les cercles de centres D et E passant par A ; ils se recoupent en M.

Le point M est le milieu du bipoint (A, B).



Démonstration

Remarque préliminaire : la droite (AB) est axe de symétrie de la figure, donc le point M est sur cette droite.

Les triangles ACD et ADM sont isocèles par construction ; de plus, ils ont en commun l'angle en A. Ils sont donc semblables, et on a par conséquent $AD/AM = AC/AD$.

Mais $AD = AB$ par construction, donc $AB/AM = AC/AB = 2$: le point M est donc bien le point cherché.

6. Construire le centre (perdu) d'un cercle Γ donné

La construction donnée par Mascheroni dans son ouvrage est correcte mais tarabiscotée, et elle ne lève pas certaines ambiguïtés sur les points d'intersection.

Donnons plutôt celle qui est connue sous le nom de « problème de Napoléon ». Cette construction serait issue d'une rencontre entre Bonaparte et Mascheroni lors de la campagne d'Italie (1796–1797) ; selon certains, Bonaparte aurait alors indiqué cette construction à Mascheroni ; selon d'autres, c'est de retour en France que Bonaparte aurait cherché et trouvé cette construction ; selon d'autres, enfin, cette anecdote n'est peut-être qu'une fiction.

1° Placer un point A sur le cercle Γ .

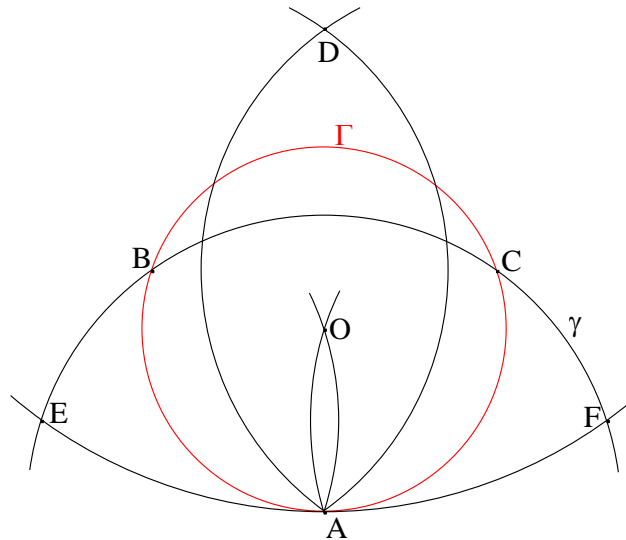
2° Tracer un cercle γ de centre A qui coupe Γ en deux points B et C.

3° Tracer les cercles de centres B et C passant par A, qui se recoupent en D.

4° Tracer le cercle de centre D passant par A, qui coupe γ en E et F.

5° Tracer les cercles de centres E et F passant par A, qui se recoupent en O.

O est le centre du cercle Γ .



Démonstration

Remarque préliminaire : la médiatrice de $[BC]$ est axe de symétrie de la figure, et les points A, O, D sont sur cet axe.

Les triangles EAD et OAE sont isocèles par construction ; de plus, ils ont en commun l'angle en A ; ils sont donc semblables. On a par conséquent $EA/OA = AD/AE$.
Et, comme $AE = AB$, on a aussi $AB/OA = AD/AB$.

Les triangles ADB et ABO ont en commun l'angle en A ; de plus, on vient de montrer que cet angle est compris entre des côtés proportionnels, donc les triangles sont semblables. Et, comme le triangle ADB est isocèle, il en est de même du triangle ABO . On en déduit que $OA = OB (= OC)$.

Le point O est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , c'est-à-dire du cercle Γ .

Remarque finale. Ces exemples montrent, s'il en était besoin, que transformations et cas de similitude – ou d'égalité – des triangles ne sont pas antagonistes, et qu'ils peuvent intervenir conjointement dans une même démonstration : la symétrie permet ici d'établir une propriété d'alignement, qui est ensuite utilisée pour démontrer que des triangles sont semblables.

Chapitre 10

Banque d'exercices et de problèmes

Introduction

Les exercices qui suivent sont destinés aux professeurs, à charge pour eux d'en donner des rédactions adaptées à leurs élèves. Nous avons cependant proposé des indications, mais en freinant des quatre fers pour éviter de donner des rédactions trop détaillées¹. En fait, nous émettons de sérieuses réserves sur ce type de rédaction, qui ne permet plus aucune initiative des élèves. Les exercices qui suivent sont plutôt pensés comme des activités en classe, où les élèves pourront, avec l'aide des professeurs évidemment, trouver leur voie pour la résolution.

Par ailleurs, nous avons délibérément choisi, à l'exception du paragraphe 5, de proposer des preuves utilisant les cas d'isométrie ou de similitude plutôt que les transformations. Pour une discussion sur ce thème, voir l'analyse du chapitre 4 ci-dessus. Les trois cas d'égalité seront désignés comme *CAC* (côté-angle-côté), *ACA* (angle-côté-angle) et *CCC* (trois côtés).

Les textes d'exercices, y compris les indications que nous proposons de donner, sont en caractères romains, nos commentaires sont en italiques.

Nous avons mis une étoile à certains de ces exercices que nous trouvons particulièrement intéressants. Le signe ¶ indique un exercice plus difficile (pour des collégiens). Nous ne nous sommes pas interdit d'en proposer, d'abord parce qu'il ne faut pas sous-estimer nos élèves, ensuite parce que ces exercices peuvent éventuellement être proposés à un niveau plus élevé (par exemple au lycée, voire après le Bac) et enfin parce que les professeurs seront peut-être contents d'y exercer leur sagacité.

1 Utilisation des cas d'isométrie

1.1 Justifier des propriétés connues

Les exercices de ce paragraphe visent à montrer qu'on peut, en admettant les cas d'égalité, prouver un certain nombre de résultats admis en général dans les cours. Il peut être intéressant de faire quelques exercices de ce type, mais avec modération.

1.1 Exercice. (Médiatrice²)

On rappelle³ que la médiatrice Δ du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) en le milieu I du segment $[AB]$.

1. Voir ci-dessous, à titre de repoussoir, la rédaction de l'exercice 1.5.
2. Cet exercice a été proposé dans les classes de cinquième de Sébastien Planchenault, voir ch. 6.
3. Il serait sans doute aussi logique de définir la médiatrice comme l'ensemble des points équidistants de deux points, mais respectons les traditions.

a) Soit M un point de Δ . Montrer que l'on a $MA = MB$.

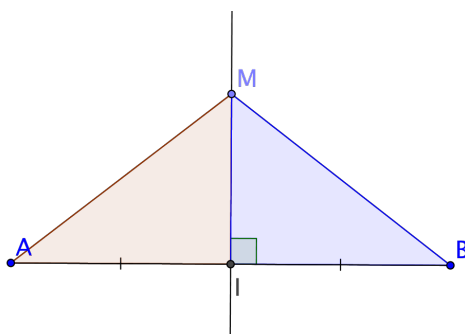


FIGURE 1 –

Comme nous l'avons dit au chapitre 4, l'idée essentielle à faire passer, s'agissant des cas d'isométrie, est que pour montrer l'égalité des longueurs de deux segments⁴ à l'aide de ces outils, il faut **incorporer** ces segments dans des triangles qui ont l'air « pareils » et démontrer ensuite que ces triangles sont isométriques en utilisant les cas d'isométrie. Ici, il s'agit des triangles AIM et BIM , que l'on écrira l'un sous l'autre en faisant se correspondre les sommets homologues. L'application du cas d'isométrie CAC est facile : MI est commun aux deux triangles⁵, $AI = BI$ car I est milieu de $[AB]$ et les angles en I sont tous deux droits.

b) Inversement, soit M un point du plan qui vérifie $MA = MB$. On veut montrer qu'il est situé sur la médiatrice. Pour cela on considère⁶ le milieu I de $[AB]$ et la droite (MI) . Que doit-on prouver sur cette droite ? (Réponse : qu'elle est perpendiculaire à (AB) , cf. 1.2.2.)

On considère les triangles AIM et BIM . Montrer qu'ils sont isométriques. Ici c'est le cas d'isométrie CCC , les trois côtés, qui sert.

En déduire que l'on a $\widehat{AIM} = \widehat{BIM}$ et conclure.

Les deux angles sont égaux et supplémentaires, donc deux moitiés de plat, c'est-à-dire droits. On peut donner ou non les indications ci-dessus selon la familiarité des élèves avec les cas d'isométrie. Attention, il y a une difficulté qui est de traduire ce que l'on cherche (perpendiculaire) en le fait que les deux angles soient égaux donc moitiés de plat.

1.2 Exercice. (Triangle isocèle)

On considère un triangle ABC isocèle en A (c'est-à-dire vérifiant $AB = AC$).

1) Montrer que les triangles ABC et ACB sont isométriques et en déduire l'égalité des angles en B et C .

Attention, ce point est délicat du point de vue conceptuel : il faut regarder le même triangle de deux points de vue différents. La meilleure preuve de la difficulté c'est qu'Euclide n'ose pas faire comme ça et se contorsionne pour montrer cette propriété. Dans une classe

4. La même méthode vaut pour montrer l'égalité de deux angles.

5. Attention, l'expérience montre que ce point évident est l'un de ceux que les élèves ont le plus de mal à formuler.

6. Il n'est pas tout à fait évident de considérer I . En fait, c'est le ressort de la preuve.

il nous semble plus simple d'admettre le résultat et de le montrer expérimentalement en retournant le triangle.

2) Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer que M est aussi le pied de la hauteur issue de A . (C'est exactement ce que l'on a fait dans l'exercice 1.1.b.)

3) La bissectrice de l'angle \widehat{BAC} (c'est-à-dire la droite qui partage l'angle en deux angles égaux) coupe $[BC]$ en I . Quelles conjectures peut-on faire ? Démontrer ces conjectures⁷.

La conjecture est double : I est le milieu de $[BC]$ et la droite (AI) est perpendiculaire à (BC) en I . Il suffit de considérer les deux triangles BAI et CAI , isométriques par le cas (ils ont les angles égaux en A par hypothèse, $BA = CA$ parce que ABC est isocèle et AI en commun). On en déduit l'égalité des troisièmes côtés $BI = CI$ ce qui montre que I est milieu de $[BC]$ et l'égalité d'angles $\widehat{BIA} = \widehat{CIA}$ qui montre que ces angles sont droits comme moitiés de plat (cet argument a été vu ci-dessus en 1.1.b). On notera qu'il y a une alternative pour montrer l'isométrie des triangles qui consiste à utiliser les angles en A , ceux en B et C (angles à la base du triangle isocèle) et $AB = AC$. Cela peut être plus simple pour les élèves qui ne voient pas le segment commun.

4) ¶ Soit H le pied de la hauteur issue de A . Montrer que H est le milieu de $[BC]$ (considérer les triangles ABH et ACH).

Il y a plusieurs solutions présentant chacune une petite difficulté. On a les égalités de longueurs $AB = AC$ et $AH = AH$ et les égalités d'angles $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{AHB} = \widehat{AHC}$. Pour appliquer le cas d'égalité CAC (deux côtés et un angle) le problème est que l'angle n'est pas compris entre les côtés, pour appliquer le cas ACA (deux angles et un côté), que les angles ne sont pas adjacents au côté. Il y a deux manières de conclure. D'abord, comme le triangle est rectangle, le cas d'égalité CAC est encore valable même si l'angle n'est pas le bon, voir Annexe 2 §9. Ensuite, si l'on a traité la somme des angles du triangle on a aussi l'égalité des angles en A et il n'y a plus de problème.

1.3 Exercice. Étudier les réciproques de l'exercice précédent : on a un triangle ABC , on considère trois propriétés d'une droite issue de A (hauteur, médiane ou bissectrice). Montrer que si une droite possède deux de ces propriétés, le triangle est isocèle.

L'exercice est facile sauf dans le cas médiane et bissectrice (pourquoi ?). Une solution possible est alors de construire le point D symétrique de A par rapport au milieu M de $[BC]$ et de considérer le triangle ABD .

1.2 Des exercices utilisables dès le début du collège

1.4 Exercice. (*) (Cerf-volant)⁸

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe vérifiant $AB = BC$ et $AD = DC$. On se propose de montrer que les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires. On appelle H leur point d'intersection. (On peut montrer que les diagonales se coupent si et seulement si $ABCD$ est convexe. Bien entendu, on ne soulève pas ce point avec les élèves.)

1) Montrer que les triangles BAD et BCD sont isométriques. Comparer les angles \widehat{ADB} et \widehat{CDB} .

7. Exercice posé par Charlène Piot dans sa classe de quatrième, voir ch. 6.

8. Cet exercice a été posé dans les classes de Charlène et Sébastien, voir ch. 6.

C'est le cas *CCC*, les trois côtés égaux. Dans l'une des classes de Sébastien, certains élèves, ne voyant pas le côté commun, ont utilisé les angles en A et C en les décomposant le long de $[AC]$ et en utilisant les angles à la base des triangles isocèles ABC et ADC .

2) Montrer que les triangles ADH et CDH sont isométriques.

3) Conclusion. (Comme en 1.1.b, il faut traduire perpendiculaire par le fait qu'une droite partage un angle plat en deux angles égaux.)

1.5 Exercice. (*) (Cet exercice a été analysé au chapitre 4.)

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte sur (AB) , à l'extérieur du triangle, un point E avec $BE = AB - BC$ et sur (BC) , à l'extérieur du triangle du côté de C , un point D avec $CD = AB - BC$. Que peut-on dire du triangle ADE ?

Si l'on tient absolument à perdre tout l'intérêt de l'exercice en transformant les élèves en ouvriers spécialisés, on peut détailler⁹ l'énoncé ainsi :

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$ (on réalisera la figure avec $AB = 6$ cm et $BC = 4$ cm). On porte sur (AB) , à l'extérieur du triangle, un point E avec $BE = AB - BC$ et sur (BC) , à l'extérieur du triangle du côté de C , un point D avec $CD = AB - BC$.

a) Montrer que l'on a $CD = BE$.

b) Montrer que l'on a $BD = AC$.

c) Montrer que les angles \widehat{ACD} et \widehat{BDE} sont supplémentaires de deux angles égaux, donc sont égaux.

d) Montrer que les triangles ACD et DBE sont isométriques. En déduire l'égalité $DA = DE$.

e) Montrer que le triangle ADE est isocèle.

1.6 Exercice. (*)

Dans un triangle ABC , les hauteurs BB' et CC' sont égales. Que peut-on dire de ce triangle ?

Il est isocèle en A , bien entendu. On peut susciter trois preuves :

1) Preuve numéro 1. Montrer que les triangles ABB' et ACC' sont isométriques. En déduire que l'on a $AB = AC$.

2) Preuve numéro 2. Montrer que les triangles BCC' et CBB' sont isométriques et en déduire l'égalité des angles \widehat{ACB} et \widehat{ABC} . (Attention, ici, c'est le cas d'égalité CAC avec l'angle mal placé, mais qui s'applique parce que l'on a des triangles rectangles, voir Annexe 2 §9.)

3) Preuve numéro 3. Calculer de deux manières différentes l'aire de ABC et en déduire $AB = AC$.

Pour une preuve par les transformations et une discussion, voir ch. 4.

1.3 Un exemple de progression sur les cas d'isométrie

Les exercices suivants ont été adaptés d'exercices proposés par Guillaume Didier dans sa classe. Guillaume distingue trois phases dans sa progression :

9. Nous caricaturons, bien sûr ...

- Une phase de technique, avec des exercices simples ne mettant en jeu que deux triangles, dans laquelle les objectifs sont l'utilisation des cas d'égalité et le repérage des éléments homologues.
- Une phase de maîtrise (Guillaume dit « de prise en mains »), avec des figures plus complexes et mettant en jeu d'autres objets (parallélogramme, trapèze, etc.)
- Une phase d'approfondissement avec des exercices plus ouverts et plus difficiles utilisant notamment les notions de complémentaires et supplémentaires.

Phase de technique

Attention, dans les exercices qui suivent, on peut convenir que les mesures d'angles données sont exactes, mais que les longueurs de côtés peuvent être approchées, voir Annexe 2, th. 12.1. Par ailleurs, comme l'objectif des exercices est essentiellement de repérer les sommets homologues, on a laissé, ici, des noms un peu exotiques qui ne permettent pas de savoir d'avance quel sommet correspond à quel autre.

1.7 Exercice. Soient SOL et IDE deux triangles isométriques tels que $SO = 4$ cm, $SL = 8$ cm et $\widehat{OSL} = 117^\circ$, $\widehat{IED} = 20^\circ$, $IE = 8$ cm et $DE = 10,4$ cm. Calculer OL et \widehat{IDE} .

1.8 Exercice. Soient MIR et AGE deux triangles isométriques tels que : $MI = 4$ cm, $\widehat{MIR} = 58^\circ$, $\widehat{AGE} = 22^\circ$ et $GA = 4$ cm. Calculer l'angle \widehat{MRI} .

Attention, les trois angles des triangles sont 22° , 58° et 108° , mais il faut un petit raisonnement pour éliminer le cas $\widehat{MRI} = 22^\circ$ (comme $\widehat{AGE} = 22^\circ$ est adjacent à $[GA]$ de longueur 4 cm, on aurait MR ou $RI = 4$ cm et le triangle MRI serait isocèle).

1.9 Exercice. Soient ABC et EDF deux triangles tels que : $\widehat{ABC} = 56^\circ$, $\widehat{BAC} = 57^\circ$, $BC = 5$ cm, $\widehat{EDF} = 67^\circ$, $\widehat{DEF} = 56^\circ$ et $DE = 5$ cm.

Montrer que les triangles ABC et EDF sont isométriques.

1.10 Exercice. Soient EUR et OPA deux triangles tels que $EU = OP = 6$ cm, $RU = PA = 4,5$ cm, $ER = OA = 3$ cm et $\widehat{EUR} = 29^\circ$.

Calculer l'angle \widehat{OPA} .

1.11 Exercice. Soient ABC et EDF deux triangles tels que : $\widehat{ABC} = 56^\circ$, $BA = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $\widehat{EDF} = 47^\circ$, $EF = 6$ cm, $\widehat{DEF} = 56^\circ$ et $DE = 8$ cm.

Calculer \widehat{BAC} .

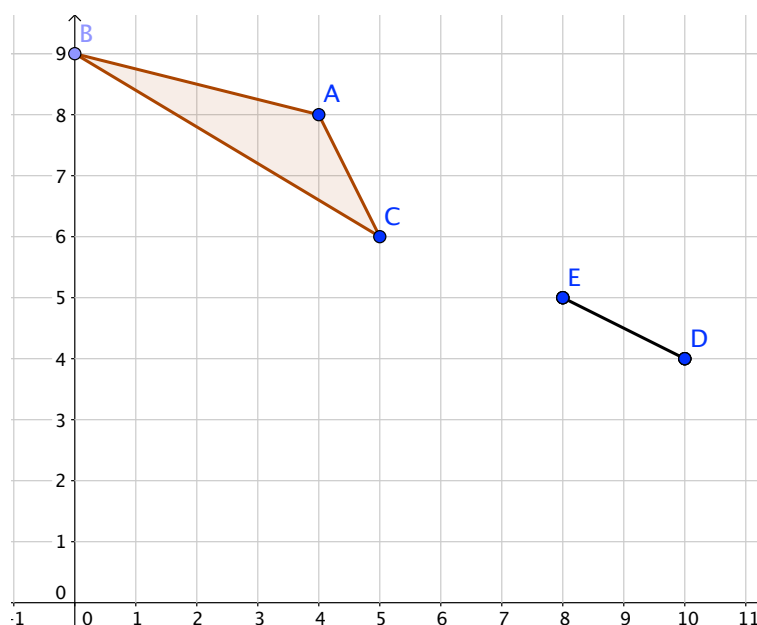
1.12 Exercice. Peut-on construire deux triangles ISO non-isométriques tels que $\widehat{ISO} = 40^\circ$, $OI = 5$ cm et $SI = 6$ cm ?

La réponse est oui comme on le voit en construisant la figure et cela tient à la double inégalité $SI > OI > SI \times \sin \widehat{ISO}$.

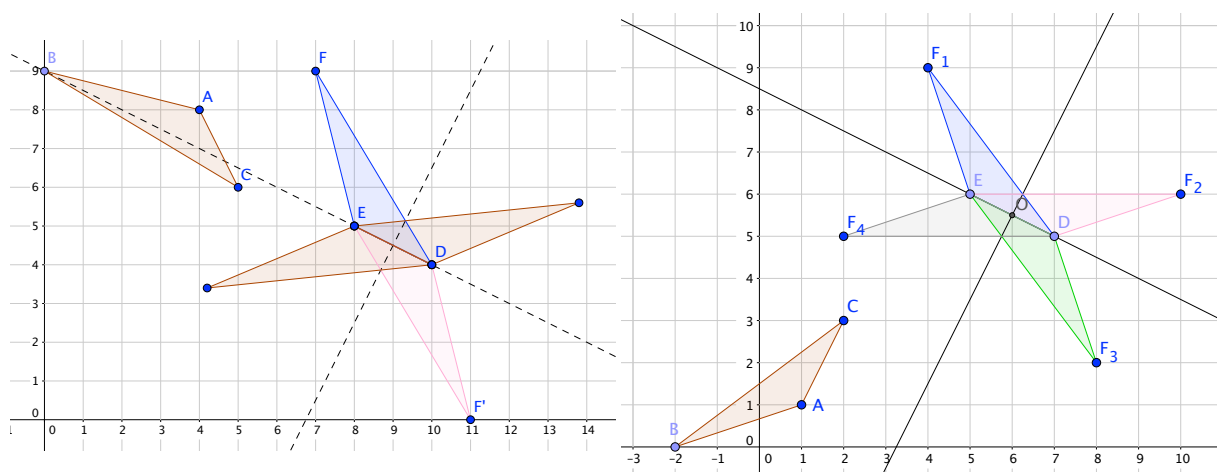
1.13 Exercice. Peut-on construire deux triangles MAX non-isométriques tels que $\widehat{AXM} = 50^\circ$, $\widehat{MAX} = 70^\circ$ et $MX = 5$ cm ?

1.14 *Exercice.*

On considère le quadrillage ci-contre. En utilisant uniquement le quadrillage, placer le point F tel que les triangles ABC et EDF soient isométriques. Pour chaque point F trouvé on expliquera pourquoi les triangles sont isométriques.



Si l'on considère les solutions formées uniquement de nœuds du quadrillage, selon le choix des points, on peut en avoir deux (à gauche sur la figure) ou quatre (à droite).



Le lecteur perspicace montrera que la recette pour avoir quatre triangles est la suivante : si l'on pose $\overrightarrow{AC} = (a, b)$ et $\overrightarrow{AB} = (x, y)$ avec a, b, x, y entiers il faut et il suffit que $(a^2 - b^2)x + 2aby$ soit multiple de $a^2 + b^2$.

Phase de maîtrise

1.15 *Exercice.* Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles, $A, B \in d_1$ et $C \in d_2$. Soit I le milieu de $[AC]$. La droite (BI) coupe d_2 en D .

- 1) En considérant les triangles ABI et DCI , montrer que I est milieu de $[BD]$.

- 2) En considérant les triangles ADI et CBI montrer l'égalité $\widehat{DAC} = \widehat{ACB}$.
 3) Conclusion.

On montre que $ABCD$ est un parallélogramme. Il y a plusieurs arguments selon ce dont on dispose : diagonales se coupant en leur milieu, deux côtés opposés parallèles et égaux, côtés opposés parallèles.

1.16 Exercice. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que¹⁰ $BC = 10,1$ cm, $AD = 6,8$ cm, $\widehat{BAD} = 76^\circ$, $\widehat{CBD} = 38^\circ$, $\widehat{BCD} = 76^\circ$ et $\widehat{ADB} = 66^\circ$.

Calculer le périmètre de $ABCD$.

En calculant les angles \widehat{ABD} et \widehat{BDC} dans les triangles ABD et CBD , on voit que ces triangles sont isométriques et on en déduit $AB = BC$ et $AD = CD$, d'où le périmètre. On notera qu'il est beaucoup plus difficile, en revanche, de calculer le périmètre des triangles car la longueur BD n'est pas connue (il faut la formule d'Al-Kashi ou la relation des sinus pour la calculer).

1.17 Exercice. Soit $ABCD$ un trapèze (convexe) tel que (AD) et (BC) soient parallèles. On suppose $AD = 4$ cm et $BC = 7$ cm. La parallèle à (AB) passant par D coupe (BC) en E , la parallèle à (CD) passant par A coupe (BC) en F .

Montrer que les quadrilatères $ADCF$ et $ADEB$ sont des parallélogrammes, que l'on a $BF = EC$ et que les triangles ABF et DEC sont isométriques.

Attention, si l'on ne donne pas les valeurs numériques, il y a plusieurs cas de figure selon que $AD < BC/2$ ou $AD > BC$. Les résultats sont les mêmes, mais les calculs de longueurs sont différents (des sommes au lieu de différences ou vice-versa).

1.18 Exercice. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = 30^\circ$ et $BC = 4,5$ cm. On appelle D le point tel que $\widehat{DAC} = 75^\circ$, que $AD = 4,5$ cm et que B et D sont de part et d'autre de (AC) .

Montrer que les triangles ABC et CDA sont isométriques et en déduire que $ABCD$ est un parallélogramme.

Ici la donnée de l'angle en A sous forme numérique oblige à un petit raisonnement pour montrer l'égalité des angles \widehat{DAC} et \widehat{BCA} en utilisant la propriété des angles à la base du triangle isocèle et la somme des angles d'un triangle. On conclut avec les angles alternes-internes.

Phase d'approfondissement

1.19 Exercice. Soit $ABCD$ un carré, E un point de la demi-droite $[AB)$, extérieur au carré et F, G, H les points des demi-droites $[BC)$, $[CD)$, $[DA)$, extérieurs au carré et tels que l'on ait $AE = BF = CG = DH$.

Quelle est la nature du quadrilatère $EFGH$?

C'est un carré. On montre d'abord que les quatre triangles AEH , BFE , CGF et DHG sont égaux, ce qui montre l'égalité des côtés de $EFGH$. On montre ensuite que les quatre angles de ce quadrilatère sont droits (un seul suffit) en les voyant comme sommes d'angles complémentaires.

¹⁰. Si les mesures des angles sont exactes, celles des côtés sont nécessairement approchées, voir ci-dessous Annexe 2, th. 12.1.

Plusieurs remarques à propos de cet exercice :

1) Il y a une solution très simple si l'on sait que le carré est invariant par la rotation d'angle 90° autour de son centre car cette rotation transforme aussi E en F , etc. Mais cette preuve requiert une bonne connaissance des rotations.

2) Dans la version originelle de cet exercice, les quadrilatères s'appelaient $EXPO$ et $LITS$. On a préféré les nommer autrement, de façon que les triangles se déduisent les uns des autres par permutation circulaire des lettres dans l'ordre alphabétique.

3) Quand on utilise l'outil « triangles égaux », il faut disposer de quelques accessoires concernant les angles, voir ch. 1. Ici c'est simplement la notion de complémentaire.

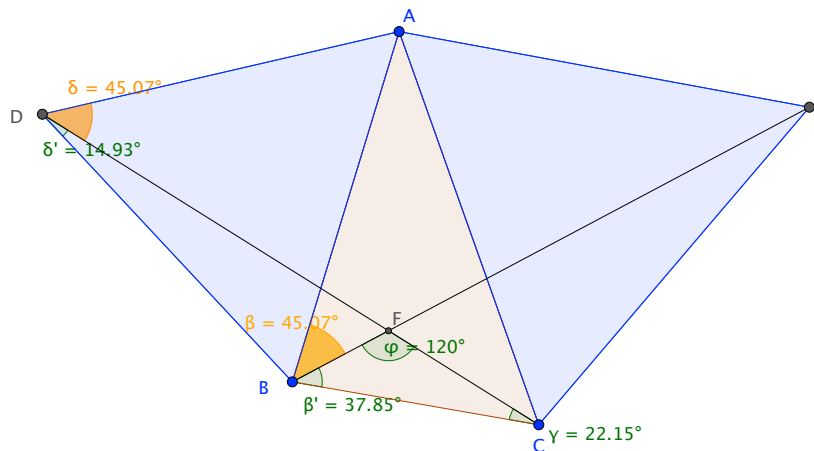
1.20 Exercice. Soient ABC un triangle rectangle en A et $BCDE$ et $ACGF$ deux carrés extérieurs à ce triangle.

- 1) Que peut-on conjecturer sur les longueurs AD et BG ?
- 2) Démontrez votre conjecture.
- 3) Que peut-on conjecturer sur les droites (AD) et (BG) ?
- 4) Démontrez votre conjecture.

La conjecture c'est que les segments $[AD]$ et $[BG]$ sont perpendiculaires et de même longueur. Pour montrer l'égalité des longueurs, on incorpore les segments dans deux triangles qui ont l'air égaux. Ici il s'agit de DCA et BCG et ils sont égaux par le cas côté-angle-côté. On en déduit l'égalité d'angles $\alpha := \widehat{CAD} = \gamma := \widehat{CGB}$. On en déduit $\gamma = \beta := \widehat{FBG} = \widehat{ABG}$ (comme complémentaires de \widehat{FGB}), donc $\beta = \alpha$ est complémentaire de \widehat{BAD} et les droites sont perpendiculaires. Magnifique utilisation des complémentaires !

1.21 Exercice. Soient ABC un triangle et ABD et ACE deux triangles équilatéraux extérieurs à ce triangle. 1) Que peut-on conjecturer sur les longueurs DC et BE ? 2) Démontrer votre conjecture.

Comme le précédent en utilisant ADC et ABE . On peut aussi montrer que $\widehat{BFC} = 120^\circ$ (voir figure). En effet, on a $\beta = \delta$ avec l'égalité des triangles ADC et ABE et on écrit la somme des angles de BCD : $60^\circ - \delta + 60^\circ + \beta + \beta' + \gamma = 180^\circ$, d'où $\beta' + \gamma = 60^\circ$ et on gagne avec les angles de BCF .



1.22 Exercice. Soit $ABCD$ un carré et E un point du segment $[AB]$. On construit, à l'extérieur de $ABCD$ le carré $AEFG$.

- 1) Que peut-on dire des droites (DE) et (BG) ?
- 2) Démontrer votre conjecture. (On pourra utiliser les triangles DAE et BAG .)

Les droites sont perpendiculaires. Les triangles proposés sont égaux (ils sont rectangles et les côtés de l'angle droit sont les mêmes). On en déduit l'égalité de leurs angles aigus. Pour conclure, si H est l'intersection de (DE) et (BG) , il faut voir que dans BHE les angles en B et E sont complémentaires ce qui résulte des égalités d'angles précédentes.

1.23 Exercice. Soit $ABCD$ un carré. On note E et F des points respectifs des segments $[DC]$ et $[AD]$ qui vérifient $CE = DF$.

- 1) Que peut-on conjecturer sur les diagonales du quadrilatère $BCEF$?
- 2) Démontrer votre conjecture

Elles sont perpendiculaires et de même longueur et les ingrédients sont les mêmes que ci-dessus : triangles égaux et angles complémentaires.

1.24 Exercice. Soient ABC et DBC deux triangles rectangles ayant pour hypoténuse le segment $[BC]$, A et D étant situés du même côté de $[BC]$ et tels que $AB = DC$.

On note E le point d'intersection des droites (AC) et (BD) .

- 1) Montrer que les triangles BEC et AED sont isocèles en E . (On pourra s'intéresser tout d'abord aux triangles ABE et DCE .)
- 2) Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Il y a une difficulté en 2) : l'égalité des angles alternes-internes \widehat{DBC} et \widehat{BDA} vient de ce que leurs doubles ont mêmes supplémentaires. On peut aussi demander de montrer $AC = BD$ et l'existence d'une symétrie axiale échangeant $[AB]$ et $[DC]$.

1.4 Deux résultats oubliés ?

1.25 Exercice. (Bissectrice)

On considère un angle \widehat{AOB} . On définit la bissectrice¹¹ de cet angle comme la demi-droite issue de O qui le partage en deux angles égaux.

a) ¶ Soit M un point de la bissectrice. On le projette orthogonalement sur les côtés de l'angle en P sur $[OA]$ et Q sur $[OB]$. Montrer que l'on a $MP = MQ$ (ce que l'on formule en disant que M est équidistant des côtés de l'angle). Pour cela on pourra considérer les triangles MOP et MOQ . (C'est le cas d'égalité ACA , avec les angles mal placés, mais qui fonctionne encore à cause de la somme des angles du triangle.)

b) ¶¶ Étudier la réciproque. (Attention, on tombe sur le cas d'égalité CAC « frauduleux » (les deux triangles OMP et OMQ qui vérifient $\widehat{P} = \widehat{Q}$, $OM = OM$ et $MP = MQ$ sont-ils isométriques ?). Il semble intéressant de voir si cette difficulté va être perçue. Cela étant, ici, le résultat est valable car l'angle en P ou Q est droit, voir Annexe 2 §9.)

c) **Application** Montrer que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.

Soit ABC un triangle. On considère les bissectrices des angles en B et C . Elles se coupent en I . Par la question a), I est équidistant des demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ (resp.

11. Ce n'est pas parce que cette notion n'est plus au programme qu'elle a cessé d'exister !

$[CA)$ et $[CB)$), donc de $[AB)$ et $[AC)$ et on conclut par la question b). Pour des précisions sur la définition de bissectrices, intérieures, extérieures, le fait qu'elles se coupent, etc. on pourra consulter :

<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/bissectrices1.pdf>

1.26 Exercice. Le triangle rectangle et son demi-cercle¹²

a) Soit ABC un triangle inscrit dans le (demi-)cercle de diamètre $[BC]$. Montrer que ABC est rectangle en A .

(C'est un très bel exercice sur les angles. On appelle O le centre du cercle (donc le milieu de $[BC]$). On a deux triangles isocèles en O : AOB et AOC . Leurs angles à la base sont donc égaux : $\widehat{ABO} = \widehat{BAO}$ et $\widehat{ACO} = \widehat{OAC}$. Mais la somme de ces quatre angles est la somme des angles de ABC , donc égale à 180 degrés, donc $\widehat{BAC} = \widehat{BAO} + \widehat{OAC}$, qui en est la moitié, vaut 90 degrés.)

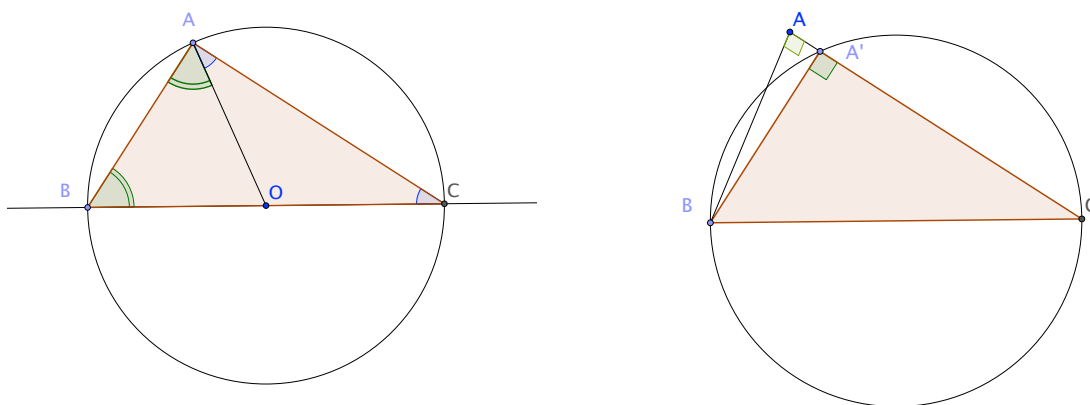


FIGURE 2 – Le sens direct et une première preuve de la réciproque

b) Montrer la réciproque : soit ABC un triangle rectangle en A . Alors il est inscrit dans le (demi-)cercle de diamètre son hypoténuse ou, si l'on préfère, si O est le milieu de $[BC]$, on a $OA = OB = OC$.

Il y a au moins trois démonstrations de ce fait.

1) Par l'absurde. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Le point A n'est donc pas sur le cercle de diamètre $[BC]$. Supposons par exemple qu'il est à l'extérieur de ce cercle, le raisonnement est analogue dans l'autre cas. Soit A' le point d'intersection de $[AC]$ et du cercle. Par le sens direct, $A'BC$ est rectangle en A' . Mais alors, le triangle ABA' a deux angles droits !

Bien entendu, raisonner par l'absurde n'est pas facile pour des collégiens. Cela étant, cet exemple est vraiment intéressant pour illustrer deux principes :

- En géométrie on peut raisonner juste sur une figure fausse. Ici, il faut faire une figure fausse pour que A ne soit pas sur le cercle.

12. Ce résultat est appelé théorème de Thalès dans certains pays, par exemple en Allemagne.

• Dans 99 cas sur 100, en géométrie élémentaire, c'est ainsi que l'on montre les réciproques : en raisonnant par l'absurde et en appliquant le sens direct, voir la discussion sur ce point Annexe 2 §11.

2) Une deuxième démonstration utilise la droite des milieux. On note M le milieu de $[AC]$. Alors (OM) est parallèle à (AB) , donc perpendiculaire à (AC) . Dans le triangle AOC la médiane $[OM]$ est aussi hauteur et le triangle est alors isocèle, de sorte que l'on a $OA = OC = OB$. Si l'on ne connaît pas ce dernier résultat, on le rétablit aussitôt en montrant que les deux triangles AOM et COM sont isométriques.

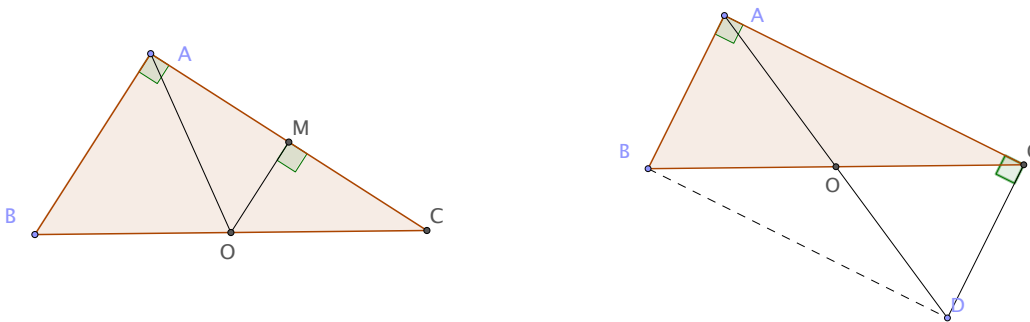


FIGURE 3 – Deux autres preuves de la réciproque

3) La troisième preuve utilise la symétrie centrale et les propriétés des rectangles. On considère le symétrique D de A par rapport à O . Le quadrilatère $ABDC$ est un rectangle (les angles en B et C sont droits car la symétrie transforme une droite en une droite parallèle). Ses diagonales se coupent en leur milieu O et sont égales et on a donc $OA = OB = OC$.

Bien entendu cette preuve, si elle est très naturelle, repose sur un certain nombre de propriétés de la symétrie et du rectangle, dont on peut douter qu'elles aient vraiment été prouvées auparavant. Si l'on veut s'affranchir de ces résultats, il suffit d'utiliser les cas d'isométrie. On note d'abord l'égalité des triangles AOB et DOC : on a $OA = OD$, $OB = OC$ et les angles en O sont opposés par le sommet. On en déduit $AB = CD$ et les triangles rectangles¹³ ABC et CDA sont alors isométriques : $AC = CA$, $AB = CD$ et l'angle droit. Ils ont donc même hypoténuse et on a $2AO = 2BO$ comme annoncé.

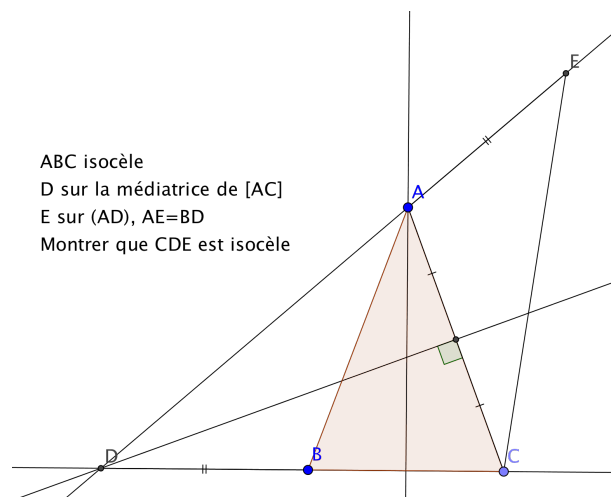
c) **Une application** Construire (à la règle et au compas) un triangle ABC dont la base $[BC]$ est donnée et dont on connaît les longueurs des hauteurs BB' et CC' .

Dans ce type d'exercice il est essentiel de faire une figure d'analyse (« supposons le problème résolu »). On y repère les deux triangles rectangles BCB' et BCC' de même hypoténuse. On construit donc les points B' (resp. C') sur un demi-cercle de diamètre $[BC]$ à la distance donnée BB' (resp. CC') de B (resp. C). On trouve alors A à l'intersection de (BC') et (CB') .

13. Pour voir que l'angle \widehat{ACD} est droit il suffit de noter qu'il est formé de deux angles complémentaires.

1.5 Des exercices plus difficiles

1.27 Exercice. ¶ Soit ABC un triangle isocèle en A . La médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en D que l'on suppose extérieur à $[BC]$. On porte sur la droite (AD) , de l'autre côté de A par rapport à D , un point E qui vérifie $AE = BD$. Que peut-on dire du triangle CDE ?



ABC isocèle
 D sur la médiatrice de $[AC]$
 E sur (AD) , $AE=BD$
 Montrer que CDE est isocèle

FIGURE 4 –

Dans une classe on commence par faire une figure, sur laquelle on voit expérimentalement que CDE est isocèle en C . Pour le prouver, il y a deux solutions : soit montrer $CD = CE$, soit, et c'est plus malin ici, $\widehat{DEC} = \widehat{CDE}$, ou, ce qui revient au même, $\widehat{AEC} = \widehat{BDA}$. Cette fois, ce sont les angles qu'il faut englober dans des triangles et les deux triangles qui conviennent sont AEC et BDA . Sur les côtés on a $AE = BD$ par hypothèse et $AC = BA$ à cause du triangle isocèle. Il reste à voir l'égalité d'angles entre les deux : $\widehat{EAC} = \widehat{DBA}$. C'est l'idée des supplémentaires, mais avec un intermédiaire. En effet, \widehat{DBA} est le supplémentaire de l'angle en B de ABC , ou encore de son angle en C . Mais celui-ci, on le retrouve en \widehat{CAD} car le triangle ADC est isocèle en D puisque D est sur la médiatrice de $[AC]$. On voit que les deux angles cherchés sont supplémentaires du même et on conclut à l'isométrie des triangles et donc à l'égalité d'angles $\widehat{AEC} = \widehat{BDA}$.

Une variante consiste à noter que l'on a, grâce aux mêmes triangles isométriques, $CE = AD$, puis, comme ADC est isocèle, $AD = CD$, donc $CE = CD$ et on retrouve le résultat.

Ici, comme l'exercice est un peu plus difficile, on peut envisager une rédaction détaillée de l'énoncé¹⁴ :

Soit ABC un triangle isocèle en A . La médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en D que l'on suppose extérieur à $[BC]$. On porte sur la droite (AD) , de l'autre côté de A par rapport à D , un point E qui vérifie $AE = BD$.

On se propose de montrer que les triangles AEC et BDA sont isométriques.

a) Montrer que l'on a $AE = BD$ et $AC = BA$.

14. Un désavantage de cette rédaction est qu'elle met l'accent sur l'égalité d'angles, ce qui empêche pratiquement la solution avec les côtés d'émerger.

b) Montrer les égalités d'angles $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{CAD}$ et en déduire l'égalité $\widehat{EAC} = \widehat{DBA}$.

c) Conclure que les triangles AEC et BDA sont isométriques. En déduire que l'on a $\widehat{AEC} = \widehat{BDA}$.

d) Que peut-on dire du triangle CDE ?

Une autre possibilité d'indication, moins guidée, est de demander aux élèves de repérer sur la figure des triangles isocèles et d'en déduire des égalités d'angles.

¶¶ *Question subsidiaire.* À quelle condition le point D est-il dans le segment $[BC]$? Comment faut-il modifier l'énoncé dans ce cas ?

La condition est que \widehat{DAC} , qui est aussi égal à \widehat{BCA} , soit plus petit que \widehat{BAC} autrement dit que l'angle au sommet de ABC soit plus grand que ses angles à la base, donc plus grand que 60° .

Dans ce cas, la conclusion précédente (CDE isocèle) est fautive avec E défini comme ci-dessus. Pour comprendre comment modifier l'exercice, le mieux ici est de penser en termes de transformations : on passe de D à E (ou de BDA à AEC) par la composée de deux réflexions, d'abord celle par rapport à la médiatrice de $[BC]$, puis celle par rapport à la médiatrice de $[CA]$. Si D est dans $[BC]$, c'est encore cette transformation qu'il faut faire et, pour cela, il faut encore imposer $AE = BD$, mais prendre E du côté de D par rapport à A . Le triangle CDE est alors isocèle en C .

1.28 Exercice. ¶

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On construit, à l'extérieur de $ABCD$, les triangles équilatéraux ADP et ABQ . Que peut-on dire du triangle PQC ?

La réponse : il est équilatéral. Une indication de démonstration : montrer que les trois triangles DPC , APQ et BCQ sont isométriques. Il est facile de voir que l'on a $DP = AP = BC$, ainsi que $CD = QA = QB$ avec les propriétés du parallélogramme et des triangles équilatéraux. L'égalité des angles est plus difficile et diffère selon les cas de figure. Les trois ingrédients à mettre en œuvre pour aboutir sont les suivants :

- Les angles du triangle équilatéral valent tous 60° .
- Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux et ses angles consécutifs sont supplémentaires.
- La somme des angles autour d'un point vaut 360° .

S'agissant des cas de figure, il y a deux solutions : soit on impose la figure aux élèves, soit on les laisse faire, avec en perspective une discussion intéressante et formatrice sur les différents cas possibles et sur ce que l'on peut faire dans chaque cas.

1.29 Exercice. (Le pentagone régulier)

Le thème de cet exercice est l'étude du pentagone régulier.

Partie A

On commence par rappeler plusieurs caractérisations d'un pentagone régulier.

Soit $ABCDE$ un pentagone convexe. On dit qu'il est **régulier** s'il vérifie :

1) Les côtés et les angles sont égaux, c'est-à-dire que l'on a $AB = BC = CD = DE = EA$ et $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEA} = \widehat{EAB}$.

Montrer que cette propriété est équivalente aux deux suivantes :

2) Les côtés sont égaux et les points A, B, C, D, E sont sur un même cercle.

3) Les points A, B, C, D, E sont sur un même cercle de centre O et les angles au centre ($\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}, \widehat{DOE}, \widehat{EOA}$) sont égaux.

On peut employer deux outils pour montrer cette équivalence : les cas d'isométrie et les transformations. On discutera de leurs mérites respectifs.

Partie B : Le pentagone et ses diagonales ¶¶

0) Un pentagone convexe $ABCDE$ dont les diagonales sont égales est-il régulier ?

(Une expérience, de préférence avec Geogebra, montre qu'il n'en est rien.)

1) Et si l'on suppose en plus que l'on a $AB = BC = CD = DE = EA$?

2) Et si l'on suppose en plus que A, B, C, D, E sont sur un même cercle ?

3) Et si l'on suppose en plus que les angles $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDE}, \widehat{DEA}, \widehat{EAB}$ sont égaux ?

Dans les trois cas la réponse est positive. La question 1) est facile (si l'on connaît les caractérisations ci-dessus). On doit montrer, par exemple, l'égalité des angles \widehat{ABC} et \widehat{BCD} . On les incorpore dans les triangles ABC et BCD qui ont leurs trois côtés égaux. Il ne semble pas utile de donner d'indication pour ce cas.

La question 2) est plus sérieuse et là, une indication est nécessaire :

Indication pour la question 2) :

a) Montrer que les triangles AOC et BOD sont isométriques.

b) En déduire l'égalité $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

c) Montrer que le pentagone est régulier (on utilisera la troisième caractérisation).

La question a) ne pose pas de problème (les trois côtés sont égaux). Pour b) on a $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ par a) et on retranche l'angle \widehat{BOC} . Enfin c) c'est le principe du saute-mouton : on montre de même que l'on a $\widehat{COD} = \widehat{EOA} = \widehat{BOC} = \widehat{DOE}$ et on a fait le tour ! On notera que le fait que le nombre 5 soit impair est essentiel : la propriété est fautive dans le cas de l'hexagone.

Il reste la question 3). Là, les triangles à utiliser sont évidents, par exemple ABC et BCD , mais il y a une sérieuse difficulté. On a les égalités $BC = BC, AC = BD$ et $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$, mais l'angle n'est pas compris entre les côtés. Ici, le résultat est encore vrai parce que les angles sont obtus (on voit facilement, en le décomposant en triangles, que la somme des angles d'un pentagone est 540 degrés, donc, s'ils sont égaux, chacun vaut 108 degrés). Pour une discussion approfondie sur ce thème, voir ci-dessous Annexe 2 §9.

1.30 Exercice. (*) (Le papillon)

On considère un quadrilatère croisé $ABCD$ dont les côtés $[BC]$ et $[AD]$ se coupent en O . On suppose que l'on a $AB = CD$ et $AD = BC$. On se propose de montrer que l'on a $OA = OC$ et $OB = OD$.

1) Montrer que les triangles ABC et CAD sont isométriques. (C'est le cas d'égalité CCC.) En déduire l'égalité des angles \widehat{ABC} et \widehat{CDA} .

2) Montrer que les triangles OAB et OCD sont isométriques. (Ici c'est le cas d'égalité ACA, avec les angles mal placés, ceux en B et D vus en 1) et les angles opposés par le sommet en O , mais qui fonctionne grâce à la somme des angles du triangle.)

3) Conclure.

Il y a aussi une preuve avec les transformations. On considère par exemple la symétrie s par rapport à la médiatrice de $[AC]$ et il s'agit de montrer que l'on a $s(B) = D$ car alors l'intersection de $[AD]$ et $[BC]$ sera sur l'axe de symétrie. Bien entendu c'est l'hypothèse d'égalité des longueurs qui donne cela, mais, attention, si l'on voit B comme intersection des cercles de centre A et de rayon AB et de centre C et de rayon BC , son image est à l'intersection des images de ces cercles, mais il y a deux points d'intersection ...

1.31 Exercice. ¶¶ (*)

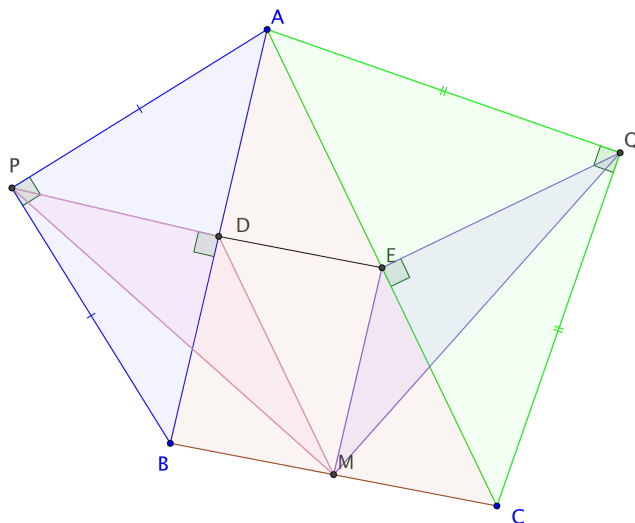


FIGURE 5 –

Soient ABC un triangle, D le milieu de $[AB]$, E celui de $[AC]$ et M celui de $[BC]$.

1) Construire, sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ et à l'extérieur du triangle, deux triangles rectangles isocèles PAB et QAC . (On utilisera les points D et E .) Que peut-on dire des triangles ADP , BDP , AEQ et CEQ ?

Le point P est sur la médiatrice de $[AB]$ et sur le cercle de diamètre $[AB]$ et tous les triangles cités sont rectangles isocèles.

2) a) Que peut-on dire des droites (EM) et (AB) ? Énoncer d'autres propriétés analogues.

Il s'agit bien sûr de la propriété de la droite des milieux.

b) Montrer $EM = BD = DP$. Donner une relation analogue avec DM .

Deux ingrédients : le parallélogramme $BDEM$ (ou la droite des milieux) et la propriété de la médiane du triangle rectangle APB .

c) Montrer l'égalité d'angles $\widehat{BDM} = \widehat{MEC}$.

Petite difficulté : il faut passer par l'intermédiaire de \widehat{DME} et utiliser les angles alternes-internes (on peut aussi passer par \widehat{BAC}).

d) Montrer que les triangles PDM et MEQ sont isométriques et en déduire que l'on a $PM = MQ$.

C'est le cas CAC avec $PD = ME$, $DM = EQ$ et les angles en D et E qui sont ceux de la question c) plus un angle droit.

3) a) Calculer $\widehat{DMP} + \widehat{MPD} + \widehat{BDM}$, puis \widehat{PMQ} .

La somme des angles dans PDM montre que cette somme, plus un droit, fait 180° , donc la somme vaut 90° . L'angle \widehat{PMQ} est la somme des précédents : c'est clair pour \widehat{DMP} , on a vu $\widehat{DME} = \widehat{BDM}$ en c) et $\widehat{EMQ} = \widehat{DPM}$ est une conséquence de l'isométrie des triangles PDM et MEQ .

b) Que peut-on dire du triangle PMQ ?

Il est rectangle isocèle. Il y a de nombreuses variantes de cet exercice, notamment avec des carrés. On peut le traiter en utilisant l'une ou l'autre des transformations naturellement associées aux triangles rectangles isocèles : soit les rotations de 90° autour de l'angle droit, soit les similitudes de centre les autres sommets, d'angle 45° et de rapport $\sqrt{2}$. Dans les deux cas, il faut une bonne maîtrise de ce type de techniques. Une autre solution, très simple, mais un peu mécanique, est l'utilisation des nombres complexes.

2 Autour des cas de similitude

2.1 Exercice. Dans le triangle rectangle (*)

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A . Il s'agit de montrer les égalités de moyennes géométriques : $AH^2 = BH \times CH$, $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times CB$ de plusieurs manières, d'en déduire Pythagore, et d'appliquer ces formules à des constructions¹⁵.

Voici une rédaction (très) détaillée.

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A .

1) a) Montrer que les triangles ABH et CBA sont semblables et écrire les égalités de rapports que donne ce résultat. En déduire que l'on a $AB^2 = BH \times BC$. Montrer de même l'égalité $AC^2 = CH \times CB$.

a1) Variante avec le cosinus. En calculant de deux manières le cosinus de l'angle \widehat{ABC} , montrer l'égalité $AB^2 = BH \times BC$. Montrer de même l'égalité $AC^2 = CH \times CB$.

b) Montrer que l'on a $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$ et en déduire que les triangles AHB et CHA sont semblables. En déduire la relation $AH^2 = BH \times CH$.

b1) Variante avec la tangente. Montrer que l'on a $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$. En écrivant de deux manières la tangente de cet angle, montrer l'égalité $AH^2 = BH \times CH$.

2) Démontrer le théorème de Pythagore en utilisant les relations $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times CB$.

C'est ainsi que l'on montrait Pythagore dans les manuels des années 1950-60.

3) On considère un rectangle R de longueur a et de largeur b et on se propose de construire un carré K de côté c ayant la même aire que R .

a) Quelle relation doivent vérifier a, b, c ?

b) On trace un segment BC de longueur $a + b$ et on place sur ce segment le point H tel que $BH = a$. Que vaut CH ?

c) Construire un point A tel que ABC soit rectangle en A et que H soit le pied de la hauteur issue de A dans ce triangle.

d) Calculer AH et conclure.

15. Ce résultat est appelé théorème de Thalès en Suisse.

2.2 Exercice. ¶¶

Le triangle 36 – 72 – 72 (*)

Le but de l'exercice est de construire un triangle ABC dont les angles en A, B, C sont respectivement égaux à 36, 72 et 72 degrés et d'en déduire une construction du pentagone régulier. Cette méthode remonte à Euclide. La rédaction ci-dessous évite le recours à la résolution d'une équation du second degré.

Soit ABC un triangle dont les angles en A, B, C sont respectivement égaux à 36, 72 et 72 degrés. On pose $a = BC$ et $b = AB$. Que vaut AC ?

1) On construit $D \in [AC]$ tel que $AD = BD$.

a) Calculer les angles de ABD , puis ceux de BDC . En déduire la longueur BD en fonction de a .

b) Montrer que les triangles ABC et BCD sont semblables. En déduire l'égalité $\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b}$.

2) On considère un pentagone (convexe) régulier $P = ABCDE$. Cela signifie que ses côtés sont tous égaux : $a = AB = BC = CD = DE = EA$, ainsi que ses angles : $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEA} = \widehat{EAB}$.

a) On partage P en les trois triangles ABE , BED et BDC . Calculer la somme des angles de P à partir de celle des triangles et en déduire que tous les angles de P valent 108 degrés.

b) Calculer les angles de ABE , puis ceux de BDE et montrer que ce triangle a des angles de 36° (en B) et de 72° (en D et E).

c) On pose $b = DB$. Montrer que le rapport b/a vérifie $\frac{b}{a} - 1 = \frac{a}{b}$.

3) a) On se propose de construire deux longueurs a, b qui vérifient $\frac{b}{a} - 1 = \frac{a}{b}$, c'est-à-dire $a^2 = b(b-a)$, ou encore $b^2 = a(a+b)$.

On considère un segment $[MN]$ et on construit P tel que NMP soit rectangle en M avec $MP = \frac{1}{2}MN$. On porte sur la demi-droite $[PM)$ un point Q tel que $PN = PQ$ puis $R \in [MN]$ tel que $MQ = MR$, voir figure ci-dessous. On pose $a = MQ = MR$ et $b = MN$.

Montrer que l'on a $PQ^2 - PM^2 = MQ(MQ + 2PM) = MQ(MQ + MN) = MN^2$ et en déduire l'égalité voulue.

b) ¶ Construire un triangle BDE isocèle en B avec $DE = a$ et $DB = b$ vérifiant la relation ci-dessus, puis un pentagone régulier $ABCDE$.

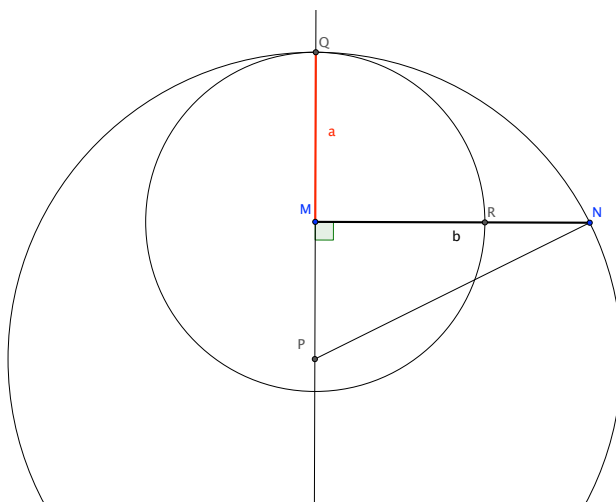
Les deux exercices suivants proviennent de la classe 3G, voir chapitre 8 §2.

2.3 Exercice. On considère un segment $[AB]$ et deux points C, D situés respectivement sur les perpendiculaires à (AB) en A et B , du même côté de (AB) . Montrer l'existence d'un point $M \in [AB]$ tel que les triangles ACM et BDM soient semblables et le construire.

Attention, il y a deux manières d'être semblables ...

2.4 Exercice. ¶¶

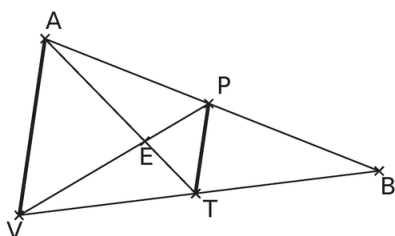
Soient $ABCD$ un rectangle, $M \in [AD]$, H le projeté orthogonal de C sur $[BM]$. On considère les quatre triangles rectangles BAM , BHC , CHM et CDM . Étudier leur similitude éventuelle.



Tel quel, cet exercice est difficile, mais il a l'intérêt d'être à géométrie variable : on peut se contenter d'étudier le cas de BAM et BHC qui est facile, ou de CDM et BAM, etc.

2.5 Exercice. (*) (Un exercice instructif) L'exercice suivant est proposé dans le manuel Sesamaths :

9 À toi de jouer



- AV = 4 cm
- BT = 3,8 cm
- PE = 2,1 cm
- AE = 2,5 cm
- ET = 1,5 cm

Les droites (PV) et (TA) sont sécantes au point E.
 Les droites (AP) et (VT) sont sécantes au point B.
 (AV) et (TP) sont deux droites parallèles.
 Calcule TP et EV, en justifiant ta réponse.

Le théorème de Thalès (ou l'utilisation des triangles semblables AEV et TEP) donne aussitôt $PT = 2,4$ et $EV = 3,5$ (les mesures sont en cm). On en déduit la construction de la figure en commençant par AEV, puis PET et le point B est déterminé. Surprise ! la longueur BT ne vaut pas du tout 3,8 mais 6, voir figure ci-dessous !!

On peut le démontrer avec Al-Kashi dans PTE en calculant $\cos \widehat{PET} = \frac{1}{7}$ dont on déduit $\cos \widehat{TEV} = -\frac{1}{7}$ et, avec Al-Kashi dans EVT, $VT = 4$, donc par Thalès $BT = 6$. On notera que le triangle AVT est équilatéral.

On peut aussi calculer, par Al-Kashi dans AEP, la longueur AP, mais elle est irrationnelle : $AP^2 = 12,16 = \frac{304}{25}$ d'où $AP \sim 3,487119\dots$ et $PB \sim 5,230678\dots$

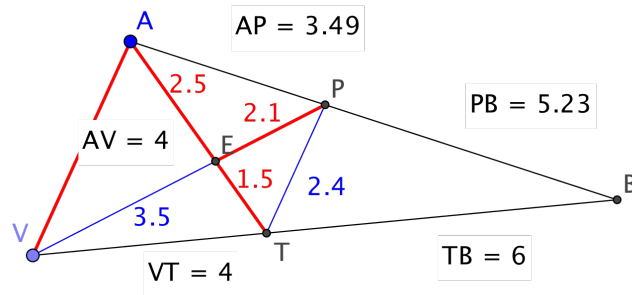


FIGURE 6 – La figure exacte

On peut comprendre sans calcul qu'une des données est superflue. En effet, la figure est entièrement déterminée par le trapèze $APTV$. Or, à isométrie près, un trapèze est déterminé par 4 paramètres : un triangle (par exemple APV) et une longueur (par exemple PT). Toute donnée supplémentaire, si elle n'est pas calculée à partir des autres, est donc fautive. Un autre argument montrant que la donnée est fautive est le suivant. Les côtés de EPT sont proportionnels à 5, 7, 8. Comme $8^2 < 5^2 + 7^2$ l'angle en E est plus petit que 90° , donc son supplémentaire VET est obtus (en vérité de l'ordre de 98°). Cela impose que VT est le plus grand côté de VET , mais le calcul par Thalès avec $BT = 3,8$ donne $VT = 2,53 < VE = 3,5$!

Une proposition de réécriture de cet exercice peut être la suivante :

Au lieu de « Calcule TP et EV », on peut demander « Quelles longueurs peut-on calculer ». En plus de TP et EV , on peut calculer BV et VT puisqu'on nous donne BT . Pour AB , BP et AP , ce n'est pas à la portée des élèves de collège, mais on peut demander de construire la figure en vraie grandeur, ce qui montre que les autres longueurs sont déterminées même si on ne sait pas les calculer. Pour construire la figure, il faut construire des triangles dont les 3 côtés sont connus : VTP et VTA . On peut demander explicitement la construction en vraie grandeur, avec GeoGebra ou sur papier, pour voir émerger la contradiction.

2.6 Exercice. ¶¶¶

Soient $ABCD$ un carré de centre E , F le milieu de $[DE]$ et G celui de $[AB]$. Que peut-on dire du triangle CFG ? (Réponse : il est rectangle isocèle en F .)

Cet exercice est beaucoup plus difficile que les autres. Il y a plusieurs solutions savantes. On peut prendre un repère et des coordonnées et utiliser le produit scalaire. On peut aussi considérer la similitude s de centre C , d'angle 45° et de rapport $\sqrt{2}$. On peut enfin utiliser Pythagore et Al-Kashi.

Cependant, on peut produire des solutions au niveau du collège, avec les angles et les triangles semblables comme le lecteur avisé ne manquera pas de le faire.

Pour terminer sur les triangles semblables, voici deux exemples qui utilisent un outil fossile : le théorème de l'angle inscrit. Ce théorème a disparu des programmes, mais son importance n'en est pas moindre pour autant. C'est même l'un des accessoires essentiels pour utiliser les angles, voir ch. 1.

2.7 Exercice. (Cet exercice utilise le théorème de l'angle inscrit.)

Soient Γ un cercle de centre O et de rayon R et A un point non situé sur Γ . Deux droites Δ et Δ' passant par A coupent respectivement Γ en B, C et B', C' . Montrer que l'on a $AB \times AC = AB' \times AC'$. (Il s'agit de la puissance du point A par rapport au cercle et le résultat est plus pertinent si on l'écrit en termes de mesures algébriques, mais ceci est une autre histoire.)

2.8 Exercice. (Cet exercice utilise le théorème de l'angle inscrit.)

Soit ABC un triangle isocèle en A et D un point de (BC) . La droite (AD) recoupe le cercle circonscrit à ABC en E . Montrer l'égalité $AD \times AE = AB^2$.

3 Exercices utilisant les angles

Lorsqu'on utilise les angles, il faut garder présents à l'esprit les quatre accessoires qui en sont inséparables : les notions de complémentaire et supplémentaire, les propriétés des angles relatives aux parallèles (alternes-internes, etc.), la somme des angles du triangle et le théorème de l'angle inscrit et sa réciproque, voir ch. 1.

3.1 Exercice. (*)

Soit $\mathcal{K} = ABCD$ un carré. On construit à l'intérieur de \mathcal{K} un triangle équilatéral ABE et à l'extérieur de \mathcal{K} un triangle équilatéral BCF . Que peut-on dire des points D, E, F ?

(On utilise les angles des triangles isocèles, du triangle équilatéral, la somme des angles du triangle, les complémentaires.)

3.2 Exercice. (*) Soient ABC un triangle rectangle en A , M le milieu de $[BC]$, H le pied de la hauteur issue de A et E, F ses projetés sur $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que (EF) est perpendiculaire à (AM) .

(Ou les complémentaires en action.)

3.3 Exercice. On considère un triangle ABC . Les bissectrices intérieures des angles \widehat{B} et \widehat{C} coupent en D et E la parallèle à (BC) passant par A . Montrer que l'on a $DE = AB + AC$.

(Ici, ce sont les angles alternes-internes qui sont utiles.)

3.4 Exercice. On considère un triangle équilatéral ABC et un point M intérieur. On prend $P \in [BC]$, $Q \in [CA]$ et $R \in [AB]$ tels que (MP) , (MQ) et (MR) soient respectivement parallèles à (AB) , (BC) et (CA) . Que vaut la somme $MP + MQ + MR$?

(Cet exercice nous a été suggéré par Bernard Parzys avec une solution purement visuelle.)

3.5 Exercice. Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés de ABC sont sur le cercle circonscrit au triangle.

(Ici le théorème de l'angle inscrit et sa réciproque sont essentiels.)

3.6 Exercice. ¶ Soit ABC un triangle. Les hauteurs (BB') et (CC') se coupent en H . Montrer que (AH) est perpendiculaire à (BC) (donc que les hauteurs sont concourantes). Indication : montrer les égalités d'angles $\widehat{BAH} = \widehat{C'B'B} = \widehat{C'CB}$ à l'aide des quadrilatères inscriptibles $AC'HB'$ et $BCB'C'$.

(C'est un exercice pour les collégiens d'autrefois qui savaient ce qu'était un quadrilatère inscriptible : quatre points cocycliques.)

3.7 Exercice. ¶¶¶¶ (Un exercice diabolique)

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$. On suppose que l'on a $\alpha = \widehat{CAD} = 60^\circ$, $\alpha' = \widehat{BAC} = 20^\circ$, $\delta' = \widehat{BDA} = 50^\circ$ et $\delta = \widehat{BDC} = 30^\circ$. Calculer $\gamma = \widehat{ACB}$.

(Le lecteur ayant cherché tout l'été pourra aller quémander une indication chez la fourmi sa voisine à la fin de ce chapitre.)

4 Exercices utilisant les aires

On renvoie au chapitre 1 pour une explication du fait que les aires permettent de traiter tous les problèmes de géométrie plane qui sont de nature affine. Les outils pour cela sont les « lemmes du collègue » (voir Annexe 1, 4.5) que nous rappelons ici. On renvoie à Perrin (2011) pour toutes précisions. Les cinq lemmes suivants peuvent toujours être prouvés avec la formule base \times hauteur / 2 mais on en propose ici des preuves par découpage, beaucoup plus intéressantes pour comprendre ce qu'est vraiment la notion d'aire. On note $\mathcal{A}(X)$ l'aire d'une partie X .

4.1 Exercice. (Lemme du demi-parallélogramme)

1) Montrer que les diagonales d'un parallélogramme le partagent en deux triangles de même aire.

2) Soient $ABCD$ un parallélogramme et M un point de $[AB]$ (par exemple). Montrer que l'on a $\mathcal{A}(MCD) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABCD)$.

4.2 Exercice. (Lemme de la médiane) Montrer que la médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire. (Si ABC est le triangle et M le milieu de $[BC]$ on construira D tel que $ADCM$ soit un parallélogramme.) Étudier la réciproque.

4.3 Exercice. (Lemme du trapèze ou de la parallèle) Montrer que deux triangles de même base et dont les sommets sont situés sur une parallèle à la base ont même aire. (Si ABC et ABD sont les triangles avec, par exemple, $ABCD$ convexe et $CD < AB$, on pourra considérer le parallélogramme $ABED$. Traiter les autres cas de figure et étudier la réciproque.)

4.4 Exercice. (Lemme des proportions) Montrer que le rapport des aires de deux triangles ABC et $AB'C'$ qui ont un même sommet A et des bases $[BC]$ et $[B'C']$ alignées est égal au rapport des bases.

En déduire que si A' est un point de (BC) , les aires de ABA' et ACA' sont égales si et seulement si A' est milieu de $[BC]$ (on retrouve la réciproque du lemme de la médiane).

4.5 Exercice. (Lemme du chevron) Soient ABC un triangle, M un point du plan. On suppose que (AM) coupe (BC) en $A' \neq B, C$. Montrer que l'on a $\frac{\mathcal{A}(ABM)}{\mathcal{A}(ACM)} = \frac{A'B}{A'C}$.

4.6 Commentaire. Comme pour l'emploi des cas d'égalité, il faut quelques éléments de stratégie pour utiliser les aires afin de résoudre les problèmes affines. La règle essentielle à retenir est de transformer les rapports de longueurs **sur une même droite ou des droites parallèles** en rapports d'aires en utilisant le lemme des proportions ou le lemme du chevron. Cela englobe le fait de traduire les propriétés de milieux, de tiers, etc. en propriétés d'aires. On utilise ensuite les divers lemmes pour circuler dans la figure en y montrant des égalités d'aires.

4.7 Exercice. (La droite des milieux) (*)

Soient ABC un triangle et B' le milieu de $[AB]$. La parallèle à (BC) passant par B' coupe $[AC]$ en C' . Montrer que C' est le milieu de $[AC]$. Réciproque.

On traduit le fait que B' est milieu de $[AB]$ en aires : $\mathcal{A}(C'B'B) = \mathcal{A}(C'B'A)$ par le lemme de la médiane. Par le lemme du trapèze on a $\mathcal{A}(C'B'B) = \mathcal{A}(C'B'C)$ et on conclut par la réciproque du lemme de la médiane. Pour la réciproque, on utilise le sens direct, suivant les bons principes de l'Annexe 2, §11. Voir le chapitre 7 pour l'utilisation en classe.

4.8 Exercice. (*)

Montrer le concours des médianes d'un triangle en utilisant les aires. (Si ABC est le triangle et B', C' les milieux de $[AC]$ et $[AB]$ respectivement, on introduira le point G intersection de $[BB']$ et $[CC']$ et on utilisera le lemme du chevron).

Pour voir l'existence du point G , voir Annexe 1 exemple 1.12. Les milieux B', C' donnent $\mathcal{A}(GBC) = \mathcal{A}(GBA)$ et $\mathcal{A}(GBC) = \mathcal{A}(GCA)$ et on en déduit $\mathcal{A}(GBA) = \mathcal{A}(GCA)$ qui montre que G est sur la médiane $[AA']$. Cette preuve du concours des médianes est sans doute la plus simple qui soit et elle se décalque sur celle du concours des médiatrices ($OA = OB$, $OA = OC$, donc $OB = OC$) en remplaçant la longueur par l'aire.

4.9 Exercice. ¶ (Ménélaüs)

Soit ABC un triangle. Une droite ne passant pas par les sommets coupe respectivement (BC) , (CA) et (AB) en A', B', C' . Montrer l'égalité : $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$. Réciproque ?

On utilise la stratégie en écrivant $\frac{A'B}{A'C} = \frac{\mathcal{A}(C'A'B)}{\mathcal{A}(C'A'C)}$ (c'est sémiotique : pas besoin de réfléchir, on ajoute un point extérieur). Puis, comme on n'est pas idiots, on écrit $\frac{C'A}{C'B} = \frac{\mathcal{A}(C'AA')}{\mathcal{A}(C'BA')}$ en réutilisant une des aires précédentes. Ensuite, on ouvre les yeux ...

Pour la réciproque, c'est toujours le principe de l'Annexe 2, §11 qui s'applique. Mais attention aux questions de position¹⁶ ...

16. Pour plus de précisions, on pourra consulter <https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/Menelaus.pdf>

4.10 Exercice. ¶ (Céva)

Soient ABC un triangle et M un point du plan non situé sur les côtés du triangle. Les droites (AM) , (BM) et (CM) coupent respectivement les côtés (BC) , (CA) et (AB) en A' , B' , C' .

Montrer l'égalité : $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$. ¶¶ Réciproque? (Attention, il y a un double piège ...)

Le chevron, encore et encore.

4.11 Exercice. Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point intérieur. Comment doit-on choisir M pour que les aires des triangles AMB et BMC soient égales¹⁷? Même question avec $AMCD$, AMB et BMC .

Le chevron, vous dis-je ...

4.12 Exercice. Soient ABC un triangle, G son centre de gravité et F le point symétrique de G par rapport au milieu A' de $[BC]$.

a) Calculer $\mathcal{A}(BGF)$ en fonction de $\mathcal{A}(ABC)$.

b) On considère un triangle T dont les côtés ont pour longueurs les longueurs des médianes de ABC . Calculer $\mathcal{A}(T)$ en fonction de $\mathcal{A}(ABC)$.

4.13 Exercice. Soient $ABCD$ un rectangle, I et J les milieux des côtés $[AD]$ et $[CD]$, M le point d'intersection de $[CI]$ et $[AJ]$. Comparer les aires des quadrilatères $DIMJ$ et $ABCM$. Que se passe-t-il si $ABCD$ est seulement un parallélogramme?

Comme il s'agit de propriétés affines, parallélogramme fonctionne aussi bien que rectangle.

4.14 Exercice. (La proposition 43 du Livre I des Éléments d'Euclide)

Soit $ABCD$ un parallélogramme et I un point de la diagonale $[AC]$. La parallèle à (BC) passant par I coupe $[AB]$ en E et $[CD]$ en F , la parallèle à (AB) passant par I coupe $[BC]$ en G et $[AD]$ en H . Montrer que les parallélogrammes $HIFD$ et $EIGB$ ont même aire.

4.15 Exercice. ¶

Soit $ABCD$ un parallélogramme et soient I, J, K, L les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ respectivement. Les droites (DI) et (AJ) , (AJ) et (BK) , (BK) et (CL) , (CL) et (DI) se coupent respectivement en P, Q, R, S . Montrer que les quadrilatères $APSL$, $BQPI$, $CRQJ$ et $DSRK$ ont même aire.

Une utilisation astucieuse des lemmes de la médiane et du demi-parallélogramme donne le résultat. Si l'on est savant, on peut noter que, comme il s'agit de propriétés affines, on peut supposer que $ABCD$ est un carré et le résultat est alors évident grâce aux rotations qui conservent le carré.

17. Si l'on a en tête le programme d'Erlangen, voir ch. 1, on peut commencer par traiter le cas où $ABCD$ est un carré.

4.16 Exercice. ¶¶

Soit ABC un triangle et soit I (resp. J , resp. K) le point situé au tiers de $[BC]$ du côté de B (resp. de $[CA]$ du côté de C , resp. de $[AB]$ du côté de A). On appelle E, F, G les points d'intersection de (BJ) et (CK) , (CK) et (AI) , (AI) et (BJ) respectivement. On pose $T = \mathcal{A}(ABC)$, $a = \mathcal{A}(AEF)$, $b = \mathcal{A}(BFG)$, $c = \mathcal{A}(CGE)$ et $t = \mathcal{A}(EFG)$.

Montrer les formules $t + c = 2b$, $t + a = 2c$, $t + b = 2a$. En déduire que l'on a $a = b = c = t$ (on pourra supposer, par exemple, $a \leq b$). Calculer t en fonction de T .

On se reportera au chapitre 1 pour la réduction au cas équilatéral. Sinon, le chevron et les proportions font l'affaire, avec une manipulation algébrique un peu astucieuse. On notera sur cet exercice l'intérêt d'utiliser des notations qui permettent d'utiliser facilement l'invariance de la situation par permutation circulaire.

4.17 Exercice. (Proposé par le journal *Le Monde*) Soit ABC un triangle. On prolonge les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, du côté de C, A, B respectivement, d'une longueur égale à leur moitié. On obtient un triangle DEF . Quel est le rapport entre les aires de DEF et ABC ? Les côtés du triangle initial recoupent ceux du grand triangle en des points P, Q, R respectivement. Préciser la position des points P, Q, R dans (BC) , (CA) , (AB) .

5 Exercices utilisant les transformations

Les transformations sont particulièrement efficaces pour traiter les problèmes de construction. Nous en donnons ici quelques exemples.

5.1 Exercice. (*)

Construire un carré $ABCD$, de sens direct, dont le centre O est donné et tel que les points A et B soient respectivement sur deux droites données Δ_A et Δ_B .

Une figure d'analyse montre que le point B est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\pm 90^\circ$. Il est donc sur l'image de Δ_A par cette rotation et aussi sur Δ_B , d'où la construction.

5.2 Exercice. On se donne deux droites parallèles Δ et Δ' et deux points A et B situés de part et d'autre de la bande limitée par Δ et Δ' . Construire les points $M \in \Delta$ et $M' \in \Delta'$ tels que (MM') soit perpendiculaire à Δ et qui satisfont en outre l'une des propriétés suivantes :

- i) $AM = BM'$.
- ii) (AM) perpendiculaire à (BM') .
- iii) $AM + MM' + M'B$ est minimum.

L'idée est d'utiliser la translation qui envoie Δ sur Δ' pour se ramener à une bande de largeur nulle.

5.3 Exercice. (*) Soit ABC un triangle. Construire un carré $MNPQ$ avec $M, N \in [BC]$, $P \in [CA]$ et $Q \in [AB]$.

On commence par faire une figure en abandonnant la contrainte $P \in [CA]$, puis on la rectifie par homothétie, voir chapitre 8 pour l'utilisation en classe de cet exercice.

5.4 Exercice. Construire un triangle équilatéral dont les trois sommets sont sur trois cercles concentriques donnés.

Une figure d'analyse suggère une rotation de 60° peut-être ...

5.5 Exercice. ¶ Montrer que l'on peut paver le plan avec un quadrilatère convexe quelconque (on commencera par lui ajouter le quadrilatère obtenu par symétrie par rapport au milieu d'un de ses côtés ; on obtiendra ainsi un hexagone à côtés opposés parallèles et il suffira alors de faire des translations).

L'indication de la fourmi pour 3.7

On peut utiliser la formule des sinus, voir Annexe 2, ou introduire le point $E \in [CD]$ tel que $\widehat{DAE} = 20^\circ$.

Références des parties 1 et 2

Les articles de la revue Repères-IREM (sauf ceux de l'année en cours) sont consultables en lignes à l'url : <http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique24>

Les articles de la revue Petit x (sauf ceux de l'année en cours) sont consultables en lignes à l'url :

<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/>

Les articles de la revue Grand N (sauf ceux de l'année en cours) sont consultables en lignes à l'url :

<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/>

Alder K. (1998). Mesurer le monde. Collection Champs Flammarion.

Barbin É. (1991). Les Éléments de Géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée. *Repères-IREM*, 4, 119-133.

Barbin É. (2000). Que faut-il enseigner, pour qui, pourquoi : des réponses dans l'histoire des mathématiques. *Repères-IREM*, 38, 43-52.

Barbin É. (2001). Qu'est-ce que faire de la géométrie ? *Repères-IREM*, 43, 59-83.

Berthelot R., & Salin M.H (1993-1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N* 53, 39-56.

Bkouche R. (2000). Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles, *Bull. APMEP*, 430, 613-629.

Cousin-Fauconnet A. (1995) *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin.

Dieudonné J. (1964) *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris.

Douady R. et Perrin-Glorian M.-J. (1984, 1985). Aires de surfaces planes 1^{ère} et 2^{ème} parties *Petit x n° 6 et n° 8 IREM de Grenoble* articles repris en 1987 par *Grand N* (traduits en espagnol dans *Novedades Educativas*).

Douady R. et Perrin-Glorian M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20/4, 387- 424. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Duperret J.-C., Perrin D., Richeton J.-P. (2001). Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie, *Bull. APMEP* 435, 472-497.

Duval R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, 17, 121-138.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Duval R., & Godin M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.

Euclide *Les Éléments*, traduction de Bernard Vitrac, 4 volumes. Paris : PUF, 1990 (vol.1), 1994 (vol.2), 1998 (vol.3), 2001 (vol.4). Page personnelle de B. Vitrac, comportant beaucoup d'articles très intéressants : <https://cnrs.academia.edu/BernardVitrac/Books>

Euclide *Les œuvres d'Euclide*, traduction de François Peyrard. Paris : chez M. Patris, 1819, réédition Blanchard, Paris, 1993.

Disponible en ligne sur *Internet Archive* : <http://www.archive.org/details/lesuvresdeuclide01eucl>

Galion. Les fiches Galion proposent des exercices très riches pour le collège et le lycée. Elles se trouvent à l'adresse <https://www.apmep.fr/GALION-Themes>

Guedj D. (2000). *Le mètre du monde*, collection Points, Seuil.

Hilbert D. (trad. Paul Rossier) (1997) *Les fondements de la géométrie*, Paris : J. Gabay.

Kahane J.P. (2002) (éd.) *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris : Odile Jacob.

Keskessa B., Perrin-Glorian M.-J., & Delplace J.-R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, 79, 33-60.

Klein F. (1872) *Le programme d'Erlangen*, (rééd.1974). Paris : J. Gabay.

Legendre Adrien-Marie, *Éléments de géométrie*, seconde édition, Paris, An VIII. Disponible en ligne sur gallica.bnf.fr : <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6212886v?rk=85837;2>

Mangiante-Orsola, C., & Perrin-Glorian, M.-J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres. *Grand N*, 94, 47-79.

Mascheroni L. (1828). *La géométrie du compas*. Paris : Bachelier.

Mathé A.-C., Barrier T. & Perrin-Glorian M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités*. Bruxelles : Academia-L'Harmattan.

Offre B., Perrin-Glorian M.-J., & Verbaere O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Petit x* 72, 6-39 et *Grand N* 77, 7-34.

Perrin D. (2003). Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations, *Repères IREM*, 53, 91-110.

Perrin D. (2011). *Mathématiques d'école*, Cassini.

Perrin D. (2014a) *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Introduction*. <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPintro.pdf>

Perrin D. (2014b). *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Postface*. <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPostface.pdf>

Perrin D. (2050). *Une axiomatique pour la géométrie du collège*, Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne).

Perrin D., Perrin-Glorian M.-J., & Pinvidic A. (à paraître). Les cas d'isométrie et les aires, des outils de démonstration pour le cycle 4. *Actes du colloque Corfem, Strasbourg 2019*.

Perrin-Glorian M.J. (1990). L'aire et la mesure *Petit x*, 24, 5-36. IREM de Grenoble.

Perrin-Glorian M.-J. (1999). Le problème de l'enseignement des mesures des grandeurs géométriques à partir de l'exemple des aires. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01385025/document>

Perrin-Glorian M.J. (2001). Des problèmes pour enseigner la géométrie à l'école. Des expériences spatiales aux objets géométriques. *Journée IREM-APMep-IUFM-CRDP sur la géométrie en primaire*. CRDP Nord-Pas-de-Calais. Disponible sur HAL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02428982v1>

Perrin-Glorian M.-J. (2014). Réflexions dans la perspective de nouveaux programmes pour les cycles 2 (CP-CE2) et 3 (CM1-6^{ème}). Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes Cycle 2, Cycle 3 et Cycle 4, pour le Conseil Supérieur des Programmes :

http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/11/5/Perrin-Glorian_Marie-Jeanne- PU - CSP_Contributionm_376115.pdf

Perrin-Glorian M.-J. & Godin M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, 222, 26-36. Disponible en ligne https://www.revue-mathematiques.ch/files/4014/6288/8780/ME222_PerrinGlorian.pdf

Perrin-Glorian M.-J. & Godin M. (2018). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837v2/document>

Perrin-Glorian M.-J., Mathé A.-C. & Leclercq R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères IREM*, 90, 5-14.

Petitfour É. (2017). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition d'un dispositif de travail en dyade. *Petit x*, 103, 5-31.

Rouche N. (2008). *Du quotidien aux mathématiques. Géométrie*. Paris : Ellipses.

Salin M.H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège. Le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP*, 478. p. 647-670.

Annexe 1

Les fondements de notre progression : axiomes et démonstrations

Introduction

Cette annexe, évidemment, s'adresse **aux professeurs**¹ (et aux futurs professeurs) et pas à leurs élèves. Notre but est de donner un arrière-plan mathématique² consistant à la géométrie (plane) du collège qui permette une progression cohérente et conforme aux programmes, actuels et peut-être futurs. Cela signifie que nous allons proposer un système d'axiomes et les démonstrations des propriétés qu'ils permettent. Certes, il n'est pas évident qu'il soit nécessaire de sous-tendre l'enseignement à ce niveau par des axiomes car la géométrie, à ses débuts, doit plutôt s'appuyer sur l'intuition. Mais dès que l'on réfléchit à une progression possible, cette question des bases sur lesquelles s'appuyer s'impose. Le lecteur qui souhaite un résumé des propriétés de la géométrie du collège que nous proposons d'admettre et de celles que nous proposons de démontrer, le trouvera dans le memento du paragraphe 6 ci-dessous. Attention, les démonstrations données ici le sont de manière synthétique, à charge pour les professeurs d'adapter celles qu'ils souhaitent présenter aux élèves.

Principes

Notre position s'appuie sur un certain nombre de réflexions, notamment [Kahane, 2002], [Perrin, 2017] et leur mise en perspective avec celles des auteurs anciens, [Euclide, 1990], [Hilbert, 1971], ou modernes, voir [Arsac, 1998], [Cousin-Fauconnet, 1995], [Lion, 2001], [Hartshorne, 1997], [Allart, Bkouche, 2019]. Comme expliqué au chapitre 1, nous mettons en avant la primauté de la vision géométrique, donc de la figure, l'importance du raisonnement, le fait d'avoir de bons outils : invariants, cas d'isométrie et de similitude, calcul, transformations. Deux points sont essentiels.

- Nous sommes tout à fait hostiles à une approche par le linéaire (à la Dieudonné, voir [Dieudonné, 1964]) au collège et au lycée. L'expérience des mathématiques modernes a été suffisamment claire à ce sujet. Cela condamne les axiomatiques à base d'espaces affines et vectoriels³.

- Nous sommes réservés sur l'enseignement qui a prévalu jusqu'au début des années 2000 et qui était fondé sur une introduction progressive des transformations (symétrie

1. Cela implique que nombre de termes, de notions et de propriétés ne seront pas rappelés ici.

2. Mais il n'y a aucune ambition théorique (on ne cherche pas un système minimal d'axiomes, les preuves peuvent être incomplètes, voire absentes, etc.). Le lecteur (patient) qui souhaiterait des précisions consultera [Perrin, 2050].

3. On notera que ce sont presque les seules que rencontrent les futurs professeurs à l'Université, ce qui n'est pas sans poser problème.

axiale en sixième, symétrie centrale en cinquième, translation en quatrième, rotation en troisième). Nous sommes plutôt favorables à une introduction⁴ précoce des cas d'égalité et de similitude des triangles, dès le début du cycle 4, et à une utilisation plus intensive des invariants (longueurs, angles, aires), un retour à Euclide, en quelque sorte. Des justifications de cette position, à la fois sur le plan mathématique et sur le plan didactique, ont été données dans les précédents chapitres.

Retour à Euclide ? Oui, mais avec quelques différences

Bien sûr, il existe depuis longtemps un système d'axiomes destiné à fonder la géométrie : ce sont les *Éléments* d'Euclide, voir [Euclide, 1990]. Nous nous en écartons sur plusieurs points.

Le langage des ensembles

Le premier point est l'usage, sinon de la théorie des ensembles, un bien grand mot, du moins du langage des ensembles. Dans cette annexe, nous utiliserons librement ce langage et notamment les notions usuelles de relations d'équivalence, d'ordre, ainsi qu'un peu de théorie des groupes.

L'explicitation

Il y a dans Euclide de nombreux points qui ne sont pas explicités, ni comme axiomes, ni comme théorèmes. C'est le cas par exemple des questions de position, ou de certaines propriétés des aires et cela rend parfois le discours un peu flou. Nous essaierons de remédier (partiellement) à ce défaut.

Le premier cas d'isométrie et la méthode de superposition

C'est le point essentiel, celui où nous nous écartons des maîtres : Euclide et ses continuateurs modernes, notamment Hilbert, voir [Hilbert, 1971], et d'autres, voir par exemple [Lion, 2001]. Revenons aux sources et au premier cas d'égalité des triangles ([Euclide, 1978], Livre 1, prop. 4) :

Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés et les triangles seront aussi égaux, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.

Voici, recopiée intégralement à quelques modifications de notations près, la preuve d'Euclide :

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que l'on ait : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. Je dis qu'il est aussi $AC = A'C'$ et que ces triangles sont égaux et ont tous leurs autres éléments homologues égaux, c'est-à-dire que l'on aura aussi : $AC = A'C'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

4. Ils sont revenus dans les programmes de 2015 et c'est heureux. Mais, à lire les manuels, nous craignons qu'ils ne soient pas utilisés comme ils le devraient, c'est-à-dire comme outils.

En effet, si l'on appliquait le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$ de manière à faire coïncider d'abord les points B et B' , puis les côtés BC et $B'C'$, le point C coïnciderait avec C' , car $BC = B'C'$. Les côtés BA et $B'A'$ coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, de sorte que le point A à son tour coïnciderait avec A' , car $BA = B'A'$. D'autre part, les points C et C' ayant déjà coïncidé, les côtés AC et $A'C'$ coïncideront aussi et ils seront égaux.

Cette « preuve », qui utilise la méthode dite de superposition, est celle que l'on donnait autrefois en classe de cinquième et elle convainquait la plupart des élèves. Cependant, le mathématicien attentif y décèle évidemment un point faible : que signifie le fait (non défini) d'*appliquer*⁵ le triangle ABC sur $A'B'C'$?

David Hilbert, quand il a entrepris la refonte de l'œuvre d'Euclide vers 1900, était parfaitement conscient de cette faille. La solution qu'il a adoptée est de prendre le premier cas d'égalité des triangles comme axiome et de bâtir le reste de la géométrie dessus. C'est une solution correcte⁶, mais trop brutale à notre goût. Le but de ce qui suit est d'indiquer les bases d'une axiomatique qui permette de rendre valide la preuve d'Euclide et la méthode de superposition, tellement naturelle qu'elle ne peut pas être vraiment incorrecte. Ce qui est nécessaire pour cela est de donner un sens à l'opération consistant à appliquer ou transporter une demi-droite sur une autre, propriété qui manifeste l'**homogénéité** du plan. Avec nos connaissances actuelles, on subodore la présence d'un **groupe** de transformations. Précisément, après d'autres, nous proposons de postuler⁷ qu'il existe un tel groupe qui opère **transitivement** sur les **drapeaux** (un point, une demi-droite d'origine ce point, un demi-plan limité par cette demi-droite), voir l'axiome (**G**) en 2.2.

Les nombres

La question des nombres est un autre point sur lequel nous nous écartons d'Euclide. En effet, le nombre était sans doute le talon d'Achille des Grecs et, contrairement à eux, nous utiliserons sans crainte les nombres rationnels (qu'ils ne voyaient que comme rapports de grandeurs), les décimaux (qui n'étaient pas inventés), voire les réels.

Les aires

Enfin, un autre point important du système d'axiomes proposé ci-dessous est l'utilisation précoce de la notion d'aire, particulièrement efficace pour traiter les problèmes de nature affine (comme Thalès) voire certains problèmes euclidiens (comme Pythagore). En ce sens nous sommes aussi dans la droite ligne d'Euclide, fervent adepte de la méthode des aires, mais nous serons plus précis en explicitant les axiomes portant sur les aires (sans nous inquiéter du fait qu'ils peuvent être conséquence des autres).

5. On notera que le mot utilisé ici (et qui semble admis par tous les traducteurs) est celui qui sera retenu dans le langage moderne.

6. C'est aussi celle de [Lion, 2001].

7. Cette idée n'est pas nouvelle. Houël, au XIX^e siècle, Schur dans ses *Grundlagen der Geometrie*, Bkouche (voir [Bkouche, 2000]) ou Hartshorne plus près de nous, et d'autres sans doute, l'ont émise. Pendant la préparation de cette brochure, le livre [Allart, Bkouche, 2019], qui s'appuie sur les mêmes idées, est paru, mais nous n'avons pas encore eu le temps de l'étudier sérieusement.

1 Axiomes d'incidence et d'ordre

La géométrie est une modélisation de l'espace. Les axiomes qui la gouvernent doivent donc être les plus proches possibles de la réalité qu'ils sont censés modéliser et il n'est pas du tout interdit de recourir aux images anciennes et un peu désuètes de la pointe d'un crayon, du fil à plomb ou toute autre, pour expliquer leur signification. Ici, on se contente de donner les axiomes, sans entrer dans le débat sur l'adéquation du modèle à la réalité.

1.1 Les axiomes d'incidence

On postule l'existence d'un ensemble, appelé **plan** et noté \mathcal{P} . Ses éléments sont appelés les **points**. Il contient des parties remarquables appelées **droites**. L'expérience conduit à proposer l'axiome suivant :

1.1 Axiome. (I) Par deux points distincts du plan passe une droite et une seule.

La droite définie par les points distincts A, B est notée (AB) . On utilisera la notion de triangle : un triangle est formé de trois points non alignés⁸ A, B, C et on le note ABC .

Il résulte de (I) que deux droites distinctes ont au plus un point commun. Cela mène à la définition des droites parallèles (on y englobe le cas des droites confondues) :

1.2 Définition. Soient d, d' deux droites de \mathcal{P} . On dit qu'elles sont **parallèles** si elles sont confondues ou si elles n'ont aucun point commun.

On ajoute tout de suite le postulat d'Euclide :

1.3 Axiome. (P) Soit d une droite et A un point. Il existe une unique droite parallèle à d passant par A .

Une première conséquence du postulat d'Euclide est la suivante :

1.4 Proposition. La relation de parallélisme est transitive : si d, d' sont parallèles ainsi que d' et d'' , alors d et d'' le sont aussi.

Démonstration. Sinon, elles se coupent en un point A et sont distinctes, donc, par A , il passe deux parallèles à d' , ce qui contredit l'axiome (P).

1.2 Les axiomes d'ordre

1.2.1 Introduction

La problématique de ce paragraphe concerne les propriétés de position (au-dessus, au-dessous, de part et d'autre, du même côté, entre, à l'intérieur, etc.) que l'on peut « lire sur la figure ». Ces propriétés relèvent des connaissances spatiales et font l'objet d'un apprentissage dès l'école maternelle. C'est un point incontournable car, selon la position, telle longueur ou tel angle sera somme ou différence de deux autres. C'est aussi un point très épineux dans l'enseignement. Au niveau du collège, notre opinion est que l'on peut se

8. Pour ne pas considérer que des trivialités, on suppose qu'il existe trois points non alignés.

contenter de constater les propriétés de position sur la figure. Cela gêne toujours certains collègues qui disent : *Mais, si l'on demande aux élèves de lire sur la figure, à quoi sert-il de leur demander de prouver d'autres propriétés ?* Voici deux éléments de réponse :

- Il y a une différence entre les propriétés « fermées »⁹ (alignement, concours, égalités d'angles ou de longueurs), que l'on ne se contentera pas de constater, et les propriétés « ouvertes » (du même côté, à l'intérieur, etc.), que l'on pourra sans encombre lire sur la figure.

- Le professeur scrupuleux et angoissé peut, lui, toujours établir rigoureusement (pour son usage personnel) les assertions de position. Il suffit pour cela d'avoir précisé soigneusement les axiomes et de faire un petit effort, voir les exercices ci-dessous.

Attention, ce qui suit est à l'usage des professeurs et absolument pas destiné aux élèves. Ce serait un contre-sens de démontrer les assertions de position dans une classe de collège. L'objectif est, au contraire, de convaincre les professeurs que, puisqu'il est possible de les démontrer, ce n'est pas un crime de lèse-mathématiques que de lire certaines propriétés sur la figure.

1.2.2 Les axiomes

1.5 Axiome. (D) Les droites du plan sont des ensembles munis d'une relation d'ordre total¹⁰ sans plus petit ni plus grand élément.

Il y a deux relations opposées et l'on se garde bien de préciser laquelle on choisit. Ces relations permettent d'avoir les notions de demi-droite $[AB)$ (si, par exemple, on a $A < B$, la demi-droite est formée des M qui vérifient $A \leq M$) et de segment $[AB]$ (le lecteur en écrira la définition formelle). L'absence de plus petit ou plus grand élément montre que les droites et les demi-droites sont infinies. Pour les segments voir Exercice 7.1. On a aussi la notion de convexité (une partie \mathcal{A} du plan est convexe si pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on a $[AB] \subset \mathcal{A}$).

On définit ensuite les demi-plans¹¹ :

1.6 Axiome. (DP) Si d est une droite, il existe des parties \mathcal{P}_d^+ et \mathcal{P}_d^- de \mathcal{P} appelés demi-plans ouverts limités par d , qui vérifient les propriétés suivantes :

- 1) On a une partition de \mathcal{P} : $\mathcal{P} = \mathcal{P}_d^+ \cup \mathcal{P}_d^- \cup d$.
- 2) Les parties \mathcal{P}_d^+ et \mathcal{P}_d^- sont convexes.
- 3) Si A est dans \mathcal{P}_d^+ et B dans \mathcal{P}_d^- , le segment $[AB]$ rencontre d .

Lorsque deux points $A, B \notin d$ sont dans un même demi-plan ouvert (resp. dans deux demi-plans ouverts distincts) on dira que A et B sont **du même côté** de d (resp. **de part et d'autre** de d).

À partir de cette notion, on peut régler toutes les questions de position : tel segment coupe-t-il telle droite, tel et tel points sont-ils du même côté de telle droite, etc.

9. Ces mots font référence à la formulation analytique : fermé signifie défini par des égalités et ouvert par des inégalités. Un point (x, y) est sur une droite s'il vérifie $ax + by + c = 0$, propriété fermée, il est d'un côté s'il vérifie $ax + by + c > 0$ ou < 0 , propriété ouverte.

10. Ici, nous commettons sans vergogne un crime de lèse-Hilbert en préférant utiliser cette notion plutôt que le mot « entre ». Le lecteur se convaincra que c'est plus simple et il pourra prouver que ces approches sont équivalentes ou attendre [Perrin, 2050].

11. Ici, nous suivons la présentation de G. Lion, voir [Lion, 2001], plus commode que celle de Hilbert.

1.2.3 Quelques propriétés

1.7 Proposition. *Soient d, d' deux droites parallèles distinctes. Alors d' est contenue dans l'un des demi-plans ouverts limités par d .*

Démonstration. Soit $A \in d'$ et \mathcal{P}_d^+ le demi-plan ouvert limité par d qui contient A . Alors, si M est sur d' il est dans \mathcal{P}_d^+ . En effet, M n'est pas dans d puisque les droites sont parallèles. Il n'est pas dans \mathcal{P}_d^- sinon le segment $[AM]$ couperait d en vertu de l'axiome (DP), ce qui, comme on a $[AM] \subset d'$, contredit aussi le parallélisme.

De manière analogue, le lecteur établira sans peine la propriété suivante :

1.8 Proposition. (La demi-droite) *Soit d une droite, O un point de d et A un point du demi-plan \mathcal{P}_d^+ limité par d . Alors, la demi-droite $]OA)$ est entièrement contenue dans \mathcal{P}_d^+ et la demi-droite opposée est contenue dans \mathcal{P}_d^- .*

1.2.4 Les secteurs angulaires

Nous donnons maintenant la définition des secteurs, objets géométriques qui vont donner naissance aux angles (de même que les segments donnent naissance aux longueurs).

1.9 Définition. *Soient $[OA)$ et $[OB)$ deux demi-droites d'origine O , non portées par la même droite. Soient U^+ (resp. V^+) le demi-plan (fermé) limité par (OA) contenant B (resp. par (OB) contenant A). On appelle **secteur**¹² défini par ces demi-droites l'intersection $U^+ \cap V^+$ et on le note $[\widehat{AOB}]$. Le point O est le **sommet** du secteur, les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ sont ses **côtés**.*

1.10 Remarque. Si les demi-droites sont confondues, le secteur qu'elles définissent est égal à $[OA)$ (on parle de secteur **nul**). Si elles sont opposées, on convient qu'elles définissent deux secteurs : les deux demi-plans limités par (OA) . On parle de secteurs **plats**.

Le lemme principal sur les secteurs est le suivant que nous appellerons lemme CF¹³, bel exemple de raisonnement sur les positions :

1.11 Lemme. *Soit $[\widehat{AOB}]$ un secteur et soit C un point de ce secteur, non situé sur les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$. Alors, les points A et B sont situés de part et d'autre de la droite (OC) et, plus précisément, le segment $[AB]$ coupe la demi-droite $[OC)$.*

Démonstration.

Voir Figure 1. Montrons que A et B sont de part et d'autre de (OC) . L'idée est d'introduire un point A' de la demi-droite opposée à $[OA)$. Comme C et A sont du même côté de (OB) , C et A' sont de part et d'autre et donc $[A'C]$ coupe (OB) en B' . De plus B' est dans $[OB)$ car tous les points de $[A'C]$ sont dans le demi-plan limité par (OA) qui contient B . Mais alors, si W^+ (resp. W^-) est le demi-plan limité par (OC) qui contient A (resp. l'autre), comme A' est dans W^- , $[CA')$ aussi, donc B' aussi, donc $[OB')$ aussi (utiliser la propriété des demi-droites 1.8) et donc B est dans W^- et on conclut par le point 3 de (DP).

12. En toute rigueur on devrait préciser « secteur saillant » car il y a aussi des secteurs rentrants.

13. Car on s'inspire fortement ici du livre d'Annie Cousin-Fauconnet [Cousin-Fauconnet, 1995].

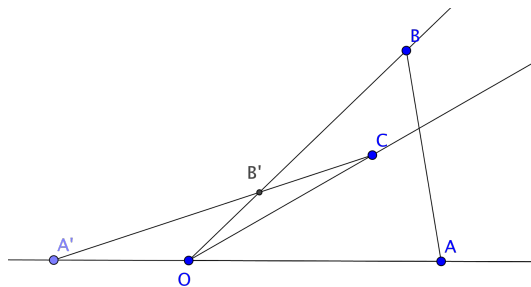


FIGURE 1 –

Le lecteur qui voudrait voir comment on peut, avec les axiomes qui précèdent, montrer les résultats de position les plus utiles au niveau du collège, se reportera aux exercices du paragraphe 7.1. Nous donnons juste un exemple, cf. exercice 7.2 :

1.12 Exemple. Soit ABC un triangle et soient B' et C' des points de $]AC[$ et $]AB[$ respectivement. Alors, les segments $[BB']$ et $[CC']$ se coupent en un point G . En effet, comme la situation est symétrique entre B et C , il suffit de montrer que $[CC']$ coupe la droite (BB') donc que C et C' sont de part et d'autre de cette droite. Mais, C et A sont de part et d'autre (car $]AC[$ coupe (BB') en B') et C' et A étant du même côté par la propriété des demi-droites 1.8, C et C' sont de part et d'autre.

2 Axiomes de « groupes »

2.1 Drapeaux et axiome de transitivité

2.1.1 Introduction

Le but de ce paragraphe est de mettre dans la machine ce qui est nécessaire pour que la preuve d'Euclide du premier cas d'égalité vue ci-dessus devienne correcte.

2.1.2 L'axiome

2.1 Définition. On appelle **drapeau** de \mathcal{P} un triplet (A, δ, \mathcal{F}) formé d'un point $A \in \mathcal{P}$, d'une demi-droite δ d'origine A et d'un demi-plan \mathcal{F} limité par la droite définie par δ .

L'axiome suivant permet maintenant de réaliser l'opération d'Euclide :

2.2 Axiome. (G) Il existe un groupe de bijections du plan (que l'on appellera provisoirement **mouvements**), noté G , qui a les propriétés suivantes :

- 1) L'image d'une droite d par un mouvement u est une droite $u(d)$ et la restriction de u à d est monotone¹⁴.
- 2) L'image par u d'un demi-plan limité par d est un demi-plan limité par $u(d)$.
- 3) Le groupe G est simplement transitif sur les drapeaux : étant donnés deux drapeaux il existe un unique mouvement qui envoie l'un sur l'autre.

¹⁴. Donc u transforme demi-droite en demi-droite et segment en segment et cette propriété est équivalente à la monotonie.

2.3 Définition. Deux figures (c'est-à-dire deux parties du plan) qui se déduisent l'une de l'autre par un mouvement seront dites **superposables**.

2.4 Remarques. 1) Le groupe G que nous avons en vue est bien entendu le groupe des isométries du plan. Les mouvements dont il est question sont donc les translations, les rotations, les réflexions et leurs composées. Mais le but, ici, pour le collège, n'est pas d'étudier ces transformations en tant que telles mais seulement de donner un sens à l'opération de superposition utilisée par Euclide pour prouver le premier cas d'égalité des triangles.

2) Cet axiome est très naturel eu égard à l'expérience : c'est lui qui assure que le plan est homogène et que l'on peut y déplacer et éventuellement retourner les objets (les figures). Si l'on pense, pour figurer un drapeau, à une règle rectangulaire, présentant deux bords différents (par exemple un bord gradué et l'autre non) et deux faces différentes (par exemple de couleurs différentes), la transitivité des mouvements (au sens commun du terme) est bien naturelle : on amène l'extrémité de la première règle sur celle de la seconde, puis le bord gradué sur le bord gradué et enfin, au besoin, on retourne la règle pour qu'elle soit du bon côté. L'idée de cette définition est l'**homogénéité** de l'espace géométrique : points, droites, demi-plans sont « pareils » en quelque endroit qu'ils se trouvent.

Bien entendu, pour les élèves, on se contentera de montrer comment on peut, physiquement, faire glisser ou retourner un objet ou une figure, par exemple sur une table ou sur le tableau, le cas essentiel étant celui d'un triangle.

3) L'unicité est sans doute moins naturelle, mais elle est importante, car c'est elle qui assure que l'on travaille en géométrie euclidienne et pas en géométrie affine, par exemple, voir ci-dessous à propos de la notion de longueur.

2.2 Conséquences 1 : définition des longueurs et des angles

La notion de mouvement permet de définir les longueurs et les angles, grandeurs associées aux objets géométriques segments et secteurs. Pour une discussion plus approfondie sur grandeurs et mesures, on pourra se reporter à l'annexe du chapitre 4 de [Perrin, 2011]. Nous retiendrons trois principes concernant les grandeurs :

1) Elles doivent pouvoir être comparées (dire si elles sont égales ou si l'une est plus petite que l'autre).

2) Elles doivent pouvoir être ajoutées.

3) Elles doivent être invariantes par les mouvements, autrement dit : des figures superposables doivent avoir des grandeurs égales.

Lorsque l'on considère une grandeur, il faut bien distinguer trois types de notions : l'objet géométrique que l'on considère, la grandeur, et sa mesure avec une certaine unité. Ainsi, avec l'objet géométrique segment, la grandeur est la longueur et la mesure un nombre réel, par exemple de mètres ou de centimètres. Avec l'objet géométrique secteur, la grandeur est l'angle¹⁵ et sa mesure un nombre de degrés ou de radians.

15. Sur ce point, notre position n'est pas adoptée par tous, beaucoup de collègues préférant voir l'angle comme un objet géométrique. L'avantage de notre point de vue est d'éviter les lourdeurs de formulation : on peut parler d'angles égaux au lieu d'angles de même mesure.

2.2.1 Longueurs

Forts de ces principes, comment définir la notion de longueur? L'expérience la plus banale l'indique clairement. En effet, pour dire si une personne est plus petite qu'une autre, plus grande, ou de même taille il suffit de mettre dos à dos les personnes et de les comparer. Ce faisant, on a postulé implicitement que la longueur est invariante par déplacement. Avec l'axiome sur les mouvements, on peut formaliser cette notion :

2.5 Définition. *On dit que deux segments $[AB]$ et $[CD]$ sont de même longueur s'il existe un mouvement u tel que $u(A) = C$ et $u(B) = D$ et on note $AB = CD$. On dit que le segment $[AB]$ est plus court que $[CD]$ s'il existe un mouvement u tel que $u([AB])$ est strictement inclus dans $[CD]$ et on note $AB < CD$.*

2.6 Remarques. 1) La notion d'égalité de longueur est une relation d'équivalence sur l'ensemble des segments. Formellement, la longueur AB du segment $[AB]$ est son image dans l'ensemble quotient.

2) Avec cette définition, l'invariance par les mouvements est évidente.

3) Pour être tout à fait correct il y a des choses à vérifier. Par exemple l'égalité de longueurs $AB = CD$ doit aussi être équivalente à l'existence d'un mouvement v tel que $v(A) = D$ et $v(B) = C$. Ce point sera assuré si l'on dispose des milieux ou de la symétrie centrale, voir plus loin ou [Perrin, 2050].

4) Pour que cette notion de longueur ait un sens il faut que deux segments strictement inclus l'un dans l'autre n'aient pas même longueur, donc ne soient pas équivalents par les mouvements. C'est ce qui justifie l'assertion d'unicité dans l'axiome **(G)** car sans cela il pourrait exister, par exemple, un mouvement, fixant O et envoyant la demi-droite δ d'origine O sur elle-même, qui ne soit pas l'identité. Il déplacerait alors un point A en B avec, disons, $[OA] \subset [OB]$ et pourtant les segments $[OA]$ et $[OB]$ seraient déduits l'un de l'autre par un mouvement.

On peut ensuite définir l'addition des longueurs qui correspond à la mise bout à bout de deux segments (sur la même droite) :

2.7 Définition. *Si M est dans le segment $[AB]$, la somme des longueurs AM et MB est, par définition, la longueur AB : $AM + MB = AB$.*

Il faut vérifier que cette notion est bien définie et montrer (entre autres) que la somme de deux longueurs ne peut être nulle que si chacune l'est.

Bien qu'il soit conséquence des autres, voir exercice 7.6, il est commode d'ajouter un axiome de report des longueurs sur une droite :

2.8 Axiome. (Axiome de report) Soit AB une longueur et soit $[OC)$ une demi-droite. Il existe un unique point $M \in [OC)$ tel que $OM = AB$.

On peut aussi définir un cercle :

2.9 Définition. *Soit O un point et R une longueur. Le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $OM = R$.*

2.10 Remarque. On pourrait mettre ici un axiome qui assure que deux cercles de centres O, O' et de rayons R, R' se coupent en deux points pourvu que l'on ait $|R' - R| < OO' < R + R'$. D'ailleurs, Euclide utilise implicitement cet axiome. Avec nos axiomes ce résultat devient un théorème, voir exercice 7.12.

2.2.2 Mesure des longueurs, abscisse et distance

Dès que l'on a défini une grandeur se pose le problème de sa mesure. En effet, la réalisation d'un mouvement amenant un objet sur un autre n'est pas toujours possible, par exemple, s'il s'agit de comparer la largeur du tableau et la hauteur de la porte. Dans ce cas on peut utiliser un intermédiaire (une ficelle), mais c'est plus problématique s'il s'agit de comparer la distance entre Paris et Lille et celle entre Nantes et Brest. C'est ici que s'impose la notion de **mesure**. Le principe est d'utiliser un étalon, une **unité**. Dans le cas de la longueur les premières tentatives en ce sens ont sans doute utilisé les moyens du bord : le pied, un bâton, une ficelle, etc. Dans notre cas, on choisit un segment dont on décrète que la longueur est une unité et on compare ensuite la longueur d'un segment à celle d'une ou plusieurs unités mises bout à bout. Autrement dit, on associe à un objet, vis-à-vis d'une grandeur donnée, un nombre : le nombre d'unités qu'il comporte. Si l'on considère une droite avec une origine O , un point unité I et le point M obtenu en reportant n fois la longueur OI grâce à l'axiome de report, la longueur OM sera égale à n .

Bien entendu, si les premières mesures historiques se sont limitées à des nombres entiers d'unités, il a rapidement fallu utiliser des fractions, voire des réels. Par exemple, la mesure de OM est égale à $1/n$ si l'on obtient OI en reportant n fois la longueur OM . C'est là que l'on peut maintenant surpasser Euclide, en introduisant les nombres décimaux, voire les réels, mais pour cela il faut ajouter des axiomes (axiome d'Archimède, existence du milieu, axiome de continuité, etc.).

Une fois la mesure de longueur définie, on obtient l'abscisse d'un point d'une droite sur laquelle on a choisi une origine O et un point unité I . Si M est un point de la demi-droite $[OI)$ l'abscisse λ de M est le nombre tel que $OM = \lambda \times OI$. Sur la demi-droite opposée, l'abscisse sera l'opposée de λ .

On peut aussi définir la distance de deux points A et B comme la mesure de la longueur AB avec l'unité fixée. Pour l'inégalité triangulaire voir Prop. 3.4.

2.2.3 Les angles

La définition de la grandeur angle est l'exact pendant de la longueur, mais avec les secteurs à la place des segments :

2.11 Définition. *On dit que deux secteurs $[\widehat{AOB}]$ et $[\widehat{A'O'B'}]$ ont même angle et on note $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$ s'il existe un mouvement u tel que $u(O) = O'$, $u([OA)) = [O'A')$ et $u([OB)) = [O'B')$.*

On dit que l'angle du secteur $[\widehat{AOB}]$ est plus petit que celui de $[\widehat{A'O'B'}]$ et on note $\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'}$ s'il existe un mouvement u tel que $u(O) = O'$, $u([OA)) = [O'A')$ et $u([OB)) \subset [A'O'B')$.

L'angle nul (noté 0) est celui des secteurs nuls, l'angle plat (noté π) celui des secteurs plats.

Notons qu'avec cette définition, l'invariance des angles par les mouvements est évidente. On peut aussi définir un angle droit :

2.12 Définition. Soient A, B, C trois points non alignés, et soit A' un point de la demi-droite opposée à $[BA]$. On dit que l'angle \widehat{ABC} est **droit** s'il est égal à $\widehat{A'BC}$. On dit alors que les droites (AB) et (BC) sont **perpendiculaires**. Un angle est dit **aigu** (resp. **obtus**) s'il est plus petit (resp. plus grand) qu'un angle droit.

2.13 Remarques. 1) L'axiome **(G)** permet de montrer que les angles droits sont tous égaux, voir exercice¹⁶ 7.7.

2) Pour l'unicité de la perpendiculaire voir lemme 2.21, pour l'existence voir corollaires 2.23 et 3.10.

3) Comme dans le cas des longueurs on a besoin de pouvoir échanger les côtés d'un secteur, donc de disposer d'une bissectrice. Cela nécessite un axiome supplémentaire, voir 2.22.

On peut aussi définir la somme de deux angles :

2.14 Définition. Si le point B est dans le secteur $[\widehat{AOC}]$ on a $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$.

On vérifie que cette définition est licite (elle ne dépend pas du choix des représentants) et on montre que la somme de deux angles ne peut être nulle que si chacun l'est.

2.15 Remarques. 1) Bien que ces mots ne figurent pas dans les programmes, il est essentiel de parler d'angles **supplémentaires** (dont la somme est un angle plat) et **complémentaires** (dont la somme est un angle droit), notions indispensables pour utiliser les angles.

2) Le lecteur vérifiera que si deux angles sont égaux il en est de même de leurs supplémentaires et de leurs complémentaires. On en déduit que les angles opposés par le sommet sont égaux.

Comme pour les longueurs, on ajoute un axiome de report (voir aussi l'exercice 7.6) :

2.16 Axiome. (Report d'angle) Soit \widehat{AOB} un angle, $[O'A')$ une demi-droite et \mathcal{P}^+ un demi-plan limité par $(O'A')$. Il existe une unique demi-droite $[O'B')$ située dans \mathcal{P}^+ telle que l'on ait $\widehat{A'O'B'} = \widehat{AOB}$.

2.2.4 Et la mesure des angles ?

Comme dans le cas des longueurs, on peut comparer directement des angles (par exemple à l'aide d'un gabarit), mais la nécessité de mesurer s'impose rapidement. Il s'agit là d'une notion plus difficile, liée à la longueur des arcs de cercle, mais, de manière élémentaire, c'est ce que fournit le rapporteur.

2.3 Milieu, bissectrice

On peut maintenant définir milieu et bissectrice, mais leur existence n'est pas évidente (voir [Perrin, 2050]). Pour simplifier, on va la prendre ici comme axiome.

16. Le lecteur qui souhaite comprendre comment fonctionne l'axiome **(G)** résoudra avec profit cet exercice.

2.17 Définition. On appelle milieu du segment $[AB]$ un point $M \in [AB]$ tel que $AM = MB$.

On montre d'abord :

2.18 Lemme. Le milieu d'un segment, s'il existe, est unique.

Démonstration. Si M, N sont deux milieux distincts de $[AB]$, on peut supposer par exemple $N \in [MB]$ et on a alors $AM = MB$ puis $AN = AM + MN = MB + MN = NB + 2MN > NB$ ce qui est absurde.

2.19 Axiome. Tout segment admet un milieu.

2.20 Définition. Soit $\mathcal{S} = [\widehat{AOB}]$ un secteur saillant ou plat. On appelle bissectrice¹⁷ de \mathcal{S} (ou de l'angle \widehat{AOB} par abus de langage) une demi-droite $[OX) \subset \mathcal{S}$ telle que l'on ait $\widehat{AOX} = \widehat{XOB}$.

On montre facilement l'unicité :

2.21 Lemme. La bissectrice d'un secteur, si elle existe, est unique. En particulier, la perpendiculaire à une droite en un point de cette droite, si elle existe, est unique.

Démonstration. Supposons que l'on ait deux bissectrices $[OX)$ et $[OY)$ et, par exemple, que Y est dans le secteur $[\widehat{AOX}]$. On a alors $\widehat{AOX} = \widehat{AOY} + \widehat{YOX} = \widehat{YOB} + \widehat{YOX} = \widehat{XOB} + 2\widehat{YOX} > \widehat{XOB}$ et c'est absurde.

Pour l'existence on ajoute un axiome :

2.22 Axiome. Tout secteur saillant ou plat admet une bissectrice.

2.23 Corollaire. Si d est une droite et O un point de d , il existe une unique droite d' perpendiculaire à d en O .

Démonstration. C'est l'existence de la bissectrice de l'angle plat.

2.4 Conséquences 2 : les cas d'égalité

2.4.1 Le premier cas d'égalité

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le premier cas d'égalité par la méthode de superposition d'Euclide, devenue rigoureuse :

2.24 Théorème. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que l'on ait : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. Alors il existe un mouvement u tel que $u(A) = A'$, $u(B) = B'$ et $u(C) = C'$ et on a les égalités $AC = A'C'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$. Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits **isométriques**¹⁸. Ce cas d'égalité sera dit **CAC** (côté-angle-côté).

17. Le mot ne figure dans aucun programme, mais cela ne signifie pas que la notion n'existe plus !

18. Ou égaux, ou superposables, ou congruents, etc. Voir la discussion du chapitre 1.

Démonstration. Il existe un mouvement u qui envoie B sur B' , la demi-droite $[BA]$ sur $[B'A']$ et le demi-plan limité par (BA) qui contient C sur celui limité par $(B'A')$ qui contient C' . Posons $A'' = u(A)$ et $C'' = u(C)$. Le point A'' est sur la demi-droite $[B'A']$ et, par conservation des longueurs par u , on a $B'A' = B'A''$, donc $A' = A''$ en vertu du report des longueurs 2.8. De même, on a $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C''}$ par conservation des angles, donc, par le report des angles 2.16, on a $[B'C'] = [B'C'']$. Mais, comme $B'C' = B'C''$, on conclut que l'on a $C' = C''$ par le report des longueurs.

2.25 Remarque. Si les angles égaux ne sont pas ceux compris entre les côtés égaux le résultat peut être en défaut, voir Annexe 2, Th. 9.1.

2.4.2 Le deuxième cas

On peut aussi prouver le second cas d'isométrie, soit par la méthode de superposition, soit en utilisant le premier cas et un raisonnement par l'absurde :

2.26 Théorème. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que l'on ait : $BC = B'C'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$. Alors il existe un mouvement u tel que $u(A) = A'$, $u(B) = B'$ et $u(C) = C'$ et on a les égalités $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. Ce cas d'égalité sera dit *ACA*.

2.4.3 Triangle isocèle

2.27 Proposition. Soit ABC un triangle. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) On a $AB = AC$.
- 2) On a $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

On dit alors que le triangle est **isocèle**.

Démonstration. Pour 1) \implies 2) on applique le cas CAC à BAC et CAB , pour 2) \implies 1) on applique ACA à ABC et ACB .

2.28 Remarque. Ce résultat permet de montrer le « cas d'égalité des triangles rectangles », voir exercice 7.13.

2.4.4 Le troisième cas d'égalité

2.29 Théorème. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que l'on ait : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$. Alors il existe un mouvement u tel que $u(A) = A'$, $u(B) = B'$ et $u(C) = C'$ et on a les égalités $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$. Ce cas d'égalité sera dit *CCC*.

Démonstration. Le lecteur comblera les manques¹⁹ de la preuve suivante (inspirée d'Euclide). On se ramène à montrer que si l'on a deux triangles ABC et ABD avec $AC = AD$, $BC = BD$ et C, D du même côté de (AB) on a $C = D$, voir Figure 2 ci-dessous. C'est une magnifique illustration de l'importance des questions de position. Supposons par exemple que B soit dans le secteur $[ACD]$. On a alors $\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD}$ par définition de la

19. Voir exercice 7.5.

somme des angles 2.14. On montre ensuite (voir exercice 2.29) que A est dans le secteur $[\widehat{BDC}]$ et on a $\widehat{BDC} = \widehat{BDA} + \widehat{ADC}$. Comme les triangles CAD et CBD sont isocèles, on a $\widehat{ACD} = \widehat{ADC}$ et $\widehat{BDC} = \widehat{BCD}$ par Prop. 2.27 et on en déduit $\widehat{ACB} + \widehat{BDA} = 0$, ce qui est absurde.

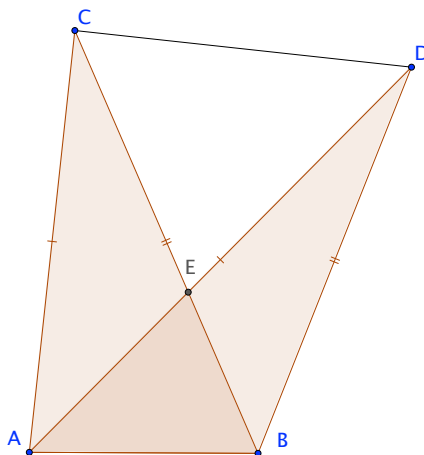


FIGURE 2 –

3 Applications des cas d'égalité : quelques propriétés essentielles

Grâce aux cas d'égalité, on peut montrer la plupart des résultats de géométrie élémentaire. Le lecteur en trouvera un certain nombre ci-dessous. Certains sont traités au chapitre 10 (la banque d'exercices) ou encore l'exercice 7.14.

3.1 Propriétés des médiatrices et des bissectrices

Voir les exercices 1.1 et 1.25 du chapitre 10.

3.2 Somme de deux angles d'un triangle, ordre des angles et des côtés, inégalité triangulaire

3.2.1 La somme de deux angles

Contrairement au fait que la somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat, le lemme suivant est valable même en géométrie hyperbolique :

3.1 Lemme. (Somme de deux angles) *Soit ABC un triangle. Alors, la somme de deux angles du triangle est strictement plus petite qu'un angle plat.*

Soit M le milieu de $[AC]$ et D le symétrique de B par rapport à M (pour sa définition, voir 5.4). Les triangles AMB et CMD sont isométriques, de sorte que l'on a $\widehat{A} = \widehat{MCD}$. Mais, comme A est dans le secteur \widehat{BCD} et D est dans le secteur ouvert \widehat{ACx} , l'angle $\widehat{BCD} = \widehat{C} + \widehat{MCD} = \widehat{C} + \widehat{A}$ est plus petit que π .

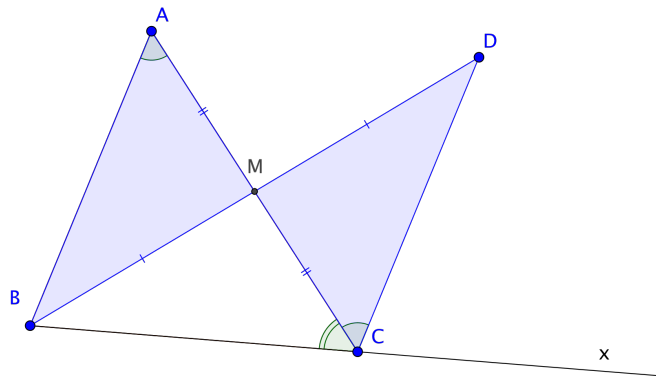


FIGURE 3 –

Démonstration. On note π l'angle plat et on montre que l'on a $\widehat{A} + \widehat{C} < \pi$.

Précisons les questions de position. On montre d'abord que D est dans le demi-plan limité par (BC) et contenant A . Comme M est dans $[CA]$ il est dans ce demi-plan, donc aussi toute la demi-droite $[BM)$, donc D . On montre ensuite, de même, que A est dans le demi-plan limité par (CD) qui contient B . On montre enfin que D est dans le demi-plan limité par (CA) qui ne contient pas B . C'est clair car $[BD]$ coupe (CA) en M .

On verra plus loin que ce lemme est lié aux angles alternes-internes.

3.2.2 Ses conséquences

Déjà, on a le résultat suivant, bien connu dès la sixième :

3.2 Proposition. *Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.*

Démonstration. Sinon, on aurait un triangle avec deux angles de somme π .

Ensuite, un corollaire du lemme de la somme de deux angles 3.1 est le résultat suivant, souvent absent de l'enseignement bien que très utile²⁰ :

3.3 Proposition. (Ordre angles et côtés) *Dans un triangle, les angles sont dans le même ordre que les côtés opposés : $\widehat{A} \leq \widehat{B} \leq \widehat{C} \iff BC \leq CA \leq AB$.*

Démonstration. Supposons par exemple²¹ $BC < CA$ et montrons $\widehat{A} < \widehat{B}$. On considère $B' \in [CA]$ tel que $B'C = BC$. Le triangle $BB'C$ est isocèle en C , de sorte que l'on a $\widehat{B'BC} = \widehat{BB'C}$. Comme B' est dans le segment $[CA]$, on a $\widehat{B'BC} \leq \widehat{ABC} = \widehat{B}$. Le lemme 3.1 appliqué dans ABB' montre que $\widehat{BAB'} = \widehat{A}$ est plus petit que le supplémentaire de $\widehat{AB'B}$ qui n'est autre que $\widehat{B'BC}$ d'où la conclusion. Comme souvent en géométrie, la réciproque découle du sens direct avec un raisonnement par l'absurde, voir Annexe 2 §11.

On peut maintenant prouver l'inégalité triangulaire :

²⁰. Pour mesurer l'importance de ce résultat dans la définition des triangles égaux, voir Annexe 2 §13.1.

²¹. Le cas d'égalité vient des propriétés du triangle isocèle.

3.4 Proposition. Si A, B, C sont trois points du plan on a $BC \leq AB + AC$ avec égalité si et seulement si A, B, C sont alignés avec A entre B et C .

Démonstration. On peut supposer $BC > AB$ sinon le résultat est évident. On porte $A' \in [BC]$ tel que $AB = A'B$. Il reste à voir que l'on a $A'C < AC$. Le triangle ABA' étant isocèle en B , ses angles à la base, en A et A' , sont aigus par le lemme de la somme de deux angles 3.1, donc l'angle $\widehat{AA'C}$ est obtus, donc le côté opposé AC est le plus grand et on a le résultat.

3.5 Remarques. 1) L'inégalité triangulaire est la première manifestation du fait que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points. Pour aller plus loin il faudrait définir la longueur d'une courbe ce qui est nettement plus délicat.

2) Si d est une droite et A un point, il résulte du lemme d'ordre des angles et des côtés 3.3 que le minimum de la distance AM pour $M \in d$ est atteint en le projeté orthogonal de A sur d .

3.3 Angles et parallèles

3.3.1 Définition des mots

La définition suivante précise le sens des mots²² :

3.6 Définition. Soient d, δ deux droites, $A, B \in d$, $C, D, E \in \delta$ tels que D soit du côté de B par rapport à (AC) et E de l'autre côté et soit F un point de (AC) , avec C entre A et F , voir Figure 4 ci-dessous. On dit alors que les angles \widehat{BAC} et \widehat{ACE} sont **alternes-internes** et que les angles \widehat{BAC} et \widehat{DCF} sont **correspondants**.

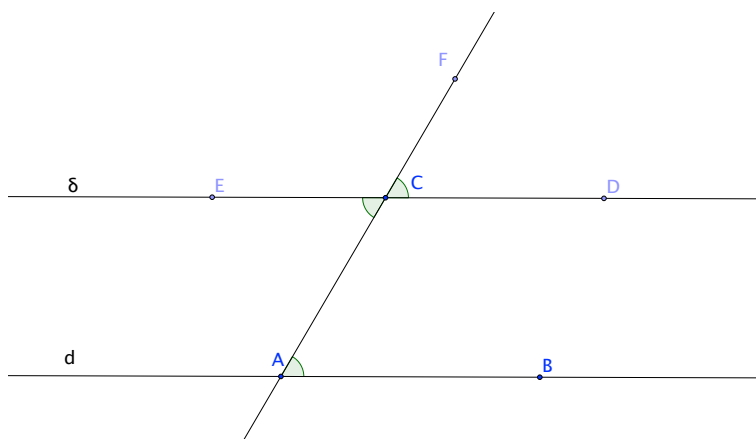


FIGURE 4 –

22. On ne suppose pas d et δ parallèles, mais on y pense très fort.

3.3.2 Les résultats

Le résultat sur la somme de deux angles 3.1 montre déjà que si deux angles en position d'alternes-internes sont égaux, les droites correspondantes sont parallèles :

3.7 Corollaire. *On reprend les notations de la définition 3.6. Si les angles \widehat{BAC} et \widehat{ACE} sont égaux²³, les droites d et δ sont parallèles.*

Démonstration. Sinon, ces droites se coupent en un point G , par exemple du côté de B et D (voir Figure 4). Mais alors, les angles $\widehat{GAC} = \widehat{BAC}$ et $\widehat{GCA} = \widehat{DCA}$ du triangle ACG sont supplémentaires, ce qui contredit le lemme de la somme de deux angles 3.1.

Maintenant, comme souvent en géométrie, la réciproque va donner l'autre sens du théorème, enfin... presque, car ici il y a besoin du fameux postulat d'Euclide (**P**) déjà vu en 1.3 :

3.8 Axiome. (Le postulat d'Euclide) Soit d une droite et A un point du plan. Par A passe une et une seule parallèle à d .

Avec cet axiome, on a :

3.9 Proposition. (Angles et parallèles) *On reprend les notations de la définition 3.6. Si les droites d et δ sont parallèles, les angles alternes-internes et correspondants sont égaux : $\widehat{BAC} = \widehat{ACE}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{DCF}$.*

Démonstration. On suppose d et δ parallèles. Si les angles alternes-internes \widehat{BAC} et \widehat{ACE} ne sont pas égaux, supposons par exemple $\widehat{BAC} > \widehat{ACE}$. On trace une demi-droite $[AB')$, strictement contenue dans le secteur \widehat{BAC} telle que l'on ait $\widehat{B'AC} = \widehat{ACE}$. Mais alors, comme ces angles sont en position d'alternes-internes, c'est que les droites δ et $d' = (AB')$ sont parallèles et cela contredit le postulat d'Euclide car, par B , passent deux parallèles d et d' à δ .

On obtient comme corollaire les autres propriétés liant perpendiculaires et parallèles :

3.10 Corollaire. 1) *Soient d, d' deux droites parallèles et soit δ une droite perpendiculaire à d . Alors elle est aussi perpendiculaire à d' .*

2) *Si d est une droite et O un point du plan, il existe une unique droite d' perpendiculaire à d en O .*

Démonstration. Le point 1) provient de la propriété des angles alternes-internes. Pour 2), si O n'est pas sur d , on choisit un point $A \in d$, on trace la perpendiculaire d'' à d passant par A (voir Cor. 2.29). Alors, la parallèle à d'' passant par O convient.

3.11 Remarque. On notera que les résultats 3.2 et 3.7 ne font pas appel au postulat d'Euclide, contrairement à 3.10.1 et 3.9.

23. Ou \widehat{BAC} et \widehat{DCF} .

3.3.3 Commentaire

Bien entendu, il n'est pas raisonnable d'évoquer le postulat d'Euclide au collège et il nous semble que les égalités d'angles précédentes sont assez naturelles pour que les élèves les admettent sans rechigner. Peut-être que la propriété des angles correspondants est la plus naturelle²⁴, surtout si on la formule en disant que deux droites parallèles sont également inclinées sur chaque sécante ? On passe ensuite aux alternes-internes en notant que \widehat{ACE} et \widehat{DCF} sont opposés par le sommet donc égaux (rappelons l'argument pour montrer cela : ils ont même supplémentaire \widehat{ACD}).

3.3.4 Une application fondamentale : la somme des angles d'un triangle

3.12 Théorème. *La somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat.*

Démonstration. On trace la parallèle à (AB) passant par C et la figure ci-dessous montre que c'est une conséquence des propriétés des angles et des parallèles 3.9.

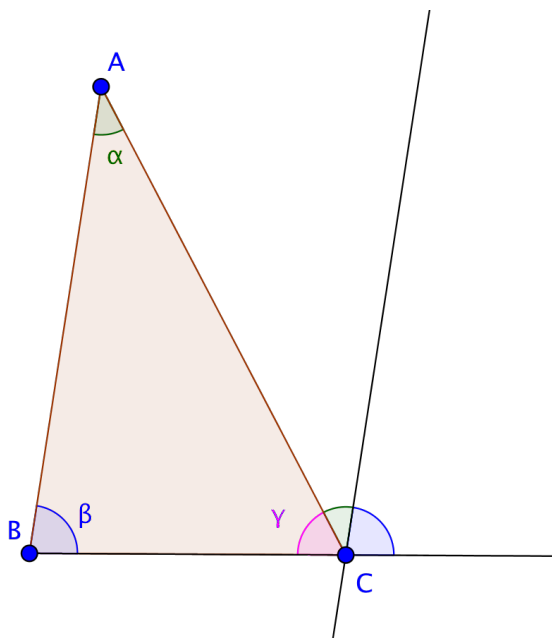


FIGURE 5 –

3.4 Parallélogrammes

3.4.1 Définition du parallélogramme

3.13 Définition. *Soit $ABCD$ un quadrilatère (c'est-à-dire la donnée de quatre points distincts et non alignés). On dit que $ABCD$ est un parallélogramme si les « côtés opposés » (AB) et (CD) d'une part et (AD) et (BC) d'autre part, sont parallèles.*

²⁴. Intuitivement, cela correspond au fait que la transformation qui sous-tend l'égalité des angles correspondants est une translation, plus visuelle que la symétrie centrale qui sous-tend l'égalité des alternes-internes.

On notera qu'un parallélogramme est automatiquement convexe, donc que ses diagonales se coupent, voir Exercice 7.3.

3.4.2 Deux exercices pour montrer les propriétés du parallélogramme

3.14 Exercice. Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Montrer que « les côtés opposés sont égaux » : $AB = CD$ et $AD = BC$. (On les incorporera dans deux triangles convenablement choisis.) Montrer que les angles opposés sont égaux : $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.

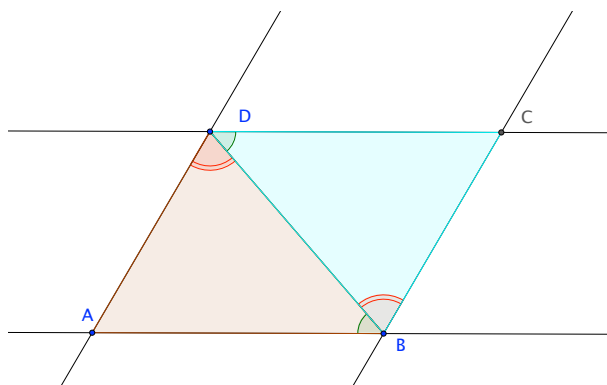


FIGURE 6 –

Des triangles pertinents sont ABD et CDB , dans cet ordre (mais on peut prendre aussi ABC et CDA). Ils ont le côté $[BD]$ en commun et deux angles égaux : $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ (alternes-internes avec les parallèles (AB) et (CD) et la sécante (BD)) et $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ (alternes-internes avec les parallèles (AD) et (BC) et la sécante (BD)). Ils sont donc isométriques par le cas d'égalité ACA et on en déduit les égalités des côtés homologues : $AD = BC$ et $AB = CD$. On a aussi les angles en prime.

3.15 Exercice. Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Soit I le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Montrer que I est milieu de $[AC]$ et de $[BD]$ (« les diagonales se coupent en leur milieu »). (On montrera que deux triangles convenablement choisis sont isométriques.)

Il y a deux choix possibles de triangles, avec des preuves analogues : AID et CIB ou AIB et CID . Utilisons par exemple les premiers²⁵. Ils ont les côtés AD et BC égaux (par l'exercice précédent) et les angles égaux $\widehat{ADI} = \widehat{CBI}$ et $\widehat{DAI} = \widehat{BCI}$. En effet, on a $\widehat{ADI} = \widehat{ADB}$ et $\widehat{CBI} = \widehat{CBD}$ et ces angles sont alternes-internes pour les parallèles (AD) et (BC) et la sécante (BD) . La preuve est identique pour les autres.

On en déduit $AI = CI$ et $DI = BI$ d'où le résultat.

²⁵. Avec la figure donnée, les autres sont peut-être plus simples pour des élèves à cause de la position horizontale des parallèles.

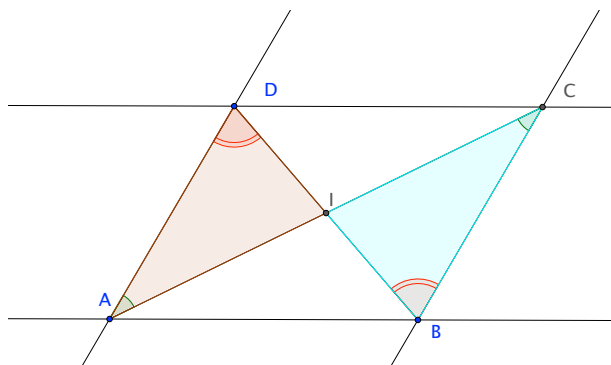


FIGURE 7 –

3.16 Remarque. Pour le théorème « mal aimé » (si un quadrilatère convexe a deux côtés opposés parallèles et égaux c'est un parallélogramme), voir exercice 7.4.

3.17 Remarque. Bien entendu, on peut aussi prouver les propriétés du parallélogramme à l'aide de la symétrie centrale, mais il faut pour cela disposer de ses propriétés (elle est involutive, conserve les longueurs et transforme une droite en une droite parallèle, voir ci-dessous Prop. 5.5) et utiliser de façon essentielle les relations ensemblistes entre droites et points. Nous avons expliqué plus haut pourquoi nous préférons les preuves par les triangles isométriques. Avec la définition 3.13 (les côtés parallèles) on raisonne comme suit. Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit O le milieu de $[AC]$. On considère la symétrie σ_O . Elle échange A et C , donc transforme la droite (AB) en une droite passant par C et parallèle à (AB) , donc en (CD) . De même, la droite (CB) est transformée par σ_O en une droite passant par A et parallèle à (CB) , donc en (AD) . Comme B est le point d'intersection des droites (AB) et (CB) , son image par σ_O est l'intersection des images de ces droites, donc de (CD) et (AD) . C'est donc le point D . On en déduit d'abord que O est le milieu de $[BD]$ (les diagonales se coupent en leur milieu), puis que l'on a $AB = CD$ et $AD = CB$ par conservation des longueurs par la symétrie σ_O .

4 Axiomes des aires

On donne seulement un bref aperçu de la question, renvoyant au chapitre 7 de [Perrin, 2011] pour des détails. On suppose que l'on a fixé une unité de longueur.

4.1 Homothéties

On aura besoin de la notion d'homothétie, ou d'agrandissement-réduction.

4.1 Définition. 1) Soit O un point et k un nombre réel. L'homothétie de centre O et de rapport k est l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui à un point M associe, si k est positif (resp. négatif), l'unique point M' situé sur la demi-droite $[OM)$ (resp. sur la demi-droite opposée) et tel que $OM' = |k| OM$.

2) On dit que l'on passe d'une figure²⁶ F à une figure F' par agrandissement-réduction

26. Ce mot est pris ici au sens de partie du plan.

(ou encore par similitude) s'il existe une homothétie h et un mouvement u tels que $F' = h \circ u(F)$.

4.2 Remarques. 1) Au collège, on ne donne la définition d'une homothétie qu'en troisième, mais l'idée d'agrandissement et réduction est très présente dès le début du cycle 4 et même avant, en lien avec la proportionnalité.

2) Bien entendu, cette définition s'exprime plus simplement en termes de vecteurs, mais nous avons fait le choix de ne pas les utiliser ici.

4.2 Les axiomes des aires

On peut montrer que l'axiome suivant est conséquence des autres (voir [Perrin, 2011]) :

4.3 Axiome. Il existe une application μ appelée **mesure des aires planes**, définie pour toutes les parties bornées usuelles de \mathcal{P} et à valeurs dans \mathbf{R}^+ , vérifiant les propriétés suivantes :

0) si C est un carré de côté de longueur unité, on a $\mu(C) = 1$,

1) μ est **simplement additive** : si l'on a des parties A, B **disjointes** on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

2) μ est **invariante par les mouvements** : si A est une partie et si g est un mouvement on a $\mu(g(A)) = \mu(A)$,

3) μ est **homogène** : si A est une partie et si h est une homothétie de rapport λ on a $\mu(h(A)) = \lambda^2 \mu(A)$.

4.4 Remarques. 1) On a défini ici une mesure. L'aire est la grandeur associée. Par exemple, si l'unité est un carré d'un mètre de côté (le m^2), et si la mesure d'une partie avec cette unité est 5,8, son aire est $5,8 \text{ m}^2$, mais c'est aussi 58000 cm^2 .

2) Les propriétés 1) et 2) signifient que l'aire ne change pas par découpage et recollement.

4.3 Calcul de l'aire du rectangle et du triangle

Les axiomes permettent de montrer facilement que les aires d'un point et d'un segment sont nulles, donc que l'invariance par découpage et recollement vaut aussi pour des parties « presque » disjointes, c'est-à-dire n'ayant en commun qu'un nombre fini de points et de segments. L'homogénéité donne aussitôt le fait que l'aire d'un carré de côté de longueur a est a^2 . On en déduit que celle d'un rectangle de côtés de longueurs b, c est égale à $b \times c$ en utilisant la figure 8 ci-dessous et l'identité $(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$, puis que l'aire d'un triangle de base a et de hauteur h vaut $\frac{1}{2}a \times h$ par découpage, voir figure 9. Pour toutes précisions sur ces points on renvoie à [Perrin, 2011].

4.4 Les « lemmes du collège »

Le calcul de l'aire du triangle²⁷ donne aussitôt les lemmes suivants :

27. Voir [Perrin, 2011] ou la banque d'exercices du ch. 10 pour des preuves indépendantes de ce calcul.

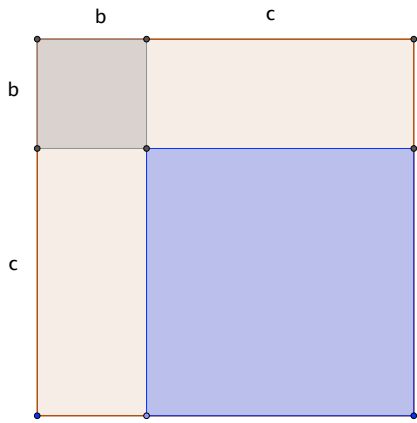


FIGURE 8 –

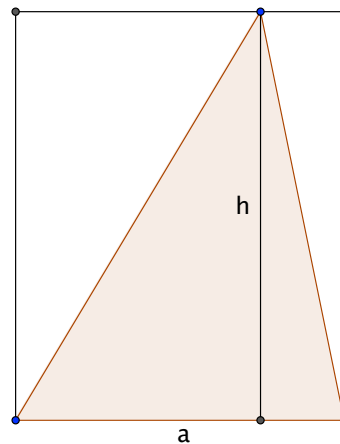


FIGURE 9 –

4.5 Théorème. 1) (**Demi-parallélogramme**) Soit $P = ABCD$ un parallélogramme. Les diagonales divisent P en deux triangles de même aire.

2) (**Médiane**) Soit ABC un triangle et M le milieu de $[BC]$. Les triangles ABM et ACM ont même aire.

3) (**Parallèle ou trapèze**) Soient ABC et ABD deux triangles de même base $[AB]$ et tels que les sommets C, D sont sur une même parallèle à la base. Alors ces triangles ont même aire.

4) (**Proportions**) Soient ABC et ADE deux triangles dont les bases $[BC]$ et $[DE]$ sont alignées. Alors le rapport des aires des triangles est égal au rapport de leurs bases.

5) (**Chevron**) Soit ABC un triangle et M un point du plan, distinct de A , tel que (AM) coupe (BC) en A' . Alors, le rapport des aires de ABM et ACM est égal à $A'B/A'C$.

4.5 Applications

On obtient une foule de résultats à partir du théorème précédent : Thalès, le concours des médianes du triangle, Céva, Ménélaüs, en fait, tous les résultats de la géométrie **affine** du plan. Cette méthode remonte à Euclide, mais on en donne seulement ici un bref aperçu pour les deux théorèmes les plus importants du collège : Thalès et Pythagore. On se reportera à la banque d'exercices du chapitre 10 ou à [Perrin, 2011] pour d'autres exemples.

4.5.1 Thalès

4.6 Théorème. Soit ABC un triangle. Soient $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$. On suppose $(B'C')$ parallèle à (BC) . On a les égalités suivantes :

$$\frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'}, \quad \frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}, \quad \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Démonstration. Voir figure ci-dessous. Pour la première égalité, on a $\frac{AB'}{BB'} = \frac{\mathcal{A}(AB'C')}{\mathcal{A}(BB'C')}$

et $\frac{AC'}{CC'} = \frac{\mathcal{A}(AC'B')}{\mathcal{A}(CC'B')}$ par le lemme des proportions et la conclusion vient du lemme du trapèze : $\mathcal{A}(BB'C') = \mathcal{A}(CC'B')$. Les deux suivantes se déduisent de celles-ci par manipulation de fractions, mais on peut aussi les prouver directement en utilisant les aires. Pour l'égalité avec $B'C'$ on trace la parallèle à (AB) passant par C' , qui recoupe (BC) en C'' et on applique les résultats précédents avec $(C'C'')$ (ou on passe par les aires). Pour une autre preuve, voir Annexe 2, §10.

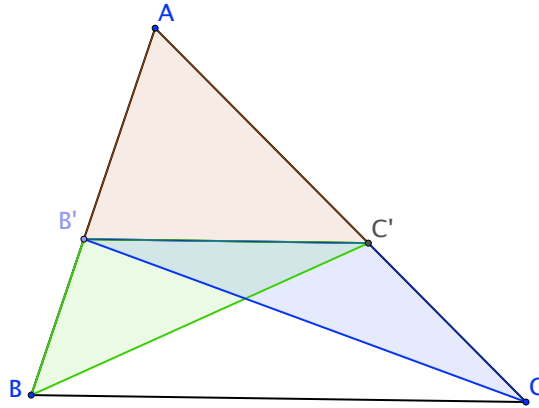


FIGURE 10 –

On déduit de Thalès et des cas d'isométrie deux corollaires importants. Le premier concerne les triangles semblables, voir aussi Exercice 7.10 :

4.7 Corollaire. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Alors, on a $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ (les triangles sont semblables).

Démonstration. On considère $B'' \in [A'B']$ (resp. $C'' \in [A'C']$) tel que $A'B'' = AB$ (resp. $A'C'' = AC$). Les triangles ABC et $A'B''C''$ sont isométriques par le cas d'égalité CAC . On en déduit que l'on a $\widehat{B} = \widehat{B''} = \widehat{B'}$ de sorte que $(B''C'')$ est parallèle²⁸ à $(B'C')$ et on conclut par Thalès.

Le second corollaire porte sur la définition du cosinus²⁹ :

4.8 Corollaire. Soit α un angle et ABC un triangle rectangle en B tel que $\widehat{BAC} = \alpha$. Le rapport $\frac{AB}{AC}$ est indépendant du choix du triangle ABC et on le note $\cos \alpha$.

Démonstration. Si l'on a un autre triangle $A'B'C'$ rectangle avec le même angle α on a $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\widehat{B} = \widehat{B'}$. En vertu du corollaire 4.7 on a $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ donc aussi $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

28. Voir le lien entre angles et parallèles 3.7.

29. Mais la même propriété vaut pour le sinus et la tangente.

4.5.2 Pythagore

Soient b, c deux longueurs. On considère un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs b, c et l'hypoténuse a . On va montrer que l'on a $b^2 + c^2 = a^2$. La somme des carrés des deux longueurs est apparue dans la figure 8 dans laquelle on va découper les rectangles en deux triangles et les déplacer, voir figure 11.

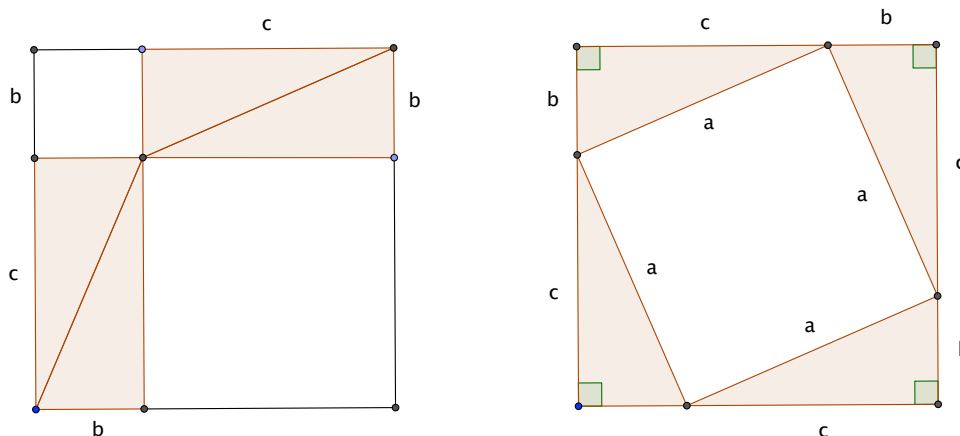


FIGURE 11 –

Expliquons les figures ci-dessus.

1) En vertu du premier cas d'égalité (*CAC*), il y a, à isométrie près, un unique triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont b, c . Son hypoténuse a est donc bien déterminée, ainsi que ses angles aigus et son aire. On note β l'angle aigu qui fait face à b et γ celui face à c et on a $\beta + \gamma = 90^\circ$. On parlera de triangles rectangles de type b, c .

2) On considère un carré de côté $b + c$ et les deux partages de la figure 11. Dans le carré de gauche on mène les perpendiculaires aux côtés aux points situés à la distance b du sommet en haut à gauche. On retrouve la figure 8 et on a deux carrés de côtés b et c et deux rectangles $b \times c$, chacun partagé en deux triangles rectangles de type b, c .

3) Dans le carré de droite, toujours de côté $b + c$, on a placé quatre points sur les côtés à la distance b (et donc c de l'autre côté) des sommets. Les quatre triangles rectangles ainsi déterminés sont de type b, c . Le quadrilatère central est alors un carré. En effet, ses côtés sont tous de longueur a et ses angles sont droits comme supplémentaires de la somme $\beta + \gamma$ des angles aigus des triangles rectangles.

4) On conclut en notant que l'aire du carré de côté a est égale à la somme des aires des carrés de côtés b, c car toutes deux sont différences de l'aire du grand carré et de celles des quatre triangles rectangles. On a donc $a^2 = b^2 + c^2$.

5 Isométries, similitudes, trigonométrie, etc.

5.1 Les symétries

L'existence des symétries centrales et axiales est une conséquence de l'axiome (**G**), voir exercices 7.8 et 7.9, mais on peut, avec ce qui précède, en donner des définitions élémentaires et montrer leurs principales propriétés.

5.1.1 Symétrie axiale

5.1 Proposition-Définition. Soit d une droite. Pour chaque point M non situé sur d il existe un unique point M' tel que d soit médiatrice de $[MM']$. L'application τ_d qui envoie M sur M' et fixe les points de d est appelée **symétrie d'axe d** (ou réflexion d'axe d).

Démonstration. Vu la définition de la médiatrice (voir exercice 1.1 du chapitre 10), il suffit de considérer la perpendiculaire à d passant par M (voir cor. 3.10), elle coupe d en H , on reporte (c'est l'axiome de report 2.8) la longueur HM sur la demi-droite opposée à $[HM)$ et on obtient M' .

5.2 Proposition. Une symétrie axiale est involutive³⁰, elle conserve l'alignement, le parallélisme, les longueurs et les angles.

Démonstration. Il est clair que τ_d est involutive, donc une bijection.

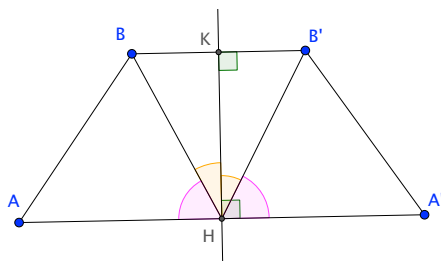


FIGURE 12 –

Montrons la conservation des longueurs. Soient A, B deux points et A', B' leurs images par la réflexion τ_d , H, K les milieux de $[AA']$ et $[BB']$. Les triangles BHK et $B'HK$ sont égaux par *CAC*. On en déduit l'égalité des longueurs $BH = B'H$ et celles des angles $\widehat{BHK} = \widehat{B'HK}$, puis celles de leurs complémentaires $\widehat{AHB} = \widehat{A'HB'}$. Mais alors les triangles AHB et $A'HB'$ sont égaux par *CAC* et on en déduit $AB = A'B'$.

Les autres propriétés résultent du lemme suivant :

5.3 Lemme. Soit $f : E \rightarrow E$ une application bijective qui conserve les longueurs. Alors elle conserve aussi l'alignement et les angles.

Démonstration. Soient A, B, C trois points et A', B', C' leurs images. Si A, B, C sont alignés, avec, par exemple, B entre A et C , on a $AC = AB + BC$. Par conservation des longueurs on en déduit $A'C' = A'B' + B'C'$ ce qui montre que A', B', C' sont alignés avec B' entre A' et C' en vertu du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire Prop. 3.4.

Si A, B, C ne sont pas alignés, le cas d'égalité *CCC* montre que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux, donc que l'on a $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

5.1.2 Symétrie centrale

La proposition suivante est évidente :

30. C'est-à-dire égale à son inverse.

5.4 Proposition-Définition. Soit O un point. Pour chaque point M il existe un unique M' tel que O soit le milieu de $[MM']$. L'application σ_O qui envoie M sur M' est appelée **symétrie centrale de centre O** .

5.5 Proposition. Une symétrie centrale est involutive, conserve l'alignement, le parallélisme, les longueurs et les angles. Elle laisse invariantes les droites passant par le centre et transforme une droite en une droite parallèle.

Démonstration. L'application est évidemment involutive. Soient A, B deux points et A', B' leurs symétriques par rapport à O . Les triangles AOB et $A'O B'$ sont égaux par CAC (on utilise les angles opposés par le sommet, voir remarque 2.15.2) et on en déduit $AB = A'B'$. La conservation de l'alignement et des angles vient alors du lemme 5.3. Le fait que l'image d'une droite est une droite parallèle résulte de l'égalité des angles alternes-internes $\widehat{BAO} = \widehat{B'A'O}$ et de 3.7.

5.2 Translation

Une définition raisonnable de la translation nécessite de définir les vecteurs et cela n'est pas si facile. Il y a deux voies classiques : la voie « des physiciens » à partir des notions de direction, sens et longueur et la voie de l'équipollence. Voir par exemple [Perrin, 2006] §2.6 pour une discussion.

5.6 Remarque. En termes de mouvement, la translation de vecteur \overrightarrow{AB} ($A \neq B$) est l'unique mouvement qui envoie A sur B , la demi-droite $[AB)$ sur la demi-droite opposée à $[BA)$ et qui conserve l'un des demi-plans limités par (AB) .

5.3 Rotation

Là encore, il n'est pas si facile de définir une rotation car elle nécessite la notion d'angle orienté.

5.7 Remarques. 1) En termes de mouvement, la rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est l'unique mouvement qui fixe O , qui envoie la demi-droite $[OA)$ sur $[OB)$ et le demi-plan limité par (OA) qui contient B sur celui limité par (OB) qui ne contient pas A .

2) On peut montrer facilement que les mouvements sont exactement les composées de symétries axiales voir Exercice 7.11.

5.4 Similitude

Une similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie. On peut parler de triangles semblables dès que l'on a évoqué les triangles isométriques en notant que c'est le cas où trois invariants (les trois angles) ne définissent pas des triangles isométriques, mais seulement « de même forme ». Le point principal est alors le premier cas de similitude 4.7.

5.5 Trigonométrie

Au collège, on se contentera de définir cosinus, sinus et tangente dans le triangle rectangle, mais il est indispensable de montrer que ces nombres ne dépendent que de l'angle et pas du triangle dans lequel on opère, voir 4.8.

5.6 Coordonnées

Une fois choisie une unité de longueur, on a la notion de repère orthonormé : une origine O et deux points I, J tels que (OI) et (OJ) soient perpendiculaires et les longueurs OI et OJ égales à l'unité. Si M est un point du plan, on définit alors ses coordonnées dans ce repère en prenant les abscisses de ses projetés orthogonaux sur (OI) et (OJ) . À partir de là, on peut résoudre tous les problèmes de géométrie par le calcul ...

6 Le bréviaire du professeur de collège

6.1 Des propriétés admises

On résume ici les points que l'on peut admettre sans crainte au début du collège :

- L'axiome d'incidence (par deux points passe une droite et une seule), la définition des parallèles, le postulat d'Euclide.
- Les propriétés d'ordre et de position : entre, de part et d'autre, du même côté, qui donnent naissance aux notions de segments, demi-droites, demi-plans, secteurs. Sur ce sujet, on admettra que l'on peut se fier à ce que l'on voit sur la figure.
- L'existence des aires et les propriétés de découpage et recollement ainsi que le comportement par agrandissement-réduction (en particulier l'aire du carré).
- L'homogénéité du plan, qui revient à la possibilité de déplacer les figures. C'est ce qui fonde la notion de longueur d'un segment (et celle d'angle d'un secteur) : deux segments ont même longueur si l'on peut transporter l'un sur l'autre.
- La notion d'angle plat, d'angle droit comme moitié de plat, de supplémentaire et de complémentaire. On admet les propriétés liant perpendiculaires et parallèles ainsi que les propriétés des angles alternes-internes et correspondants.
- L'inégalité triangulaire³¹.

6.2 Des résultats qu'il est souhaitable de démontrer

- En sixième, on justifie la formule d'aire du rectangle. Il y a deux approches, toutes deux fondamentales, soit par pavage en se limitant aux côtés entiers, voire à certains côtés rationnels, soit par découpage à partir l'aire du carré comme ci-dessus, voir la discussion dans [Perrin, 2011]. On montre aussi la formule de l'aire du triangle (par découpage comme ci-dessus).
- En cinquième, on prouve que la somme des angles du triangle est un angle plat à partir des propriétés des angles alternes-internes et correspondants. On justifie le premier

31. Une autre propriété importante est celle de l'ordre des angles et des côtés, voir ci-dessus.

cas d'égalité des triangles CAC par la méthode de superposition³². On en déduit (ou on admet) les autres cas d'égalité et les propriétés du triangle isocèle. On montre les propriétés des parallélogrammes à partir des cas d'isométrie.

- En quatrième on montre le théorème de Pythagore, par exemple avec le découpage donné ci-dessus. On dégage les lemmes de la médiane et de la parallèle à partir de la formule de l'aire du triangle et on en déduit le théorème de la droite des milieux.

- En troisième on énonce le lemme des proportions et on en déduit Thalès, puis les propriétés des triangles semblables et l'indépendance des rapports trigonométriques du triangle dans lequel ils sont pris.

6.3 La question des symétries

Actuellement on introduit les symétries axiales en sixième en admettant leurs propriétés, puis les symétries centrales en cinquième, là encore en admettant leurs propriétés. Le plus souvent, on montre les propriétés des parallélogrammes avec les symétries centrales. Nous avons abondamment expliqué notre préférence pour une entrée par les cas d'isométrie, mais il y a plusieurs compromis possibles dont le mérite est de ne pas admettre toutes les propriétés.

- On admet en sixième les propriétés des symétries axiales mais on s'en sert pour prouver le cas d'isométrie CAC . Pour cela, on raisonne comme dans la preuve de CAC en 2.24, mais en utilisant les symétries : on fait d'abord la symétrie par rapport à la médiatrice de $[BB']$. Alors B va en B' , A en A_1 et C en C_1 . On fait ensuite la symétrie par rapport à la médiatrice de $[C'C_1]$. Comme on a $BC = B'C_1 = B'C'$, B' est sur cette médiatrice donc ne bouge pas et C_1 va en C' . Enfin A_1 va sur A'' qui vérifie $A''B' = A'B'$ et $\widehat{A''B'C'} = \widehat{A_1B'C_1} = \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. C'est donc A'' ou son frère symétrique par rapport à $(B'C')$, auquel cas il faut encore faire la symétrie par rapport à $(B'C')$.

- On montre que la symétrie de centre O s'obtient en faisant deux symétries axiales d'axes perpendiculaires se coupant en O . Cela permet de montrer que la symétrie centrale conserve les longueurs et les angles.

7 Exercices

7.1 Exercices sur les axiomes de position

Rappelons qu'un triangle est la donnée de trois points non alignés et que son intérieur est l'intersection des demi-plans ouverts limités par (BC) , (CA) , (AB) et contenant respectivement A, B, C .

7.1 Exercice. Montrer qu'un segment $[AB]$ non réduit à un point est infini. (Indication : considérer une demi-droite $[BC)$ et un point D dessus tel que C soit entre B et D , puis un point $E \in (AD)$ tel que A soit entre E et D et montrer que A, B sont de part et d'autre de (EC) . Cela atteste qu'il existe $M \in]AB[$ et on réitère l'opération.)

32. On peut aussi le déduire des propriétés des symétries axiales, voir ci-dessous. Si l'on suit les repères de progression proposés par le ministère, ce point est reporté en quatrième.

7.2 Exercice. 1) (Axiome de Pasch) Soit ABC un triangle et d une droite passant par $M \in]BC[$. Montrer que d coupe $[AB]$ ou $[AC]$.

2) Soit ABC un triangle et O un point intérieur au triangle. Montrer que la demi-droite $[AO)$ coupe le segment ouvert $]BC[$ (utiliser le lemme CF 1.11).

3) Soit ABC un triangle et soient B' et C' des points de $]AC[$ et $]AB[$ respectivement. Montrer que les segments $[BB']$ et $[CC']$ se coupent en un point G (voir 1.12) et que la droite (AG) coupe le segment $[BC]$. *Ce résultat permet de montrer que deux médianes d'un triangle se coupent en un point G .*

Un quadrilatère est un quadruplet (A, B, C, D) de points du plan, **distincts et tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés**. Les côtés sont les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et les diagonales sont $[AC]$ et $[BD]$. On note $Q = ABCD$.

7.3 Exercice. Soit $Q = ABCD$ un quadrilatère. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes (et on dit alors que Q est convexe) :

i) Si $[MN]$ est un côté de Q , les deux autres sommets sont dans le même demi-plan limité par (MN) .

ii) Les diagonales de Q se coupent.

Pour montrer i) \implies ii) on appliquera le lemme CF 1.11 au secteur \widehat{BAD} par exemple. Pour ii) \implies i) on utilisera le lemme de la demi-droite 1.8.

7.4 Exercice. Soit $ABCD$ un quadrilatère **convexe**. On suppose que les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et de même longueur. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Plusieurs preuves sont possibles, mais toutes utilisent un argument de position lié à la convexité de $ABCD$. a) On appelle O le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ et on montre qu'il est au milieu en utilisant les triangles OAB et OCD . b) On mène la parallèle à (AD) passant par B qui recoupe (CD) en C' et on montre que l'on a $C = C'$. c) On introduit le milieu O de $[AC]$ et on utilise la symétrie centrale σ_O .

7.5 Exercice. Cet exercice précise le raisonnement utilisé dans la preuve de CCC 2.29. On rappelle que l'on a deux triangles ABC et ABD avec C, D du même côté de (AB) . On suppose B dans le secteur \widehat{ACD} et on veut montrer que A est dans le secteur \widehat{BDC} .

1) Montrer que B et A sont du même côté de (CD) (utiliser la définition des secteurs).

2) a) Montrer que A et D sont de part et d'autre de (BC) (utiliser le lemme CF 1.11). Le segment $[AD]$ coupe donc (BC) en E .

b) Montrer que E est dans la demi-droite $[BC)$ (utiliser le fait que C, D sont dans le même demi-plan limité par (AB) et le lemme de la demi-droite 1.8).

c) Montrer que C et E , puis E et A , puis A et C sont du même côté de (BD) .

d) Conclure.

7.2 Autour des mouvements

7.6 Exercice. Le but de l'exercice est de montrer que l'axiome de report 2.8 est conséquence de l'axiome **(G)**.

1) Montrer que si un mouvement u fixe A , transforme $[AB)$ en elle-même et l'un des demi-plans limités par (AB) en l'autre, il échange les demi-plans et fixe les points de

(AB) . (On montrera que l'on a $u^2 = \text{Id}$ et on utilisera la monotonie de $u|_{(AB)}$. On dit que u est la symétrie par rapport à (AB) .)

2) Montrer l'axiome 2.8. (L'existence de M est facile. Pour l'unicité, si l'on a $OM = OM'$ il existe un mouvement u qui fixe O et envoie M sur M' . Selon que u conserve les demi-plans limités par (OM) ou les échange c'est l'identité ou la symétrie par rapport à (AB) , mais dans les deux cas on a $M = M'$.)

3) Montrer de manière analogue l'axiome de report des angles 2.16.

7.7 Exercice. Cet exercice permet de montrer, uniquement avec l'axiome **(G)** 2.2 que deux angles droits sont égaux.

On considère deux angles droits \widehat{ABC} et \widehat{DEF} . Cela signifie, voir 2.11, que, si A' (resp. D') est un point de la demi-droite opposée à $[BA)$ (resp. $[DE)$), on a les égalités $\widehat{ABC} = \widehat{A'BC}$ et $\widehat{DEF} = \widehat{D'EF}$ ou encore qu'il existe des mouvements u (resp. v) tels que $u(B) = B$, $u([BA)) = [BA')$ et $u([BC)) = [BC)$ (resp. $v(E) = E$, $v([ED)) = [ED')$ et $v([EF)) = [EF)$).

0) Montrer que v transforme le demi-plan limité par (EF) contenant D en son opposé.

1) Montrer qu'il existe un mouvement f tel que $f(B) = E$, $f([BA)) = [ED)$ et qui envoie le demi-plan limité par (AB) contenant C sur celui limité par (DE) contenant F .

2) Montrer que l'on a $v = f \circ u \circ f^{-1}$.

3) Soit δ la demi-droite $f([BC))$. Montrer que l'on a $v(\delta) = \delta$.

4) Montrer que l'on a $\delta = [EF)$ (utiliser 0)) et conclure.

Les deux exercices suivants montrent directement l'existence des symétries centrales et axiales.

7.8 Exercice. Soit O un point. Montrer qu'il existe un mouvement σ_O unique qui vérifie les propriétés suivantes :

0) On a $\sigma_O^2 = \text{Id}$.

1) On a $\sigma_O(O) = O$. Si M est un point distinct de O et si $M' = \sigma_O(M)$, O est milieu de $[MM']$.

Indication : on choisit une droite d passant par O et il suffit de prendre le mouvement qui fixe O et échange les demi-droites portées par d et d'origine O ainsi que les demi-plans limités par d .

On reconnaît la symétrie centrale de centre O .

7.9 Exercice. Soit d une droite. Montrer qu'il existe un mouvement τ_d unique qui vérifie les propriétés suivantes :

0) On a $\tau_d^2 = \text{Id}$.

1) L'application τ_d fixe les points de d . Si M n'est pas sur d et si $M' = \tau_d(M)$, d est la médiatrice de $[MM']$.

Indication : on choisit un point O de d et il suffit de prendre le mouvement qui fixe O ainsi que les demi-droites portées par d et d'origine O et échange les demi-plans limités par d .

On reconnaît la symétrie axiale (ou réflexion) d'axe d .

7.10 Exercice. Cet exercice permet de prouver les autres cas de similitude.

1) Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose que leurs côtés sont proportionnels : $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{AB}{A'B'}$. Alors les triangles sont semblables (donc ont leurs angles respectivement égaux). (Indication : porter sur $[AB)$ et $[AC)$ des points B'' et C'' tels que $AB'' = A'B'$ et $AC'' = A'C'$, utiliser la réciproque de Thalès et les triangles isométriques.)

2) Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose que l'on a $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{AB}{A'B'}$. Alors les triangles sont semblables (donc ont leurs autres angles égaux et les autres côtés proportionnels).

7.11 Exercice. On se propose de montrer que toute isométrie plane (ou tout mouvement) est produit d'au plus trois réflexions. Soit u une isométrie.

1) On suppose que u fixe trois points non alignés. Montrer que u est l'identité. (Si $M \neq M' = u(M)$, considérer la médiatrice de $[MM']$.)

2) On suppose que u fixe deux points distincts A, B . Montrer que u est l'identité ou la réflexion d'axe (AB) . (Si $M' = u(M) \neq M$, composer par $\tau_{(MM')}$ pour se ramener à 1.)

2) On suppose que u fixe un point A . Montrer que u est produit d'au plus deux réflexions d'axes passant par A . (Même méthode.)

3) Conclure.

7.3 Compléments

7.12 Exercice. Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cercles de centres O, O' et de rayons R, R' respectivement. On suppose que l'on a $|R' - R| < OO' < R + R'$. Montrer que ces deux cercles ont deux points communs M, M' . (Pour analyser la situation, on introduira le point d'intersection H de (OO') et (MM') et on calculera $OH, O'H, HM$ en fonction de R, R', OO' grâce à Pythagore. On en déduira l'existence de H , puis celle de M, M' grâce à l'axiome de report 2.8. On précisera les axiomes utilisés.)

7.13 Exercice. Montrer le cas d'égalité des triangles rectangles : si ABC et $A'B'C'$ sont rectangles en B, B' et si l'on a $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$, les triangles sont isométriques. Plusieurs voies sont possibles (voir aussi Annexe 2, 9.1) :

a) En construisant des triangles ACD et $A'C'D'$ isocèles en A, A' et en montrant qu'ils sont isométriques.

b) En utilisant Pythagore.

7.14 Exercice. Soit P un parallélogramme.

1) On suppose que l'un des angles de P est droit. Montrer que tous le sont. On dit que P est un **rectangle**. Montrer que les diagonales d'un rectangle sont égales. Réciproque.

2) On suppose que deux côtés consécutifs de P sont égaux. Montrer que tous le sont. On dit que P est un **losange**. Montrer que les diagonales de P sont perpendiculaires. Réciproque.

3) Un carré est un rectangle qui est aussi un losange. Donner plusieurs caractérisations des carrés.

Annexe 2

Quelques compléments mathématiques

Cette annexe a pour but d'éclaircir un certain nombre de questions mathématiques :

- L'utilisation du premier cas d'égalité « frauduleux » : on a deux triangles avec deux côtés et un angle égaux, mais l'angle n'est pas celui compris entre les côtés. Le premier cas d'égalité est-il encore valable ?

- La question des réciproques en géométrie élémentaire.

- Enfin, une question plus anecdotique : est-il possible de trouver des triangles dont les mesures des longueurs des côtés (dans une unité quelconque) et les mesures des angles (en degrés) soient toutes entières ?

Le but est de préciser ces points, non seulement parce qu'ils ont un intérêt mathématique, mais aussi parce qu'ils sont souvent présents à l'arrière-plan de l'enseignement du collège, tant pour les définitions que l'on y donne, que pour le choix des exercices, voir la discussion ci-dessous.

8 Deux résultats

Cette annexe a un objectif plus mathématique que le reste de la brochure. On y emploie un certain nombre de résultats classiques du collège dont les démonstrations ont été vues dans l'annexe 1 : les cas d'égalité des triangles, les propriétés du triangle isocèle, les questions de position, les aires, le théorème de Pythagore, etc. On y utilise aussi des notions plus avancées, en particulier les deux suivantes, dont on donne des preuves élémentaires, pour montrer qu'elles ne sont pas si loin du collège (elles y étaient parfois enseignées autrefois, au moins dans le cas des triangles sans angle obtus).

8.1 La relation des sinus

8.1 Théorème. Soit ABC un triangle. On note \widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} ses angles et on pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On a la formule :

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}.$$

Démonstration. On introduit la hauteur¹ $BB' = AB \sin \widehat{A} = c \sin \widehat{A}$ et on calcule l'aire du triangle : $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}AC \times BB' = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$. Mais on a une formule analogue avec les trois angles et, en divisant tout par $\frac{1}{2}abc$, on a le résultat.

1. Avec la formule $\sin \widehat{A} = \sin(\pi - \widehat{A})$ on voit que le résultat vaut même si l'angle est obtus.

8.2 Al-Kashi

8.2 Théorème. Soit ABC un triangle. On note \widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} ses angles et on pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On a la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$ et les formules analogues obtenues par permutation circulaire.

Démonstration. Supposons l'angle \widehat{A} aigu, l'autre cas est analogue². On considère la hauteur $BB' = c \sin \widehat{A}$. Par Pythagore on a $a^2 = BC^2 = BB'^2 + B'C^2$. Comme l'angle \widehat{A} est aigu, il n'y a que deux possibilités : soit le point B' est dans $[AC]$ et on a $B'C = b - AB' = b - c \cos \widehat{A}$, soit c'est C qui est dans $[AB']$ et on a $B'C = AB' - b = c \cos \widehat{A} - b$. Dans les deux cas, on conclut avec $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$.

9 Le premier cas d'égalité dans la mauvaise position

L'un des difficultés de l'usage des cas d'isométrie réside dans la condition de position du premier cas (CAC) : l'angle égal doit être compris entre les côtés égaux. Cela étant, lorsque cette condition n'est pas réalisée, il arrive que les triangles soient malgré tout égaux. Le théorème suivant (pas complètement évident) essaie de faire le tour de la question³ :

9.1 Théorème. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose que l'on a $BC = B'C'$, $AB = A'B'$ et $\widehat{C} := \widehat{ACB} = \widehat{C'} := \widehat{A'C'B'}$. On pose $\widehat{A} := \widehat{BAC}$ et $\widehat{A'} := \widehat{B'A'C'}$.

1) Les triangles sont isométriques dans les cas suivants :

a) Si l'on a $\widehat{C} = \widehat{C'} \geq \widehat{A}$ ou $\widehat{C} = \widehat{C'} \geq \widehat{A'}$. C'est le cas, en particulier, si \widehat{C} est obtus ou droit.

a') Si l'on a $AB \geq BC$ ou $A'B' \geq B'C'$.

b) Si l'angle \widehat{A} est droit.

c) Si aucun des angles des deux triangles n'est obtus.

2) Inversement, si ABC est un triangle avec $\widehat{C} < \widehat{A}$ (ou $AB < BC$) et $\widehat{A} \neq \pi/2$, il existe un triangle $A'B'C'$, non isométrique à ABC , vérifiant $BC = B'C'$, $AB = A'B'$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

9.2 Remarques. 1) C'est le cas d'égalité CAC , mais avec un angle \widehat{C} qui n'est pas celui compris entre les côtés (qui est \widehat{B}) et le résultat compare \widehat{C} au troisième angle \widehat{A} .

2) Dans la pratique le cas important est celui où l'angle \widehat{C} est obtus ou droit.

3) L'équivalence de a) et a') vient évidemment de Annexe 1, 3.3.

4) Avec la version a'), on peut formuler la règle suivante :

Règle Si on a deux triangles avec deux côtés égaux et un angle égal qui n'est pas celui compris entre les côtés, le premier cas d'égalité vaut si, parmi les côtés égaux, celui situé face à l'angle est plus grand que l'autre.

Démonstration. On va donner deux preuves, l'une géométrique, l'autre à l'aide d'Al-Kashi.

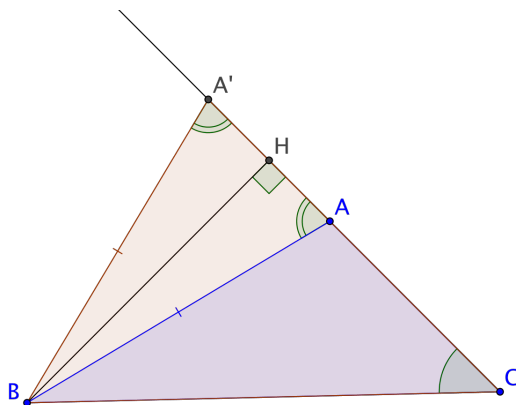


FIGURE 1 – Le premier cas d'égalité frauduleux

9.0.1 La preuve géométrique

1) a) Montrons la contraposée : on suppose que les triangles ne sont pas isométriques et on montre que l'on a $\widehat{C} < \widehat{A}$ et $\widehat{C} < \widehat{A}'$. En procédant par superposition (comme Euclide dans la preuve du premier cas d'égalité) on peut supposer $C = C'$ et $B = B'$, ainsi que $[CA) = [CA')$.

Comme les triangles ne sont pas isométriques, on a $CA \neq CA'$ (sinon ils relèveraient du premier cas ordinaire) et on peut supposer, par exemple, $CA < CA'$, donc le point A dans le segment $[CA]$.

Comme le triangle BAA' est isocèle en B , on a $\widehat{A'AB} = \widehat{BA'A} = \widehat{BA'C} = \widehat{A}'$ et cet angle est aigu comme angle à la base d'un triangle isocèle. Il en résulte que son supplémentaire $\widehat{A} = \widehat{BAC}$ est obtus, donc plus grand que \widehat{C} , ce qui donne le premier point annoncé. Cela montre aussi le point c).

Par ailleurs, la hauteur $[BH]$ de ABA' est aussi bissectrice de l'angle B de ce triangle, de sorte que l'on a $\widehat{A'BH} = \widehat{HBA}$. Comme A est entre H et C , ce dernier angle est plus petit que \widehat{HBC} et on a donc $\widehat{A'BH} < \widehat{HBC}$. En passant aux complémentaires dans les triangles rectangles HBC et HBA' , on a $\widehat{C} < \widehat{BA'H} = \widehat{A}'$ et le second point annoncé.

b) Si \widehat{A} est droit, il s'agit de montrer que \widehat{A}' l'est aussi, mais, sinon, si H' est le projeté orthogonal de B' sur $(A'C')$, on a $B'H' < B'A'$. Comme on a $\sin \widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \sin \widehat{C}' = \frac{B'H'}{B'C'}$, c'est une contradiction.

2) Inversement, si \widehat{C} est plus petit que \widehat{A} (donc aigu), on considère le projeté orthogonal H de B sur $[CA)$. Comme \widehat{A} n'est pas droit, on a $H \neq A$ et on considère le symétrique A' de A par rapport à H , qui est distinct de A . Si l'on montre que A' est sur la demi-droite $[CA)$, les deux triangles ABC et $A'BC$ vérifient les hypothèses ($\widehat{C} = \widehat{C}'$, $BC = BC$ et $AB = A'B$), mais ne sont pas isométriques car on a $AC \neq A'C$.

Montrons donc $A' \in [CA)$. C'est évident si l'angle \widehat{A} est obtus car alors A est entre H et C et *a fortiori* entre A' et C . Si \widehat{A} est aigu, donc \widehat{C} aussi, H est entre A et C . On

-
2. Si \widehat{A} est obtus, on a $B'C = b + AB'$ et il faut connaître la formule $\cos(\pi - \widehat{A}) = -\cos \widehat{A}$.
 3. Pour voir comment l'appliquer dans des classes, voir §13.

considère alors $\tan \widehat{A} = \frac{BH}{AH}$ et $\tan \widehat{C} = \frac{BH}{CH}$. Comme on a $\widehat{C} < \widehat{A}$ donc $\tan \widehat{C} < \tan \widehat{A}$ car les angles sont aigus, on en déduit $CH > AH = A'H$, ce qui montre que A' est entre H et C et le résultat.

9.0.2 La preuve avec Al-Kashi et la relation des sinus

On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ les côtés et \widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} les angles. On suppose que l'on a $a = a'$, $c = c'$ et $\widehat{C} = \widehat{C}'$ et il s'agit de voir si l'on a aussi $b = b'$. La relation d'Al-Kashi pour c s'écrit $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \widehat{C}$ et b' vérifie même relation. Le cas d'isométrie est vrai si et seulement si cette équation en b a une unique racine positive. Le discriminant réduit de cette équation est $\Delta' = a^2 \cos^2 \widehat{C} - a^2 + c^2 = c^2 - a^2 \sin^2 \widehat{C} = \frac{a^2}{\sin^2 \widehat{C}} \left(\frac{c^2}{a^2} - \sin^2 \widehat{C} \right) = \frac{a^2}{\sin^2 \widehat{C}} \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{\sin^2 \widehat{C}}{\sin^2 \widehat{A}} \right) \geq 0$. (Ici, on utilise la relation des sinus : $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$, valable dans tout triangle, même si l'un des angles est obtus). L'équation admet une unique racine positive dans deux cas :

- Si le discriminant est nul, c'est-à-dire si $\widehat{A} = \pi/2$.
- Si le discriminant est > 0 et si le produit des racines $a^2 - c^2$ est négatif ou nul, c'est-à-dire si $a \leq c$. Mais ceci est exactement équivalent à $\widehat{A} \leq \widehat{C}$ en vertu de Annexe 1, 3.3.

10 Une autre preuve du théorème de Thalès

Dans tout ce texte nous avons privilégié l'approche par les aires du théorème de Thalès, d'abord parce que c'est celle d'Euclide, mais aussi parce qu'elle est conforme à l'idée du programme d'Erlangen : une propriété affine doit se démontrer en utilisant les invariants du groupe affine, c'est-à-dire l'aire. Nous donnons cependant ici une autre preuve qui présente un intérêt historique, c'est celle d'Arnauld (1667), voir ch. 2, et c'est aussi celle qui était proposée dans les années 1950 dans les collèges. Pour une discussion sur ce thème, voir :

<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/ThalesDP.pdf>

On commence par montrer le lemme des parallèles équidistantes :

10.1 Lemme. *Soit ABC un triangle. On considère n droites parallèles à (BC) qui coupent $[AB]$ (resp. $[AC]$) en $B_0 = A, B_1, \dots, B_n = B$ (resp. en $C_0 = A, C_1, \dots, C_n = C$). On suppose que les longueurs $B_k B_{k+1}$ sont toutes égales. Alors il en est de même des longueurs $C_k C_{k+1}$.*

Démonstration.

Pour $k \geq 1$, on trace la parallèle à (AB) passant par C_{k-1} . Elle recoupe $(B_k C_k)$ en D_k . Alors, les triangles $C_{k-1} D_k C_k$ et $C_k D_{k+1} C_{k+1}$ sont égaux (ce qui assure l'égalité $C_{k-1} C_k = C_k C_{k+1}$). En effet, on a des parallélogrammes $B_{k-1} C_{k-1} D_k B_k$ et $B_k C_k D_{k+1} B_{k+1}$ qui, avec l'hypothèse sur les B_i , montrent l'égalité $C_{k-1} D_k = C_k D_{k+1}$. De plus, les angles en C_{k-1}, C_k d'une part et D_k, D_{k+1} de l'autre, sont égaux comme correspondants (voir Figure 2).

On en déduit le théorème de Thalès dans le cas d'un rapport rationnel :

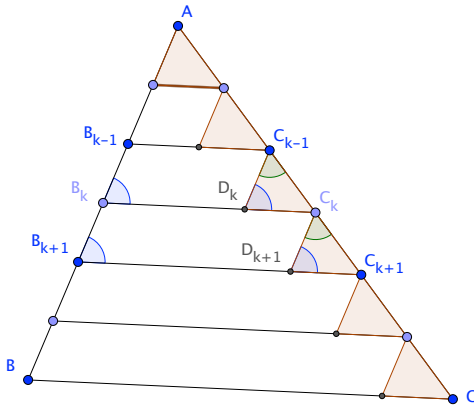


FIGURE 2 –

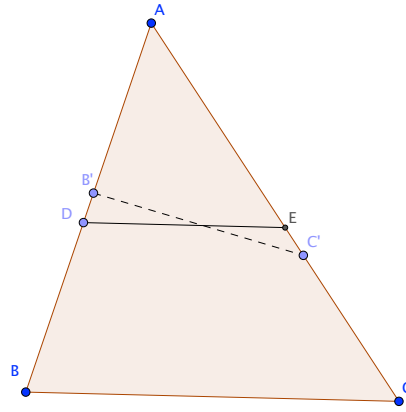


FIGURE 3 –

10.2 Corollaire. Soit ABC un triangle, $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$ tels que $(B'C')$ soit parallèle à (BC) . On suppose que le rapport AB'/AB est rationnel, égal à p/q . Alors, il est égal à AC'/AC .

Démonstration. On partage $[AB]$ en q parties égales, le point B' correspond aux p premières parties et on mène les parallèles équidistantes. Les points obtenus sur $[AC]$ sont équidistants par le lemme, de sorte que l'on a bien $AC'/AC = p/q$.

Le cas d'un rapport réel n'était pas traité, en général, dans les manuels de collège d'autrefois⁴. Il nécessite de connaître la densité des rationnels dans les réels :

10.3 Corollaire. Soit ABC un triangle, $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$ tels que $(B'C')$ soit parallèle à (BC) . On a $AB'/AB = AC'/AC$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant ces rapports différents, disons par exemple $AB'/AB = x < AC'/AC = y$. Il existe un rationnel r tel que $x < r < y$. On considère le point $D \in [AB]$ tel que $AD/AB = r$, voir Figure 3. On a $AB' < AD$, donc $B' \in [AD]$. La parallèle à (BC) passant par D coupe $[AC]$ en E et le corollaire précédent donne $AE/AC = AD/AB = r$. Comme on a $r < y$ on en déduit que E est dans $[AC']$. Mais alors, B' et C' sont de part et d'autre de (DE) donc $[B'C']$ coupe (DE) , ce qui est absurde car ces droites sont parallèles à (BC) , donc parallèles entre elles.

11 Sur les réciproques en géométrie

Lorsqu'on pratique la géométrie élémentaire, on se rend compte très vite que les réciproques y sont, en général, très faciles. Il suffit en effet, le plus souvent, d'un raisonnement par l'absurde⁵ et d'une application du sens direct pour les établir. Nous nous contentons ici d'examiner quelques exemples. **Attention**, dans les exemples ci-dessous, on a des théorèmes qui prennent la forme d'une équivalence et on ne se préoccupe pas de les prouver, mais seulement de montrer que si l'on a l'une des implications, on a l'autre.

4. À l'exception remarquable du livre de la collection Queysanne-Revuz de 1968.

5. Ce passage par l'absurde n'est même pas nécessaire, mais il éclaire souvent la situation : on fait une figure fautive et on montre que l'on aboutit à une absurdité.

11.1 La droite des milieux et le théorème de Thalès

11.1 Proposition. Soit ABC un triangle, B' le milieu de $[AB]$, C' un point de (AC) . Alors on a l'équivalence : (1) $(B'C')$ parallèle à $(BC) \iff$ (2) C' est milieu de $[AC]$.

Supposons que l'on ait prouvé l'implication (1) \implies (2) et montrons l'implication réciproque. On suppose donc que C' est milieu de $[AC]$. On considère la⁶ parallèle à (BC) passant par B' . Elle coupe (AC) en C'' . L'implication (1) \implies (2) assure que C'' est le milieu de $[AC]$. Comme le milieu est unique, il est donc égal à C' et $(B'C') = (B'C'')$ est bien parallèle à (BC) .

Supposons que l'on ait prouvé l'implication (2) \implies (1) et montrons l'implication réciproque. On suppose $(B'C')$ parallèle à (BC) . Soit C'' le milieu de (AC) . L'implication (2) \implies (1) montre que $(B'C'')$ est parallèle à (BC) . Comme il y a une unique parallèle à (BC) passant par B' , on a $(B'C') = (B'C'')$ donc aussi, par intersection avec (AC) , $C' = C''$, ce qui montre que C' est milieu de $[AC]$.

11.2 Remarques. 1) On voit que le ressort de la preuve des réciproques est dans l'**unicité** des objets vérifiant les propriétés, le milieu dans un cas, la parallèle⁷ à une droite passant par un point dans l'autre. C'est un phénomène général dans toutes ces questions.

2) On n'a pas utilisé de raisonnement par l'absurde dans ce qui précède. Il est cependant commode, quand on explique ce type de raisonnement, de faire une figure fautive en dessinant un point C'' différent de C' et en montrant pourquoi ce dessin est impossible.

Passons maintenant au théorème de Thalès :

11.3 Proposition. Soit ABC un triangle, B' un point de $[AB]$, C' un point de $[AC]$. Alors on a l'équivalence : (1) $(B'C')$ parallèle à $(BC) \iff$ (2) $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$.

Les raisonnements sont analogues, le point essentiel est (pour B' donné) l'unicité du point C' du **segment** $[AC]$ vérifiant $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. Le résultat ne serait plus vrai si l'on avait supposé seulement que C' était sur la **droite** (AC) car il y aurait alors deux points C' possibles. C'est pourquoi on distingue actuellement la configuration du triangle et celle du papillon. Une autre manière de faire, utilisée jusque dans les années 1960 était de donner la condition avec des mesures algébriques : $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'C}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'B}}$, le point C' étant alors uniquement déterminé (le rapport est négatif si C' est dans $[AC]$ et positif sinon).

11.2 Le triangle rectangle et le demi-cercle

11.4 Proposition. Soit ABC un triangle, O le milieu de $[BC]$. On a l'équivalence (1) $OA = OB = OC \iff$ (2) $\widehat{BAC} = \pi/2$.

Supposons par exemple que l'on ait prouvé l'implication (1) \implies (2) et montrons l'implication réciproque. On suppose donc que l'angle \widehat{BAC} est droit. On considère la demi-droite $[BA)$ et l'unique point A' de cette demi-droite vérifiant $OA' = OB = OC$.

6. Ici on pourrait dire : une.

7. Ici on utilise le postulat d'Euclide.

L'implication (1) \implies (2) montre que l'angle $\widehat{BA'C}$ est droit. On en déduit $A = A'$. En effet, sinon, le triangle CAA' aurait deux angles droits, ce qui est absurde par Annexe 1, 3.1 ou 3.12.

11.5 Remarque. Ici encore, le ressort de la preuve est dans l'unicité du point A , unicité qui est obtenue en se restreignant à une demi-droite.

Le lecteur exercera sa sagacité en établissant ainsi les réciproques de Pythagore, des propriétés des triangles isocèles, de celles des parallélogrammes, etc.

12 Des mesures entières ?

Le théorème suivant⁸ montre que l'on ne peut pas trouver de triangle non équilatéral à côtés et angles (en degrés) entiers :

12.1 Théorème. *Soit ABC un triangle non équilatéral, a, b, c les mesures des longueurs de ses côtés, avec une unité quelconque, α, β, γ les mesures en degrés de ses angles. Alors, les six nombres $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ ne sont pas tous rationnels (et a fortiori pas tous entiers).*

Démonstration. Le lemme crucial est le suivant :

12.2 Lemme. *Soit y un rationnel (par exemple un entier) compris entre 0 et 180. Si y est la mesure en degrés d'un angle dont le cosinus est rationnel, on a $y = 0$ ou $y = 60$ ou $y = 90$ ou $y = 120$ ou $y = 180$.*

Admettons un instant ce lemme, on peut alors prouver le théorème. Supposons les côtés et les angles rationnels. Par Al-Kashi on a, par exemple, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, ce qui montre que $\cos \alpha$ est rationnel et de même pour les autres. Comme les angles sont différents de 0 et 180, on en déduit que α, β, γ ne peuvent valoir que 60, 90 ou 120 degrés. La seule possibilité est $\alpha = \beta = \gamma = 60$, donc le cas du triangle équilatéral.

Si un angle a pour mesure y en degrés et x en radians, on a $\frac{y}{180} = \frac{x}{\pi}$, de sorte que le lemme ci-dessus se traduit ainsi :

12.3 Lemme. *Soit $x \in [0, \pi]$ un réel tel que x/π soit rationnel. Si x est la mesure en radians d'un angle dont le cosinus est rationnel, on a $x = 0$ ou $x = \pi/3$ ou $x = \pi/2$ ou $x = 2\pi/3$ ou $x = \pi$.*

Démonstration. Posons $x = \frac{p}{q}\pi$ et soit $\zeta = e^{ix}$. On a $\zeta^{2q} = 1$, donc ζ est une racine de l'unité et on peut supposer qu'elle est primitive n -ième pour un certain $n \geq 1$. On a $2 \cos x = \zeta + \zeta^{-1}$, ce qui donne $\zeta^2 - 2 \cos x \zeta + 1 = 0$ avec $\cos x \in \mathbf{Q}$, de sorte que ζ est algébrique de degré ≤ 2 sur \mathbf{Q} . Mais, on sait que ζ est racine du polynôme cyclotomique Φ_n à coefficients rationnels et que ce polynôme est irréductible de degré $\varphi(n)$ où φ désigne l'indicatrice d'Euler. On a donc $\varphi(n) \leq 2$. Mais, si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, on a $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1) \cdots p_r^{\alpha_r-1}(p_r-1)$ et on vérifie aisément que $\varphi(n) \leq 2$ implique $n = 1, 2, 3, 4$ ou 6 . Cela donne pour ζ les valeurs possibles $1, -1, \pm j, \pm i, \pm j^2$ et donc pour x les valeurs annoncées.

8. Le résultat n'est pas complètement trivial et utilise un peu d'algèbre que l'on trouvera par exemple dans Perrin *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

13 Applications dans les classes

Il y a plusieurs contextes où les résultats précédents se rencontrent, parfois implicitement, dans une classe.

13.1 La définition des triangles isométriques

Si l'on dispose de l'arsenal des transformations, l'expression « triangles isométriques » signifie images dans une isométrie. Sinon, on peut donner une définition plus intuitive de triangles superposables en termes de mouvements. On peut aussi, à défaut, donner une définition de triangles isométriques comme ayant leurs côtés égaux et leurs angles égaux⁹. Il peut y avoir alors une petite inquiétude pour savoir quels angles et quels côtés sont égaux. En fait, cette inquiétude est injustifiée car le résultat 3.3 de l'Annexe 1 sur l'ordre des angles et des côtés assure qu'il n'y a qu'une possibilité : les côtés sont égaux dans l'ordre du plus petit au plus grand et de même pour les angles et cet ordre est compatible avec la notion de côté ou angle opposé.

13.2 Produire des contre-exemples

La difficulté de l'application du premier cas d'égalité est dans la position de l'angle entre les côtés et, si l'on veut attirer l'attention des élèves sur ce point, il est intéressant de pouvoir produire des exemples. Vu le point 2) de 9.1, la recette est simple, voir Figure 1 : on choisit un angle $\widehat{C} = \widehat{bCa}$, aigu (c'est obligatoire), on prend B sur la demi-droite $[Cb)$. Si H est le projeté orthogonal de B sur la droite (Ca) , H est sur la demi-droite $[Ca)$ car l'angle \widehat{C} est aigu et on a $BH < BC$. On choisit alors A dans l'intervalle ouvert $]CH[$. Le triangle ABC fournit le contre-exemple cherché (l'autre triangle est $A'BC$ où A' est le symétrique de A par rapport à H).

13.3 Appliquer le premier cas « frauduleux » lorsque \widehat{C} est droit

Lorsqu'on a affaire à des triangles rectangles, 9.1 montre qu'il n'y a pas besoin de s'inquiéter de la position de l'angle entre les côtés.

Il y a plusieurs façons de se convaincre de ce résultat, Pythagore (si on l'a déjà traité) donne l'égalité des troisièmes côtés et, sinon, on peut appliquer la méthode que l'on utilisait autrefois au collège : on considère le point D symétrique de B par rapport à C et de même avec $A'B'C'$. À cause de la symétrie, les triangles ABD et $A'B'D'$ sont isocèles. De plus, ils sont isométriques car ils ont leurs trois côtés égaux (deux à AB et le troisième à $2BC$). On en déduit l'égalité $\widehat{ABD} = \widehat{A'B'D'}$ qui s'écrit encore $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et permet de conclure.

13.4 Le cas \widehat{C} obtus

On peut se contenter de faire constater aux élèves que si l'on applique la méthode de superposition en faisant coïncider C et C' puis B et B' et enfin les demi-droites $[CA)$ et

9. Mais il n'est pas raisonnable de parler seulement des côtés égaux dans la définition !

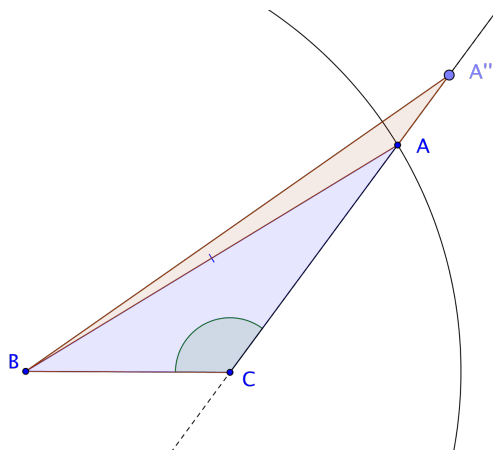


FIGURE 4 –

$[CA')$, le cercle de centre B et de rayon AB ne coupe cette demi-droite qu'en un point, empêchant le contre-exemple qui apparaît dans la figure 1.

¶¶ Avec de très bons élèves on peut proposer le raisonnement suivant (par l'absurde). On note que, si \widehat{BCA} est obtus, les autres angles de ABC sont aigus, notamment \widehat{BAC} .

Si $AC = A'C'$ on a gagné par le premier cas usuel. Sinon, on peut, par exemple, supposer $AC < A'C'$. On place alors, sur la demi-droite $[CA)$, un point A'' tel que $A''C = A'C'$, voir figure ci-dessus. Les triangles $A''BC$ et $A'B'C'$ sont isométriques (on a $A''C = A'C'$, $BC = B'C'$ et les angles en C et C' sont égaux). On a donc aussi $A''B = A'B' = AB$ et le triangle $A''BA$ est isocèle en B . Mais ce n'est pas possible car son angle à la base $\widehat{A''AB}$ serait aigu (comme le sont les angles à la base d'un triangle isocèle), alors qu'il est obtus comme supplémentaire de l'angle aigu \widehat{BAC} .

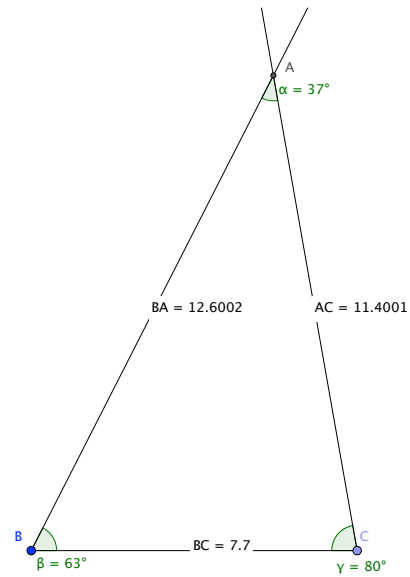
13.5 Le triangle téléphoné

Une situation intéressante pour introduire les cas d'isométrie est celle du triangle téléphoné : un groupe d'élèves dispose d'un triangle dont on donne les mesures des angles et des longueurs et il doit transmettre à un autre groupe des renseignements, le moins possible, pour reconstituer le triangle (à isométrie près), voir chapitre 6 l'exemple de la classe de Sébastien. Il est tentant de donner des valeurs entières aux longueurs et aux angles, mais on a vu, malheureusement, que c'est impossible. Il faut donc se contenter de valeurs approchées. Par exemple un triangle d'angles 33, 55, 92 (degrés) et de côtés 6, ~ 9 , ~ 11 (précisément 9.02 et 11.01).

Voici la liste de tous les triangles admettant des angles de mesures entières α , β , γ distinctes (avec α, β compris entre 10 et 80 degrés) et un côté a de mesure entière (compris entre 10 et 100 millimètres), avec des côtés b, c proches d'un entier à 0.005 près.

Une autre préoccupation pour cette situation est la possibilité de faire émerger le cas d'égalité « frauduleux ». La seule condition pour que cela soit possible est d'éviter les triangles équilatéraux et rectangles isocèles. En effet, dans tous les autres cas on dispose d'angles $\widehat{C} < \widehat{A}$ avec $\widehat{A} \neq 90^\circ$ et il y a alors deux triangles admettant l'angle \widehat{C} et les côtés BC et AB , voir ci-dessus.

α	β	γ	a	b	c
13	36	131	31	81.001	104.004
37	63	80	77	114.001	126.002
54	34	92	68	47.001	84.001
61	30	89	14	8.003	16.004



13.6 Un exercice

13.1 *Exercice.* Construire un triangle ABC avec $\widehat{C} = 60^\circ$, $BC = 10$ cm et $BA = 9$ cm.

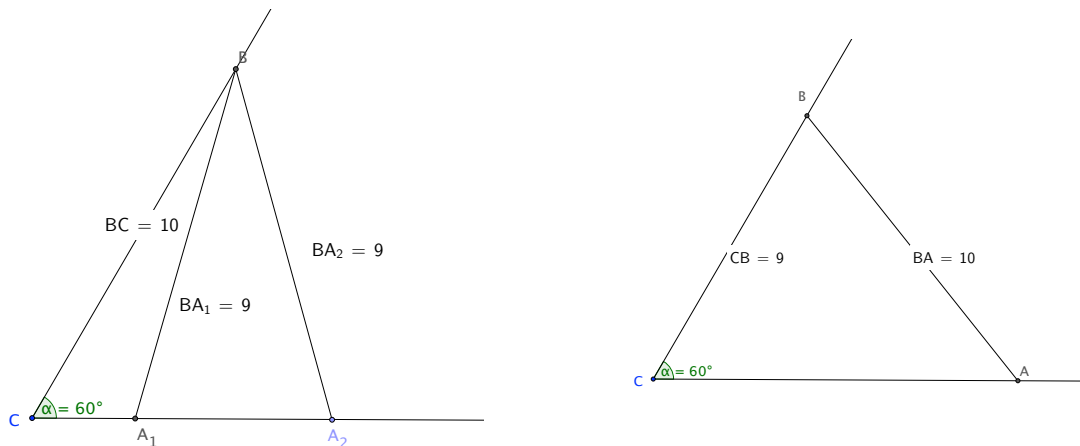


FIGURE 5 – Construction de triangles

Cet exercice a pour but d'attirer l'attention sur le fait qu'il y a deux triangles non isométriques qui sont solutions (car l'angle n'est pas compris entre les côtés donnés). Attention, si l'on donne $BC = 9$ cm et $BA = 10$ cm, cette fois il y a unicité de la solution. En effet, l'angle \widehat{C} est plus grand que l'angle \widehat{A} car le côté opposé AB est plus grand que BC et on peut appliquer 9.1. Attention aussi, si l'on prend $BC = 10$ et $BA = 8$, il n'y a plus de solution du tout. En effet, pour qu'il existe une solution il faut avoir $AB \geq BC \sin \widehat{C} \simeq 0.866 BC$. Voir figures ci-dessus.

Annexe 3

Pavages et symétrie centrale

Nous avons vu dans l'exercice 5.5 du chapitre 10 qu'un quadrilatère non croisé pave le plan : si on accole à ce quadrilatère son image par la symétrie centrale de centre le milieu d'un côté, on obtient un hexagone à côtés deux à deux parallèles et la suite du pavage peut se faire par des translations. Nous présentons dans cette annexe un projet mené depuis plusieurs années dans les classes de cinquième de Guillaume Didier, sur toute la période 2, de manière perlée, après la séquence sur la symétrie centrale. Il s'agit de paver le plan par une figure obtenue par déformation d'un rectangle en remplaçant chaque côté par une ligne polygonale de mêmes extrémités, invariante par la symétrie centrale de centre son milieu. Le déroulement du projet en classe se décompose en quatre temps :

- Présentation du projet.
- Compréhension de la méthode de construction.
- Réalisation du pavage.
- Exposition au C.D.I des pavages réalisés (avec récompense pour les trois plus beaux).

Ce projet comporte trois degrés de liberté (choix des rectangles, construction du motif, choix des couleurs), ce qui permet de développer l'autonomie et la créativité chez les élèves.

Présentation du projet

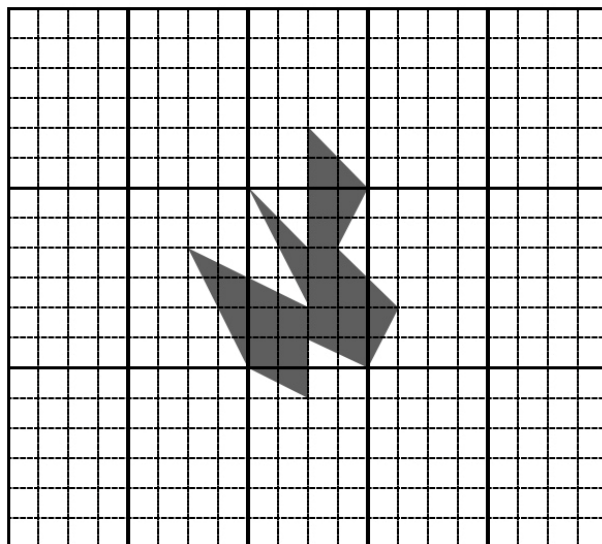
Il est important de consacrer un moment à la présentation du projet aux élèves pour leur en annoncer le but et le déroulement. Pour le but, cela peut se faire en projetant des réalisations d'élèves des années précédentes. Pour la première année, on peut récupérer des images de pavages de même nature sur internet¹⁰. Pour le déroulé de ce projet, il faut leur expliquer que cela se fera sur un temps long (six semaines) et de manière perlée. Ce projet se fera en partie à la maison et il y aura six moments en classe répartis sur les six semaines. Les trois premiers seront dédiés à la compréhension de la méthode de construction. Les suivants seront consacrés à la réalisation du pavage. Cette présentation est aussi l'occasion d'échanger avec les élèves pour répondre à leurs questions.

Compréhension de la méthode de construction

Moment 1 On distribue la question 1 ci-dessous et, après avoir explicité la consigne (qu'est un pavage ? que faire au bord du quadrillage ?) et recommandé l'usage d'une feuille calque comme moyen d'autocontrôle (la manipulation du motif permet de vérifier si les motifs tracés s'emboîtent bien les uns aux autres), on annonce aux élèves qu'ils doivent rendre leur travail dans deux séances.

Question 1 : Réaliser le pavage du quadrillage à partir du motif donné. Colorier les motifs afin de vous repérer : deux couleurs suffisent.

10. Voir par exemple l'article de Michel Bréchet paru dans Math-école n° 208 en 2003, p. 31-36.

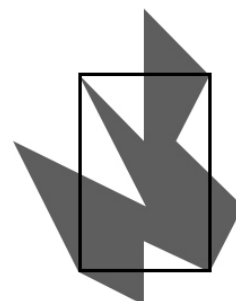


Moment 2 : Correction de la question 1 et nouvelles questions

Pour corriger la question 1, après avoir examiné les productions en circulant dans la classe, on choisit deux travaux d'élèves (un échec et une réussite) pour les projeter à l'aide d'un visualiseur et demander à la classe de les analyser. C'est l'occasion de rappeler l'utilité de la feuille calque (prévoir d'en avoir une sous la main pour la manipuler devant la classe). Il convient d'accorder un délai (2 séances) aux élèves n'ayant pas réussi et de leur signaler qu'en cas de difficultés, ils peuvent échanger avec le professeur tout au long de ce délai et on prévoit de contrôler l'avancement des travaux de ces élèves lors de la séance suivante. Après cette correction, on distribue la question 2 et on laisse aux élèves un temps de recherche de 5 minutes suivi d'une mise en commun

Question 2 : Dans le pavage ci-dessus, que remarques-tu sur la disposition des motifs ? Les élèves remarquent qu'il y a des motifs à l'endroit et d'autres à l'envers, que ça fait des bandes. Le professeur attire au besoin l'attention sur les motifs qui se touchent. Les élèves remarquent qu'ils ne sont pas dans le même sens, qu'ils sont symétriques. Le professeur fait préciser qu'il s'agit d'une symétrie centrale dont il demande d'identifier le centre et fait préciser qu'il s'agit du milieu d'un des côtés d'un rectangle du quadrillage. A la fin de ce deuxième moment, on distribue la question 3 et on laisse deux séances aux élèves pour écrire leurs remarques.

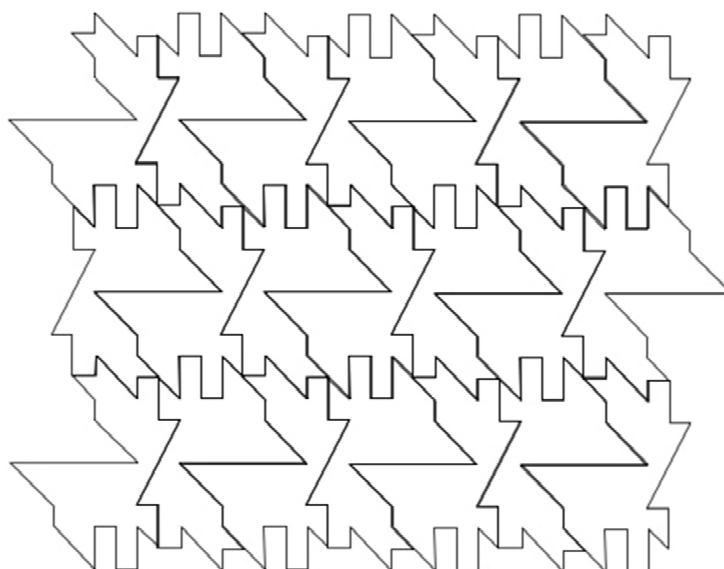
Question 3 : Il y a un lien entre le rectangle et le motif du pavage. Comment faut-il déformer les côtés du rectangle pour obtenir le motif ?



Moment 3 : Correction de la question 3 et nouvelle question

Les élèves utilisent un langage familier et font des remarques du genre « *les parties qui sortent du rectangle on peut les mettre à l'intérieur* » et le montrent au tableau. Il appartient au professeur de les aider reformuler ces remarques en langage mathématique pour identifier les symétries centrales qui déforment chacun des côtés du rectangle ainsi que leur centre au milieu du côté. Une trace écrite sur la méthode de construction d'un motif est alors rédigée avant la distribution de la question 4 pour laquelle on laisse à nouveau un intervalle de réflexion de deux séances.

Question 4 : Voici un pavage¹¹ :



Tracer le quadrillage rectangulaire qui a permis de réaliser ce pavage.

Il n'est pas facile de faire un découpage du bord du polygone en quatre morceaux tels que chacun d'eux ait un centre de symétrie. On attend que les élèves recherchent un rectangle et on le précise. En effet, on pourrait trouver d'autres découpages qui engendreraient le même pavage à partir de parallélogrammes voire de triangles dont les bords vérifient la propriété demandée. Le coloriage en deux couleurs est une aide. En considérant deux formes voisines de couleurs différentes, on peut identifier le centre de la symétrie qui les échange. En faisant cela avec les quatre formes voisines d'une forme donnée et de couleur différente de cette forme, on obtient quatre centres de symétrie qui sont les milieux des quatre côtés du rectangle et on peut en déduire le rectangle. Si l'indication de rechercher la relation avec les formes voisines se révèle insuffisante, une autre aide possible consiste à donner aux élèves avec les dimensions du rectangle à trouver : on pourrait alors en réaliser un modèle sur papier calque que l'on déplacerait sur le pavage. On pourrait même donner au besoin le quadrillage sur papier calque. La correction de la question 4 avec explicitation des procédures des élèves se fait au début du moment 4, juste avant l'entrée dans la phase de réalisation de pavages originaux par les élèves.

11. Pour gagner de la place, nous présentons ici les feuilles A4 en taille réduite et le plus souvent en orientation paysage alors qu'elles étaient en orientation portrait pour les élèves.

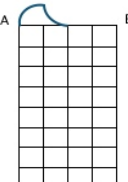
Réalisation du pavage

Avant d'engager les élèves dans la réalisation du pavage, le moment 4 se conclut par l'exposé sur un exemple fourni sur papier aux élèves de la méthode de construction découverte précédemment.

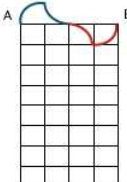
Comment construire un motif ?

On déforme chaque côté d'un rectangle en utilisant la symétrie centrale.

Pour déformer le côté [AB], on commence par relier (comme on veut) le point A et le milieu du côté [AB].

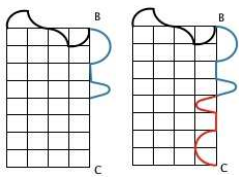


Ensuite, on trace le symétrique du tracé obtenu par rapport au milieu du côté [AB].

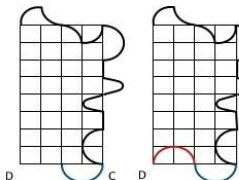


On réitère ce procédé pour déformer les autres côtés du rectangle.

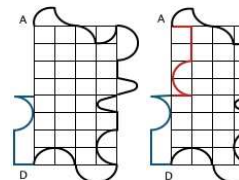
Déformation du côté [BC] :



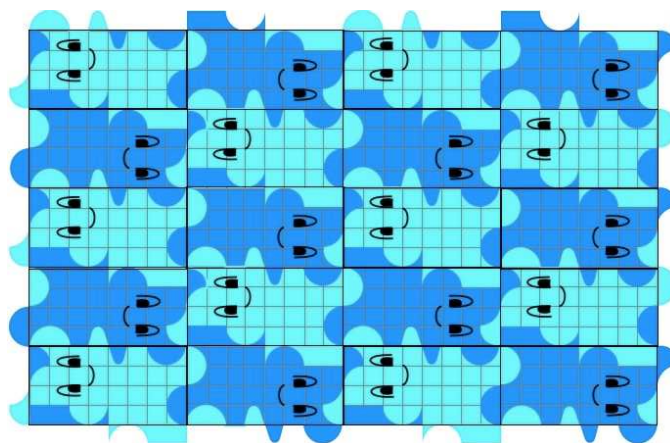
Déformation du côté [CD] :



Déformation du côté [DA] :



On obtient ainsi un motif permettant de réaliser un pavage.
Il ne reste plus qu'à reproduire le motif et à le colorier dans deux ou trois couleurs.
Un bon choix des couleurs et un coloriage soigné sont indispensables pour réaliser un beau pavage.



Pour la phase de réalisation du pavage, la consigne donnée aux élèves est de créer un motif selon la méthode vue.

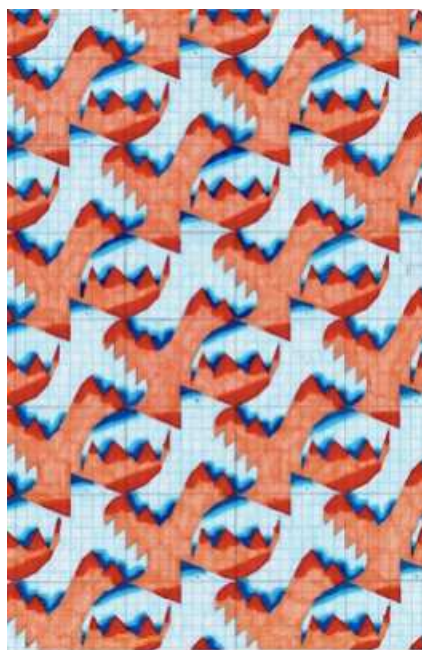
Question 5 : Réaliser un pavage en utilisant cette méthode. Les plus belles réalisations seront affichées en classe. Ils disposent d'une semaine pour le montrer au professeur. Il leur est conseillé de tracer le quadrillage de rectangles ainsi que les motifs sur une feuille A4 à petits carreaux et de colorier soigneusement le pavage. On peut aussi proposer des idées de couleurs. Tout au long de cette phase, le professeur suit régulièrement l'avancement des travaux de chaque élève et l'accompagne afin de l'aider réaliser son pavage.

Exposition des pavages retenus

Une sélection des pavages réalisés est exposée au C.D.I et mise en ligne sur le site du collège. Les auteurs des 3 plus beaux pavages sont récompensés par un cadeau.

Exemples de travaux d'élèves





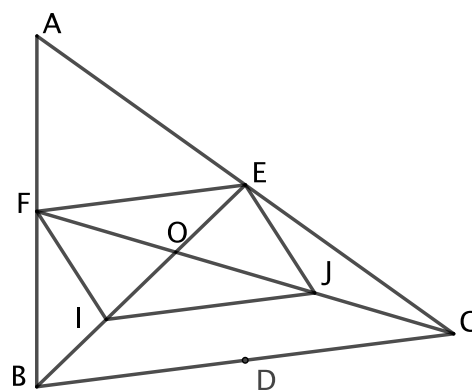
Annexe 4

Travailler la différence entre hypothèses et conclusions via la construction de figures.

Nous proposons dans cette annexe deux situations qui ont été travaillées dans les dossiers lors de l'édition 2020-2021 d'un stage de formation continue proposé par le groupe IREM. Les deux exemples permettent de travailler la flexibilité du regard à porter sur les figures dans une démonstration en géométrie.

I. Une figure et plusieurs énoncés

La figure qu'on construit est toujours celle d'un triangle ABC avec les deux médianes $[BE]$ et $[CF]$ qui se coupent en O et le parallélogramme $EFIJ$ dont les sommets sont les pieds de ces deux médianes et les milieux respectifs I et J des segments $[BO]$ et $[CO]$. Dans un premier temps, le but est d'identifier et de démontrer des propriétés de la figure. Suivant la manière dont on la construit, on n'a pas les mêmes hypothèses ni les mêmes choses à démontrer. Dans un deuxième temps, on montre que les trois médianes sont concourantes en un point situé au tiers de chacune d'elles à partir de la base.



1. Identifier et démontrer des propriétés d'une figure

L'intérêt est de faire travailler les élèves en groupes et de poser un énoncé différent à chaque groupe. La mise en commun permet de voir que tout le monde a la même figure mais qu'on n'avait pas la même chose à démontrer, d'où l'intérêt de distinguer entre ce qu'on sait (les hypothèses) et ce qu'on cherche (les conclusions). On peut, au moment de la mise en commun, faire des figures GeoGebra où les données de la construction sont en bleu par exemple et le reste en noir. On a la même figure sur papier mais ce ne sont pas les mêmes figures GeoGebra puisqu'on ne peut pas faire bouger les mêmes éléments.

Voici des exemples d'énoncés possibles. On peut en trouver d'autres en considérant les différentes manières de construire la figure. Il s'agit de proposer des énoncés pour un travail des élèves en groupes différenciés (certaines démonstrations sont plus délicates que d'autres, par exemple les 4 et 5). Les énoncés ne sont pas mis en forme pour les élèves : on y donne la construction et des indications pour les démonstrations ; au professeur d'adapter selon ses besoins. Nous indiquons pour chaque énoncé les savoirs en jeu. Les notations sont les mêmes dans toutes les versions.

Énoncé 1 (le plus classique)

On part d'un triangle ABC . Les médianes $[BE]$ et $[CF]$ se coupent en O et les points I et J sont les milieux respectifs de $[BO]$ et $[CO]$. Il s'agit alors de montrer que $IJEF$ est un parallélogramme et d'en déduire que O est au tiers de chacune des deux médianes en partant de la base. Les droites des milieux dans ABC et dans OBC permettent de montrer que $[FE]$ et $[IJ]$ sont parallèles et de même longueur.

Outils : théorème des milieux, propriétés des parallélogrammes.

Remarque Si l'on veut éviter la caractérisation mal aimée du parallélogramme, on peut utiliser le théorème des milieux dans les triangles AOB et AOC pour montrer que (FI) et (EJ) sont parallèles. On utilise les propriétés des diagonales du parallélogramme pour dire que l'on a $FO = OJ$ et $EO = OI$; on en déduit $BO = 2OE$ et $CO = 2OF$.

Énoncé 2

On part du parallélogramme $IJEF$ de centre O . Les points B et C sont les symétriques respectifs de O par rapport à I et J (ou bien on prolonge les segments de la même longueur vers l'extérieur). Les droites (BF) et (CE) se coupent en A . Il s'agit alors de montrer que E et F sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$. Pour cela, on peut d'abord montrer que (FE) est parallèle à (BC) (droite des milieux ou réciproque de Thalès dans OBC) et que AFE et ABC sont homothétiques avec un rapport 2 (angles et parallèles et $FE = \frac{1}{2}BC$). On peut aussi utiliser Thalès : on sait que (FE) est parallèle à (BC) et que l'on a $FE = \frac{1}{2}BC$. Thalès dit qu'on a aussi $AF = \frac{1}{2}AB$ et $AE = \frac{1}{2}AC$. Ici les égalités $BO = 2OE$ et $CO = 2OF$ découlent des propriétés des diagonales du parallélogramme et des hypothèses pour la construction de la figure.

Outils : théorème des milieux, propriétés des parallélogrammes, théorèmes sur parallèles et sécantes, triangles semblables.

Remarque On ne le demandera pas aux élèves mais on peut prouver que (BF) et (CE) se coupent et que A n'est pas du même côté que B et C par rapport à (EF) : $BC = 2FE$ donc la parallèle à (BF) passant par E coupe $[BC]$ en son milieu D . La droite (CE) coupe cette droite donc aussi (BF) en A . Variante : si (FB) et (EC) sont parallèles, $FECB$ est un parallélogramme, ce qui contredit $BC = 2EF$. Le point D est entre B et C donc E est entre A et C ; mais (FE) parallèle à (BC) donc F est entre A et B . Donc A d'une part et B et C d'autre part sont de part et d'autre de (FE) .

Énoncé 3

On part du triangle OBC , I et J sont les milieux respectifs de $[OB]$ et $[OC]$, F et E les symétriques respectifs de J et I par rapport à O . Les droites (BF) et (CE) se coupent en A (même remarque qu'au point 2). Il faut montrer que E et F sont les milieux respectifs de $[CA]$ et $[BA]$. Pour cela, on peut d'abord montrer que $IJEF$ est un parallélogramme puis que les triangles AFE et ABC sont semblables dans un rapport 2. On termine de la même manière.

Outils : les mêmes que pour la version 2. On montre cette fois qu'on a un parallélogramme par la propriété des diagonales.

Énoncé 4

Comme 3 mais on définit A comme le symétrique de B par rapport à F . Il faut montrer que E est le milieu de $[AC]$, c'est-à-dire que A , E , C sont alignés et que l'on a $AE = EC$. On peut d'abord montrer, comme dans la version 3 que $IJEF$ est un parallélogramme

et que (IJ) donc aussi (EF) est parallèle à (BC) . Attention, ici, on ne peut plus utiliser les triangles semblables parce qu'on ne sait pas que A, E, C sont alignés. Pour le montrer (ainsi que $AE = EC$), on peut utiliser le théorème de Thalès (ou la réciproque de la droite des milieux) dans le triangle ABC puisque (FE) parallèle à (BC) , (FE) coupe $[AC]$ en son milieu M et $FM = \frac{1}{2}BC$, ce qui permet de montrer que $FM = FE$ et M sur (FE) et donc $M = E$.

Outils : théorème des milieux et sa réciproque, propriétés des parallélogrammes. Difficultés : Montrer un alignement (s'abstraire de ce qu'on voit sur la figure). Définir le point M .

Énoncé 5

On part du triangle ABC et de la médiane $[BE]$. On considère les points I et O sur $[BE]$ tels que l'on ait $BI = IO = OE$. Le point F est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[OC]$. Il faut montrer que C, O, F sont alignés et que l'on a $CJ = JO = OF$. On montre que $EFIJ$ est un parallélogramme comme au 1 (droite des milieux dans ABC et dans OBC). On en déduit que $[FJ]$ et $[EI]$ se coupent en leur milieu donc F, O, J alignés mais J est le milieu de $[OC]$ donc F, O, J, C alignés et on a $FO = OJ = JC$.

Outils : droite des milieux et propriétés du parallélogramme. Il y a encore la difficulté de montrer un alignement, ici en considérant deux droites qui ont deux points communs.

Énoncé 5b

On part du triangle ABC et de la médiane $[BE]$. On considère les points I et O sur $[BE]$ tels que l'on ait $BI = IO = OE$. La droite (CO) coupe $[AB]$ en F et J est le milieu de $[OC]$. Il s'agit de montrer que F est le milieu de $[AB]$ et que $FO = OJ$ (ou que $IJEF$ est un parallélogramme). Si on appelle F' le milieu de $[AB]$, on montre que $IJEF'$ est un parallélogramme. On en déduit que F', O, J sont alignés par les propriétés des diagonales d'un parallélogramme et donc que F' est égal à F : deux droites non confondues ont au plus un point d'intersection. La droite (CF) est donc une médiane et $FO = OJ = JC$.

Remarque Cette variante ne demande pas de montrer un alignement mais elle est peut-être un peu plus difficile parce qu'il faut considérer un dédoublement de F en F' et montrer que F et F' sont confondus. Cela revient à un raisonnement par l'absurde.

A la fin de cette première partie, on a établi dans toutes les versions que $[BE]$ et $[CF]$ sont les médianes respectivement issues de B et C dans le triangle ABC , que $IJEF$ est un parallélogramme et que l'on a $BI = IO = OE$ et $CJ = JO = OF$. On va montrer dans la deuxième partie que les trois médianes du triangle sont concourantes en un point situé au tiers de chacune d'elle à partir de la base.

2. Le concours des médianes

La question du concours des médianes peut être ajoutée aux textes proposés dans la première partie ou traitée ensuite. Deux grandes démonstrations possibles :

1) On s'appuie sur le fait que deux médianes se coupent au tiers de chacune d'elles à partir de la base. Si on considère la médiane $[AD]$ issue de A et qu'on appelle O' le point d'intersection des médianes $[AD]$ et $[BE]$, le même raisonnement permettrait de dire que O' est au tiers de $[BE]$ en partant de E donc que $O' = O$.

Il s'agit ici de prendre du recul par rapport à ce qu'on a fait, de voir que les trois médianes jouent le même rôle et donc de généraliser un raisonnement.

2) On considère le milieu D de $[BC]$ et on montre que les trois points A, O, D sont alignés (c'est-à-dire que la médiane issue de A passe par O). On peut pour cela montrer que (AO) et (OD) sont parallèles à (IF) . Pour (OD) parallèle à (IF) , on peut montrer que $FODI$ est un parallélogramme en montrant que $[FO]$ et $[ID]$ sont parallèles, de même longueur (il s'agit de la caractérisation mal aimée du parallélogramme : il faudrait des vecteurs pour indiquer le sens, ou montrer que le quadrilatère n'est pas croisé).

Deux difficultés : 1) considérer séparément (OA) et (OD) pour montrer le parallélisme à une autre droite et conclure avec le postulat d'Euclide.

2) Montrer un alignement demande de s'abstraire de ce qu'on voit sur la figure.

3. Prolongements possibles

On peut prolonger les problèmes précédents par quelques questions supplémentaires :

- La droite (AD) coupe $[EF]$ et $[IJ]$ en leurs milieux.
- Les droites (FI) et (EJ) sont parallèles à (AD) (utilisé dans certaines démonstrations ci-dessus).
- Les longueurs FI et EJ sont égales à OD soit un tiers de AD .
- Si on prend le triangle OIJ comme unité d'aire, on peut évaluer l'aire de tous les polygones tracés sur la figure de base (celle avec deux médianes et le parallélogramme, sans ajouter de ligne) ; on peut y trouver des polygones qui ont pour aire $1, 2, \dots, 12$. Essayer de prendre le plus possible des polygones convexes et même des triangles.

II. Comparaison de deux configurations

Il s'agit ici de voir les liens entre deux configurations rencontrées dans des problèmes a priori différents mais qui en fait portent sur la même figure une fois qu'on l'a complétée. Les outils sont ici la symétrie axiale et les cas d'isométrie des triangles. On verra que ces outils peuvent se compléter.

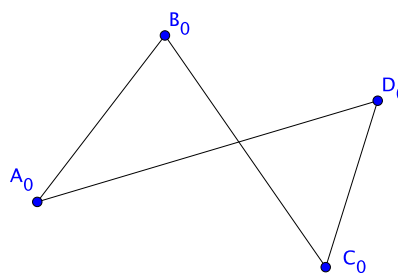
1. Configuration 1

On considère un quadrilatère croisé $ABCD$ dont les côtés $[BC]$ et $[AD]$ se coupent en O . On suppose que l'on a $AB = CD$ et $AD = BC$. On demande de montrer que $ABDC$ est un trapèze isocèle.

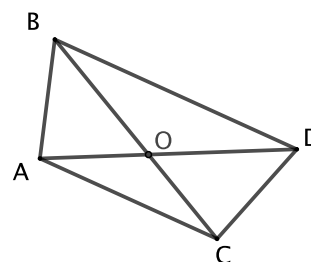
Il n'est pas évident de construire la figure. On peut transformer le problème en demandant simplement de construire la figure puis d'identifier des propriétés de cette figure et les démontrer. (On pourra penser à des égalités de longueurs, d'angles, au parallélisme, à la symétrie, etc.). Pour construire la figure, il faut en faire l'analyse, c'est-à-dire partir d'une configuration qui ne vérifie pas toutes les propriétés et chercher des conditions nécessaires qui permettent de construire.

On prend un quadrilatère croisé $A_0B_0C_0D_0$ sans autre contrainte. Supposons le problème résolu. Comme on doit avoir $AB = CD$ et $AD = BC$, les triangles ABC et CDA sont isométriques par le cas CCC.

On en déduit la construction : on prend un triangle ABC quelconque, et en partant de $[AC]$, on construit un triangle ADC isométrique à CBA , tel que D soit du même côté que B par rapport à (AC) et différent de B .



On obtient D comme intersection d'un cercle de centre C et de rayon AB et d'un cercle de centre A et de rayon BC . Ces cercles se coupent à cause des inégalités triangulaires dans ABC . Une fois la figure construite, il apparaît que D semble le symétrique de B par rapport à la médiatrice de $[AC]$. C'est ce qu'il faudra démontrer. On peut le faire de deux manières : soit en continuant avec les cas d'isométrie, soit en utilisant la symétrie orthogonale échangeant A et C .



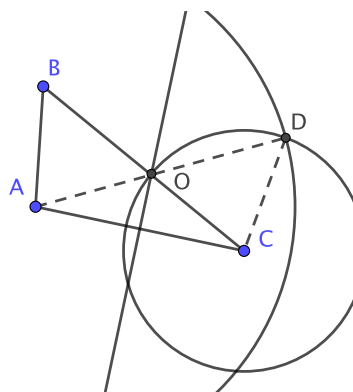
1ère idée : avec les cas d'isométrie

Dans les triangles ABO et CDO , les angles en O sont opposés par le sommet, les angles respectifs en B et D sont égaux par l'égalité des triangles ABC et CDA ; de plus on a $AB = CD$ donc les triangles ABO et CDO sont égaux. On en déduit que l'on a $OA = OC$ et $OB = OD$ donc O est sur la médiatrice de $[AC]$ et sur celle de $[BD]$. Il reste à voir qu'elles sont confondues.

Les triangles isocèles AOC et BOD ont leurs angles en O opposés par le sommet donc ils sont semblables. Les angles et sont égaux et en position d'alternes internes donc les droites (AC) et (BD) sont parallèles. La médiatrice de $[AC]$ est donc perpendiculaire à $[BD]$. Il y a une seule perpendiculaire à $[BD]$ passant par O , c'est donc la médiatrice de $[BD]$. On peut ajouter que $ABDC$ est un trapèze isocèle.

2ème idée : avec la symétrie

On considère la symétrie orthogonale d'axe (d) , la médiatrice de $[AC]$. Elle transforme B en un point D tel que l'on ait $CD = AB$ et $AD = BC$. D se trouve donc à l'intersection de deux cercles. Il faut prendre celui des deux points d'intersection qui est du même côté que B par rapport à (AC) pour avoir un quadrilatère croisé. C'est bien le symétrique de B parce que la symétrie d'axe (d) conserve les demi-plans délimités par (AC) . Le point O est sur l'axe de symétrie comme intersection de $[AD]$ et $[BC]$ qui se correspondent dans la symétrie donc on a $OA = OC$ et $OB = OD$.



La symétrie orthogonale peut être utilisée dès la phase d'analyse par le raisonnement précédent qui permet de construire. On peut en tirer des propriétés qui justifient la construction les égalités de longueurs ou d'angles que l'on a vues dans la version 1 ainsi que l'isométrie des triangles.

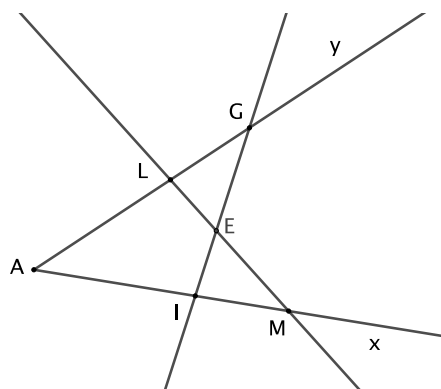
2. Configuration 2

On considère un angle $\widehat{(xAy)}$, deux points I et M de la demi-droite $[Ax)$ tels que $AI < AM$ et deux points L et G de la demi-droite $[Ay)$ tels que l'on ait $AI = AL$ et $AM = AG$. On note E le point d'intersection de (LM) et (GI) . Quelles autres propriétés remarque-t-on dans cette figure ? (On pourra penser à des égalités de longueurs, d'angles, au parallélisme, à la symétrie, etc.)

1ère idée : en démarrant avec les cas d'isométrie

On peut montrer les propriétés suivantes :

1. Les triangles AML et AGI sont isométriques (cas CAC) et toutes les égalités qui s'ensuivent.
2. Les triangles LGE et IME sont isométriques (cas ACA : angles en E opposés par le sommet, angles en G et M égaux comme conséquence du point 1 et donc aussi égalité des angles en L et I par la somme des angles d'un triangle, enfin $LG = IM$ par différence). On en déduit $LE = IE$ et $EG = EM$.



3. Les points A et E sont tous les deux sur les médiatrices de $[LI]$ et $[GM]$ à cause des égalités de longueur montrées précédemment. La droite (AE) est donc la médiatrice commune de $[LI]$ et $[GM]$ et donc axe de symétrie de la figure. On en déduit que (LI) est parallèle à (GM) et donc que $GLIM$ est un trapèze isocèle.

2ème idée : en démarrant avec la symétrie

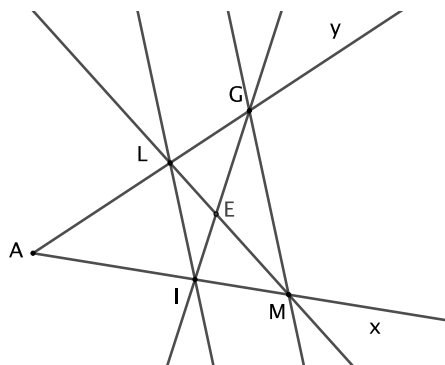
On considère la symétrie s par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{(xAy)}$. Elle échange les demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$, donc L, I d'une part et G, M de l'autre à cause des égalités de longueurs. On en déduit les égalités de longueurs ou d'angles mentionnées précédemment ainsi que les isométries de triangles et le fait que E est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{(xAy)}$. On a aussi le fait que (LI) et (GM) sont perpendiculaires à (AE) donc parallèles.

3. Comparaison des configurations

Les deux situations ne sont pas équivalentes du point de vue des connaissances à mettre en œuvre. La difficulté de la première réside d'abord dans la construction de la figure qui n'est pas évidente à partir de l'énoncé. Cependant ces deux configurations sont équivalentes du point de vue de leurs propriétés géométriques. Dans la première (AB) et (CD) se coupent en un point qu'on peut appeler H et qui joue le rôle du A de la

deuxième configuration. Le quadrilatère croisé $ABCD$ de la première configuration se retrouve en $LMIG$ dans la deuxième. Dans la deuxième configuration, la présence du point A rend plus naturel le recours à la symétrie orthogonale et elle est plus simple à utiliser parce que les égalités de longueur données sont celles de segments portés par les côtés de l'angle et qui se correspondent de manière plus évidente par la symétrie.

On ne part pas des mêmes hypothèses, on ne fait donc pas les mêmes démonstrations mais on a bien au final les mêmes propriétés qui relient les 6 points de ces figures (l'un d'eux n'étant pas explicité dans la première configuration). Quand on a tracé les six droites, on obtient le quadrilatère complet associé à un trapèze isocèle. Le rapprochement de ces configurations montre qu'il peut être plus simple pour traiter un problème d'enrichir la figure donnée pour l'inclure dans une sur-figure qui fait apparaître des idées nouvelles.



Références des annexes

- [Allart, Bkouche, 2019] Allart Boris, Bkouche Rudolf, *Cours de géométrie*, Ellipses, 2019.
- [Arsac, 1998] Arsac Gilbert, *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*, Aléas, IREM de Lyon, 1998.
- [Bkouche, 2000] Bkouche Rudolf, Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles, *Bull. APMEP*, 430, 613-629, 2000.
- [Cousin-Fauconnet, 1995] Cousin-Fauconnet Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.
- [Dieudonné, 1964] Dieudonné Jean, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris, 1964.
- [Euclide, 1978] Euclide, *Les éléments* (traduction Kayas), Éditions du CNRS, 1978.
- [Euclide, 1990] Euclide, *Les éléments* (traduction Vitrac), PUF, 1990.
- [Hartshorne, 1997] Hartshorne Robin, *Geometry : Euclid and beyond*, Springer, 1997.
- [Hilbert, 1971] Hilbert David, *Les fondements de la géométrie*, Dunod, Paris, 1971.
- [Kahane, 2002] Kahane Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, Paris, 2002.
- [Lion, 2001] Lion Georges, *Géométrie du plan*, Vuibert, 2001.
- [Perrin, 2006] Perrin Daniel, *Autour du théorème de Thalès*, 2006.
<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/ThalesDP.pdf>
- [Perrin, 2011] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.
- [Perrin, 2017] Perrin Daniel, L'enseignement de la géométrie au collège et au lycée, à paraître dans *CORFEM*, 2017.
<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/SurGeometrie/CorfemDP.pdf>
- [Perrin, 2050] Perrin Daniel, *Une axiomatique pour la géométrie du collège*, Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), 2050¹².

12. Avec le confinement dû au coronavirus, on peut espérer une parution plus proche ...

TITRE :

Enseigner la géométrie au cycle 4. Comparer des triangles pour démontrer

AUTEURS: Groupe Géométrie de l'IREM Paris

Martine Bühler, Guillaume Didier, Bernard Parzysz, Daniel Perrin, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Anne Pinvidic, Charlène Piot, Sébastien Planchenault et la participation de René Cori, Bernadette Denys, Gislain Dufraisse, Jean-Christophe Masseron

RESUMÉ :

Cette brochure s'adresse aux professeurs de collège mais aussi aux formateurs, aux IA-IPR et plus généralement à tous ceux qui s'intéressent à l'enseignement de la géométrie élémentaire. Elle est motivée par le retour dans les programmes des « cas d'égalité et de similitude » des triangles, notions nouvelles pour une majorité des professeurs de collège actuels et sur lesquelles les propositions des manuels parus en 2016 sont assez pauvres.

L'objectif est de montrer la puissance des cas d'égalité et de similitude des triangles comme outils de démonstration, plus accessibles que les transformations pour les élèves du collège. Le travail du groupe IREM s'appuie sur un certain nombre de réflexions mathématiques et didactiques, ainsi que sur des séquences réalisées en classe. Ces réflexions nous conduisent à proposer une progression compatible avec les programmes, permettant d'appuyer l'enseignement de la géométrie élémentaire au collège sur une axiomatique cohérente et compatible avec le développement des élèves, et facilitant la transition avec l'enseignement primaire.

Les chapitres 1 à 4 donnent les fondements théoriques, épistémologiques et didactiques de l'approche proposée. La deuxième partie propose et analyse des activités mises en œuvre dans les classes, notamment sur les triangles isométriques, le théorème de Thalès et les triangles semblables. Le chapitre 10 est une banque d'exercices et de problèmes avec de nombreux commentaires référant aux autres chapitres. Deux annexes donnent les fondements mathématiques de notre progression. Une troisième annexe présente un projet long mené en cinquième sur les pavages.

MOTS- CLÉS :

Enseignement de la géométrie, triangles isométriques, cas d'égalité des triangles, aires planes, théorème de Thalès, triangles semblables, cas de similitude, démonstration au collège.

Éditeur: IREM de Paris

Responsable de la publication: C.Hache

IREM de Paris – Case 7018

Université de Paris

75205 Paris cedex 13

irem_de_paris@univ-paris-diderot.fr

<https://irem.u-paris.fr/>

Dépôt légal : 2020

ISBN : 978-2-86612-397-0