INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

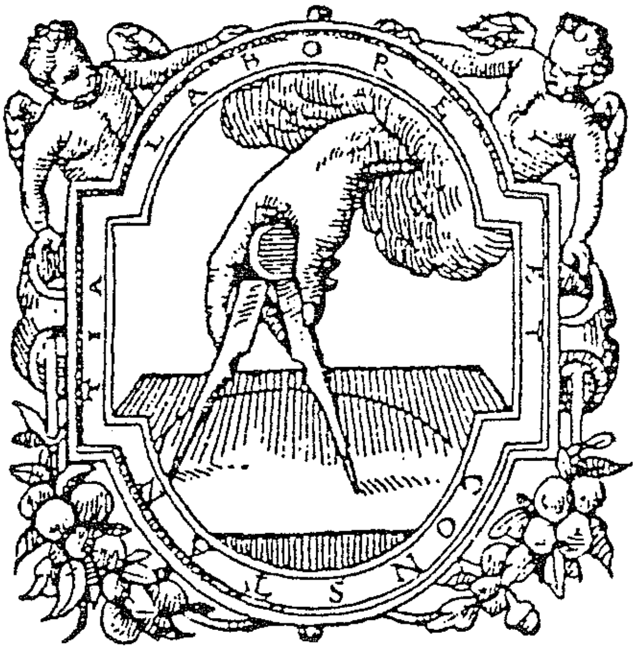
Reproduction de textes anciens
nouvelle série n°1

Jean-Étienne Montucla

Histoire des recherches sur la quadrature du cercle

UNIVERSITE - PARIS VII

Reproduction de textes anciens
nouvelle série n°1



Jean-Étienne Montucla

Histoire des recherches sur la quadrature du cercle

JEAN-ETIENNE MONTUCLA
1725 - 1799

Fils d'un négociant,MONTUCLA est né à Lyon le 5 septembre 1725 ; il appprend les langues et les mathématiques dans le collège jésuite de cette ville, l'un des meilleurs du Royaume. Après des études de Droit à Toulouse, il vient à Paris où, admis aux réunions littéraires qui avaient lieu chez le libraire éditeur JOMBERT, il côtoie l'intelligentsia parisienne, d'ALEMBERT, DIDEROT, COCHIN ... Son Histoire des recherches sur la quadrature du cercle lui vaut d'être nommé membre correspondant de l'Académie de Berlin en 1755.

MONTUCLA se consacre alors au travail immense de retracer l'histoire des mathématiques depuis ses origines. Histoire au sens large de l'époque, c'est-à-dire incluant la mécanique, l'astronomie, l'optique et la musique, un tiers seulement étant consacré aux mathématiques dites, de nos jours, pures. L'ouvrage parait en 1758 : le premier volume traite des origines, des mathématiques grecques et des mathématiques occidentales jusqu'à l'aube du XVIIème ; le deuxième volume est entièrement consacré au XVIIème siècle.

Toute sa vie,MONTUCLA travaille à une nouvelle édition de son livre, incluant les acquis du XVIIIème siècle. Il meurt pendant l'impression du troisième volume qui est complété par son ami Jérome LALANDE. Ce dernier ajoute un quatrième volume consacré à l'histoire de l'astronomie, de la géographie mathématique et de la navigation (MONTUCLA n'avait laissé à ce sujet que des fragments).

A partir de 1761,MONTUCLA occupe divers postes officiels : secrétaire de l'intendance du Dauphiné à Grenoble, astronome royal et secrétaire de TURGOT dans une mission à Cayenne (1764-65), inspecteur des bâtiments royaux ; il est aussi nommé censeur

royal en 1775. C'est pendant cette période qu'il publie une nouvelle édition, revue et très augmentée des Récréations mathématiques d'OZANAM (4 Vol., Paris, 1778), ainsi qu'une traduction, avec des remarques et des additions, des Vogages en Amérique du Nord de CARVER (Paris, 1784).

La révolution le prive de ses emplois et, malgré des subventions des pouvoirs publics, il meurt dans un grand dénûment le 18 décembre 1799.

Jean-Luc VERLEY

BIBLIOGRAPHIE DES OEUVRES DE MONTUCLA

Histoire des recherches sur la quadrature du cercle,
Paris, 1754 in 12°.

Recueil de pièces concernant l'inoculation de la petite vérole et propres à en démontrer la sécurité et l'utilité (en collaboration avec MORISOT-DESLANDES), trad. de l'anglais, Paris, 1756, in 12°.

Histoire des mathématiques, Paris, 1758, 2 Vol. in 4°.
Ibid, Nouvelle édition très augmentée, Paris, 1799-1802, 4 Vol. in 4°. Cette édition est disponible en fac-similé à la Librairie A. BLANCHARD, 9 rue de Médicis, 75005 Paris.

HISTOIRE
DES RECHERCHES
SUR LA
QUADRATURE
DU CERCLE;

Ouvrage propre à instruire des découvertes réelles faites sur ce problême célébre, & à servir de préservatif contre de nouveaux efforts pour le résoudre :

Avec une Addition concernant les problêmes de la duplication du cube & de la trisection de l'angle.

A PARIS,

Chez CH. ANT. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi en son Artillerie, rue Dauphine, à l'Image Notre Dame.

M. DCC. LIV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

PRÉFACE.

IL eſt dans les Sciences certaines recherches qu'on pourroit à juſte titre appeller les écueils de l'eſprit humain. Parmi celles à qui mille efforts inutiles ont acquis ce nom, la Quadrature du cercle eſt des plus célebres; ce n'eſt pas, on ſe hâte de le dire, que la Géométrie ne préſente des queſtions plus utiles, plus intéreſſantes, & à certains égards plus difficiles. Mais trop relevées pour ceux qui n'ont pas fait de grands progrès dans cette ſcience, elles ne ſont guères connues que du petit nombre de ceux qui ſe ſont rendu familieres les nouvelles méthodes & les découvertes que nous devons au dernier ſiécle.

A l'égard de la Quadrature du cercle, il s'en faut beaucoup que ſa célébrité ſoit renfermée dans des bornes ſi étroites : plus fameuſe, & de bien plus grande importance aux yeux de ceux à qui la Géométrie n'eſt connue que de nom, ou qui y ſont à peine initiés, qu'auprès des Geometres habiles ou intelligens, elle ne ceſſe d'exciter des efforts infructueux ; aucun problême n'a été tenté à plus de repriſes, avec des forces plus inégales & plus diſproportionnées à ſa difficulté. La plupart de ceux qui ſe livrent à cette recherche, ont à peine une idée claire de la queſtion, & des moyens qui y conduiſent, & qui ſont les ſeuls qu'admet l'eſprit géométrique ; c'eſt cependant de là que partent ces fréquens & pompeux programmes, qui annoncent au public cette découverte brillante & ineſpérée, qui félicitent leur

ſiécle de voir enfin éclore ce chef-d'œuvre de l'intelligence humaine. La claſſe la plus élémentaire de la Géométrie eſt depuis longtems tellement en poſſeſſion de fournir ſeule ces heureux Œdipes, que s'annoncer aujourd'hui comme étant en poſſeſſion, ou occupé à la recherche de ce problême, c'eſt élever contre ſoi le préjugé le plus légitime d'ignorance ou de foibleſſe d'eſprit.

Malgré l'étendue que ſemblent acquerir de plus en plus les connoiſſances mathématiques, il eſt ſi peu de perſonnes, hors les Mathématiciens de profeſſion, qui conçoivent avec netteté ce dont il s'agit dans la Quadrature du cercle, que nous avons jugé à propos de l'expliquer avant que d'aller plus loin. Nous avons eu auſſi en vûe cette claſſe de Lecteurs, à qui la multitude des livres, ou le tems que leur enlevent leurs occupations, ne permet gueres d'aller au-delà d'une préface, & qui desirent néanmoins d'acquerir quelque connoissance en tout genre. On a tâché de rendre celle-ci instructive pour eux ; ce qu'on va dire servira à leur faire concevoir distinctement la nature du problême, & à les mettre en état d'apprécier avec justesse de raisons ceux qui en annoncent la solution.

L'objet principal & primitif de la Géométrie, est de mesurer les différentes especes d'étendues que l'esprit considere ; mais mesurer n'est autre chose que comparer une certaine étendue à une autre plus simple, & dont on a une idée plus claire & plus distincte. Partant de ce principe, les Géometres ont pris la ligne droite pour la mesure à laquelle ils rapporteroient toutes les longueurs ; le quarré pour celle à laquelle ils

rappelleroient les surfaces quelconques ; le cube enfin pour celle des solides. Ainsi rectifier une courbe, quarrer une surface, cuber un solide, ne sont autre chose que déterminer leur grandeur, les mesurer. Quarrer un cercle, n'est donc pas, comme l'imagine un vulgaire ignorant, faire un cercle quarré, ce qui est absurde ; ou comme semblent le croire certaines gens, faire un quarré d'un cercle ; mais mesurer le cercle, le comparer à une figure rectiligne, comme au quarré de son diametre, & connoître son rapport précis avec ce quarré ; ou enfin, parce que l'un dépend de l'autre, déterminer le rapport de la circonférence avec le diametre. Lorsqu'on dit un rapport précis, on entend parler de cette exactitude qui est la vérité même, de cette exactitude avec laquelle le triangle est la moitié d'un parallelogramme de même

base & même hauteur, & une parabole ses deux tiers. Quant aux mesures qui ne s'écartent que de très-peu de la vérité, quelque insensible que soit cet écart, elles satisfont, il est vrai, à la pratique, parce que celle-ci ne peut jamais donner que des à-peu-près ; mais l'esprit géométrique ressent toujours une sorte de peine d'y être réduit, & il s'efforce de la secouer jusqu'à ce qu'il y soit parvenu, ou qu'il ait démontré l'impossibilité de le faire. On chercha sans doute long-tems le rapport numérique de la diagonale du quarré avec son côté, & quelques ignorans le cherchent encore, ou poussent l'imbécillité jusqu'à l'assigner. Les vrais Géometres ont cessé leurs poursuites depuis qu'ils sont en état de démontrer que cela est impossible. Il est fort probable que la Quadrature du cercle doit être mise dans une classe semblable ;

il y a déja plusieurs siécles que les habiles Géometres l'ont abandonnée, comme un sujet qui n'est propre qu'à les épuiser en efforts inutiles ; ils se sont bornés à perfectionner de plus en plus les moyens d'en approcher. En effet, au défaut d'une exactitude parfaite, ce qu'ils pouvoient lui substituer de mieux, étoit un à-peu-près indéfiniment voisin. A cet égard, la Géométrie semble n'avoir rien à desirer. *Archimede* démontroit autrefois que la circonférence étoit plus grande que le triple & les $\frac{10}{71}$ du diametre, & moindre que le triple & les $\frac{10}{70}$ ou la septiéme du même diametre. La différence de ces deux termes n'est qu'une 497e : ainsi il est évident qu'elle n'est qu'environ la 1500e de la circonférence, & qu'en supposant, ce qui approche de la vérité, que cette circonférence est voisine du milieu, entre les deux polygones, l'erreur sera à peine d'une 3000e.

Mais les Modernes, peu satisfaits de cette approximation, quoique commode dans la pratique & dans certains cas, l'ont considérablement perfectionnée. On sçait aujourd'hui que le diametre étant 1.00000, la circonférence est plus grande que 3.14159, & moindre que 3.14160. Desire-t-on une exactitude plus grande? on fait voir, que supposant ce diametre de 1.00000, 00000, la circonférence surpasse 3.14159, 26535, & qu'elle est surpassée par 3.14159, 26536. L'erreur est déja ici moindre qu'une 1.00000, 00000e. du diametre; elle est cependant encore énorme & grossiere, en comparaison de celle que le Géometre peut prévenir; l'imagination se refuse à en concevoir la petitesse, je dirois presque infinie. Si l'on employe le rapport donné par M. de *Lagni*, cette

erreur sera une moindre partie du diametre, que l'unité d'un nombre composé de cent-vingt-six chiffres. En supposant les étoiles fixes si éloignées du soleil que la parallaxe de l'orbite terrestre ne soit que d'une seconde, c'est-à-dire supposant un cercle dont le rayon fût au moins de 4250000000 diametres de la terre, on ne se tromperoit pas de l'épaisseur d'un cheveu, sur cette immense circonférence. Mais que dis je? Le rapport donné par *Ludolph Van Ceulen*, rapport composé seulement de 35 chiffres, est déja plus que suffisant pour prévenir cette erreur: néanmoins quelle disproportion de l'exactitude de l'un avec celle de l'autre! les plus communes notions de l'arithmétique suffisent pour en donner une idée.

Si l'histoire des efforts que le problême de la Quadrature du cercle a occasionnés, n'étoit que

celle des pygmées en Géométrie, qui l'ont entrepris, elle mériteroit bien peu la curiosité des Lecteurs. Mais les tentatives des Géometres anciens & modernes, pour qui cette recherche a été quelquefois le motif d'autres découvertes très-intéressantes, ou qui desespérant d'atteindre précisément au but, se sont bornés à en approcher de plus en plus, à l'aide de certaines méthodes fort ingénieuses; ces tentatives, dis-je, nous présentent des traits dignes d'attention: ce sont proprement les seuls dont il sera question ici. Le tems m'est trop précieux pour avoir donné un seul instant à déterrer quelque ridicule auteur de Quadrature: si j'ai parlé de quelques-uns d'eux dans un chapitre à part, c'est uniquement de ceux qui se sont présentés à moi dans le cours d'autres recherches.

Quelque peu dignes que soient

ces hommes singuliers d'occuper le loisir d'un Ecrivain judicieux, je ne puis résister à l'envie d'en tracer un portrait, qui sera avoué de tous ceux qui ont eu occasion de traiter avec eux.

Trois sortes de personnes travaillent à quarrer le cercle avec une pleine confiance en leurs succès. Je comprends dans la premiere classe, ces gens qui sans avoir la moindre connoissance de la Géométrie, ni des moyens qu'elle employe dans ses recherches, s'engagent dans celle de la Quadrature, sans sçavoir presque en quoi consiste l'état de la question. On les voit proposer avec une assurance qui excite la pitié, de grossiers méchanismes, incapables même, quand on les admettroit, de conduire à des à-peu-près de quelqu'exactitude. Celui-ci entoure le cercle d'un fil délié, & pense avoir par ce moyen la circonférence avec la derniere précision. Il y en a qui après cette belle opération, partagent ce fil en quatre parties égales, pour faire d'une d'elles le côté d'un quarré qu'ils prétendent égal au cercle. Ils ignorent cette vérité, que la Géométrie démontroit presque encore au berceau; sçavoir, que de toutes les figures d'égal contour, le cercle est celle qui renferme le plus d'étendue. On en trouvera qui proposeront de faire rouler un cercle sur un plan bien uni, ou d'en peser un, formé d'une matiere bien égale & uniformément épaisse, contre un quarré de même matiere; & j'ai vû souvent de ces gens, dont toute la Géométrie consistoit à mener méchaniquement une perpendiculaire ou une parallele, faire après bien des mysteres, l'ouverture de quelqu'un de ces ridicules moyens de quarrer le cercle, & insulter ensuite par

un souris moqueur, aux Géometres qui n'avoient pas sçu les imaginer.

Il y a d'autres chercheurs de Quadrature qui, un peu plus instruits dans la Géométrie, semblent ne s'en servir que pour s'égarer dans un labyrinthe de paralogismes. Les premiers dont j'ai parlé, gens du moins peu incommodes, se contentent avec une espece de satisfaction philosophique, d'être en possession du secret; mais ceux de la seconde classe ne manquent gueres de fatiguer les Géometres, & sur-tout les Académies, par leur importunité à solliciter l'examen & le jugement de leur prétendue découverte; ils la portent de tribunal en tribunal, c'est-à-dire d'Académie en Académie; de celles de la province, car elles ont souvent des quadratures à examiner en premier ressort, à celle de la

capitale. Ils se plaignent avec amertume, d'une espece de déni de justice quand on refuse de les écouter, & ils manquent rarement de récuser leurs juges, ou de les prendre à partie s'ils en sont condamnés. Vainement viendra-t-on quelquefois à bout de leur montrer la foiblesse de leurs raisonnemens, bientôt l'édifice est réparé; bientôt engagé dans un dédale aussi tortueux que le premier, notre pauvre Quadrateur vient de nouveau harceler son juge: heureux celui-ci, quand il peut promptement l'obliger à le récuser & à le citer devant le public, en lui dévoilant sa découverte. Une espece de fatalité semble avoir ordonné que tous ceux qui se persuadent une fois d'être en possession de la Quadrature du cercle, vivront & mourront dans cette persuasion intime. C'est une manie qui, pire que celle du Héros

de la Manche, ne les quitte pas même dans leurs derniers momens; il n'en est aucun qui manque d'en appeller au jugement d'une postérité plus équitable, à moins que de mauvaise humeur contre leur siécle, ils n'aiment mieux s'en venger en cachant leur secret. » Ingrats contemporains, siécle barbare, s'écrioit un d'eux dans » ces derniers instans, je voulois » vous enseigner la plus belle dé» couverte qui ait jamais été faite, » je voulois vous desabuser des » erreurs grossieres dont vous por» tez le joug; vous m'avez rebuté, » hé bien, je sortirai de ce monde » sans l'éclairer «. Effectivement il mourut sans faire part de son précieux secret, & les Géometres n'ont pas eu la complaisance de le regretter.

Il y a une troisiéme espece de Quadrateurs, plus singuliers encore, mais moins incommodes, en ce que leur maniere de penser a bientôt terminé l'examen de leur découverte. Ce sont ces esprits d'une trempe, ce me semble, inconnue aux siécles passés, qui sçavent se jouer des principes les plus évidens de la Géométrie, qui ont le courage de heurter de front les axiômes du sens commun. M. *Liger*, je ne le nomme que parce qu'il s'est nommé si souvent dans les Mercures & ailleurs, M. *Liger* vous dira avec une grande assurance, que le tout n'est pas plus grand que la partie, que la racine quarrée de 288 est exactement la même que celle de 289, que 50 a la même racine que 49, &c. Il fera plus, il entreprendra de vous le prouver par un méchanisme à peine capable d'en imposer à l'artisan grossier qui le pratique. Il établit enfin une Géométrie toute nouvelle sur les débris de l'ancienne. Prétendre dé-

sabuser des esprits de cette espece, c'est vouloir perdre son tems; quand on est venu à un pareil excès de rêverie, on a perdu le droit d'être frappé de l'évidence.

J'ai souvent remarqué avec surprise, combien peu ceux qui se livrent à rechercher la Quadrature du cercle, ou qui croyent la posseder, sont instruits de ce que les Géometres ont trouvé sur ce sujet; à peine connoissent-ils les plus simples approximations; & à coup sur, la maniere dont on y est parvenu leur est absolument inconnue; car il est métaphysiquement impossible que les connoissant on se fasse illusion: aussi leur ignorance à cet égard est extrême; j'en appelle au témoignage intérieur des Quadrateurs, sans doute en grand nombre, qui liront ceci.

Cette remarque m'a porté à croire, qu'un moyen peut-être

efficace de diminuer le nombre de ceux qui s'adonnent à cette recherche, étoit de rassembler sous un même point de vûe les découvertes réelles de la Géométrie sur ce problême fameux. Il est en effet à présumer que si les vérités qu'on a exposées plus haut, & plusieurs autres qu'on développe dans le cours de cet Ouvrage, étoient plus universellement connues, on verroit moins de ces malheureuses victimes d'une entreprise mal réfléchie. A la vérité j'espere peu de ceux qui ont déja résolu le problême; la plûpart sont dans la disposition prochaine de nier les vérités les mieux établies, dès que la contradiction les y conduira. Le coup est porté, & l'on peut leur appliquer ce vers d'*Horace*,

Et tribus Anticiris caput insanabile...

Mais je ne doute point que cette histoire ne soit propre à préserver

du même travers ceux qui n'ont point encore l'esprit préoccupé. Elle pourra aussi servir à rendre le repos à quelques personnes de bonne foi, qui privées des moyens de s'informer de ce qu'on a déja fait, s'épuisent en efforts inutiles. Les gens sensés à qui la Géométrie est peu connue, pourront prendre ici une connoissance exacte de la question, & porter un jugement sain & équitable sur les prétentions de ceux dont la vaine confiance pourroit peut-être leur en imposer. Pour écarter enfin cette foule de Quadrateurs qui obsédent les Académies, ne pourroit-on pas les obliger à s'instruire ici, comme par un préliminaire, des vérités reçues de l'aveu unanime des Géometres, sur la grandeur du cercle? Les réduisant par ce moyen, ou à les contester ou à les admettre, ils seront dans le premier cas indignes d'être écoutés,

& dans le second, la conviction intime de leur erreur sera peut-être bien prochaine: je dis peut-être, car je n'oserois l'assurer; l'ignorant, de même que l'homme de mauvaise foi, sçait se ménager mille ressources que tout autre n'auroit jamais imaginées.

J'ai enfin pensé que cette suite de découvertes sur la mesure du cercle, rassemblées sous le même point de vûe, pouvoit former un spectacle propre à flatter la curiosité des Géometres. Plusieurs d'entr'elles méritent l'attention des plus habiles, comme tenant de près au développement & à la perfection que la Géométrie a reçue dans le dernier siécle. C'est ce que l'on verra clairement dans le chapitre quatriéme, où j'expose les inventions successives de *Wallis*, *Brouncker*, *Newton*; inventions toutes liées ensemble, & aboutissantes au calcul intégral & à

plusieurs autres méthodes analytiques de grande importance.

L'utilité qui paroît devoir résulter d'un ouvrage de cette nature, & l'agrément qu'il présente pour ceux qui sont un peu curieux de connoître les pas de l'esprit humain, avoient ce semble frappé avant moi un Analyste habile (M. *de Lagni*): le *commercium philosoph.* (a) entre *Leibnitz* & *Bernoulli*, nous apprend qu'il l'avoit projetté. Ce Géometre, le fleau des Quadrateurs de son tems, étoit en état de remplir parfaitement cet objet, & j'ai été surpris de voir que M. *Leibnitz*, dans le même recueil de Lettres, semble se défier de sa capacité, & craindre qu'il ne donnât qu'un ouvrage imparfait, à moins qu'il ne le lui communiquât ou à M. *Bernoulli*. J'ai recherché quelle pouvoit être la cause d'une défiance si mal

(a) P. 300, 302. II. vol.

fondée, & je pense l'avoir trouvée. *Leibnitz* craignoit apparemment que M. *de Lagni* n'ajoutât trop de foi à ce qu'il appelloit les calomnies des Anglois, au sujet de ses découvertes dans les nouveaux calculs, dont l'une est la Quadrature du cercle, exprimée par une suite infinie de nombres; découverte dont il fut pendant longtems fort jaloux, & que les Anglois l'ont accusé d'avoir empruntée de *Gregori*. D'un autre côté, M. *de Lagni* quoique connoissant les calculs de l'infini, fut toujours un de ceux qui négligerent avec affectation d'en faire usage; & peut-être à cet égard étoit-il à craindre en effet qu'il ne leur rendît pas toute la justice qui leur étoit dûe. Je saisis cette occasion de justifier un autre Académicien encore vivant, qu'on voit traité dans le même endroit avec autant d'injustice. Celui-ci méritoit

méritoit encore moins d'être enveloppé dans ce jugement précipité; il n'avoit aucun fondement, si ce n'est que l'un & l'autre de ces Académiciens n'étoient point connus de *Leibnitz*. Mais comment le dernier l'auroit-il été, puisqu'il ne faisoit alors que d'entrer dans la carriere de la Géométrie? Les sçavans Mémoires qu'il a donnés bientôt après dans les recueils de l'Académie, & qui prouvent qu'il étoit dès lors également versé dans l'une & l'autre analyse, auroient non seulement calmé les craintes de *Leibnitz*, mais lui auroient attiré son estime.

Je n'ai rien dit dans le cours de cet Ouvrage, de l'Auteur de l'étrange *Prospectus* & de quelques autres pieces de la même nature, qui nous annoncerent l'été passé la Quadrature du cercle. Par égard pour son nom & ses autres qualités qui le rendent estimable à ceux qui le connoissent, en même tems qu'ils le plaignent de sa maniere de penser, qui n'a peut-être jamais eu d'exemple, je voulois me taire sur la singularité de ses prétentions, malgré le bruit qu'elles faisoient dans le monde. J'espérois que quelques amis ou versés, ou du mois plus instruits dans la Géométrie, le remettroient sur la voie de la vérité ; mais la publication de sa prétendue Quadrature dans un petit *in*-4°. magnifiquement orné de cartouches, vient de m'apprendre qu'apparemment on y a travaillé sans succès, & j'ai crû ne pouvoir me dispenser d'en porter le jugement qu'elle mérite. Les siécles à venir croiroient-ils, si ce monument ne le leur attestoit, qu'on ait pû avancer des propositions aussi absurdes, aussi directement contraires à la saine raison, que celles sur lesquelles cet Auteur appuye sa prétendue découverte,

& qu'il substitue aux axiômes jusqu'ici reçus de l'aveu de tous les hommes? Deux figures ne sont plus égales quand elles se touchent dans tous leurs points, dans toute leur étendue ; il suffit, suivant M. *de Causans* qu'elles se touchent dans quelques points, c'est-à-dire dans ceux où elles peuvent se toucher. De là suit aussi ce nouveau principe, digne rejetton d'un axiôme de cette espece, que la partie est égale au tout ; que dis-je, que dans chaque tout on peut assigner plusieurs parties qui lui sont égales. Aussi le quarré est, dit-il, précisément égal au cercle qu'il renferme, & même celui-ci à une autre figure dont les angles saillants s'appuyent seulement sur sa circonférence. L'Auteur enfin détermine la figure de la terre, les longitudes, la déclinaison de l'aiguille aimantée, sur des raisons qui n'en seroient ni plus ni moins valables,

quand la terre seroit de forme cubique ou pyramidale. Je me couvrirois de ridicule auprès des Lecteurs sensés, si j'entreprenois d'opposer les moindres raisonnemens à ces prétentions. Il n'est personne, faisant usage de sa raison, qui ne soit persuadé que les vérités métaphysiques contestées par M. *de C.* sont plus certaines qu'il ne l'est que jamais son *Prospectus* singulier ait vû le jour, qu'il y ait eu des souscriptions ouvertes pour parier contre lui, & qu'il ait publié sa Quadrature. Pour tout autre enfin que lui-même, elles sont plus incontestables que son existence propre.

Au reste il est bien facile de reconnoître la cause de l'erreur de M. *de C.* elle a sa source dans la méprise où il donne sur la simple définition de l'angle & sur ce qui le constitue. La surface renfermée entre ses côtés, la longueur de

ces côtés n'entrent pour rien dans la grandeur d'un angle, & cette grandeur ne sert à rien pour déterminer la surface qu'il renferme avec une troisiéme ligne qui le borne. M. *de C.* suppose néanmoins le contraire, & en fait le fondement de sa Quadrature. C'est en sçavoir encore trop peu en Géométrie, pour prétendre redresser les idées des Géometres.

AVIS AU LECTEUR.

QUELQUES affaires pressantes & qui obligeoient l'Auteur à des absences fréquentes de la Ville, ne lui ayant permis que de jetter un coup d'œil sur les premieres feuilles à mesure qu'elles s'imprimoient, afin de ne point faire languir l'impression, on prie le Lecteur de corriger d'après l'errata les fautes qu'on y releve, & de suppléer à celles qui auroient échappé à la révision qu'on a faite de l'ouvrage entier. On se flate qu'il n'en est aucune qui concerne le fond du sujet.

TABLE
DES MATIERES.

SOMMAIRE DES CHAPITRES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

exprime le cercle par une suite infinie de termes, & calcule une approximation en onze décimales. IV. Adrianus Romanus la pousse à dix-sept, & Ludolph à trente-cinq. V. Idée du travail immense de Lud. VI. Snellius trouve des moyens pour approcher à moins de frais de la mesure du cercle. Ses propositions fondamentales. Facilité qui en résulte pour déterminer des limites très-rapprochées du cercle. Il vérifie la proportion de Ludolph. Expression qu'il donne pour les cordes des arcs continuellement soudoubles. Grandeurs des polygones inscrits & circonscrits qu'il en tire. Leur usage pour vérifier les quadratures prétendues. VII. Addition que fait M. Huygens aux découvertes de Snellius. Diverses opérations géométriques qu'il propose pour trouver la grandeur approchée des arcs ou des espaces circulaires. Note qui en contient quelques autres. VIII. Idée d'un ouvrage particulier de M. Huygens, qui a quelque trait à la Quadrature du cercle. IX. Histoire des

efforts de Gregoire de S. Vincent pour y parvenir. Exposition de sa Quadrature. Contestation qu'elle occasionne. Elle est réfutée par Descartes, Huygens & le Pere Leotaud. X. Autre querelle élevée entre Gregori & M. Huygens, sur une démonstration que donnoit le premier, de l'impossibilité de la Quadrature du cercle. Raison de Gregori. Ses propositions sur les limites des secteurs circulaires, elliptiques & hyperboliques. XI. Raisons de pencher pour l'impossibilité de la Quadrature définie du cercle. Démonstration de celle de l'indéfinie. Addition faite à ce chapitre, où l'on se détermine à regarder la Quadrature, même définie, comme impossible. Voyez à la fin de l'ouvrage.

CHAPITRE IV.

I. Idée générale de ce chapitre. II. Objet de l'arithmétique de l'infini. Découvertes de Wallis & jusques où il les pousse. III. Il est arrêté à la mesure du cercle & imagine

ses interpolations. Idée & exemple de cette méthode. IV. Il exprime la grandeur du cercle par une suite infinie de nombres. V. Il regarde la Quadrature définie comme impossible, & sur quel fondement. Nouveaux motifs de se le persuader. VI. Autre expression de la grandeur du cercle, donnée par Mylord Brounker, en fraction d'une forme particuliere. VII. Usage qu'a fait dans la suite M. Euler des fractions de cette espece. VIII. Développement de la maniere dont Newton, travaillant d'après les idées de Wallis, trouve la premiere suite générale pour le cercle. IX. Autres moyens qui se présentent ensuite à lui. X. Il les communique à Barrow, Collins, de même que presque tout le calcul moderne, les quadratures & rectifications des courbes, la méthode des suites, &c. Diverses expressions qu'il donne des arcs & des segmens circulaires. XI. M. Jacques Gregori devine le principe de Newton, & ajoute à ses découvertes. Suite qu'il avoit trouvée précédem-

ment pour le cercle. Il donne celle de l'arc par la tangente & plusieurs autres. Eloge de ce Géometre. Justice que lui rend Newton. XII. M. Leibnitz trouve de son côté la même suite. On le défend contre l'accusation de plagiat que lui ont intenté quelques Anglois. XIII. La même suite trouvée par M. de Lagni. Autre motif d'apologie pour M. Leibnitz. XIV. Diverses expressions particulieres de la grandeur du cercle ou de ses parties. XV. Utilité évidente de ces suites quand elles convergent sensiblement. XVI. Maniere de les employer commodément pour en tirer des approximations en grands nombres. Exemple de cette méthode. XVII. Avantages de la suite par la tangente, & la maniere de s'en servir. XVIII. Emploi qu'en ont fait quelques Géometres modernes, comme MM. Sharp, Machin, de Lagni. Approximation en soixante-quinze chiffres donnée par ce premier, poussée à cent par le second, & à cent vingt-sept par le dernier. XIX. Défauts qu'ont les suites assez souvent, & en particulier celle de l'arc par la tangente. XX. Moyen par lequel M. Euler remédie à celui de l'irrationalité. XXI. Maniere dont il obvie au peu de convergence de la suite qui exprime l'arc de 45°. par la tangente avec un exemple. Celle de M. Simpson aussi éclaircie par un exemple. XXII. Utilité des suites pour en tirer dans la pratique des expressions d'un calcul simple & cependant assez exact. Exemples qu'on en donne d'après Newton, Leibnitz, &c. Moyen de l'auteur pour trouver par approximation la somme d'une suite. XXIII. Exposition de la méthode de quarrer les courbes par la connoissance d'un petit nombre d'ordonnées équidistantes, & son application au cercle. Essai de commentaire sur la méthode différentielle de Newton. XXIV. Autre méthode donnée par M. Simpson, appliquée au cercle. XXV. Précis d'un écrit de M. Jean Bernoulli sur la mesure du cercle.

CHAPITRE V.

I. Motifs qui nous ont déterminé à parler de quelques-uns de ceux qui se sont singularisés par leurs erreurs sur la Quadrature du cercle. II. Histoire de quelques Quadrateurs anciens. III. Les siécles d'ignorance fournissent grand nombre de Géométres de cette espece, qu'on ne s'est pas mis en peine de tirer de l'obscurité. IV. Le Cardinal de Cusa réfuté par Regiomontanus. V. Simon Duchesne donne occasion à Metius de trouver son rapport célebre. VI. Oronce Finée annonce la Quadrature du cercle, la duplication du cube, la trisection de l'angle, &c. Il est réfuté par Buteon, Nonius. En quoi consistoit son erreur. VII. Joseph Scaliger se met sur les rangs, & traite Archimede & les Géometres avec hauteur. Viete, Adrianus Romanus & Clavius le réfutent; ce dernier sur-tout le tourne en ridicule, & s'en attire de grosses injures VIII. Quelques Quadrateurs des plus célebres, tirés

de la foule nombreuse qu'ils composent. Longomontanus, Jean-Baptiste Porta, Hobbes, Delaleu, Olivier de Serres, Mallemant de Messange, le sieur Mathulon, sa punition. Le sieur Basselin. IX. Précis des découvertes singulieres de quelques Quadrateurs vivans. Le sieur Clerget, le sieur Liger. Principes admirables de ce dernier.

CHAPITRE VI.

I. Raisons qui nous ont engagé à joindre ici l'histoire des problêmes des deux moyennes proportionnelles continues, ou de la duplication du cube & de la trisection de l'angle. II. En quoi consiste le premier de ces problêmes, & d'où il dépend. III. Histoire qu'en font quelques Ecrivains anciens. Autre histoire rapportée par Eratostenes. IV. Solution méchanique proposée par Platon. V. Autre donnée par Architas. VI. Menechme résout le problême de deux manieres différentes par les sections coni-

ques. Expositions de ses solutions & remarque à leur sujet. VI. Eudoxe le résout par des courbes particulieres qu'il imagine à ce sujet, mais qui ne nous sont pas parvenues. VII. Idée de la solution d'Eratostenes. VIII. Solutions d'Appollonius, Philon & Heron. IX. Celle de Nicomede par la conchoïde, approuvée par Newton, & regardée comme préférable à celles qui emploient les sections coniques. X. Maniere dont Pappus résout le problême; ce qui donne lieu à l'invention de la cyssoïde de Diocles. Celle de Sporus peu différente de celle de Pappus & Diocles. XI. Sur la trisection de l'angle; problêmes auxquels on voit d'abord qu'elle se réduit. Premieres manieres dont les Anciens le résolurent par l'hyperbole & la conchoïde. XII. Autre maniere dont les Anciens appliquerent l'hyperbole à cette question. XIII. Sur la quadratrice, la spirale & autres courbes semblables. XIV. Indication générale de diverses solutions que les Géometres moder-

Fin de la Table des Sommaires.

APPROBATION, du Censeur Royal.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, un Manuscrit qui a pour titre, *Histoire de la Quadrature du cercle.* Cet ouvrage annonce dans son Auteur une vaste érudition & de profondes connoissances en Géométrie. Il m'a donc paru qu'il étoit tout-à-fait digne de l'estime des connoisseurs en ces matieres. A Paris, ce premier Mai 1754.

LA CHAPELLE, *Membre de l'Académie des Sciences de Lyon, & de la Société royale de Londres.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Imprimeur-Libraire à Paris, Adjoint de sa Communauté, nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au public des Ouvrages qui ont pour titre: *Histoire des recherches sur la Quadrature du cercle*, par M. de M. *Histoire des Mathématiques*, par le même; *l'Art de la Guerre pratique*, par M. de Saint-Geniés; *Histoire de l'Astronomie*, par M. Esteve; *Petit Dictionnaire portatif de l'Ingénieur*, par M. Belidor; *Elémens d'analyse pratique*, traduits de l'Anglois de M. Simpson; s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de privilége pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter ledit Exposant, nous lui avons permis & permettons par ces présentes, de faire imprimer lesdits Ouvrages autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de *neuf années* consécutives, à compter du jour de la date desdites présentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs & autres d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changemens ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit exposant ou de ceux qui auront droit de lui; à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de six mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit exposant, & de tous dépens, dommages & intérêts: à la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, suivant la feuille imprimée & attachée pour modéle sous le contrescel des présentes; que l'impétrant se conformera en tout aux réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; & qu'avant de les exposer en vente les manuscrits ou imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le Sieur de Lamoignon, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires de chacun dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le Sieur de Lamoignon, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur de Machault, Commandeur de nos Ordres; le tout à peine de nullité des présentes: du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies, collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de haro, Charte normande & Lettres à ce contraires; car tel est notre plaisir. Donné à Fontainebleau le vingt-huitiéme jour du mois d'Octobre l'an de grace mil sept cens cinquante quatre, & de notre regne le quarantiéme. Par le Roi en son Conseil.

PERRIN.

Registré sur le Registre treize de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 429. fol. 334. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par l'Edit du 28 Février 1723. A Paris le 5 Novembre 1754.

DIDOT, *Syndic.*

ERRATA.

PAge 20, *ligne* 19, fig. 1. *lisez* fig. 2. *Pag.* 23, *lig.* 7, fig. 2, *lis.* fig. 3. *Pag.* 32, *lig.* 14, ils, *lis.* elles. *Pag.* 34, *lig.* 21, apperçu, *lis.* apperçue. *Pag.* 39, *lig.* 23, jamais, *lis.* jamais rien. *Pag.* 45, *lig.* 21, fut, *lis.* fut bientôt. *Pag.* 46, *lig.* 17, *ajoutez* V. *Pag.* 59, *lig.* 8, encore davantage, *lis.* beaucoup plus. *Pag.* 60, *lig.* 18, ils, *lis.* elles. *Pag.* 66, *lig.* 15, VIII. *lis.* IX. *Pag.* 77, *lig.* 10, proportion, *lis.* proposition. *Pag.* 78, *lig.* 14, solidité, *lis.* justesse. *Ibid. lig* 16, *cyclometris*, *lis. cyclometria*. *Pag.* 83, *lig.* 4, rejetté, *lis.* rejettée. *Pag.* 86, *lig.* 19, VII, *lis* X. *Pag.* 92, *lig.* 5, appliqué, *lis.* appliquée. *Pag.* 100, *lig.* 7, X, *lis.* XI. *Pag.* 101, *lig.* 18, n'étoit, *lis.* n'est. *Pag.* 108, *lig.* 15, étant a, on, *lis.* étant *a*. On. *Pag.* 109, *lig.* 21, soient donc, *lis.* soient. *Pag.* 113, *lig.* 14, serrés, *lis.* serrées. *Pag.* 116, *lig.* 2, designé, *lis.* designée. *Ibid. lig.* 8, déterminoit, *lis.* déterminoient. *Pag.* 121, *lig.* 10, trouve, *lis.* trouvera. *Pag.* 125, *lig.* 5, on a donc, *lis.* elles sont. *Pag.* 126, *lig.* 9, plus, *lis.* plus à déterminer. *Pag.* 139, *lig.* 15, des, *lis.* les. *Pag.* 144, *lig.* 7, fort probable, *lis.* vraisemblable. *Ibid. lig.* 22, n'avoit, *lis.* n'a. *Pag.* 186, *lig.* 2, DE, *ajoutez* (fig. 22.) *Pag.* 198, *lig.* 22, AE *ea*, *ajoutez* (fig. 24.) *Pag.* 235, *lig.* 16, ce qui est impossible, *lis.* qu'on ne sçauroit trouver. *Pag.* 246, *lig.* 10, *ajoutez* fig. 27.

HISTOIRE

HISTOIRE DE LA QUADRATURE DU CERCLE.

CHAPITRE I.

En quoi consiste la quadrature du Cercle : diverses manieres de la considérer : quel degré d'utilité on doit lui assigner.

I. QUARRER le Cercle, ou, pour s'énoncer plus généralement, une figure quelconque, c'est assigner l'étendue précise qu'elle renferme : une raison fort naturelle a donné lieu à cette maniere de parler. Le quarré est, de tou-

tes les figures, la plus simple, la plus aisée à mesurer, une seule de ses dimensions étant connue. Cela fit penser aux Géometres qu'ils ne pouvoient donner une idée plus distincte de la grandeur d'une surface quelconque, qu'en déterminant le quarré qui l'égaleroit; de là mesurer une figure, quarrer une figure, devinrent & sont encore des termes synonimes en Géométrie.

II. Il s'agit donc dans la quadrature du Cercle, de trouver l'étendue du cercle, comme dans la Géométrie élémentaire on trouve celle d'un triangle ou d'une figure rectiligne; je veux dire avec cette exactitude & cette précision qui sont la vérité même. Cette comparaison me servira encore à faire sentir quelle est la nature des voies que la Géométrie admet seules pour y parvenir. Il seroit ridicule de mesurer, le dirai-je, avec un compas, ou un fil, ou telle autre maniere méchanique qu'on voudra, la hauteur d'un triangle, lorsque ses côtés

donnés, ou telles autres conditions du problême, suffisent pour déterminer cette hauteur; c'est au raisonnement seul à le faire. Il en doit être de même dans la question présente : il y a un rapport entre l'étendue du cercle & celle du quarré de son diametre, entre la longueur de ce diametre & la circonférence, il y a, dis-je, un rapport déterminé & lié avec les propriétés du cercle; on ne doit donc employer pour parvenir à sa connoissance, que le raisonnement & le calcul fondés sur ces propriétés. Toute voie méchanique est interdite; l'esprit géométrique s'en indigne & le rejette, non par une fausse délicatesse, mais parce que quelque perfection qu'on lui supposât, aucune d'elles n'est capable de conduire à la même exactitude que le raisonnement. Je demande pardon aux Géometres d'entrer dans ce détail, mais je les prie en même tems de faire attention que quelque élémentaire qu'il soit, il n'est encore que trop de personnes à qui il peut être utile, & qui, sans cet avis, seroient capables de tenter ces moyens réprouvés par la Géométrie.

III. On appelle quadrature absolue celle que je viens de décrire, & par laquelle on a exactement & précisément la grandeur d'une figure. On quarre ainsi la parabole & plusieurs autres figures curvilignes; on fait plus, on connoît aussi avec cette exactitude l'étendue d'un grand nombre de segmens de surfaces courbes, soit sphériques, cylindriques, coniques, &c. Je ne nomme ici que les plus connues. Mais il y en a un plus grand nombre encore que l'on désespere de connoître jamais dans cette perfection. Et parmi celles qui résistent ainsi à tous les efforts de la Géométrie, le cercle se présente le premier.

IV. On s'étonnera, sans doute, que ce qui est si facile dans les figures rectilignes, devienne tout-à-coup si difficile

dès le premier pas que l'on fait vers les figures courbes; la surprise augmentera même en faisant attention qu'un grand nombre de figures, en apparence moins simples que le cercle, sont cependant susceptibles de quadrature absolue. Je vais tâcher d'en donner une raison : ne seroit-elle point que cette simplicité attribuée au cercle n'est qu'imaginaire, & nullement celle de la nature? Sur quel motif, en effet, regardons-nous le cercle comme plus simple que les autres figures? nous y sommes déterminés par l'uniformité de son contour, par l'égalité constante des lignes tirées de son centre à la circonférence, égalité qui facilite beaucoup sa description. Mais ces avantages s'évanouissent aux yeux du Géometre qui analyse les propriétés de cette figure; il n'y voit qu'une espece particuliere d'ellipse, dans laquelle l'égalité accidentelle de deux lignes a rendu égales toutes celles qui s'étendent de son centre à sa cir-

conférence. Du reste, cette égalité n'influe en rien sur les rapports de ses ordonnées aux abcisses, sur celui des polygones inscrits & circonscrits qui le limitent. Les courbes où ces rapports sont plus simples, comme la parabole, quoique moins réguliere à nos yeux, sont absolument quarrables: le cercle où il est plus compliqué, sera probablement toujours rebelle à la Géométrie.

V. Lorsque les courbes ne sont pas susceptibles de quadrature absolue, les Géometres se bornent à substituer à la vérité un à peu près qui n'en differe qu'insensiblement. C'est là ce qu'on appelle quadrature approchée; expédient, il est vrai, toujours employé avec regret, mais néanmoins fort souvent nécessaire; il a fallu y recourir pour le cercle, & peut-être la Géométrie y a plus gagné que si l'on eût bientôt trouvé sa quadrature absolue. L'impossibilité d'y parvenir a d'autant mieux fait éclater la sagacité & l'esprit de ressource des habiles Géo-

metres; elle a été le motif d'une foule d'inventions qu'ils ont imaginées pour atteindre ou pour approcher du but. On en trouvera des exemples remarquables dans la suite de cette Histoire.

VI. La nature du cercle établit une telle liaison entre la mesure de son aire & la longueur de sa circonférence, que l'une étant connue, l'autre l'est aussi nécessairement. On aura donc également la solution du problême, soit qu'on détermine immédiatement quelque espace rectiligne égal au cercle, soit qu'on trouve une ligne égale à sa circonférence. Avant *Archimede*, inventeur de ce rapport, on tentoit le premier moyen; depuis lui jusqu'à la nouvelle Géométrie, les efforts des Géometres s'étoient principalement tournés vers la dimension de la circonférence : il est aujourd'hui libre de choisir l'une ou l'autre de ces deux voies; les nouveaux calculs s'y prêtent également. Mais, il faut bien le remarquer, cet avantage eſt particulier au cercle ; c'eſt peut-être la ſeule figure courbe dont la rectification & la quadrature tiennent de ſi près l'une à l'autre.

VII. On ſçait encore que la détermination du centre de gravité d'un arc ou d'une portion quelconque de cercle, la tangente de la ſpirale & de pluſieurs autres courbes, la terminaiſon de la quadratrice, donneroient la quadrature du cercle ; mais tous ces problêmes en dépendent eux-mêmes, comme je le fais voir ailleurs, ſi intimement, que de quelque maniere qu'on les enviſage, c'eſt toujours elle qui ſe préſente la premiere. Ils ne ſçauroient jamais ſervir de moyens pour y parvenir.

VIII. Les Géometres diſtinguent deux manieres de quarrer les courbes, bien inégales en perfection ; ils nomment l'une définie, & l'autre indéfinie. En appliquant ceci à l'objet préſent, la quadrature définie du cercle feroit la meſure de ſon aire, ou entiere, ou ſeu-

lement de quelque ſegment déterminé ; comme $CDBP$, ou APB (*fig.* 1.), les lignes CP, ou PA, ou AE ayant au rayon une certaine raiſon déterminée. Si quelque méthode donnoit en général la quadrature d'un ſegment quelconque, quelque fût le rapport de CP, ou PA, ou AE, avec le rayon, on auroit la quadrature indéfinie du cercle. Ce ſeroit peu faire, on oſe le dire, pour la Géométrie que de trouver la premiere : pour réſoudre le problême dans toute ſon étendue, il faudroit aſſigner la derniere, & il y a encore loin de l'une à l'autre. Car pour paſſer de la quadrature définie du cercle à celle de ſes parties quelconques, il reſteroit à réſoudre ce problême, plus difficile que le premier, *trouver la raiſon de deux arcs dont on connoîtroit les ſinus ou les tangentes, &c.* Pour le dire, en un mot, la quadrature indéfinie du cercle & de ſes parties, eſt autant au-deſſus de celle qui occupe infructueuſement les vulgaires

quadrateurs, que celle-ci eſt au-deſſus de la meſure des ſurfaces rectilignes.

IX. Il eſt à propos de diſcuter, avant d'aller plus loin, quel eſt le degré d'utilité de la quadrature du cercle, ſoit abſolue, ſoit approchée. Quant à la premiere, nous penſons, avec M. de *Maupertuis* *, que la Géométrie préſente aujourd'hui quantité de recherches plus intéreſſantes. La quadrature définie du cercle ne feroit preſque d'aucune utilité : les travaux des habiles Géometres, dont j'expoſerai bientôt les découvertes, ont fait connoître ſon rapport avec les figures rectilignes aſſez exactement pour n'avoir preſque rien à deſirer ; & j'ai rendu ſenſible, par un exemple frappant, la prodigieuſe exactitude à laquelle il eſt aiſé d'atteindre. Il y auroit quelque avantage, j'en conviens, dans la quadrature indéfinie, ou autrement l'intégration abſolue de quelques-unes de ces formules, $dx\sqrt{aa-xx}$,

* Lettre ſur le progrès des Sciences.

ou $dx\sqrt{2ax-xx}$, ou $\frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$, ou, &c. Mais, je le remarque encore, c'eſt moins à cauſe du cercle que les analyſtes le déſireroient, que parce qu'on auroit par là la meſure abſolue d'une infinité d'autres courbes qui dépendent d'expreſſions de cette forme. Comme il eſt non ſeulement probable, mais bien démontré (*voyez la fin du chap.* 3), qu'on n'y parviendra jamais, on regarde comme réſolu tout problême qui conduit légitimement à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole ; & il l'eſt en effet, même dans la pratique, puiſque l'on a des méthodes aſſez ſimples pour trouver, avec une exactitude preſque indéfinie, la grandeur d'un arc ou d'un ſegment circulaire quelconque. Que manque-t-il donc aux Arts, à la Géométrie même, dans l'abſence de la quadrature abſolue du cercle ? rien du tout. Une détermination probablement enveloppée dans des rapports très-compliqués, seroit une stérile connoissance pour l'esprit humain. On auroit plus d'obligation, je le dis avec confiance, à celui qui réduiroit la rectification de l'ellipse & de l'hyperbole, aux quadratures de ces deux courbes.

X. Je ne remarque presque qu'à regret, & comme un trait de simplicité, la croyance où sont la plûpart des chercheurs de la quadrature du cercle, que les Souverains s'intéressant aux travaux des Géometres, ont promis une récompense considerable à celui qui y réussiroit. D'autres aussi simples, ou même plus simples encore, se sont imaginé que le problême des longitudes en dépendoit: ajoutons à ces prétentions celle que les plus grands Géometres ont recherché ou recherchent la quadrature du cercle, comme si ce problême étoit l'objet unique & le but de toute la Géométrie. Ce sont là trois points sur lesquels ces bonnes gens * ne manquent guere d'in-

* Voyez le Sieur Basselin, *dans sa quadrat.*

sister beaucoup : il faut les en désabuser. Il n'y a aucune récompense promise ou à espérer pour celui qui quarrera le cercle. Il est ridicule de prétendre que les longitudes en dépendent. La raison de la circonférence au diametre n'entre pour rien dans aucun problême de navigation ; & si quelqu'un la supposoit, comme c'est un problême de pure pratique, il seroit plus que suffisamment résolu par quelqu'une des plus simples approximations du cercle : celle de *Metius*, par exemple, qui differe de la vérité de moins d'une 1, 000, 000^e, & dont l'erreur sur toute la circonférence de la terre ne va pas à 25 toises. Il y a aussi peu de réalité dans les prétendues recherches des grands Géometres sur la quadrature du cercle : nous en avons assez dit dans l'article précedent, pour faire connoître qu'ils ont eu des vûes plus générales en la recherchant. C'est en avoir d'excessivement bornées en Géométrie, que de n'y voir rien de plus inté-

ressant que cette question. Je reviens à mon sujet.

XI. Quant à la quadrature approchée du cercle & des figures courbes, il est évident à qui connoît l'objet de la Géométrie, qu'elle devient nécessaire dès qu'on suppose la mesure absolue impossible, ou encore inconnue. Mille problêmes, soit dans les mathématiques pures, soit dans les sciences phisico-mathématiques, ramenent sans cesse à cette mesure. Il n'en faut pas davantage pour justifier les Géometres de leurs peines à se procurer des approximations si peu différentes de la vérité, qu'elles puissent en tenir lieu dans tous les cas. S'ils ont quelquefois passé les bornes de cette nécessité, on le leur pardonnera quand on aura fait attention que c'est à cette curiosité, en apparence inutile, quoique souvent justifiée par les plus heureuses découvertes, que toutes les sciences doivent leur avancement.

CHAPITRE II.

Tentatives & travaux des Anciens pour la mesure du Cercle.

I. IL est dans l'ordre des progrès de l'esprit humain que la mesure du cercle se soit fait desirer bientôt après qu'on eut trouvé celle des figures rectilignes. Ces objets de la Géométrie naissante arrêterent peu les premiers qui la cultiverent, & à en juger par d'autres découvertes faites dès le tems de *Thalès* & de *Pythagore*, ou peu après eux, ils furent bientôt au-dessus de ces foibles objets de spéculation. On peut donc conjecturer que les premiers efforts pour mesurer le cercle ont une date presque aussi ancienne que la naissance de la Géométrie chez les Grecs.

II. On ne peut douter du moins que près d'un siécle & demi après cette époque, le problême ne commençât à occuper les Géometres. *Plutarque* (a) nous en fournit une preuve, en nous apprenant que le Philosophe *Anaxagore* (b) s'en occupa dans sa prison, qu'il y composa même un ouvrage à son sujet. Nous ignorons au reste entierement quelles furent ses prétentions, s'il crut avoir réussi, ou s'il informoit seulement les Géometres des difficultés qui s'étoient présentées à lui dans sa recherche. Cette derniere opinion est plus probable, si nous faisons attention aux éloges que lui donnoit *Platon* (c), sur sa grande habileté en Géométrie.

III. Quoiqu'il en soit, bientôt après cette tentative le problême de la quadrature du cercle devint très-célébre. Il étoit dès le tems de *Socrate*, & sortant des écoles des Philosophes, il avoit déja

(a) Traité *de exilio.*

(b) *Anaxagore de Clazomène*, le 4e chef de la secte Ionienne, vivoit vers l'an 480 avant J. C. Il fut contemporain de *Periclès*, qui lui sauva la vie, ayant été accusé d'impiété, pour avoir pensé que les astres étoient matériels.

(c) Proclus. *Com. in Eucl.* p. 38.

excité la curiosité du vulgaire. *Aristophane* en saisissoit l'occasion pour plaisanter dans sa Comédie des *Oiseaux* : *Je vais*, fait-il dire à un Géometre qu'il introduit sur la scene, *la regle & l'équerre en main, vous quarrer le cercle.* Le peuple d'Athènes avoit probablement le même penchant que le vulgaire d'aujourd'hui à donner à ces paroles un sens absurde, & le Poëte s'en prévaloit pour l'exciter à rire. La note d'un Scholiaste Grec, qui sur cet endroit remarque sçavamment qu'il est impossible qu'un cercle soit quarré, confirme le sens que je donne à ces paroles. Il est bien plus naturel que de penser qu'*Aristophane* eût en vûe les fausses solutions des mauvais Géometres, & leurs erreurs déja multipliées sur ce sujet ; cela ne seroit bon qu'auprès d'un peuple de Mathématiciens.

Au reste, je remarque sur cet endroit d'*Aristophane*, une particularité qui me paroît peu connue, quoiqu'elle

n'ait pas échappé à ses Commentateurs ; c'est que ce Comique jouoit dans cette scene le fameux *Méton*, auteur * du *Cycle lunaire.* Le nom qu'il donne à ce personnage, & les discours qu'il lui fait tenir, ne laissent aucun lieu d'en douter ; car l'autre Interlocuteur lui demandant *qui il est*, le Géometre lui répond : *Je suis Méton, cet homme bien connu des gens de la Campagne & de toute la Grece.* Ces particularités conviennent parfaitement à *Méton* l'Astronome, à cause de son invention reçue avec tant d'applaudissemens, & des sortes de *Calendriers* que les Astronomes publioient déja, & qui étoient principalement à l'usage des Navigateurs & de ceux qui cultivoient la terre. Plusieurs autres discours ridicules concernant l'Astronomie, que tient *Méton* dans cette scene, donnent un nouveau poids à ce qu'on vient de dire. Cet endroit d'*Aristophane* peut encore avoir trait à une circons-

* Environ 430 ans avant J. C.

tance de la vie de *Méton*, sçavoir, à la folie simulée par laquelle il sçut habilement s'exempter d'aller à l'expédition de Sicile, si funeste pour tous ceux qui y eurent part. *Méton*, ou manquant de courage, ou prévoyant la mauvaise issue qu'elle auroit, contrefit l'insensé, comme autrefois *Ulisse* pour ne point aller à la guerre de Troye, & probablement il dut la vie à cette adresse.

IV. Ces plaisanteries d'un Comique qui n'épargnoit pas les hommes même les plus respectables, témoin le sage *Socrate*, n'empêcherent pas *Hippocrate de Chio*, Géometre célébre & environ du même tems, de tenter le problême. La Géométrie y gagna une découverte remarquable, du moins pour ce tems-là. Quoique personne n'ait encore pû réussir à quarrer le cercle entier, *Hippocrate* trouva la quadrature d'une de ses parties ; c'est ce que nous appellons aujourd'hui la lunulle ou les lunulles d'*Hippocrate*, à cause de leur figure semblable à celle d'un croiſſant. Cette découverte eſt aujourd'hui ſi connue, même à ceux qui ne ſe ſont jamais élevés au-deſſus de la Géométrie élémentaire, que je puis me diſpenſer de l'expliquer; je le fais d'autant plus volontiers, que je me ménage par là un peu plus d'étendue pour des choſes plus intéreſſantes.

V. Rien n'étoit plus propre à entretenir une eſpérance flateuſe de la quadrature du cercle que cette découverte; *Hippocrate* s'y livra en effet, & elle le conduiſit à un malheureux naufrage, ſi nous prenons à la rigueur ce que diſent *Ariſtote*, & *Eudemus* l'hiſtorien de la Géométrie ancienne, cité par *Simplicius.* Tel étoit le raiſonnement d'*Hippocrate*, ſuivant ces Auteurs. Il inſcrivoit à un demi-cercle *A* (*fig.* 1.) un demi-exagone, & ſur chacun des côtés il decrivoit les demi-cercles *B. C. D.* puis un quatrième *E* à part. Après quoi il raiſonnoit ainſi : ces quatre demi-cercles, diſoit-il, ſont égaux au

plus grand *A*; ôtant donc ce qu'ils ont de commun, ſçavoir les trois ſegmens *b. c. d*, on aura les trois lunulles *B. C. D.* & le demi-cercle *E* égaux à l'exagone *A*. Qu'on ôte donc, continuoit-il, de cet eſpace rectiligne la valeur de ces trois lunulles, le reſtant ſera égal au demi-cercle *E*.

Le foible de ce raiſonnement eſt ſi aiſé à ſentir, que malgré l'autorité des Hiſtoriens que j'ai cités, je ne puis me perſuader qu'*Hippocrate* en ait été ſéduit : en effet, il eſt viſible que ces lunulles ne ſont point celles dont il avoit précédemment donné la quadrature. Comment accorder une inattention ſi groſſiere avec la ſagacité que d'autres découvertes lui ſuppoſent? Toujours porté à juger favorablement de ceux qui ont bien mérité des ſciences, je crois qu'il faut donner quelqu'autre ſens à cela. *Hippocrate* ne vouloit-il point propoſer un moyen qu'il jugeoit propre à conduire quelque jour à la quadrature

du cercle? il avoit quarré une eſpece de lunulle, il pouvoit eſpérer que quelqu'autre plus heureux quarreroit un jour une de celles qui entroient dans ſon raiſonnement; dans ce cas voilà, diſoit-il, la quadrature du cercle trouvée. C'eſt ainſi qu'il transformoit le problême de la duplication du cube en un autre, ſçavoir en celui de l'invention des deux moyennes proportionnelles. Au reſte, j'abandonne ce Géometre à ſon mauvais ſort, dans l'eſprit de ceux qui croiront devoir déférer davantage aux témoignages d'*Ariſtote*, d'*Eudemus* & d'*Eutocius*, qu'à mes réflexions. Je remarque ſeulement que les ſervices réels qu'il rendit à la Géométrie de ſon tems, doivent effacer de ſon nom la tache que cette erreur y laiſſeroit imprimée, s'il n'étoit connu que par elle.*

VI. Nous devons à *Ariſtote* la mémoire de deux Géometres qui prétendirent contribuer de leurs lumieres à la

* Quoique la découverte de la lunulle d'*Hippocrate* ſoit des plus élémentaires, pluſieurs Géometres modernes de la premiere claſſe ſemblent s'être plûs à l'illuſtrer par diverſes additions ingénieuſes. M. de *Tchirnauſen* a annoncé (*Actes de Leipſik* 1687), que tirant une ligne quelconque du centre *C* (*fig.* 3.), l'eſpace courbe *AID* étoit encore abſolument quarrable, & qu'il étoit égal au triangle rectiligne *ACH*, déterminé par la perpendiculaire *DH* à *AB*. La même choſe à peu près a été rencontrée par M. *Jean Percks*, qui égale à cet eſpace le triangle *ADF*, ce qui eſt plus aiſé à appercevoir (*Tranſ. Phil.* 1699. & *Act. de Leip.* 1700). Voici la démonſtration de l'une & de l'autre. L'arc *AI* qui meſure l'angle *ACI* qui eſt à ſon centre, eſt ſemblable à la moitié de l'arc *AD* qui meſure le même angle, parce qu'il eſt à la circonférence du cercle dont *BDA* eſt portion. Donc le ſegment entier dont *AFI* eſt la moitié, eſt ſemblable au ſegment *AD*, & par conſéquent ils ſont entr'eux comme les quarrés des rayons de leur cercle, c'eſt-à-dire comme 2 à 1. Le demi-ſegment *AFI* eſt donc égal à *AD*, & le triangle *ADF* rectiligne égal à l'eſpace curviligne triangulaire *ADI*. A préſent le triangle *ACH* eſt à *ACB*, comme *AH* à *AB*,

découverte de la quadrature du cercle : mais quoique ce Philosophe les désapprouve également, ce seroit faire tort à

ou le quarré de AD au quarré de AB; mais c'est encore là la raison du triangle ADF à ACB, à cause qu'ils sont semblables; l'angle ADF étant toujours demi-droit, puisqu'il est appuyé sur le quart de cercle AC, qui se formeroit de la continuation du demi-cercle BEA. Le triangle ADF est donc égal à ACH, & par conséquent l'espace curviligne ADI est égal à l'un ou à l'autre. MM. *Gregori*, *Wallis* & *Caswel* (*Act. de Leip. lieux cités*) ont trouvé divers autres espaces absolument quarrables dans la lunulle conjugée, c'est-à-dire celle qui se formeroit par les mêmes circonférences continuées. M. *de l'Hôpital* a donné, (*Mém. de l'Ac.* 1701), une méthode pour retrancher tant qu'on voudra d'espaces absolument quarrables compris entre deux paralleles, comme GK, soit dans l'ancienne lunulle d'*Hippocrate*, soit dans celle qui se fait du demi-cercle AEB, & des deux quarts de cercle rentrans, comme $Blic$, Afc.

Avant tous ces Géometres, M. *Viete* avoit imaginé une maniere beaucoup plus générale

l'un

l'un d'eux que de les ranger dans la même classe : *Bryson* raisonnoit bien mal pour un Géometre, si c'en étoit

de trouver des lunulles absolument quarrables, dont celle d'*Hippocrate* n'est qu'un cas particulier; car si l'on a un arc de cercle comme $ABCDE$ (*fig.* 4.), tel qu'étant divisé en un certain nombre de parties, comme ici en 4 (ou plus généralement m), le quarré de AE soit à celui de la corde d'une des portions dans la raison de 4 à 1, (ou de m à 1), il est visible que faisant l'arc sur AE semblable à ceux des segmens AB, BC, &c. l'espace circulaire courbe $ABCDDEFA$, sera égal au polygone rectiligne $ABCDEA$, ce qui est assez évident pour m'éviter la peine de le démontrer. Or toutes les fois que m ne surpassera pas 3, on pourra trouver un pareil arc par la Géométrie plane; mais le problême sera solide ou plus que solide quand m sera un nombre plus grand. Tout cela dépend & se démontre aisément à l'aide de la théorie des sections angulaires, ou des rapports des cordes des arcs multiples ou sous-multiples.

On trouve dans les Mém. *de l'Acad. de Berlin* 1747, un Mémoire de M. *Cramer*, où après avoir réfuté l'opinion de M. *Heinius*,

un, lorsqu'il prétendoit que le cercle étoit moyen proportionnel entre le quarré inscrit & le circonscrit. Il étoit

qui avoit prétendu qu'*Hippocrate de Chio* étoit le même qu'*Œnopide de Chio*, autre Géometre & Astronome Pythagoricien, il ajoute quelques découvertes nouvelles sur cette fameuse lunulle. Mais il seroit long de les expliquer ici, & cette note, où j'ai encore bien des choses à dire, en deviendroit d'une prolixité excessive.

L'invention d'*Hippocrate de Chio* n'est qu'un exemple particulier d'un espace circulaire absolument quarrable; on peut en trouver une infinité d'autres, & divers Géometres en ont donné des exemples. On a un ouvrage de M. *Artus de Lionne*, Evêque de Gap, intitulé *Curvilinorum amænior contemplatio*, où ce Prélat Géometre a donné un grand nombre de pareils espaces : ce que j'ai dit plus haut des additions de MM. *Tchirnausen* & *Perks* à la lunulle d'*Hippocrate*, ne lui avoit pas échappé. M. *Varignon* en a donné un nouvel exemple dans les Mém. de l'Acad. de 1703; il y fait voir que si l'on a deux cercles concentriques & un secteur ACB (*fig.* 5), & qu'on prenne l'arc DF à DE, comme $CA^2 - CD^2 : CD^2$, l'espace $EDFAB$ est

aisé de voir dès-lors que ce moyen proportionnel étoit seulement l'octogone; car en général deux polygones semblables étant inscrits & circonscrits au cercle, le moyen proportionnel entre

égal au triangle rectiligne CFA; car le secteur CFD est au secteur CDE, comme $FD : DE$, conséquemment comme $CAD - CD^2$ à CD^2 par la construction; or cette derniere raison est encore celle de la portion circulaire $EBAB$ au secteur DEC; le secteur CFD est donc égal à $EBAB$, & ajoutant de part & d'autre FAD, on a $FABEDF =$ au triangle ACF. Un jeune Géometre, le frere de M. *Clairault*, de l'Académie des Sciences, âgé de 14 ans, donna en 1730 un petit ouvrage très-ingénieux sur ces espaces circulaires absolument quarrables, dont il a trouvé un grand nombre au-delà de ceux qui étoient déja connus. On a quelque chose de semblable de M. *Saume* (*Mém. de l'Acad.* 1712). Mais je ne m'arrête pas davantage à ces curiosités géométriques afin d'abréger; ceux qui en seroient plus amateurs qu'elles ne méritent ordinairement, peuvent consulter les livres & les endroits cités.

eux deux est l'inscrit qui a le double de côtés.

Il y a plus de justesse dans la prétention du Géometre *Antiphon* ; celui-ci regardoit le cercle comme un polygone d'une infinité de côtés ; c'est du moins ce qu'il est naturel de conjecturer d'après ce qu'il disoit que l'arc diminuant de plus en plus, se confondoit enfin avec sa corde. Mais cette idée fut mal accueillie des Anciens ; le tems n'étoit pas encore venu où l'on oseroit, qu'on me permette ce terme, envisager de face l'infini. Au surplus c'étoit une idée stérile dans ce tems-là. Comment déterminer la raison d'un polygone inscrit au dernier de cette suite infinie, qui se confond enfin avec le cercle ? *Viete* l'a fait, à la vérité, parmi nous, par le moyen d'une suite infinie de termes, mais sans beaucoup d'avantage pour la mesure du cercle. On en parlera quand il en sera tems.

VII. On aura quelque lieu de

s'étonner que malgré les recherches de tant de Géometres pour quarrer le cercle, on ait été jusqu'au tems d'*Archimede* * sans en connoître, du moins à peu près, la grandeur ; j'entends dire avec quelque exactitude suffisante pour la pratique. Le Géometre de Syracuse, quoiqu'entierement livré à la théorie la plus sublime, sentit, ce semble, le premier l'utilité de cette connoissance ; ses découvertes sur un grand nombre de corps & de surfaces, qui le ramenoient continuellement à la mesure du cercle, tournerent nécessairement ses vûes de ce côté : laissant donc la recherche de la quadrature absolue, qu'il jugea très-difficile, peut-être impossible, il se borna à en approcher d'assez près, & il rendit par là un service considérable aux Arts. Nous devons à ces sages vûes

* *Archimede* fleurissoit vers le milieu du troisiéme siécle avant J. C. & fut tué fort âgé à la prise de Syracuse, l'an 212 avant l'ere chrétienne.

le livre *de dimensione circuli*, livre où il démontre ces deux vérités d'un usage si journalier ; l'une *que le cercle & tout secteur de cercle est égal au triangle rectangle formé de sa circonférence pour base, & du rayon pour hauteur* ; l'autre *que la circonférence du cercle est moindre que 3 fois & les $\frac{10}{70}$ du diametre, mais qu'elle est plus grande que trois fois & les $\frac{10}{71}$ de ce même diametre* : d'où il suit que la circonférence differe peu de la premiere de ces limites, & qu'elle est, à peu de chose près, égale à trois fois & $\frac{1}{7}$ du diametre, ou qu'elle lui est très-près, comme 7 à 22 ; & le cercle au quarré du diametre comme 11 à 14. La pratique des Arts, que l'on servira toujours utilement quand à une exactitude médiocre on alliera une grande facilité, a adopté ce rapport, le plus exact de tous ceux qu'on puisse donner en aussi peu de chiffres. *Archimede*, comme nous en assure son commentateur *Eutocius* *,

* *Comm. in librum de dim. circuli.*

se proposa ce seul objet ; sans cela il lui auroit été facile d'atteindre par sa méthode à une plus grande précision. Mais celle-ci est suffisante dans les cas les plus ordinaires, & il n'y a plus que les derniers des Artisans qui l'ignorent, ou qui négligent de s'en servir.

VIII. Tout le monde, du moins le monde Géometre, sçait de quelle maniere *Archimede* parvint à cette approximation ; mais il ne sera peut-être pas inutile de l'exposer pour ceux qui, peu versés dans la Géometrie, n'en auroient pas une idée distincte. Il est clair, par les plus communes notions, que la circonférence du cercle est moindre que le polygone circonscrit, & plus grande que l'inscrit. *Archimede* inscrivit donc & circonscrivit au cercle deux polygones de 96 côtés chacun, & calcula, par les propriétés du cercle la longueur de leur contour : or ce calcul lui montra que le polygone inscrit étoit plus grand que $3\frac{10}{71}$ du diametre, & que celui du circonscrit étoit moindre que $3 \frac{10}{70}$ ou $3 \frac{1}{7}$ du diametre. Il est donc nécessaire d'en conclure que la circonférence qui est elle-même plus grande que celle du polygone inscrit, surpasse à plus forte raison 3 fois le diametre augmenté de ses $\frac{10}{71}$, & que la même circonférence, qui est moindre que le contour du polygone circonscrit, est moindre que 3 fois le diametre avec $\frac{1}{7}$.

IX. Plusieurs personnes intéressées à se faire illusion pour maintenir quelque prétendue quadrature, ont cherché à éluder cette démonstration : ils ont objecté, avec une sorte de confiance capable d'en imposer, que l'impossibilité d'extraire exactement les racines de plusieurs quarrrés qui entrent dans le calcul d'*Archimede*, a dû nécessairement l'entraîner dans quelques légeres erreurs, & que ces erreurs accumulées dans une longue suite d'opérations, ont pû lui faire prendre un nombre trop grand pour le polygone inscrit, ou un

trop petit pour le circonscrit, suivant que ces racines auroient été prises par excès ou par défaut. L'objection est raisonnable ; mais cependant elle ne prouve rien de plus, sinon que ceux qui l'élevent ne se sont pas donné la peine de consulter l'écrit d'*Archimede*. En effet, ce Géometre avoit trop de sagacité pour ne pas la prévenir, & la maniere dont il fait son calcul ne lui laisse aucun lieu ; car il ne prend point la valeur approchée du côté du polygone pour sa valeur exacte ; mais s'agit-il, par exemple, du côté du polygone inscrit ? son raisonnement & son calcul sont arrangés de maniere que prenant les racines par défaut, cette erreur, qu'on ne peut éviter, lui produit nécessairement un nombre moindre que le véritable pour la grandeur du côté du polygone inscrit. Ce nombre multiplié par celui des côtés du polygone, est 6336, le diametre étant $2017 \frac{1}{4}$: il conclut donc bien légitimement que le

polygone inscrit est plus grand que 6336 ; or comme cette raison est certainement plus grande que celle de $3 \frac{10}{71}$ à 1, il est évident que la circonférence du cercle est au diametre en une raison plus grande que celle de $3 \frac{10}{71}$ à 1, ou qu'elle est plus grande que $3 \frac{10}{71}$ du diametre. Un artifice semblable fait conclure à *Archimede* que le contour du polygone circonscrit est moindre que 14688, le diametre étant $4673 \frac{1}{2}$, d'où il conclut que la circonférence est moindre que les $3 \frac{10}{70}$ du diametre. On peut s'assurer de tout ceci dans le Commentaire d'*Eutocius*, qui sentant toute l'importance de ce procédé ingénieux, l'a développé avec soin. La conséquence d'*Archimede* est inébranlable.

M. *de Lagni* a remarqué dans le calcul d'*Archimede* une nouvelle finesse que personne n'y avoit apperçu avant lui. Le Géometre Grec suppose le rayon à la tangente de 30°, comme 265 à 153 ; ces deux lignes sont d'ailleurs

comme 1 : $\sqrt{3}$, de sorte qu'il est évident qu'*Archimede* extrayant la racine de 3, l'a déterminé prochainement égale à $\frac{265}{153}$. Or cette valeur est précisément une de celles qu'une analyse assez fine fait rencontrer en cherchant les fractions rationelles les plus simples en même temps, & les plus approchantes de la racine cherchée : car $\frac{265}{153}$ équivalent en fractions décimales à 1.732026 + qui ne s'écartent de la vraie racine de 3, sçavoir 1.732050 + que de $\frac{24}{1000000}$ ou moins d'une 40000^e^. Mais la valeur trouvée par *Archimede* a sans doute l'avantage d'être beaucoup plus simple. Comme une exactitude si recherchée ne peut point être un effet du hazard, ce nous est une nouvelle raison de remarquer le génie de ce grand homme dans le choix adroit qu'il a sçu faire des nombres les plus avantageux.

X. Ce ne sont pas seulement les Géometres modernes, qui affectant une précision plus grande que celle d'*Archi-*

mede, ont cherché à approcher de plus près du cercle, l'antiquité eut aussi ses laborieux approximateurs; il est, à la vérité, fort probable que la grande difficulté des opérations de leur arithmétique ne leur permit pas d'aller bien loin. On sçait que cette difficulté étoit si grande qu'il leur étoit absolument impossible de manier des chiffres aussi considérables que les nôtres; ainsi ils durent rester beaucoup au-dessous des Modernes. *Appollonius* *, le célébre Géometre, est un de ces anciens approximateurs; il donna un rapport plus approchant de la vérité que celui d'*Archimede*, dans l'ouvrage intitulé Ωκύτοκος, dont on ne sçait point la signification, & un de ceux de cet Auteur que nous n'avons plus. *Eutocius* nous apprend cela dans son Commentaire sur *Archimede*; il nous y cite aussi un autre

* *Appollonius* de Perge fleurissoit environ 200 ans avant J. C.

Géometre nommé *Philon de Gadare* * (Απογαδαρῶν) qui à l'exemple d'*Appollonius* avoit enchéri sur le Géometre de Syracuse, & probablement sur *Appollonius* même, auquel il est postérieur: l'un & l'autre, suivant le récit d'*Eutocius*, avoient poussé leurs approximations à de grands nombres. Ce Commentateur, en nous apprenant que dans le rapport qu'ils avoient donné il entroit des *myriades*, c'est-à-dire des dix milliémes, nous donne lieu de juger qu'ils avoient prévenu une pareille erreur au moins, & peut-être une plus considérable; car comme on ne connoissoit point alors les fractions décimales, il est probable qu'ils avoient rencontré quelqu'une des fractions de la suite $\frac{7}{22}$, $\frac{106}{333}$, $\frac{113}{355}$, $\frac{33102}{103993}$, dont la derniere équivaut à une approximation en 10 décimales au moins.

* Il est mal-à-propos nommé *Gaditanus* par la plûpart de ceux qui l'ont connu; la ville de *Gadare* étoit une ville d'Asie. On ignore le tems où il vivoit.

XI. La découverte d'*Archimede* sur les spirales, quoique peu utile à la mesure du cercle, comme je l'ai déja annoncé (*Chap. I.* §. *6.*), a cependant avec elle une sorte d'affinité qui ne me permet pas de la passer sous silence. Elle sert du moins à démontrer ce dont quelques Géometres ont sérieusement douté, s'il étoit possible qu'une ligne droite égalât une courbe. *Viete* le révoquoit en doute, se fondant sur le paradoxe de l'angle de contingence moindre que tout angle rectiligne, qu'on n'avoit pas encore développé, & *Descartes* donna presque dans le même sentiment, du moins il doutoit fort qu'on trouvât jamais la rectification d'aucune courbe; mais ces deux illustres Géometres ne faisoient pas attention dans ce moment à la vérité démontrée par *Archimede*, & *Viete* sur-tout étoit monté sur le ton de paradoxe, lorsqu'il avançoit cette opinion. Il est aujourd'hui connu, je dirois pres-

que trivial, que toute tangente à la spirale détermine une ligne droite égale à un arc de cercle aisément assignable. A quoi tient-il donc, dira quelqu'un, que l'on n'ait la quadrature du cercle? J'en ai déja donné la raison; il faudroit pouvoir tirer cette tangente d'une maniere qui ne dépendît pas de la rectification de cet arc, & c'est ce qui est impossible.

XII. Le même inconvénient, si cependant on peut donner ce nom à ce qui paroît devoir être ainsi dans la nature; le même inconvénient, dis-je, se rencontre dans toutes les autres courbes décrites par une combinaison de mouvement rectiligne & circulaire. Dans toutes ces courbes la tangente détermine une ligne droite égale, ou en rapport donné avec un arc de cercle. Mais il est facile de se convaincre, à l'aide d'une certaine métaphysique de Géométrie, qu'on n'en doit jamais attendre pour la quadrature du cercle. En effet si quelque construction géométrique, où il n'entreroit que des lignes droites, pouvoit déterminer la position de la tangente à une courbe de cette nature, ce seroit résoudre un problême sans avoir égard à ses conditions essentiellement déterminatrices; car il est aisé de sentir que la situation de la tangente dépendant nécessairement des propriétés de la formation de la courbe, si elle est décrite par une combinaison de mouvemens, il faut connoître leur rapport, & par conséquent dans les cas dont il s'agit ici, celui du mouvement circulaire avec le rectiligne, ce qui est précisément ce que l'on cherche. Le seul moyen de l'éviter seroit de trouver quelqu'autre construction qui n'employât qu'un mouvement rectiligne; mais il y auroit de l'absurdité à le tenter seulement, puisque ce seroit visiblement changer la nature de la courbe.

CHAPITRE III.

Progrès des recherches sur la quadrature du Cercle parmi les Géometres modernes jusqu'à l'invention des nouveaux calculs.

I. Les premieres années qui suivent la renaissance des mathématiques en Europe, époque que je fixe au milieu du 15^{e} siécle, où fleurirent *Purbach* & *Regiomontanus*, ne fournissent rien de remarquable à cette Histoire. Le dernier de ces Mathématiciens mérite, il est vrai, des éloges, pour le soin qu'il prit de combattre les prétendues quadratures du Cardinal *de Cusa*, homme célébre de son tems, & qui en auroit imposé si l'on pouvoit en imposer aux Géometres. Cet examen lui fournit même une occasion de déterminer des limites de la grandeur du

cercle, quelque peu plus rapprochées que celles d'*Archimede* * : je ne crois cependant pas devoir m'y arrêter, pour passer à des objets plus intéressans.

II. *Metius* est le premier des Modernes à qui l'on doit quelque invention remarquable sur la mesure du cercle. La proportion de 113 à 355, par laquelle il exprima celle du diametre à la circonférence, a une célébrité justement méritée; elle a, en effet, un avantage bien digne de remarque. C'est qu'elle approche tellement de la vérité, qu'étant exprimée en fractions décimales, elle ne s'écarte que dans le 8^{e} chiffre de la proportion si connue de 1.0000000000, &c. à 3.1415926535, &c. Soit bonheur, soit adresse, *Metius* rencontra, de toutes les fractions possibles exprimées en 3 chiffres seulement, celle qui est la plus exacte. Au reste ce *Metius* n'est point *Adrianus Metius*,

* *De quad. circuli adv. Nic. de Cusa.*

Mathématicien connu du commencement du 17^{e} siécle, & frere de *Jacques Metius* réputé l'inventeur du télescope; c'est *Pierre Metius*, le pere de l'un & de l'autre, Mathématicien des Etats de Hollande, & qui vivoit sur la fin du 16^{e} siécle. Je ne fais cette observation que parce que jai remarqué qu'on se trompoit ordinairement en attribuant au fils cette invention, que lui-même revendique à son pere dans ses ouvrages.

III. Le célébre M. *Viete*, dont les travaux ont tant aidé l'analyse, contribua aussi de quelque chose à la mesure du cercle. On trouve, ce qui mérite d'être observé, dans une expression qu'il donna pour le représenter *, on y trouve, dis-je, la premiere idée d'une suite infinie de termes. Travaillant à tirer quelque parti de cette connoissance, déja ancienne quoique peu goûtée, que

* *Vieta opera, variorum de rebus math. resp. cap. 18.*

le cercle étoit le dernier des polygone inscrits ou cir conscrits, il démontra que le rapport du quarré inscrit à ce dernier polygone étoit celui de $\sqrt{\frac{1}{2}}$ à 1 divisé par $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times$, &c. & ainsi à l'infini; de maniere que le diametre étant l'unité, le cercle est l'unité divisée par $2\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times$, &c. Il seroit laborieux, j'en conviens, de tirer de là une valeur en termes rationaux; ainsi quoique cette découverte considérée dans la spéculation, ait sa beauté, je n'y insiste pas beaucoup. *Viete* rendit sans doute un plus grand service à la Géométrie, lorsqu'il établit ce rapport approché du diametre à la circonférence en 11 chiffres; sçavoir, comme 1, 00000, 00000, à 3, 14159, 26535 +: * l'erreur est moindre que

* *Ibid. cap.* 15. M. *Viete* fleurissoit vers la fin du 16e siécle, il mourut en 1603 âgé de

l'unité dans le dernier nombre, qui finissant par 6, excéderoit dès-lors la vérité; c'est ce que nous avons voulu designer par le signe +, qui annonce que le chiffre 5 est moindre qu'il ne faut; 6 — signifieroit que 6 est trop grand. Personne que je connoisse n'en avoit encore approché de si près, & cette approximation peut être regardée comme le premier exemple, le signal de celles que plusieurs Géometres donnerent dans la suite.

IV. Il semble en effet que les Géometres desesperant d'atteindre à la mesure précise du cercle, ont cherché à s'en dédommager par des approximations d'une exactitude fort supérieure à nos besoins. Celle de *Viete* fut effacée par celle d'*Adrianus Romanus*: ce Géometre des Pays-bas calcula laborieusement la grandeur du côté d'un

63 ans. M. de Thou en a fait un éloge étendu dans son Histoire universelle, *liv.* 129.

polygone de 1073741824 côtés, & détermina par ce moyen le rapport en 16 chiffres de 1, 00000, 00000, 00000, à 3, 14159, 26535, 89793 +; mais ce travail de *Romanus*, quelque grand qu'il soit, est cependant encore beaucoup inférieur à celui que *Ludolph Van Ceulen* *, son contemporain, eut le courage d'entreprendre. On doit à celui-ci une proportion exprimée en 36 chiffres, le diametre étant l'unité suivie de 35 zéros; la circonférence est entre ces deux nombres: 3, 14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288, & le même augmenté d'une unité seule.

Quant au procédé de *Ludolph*, il est nécessaire de le rapporter ici, pour

* *Ludoph* étoit de Cologne, d'où lui vient son nom de *Van Ceulen*, car Cologne se dit en en Hollandois *Ceulen*: il fut long-tems Professeur de Mathématiques en Hollande, à *Amsterdam* ou *Breda*. On ne sçait presque rien de lui, parce que *Valere André* ne l'a pas mis dans sa Bibliotheque Belgique.

donner une idée du travail immense qu'il surmonta. Il supposa d'abord le rayon égal à l'unité suivie de 75 zéros, & d'après cet immense rayon il calcula les cordes des arcs continuellement décroissans depuis le quart du cercle jusqu'à l'arc, qui n'est que la 36748890763739103232e de la circonférence; il calcula de même le côté du polygone circonscrit correspondant à cet arc, & ayant trouvé les longueurs de ces polygones, il les compara ensemble. Or il trouva qu'ils coincidoient dans leur 36 premiers chiffres; d'où il conclut que ces 36 premiers chiffres exprimoient, à moins d'une unité près, la grandeur de la circonférence; cela est aisé à sentir. La suite des opérations de *Ludolph* est exposée dans quelques-uns de ses ouvrages *, où les Géometres de son tems purent l'examiner. Le P. *Griemberger*, un de ceux qui

* *Fund. Geom. lib. 6. de circulo & adscriptis. Zetematum Geom. epilogismus*, p. 92.

eurent le courage de le faire, assura le monde sçavant de leur justesse, & par conséquent de celle de l'approximation qu'il en tiroit. (*a*).

Ludolph avoit quelque raison de s'applaudir de son invention; à l'exemple d'*Archimede*, il voulut en transmettre la mémoire à la postérité par un monument qui y eût rapport; & il souhaita, pour cet effet, qu'on gravât ces deux nombres sur son tombeau (*b*): cette disposition a été exécutée, & ce monument géométrique subsiste encore aujourd'hui, à ce que j'ai lû quelque part.

VI. Cependant à apprécier au juste le travail immense de *Ludolph*, il est bien plus propre à lui procurer la réputation d'un infatigable calculateur que d'un homme de génie. On fait, & avec quelque raison, en Mathématique, peu de cas de ce qui n'est que le

(*a*) *Riccioli. Almag. novum.*
(*b*) *Snellii cyclom. pr.* 31, *p.* 55.

fruit de la patience. Sans rabaisser donc le mérite de *Ludolph*, que nous sçavons d'ailleurs avoir été un habile analyste, il me paroît que le Géométre dont je vais parler mérite plus d'éloges pour les découvertes qu'il ajouta à la Cyclométrie.

Willebrord Snellius, c'est ce Géometre, se proposa d'abréger ces pénibles opérations, par le moyen de quelques propriétés du cercle qui donnassent des limites plus rapprochées que les polygones inscrits & circonscrits traités à la maniere d'*Archimede*, & il y réussit assez heureusement. Il sçut démêler deux théorêmes propres à son dessein, & qui lui feroient encore plus d'honneur s'il avoit pû parvenir à les démontrer parfaitement: en effet l'espéce de démonstration qu'il en donne n'est pas absolument convaincante. Il suffit ici qu'il ne se trompe pas; car l'illustre M. *Huygens* les établit dans la suite avec toute la rigueur géométrique.

Voici ces théorêmes fondamentaux de *Snellius* *.

1°. *Si l'on prolonge le diametre* A B *d'un cercle en* D (fig. 7. *n.* 1), *de maniere que* B D *soit égale au rayon, la ligne* D F *retranche de la tangente* A G *un segment* A F *moindre & à très-peu de chose près égal à l'arc contigu* A E.

2°. *Mais que* d f (fig. 7. *n.* 2.) *soit tiré de maniere que le segment* d l *soit égal au rayon, dans ce cas le segment* a f *de la tangente sera plus grand que l'arc* a e; & comme alors la tangente *a f* est égale à deux fois le sinus, plus une fois la tangente du tiers de l'arc, il suit que *deux fois le sinus plus une fois la tangente d'un arc, forment une somme très-approchante de la grandeur du triple de cet arc.*

Ces deux theorêmes réduisent à moins de la moitié le travail des approximations qui jusqu'alors avoient exigé de si laborieux calculs. *Snel-*

* Voyez son livre intitulé *Cyclometricus. Prop.* 17. 29.

lius * en donne plusieurs exemples, qui mettent dans un grand jour l'avantage de sa méthode. *Archimede* avoit été obligé d'employer deux polygones, l'un inscrit, l'autre circonscrit, de 96 côtés chacun, pour en tirer son rapport de 7 : 22. Le Géometre moderne y parvient par la connoissance du seul côté de l'exagone, & le polygone de 96 côtés mis en œuvre par celui-ci, lui donne la prop. de 1. 0000000, à 3. 1415926: il détermine enfin & vérifie celle de *Ludolph*, par un polygone qui n'auroit donné à ce Géometre que les 17 premiers chiffres de son rapport; il est de la nature de l'opération de *Snellius* de donner toujours plus du double de chiffres vrais que la méthode ordinaire, sans y employer plus de travail. Il auroit pû, avec le côté du dernier polygone de *Ludolph*, s'il eût été parfaitement exact dans tous

* *Ibid. prop.* 31.

ses chiffres, trouver une approximation en 75 chiffres; le manque de cette condition, car il est évident qu'un grand nombre des derniers chiffres étoient incertains, l'empêcha d'aller aussi loin.

Je dois faire honneur à *Snellius* d'une remarque utile qu'il fait, concernant le calcul des côtés des polygones qui naissent de la sous-division continuelle d'un arc. Si BD (*fig.* 8.), dit-il *, est la corde d'un arc quelconque, & qu'on divise en deux son complement DA, la corde DF est moyenne proportionnelle entre le rayon & le diametre augmenté de la corde précédente; mais la corde AF est moyenne proportionnelle entre le même rayon & le diametre moins la même corde. Ces deux théorêmes, qu'il est facile de vérifier par l'analyse, lui fournissent une suite d'expressions commodes à trouver sans au-

* *Cyclom. prop.* 1. & 2.

cun calcul, pour les côtés des polygones quelconques formés par la bissection continuelle d'un arc comme DA, dont la corde DB est connue. Il trouve donc aisément, à l'aide de ces deux théorêmes, que le rayon étant l'unité, & BD le côté du triangle équilatéral égal à $\sqrt{3}$, on a $BF = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ & $BG = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; de même $AF = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ & AG le côté du dodécagone $= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. La loi de la progression est aisée à voir. Où il y a trois divisions successives, il y a trois termes enveloppés continuellement par le signe radical, de maniere que chacun embrasse tout le reste de l'expression. Tous les signes sont positifs pour les cordes BF, BG, & pour les cordes AD, AF, AG, le premier seul est négatif. Tous les nombres sont 2, ou plus généralement le produit du

rayon par le diametre, & le dernier la valeur de la premiere corde $B\ D$. Si l'on vouloit après cela trouver la corde du 45[e] polygone, à commencer du quarré inscrit, c'est-à-dire la corde de la 70368744177664 de la circonférence, on auroit (la corde du quarré étant $\sqrt{2}$ si le diametre est 2), on auroit, dis-je, tout d'un coup $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, &c. continuée jusqu'à la 45[e] $\sqrt{2}$ inclusivement.

Snellius a plus fait, il a pris la peine de calculer jusqu'à 55 décimales la valeur de ces cordes BF, BG, &c. d'où il est aisé de tirer la grandeur du côté qu'on voudra dans cette suite. Dans un autre endroit * il prend pour premier polygone celui de 80 côtés, & il donne les limites qui résultent des polygones inscrits & circonscrits, dont le nom-

* *Ibid. prop.* 11.

bre des côtés va de là continuellement en doublant jusqu'au polygone de 5242880 côtés, de maniere qu'une fausse grandeur de la circonférence étant proposée, il est toujours facile, en la réduisant en fraction décimale, de trouver au-dessus de quel polygone circonscrit, ou au-dessous de quel inscrit elle se rencontre; ce qui en démontre fort aisément la fausseté. *

Comme ces limites peuvent avoir une utilité réelle pour ceux qui voudroient, ou qui auroient besoin de faire ces comparaisons, je vais les rapporter ici.

* Quelques autres Géometres, qui ignoroient sans doute ce qu'avoit fait *Snellius*, ont donné des expressions semblables, propres à faciliter le calcul des polygones; on peut voir *Wallis* sur ce sujet dans son *Algebre*, *chap.* 86, & M. *Nicole*, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, 1747.

Nombre des côtés.	*Polygone inscrit.*	*Polygone circonf.*
80	3.140	3.143
160	3.141	3.142
320	3.1414	3.1418
640	3.1415	3.1416
1280	3.14158	3.14160
2560	3.141591	3.141595
5120	3.1415924	3.1415932
10240	3.14159260	3.14159281
40960	3.14159265	3.14159266
81920	3.141592652	3.141592656
163840	3.1415926533	3.1415926539
327680	3.1415926535	3.1415926536
655360	3.14159265357	3.14159265362
1310720	3.141592653586	3.141592653596
2621440	3.141592653588	3.141592653589
5242880	3.1415926535890	3.1415926535896

VII. Le célébre M. *Huygens* entra peu d'années après *Snellius*, dans la même carriere que celui-ci avoit ouverte. Les premiers coups d'essai de ce Mathématicien illustre furent d'enrichir la Cyclométrie de plusieurs vérités utiles; ce que *Snellius* avoit tenté & laissé à certains égards imparfaits, M.

Huygens, encore fort jeune, le perfectionna considérablement; car non seulement il démontra * les théorêmes où son compatriote avoit hésité, mais il ajouta à sa théorie plusieurs autres propriétés remarquables du cercle, dont quelques-unes lui donnerent des limites encore plus resserrées que celles que *Snellius* avoit déterminées. On va les exposer avec la briéveté qu'exigent les limites étroites de cet ouvrage; elles sont d'ailleurs dignes d'être connues, & probablement les Géometres les verront avec plaisir.

1°. *Tout cercle est plus grand que le polygone inscrit plus le tiers de ce dont il surpasse le polygone inscrit, qui a la moitié moins de côtés;* & cela doit s'entendre non seulement de l'aire du cercle comparée à celle de ces polygones, mais encore de sa circonférence comparée à la leur. Il suit de là que *tout arc de cercle est*

* *De Circuli magnitudine inventa*, 1654.

plus grand que sa corde augmentée du tiers de sa différence avec son sinus. Nommant donc C la corde, S le sinus, l'arc A sera $> \frac{4C - S}{3}$.

2°. *Tout cercle comparé de même au polygone inscrit, est moindre que les $\frac{2}{3}$ de ce polygone plus le tiers du polygone circonscrit semblable.* D'où l'on peut inférer que tout arc est moindre que $\frac{2}{3}$ de son sinus augmenté du tiers de sa tangente, ou $< \frac{2}{3} S + \frac{1}{3} T$, nommant T la tangente.

Cette seconde proposition, en partie la même, mais plus générale que celle de *Snellius*, fournit la seconde limite de la circonférence & de l'aire du cercle; la premiere étoit par défaut, celle-ci est excédente, mais l'une & l'autre approchent considérablement de la vérité, & M. *Huygens* s'en sert avec succès pour le même objet que *Snellius*. Le travail des approximations en est diminué de plus de la moitié.

Cependant, on doit le remarquer, cette méthode ne l'emporte pas encore sur celle de *Snellius*, & même elle reste quelque peu au-dessous; aussi M. *Huygens* ne s'y arrête-t-il pas, & pour surpasser ce dernier Géometre, il propose bientôt deux autres théorêmes qui resserrent encore davantage les limites de la circonférence : il démontre pour cet effet * que,

3°. *Tout arc de cercle est moindre que sa corde augmentée d'une ligne qui soit au tiers de sa différence avec son sinus, comme 4 fois cette corde plus le sinus, à 2 fois le sinus & 3 fois la corde.*

Ceci donne une limite par excès, mais très-rapprochée; elle l'est tellement que lorsque l'arc n'est que d'un petit nombre de degrés, elle coincide avec la vraie valeur de cet arc jusqu'à la 10e décimale, ou même un terme plus éloigné. Il restoit à en trouver

* *Prop.* 19.

une aussi exacte & qui fût par défaut, *Huygens* le fait par le procédé suivant, ayant trouvé la limite par défaut de l'article 1, & celle par excès de l'article précédent. Qu'*on prenne les $\frac{4}{3}$ de leur différence & qu'on l'ajoute au double de la corde, augmentée du triple du sinus; qu'on fasse enfin cette proportion, comme cette somme est à celle du sinus & de la corde, ainsi leur différence à un quatriéme terme, ce terme ajouté au sinus donnera une ligne moindre que l'arc*, mais aussi voisine de sa vraie valeur que la précédente. L'usage de ces nouvelles limites est merveilleux; par leur secours M. *Huygens* laisse bien loin derriere lui & les Anciens & *Snellius* lui-même. Un exemple fera sentir combien ils approchent de la vérité; en calculant simplement le côté d'un polygone inscrit de 60 côtés, & y appliquant cette méthode, on trouve les 10 premiers chiffres de la proportion de *Ludolph.* On peut juger par là combien

davantage on approcheroit de la vérité, en employant un polygone d'un plus grand nombre de côtés.

Le même traité de M. *Huygens* contient plusieurs approximations pratiques de la circonférence circulaire, que leur simplicité rend dignes de remarque, & propres à avoir place ici. 1°. 8 fois le côté du dodécagone moins le rayon, différent de la circonférence de moins d'un 4000e. 2°. Dans un cercle (*fig.* 9), dont la demi-circonférence *BAC* est divisée en 2 également, que l'autre demi-circonférence le soit en 3, en *E*, *F*, & qu'on tire *AE* & *AF*, les lignes $AG + GH$ égalent le $\frac{1}{4}$ de cercle, à moins d'une 5000e près. 3°. Qu'on ajoute à 3 diametres, $\frac{1}{5}$ du côté du quarré inscrit, la somme égalera la vraie longueur de la circonférence à une 18000e près du diametre. 4°. Je mets ici l'approximation suivante, qui donne indéfiniment la grandeur d'un arc quelconque, quoiqu'elle ait été proposée

par M. *Huygens* dans une autre occasion, sçavoir dans le cours de sa querelle avec M. *Gregori.* Que *ABC* (*fig.* 10) soit un arc de cercle qui ne passe pas la demi-circonférence; après l'avoir partagée en 2 également & sa corde par la ligne *DB*, que *AE* soit égale aux $\frac{2}{3}$ de *AB*, & $EF = \frac{1}{10} ED$; la ligne *FB* étant tirée, qu'on fasse l'angle *FBG* droit, la ligne *AG* sera *quam proximè* égale à l'arc *AB*; car sa différence avec cet arc en sera à peine une 1400e lors même qu'il sera égal au quart du cercle, d'une 13000e quand il en sera la 6e, d'une 90000e enfin quand il n'en sera que la 8e. Il est aisé de sentir combien petite sera cette erreur dans les cas où l'arc à mesurer sera au-dessous de ces portions de la circonférence; elle deviendra infiniment petite. *

* Voici quelques autres moyens d'approcher de très-près de la grandeur d'un arc ou d'un aire circulaire. 1°. M. *Viete* a remarqué que si

VIII. Nous devons encore à M. *Huygens* un autre ouvrage qui paroît se rapporter à l'objet présent; il est intitulé *Theoremata de Circuli & hyp. quad.* 1651. M. *Huygens* y démontre quelques théorêmes qui durent paroître singuliers dans le tems, mais qui n'auroient pas aujourd'hui le même mérite.

on divise une ligne en moyenne & extrême raison, la ligne entiere est les $\frac{5}{6}$ bien près de la circonférence du cercle décrit sur le petit segment comme diametre. La différence par excès est à peine une 25, 000e du diametre.

2°. Si l'on fait cette proportion; comme une ligne divisée en moyenne & extrême raison, augmentée du petit segment, est au double de la ligne entiere, ainsi celle dont le quarré égale les $\frac{2}{3}$ de celui du diam. a une quatriéme proportionnelle, cette derniere sera le côté d'un quarré très-prochainement égal au cercle; car il en différera de moins d'une 75, 000e par défaut (*Vieta opera*, p. 391, 2, 3). Ces approximations m'ont paru avoir une élégance qui méritoit qu'elles fussent connues. Cependant de toutes celles que j'ai rencon-

C'eſt que l'on peut déterminer un eſpace rectiligne qui ſuſpendu d'une certaine maniere, contrebalance, c'eſt-à-dire ſe tienne en équilibre avec un ſegment de cercle, d'ellipſe ou d'hyperbole. Soit, par exemple, le ſegment de cercle ou d'ellipſe AGB (*fig.* 11.) dont l'axe ſoit GIH, que le triangle

trées, la ſuivante, dûe à un Géometre Polonois, le P. *Kolhanski*, me paroît la plus remarquable par ſa ſimplicité & ſon exactitude.

3°. Que AC (*fig.* 6.) ſoit le diametre d'un demi-cercle, AF la tangente de 30°, & que ſur la ligne EC, perpendiculaire à l'autre extrémité du diametre, on prenne $CE = 3$ fois le rayon; qu'on tire enfin la ligne FE, elle ne différera par défaut que de très-peu de choſe de la grandeur de la demi-circonférence; car le rayon étant 1,0000000, la ligne FE ſe trouve de 3,1415833 +, & la demi-circonférence eſt 3,1415926 +; ainſi la différence eſt ſeulement $\frac{93}{1,0000000}$ ou moins d'une 1,000,000e du rayon. (*Act. de Leipſick*, 1685).

ECF ait ſa baſe $EF = AB$, & ſa hauteur CD ſur l'axe commun, ſoit $= \sqrt{GI \times IH}$, le triangle ſera en équilibre ſur le point C, avec le ſegment AGB. La même choſe arrivera ſi ce ſegment eſt portion d'une hyperbole, comme aGb dont C eſt le centre; ce qui ſe démontre aiſément en faiſant voir par les propriétés des ſections coniques que les momens des lignes LK MN ou mn ſont égaux; une analyſe très-ſimple ſuffit pour cela. La formule du centre de gravité que donne le calcul intégral, fournit le même réſultat. La facilité avec laquelle on en tire tous ces théorêmes, qui couterent tant aux *Guldin*, aux *La Faille* *, &c. rendent

* Le P. *Guldin*, Jéſuite, eſt fort connu pour être l'inventeur de la belle propriété du centre de gravité pour meſurer les figures; & le Pere *La Faille*, de la même Société, publia en 1632 un ouvrage très-ingénieux, quoiqu'un peu prolixe, où il faiſoit voir comment le centre de gravité du cercle & ſa quadrature tiennent l'un à l'autre.

ces vérités peu remarquables aujourd'hui.

Si l'on demandoit ce qui s'oppoſe donc à la découverte de la quadrature du cercle, puiſque voilà un ſegment de cercle en équilibre avec une figure rectiligne, à peu près comme *Archimede* quarroit jadis la parabole, je répondrai qu'il manque de connoître la poſition du centre de gravité de ce ſegment; ſi elle étoit connue on auroit la quadrature du cercle non ſeulement par cette voie, mais par une infinité d'autres.

VIII. On ne doit point ranger parmi les hommes ordinaires qui ont échoué à la quadrature du cercle un Géometre du milieu du ſiécle paſſé, qui prétendit à la ſolution complete de ce fameux problême. Il eſt aiſé d'appercevoir, pour peu qu'on connoiſſe l'hiſtoire de la Géométrie, que j'entens parler du célébre P. *Grégoire de S. Vincent*. On ne peut lui refuſer la

juſtice de remarquer que perſonne avant lui ne s'eſt porté dans cette recherche avec autant de génie, & même, ſi nous en exceptons ſon objet principal, avec autant de ſuccès. La quadrature du cercle qu'il manqua fut pour lui l'occaſion d'un grand nombre de découvertes dont quelques-unes n'étoient pas en apparence d'une difficulté fort inférieure à la quadrature elle-même; telles ſont les quadratures abſolues d'un grand nombre de figures, ſoit planes, ſoit de ſurface courbe. La propriété remarquable des eſpaces hyperboliques entre les aſymptotes, qui ſont les logarithmes des abciſſes, eſt une de ces découvertes incidentes qui doit effacer le ſouvenir de l'erreur qui termine ſon ouvrage. Bien éloigné donc d'adopter en tout le jugement que *Deſcartes* porta de ce Géometre, je penſe avec d'autres, dont le ſentiment peut ſans doute contrebalancer celui du Philoſophe François, que ſes travaux ont droit à notre estime & même presque à notre admiration. *Huygens* & *Leibnitz* lui ont rendu cette justice, le dernier * surtout, lorsque dans l'énumération de ceux qui ont le mieux mérité de la Géométrie, il lui donne parmi eux un rang distingué.

Grégoire de S. Vincent nous fait lui-même l'histoire de ses tentatives, dans la préface de son ouvrage. La spirale d'*Archimede* lui parut d'abord présenter quelques voies pour arriver à la solution qu'il cherchoit avec tant d'ardeur; dans cette espérance il en étudia les propriétés, & ce furent ses profondes recherches qui lui firent découvrir sa simbolisation avec la parabole. Ce chemin ne l'ayant pas conduit où il desiroit, il se tourna vers la quadratrice, qu'il abandonna par le même motif, mais non sans avoir composé sur son sujet un immense traité, qui

* Actes de Leipsik, 1686.

périt dans l'incendie qui suivit la prise de *Prague* en 163..*. Enfin il s'attacha à comparer divers corps, les uns cylindriques ou segmens de ceux-ci, avec d'autres formés de différentes manieres, à étudier profondément leurs rapports & les rapports même de leurs rapports, ce qui l'engagea à se former plusieurs nouvelles théories qui lui fournirent une foule de découvertes, ou du moins de vérités qui, quoique fort aisées à en juger par notre analyse, ne laissoient pas de fatiguer les Géometres de son tems. C'est le résultat de ces dernieres recherches, combinées & dirigées dans la vûe de la quadrature du cercle, qu'il publia dans son ouvrage intitulé *Quad. Circuli & hyperbolæ*, 1647.

La prétention de *Grégoire de S. Vincent* étoit d'une nature à ne pas échapper au severe examen des Géometres. Son ouvrage n'eut pas plûtôt paru qu'on

* Voyez la préface de son livre intitulé *Quad. Circuli & hyp.*

s'empressa de toutes parts à approfondir ses raisonnemens & sa méthode : le nom de l'Auteur annonçoit des efforts dignes d'attention. En vulgaire Géometre il ne se bornoit pas à la quadrature définie du cercle, & du cercle seul, il embrassoit également dans ses vûes l'hyperbole & les segmens quelconques de ces figures; il donnoit enfin quatre méthodes différentes pour parvenir au même but. La célébrité de la discussion à laquelle cet ouvrage donna lieu, m'engage à la rapporter avec quelque étendue ; on va donc expliquer la premiere & la principale de ces méthodes : quoiqu'elle aboutisse à une erreur, elle est fondée sur une si fine théorie de Géométrie, qu'on croit faire quelque plaisir aux Géometres en la leur présentant.

1°. Qu'on imagine, dit *Grégoire de S. Vincent*, sur un même axe *AB* (*fig.* 12, 13.) un demi-cercle *AB* & deux paraboles égales situées en sens con-

traire, *ABLC*, *BAPD*, & dont les ordonnées *AC*, *BD* sont égales entre elles, & à *AB* ou à leur parametre commun. Il démontroit d'abord, & c'est une vérité avouée par la saine Géométrie, que si l'on imagine la parabole *ACB* dressée ou relevée perpendiculairement au plan de la figure, & qu'on conçoive un solide dont les coupes perpendiculaires à ce plan soient toujours les rectangles $GL \times GP$; ce solide sera égal au cylindre sur la base circulaire *AYB*, dont la hauteur est *AB* : & de plus chaque segment de ce solide parabolique, comme celui sur la base *AGP*, est égal au segment correspondant du cylindre, ou $AGS \times AB$. De là il suit que si l'on a la mesure absolue de ces segmens du premier solide, ou du solide entier, on aura la quadrature du cercle ; car la grandeur du segment de cylindre donnera celle de sa base circulaire. On parviendra aussi à cette quadrature en connoissant simplement le rapport de ces segmens; car dès-lors on auroit celui des segmens circulaires AGS, ART: or il est reconnu qu'il ne faut rien de plus pour la quadrature du cercle, même indéfinie.

2°. *Grégoire de S. Vincent* chercha donc à mesurer ces solides, ou à assigner du moins leurs raisons; or il crut y parvenir de la maniere suivante. Imaginons, outre les deux paraboles ABC, ABD, deux autres $AIiD$, $CHhB$, qui touchent leur axe commun en A, B; qu'on tire ensuite les diagonales AD, CB, il se formera du segment parabolique AGI par son correspondant $AGHC$, un solide fort irrégulier, mais dont la solidité absolue est assignable : on connoîtra donc la raison de ce solide $AGI \times AGHC$ à celui de $GiIR \times HRGh$. Ces deux solides, que pour abréger je nommerai respectivement A, B, sont dans le cas particulier ou $AG =$ au demi-rayon; ces solides, dis-je, sont comme 53 à 203.

Il se formera de même du triangle $AOG \times AGKC$ un solide tout rectiligne dont on aura la grandeur absolue, de même que celle du solide de $GOoR \times GKYR$, & par conséquent leur rapport, qui dans le même cas de $AG =$ au demi-rayon est $5 : 11$. Que ces deux solides soient nommés C, D, c'est de la connoissance de ces solides & de leurs raisons que *Grégoire de S. Vincent* déduisoit celle des deux premiers, dont on a vû que dépendoit la quadrature du cercle; il le faisoit par le raisonnement qui suit :

Si l'on tire une perpendiculaire quelconque à AB, comme MN, on a, par les propriétés des coniques, les lignes GM, GL, GK continuement proportionnelles, de même que GM, GK, GH, de maniere qu'interposant une moyenne $G\Delta$ entre GK & GH, on a les cinq lignes GM, GL, GK, $G\Delta$, GH en proportion continue. Par la même raison les lignes GN, GP,

GO, $G\delta$, GI sont continuement proportionnelles, & par conséquent les rectangles $GM \times GN$, $GL \times GP$, $GK \times GO$, $G\Delta \times G\delta$, $GH \times GI$ le sont aussi; & la même chose arrive par tout ailleurs où l'on tirera une parallele à MN, on y a les rectangles $gm \times gn$, $gl \times gp$, $gk \times go$, $g\Delta' \times g\delta'$, $gh \times gi$, en raison continue. Par conséquent le rapport des rectangles $GK \times GO$ à $gk \times go$, les troisiémes en ordre, sera doublé de celui des précédens $GL \times GP$, $gl \times gp$, & la raison des derniers $GH \times GI$, $gh \times gi$, sera quadruplée de celle de ceux que je viens de nommer. On le verra sans peine en considérant ces deux suites de quantités continuement proportionnelles, 1, 2, 4, 8, 16, &c. & 1, 3, 9, 27, 81, où l'on voit que la raison de 9 à 4 est doublée de celle de 2 à 3, & celle de 16 à 81 quadruplée de cette même raison. Par conséquent la raison des rectangles de l'ordre de $GH \times GI$,

$gh \times gi$, sera doublée de celle de l'ordre des $GK \times GO$, $gk \times go$. Il y aura donc entre les élémens semblables des solides $AGI \times AGHC$, $GIIR \times GRHH$, c'est-à-dire A, B, une raison semblablement multipliée de la raison qui regne entre les élémens analogues des solides $AGO \times AGKC$; $GROO \times GRYK$, c'est-à-dire C, D, comme celle-ci l'est de la raison des élémens des solides $AGP \times AGKC$, $GRPP \times GRLL$, ou E & F. *Grégoire de S. Vincent* concluoit enfin de tout ce raisonnement que la raison des premiers solides A, B contenoit celle des solides C, D, comme celle-ci contenoit la troisiéme, sçavoir celle des solides E, F; or les deux premieres raisons sont toujours données, la derniere le sera donc aussi; & on a fait voir que cette raison étant une fois connue, on étoit en possession de la quadrature du cercle : par conséquent cette quadrature, disoit-il, est trouvée.

Tel étoit le raisonnement de ce fameux Géometre, raisonnement qui se soutient conformément à la saine Géométrie, jusqu'à la derniere conclusion où se trouve l'erreur. J'en vais développer les preuves, en même tems que je rendrai compte des contradictions & des querelles qui s'éleverent à ce sujet.

Descartes fut un des premiers qui porta quelque jugement sur la prétendue quadrature & le livre du Géometre Flamand; il leur fut très-peu favorable, la quadrature fut déclarée fausse, & le livre traité de médiocre & même d'embrouillé. On trouve les raisons de ce jugement dans une lettre écrite à *Schotten* *, on n'en admettra cependant que la premiere partie; car quant à la médiocrité, nous avons fait voir qu'*Huygens* & *Leibnitz* en pensoient bien autrement; & quant à l'obscurité,

* Lettres de *Descartes*, *in-4°*, t. 3. Lettre 117.

nous pouvons dire que *Descartes* n'y en trouva qu'à cause du dégoût violent qu'il avoit pris pour la méthode des Géometres anciens; *Grégoire de S. Vincent* est un des plus intelligibles de ceux qui ont suivi cette route difficile. Je reviens à la Lettre de *Descartes*; il y dit avoir suivi pied à pied *Grégoire de S. Vincent*, depuis la proportion où il conclut sa quadrature jusqu'à une autre qu'il appelle en preuve & qui est fausse; elle l'est en effet visiblement suivant le sens que lui donne *Descartes*, mais il y a lieu à contestation si on l'entend dans celui que les défenseurs du *P. de S. Vincent* lui ont donné, suivant la doctrine & l'instruction de leur maître: ainsi la décision du Philosophe François ne tranche point la difficulté.

Descartes se contenta de communiquer ce qu'il pensoit sur *Grégoire de S. Vincent* à quelques-uns de ceux qui le consulterent; mais plusieurs autres

Géometres écrivirent pour le réfuter: à la vérité tous ne le firent pas aussi heureusement. *Roberval* & quelques autres, pour renverser l'édifice élevé par le Géometre Flamand, l'attaquerent dans les endroits où il étoit le plus solide. Ils établirent un faux système de proportions, ce qui donna lieu à un défenseur de la quadrature proposée de les réfuter eux-mêmes avec succès & avec solidité. M. *Huygens* & le Pere *Lieutaud*, Jésuite & Géometre habile, attaquerent les prétentions de *Grégoire de S. Vincent* avec plus de solidité; l'un dans un petit écrit intitulé *Exetasis, seu examen cyclometris Gregorii à Sancto Vincentio*, 1651, modele de netteté & de précision; l'autre dans un ouvrage plus étendu & intitulé, *Examen novæ quadraturæ*, &c. 1664.

Grégoire de S. Vincent trouva de son côté de zélés defenseurs dans quelques-uns de ses disciples, deux sur-tout se distinguerent dans cette lice, *Xavier*

Ainscom & *Alphonse de Sarassa*. Celui-ci y parut le premier, pour réfuter les prétentions de *Roberval* & de ses adhérens, & sur-tout le jugement que le P. *Mersenne* avoit imprimé dans ses *Reflexiones phisico math.* Ce P. y avoit parlé de la maniere la plus méprisante du livre de *Grégoire de S. Vincent*; & quant à la quadrature en question, il la rejettoit, fondé sur cette seule raison que son auteur paroissoit la réduire à ce problême: étant données trois grandeurs & les logarithmes de deux, trouver celui de la troisiéme, problême qu'il regardoit comme aussi insoluble que celui de la quadrature du cercle. Le P. *Mersenne* avoit tort; mais supposant même qu'il eut eu raison, ç'auroit encore été une grande & belle découverte que de réduire ces deux problêmes très-isolés à n'être plus qu'une même & unique question. On regarderoit comme une des vérités les plus remarquables & les plus utiles de la Géométrie, une liaison bien établie entre la quadrature du cercle & de l'hyperbole, liaison telle que l'une étant connue, l'autre le fût nécessairement. C'étoit cependant ce que le P. *Mersenne* reprochoit à *Grégoire de S. Vincent*, &, comme je l'ai déja dit, il se trompoit même en cela; ainsi *Sarassa* n'eut pas de la peine à lui répondre avec avantage, & à détruire victorieusement ses objections.

Quant à M. *Huygens* & le P. *Lieutaud*, ils porterent des coups plus réels à la quadrature prétendue; ils la réduisirent à examiner de quel sens étoit susceptible cette conséquence de *Grégoire de S. Vincent*, que la raison des deux premiers solides contenoit celle des deux seconds, comme celle-ci contenoit la troisiéme; & ils faisoient voir que de quelque côté qu'on l'entendît il n'en résultoit rien qui approchât de la quadrature du cercle. En effet on ne peut donner à ces paroles que ces deux

sens; une raison est à une autre comme une troisiéme à une quatriéme, quand étant réduites à un même conséquent, leurs antécédens sont proportionnels; ou bien lorsque la premiere raison est autant multipliée de la seconde que la troisiéme l'est de la quatriéme : il ne résulte rien d'avantageux de ces deux sens pour la quadrature contestée. Il n'y en avoit plus qu'un troisiéme à discuter, & c'étoit le dernier retranchement où les défenseurs de la quadrature pussent se retirer; il leur restoit, dis-je, à maintenir que la premiere raison, sçavoir celle des solides *A*, *B*, étoit composée d'une suite de raisons partiales, semblablement multipliées de chacune des raisons partiales qui composent la raison totale de *C*, *D*; que celle-ci étoient multipliées de celles qui composoient la raison cherchée de *E*, *F*. Mais quel avantage peut-on tirer de là pour la détermination de cette raison, disoit le P. *Lieutaud*? elle est encore

aussi inconnue qu'auparavant. Pourquoi, enfin, remarquoit-il avec M. *Huygens*, si cette derniere raison étoit donnée par les précédentes, pourquoi le P. *Grégoire de S. Vincent* avoit-il négligé de l'assigner? n'est-ce pas que réellement cette conséquence, *la premiere raison contient la seconde comme celle-ci la troisiéme*, n'est qu'une phrase vuide de sens, qui laisse encore la question indécise & à résoudre?

Ce fut pour répondre à ces adversaires qu'*Ainscom*, autre disciple du P. *de S. Vincent*, parut sur la lice. Il publia un livre intitulé, *Deductio quadraturarum à P. G. à S. Vincent. expositarum*, contre *Huygens* & *Lieutaud* principalement, & par occasion contre les autres contradicteurs de son maître. Le nœud de la principale difficulté à résoudre étoit dans quel sens on devoit entendre ce rapport de raisons, le fondement de la quadrature. *Ainscom* prétendit dans cette réponse que cette

troisiéme maniere qu'*Huygens* n'avoit pas même soupçonné, à cause de son éloignement du sens ordinaire; que *Lieutaud* avoit rejetté comme ne pouvant conduire à rien, & aussi difficile à déterminer que la quadrature ellemême, étoit cependant la véritable, la seule que *Grégoire de S. Vincent* eut entendue; que cette derniere raison enfin pouvoit se déterminer par des rapports d'espaces hyperboliques. Car, disoit-il, si l'on prend deux espaces hyperboliques entre les asymptotes, & que ces espaces soient tels que chaque partie de l'un soit semblablement multiple de chaque partie de l'autre que les premieres raisons partiales sont multipliées des secondes, le premier de ces espaces sera autant multiple du second que la premiere raison totale contient la seconde. Le nombre qui exprimera le rapport de ces espaces hyperboliques sera donc l'exposant du rapport multiplié de la premiere à la seconde, c'est-à-dire que si *n* est ce nombre & la premiere raison, sçavoir celle des solides *A*, *B* soit *R*, la seconde ou celle des solides *C*, *D* soit *P*; la raison *R* sera multipliée suivant l'exposant *n* de la raison *P*, & par conséquent celle-ci le sera semblablement de la troisiéme cherchée; elle est par conséquent donnée & connue suivant lui. Au reste ce nouveau défenseur de *Grégoire de S. Vincent* tomboit encore, malgré les instances de *Huygens* & de *Lieutaud*, dans le même défaut que son maître. Le moyen le plus aisé de confondre ses adversaires, qui prétendoient cette derniere raison inassignable, étoit sans doute de l'assigner; il ne le faisoit cependant point encore, ce qui prouve évidemment, comme le remarquoit M. *Huygens*, que lui & son maître ne cherchoient qu'à prolonger la querelle, sans se mettre en peine d'éclaircir la vérité, ou plûtôt en craignant le succès: ils espéroient du moins

par là de laisser la question indécise aux yeux de la postérité & de leurs contemporains. Mais le P. *Lieutaud* paroît l'avoir terminée dès-lors entierement; il n'attendoit que cette explication du sens des paroles de *Grégoire de S. Vincent* pour lui donner le dernier coup. En l'admettant de même que la maniere dont ils prétendoient l'assigner, par le moyen de ces espaces hyperboliques dont j'ai parlé, il fit voir qu'il en résultoit précisément le second sens qu'eux-mêmes avoient rejetté. Son raisonnement est légitime en effet, le moyen indiqué par *Ainscom* donneroit deux espaces hyperboliques nécessairement doubles l'un de l'autre, & par conséquent la premiere raison sera doublée de la seconde, & celle-ci le sera par conséquent de la troisiéme. Or tout cela est faux, car on ne peut pas dire que la raison de 53 à 205 soit en aucune maniere doublée de celle de 5 à 11. Il est bien clair par là que

Grégoire de S. Vincent se trompoit, & l'on n'en peut douter, quoiqu'en ait dit son panégyriste le P. *C.* dans sa préface au traité du calcul intégral de M. *Stone*.

Quant aux autres quadratures que proposoit *Grégoire de S. Vincent*, elles aboutissent toutes à un semblable raisonnement qui compare plusieurs raisons entr'elles; ainsi le défaut objecté à la premiere se trouve dans celles-ci. Un Géometre Allemand, nommé *Kinner*, dont j'ai l'ouvrage, entreprit cependant la défense de la seconde; mais cette défense, comme celles de *Sarassa* & *Ainscom*, solide dans les points non contestés, ne résoud pas plus qu'elles le nœud de la difficulté.

VII. La querelle entre *Grégoire de S. Vincent* ou ses disciples, & les contradicteurs de sa quadrature, étoit à peine finie, qu'un ouvrage publié par un Géometre Anglois occasionna une nouvelle discussion; la cause en étoit

d'une nature bien différente de celle qu'on viént de voir. M. *Jacques Gregori*, c'est ce Géometre, prétendit démontrer, dans un traité intitulé *Vera circuli & hyperbolæ quadratura*, que ces quadratures étoient impossibles. Le titre de ce livre, quoique contradictoire, ce semble, avec son objet, ne l'est cependant pas en Géométrie; c'est résoudre un problême que d'en démontrer l'impossibilité: ainsi M. *Gregori* ayant, à son avis, démontré celle de la quadrature du cercle, pouvoit donner légitimement à son ouvrage le titre qu'il porte. Les quadratures approchées qu'il y donne sont les seules vraies, puisqu'elles sont les seules qui soient possibles.

M. *Gregori* établissoit cette impossibilité sur quelques propriétés des polygones inscrits & circonscrits, & sur la nature de certaines suites qu'il nomme convergentes. Elles different des suites ordinaires en ce que dans celles-ci ce seroit la somme de tous les termes qui donneroit la vraie valeur cherchée, & qu'on en approche d'autant plus qu'on en prend un plus grand nombre : dans les suites de *Gregori* chaque terme exprime la valeur cherchée d'autant plus exactement qu'il est plus éloigné du premier.

Si $CADB$ (*fig.* 14, 15, 16) représente un secteur circulaire, elliptique ou hyperbolique, après avoir tiré la corde AB, le diametre CF, les tangentes AF, BF, puis encore les cordes AD, BD & la tangente GDE, on aura quatre secteurs de polygone, dont il y en aura deux inscrits & deux circonscrits. Or le rapport de ces figures est tel que le polygone $CADB$ est moyen géométrique entre l'inscrit CAB & le circonscrit correspondant $CAFB$; mais le polygone $CAGDEB$ est moyen harmonique entre ce dernier $CAFB$ & $CADB$. Et si l'on continue à l'infini une inscrip-

tion & une circonscription semblable, il se formera une suite infinie de polygones inscrits & circonscrits qui observeront toujours la loi précédente ; ce qui fournit une méthode très-simple pour déterminer tous ces polygones, les deux premiers seuls étant donnés ; car qu'ils soient A & B, le second inscrit C sera moyen entre A & B, & le second circonscrit D moyen harmonique entre C, B ; de même le troisiéme inscrit E sera moyen entre C, D, & le troisiéme circonscrit moyen harmonique entre E & D, & ainsi à l'infini. Cette suite enfin se terminera à deux termes égaux entr'eux & au secteur que je nomme S, & l'on auroit conséquemment la quadrature du cercle & de l'hyperbole si l'on pouvoit exprimer ce dernier terme.

Il n'est pas douteux que la loi d'une progression semblable ne puisse être telle qu'il soit possible dans certains cas de trouver cette terminaison ; M. *Gregori* en donne

quelques exemples où il réussit heureusement ; mais dans celui dont il s'agit ici, non seulement il désespere d'y réussir, mais il entreprend même de prouver qu'il est impossible de le faire : son raisonnement approche beaucoup de la démonstration, & se réduit au suivant.

Il est de la nature d'une suite semblable à celle qu'on vient de décrire ; que chaque terme, C, par ex. (*fig.* 17) soit semblablement composé de A, B, que E l'est de C & D, &c. & de même D est semblablement composé de A, B, que F de C, D, &c. C'est encore une conséquence de la génération de cette suite que chaque terme, le dixiéme, par exemple, après A, B, soit semblablement composé de A, B que le dixiéme après E, F l'est de ces derniers. Par conséquent le terme infiniment éloigné, & qui l'est par là également de tous ceux de la suite, sera semblablement composé de chacun des paires

A, B ou C, D ou E, F, &c. & si malgré ce raisonnement on pouvoit encore douter de la certitude de cette conclusion, on la confirmeroit en remarquant que lorsque par sa nature le dernier terme est assignable, on le trouve par cette voie (*voy. prop.* 7 *& suiv.*), ce qui ne seroit point si cette propriété du dernier terme étoit fausse : on peut encore s'en assurer par d'autres raisonnemens.

Si l'on examine à présent la nature des premiers termes de cette suite, on s'appercevra que le dernier terme cherché est inassignable analytiquement & en termes finis. Car réduisant les termes A, B à ceux de cette forme ; $a^3 + a^2 b$ & $ab^2 + b^3$; afin d'éviter que les seconds deviennent irrationnels, on a pour ceux-ci $aab + b^2 a$ & $2bba$. Cela étant, le dernier terme S de cette suite convergente, qui exprime le secteur circulaire ou hyperbolique, devroit être une quantité semblablement composée des termes $a^3 + a^2 b$ & $ab^2 + b^3$, que de ceux-ci $aab + bba$ & $2bba$; c'est-à-dire que les mêmes opérations analytiques qui formeroient ce terme S des deux premiers, étant appliqués aux deux seconds, devroient produire la même quantité; or c'est ce qui ne se peut en aucune maniere, car le terme a^3, puissance plus élevée qu'aucune autre de la même lettre dans les autres termes, donnera nécessairement dans les produits semblables une puissance plus élevée, & il en résultera aussi une expression plus composée de premiers termes, qui le sont davantage que les seconds. Le dernier terme S ne peut donc s'exprimer analytiquement en termes finis, puisqu'il faudroit pour cela que cette expression analytique fût un même produit résultant de deux paires de grandeurs, qui, soumis aux mêmes opérations, doivent donner des produits différens & inégaux. On peut voir ce raisonnement plus développé

dans la prop. 11 du traité de M. *Gregori.* J'ajouterai à ces raisons que ce n'est que dans l'infini que peut disparoître cette inégalité; ainsi l'expréssion du dernier terme S doit être d'une composition, d'un degré infini; or c'est ce qui n'est susceptible d'aucune résolution analytique en termes finis.

Les démonstrations négatives semblent avoir ce défaut, de ne point porter la même lumiere que les positives, & c'est peut-être par cette raison que celles qui ont eu pour objet de démontrer l'impossibilité de la quadrature du cercle n'ont jamais eu un grand succès. Celle-ci ne parut point concluante à M. *Huygens*; prié d'en dire son avis, de même que du reste de l'ouvrage, il l'exposa par un écrit qui parut dans le Journal des Sçavans du deux Juillet 1668 : il y prétendit renverser entierement les démonstrations de *Gregori.* Celui-ci répondit peu après dans les *Transactions*, *n.* 37; il y convint de quelques

inadvertances qui avoient procuré à son adversaire un léger avantage; il y établissoit d'ailleurs assez solidement d'autres points contestés par *Huygens* pour que celui-ci s'y rendît; mais il persista dans un nouvel écrit inséré dans le même Journal de la même année, il persista, dis-je, à prétendre que la démonstration principale ne concluoit pas tout ce que *Gregori* en inféroit; il paroissoit se rendre, à la vérité, sur l'impossibilité de la quadrature indéfinie, mais il nioit toujours que l'on pût en conclurre la même chose à l'égard de celle du cercle entier, ou de quelqu'un de ses segmens ou secteurs déterminés. M. *Gregori* répondit de nouveau à ces objections, & fit un dernier effort pour y établir son sentiment; on trouve entr'autres, dans la réplique, un raisonnement qui paroît conclurre qu'afin que la raison d'un secteur à un des polygones inscrits fût exprimée analytiquement, il fau-

droit que cette expression fût d'un degré infiniment élevé. Cette conséquence est conforme à ce qui est toujours arrivé par quelque méthode qu'on ait entrepris ce fameux problême; l'analyse a toujours donné des expressions en termes infinis, qui ne sont que des équations d'une dimension infinie. Il résulte de là une grande présomption en faveur du raisonnement de M. *Gregori.* Les Géometres admettent aujourd'hui d'une commune voix que la quadrature indéfinie du cercle est impossible; mais quant à la quadrature définie, on suspend encore son jugement. L'impossibilité de la premiere espece de quadrature n'entraîne pas nécessairement celle de la seconde, puisque M. *Bernoulli* a démontré qu'il y avoit des courbes qui quoique non quarrables indéfiniment, ne laissent pas d'admettre un ou plusieurs espaces déterminés absolument quarrables : on n'a point encore démontré que cela ne puisse pas arriver dans le cercle.

Il y eut aussi quelques contestations entre ces deux Géometres, sur le mérite des approximations qu'ils avoient donné dans leurs ouvrages. M. *Huygens* non seulement mit celles de *Gregori* au-dessous des siennes, mais remarquoit que quelques-unes d'entre elles étoient les mêmes que celles qu'il avoit déja publiées dans d'autres termes. La remarque étoit vraie ; cependant le travail de *Gregori* ne laisse pas d'avoir quelque avantage, & de l'emporter à certains égards sur celui de M. *Huygens*. En effet les approximations que celui-ci avoit borné au cercle, & cela parce que sa méthode ne pouvoit le conduire plus loin, ces approximations, dis-je, conviennent également à l'hyperbole. La méthode du Géometre Anglois ne sépare point ces deux courbes, qui tiennent l'une à l'autre par tant de propriétés analogues. Cette raison me détermine à les remettre

remettre ici sous ce point de vûe plus général. Que A, C représentent deux polygones ou secteurs de polygones inscrits de suite, comme on l'a déja expliqué, soit au cercle, soit à l'ellipse ou l'hyperbole, comme les polygones CAB, $CADB$ (*fig.* 14, 15, 16) ; & que B, D soient les polygones circonscrits correspondans à A, C, tels que $CAEB$, $CAGFB$. Le secteur est plus grand que le polygone $C \pm$ le tiers de la différence entre A & C. Le signe plus est pour le cercle, & celui de moins pour l'hyperbole ; mais le même secteur est moindre que la seconde des deux moyennes, soit arithmétiques, soit géométriques entre les polygones C, D. J'entens par la seconde la plus voisine du circonscrit, qui est la plus grande dans le cercle & l'ellipse, & la moindre dans l'hyperbole. Les deux limites sont par conséquent $\frac{4C - A}{3}$ & $\frac{C + 2D}{3}$. M. *Huygens*

revendiquoit ces deux déterminations ; mais on peut dire qu'indépendamment de la généralité que leur donnoit M. *Gregori*, la méthode qui l'y conduisoit les lui rendoit propres. M. *Gregori* ajoute qu'on en approchera de plus près en prenant entre les limites précédentes la plus grande des quatre moyennes arithmétiques, sçavoir $\frac{8D + 8C - A}{15}$, d'où il résulte le triple des chiffres exacts dans l'approximation qu'on en tire ; je veux dire que si les limites précédentes donnent une valeur de la courbe qui ne differe de la véritable que d'une 100000^{e}, la derniere en donnera une qui ne différera que d'une 1, 00000, 00000, 00000^{e} ; appliquons ces vérités, avec M. *Gregori*, plus particulierement aux arcs de cercle.

Si A est la corde d'un arc & B les deux cordes prises ensemble des moitiés de cet arc, qu'on fasse 1°. $A + B : B$

$:: 2B : C$, on aura $\frac{8C + 8B - A}{15}$ plus grande que l'arc, la difference n'étant qu'environ $\frac{1}{300000}$ lorsque l'arc égale le quart du cercle, & beaucoup moindre quand il sera une moindre portion de la circonférence. 2°. Que $A : B :: B : D$, alors $\frac{12C + 4B - D}{15}$ sera moindre que l'arc & en différera à peine d'une 60000^{e}, lors même qu'il égalera le quart du cercle. Qu'on prenne enfin entre ces limites la seconde des six moyennes arithmétiques (en commençant par la plus grande), elle sera moindre que l'arc, & l'erreur n'égalera pas $\frac{1}{3000000}$ dans le cas où il seroit un quart de cercle. Ces dernieres approximations de *Gregori* l'emportent incontestablement sur celles de son adversaire, elles ont même cet avantage, d'être sans comparaison plus aisées à calculer. On peut voir toutes les piéces de cette contestation littéraire dans le second tome des Œuvres d'*Huygens*, on y trouve même le traité de *Gregori* qui y a été inséré, sans doute pour épargner au Lecteur la peine de recourir ailleurs à un ouvrage devenu rare & difficile à se procurer.

X. Je dois remarquer ici que M. *Gregori* n'est pas le seul qui ait réputé la quadrature du cercle impossible; divers autres avant & après lui l'ont regardée comme telle, & il faut convenir que quoique leur sentiment ne soit pas appuyé sur une démonstration complette, il a néanmoins une probabilité qui approche beaucoup de la certitude; en effet, quel motif d'en juger ainsi ne fournissent pas tant d'efforts superflus qui ont eu ce fameux problême pour objet? Quand je parle d'efforts superflus, je suis bien éloigné de penser aux ridicules tentatives de ces hommes à qui l'on ne sçauroit accorder le titre de Géometre sans l'avilir & le prostituer, mais un grand nombre de génies supérieurs,

les *Archimede*, les *Appollonius*, les *Huygens*, les *Gregori*, les *Wallis*, &c. sans parler de tant d'autres plus modernes, qui, après des peines inutiles, se sont vû réduits à perfectionner seulement la méthode d'approximation: tous ces génies, dis-je, semblent fournir une preuve de cette impossibilité qui approche beaucoup de la démonstration. Au reste ceci ne regarde que la quadrature définie du cercle; c'est une vérité aujourd'hui reconnue, que l'indéfinie est impossible, comme l'illustre M. *Newton* l'a démontré dans ses principes; il y fait voir que non-seulement le cercle, mais qu'aucune courbe rentrant en elle-même, comme le cercle, l'ellipse, &c. n'étoit susceptible de quadrature indéfinie générale, non plus que de rectification, car l'équation qui exprimeroit indéfiniment cette aire, devroit être d'un degré infini. La maniere dont *Newton* établit cette vérité est particuliere, j'en donnerai une autre plus bas.

Après *Newton* je trouve dans les Mém. de l'Acad. avant 1699, un écrit de M. *Rolle*, cité comme ayant démontré la même chose. M. *Saurin* l'a fait encore dans les Mém. de 1271, en voici une démonstration très-simple.

Que l'aire indéfinie du cercle ou le segment correspondant à une abcisse quelconque x ou CP (*fig.* 18) soit quarré, & qu'il soit exprimé par X, qui est une fonction quelconque de x, c'est-à-dire une expression formée de x & de ses puissances combinées, comme l'on voudra, avec des coefficiens constans; puisque cette fonction est d'un degré déterminé, que l'exposant de la plus haute puissance de x soit le nombre fini n, il est évident qu'on aura en équation finie le rapport des secteurs ACB, BCE, sçavoir en ôtant du segment AP, le triangle CBP & l'ajoutant à BPE. Le rapport des arcs AB, BE quelconques donné, on aura conséquemment par équation finie celui de

CP, CE, ou CP, PE; c'est-à-dire qu'on pourra indéfiniment diviser la circonférence du cercle en deux parties en raison quelconque, sans avoir à résoudre qu'une équation d'un degré déterminé n; mais la théorie des sections angulaires nous apprend que cela est impossible. Car la raison proposée entre les arcs AB, AE étant exprimée par deux nombres premiers entr'eux & plus grands que n, l'équation qui en résultera sera nécessairement d'un degré plus élevé que n; & si ce rapport est irrationnel, il faudra nécessairement une équation d'un degré infini. Quelque soit le nombre n, il ne peut donc être fini & déterminé, puisqu'il doit répondre à tous les cas imaginables des sections angulaires, & qu'il y en a une infinité qui conduisent à des équations infinies.

CHAPITRE IV.

Des découvertes faites sur la mesure du Cercle à l'aide des nouveaux calculs, où l'on fait par occasion l'histoire de la naissance du calcul intégral.

I. Les découvertes qu'on vient de voir sur la mesure du cercle suffiroient déja pour donner une grande idée de la sagacité des Géometres qui les ont produites ; mais sans les déprimer en aucune maniere, nous osons dire qu'elles ne sont encore qu'une petite partie de ce que la Géométrie a fait à cet égard. C'est proprement aux calculs modernes que nous sommes redevables des grandes lumieres sur ce sujet ; ce sont les *Wallis*, les *Newton*, & quelques illustres analystes, dignes successeurs de ces excellens génies, qui lui ont donné la derniere perfection dont il paroît

susceptible. L'ordre des progrès de ces découvertes nous engage à développer la naissance du calcul intégral ; nous en avons saisi l'occasion avec d'autant plus d'empressement que c'est le principal endroit par où nous avons espéré de rendre cet ouvrage intéressant aux Géometres.

II. Les Géometres sçavent que l'objet de la Géométrie de l'infini est de trouver le rapport de la somme des élémens infinis en nombre qui croissent ou décroissent suivant un certaine loi & dont une figure est composée, avec la somme des élémens égaux entre eux, & au plus grand, qui composent la figure uniforme de même base & de même hauteur. On n'eut pas beaucoup de peine à déterminer ce rapport, quand ces élémens suivirent une loi simple, telle que celle des termes d'une progression arithmétique, ou de leurs puissances. *Fermat*, *Descartes* & *Roberval* s'apperçurent même avant *Cavalleri*, de la formule générale qui exprime ce

rapport : *Cavalleri* s'y éleva aussi bientôt après de lui-même dans ses *Exercitations*. Les ordonnées étant comme les puissances m de l'abcisse, soit entieres, soit rompues ; $\frac{1}{m+1}$ exprime en général le rapport de la figure à celle de même base & même hauteur.

Mais tout cela n'étoit que quelques rayons échappés d'une plus grande lumiere, que *Wallis* dévoila dans son *Arithm. infinitorum*, 1657. Cet illustre Géometre, en suivant le fil de l'analogie, qui fut toujours sa méthode favorite, ajouta beaucoup à ces découvertes ; ce fut, par exemple, l'analogie qui le conduisit à étendre la formule donnée ci-dessus, aux cas même où l'ordonnée est en raison réciproque de l'abcisse. On lui doit l'ingénieuse idée de regarder les fractions comme des puissances dont les exposans sont négatifs : ainsi $\frac{1}{x^m}$ n'est autre chose que x^{-m}. Il fit

enfin à l'égard de cette sorte de Géométrie, qui s'occupe de la mesure des grandeurs, ce que *Descartes* avoit fait sur celle qui recherche les propriétés des lignes courbes ; il y appliqua un calcul commode, & par là fournit à la Géométrie quantité d'objets qui lui avoient jusqu'alors échappé.

On tire aisément de la théorie de *Wallis* la mesure de toutes les paraboles, de leurs solides de circonvolution, &c. de toutes les figures enfin dont les élémens exprimés analytiquement ne renferment point de quantité complexe, & de variables sous le signe radical, ou qui peuvent s'en dégager par quelque substitution. Ainsi les figures dont les élémens sont exprimés indéfiniment par $\overline{aa \pm xx}^{0}$, $\overline{aa \pm xx}^{1}$, $\overline{aa \pm xx}^{2}$, &c. se quarreront aisément, car ces expressions sont respectivement 1. $aa \pm xx$, $a^4 \pm 2aaxx \pm x^4$, qui donnent, suivant les principes de ce calcul, x, $aax \pm \frac{x^3}{3}$, $a^4x \pm \frac{2aax^3}{3} \pm \frac{x^5}{5}$, pour les aires correspondantes aux abcisses x. Ces conséquences sont tout-à-fait conformes au résultat du calcul intégral appliqué aux mêmes exemp.

Il n'y a de la difficulté que dans les termes où les puissances de $\overline{aa \pm xx}$ sont des nombres rompus, ou lorsqu'elles sont négatives. Ce premier cas est celui de l'expression de l'ordonnée du cercle, qui est $\sqrt{aa - xx}$, ou $\overline{aa - xx}^{\frac{1}{2}}$; x étant l'abcisse prise à compter du centre & le rayon étant a, on ne connoissoit pas encore à cette époque, la maniere de développer cette expression en termes rationels, & c'étoit une condition nécessaire pour y appliquer l'arithmétique de l'infini.

III. *Wallis*, après avoir quarré un grand nombre de figures, se trouva donc arrêté comme on l'avoit été jusqu'alors à la mesure du cercle; il tenta

de surmonter cet obstacle, & au défaut d'une méthode directe, il imagina les *interpolations*, auxquelles il a même donné son nom, car on les appelle souvent *Wallisiennes*. Cette méthode d'interpolation consiste à observer dans une suite de termes quelconques la loi générale qui regne entr'eux, & à insérer entre deux termes un ou plusieurs autres qui s'y conforment. C'est ainsi, pour en donner un exemple assez simple, qu'ayant la progression des nombres triangulaires 0. 1. 3. 6. 10. 15. &c. dans laquelle on voudroit insérer un terme entre chacun d'eux, on remarqueroit que leur différence étant arithmétiquement croissante, il faut donc que cette loi s'observe encore entre les termes de la nouvelle progression, c'est-à-dire que la différence y croisse encore arithmétiquement. Pour y parvenir, soient donc x & z les deux termes à insérer entre 0 & 1, 1 & 3; cela fait, on aura d'abord x, $1 - x$, $z - 1$

en proportion arithmérique continue; ce qui donnera $x = \frac{3 - z}{3}$. La seconde équation viendra de la progression arithmétique discrete qui doit se trouver entre les termes x; $1 - x$; $z - 1$; $3 - z$: ce qui donne $z = \frac{2x + 3}{2}$. Or cette valeur de z substituée dans la premiere expression de x, donnera enfin $x = \frac{3}{8}$; on trouvera de même $z = 1\frac{7}{8}$; la suite interpolée sera donc 0. $\frac{3}{8}$. 1. $1\frac{7}{8}$. 3. $4\frac{3}{8}$. 6. &c. dont les différences sont encore en progression arithmétique, sçavoir $\frac{3}{8}$. $\frac{5}{8}$. $\frac{7}{8}$. &c. c'est là l'esprit des interpolations; & en voilà assez pour mettre les personnes intelligentes en état d'aller plus loin dans l'occasion: appliquons ceci à la mesure du cercle.

On remarquera donc avec *Wallis*, * qu'on a une suite d'expressions, comme $\overline{aa - xx}^0$. $\overline{aa - xx}^1$. $\overline{aa - xx}^2$. $\overline{aa - xx}^3$. &c. dont les exposans des

* *Algebra & arithmetica infinitorum.*

puissances, sçavoir 0. 1. 2. 3. &c. croissent arithmétiquement. On a aussi les sommes des élémens que ces expressions désignent, ou les rapports des figures composées de ces élémens à la figure uniforme de même base & même hauteur; ils sont dans le cas particulier ou $x = a$, ils sont, dis-je, 1. $\frac{2}{3}$. $\frac{8}{15}$. $\frac{48}{105}$. respectivement, ou, pour observer plus facilement la loi qui regne entre ces expressions, 1. $\frac{2}{3}$. $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$. $\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}$. &c. Or qu'on insere dans la suite des expressions ci-dessus $\overline{aa - xx}^0$, &c. celle-ci $\overline{aa - xx}^{\frac{1}{2}}$, elle tombera entre le premier & le second, comme celles-ci $\overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}}$. $\overline{aa - xx}^{\frac{5}{2}}$ tomberont encore le second & le troisiéme, le troisiéme & le quatriéme, & il se formera une progression réguliere de l'expression $\overline{aa - xx}$, dont les exposans seront successivement 0. $\frac{1}{2}$. 1. $1\frac{1}{2}$. 2. $2\frac{1}{2}$. &c. encore arithmétiquement croissans, mais par des différences de moitié des précédentes. Or ne pouvant avoir directement les ſommations de ces termes nouveaux, on les auroit du moins ſi on pouvoit de même inſérer entre les termes $1.\ \frac{2}{3}.\ \frac{8}{15}.\ \frac{48}{105}.$ &c. ſi on pouvoit, dis-je, inſérer de nouveaux termes entre le premier & le ſecond, le ſecond & le troiſiéme, &c. & que ces nouveaux termes, ſuivant l'eſprit des interpolations, ſe conformaſſent exactement à la loi qui régne dans cette progreſſion, de même que leurs correſpondans $\overline{aa - xx}^{\frac{1}{2}}.$ &c. ſe conforment à la loi de la progreſſion où on les a inſérées. Le problême de la quadrature du cercle envisagé de cette maniere, ſe réduit donc à interpoler entre 1 & $\frac{2}{3}$ le terme qui convient à la progreſſion $1.\ \frac{2}{3}.\ \frac{2 \times 4}{3 \times 5}.\ \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}.$ &c.

IV. Il ſeroit long, & beaucoup plus que les limites de cet ouvrage ne me le permettent, de développer

tout le reſte de la théorie, toutes les remarques adroites que fait *Wallis* dans cette vûe; il trouve enfin * que ce terme eſt la ſuite infinie $\frac{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10}{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times}$ &c. ou, ce qui revient au même, $\frac{2}{3} \times \frac{16}{15} \times \frac{36}{35} \times \frac{64}{63} \times \frac{100}{99}$ &c. à l'infini, ou encore $\frac{8}{9} \times \frac{24}{25} \times \frac{48}{49} \times \frac{80}{81}$, &c. à l'infini. Celle-ci, dans quelque endroit qu'on la termine, donne une valeur plus grande que la vraie; la précédente la donne toujours moindre, d'où l'on peut ſe former des limites de plus en plus ſerrés: mais ſi l'on vouloit employer cette expreſſion à des approximations de l'aire du cercle, *Wallis* en fournit un moyen plus court que le précédent: le cercle eſt toujours plus grand que cette expreſſion $\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.\ldots\ldots z}{3.3.5.5.7.7.9.9\ldots z - 1}\sqrt{\frac{z-1}{z}}$, & moindre que $\frac{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10\ldots z}{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9\ldots z - 1}\sqrt{\frac{z}{z+1}}$

* *Arithm. infinit. prop.* 191.

z exprime ici le dernier terme, ou celui où l'on veut s'arrêter, & il faut qu'il ſoit tel que ſon inférieur correſpondant ſoit moindre de l'unité; ou, ce qui eſt la même choſe, que le nombre des termes ſoit pair. Ces limites ſont démontrées par la maniere dont *Wallis* trouve ſon expreſſion, car il ne la conclut infinie que parce qu'il la trouve de cette forme, d'abord plus grande que $\frac{2 \times 4}{3 \times 3}\sqrt{\frac{3}{4}}$ & moindre que $\frac{2 \times 4}{3 \times 3}\sqrt{\frac{4}{5}}$, & enſuite plus grande que $\frac{2 \times 4 \times 4 \times 6}{3 \times 3 \times 5 \times 5}\sqrt{\frac{5}{6}}$, & moindre que $\frac{2.4.4.6}{3.3.5.5}\sqrt{\frac{6}{7}}$, & ainſi de ſuite à l'infini. Or il ſera aiſé d'aſſigner par là quel nombre de termes il faudroit employer pour arriver à un degré d'exactitude requis. Au reſte ſi quelqu'un doutoit de la vérité de cette expreſſion, je remarquerai en ſa faveur, qu'elle ſe réduit à la ſuite ſi

connue pour le cercle $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ &c. M. *Euler* le démontre dans les Mémoires de Péterſbourg (*a*), dans l'un deſquels ce ſçavant Géometre enſeigne à transformer de différentes manieres les ſuites infinies pour les réduire à la forme qu'on juge la plus avantageuſe; ceux qui ne ſe rendent qu'à la multitude des preuves, regarderont celle-ci comme une confirmation frappante de la vérité de l'une & de l'autre ſuite.

V. *Wallis* paroît être dans une opinion fort ſemblable à celle de *Gregori* ſur la quadrature du cercle, il panche beaucoup à la regarder comme abſolument impoſſible: les paroles ſuivantes (*b*) contiennent ſon ſentiment à ce ſujet; elles ſont remarquables. *Je ſuis fort porté à croire*, dit-il, *ce que j'ai ſoupçonné dès le commencement, que le rapport* (du cercle à une figure rectili-

(*a*) *T.* 9, *ann.* 1737, *p.* 178.

(*b*) *Alg. c.* 83, *Sch.*

ligne), *est d'une nature à ne pouvoir être désignée par aucune expression encore reçue, pas même par des nombres sourds, de sorte qu'il seroit peut-être nécessaire d'introduire quelque nouvelle maniere d'expression autre que les nombres rationaux & sourds.* Une des raisons qui déterminoit *Wallis* à cette maniere de penser, étoit la remarque qu'il faisoit, que la Géométrie connoît dès longtems une infinité de grandeurs absolument irréductibles à des nombres rationaux. L'ordre & l'analogie ne conduisent-elles pas à penser en conséquence qu'il peut y en avoir d'autres qui sont à l'égard des nombres sourds eux-mêmes, ce que ceux-ci sont à l'égard des premiers? J'ajouterai que la Géométrie ne se borne pas à ce seul exemple; il y a des ordres entiers de problêmes absolument irréductibles à d'autres inférieurs: la rectification de l'ellipse & de l'hyperbole paroît être de

cette nature, comparée à la quadrature de ces courbes; & celles-ci le sont probablement de même, comparée à quelque figure rectiligne que l'on voudra, soit rationnelle, soit irrationnelle au quarré de leur diametre. Dans ce cas il est aussi chimérique de chercher la quadrature du cercle & de l'hyperbole autrement que par approximation, que de prétendre assigner exactement la racine d'un nombre qui n'est pas quarré.

VI. La découverte qu'on vient d'exposer fut bientôt suivie d'une autre qui ne lui cede point en beauté; elle est dûe à Milord *Brouncker*. Consulté par *Wallis*, lorsqu'il travailloit à interpoler sa suite $1. \frac{2}{3}. \frac{8}{15}.$ &c. consulté, dis-je, de quelle maniere il croiroit pouvoir y parvenir, il s'y appliqua; & pendant que *Wallis* rencontroit, guidé par son analyse, l'expression qu'on a déja fait connoître, il trouva de son

côté la suivante. C'est l'unité divisée par

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \&c.}}}}$$

La nature de cet expression est aisée à appercevoir; la voici cependant plus développée pour ceux à qui elle ne seroit pas assez évidente: c'est une fraction qui differe des autres en ce que dans celles-ci le dénominateur est un nombre entier fini & terminé; mais celle que donne Milord *Brouncker* a pour dénominateur un nombre entier plus une fraction, dont le dénominateur est lui-même composé de la même maniere, & ainsi à l'infini. Ici le dénominateur est toujours 2, & les numérateurs sont successivement les quarrés des nombres impairs 1. 3. 5. 7. &c. Cette suite infiniment prolongée, exprime le rapport du quarré du

diametre au cercle, en faisant le diametre égal à l'unité; mais lorsqu'on la terminera, on aura alternativement des limites par excès & par défaut: ainsi $1 + \frac{1}{2}$ est trop grand, $1 + \cfrac{1}{2 + \frac{9}{2}}$ est trop petit, &c. Au reste ces limites seront beaucoup plus resserrées si l'on fait toujours le dernier dénominateur égal à la racine de son numérateur augmenté de 2, on aura alors alternativement $1 + \frac{1}{3}$. $1 + \cfrac{1}{2 + \frac{9}{5}}$. $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \frac{25}{7}}}$, dont la premiere est encore plus grande que la vérité, la seconde moindre, la troisiéme plus grande, & ainsi à l'infini. Une invention si remarquable méritoit d'être confirmée par une démonstration; M. *Wallis* en a donné une à la fin de son Arithmétique des infinis: mais on ne connoît point l'analyse qui y conduisit Mylord *Brouncker*, & on doit regretter, avec M. *Euler* (*a*), qu'elle n'ait jamais été communiquée.

VII. Les fractions de cette forme ont plusieurs propriétés remarquables, qui leur ont mérité l'attention spéciale de M. *Euler* : on voit sur ce sujet un sçavant écrit de ce Géometre dans les Mémoires de Petersbourg (*b*). Parmi plusieurs usages auxquels il les emploie, il y en a un qui appartient à l'objet présent. Il s'en est servi pour résoudre ce problême : *une fraction exprimée par un grand nombre de chiffres étant donnée, par exemple, la raison de la circonférence au diametre de 3, 14159. 26535, &c. à 1, 00000, 00000, &c. il s'agit de trouver toutes les fractions en moindres termes, qui approchent de si près de la vérité qu'il soit impossible d'en approcher davantage sans en employer de plus grandes.* On veut

(*a*) Mémoires de Petersbourg, t. 9. p. 101.
(*b*) *Ibidem.* p. 98.

veut, par exemple, trouver quelle est la fraction, dont le numérateur ne passant pas 10, ou 100, ou 1000, différera le moins qu'il est possible de la vérité ; il faut pour cela réduire ce rapport en fraction continue ; c'est ce qu'on fera en divisant 3. 1415 &c. par 10000 &c. le quotient est 3, ensuite on divisera 10000, par le reste, 1415, &c. & l'on trouve 7 ; on continuera de même en divisant 1415 &c. par le reste de celle-ci, & on aura 15, & ainsi de suite ; la fraction continue sera donc

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{192}}}}, \text{\&c.}$$

ce qui donne la solution du problême, car $\frac{3}{1}$ est moindre qu'il ne faut ; les deux premiers termes sont $\frac{22}{7}$, la proportion d'*Archimede*, qui de toutes celles qui ne passent pas 100 est la plus exacte par excès ; les trois premiers termes donnent la raison trop petite de

333, 106 ; en prenant un terme de plus on a celle de *Metius*, qui est excédente 355. 113 : l'une & l'autre est la plus exacte (l'une par défaut, l'autre par excès), de toutes celles qui n'ont pas un numérateur plus grand que 1000 ; celle de *Metius* sur-tout approche extrêmement de la vérité. On en voit la raison dans la fraction continue, c'est que le terme suivant $\frac{1}{192}$ est très-petit ; on trouve enfin de suite 103993 : 33102. 104348 : 33215. 208341 : 66317, 521030 : 195849. &c. qui ont des propriétés semblables ; & que M. *Euler* enseigne à trouver par un moyen fort simple. M. *Wallis*, qui a résolu ce problème par une méthode beaucoup plus laborieuse, a donné une table de ces fractions poussée assez loin. *

VIII. C'est une remarque digne d'attention dans l'histoire des Sciences,

* *Algebra*, c. 3.

que les découvertes les plus heureuses ont presque toujours été précédées de quelques légeres ébauches, qui en ont été l'occasion & le motif. Cela se vérifie ici : les idées de *Wallis* sur les interpolations, mises en œuvres plus heureusement par *Newton*, ont été le principe de presque toutes les découvertes de la nouvelle Géométrie. Les suites infinies de la forme dont nous les employons, le développement des puissances, ou le fameux binome de *Newton*, & un grand nombre de nouvelles expressions de l'aire du cercle, furent le premier fruit des tentatives qu'il fit pour surmonter l'obstacle qui avoit arrêté *Wallis*. *Newton* nous raconte lui-même le progrès de ces découvertes, dans sa seconde lettre *, écrite à Oldembourg en 1676. Nous ne sçaurions suivre un guide plus sûr.

* *Commercium Epist. de anal. promotâ*, p. 67. *Newtoni opuscula*, t. 1, p. 328.

Wallis, comme on l'a vû, avoit réduit la quadrature du cercle à déterminer la ſommation du terme $\sqrt{1 - xx}$, dans les principes de l'arithmétique des infinis : ſommation qui dans le cas défini du quart de cercle entier, ou de $x = 1$, eſt le terme à interpoler entre les deux premiers de la ſuite hypergéométrique $1. \frac{2}{3}. \frac{8}{15}.$ &c. *Wallis* avoit bien remarqué * que ſi dans la ſuite $x. \; x - \frac{x^3}{3}. \; x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$ &c. on pouvoit trouver le terme moyen entre les deux premiers, on auroit quelque choſe de plus parfait que la quadrature qu'on a fait connoître ; car on auroit eu alors la meſure indéfinie du ſegment correſpondant à l'abciſſe x : mais il ne put y parvenir, quoiqu'il ſe fut aſſez bien mis ſur la voie ; la réuſſite en étoit réſervée aux premiers eſſais de *Newton*.

* *Ibid. c.* 82.

Pour ſuivre plus aiſément la marche de ce puiſſant génie dans cette recherche, il nous faut expoſer plus diſtinctement les expreſſions qu'on a données ci-deſſus ; on a donc

$$x - \tfrac{0}{3} x^3$$
$$x - \tfrac{1}{3} x^3$$
$$x - \tfrac{2}{3} x^3 + \tfrac{1}{5} x^5$$
$$x - \tfrac{3}{3} x^3 + \tfrac{3}{5} x^5 - \frac{x^7}{7}$$
$$x - \tfrac{4}{3} x^3 + \tfrac{5}{5} x^5 - \tfrac{4}{7} x^7 + \tfrac{1}{9} x^9.$$

Ce nombre ſuffira pour l'objet qu'on ſe propoſe.

Newton remarquoit donc d'abord que toutes ces expreſſions commençoient par x, que tous leurs termes étoient alternativement poſitifs & négatifs ; que les puiſſances de x alloient toujours en croiſſant, comme $x. \; x^3. \; x^5$ &c. Il ne s'agiſſoit que de trouver les coefficiens ; pour cela il obſervoit encore que les coefficiens des termes qui ſont dans le ſecond rang perpendiculaire, ſont ſucceſſivement $\frac{0}{3}. \frac{1}{3}. \frac{2}{3}$ &c. ainſi l'expreſſion

à inſérer entre $x - \frac{1}{3} x^3$ & x ou $x - \frac{0}{3} x^3$, doit avoir un coefficient moyen arithmétique entre $\frac{0}{3}$ & $\frac{1}{3}$, ſçavoir $\frac{\frac{1}{2}}{3}$. Les deux premiers termes ſeront donc $x - \frac{\frac{1}{2}}{3} x^3$; & comme les dénominateurs croiſſent arithmétiquement & ſont 3. 5. 7. &c. tout eſt fait à cet égard, il ne reſte plus que les numérateurs de ces coefficiens. C'eſt auſſi préciſément le nœud de la difficulté, & il y eut bien de la ſagacité à remarquer, comme fit *Newton*, que m étant le numérateur du coefficient du ſecond terme, ceux des ſuivans étoient ſucceſſivement $\frac{m. \, m - 1}{1. \, 2.}. \; \frac{m. \, m - 1. \, m - 2}{1. \, 2. \, 3.}$ &c. c'eſt ce qu'il eſt aiſé d'éprouver ſur les termes où ces coefficiens ſont connus.

Appliquons à préſent cette derniere remarque à l'expreſſion $x - \frac{\frac{1}{2}}{3} x^3$, &c. où le numérateur du ſecond terme eſt

$\frac{1}{2}$. On trouve, en mettant cette valeur en la place de m dans les formules ci-deſſus, pour les ſuivans $- \frac{1}{8}. \; \frac{1}{16}. \; - \frac{5}{128}.$ &c. ainſi ayant égard à la compoſition des ſignes, on trouve pour le troiſiéme terme $- \frac{\frac{1}{8}}{5} x^5$ ou bien $- \frac{1}{40} x^5$; pour le quatriéme $- \frac{\frac{1}{16}}{7} x^7$, ou $- \frac{1}{112} x^7$ &c. cette expreſſion ſera enfin $x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{40} x^5 - \frac{1}{112} x^7 - \frac{5}{1152} x^9$ &c. ou, afin de mieux voir la loi de ſa continuation, $x - \frac{1}{2. \, 3.} x^3 - \frac{1}{2. \, 4. \, 5.} x^5 - \frac{1. \, 3.}{2. \, 4. \, 6. \, 7.} x^7 - \frac{1. \, 3. \, 5.}{2. \, 4. \, 6. \, 8. \, 9.} x^9$ &c. la premiere ſuite qui ait été donnée de l'aire du cercle. Si le détail où l'on vient d'entrer a dêplu à quelque lecteur, on le prie de faire attention que la nature de cette découverte, l'une des plus intéreſſantes de la Géometrie, le demandoit. La vraie hiſtoire des Sciences conſiſte à développer autant qu'il ſe peut le procédé même de l'invention, & cela est d'autant plus nécessaire que ce procédé est ordinairement différent de celui que l'on expose dans la suite.

IX. *Newton* ne tarda pas à découvrir un moyen plus court & plus simple de parvenir à la même vérité : il s'apperçut bientôt après qu'il ne s'agissoit que de développer le terme $\sqrt{1 - xx}$, en expressions rationnelles ; il le fit d'abord en interpolant, par une méthode semblable, le second terme * dans la suite :

$$\begin{array}{l} 1 \\ * \\ 1 - xx. \\ 1 - 2xx + x^4 \end{array}$$

ici il ne faut qu'omettre les diviseurs 3. 5. 7. de la précédente, & diminuer chaque puissance de x d'une dimension, on a alors $1 - \frac{xx}{2} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$, &c. Cette remarque mit *Newton* en possession de sa formule pour élever

le binome $a + b$ à une puissance quelconque m, formule qui sert encore à extraire les racines, en faisant m un nombre rompu. Il s'apperçut enfin que pour trouver la valeur rationnelle de $\sqrt{1 - xx}$, il n'y avoit qu'à en extraire la racine quarrée par l'opération ordinaire : on trouvera ici cette seule différence, que l'opération ne se terminera pas, de même que dans les extractions de racines de nombres qui ne sont pas des puissances exactes. Par cette méthode, la plus simple de toutes, du moins dans ce cas particulier, on trouve $\sqrt{1 - xx}$ comme ci-devant égal à $1 - \frac{xx}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16}$, &c. ce qui suivant la méthode de *Wallis*, donne pour l'aire du cercle la même suite $x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{40}x^5 - \frac{x^7}{112}$, &c.

Ces trois méthodes différentes, & qui conduisent précisément à la même valeur de l'aire du cercle, doivent se

servir de confirmation mutuelle auprès de ceux pour qui cette analyse seroit trop relevée : elles n'ont pas besoin de ce secours auprès des Géometres un peu versés, pour qui elles auront chacune en particulier assez d'évidence. Je remets à tirer plus bas quelques conséquences & quelques détails en faveur de ceux que ces vérités générales ne satisferoient pas.

X. L'invention des calculs différentiel & intégral, ou, comme on les nomme en Angleterre, des fluxions & fluentes, succéda bientôt à ces premieres découvertes sur la mesure du cercle, & en fournit de nouvelles ; l'illustre *Newton* en étoit déja possesseur en 1668. *Mercator* publioit alors sa *Logarithmotechnie*, ouvrage dans lequel, comme on sçait, il quarroit l'hyperbole par une suite infinie, & tiroit de là la construction des logarithmes. C'est une découverte qui étoit familiere dès les années 1665, 1666, à *Newton*, in-

connu encore & ne cherchant point à se faire connoître ; car il raconte qu'il s'amusa alors à calculer les logarithmes par la quadrature des aires hyperboliques. *Pudet dicere*, écrivoit-il à *Collins*, en 1676, *ad quot figurarum loca computationes has, otiosus eo tempore perduxi. Nam tunc sane nimis delectabar inventis hisce.*

La publication de l'ouvrage de *Mercator*, qui auroit excité un autre à divulguer tant de découvertes, faillit au contraire à déterminer *Newton* à supprimer toutes les siennes ; il se persuada que *Mercator*, après avoir trouvé la quadrature de l'hyperbole ne tarderoit pas à rencontrer celle du cercle ; ou que si elle lui échappoit, d'autres étendroient sa découverte & l'appliqueroient à cette courbe. Il n'y avoit en effet qu'un pas à faire, & un pas en apparence peu difficile ; mais ce n'est pas là le seul exemple dans l'histoire des sciences, où l'on voit une découverte manquée par celui-là même qui l'avoit amenée à sa maturité. *Newton* enfin ne croyoit pas être encore d'un âge assez mur pour écrire, trait admirable & unique de modestie dans un génie si superieur! qu'il devroit être gravé dans l'esprit de ces hommes, dont les ouvrages prématurés annoncent la téméraire entreprise d'instruire le public de ce dont ils ont à peine une légere teinture!

Ce ne fut que sur les instances de *Barrow*, que *Newton* se détermina à communiquer ces découvertes analytiques. *Barrow* étoit venu à connoître sur ces entrefaites cet homme rare, & il en avoit senti tout le mérite, car il étoit lui-même homme de génie & grand Géometre: *Newton* lui remit, aussi-tôt après la publication de la *Logarithmotechnie* de *Mercator*, un écrit intitulé, *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*, qui fut envoyé à *Collins*, le *Mersenne* de l'An-

gleterre. On trouve dans ce traité, imprimé dans le *Commercium epistolicum*, sur la copie de *Collins*, collationnée au manuscrit de *Newton*; on y trouve, dis-je, presque tout le calcul moderne; les quadratures & les rectifications des courbes, soit de celles qui en sont susceptibles en termes finis, soit de celles qui ne les admettent qu'en suite infinie; la formation de ces suites, leur retour, l'extraction des racines, la résolution des équations de tous les degrés; le principe enfin du calcul des fluxions & fluentes, qui y est clairement énoncé & déduit du mouvement (*page* 14 *du Comm. Epist.*). Une exposition plus détaillée de toutes ces découvertes appartient à une histoire particuliere de la Géométrie. On se bornera ici à ce qui regarde spécialement la mesure du cercle, que *Newton* perfectionne dans cet écrit de bien des manieres. Il y enseigne à trouver indéfiniment la grandeur de l'arc, soit

par la connoissance du sinus verse; c'est-à-dire de l'abcisse, commençant à l'extrémité du diametre comme AD, soit par celle du sinus droit ou de l'abcisse (*fig.* 19), prenant son origine au centre. Il en fait de même de l'aire; ainsi supposant le rayon du cercle égal à 1, l'aire du segment $CDEB$, qui répondra à l'abcisse x ou CD, est égale à l'expression

$$x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112}, \text{ \&c.}$$

& l'arc DE est égal à la suivante,

$$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}, \text{ \&c.}$$

Au reste les coefficiens $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{112}$ sont les produits successifs $\frac{1}{2.\ 3.}$, $\frac{1}{2.\ 4.\ 5.}$, $\frac{1.\ 3.}{2.\ 4.\ 6.\ 7.}$, &c. ce qui donne le moyen de continuer la progression. Mais si l'on veut la grandeur du segment ADE, nommant $AD = x$, & le rayon 1, sa valeur est

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \times \frac{4}{3}x - \frac{x^2}{2.\ 5.} - \frac{x^3}{4.7.2.} - \frac{3x^4}{4.6.9.4.}$$

$$- \frac{3.\ 5x^5}{4.\ 6.\ 8.\ 11.\ 8.} - \frac{3.\ 5.\ 7.\ x^6}{4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 13.\ 16.},$$

dont la progression est aisée à remarquer, au dernier facteur du diviseur près, qui dans chaque terme, à commencer du troisiéme, va toujours en doublant; la même supposition faite, la valeur de l'arc AE est

$$\sqrt{2x} \times 1 + \frac{x}{6} + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4, \text{ \&c.}$$

On peut enfin, *vice versâ*, trouver la grandeur du sinus soit verse, soit droit, l'arc ou l'aire étant donnée par la méthode du retour des suites. *Newton* en donne quelques exemples: l'arc AE étant z, le rayon 1, le sinus verse DA est égal à la suite

$$\frac{zz}{2} - \frac{z^4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{z^6}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} - \frac{z^8}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8},$$

ou

$$\frac{zz}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \frac{z^8}{40320} + \text{ \&c.}$$

& le sinus DE à celle-ci, $z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120}$

$- \frac{z^7}{5040} + \frac{z^9}{362880} -$ &c. Il est aisé d'appercevoir que les diviseurs numériques sont ici les produits successifs 2×3 ; $2 \times 3 \times 4 \times 5$; $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$, &c.

XI. Les découvertes de *Newton* ayant été publiées & communiquées à divers Géometres par l'entremise de *Collins*, celui qui se hâta le plus d'y ajouter, & qui le fit le plus heureusement, fut M. *Jacques Gregori* ; c'étoit un Géometre de grande espérance, un homme à seconder *Newton* si la mort ne l'eût enlevé à la fleur de son âge. Il l'avoit précédé dans l'invention du télescope catadioptrique, & il marcha de près sur ses traces dans quelques-unes de ses découvertes analytiques.

A peu près dans le même temps que *Newton* se disposoit à répondre aux instances de *Barrow*, *Gregori* publioit dans ses *Exercitationes* une suite infinie pour exprimer l'aire du cercle : cet

ouvrage parut peu après celui de *Mercator*. La suite de *Gregori* est celle-ci ; $4rr$ divisé par $2d - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{90d} - \frac{e^3}{756d^2} - \frac{23}{113400d^3} - \frac{260e^5}{7484400d^4}$, &c. le rayon est designé dans cette expression par r ; d est la moitié du côté du quarré inscrit, & e la différence du rayon avec ce côté. Cette suite converge assez rapidement, elle n'a que le desavantage de se servir de termes un peu compliqués, & de ne pas être indéfinie.

Gregori fut bientôt informé par *Collins* de la découverte de *Newton* sur l'aire des courbes, & quelques-unes de ses suites lui furent communiquées. La préoccupation où il étoit sur la sienne & sur sa méthode lui firent d'abord croire qu'elles devoient avoir la même origine, ce qui contribua à les lui rendre moins remarquables ; voyant même qu'elles ne se rapportoient point aux siennes, il conçut quelques doutes sur

leur légitimité : mais ce ne fut qu'un sentiment passager, auquel succéda bientôt celui de la justice que méritoient les inventions de *Newton* ; non seulement il s'assura de leur vérité, mais à l'aide d'une profonde méditation, il parvint à découvrir la méthode elle-même que *Newton* s'étoit formée. On lui rend ce témoignage dans plusieurs endroits du *Commercium epist.* * Il renvoya bientôt après à *Collins* la suite pour exprimer l'arc par la tangente, sçavoir, $a = t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6}$ &c. où t est la tangente, r le rayon, & a l'arc cherché. Cette suite, l'une des plus élégantes par sa simplicité & la régularité de la loi de sa progression, est, tout compensé, celle qui maniée avec adresse fournit les approximations les plus commodes. *Grégori* donna aussi des suites pour exprimer la tangente & la secante, l'arc étant connu, & même

* Pages 29, 48, 71, éd. de 1714, *in*-4°.

pour tirer immédiatement de l'arc donné ses secante & tangente artificielles, c'est-à-dire leurs logarithmes. La rectification de l'ellipse & de l'hyperbole en suites infinies, que *Collins* ne lui avoit point communiquée, étoit aussi de ce nombre. Je n'ai fait mention de ces dernieres découvertes, étrangeres à mon sujet, que pour justifier les éloges que j'ai donné à ce grand Géometre : je reprens le fil de mon histoire.

XII. On doit reconnoître, & c'est une vérité dont le *Commercium epistolicum* fournit des preuves, que toutes ces nouveautés brillantes d'analyse prirent naissance en Angleterre, & que les Géometres du continent y eurent alors peu de part ; ce fut seulement quelques années après (en 1674) que M. *Leibnitz* trouva sa suite pour le cercle, sçavoir, le diametre étant l'unité, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, &c. On ne peut disconvenir que cette suite soit la même au fond que celle de *Gregori*; qui trouvoit (faisant le rayon = 1 & la tangente aussi = 1) la même expression pour le demi-quart de cercle, ou l'arc de 45°; cependant plusieurs circonstances doivent écarter l'imputation de plagiat intentée à ce sujet contre *Leibnitz*.

1°. Cette découverte est chez lui une suite de la méthode de transformation qu'il avoit imaginée pour débarrasser l'expression de l'ordonnée du cercle de l'irrationalité qui l'accompagne, afin d'y appliquer le développement de *Mercator*. Cette méthode, exposée au long dans le cours d'*Ozanam*, avoit été communiquée aux Géometres vers l'an 1674. *Leibnitz* s'est plaint plusieurs fois du silence de cet écrivain sur l'auteur de cette ingénieuse invention, dont on seroit tenté de lui faire honneur, si l'on ne sçavoit que ce Mathématicien étoit d'une classe bien inférieure à celle

des analystes dont il est question ici.

2°. La bonne foi de *Leibnitz* paroît évidemment dans les Lettres qu'il écrivoit sur cela à *Oldenbourg*, en 1674, & dans lesquelles il lui faisoit part de sa découverte avec une sorte de transport *. Croira-t-on qu'il eût été si peu fin que de tenir un pareil langage s'il l'avoit reçûe de *Collins* ou *Oldembourg*, comme on l'a prétendu faire soupçonner? Les réponses de ce Secrétaire de la Société Royale de Londres le lui auroient bien rappellé; il se contente au contraire de l'informer, comme pour la premiere fois, des progrès que *Newton* & *Gregori* avoient fait dans l'analyse. Ces raisons me font penser qu'il y auroit de l'injustice à dépouiller *Leibnitz* de cette découverte, comme ont voulu faire quelques partisans trop zélés de la gloire de la nation Angloise. *Newton* plus équitable, & sçachant que ce qui

* *Comm. epist. p.* 37, *ed. in*-4°.

s'étoit présenté à *Gregori* pouvoit aussi avoir été trouvé par *Leibnitz* au-delà des mers, ne fait point de difficulté de l'appeller la suite de *Leibnitz*. * *Leibnitz* avoit eu dessein de la publier dans un traité particulier qu'il se proposoit d'intituler du nom de *Quadratura arithmetica*; il est souvent parlé de ce projet dans le *Commercium epistolicum*: sans doute lorsqu'il fut en possession de plus grandes découvertes, celle-ci ne lui parut plus assez remarquable pour en faire la matiere d'un ouvrage. Il en donna le précis dans les actes de Leipsick, année 1682, sous le titre de *Vera proportio circuli ad quad. circumscriptum*.

XIII. Les raisons que je viens de présenter pour disculper *Leibnitz* de l'accusation de plagiat intentée contre lui, recevront un nouveau poids de la remarque suivante; c'est que la découverte dont il est ici question semble

* *Comm. epist. p.* 79, & ailleurs.

n'avoir pas été d'une difficulté si supérieure, qu'elle ne se soit présentée en même tems à divers Géometres. Elle n'échappa pas à M. *de Lagny*, si nous l'en croyons lui-même; il nous assure, dans les Mémoires de l'Académie de 1719, qu'il avoit trouvé dès l'année 1682 la même suite, nullement informé encore de ce que *Gregori* ni *Leibnitz* avoient fait à ce sujet; & l'on n'en sera point surpris, car cette année-là est la premiere où fut publiée la suite en question dans les actes de Leipsick: M. *de Lagny*, alors à Toulouse, ne pouvoit que difficilement avoir connoissance, soit des lettres de *Leibnitz* & *Newton*, toujours restées entre des mains privées, soit de ces Journaux que l'Allemagne voyoit tout nouvellement paroître. Ajoutons à cela que la méthode de M. *de Lagny*, de même que celle de *Leibnitz*, dont elle differe cependant, donne du poids à ce qu'il dit, car elle paroît avoir été imaginée dans les mêmes vûes, je veux dire pour éviter l'irrationalité, qui seule empêchoit d'appliquer au cercle la méthode de division de *Mercator*, la seule encore connue pour quarrer les figures. Si M. *de Lagny* a pu faire cette découverte, ne sera-t-il pas fort probable que M. *Leibnitz*, qui a donné des preuves d'un génie fort supérieur, l'ait fait dans les mêmes circonstances?

XIV. Depuis que le calcul intégral a fait des progrès parmi les Géometres, rien n'est plus connu que les différentes expressions qu'on vient de donner du cercle & de ses parties : il ne faut qu'être initié dans ce calcul pour les trouver. On ne s'attachera donc point à les développer ici par son moyen, ceux qui l'ignorent peuvent consulter les ouvrages qui en ont traité : voici seulement quelques expressions du cercle, qu'on n'avoit pas pû faire connoître dans le cours de la narration précédente.

Si la corde d'un arc est x, le diametre 1, le segment est égal à $\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{4.5} + \frac{3x^7}{4.4.7} + \frac{3.5x^9}{4.4.6.9.}$, &c. Cela est aisé à démontrer, soit en le tirant immédiatement de l'expression du petit triangle ACB (*fig.* 19), qui est $\frac{x^2\,dx}{2\sqrt{1-xx}}$, soit en le dérivant de la suite qui exprime le demi-segment ADE, la demi-corde AE étant $= \frac{1}{2}x$.

On a donné précédemment, d'après MM. *Leibnitz* & *Gregori*, la suite $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, &c. pour l'expression de l'arc de 45°, ou de l'aire du quart de cercle, le rayon étant 1. M. *Newton* a trouvé que cette suite, $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} -$ &c. exprimoit aussi l'arc de 90°. la corde étant l'unité, & le rayon étant conséquemment $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Voici encore une autre maniere d'exprimer l'aire du cercle. Que le diametre soit 1, & la tangente

$t = \frac{1}{2}$, l'aire de tout le cercle sera la somme de ces trois suites;

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \text{ \&c.}$$

$$tt + \frac{t^5}{3} - \frac{t^8}{5} - \frac{t^{11}}{7} + \frac{t^{14}}{9} \text{ \&c.}$$

$$t^4 - \frac{t^{10}}{3} + \frac{t^{16}}{5} \text{ \&c.}$$

Je passe à présent à montrer l'usage de ces expressions, qu'on n'a encore envisagé que d'une maniere générale.

XV. Il est d'abord évident que chacune de ces suites fournit un moyen commode pour trouver la grandeur approchée de tout segment, de tout secteur, de tout arc de cercle, lorsque la valeur de l'indéterminée qui lui convient sera assez petite pour faire converger la suite rapidement : je vais m'expliquer par un exemple. Qu'on demande l'aire du segment $CDEB$ (*fig.* 20), où l'abcisse n'est qu'une petite partie, par exemple, un tiers du rayon,

alors la suite qui convient à ce cas, sçavoir, $x - \frac{1}{2.3.} x^3 - \frac{1}{2.4.5} x^5$, &c. se réduira à $\frac{1}{3} - \frac{1}{2.3.27.} - \frac{1}{2.4.5.243}$, &c. ou $\frac{1}{3} - \frac{1}{162} - \frac{1}{9720}$, &c. Or il est visible que les deux premiers termes seuls donnent la grandeur de ce segment à moins d'une 9000^e près. Ainsi le plus souvent un très-léger calcul approche extrêmement de la vérité, & dans d'autres cas moins avantageux, celui de 4, 5 ou 6 termes suffira. Je ne m'arrête pas davantage à ceci; dans d'autres cas où la suite seroit médiocrement convergente, on pourra même éviter la peine de sommer un nombre de termes médiocre; il y a des méthodes que l'on indiquera, & par lesquelles on convertit une suite peu convergente en une autre qui l'est beaucoup.

XVI. Lorsque l'on a voulu appliquer ces suites à en tirer de grandes approximations de la valeur entiere du cercle, on a cherché, pour diminuer le travail, les cas les plus avantageux pour les faire converger. Si voulant, par exemple, exprimer l'aire du quart de cercle, on s'étoit contenté de donner à l'abciſſe x la valeur qui lui convient alors, dans la ſuite $x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^7 - \frac{1}{112}x^7$, &c. on auroit eu, puiſqu'elle eſt alors l'unité, on auroit eu, dis-je, $1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{112} -$ &c. qui eſt en effet la vraie grandeur du quart de cercle. Mais comme cette ſuite converge peu, il faudroit ſommer un grand nombre de termes, peut-être 30 ou 40, pour en tirer une approximation ſeulement en dix décimales; au lieu qu'en faiſant x égal à $\frac{1}{2}$, le travail eſt conſidérablement abrégé; car alors l'arc BE (*fig.* 20) étant le $\frac{1}{3}$ du quart de cercle, ſi de la valeur de $CBED$ on ôte le triangle CDE connu, le reſte, ſçavoir le ſecteur CBE, triplé, ſera le quart de cercle. Or la valeur de

$CDEB$ converge aſſez rapidement pour la trouver ſans beaucoup de peine; car la ſuite $x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{x^5}{2.4.5} - \frac{1.3.}{2.4.6.7}x^7$ &c. lorſqu'on fera $x = \frac{1}{2}$, ſe convertit en $\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3.8} - \frac{1}{2.4.5.32} - \frac{1.3}{2.4.6.7.128}$, &c. qui eſt compoſée de fractions aſſez ſenſiblement décroiſſantes.

On s'engageroit au reſte dans d'étranges calculs, ſi on entreprenoit de ſommer ces fractions à la maniere ordinaire : la méthode des fractions décimales en diminuera conſidérablement la fatigue.

Cependant cette méthode elle-même ne ſuffiroit pas, ſi l'on n'uſoit encore de quelque adreſſe pour s'épargner quantité d'opérations ſuperflues. En effet en calculant chaque terme de la maniere qui ſe préſente d'abord, il faudroit, après avoir trouvé le numé-

rateur & le dénominateur de chaque fraction, il faudroit, dis-je, augmenter le numérateur d'un certain nombre de zéros, & puis diviſer par le dénominateur, qui bientôt ſeroit compoſé d'une multitude de chiffres. Or on voit aiſément combien ce procédé ſeroit laborieux & incommode, au lieu qu'avec un peu d'attention il ſe préſente un moyen de l'abréger conſidérablement. Ce moyen conſiſte à réduire la ſuite propoſée à une autre forme, dans laquelle chaque terme ſe déduit du précédent, en l'affectant d'un coefficient dont la progreſſion eſt facile à appercevoir. Ayant, par exemple, nommé le premier terme négatif A, le ſecond eſt $= \frac{3A}{4.5.4}$, comme il eſt aiſé de l'éprouver en mettant au lieu de A ſa valeur; nommant enſuite B ce ſecond terme, le troiſiéme $C = \frac{3.5B}{6.7.4}$ & le quatriéme $D = \frac{5.7C}{5.9.4}$, de maniere que

la ſuite entiere paroît ſous cette forme : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2.6.4} - \frac{3A}{4.5.4} - \frac{3.5B}{6.7.4} - \frac{5.7C}{8.9.4} - \frac{7.9D}{10.11.4}$, &c. où il ſuffit de la plus legere inſpection pour la continuer à l'infini.

Suppoſons donc à préſent qu'il s'agiſſe de déterminer en 10 décimales l'aire du quart de cercle comparé au quarré du rayon, nous employerons pour cela la ſuite préparée comme l'on vient de voir, où l'abciſſe x a été faite $= \frac{1}{2}$, afin de trouver le ſegment $BCDE$. J'ai calculé en particulier chaque terme juſqu'à 15 décimales, afin d'être plus aſſuré que la derniere de celles que j'emploie ici eſt exacte. Nous aurons donc d'abord $\frac{1}{2} = 0.50000$, 00000, 00. & $\frac{1}{48} = 0.02083$, 33333, 33; enſuite multipliant ce nombre par 3, & le diviſant par le produit de 4, 5, 4, ou 80, on a pour quotient 0, 00078, 12499, 99; de même plant on aura la demi-circonférence comparée au rayon, ou la raison de la circonférence entiere au diametre. Or ce nombre multiplié par 4 est 3, 14159, 26536, 24, ce qui convient avec les nombres de *Ludolph* jusqu'au onziéme chiffre, qui est un peu trop grand dans cette expression, par la raison que nous en avons donnée plus haut.

Mais si l'on vouloit avoir une expression certainement au-dessous de la vérité, pour la comparer à la premiere, & être plus assuré des vraies limites de la circonférence, on l'auroit aisément en supposant les onze derniers termes de la suite ci-dessus augmentés d'une unité; à l'égard des deux premiers, ils approchent si près de leur juste valeur, qu'on peut les regarder comme vrais, & le peu dont ils s'écartent de l'exactitude par défaut, ne sçauroit contrebalancer l'excès qu'on donne à tous les autres. On aura par ce

moyen la somme de tous les termes négatifs moindre que 0, 02169 42612, 63, & par conséquent ôtée de $\frac{1}{2}$ ou 0. 50000, &c. elle laissera un reste plus grand que la vérité; la traitant enfin comme la premiere, on trouvera 0, 78539, 81633, 73, qui multipliée par 4, donne pour valeur approchée de la circonférence 3, 14159, 26534, 92, qui ne péche par défaut que dans le onziéme chiffre.

XVII. On manieroit de la même façon la plupart des autres suites proposées plus haut; mais à considérer les moyens d'approximation qu'elles présentent, il est aisé d'appercevoir qu'elles n'ont pas toutes le même avantage, & que la plupart sont peu propres à donner ces immenses approximations de l'aire du cercle qu'on connoît aujourd'hui: aussi ne s'en est-on point servi indifféremment; on a donné la préférence à celle où t étant la tangente, l'arc est exprimé

multipliant celui-ci par 15 & divisant par 168, on trouve le terme $C =$ 0. 00006, 97544, 64, & ainsi à l'égard des autres; on arrange enfin tous ces termes affectés du même signe dans une colonne, comme on le voit ici:

$A =$	0. 02083, 33333, 33
$B =$	78, 12499, 99
$C =$	6, 97544, 64
$D =$	84771, 04
$E =$	12137, 67
$F =$	1925, 59
$G =$	327, 94
$H =$	58, 77
$I =$	10, 95
$K =$	2, 10
$L =$	41
$M =$	8
$N =$	1
$O =$	0
	0, 02169, 42612, 52

Otons la somme de ces termes,

002169 &c. de $\frac{1}{2}$, ou 0. 5000 &c. le restant sera 0, 47830, 57387, 48; mais il faut retrancher de là le triangle *CDE*, dont l'aire est égale à $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $\frac{1}{8}\sqrt{3} =$ 0. 21650, 63509, 46. La soustraction faite, on trouve 0. 26179, 93878, 02, pour la valeur du segment *CDEB*, ce qui par conséquent multiplié par 3, donne pour le quart de cercle 0. 78539, 81634, 06, le quarré du rayon étant 1. 00000, 00000, 00. Or cette expression, qui excede un peu la vérité, parce que dans tous les termes négatifs le dernier chiffre est moindre que le véritable, quoique de moins d'une unité; cette expression, dis-je, coincide avec celle de *Ludolph* jusqu'au dixiéme chiffre inclusivement: car la raison du quart de cercle au quarré du rayon est la même que celle de l'arc de 45° au rayon; par conséquent l'arc de 45° est exprimé par le nombre ci-dessus; donc en le quadrupar $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$, &c. il ne s'agit pour cela que de donner à t une valeur moindre que l'unité, en la choisissant telle, qu'elle appartienne en même tems à un arc commensurable avec la circonférence entiere. Car il est visible que si l'on supposoit $t = 1$, dans lequel cas l'arc correspondant feroit de 45°, la suite se réduiroit à $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ &c. mais il faudroit une somme immense de ses termes pour en tirer une approximation en dix chiffres; ainsi, quoique remarquable dans la théorie par son élégance, elle ne seroit ici d'aucun usage. Pour l'y rendre propre il faut faire $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$, l'arc correspondant sera alors de 30°, ou la douziéme partie de la circonférence, & la suite se transformera en celle-ci : $\sqrt{\frac{1}{3}} \times 1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{9.5} - \frac{1}{27.7} + \frac{1}{81.9}$, où chaque terme est moindre que le tiers du précédent; on pourroit même la

rendre plus convergente en ajoutant les termes deux à deux, le second avec le troisiéme, le quatriéme avec le cinquiéme, & divisant ensuite par 4, ce qui donneroit la quarante-huitiéme partie de la circonférence exprimée de cette maniere : $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{3}} \times 1 - \frac{3}{3.5.9} - \frac{5}{7.9.81} - \frac{7}{11.13.729}$ &c. c'est ainsi que quelques Géometres l'ont employée pour en tirer des approximations. Mais en comparant les avantages & les desavantages de cette expression, on remarquera bientôt que cette préparation ne fait que la rendre moins commode : en effet, dans ces sortes de calculs on doit bien moins chercher à sommer un petit nombre de termes qu'à le faire très-commodément, dût-on en employer beaucoup davantage. Aussi cette raison a-t-elle fait donner la préférence à la premiere suite, quoiqu'il y faille prendre le double de termes que dans la derniere pour arriver au même degré

d'exactitude, car cela est abondamment compensé par la facilité des opérations. On voit en effet qu'ayant une fois la valeur de $\sqrt{\frac{1}{3}}$, en autant de décimales ou quelque peu plus qu'on en veut employer dans son approximation, il n'y a qu'à diviser cette valeur par 3, & le quotient qui en résulte par 3, & puis le nouveau quotient encore par 3, & ainsi de suite; après quoi reprenant chacun de ces quotiens, à commencer au premier qu'a donné la division de $\sqrt{\frac{1}{3}}$ par 3, le diviser encore par 3, ensuite le second quotient trouvé ci-devant par 5, le suivant par 7, &c. & ainsi jusqu'à ce que dans le nombre de chiffres auquel on s'est fixé, il n'y ait plus que des zéros. Alors prenant la somme de tous les termes positifs & celle de tous les négatifs, ôtant enfin celle-ci de la premiere, le restant est la douziéme partie de la circonférence. Nous ne croyons pas qu'il soit nécessaire

de donner un exemple de ce procédé, qui doit paroître assez clair après ce qu'on vient de dire.

XVIII. Ces moyens d'approximations, incomparablement plus abrégés que ceux des anciens par les polygones inscrits & circonscrits, ont mis les modernes en état de laisser ceux-ci bien loin derriere eux. La proportion de *Ludolph*, si renommée avant la naissance de la nouvelle Géométrie, n'est plus qu'une petite partie de celle dont nous sommes aujourd'hui en possession. Voici par quels degrés elle s'est élevée à l'immense nombre de M. *de Lagni*. *A. Sharp*, Géometre Anglois, en employant la méthode précédente, la poussa jusqu'à 74 chiffres; il a communiqué le procédé de son travail dans ses *Tables mathématiques*. M. *Machin*, de la Société Royale de Londres, l'a prolongée jusqu'à 100 termes; j'ignore à la vérité dans quel ouvrage, mais c'est

M. *Euler* qui nous l'apprend (*a*). M. *de Lagni* enfin enchérissant sur eux, l'a continuée jusqu'à 127; il a fait plus, il l'a vérifiée en calculant la même suite par deux voies différentes (*b*), & elles lui ont donné le même résultat. Nous sçavons par là que si le diametre est l'unité suivie de 126 zéros, la circonférence est plus grande que le nombre suivant; 3, 14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288, 41971, 69399, 37510, 58209, 74944, 59230, 78164, 06286, 20899, 86280, 34825, 34211, 70679, 82148, 08651, 32723, 06647, 09384, 46, & qu'elle est moindre que ce même nombre augmenté de l'unité.

XIX. Mais quelque commode que soit la méthode expliquée dans l'article XVII, du moins si nous la comparons au

(*a*) Mém. de Pétersbourg, t. 9.

(*b*) Mém. de l'Acad. 1719.

procédé laborieux des anciens, on ne peut cependant se dissimuler qu'elle n'avoit pas encore atteint sa perfection lors même qu'on en faisoit un si grand usage; car la suite employée par MM. *Sharp*, *Machin* & *de Lagni*, a un défaut qui en diminue beaucoup le mérite. Ce défaut consiste dans cette immense extraction de racine qui doit servir de préliminaire au calcul, à cause de l'expression irrationnelle $\sqrt{\frac{1}{3}}$, qui multiplie toute la suite. D'un autre côté si l'on emploie celle de 45°, elle ne converge pas sensiblement. Néanmoins il falloit nécessairement opter entre l'une ou l'autre: car ce sont les plus simples de celles qu'on pouvoit employer, toutes les tangentes rationnelles qui ne surpassent pas le rayon, n'appartenant point à des arcs commensurables à la circonférence, & toutes celles qui appartiennent à de petites portions commensurables de cette circonférence étant extrêmement compli-

quées d'irrationalités. M. *Euler* a cherché à donner à cette méthode ce degré de perfection qui lui manquoit, & il y a réussi des deux manieres que je vais exposer.

XX. La premiere a pour objet de délivrer la suite de l'arc par la tangente, de l'irrationalité qui en rend le calcul si incommode; elle est fondée sur une propriété des tangentes au cercle qui donne cette analogie: *comme la différence du rectangle de deux tangentes avec le quarré du rayon, est à ce quarré, ainsi la somme des tangentes à la tangente de la somme des arcs.* Il en conclut que l'arc de 45°, le seul commensurable à la circonférence, & ayant en même tems une tangente rationnelle, se peut diviser en deux arcs dont les tangentes sont aussi rationnelles; & comme elles seront chacune moindre que l'unité, elles donneront pour leur arc correspondant deux suites toutes rationnelles & fort convergentes. Il est

bien vrai que l'arc que chacune exprimera, considéré à part, sera incommensurable avec la circonférence, mais cela n'importe en rien, puisque leur somme sera commensurable avec elle. Nommant ainsi la tangente de 45° $= 1$, & les deux tangentes cherchées $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, on a, suivant le théorême précédent, $1 = \frac{a+b}{ab-1}$, & de là $b = \frac{a+1}{a-1}$, ce qui donne 2 & 3 pour les moindres & les plus simples valeurs de a & b; un de ces deux arcs sera donc

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9}, \text{\&c.}$$

& le second sera

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9}, \text{\&c.}$$

& conséquemment l'arc entier de 45° sera égal à la somme de ces deux suites.

On pourroit, par le même artifice,

réduire chacune ou celle qu'on voudroit de ces deux suites en deux autres qui seroient encore plus convergentes. Ainsi l'arc dont la tangente est $\frac{1}{2}$, se partage de nouveau en deux autres, dont elles sont $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{7}$; mais cela est inutile, & deviendroit même plus nuisible qu'avantageux: car dans le calcul de la seconde suite on auroit à diviser continuellement par 49, ce qui est moins facile que deux divisions par un nombre simple. Les deux premieres remplissent presque tout l'objet qu'on peut se proposer: car je remarque, ce qui est essentiel, que l'invention de chacun de ces termes est peu laborieuse, à quelque nombre de décimales qu'on veuille les pousser; la raison en est qu'on rencontrera le plus souvent des nombres dont les chiffres seront ou continuellement les mêmes, comme $\frac{1}{3} = 0.33333$, &c. $\frac{1}{4} = 0.250000$, &c. ou qui reviendront après certaines périodes; ainsi le seul travail du calcul consistera presque à ajouter

les termes correspondans des deux suites $\frac{1}{3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^7}$, &c. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}$, &c. & à les diviser ensuite successivement par 3. 5. 7. 9. 11. &c. il faudra de ces termes environ autant qu'on aura dessein d'employer de chiffres dans l'approximation. Si quelqu'un la vouloit pousser à 150 décimales, il y parviendroit avec beaucoup moins de peine qu'il n'en a coûté à M. *de Lagni* pour le faire jusqu'à 127.

XXI. Le second desavantage, non seulement de la suite $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, &c. & des autres qui appartiennent au cercle, mais encore de la plûpart de celles qu'on emploie dans la Géométrie moderne, est d'être assez souvent trop peu convergentes. Elles ne sont plus dès lors d'un usage commode, & cet inconvénient les rendroit inutiles dans un grand nombre de cas, si l'on n'étoit parvenu à y remédier. Quelques

Géometres se sont appliqués à donner à la méthode des suites cette perfection essentielle. Je n'ai point encore pû voir le traité ***de Summatione & interpolatione serierum*** de M. ***Stirling***; il doit contenir d'excellentes choses à cet égard. Ce que j'en vais dire est tiré des sçavans Mémoires de M. *Euler* (*a*), & du livre de M. *Simpson*, *The doctrine and applications of fluxions*, *&c.* (*b*).

Soit 1°. la suite $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$, &c. ou en faisant $t = \frac{1}{p}$, celle-ci $\frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \frac{1}{p^7}$, &c. qu'on a vû désigner l'arc de cercle, dont la tangente est t ou $\frac{1}{p}$. Il faut d'abord avoir ajouté un certain nombre de termes du commencement de cette suite; plus on en aura, plus exacte sera l'approximation

(*a*) *Comm. Acad. Petrop. ann.* 1737, *t.* 9, *& t.* 8, *ad ann.* 1736.

qu'on tirera de l'expression suivante. Nommons, pour abréger, S la somme de ces premiers termes, n leur nombre, & $2n - 1 = r$, enfin $1 + pp = m$, on aura alors, suivant les principes de M. *Euler*, la somme entiere de la suite égale à $S + \frac{1}{p^r}\left(\frac{1}{mr}\right.$

$$- \frac{2p^2}{m^2 r^2} + \frac{2^2 \cdot \overline{p^4 - p^2}}{m^3 r^3} - \frac{2^3 \cdot \overline{p^6 - 4p^4 + p^2}}{m^4 r^4}$$

$$\left. + \frac{2^4 \cdot \overline{p^8 - 11p^6 + 11p^4 - p^2}}{m^5 r^5} - \text{\&c.}\right)$$

Ainsi l'on réduit la sommation d'une suite qui ne converge presque pas sensiblement à celle d'une autre qui converge fort vîte, & l'on transforme une suite qui est déja convergente en une autre qui l'est en quelque maniere infiniment plus. On abrége donc par là considérablement le calcul dans tous les cas. Pour en donner un exemple, je vais choisir le plus desavantageux, celui où la tangente étant l'unité, la suite est méthode de M. *Euler*, les six premiers termes suffiront pour prévenir une erreur d'une 1000000ᵉ ; or ces six premiers termes ajoutés ensemble font 0. 744012, & en employant la formule, on a $p = 1$, & $1 + pp = 2$; $2n - 1 = 11$; de maniere qu'on a à ajouter pour complément de cette somme, $\frac{1}{2.\,11} - \frac{2}{4.\,121} + 0 + \frac{1}{11^4} + 0 - \frac{8}{11^6}$, ce que deviennent les six premiers termes de la seconde suite multipliés par $\frac{1}{p^r}$, ou 1. Ces termes réduits en fractions décimales, font 0. 041386, qui ajoutés à 0. 744012, donnent pour grandeur de l'arc de 45°, ou pour celle du quart de cercle, comparé au quarré du rayon, 0. 785398, d'où on tire la raison du diametre à la circonférence 1 : 3. 141592, expression qui est conforme dans ces sept chiffres avec celle de *Ludolph*. Il auroit fallu environ

1000000 termes, de la suite $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, &c. pour trouver une approximation aussi exacte : on doit juger par là de la justesse de celles que donnera la même méthode appliquée à des suites déja médiocrement convergentes.

La serie suivante, qui a le même objet que celle qu'on vient de voir, est dûe à M. *Simpson* : elle a quelque avantage sur l'autre, en ce qu'elle est plus aisée à continuer, la loi de la progression des coefficiens étant plus apparente. Je conserve ici les mêmes dénominations que dans la premiere formule que j'ai déja donnée, à cela près que r sera $= 2n + 1$, & $m = 1 + tt$; alors on a, suivant M. *Simpson*, pour la valeur très-convergente de la suite $t - \frac{t^3}{3}$, &c. cette formule $S \pm \frac{tr}{rm}$

$$\left(1 + \frac{2\,t^2}{r + 2.\,m} + \frac{2.\,4.\,t^4}{r + 2.\,r + 4.\,m^2} + \frac{2.\,4.\,6.\,t^6}{r + 2.\,r + 4.\,r + 6.\,m^3}\right.$$

$$\left. + \frac{2.\,4.\,6.\,8.\,t^8}{r + 2.\,r + 4.\,r + 6.\,r + 8.\,m^4} + \text{\&c.}\right).$$

Le signe ambigu $\pm$ signifie qu'il faut ajouter si le premier terme qui suit ceux qu'on a renfermés dans la somme S est positif; il faudra soustraire s'il est négatif. Cette méthode égale la précédente en exactitude. En l'appliquant à $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, &c. six termes seulement de cette suite, joints aux six premiers de la seconde, donnent, comme ci-devant, l'expression 0. 785398 pour la valeur du quart de cercle, le quarré du rayon étant 1.

La plupart des autres suites qu'on peut employer pour trouver l'aire du cercle, sont susceptibles d'abréviations semblables. Mais il seroit trop long d'en exposer ici la théorie générale, qui dépend de celle de la sommation des suites. Le simple historique auquel on s'est borné ne permet pas d'entrer dans ces détails, & l'on se contentera

d'avoir indiqué les livres où on peut les trouver.

XXII. Les suites infinies fournissent enfin des moyens commodes pour trouver des constructions géométriques ou des expressions analytiques, qui représentent, à très-peu de chose près, des espaces ou des arcs circulaires; car on peut combiner de telle maniere deux grandeurs, que la suite dans laquelle elles se résoudront, coincide dans ses premiers termes avec celle qui représente la valeur de cet arc, ou cet espace circulaire qu'on veut réduire en ligne droite ou en figure rectiligne. En prenant donc cette premiere suite, ou la grandeur finie qu'elle exprime, pour la derniere, on aura fort près la valeur de celle-ci, puisque ce moyen en donne non seulement les premiers termes, mais encore une partie de tous les autres. Les exemples suivans, dont quelques-uns sont tirés des Lettres de *Newton* *, & de son Traité des fluxions, vont éclaircir cela. Et ce qu'on y exécute sur le cercle, peut commodément se pratiquer dans une infinité d'autres cas & sur d'autres courbes, dont on a quelquefois besoin de calculer l'aire approchée avec plus de promptitude que de précision.

Qu'on veuille donc trouver l'arc, la corde étant donnée. On sçait que celui-là étant z, la corde est $z - \frac{z^3}{4.6.rr} + \frac{z^5}{4.4.120\,r^4}$ — &c. nous la nommerons A; soit B la corde de la moitié de cet arc, elle est $\frac{1}{2}z - \frac{z^3}{4.8.6.rr} + \frac{z^5}{4.4.32.120\,r^4}$ — &c. Si l'on combine ces deux grandeurs en ôtant la premiere de huit fois la seconde, le restant sera très-prochainement égal à trois

* Voyez Comm. Epist. p. 56 & suiv.

fois l'arc, car huit fois $B = 4z - \frac{z^3}{4.6\,rr} + \frac{z^5}{4.4.4.120\,r^4}$, &c. dont ôtant A, le reste est $3z - \frac{z^5}{21760}$ — &c. Or comme ces derniers termes sont très-petits, pour peu que z soit moindre que l'unité, il s'ensuit qu'on peut les négliger entierement, & que $8B - A = 3z$. Il est donc vrai, comme *Huygens* l'a démontré, que huit fois la corde de la moitié d'un arc moins la corde de l'arc entier, égalent trois fois l'arc, ou que huit fois la corde d'un arc moins celle de l'arc double, different très-peu du sextuple de cet arc. On peut encore dire que quatre fois la corde moins le sinus d'un arc, sont égales, à une très-petite différence près, à cet arc triplé.

On trouve de même que si l'on prolonge le diametre BA (*fig.* 21) de la quantité $AE = CB - \frac{1}{5}BF$, l'arc BG excede très-peu le segment de

la tangente BH, coupé par la ligne EGH. Cette proposition démontre la vérité de celle de *Snellius*, qui faisant $eA =$ au rayon, disoit que BH étoit moindre que l'arc BG. Cette derniere est vraie à plus forte raison, car la ligne Ae étant toujours plus grande que AE, la ligne Bh est nécessairement moindre que BH. Mais de cela même il est aisé de conclurre que BH approche bien plus près de la légitime valeur de BG que Bh, qui cependant, comme nous l'avons fait voir, en est très-peu éloignée.

Quand on a la grandeur d'un arc, il est fort facile de trouver l'aire du secteur ou du segment: ainsi les méthodes précédentes pourroient suffire à cet objet. Cependant comme on peut le faire immédiatement, en voici quelques moyens que nous fournit M. *Newton* dans les endroits cités. Le segment BGF étant proposé, on pourra prendre pour sa valeur l'expres-

sion $\overline{\frac{2}{3}BG + GF} \times \frac{2}{15}BF$. Mais si l'on veut une plus grande exactitude, qu'on divise BF en deux également au point I, alors le rectangle $4GI + BG \times \frac{2}{15}BF$ approchera tellement de la valeur exacte du segment BFG, que lors même qu'il deviendra le quart de cercle, il s'éloignera à peine de la vérité d'une 1500e partie de l'aire totale.

M. *Leibnitz*, dans une de ses Lettres à *Newton*, a donné cette expression pour trouver l'arc, le cosinus étant connu: que le rayon soit l'unité, & c ce cosinus, l'arc sera $\sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$. Ici l'erreur, selon la remarque de M. *Newton*, étant $\frac{v^3}{90} + \frac{v^4}{194}$, &c. la lettre v désignant le sinus verse, ou $1 - c$, elle sera fort petite quand v sera moindre que le tiers du rayon. Cette condition est nécessaire pour l'employer avec quelque sureté; il y en aura davantage à se servir de la suivante, dûe à M. *Newton.* v étant toujours le sinus verse, qu'on fasse comme $120 - 27v$ à $120 - 17v$; ainsi la corde $\sqrt{2v}$ a une quatriéme proportionnelle, elle approchera si près de l'arc correspondant, que l'erreur sera seulement d'environ $\frac{61 v^3 \sqrt{2v}}{44800}$, ce qui égalera à peine cinq secondes lorsque l'arc ne surpassera pas 45°, & sera même moindre qu'une seconde s'il n'étoit que de 30°.

Après avoir exposé les découvertes de ces grands hommes, qui semblent ne rien laisser à desirer sur ce sujet, me sera-t-il permis de faire part d'une méthode qui m'a paru commode pour déterminer par approximation la valeur de ces différens espaces, ou arcs circulaires? Elle est fondée sur un certain moyen de trouver la somme approchée des suites qui les expriment;

moyen que j'ai autrefois appliqué, avec quelques changemens, à former des regles pratiques & exactes pour toiser les surfaces des voûtes *en cul de four*, *surhaussées* ou *surbaissées*; c'est-à-dire, pour m'énoncer en termes plus intelligibles aux Géometres, des sphéroïdes allongés & applatis. Car on sçait, pour peu qu'on ait passé les bornes de la Géométrie ordinaire, que les surfaces de ces corps suivent le même rapport que des espaces elliptiques ou hyperboliques. Soit donc un segment circulaire BGF (*fig.* 21) dont l'abcisse est x, le diametre l'unité; on a vû qu'il se réduit à la suite $\sqrt{x} \times (\frac{2}{3} x - \frac{1}{5} x^2 - \frac{1}{28} x^3 - \frac{1}{72} x^4 - \frac{5}{576} x^5$, &c.) Pour en trouver la somme approchée, je cherche une expression qui se resolve en une suite à peu de chose près égale à celle-là; je la suppose $\frac{2}{3} x \sqrt{x - nxx}$, & l'ayant développée en suite, j'ai $\sqrt{x} \times (\frac{2}{3} x$

$- \frac{1}{3} n x^2 - \frac{1}{12} n^2 x^3 - \frac{1}{24} n^3 x^4 - \frac{10}{3 \cdot 8 \cdot 16} n^4 x^5$, &c.) Je remarque enfin que si je donne à n une telle valeur que les seconds termes de chaque suite soient égaux, ce qui suffira si x n'est qu'une petite partie du diametre, alors on aura les deux premiers termes avec une partie de chacun des suivans; & par conséquent à peu de chose près, la somme de la suite. Afin donc de déterminer n, j'égale les deux premiers termes d'où je tire $n = \frac{3}{5}$, ainsi l'expression $\frac{2}{3} x \sqrt{x - \frac{3}{5} xx}$, sera la valeur approchée du segment circulaire, quand son abcisse ne passera pas le quart ou les $\frac{2}{5}$ du diametre. En effet, mettant à la place de n & de ses puissances, leurs valeurs dans la suite donnée ci-dessus, elle se réduit à $\sqrt{x} \times (\frac{2}{3} x - \frac{1}{5} x^2 - \frac{9}{300} x^3 - \frac{27}{3000} x^4$, &c. dont la différence avec la premiere n'est que $0 - 0 + \frac{1}{210} x^3 + \frac{1}{205} x^4$, &c. Lors donc que x sera seulement

$= \frac{1}{4}$, cette différence ne montera qu'à $\frac{1}{13440} + \frac{1}{52480} +$ &c. ce qui sera une très-petite valeur.

Mais quand il s'agira de sommer un segment dont l'abcisse sera plus grande qu'un quart du diametre, alors il faudra faire ensorte que les troisiémes termes des deux suites soient égaux entr'eux, ce qui rendra la derniere beaucoup plus approchante de la premiere, pourvû qu'on ait l'attention de ne pas négliger la différence qui se trouvera alors entre les deux seconds termes. Comparons donc & égalons $\frac{1}{12} n^2 x^3$ à $\frac{1}{28} x^3$, on tire de là $n = \sqrt{\frac{3}{7}}$; cette valeur substituée dans la seconde suite, la transforme en celle-ci: $\sqrt{x} \times (\frac{2}{3} x - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{7}} x^2 - \frac{3}{7 \cdot 12} x^3 - \frac{3}{7 \cdot 24} \sqrt{\frac{3}{7}} x^4 - \frac{90}{24 \cdot 16 \cdot 21} x^5$ &c.), dont la différence avec celle qui exprime l'aire du segment, est $\sqrt{x} (\times 0 + \overline{\sqrt{\frac{1}{21}} - \sqrt{\frac{1}{25}}}\, x^2 + 0 - \frac{1}{495} x^4$

$- \frac{1}{382} x^5$ — &c.) de là il ſuit qu'ajoutant à l'expreſſion $\frac{2}{3} x \sqrt{x - \sqrt{\frac{3}{7}} xx}$, la valeur de $\sqrt{\frac{1}{21} - \sqrt{\frac{1}{25}} x^2}$, on aura, à peu de choſe près, la ſomme de la ſuite qui exprime la grandeur du ſegment BGF. Et en effet, lorſque x deviendra égale au rayon ou à $\frac{1}{2}$, puiſque le diametre eſt 1, la différence ſera ſeulement $\frac{1}{113314} + \frac{1}{174780} +$ &c. mais tous ces termes & les ſuivans ne peuvent faire, comme l'on voit, qu'une très-petite quantité. Cette différence ſeroit encore beaucoup moindre ſi la grandeur d'x n'étoit que de $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$; on pourra donc prendre pour celle d'un ſegment circulaire quelconque dont l'abciſſe eſt x, le diametre l'unité, on pourra, dis-je, prendre $\frac{2}{3} x \sqrt{x - \sqrt{\frac{3}{7}} xx + \sqrt{\frac{1}{21} - \frac{1}{5} x^2}}$, ou $\frac{2}{3} x \sqrt{x - 0.654 xx + 0.019. xx}$.

On peut traiter de même l'expreſſion $x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{5x^9}{1152}$, &c. qui exprime l'aire du ſegment circulaire $CBED$ (*fig.* 19), l'abciſſe étant priſe à compter du centre; car réduiſant en ſuite l'expreſſion indéterminée $x \sqrt{1 - nxx}$, puis comparant le troiſiéme terme $\frac{n^2 x^5}{8}$ au troiſiéme de la premiere $\frac{x^5}{40}$, on trouve $\frac{1}{5} = n^2$, & alors la grandeur $x \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{5}} xx}$, ou $x \sqrt{1 - 0.429} xx$, en lui ajoutant $\sqrt{\frac{1}{20} - \frac{1}{6} x^3}$ ſera très-prochainenement égale au ſegment cherché, car cette expreſſion développée en ſuite, eſt $x - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{5}} x^3 - \frac{1}{40} x^5 - \frac{1}{80} \sqrt{\frac{1}{5}} x^7 - \frac{1}{640} x^9$, &c.

Or cette ſuite ne differe de la précédente que de l'excès du ſecond terme $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{5}} x^3$ ſur $\frac{1}{6} x^3$, (c'eſt pourquoi nous l'ajoutons à l'expreſſion propoſée), & de la quantité $- \frac{1}{308} x^7 - \frac{1}{359} x^9$ — &c. Conſéquemment lorſque x ne ſera que la moitié ou les deux tiers du rayon, cette derniere quantité s'évanouira preſque, à cauſe de la hauteur des puiſſances des termes x^7, x^9 & les ſuivans; car dans le premier cas elle ſe réduira à $\frac{1}{37424} + \frac{1}{183808} +$ &c. du rectangle de l'abciſſe par le rayon.

Il eſt facile d'appercevoir qu'on pourroit ſans peine approcher davantage de l'exactitude en ſuivant le même procédé, c'eſt-à-dire en déterminant n par le moyen d'un terme plus éloigné de la ſuite, & puis ajoutant ou retranchant la différence des ſeconds ou troiſiémes termes de la nouvelle ſuite avec ceux de la premiere. Car à meſure que deux termes plus éloignés de ces ſuites viennent à coincider, elles ſe rapprocheront davantage l'une de l'autre dans les termes qui viendront après; & comme les différences des coefficiens de ces termes ne peuvent manquer d'être des fractions, parce qu'eux-mêmes ſont néceſſairement des fractions, qu'elles affecteront des termes où l'indéterminée x eſt déja élevée à une haute puiſſance, cela rendra néceſſairement la valeur de toutes ces différences peu conſidérable, & même inſenſible dans bien des cas.

Ces diverſes expreſſions, comme auſſi les ſuites extrêmement convergentes qui donnent le ſinus, la tangente, &c. par l'arc, peuvent être fort utiles dans certaines circonſtances. Un Aſtronome qui dans des pays éloignés ſeroit privé de ſes tables par quelque accident, ſe verroit ſans ce ſecours abſolument déconcerté; avec celui que lui préſentent ces inventions, il pourroit continuer ſes calculs, & tirer les réſultats de ſes obſervations. Pluſieurs Auteurs ont traité de ces moyens de ſe paſſer des tables, entr'autres *Snellius*, dans ſa *Cyclométrie*; M. *Huygens*, dans le traité *de Circuli magnitudine inventa*; M. *Leibnitz*, dans un écrit inſéré dans les Actes de Leipſick, ſous le titre de *Trigonometria canonica à tabularum neceſſitate liberata* (*a*), & pluſieurs autres.

XXIII. Je ne ſçaurois paſſer ſous ſilence l'ingénieuſe méthode, pour la quadrature approchée des courbes, dont M. *Newton* a donné la premiere idée dans ſon traité intitulé *Methodus differentialis.* Elle conſiſte à déterminer, par le moyen de pluſieurs ordonnées connues, & également ou inégalement diſtantes entr'elles, (*b*) de la courbe propoſée, l'équation d'une autre courbe de genre parabolique qui paſſe par toutes leurs extrémités. On appelle ici courbes de genre parabolique celles qui ont une équation de cette forme, $a + bx$

(*a*) Année 1692.

(*b*) On s'eſt borné ici au cas où les ordonnées ſont également diſtantes entr'elles, la ſolution étant conſidérablement compliquée dans celui où leurs diſtances entr'elles ſont inégales.

$+ cx^2 + dx^3$, &c. parce que ce ſont en effet des paraboles de genre ſupérieur, comme on le voit dans l'*énumération des courbes du troiſiéme ordre*, donnée par M. *Newton*. Or comme une courbe de cette nature eſt toujours abſolument quarrable, qu'elle ſerre de très-près la courbe propoſée, & d'autant plus qu'elle paſſe par les extrémités d'un plus grand nombre d'ordonnées, il s'enſuit qu'on aura, en la quarrant, l'aire approchée de la premiere.

L'étendue & l'objet de cet écrit ne me permettent pas de développer ici les propoſitions fondamentales dont *Newton* fait uſage pour parvenir à la ſolution de ce problême. Je me contenterai de préſenter cette ſolution elle-même, & j'indiquerai un moyen ſimple & lumineux de s'aſſurer de ſon exactitude.

Soit donc donné le nombre & la grandeur de pluſieurs ordonnées éga-

lement diſtantes entr'elles, A, B, C, D, E; nous ſupppoſerons ici qu'il y en a 5; on prendra leurs premieres différences $A - B$, $B - C$, $C - D$, $D - E$, qu'on écrira avec les ſignes qui leur conviennent, ſuivant qu'elles ſe trouveront poſitives ou négatives, le terme à ſouſtraire pouvant être plus ou moins grand que celui dont on doit le retrancher. Nous nommerons, pour abréger, ces premieres différences a, b, c, d; on prendra enſuite les différences de celles-ci, $a - b$, $b - c$, &c. que nous appellerons encore pour ſimplifier a', b', c': ſoient encore les différences de ces dernieres, priſes dans le même ordre, $= a''\ b''$, & la derniere $a'' - b'' = a'''$; cela fait, ſoit toujours m l'ordonnée du milieu, qui eſt ici C. Qu'on nomme p la moyenne arithmétique entre les deux différences moyennes (*voy. fig.* 22) b & c; ſoit $b' = q$; $\frac{a'' + b''}{2} = r$, $a''' =$ *ſ*, & ainſi de ſuite, ſi le nombre

des ordonnées eût été plus grand. Ici *ſ* eſt le dernier terme, & quelquefois, ſuivant la nature de la progreſſion des ordonnées, la ſuite des différences ſe terminera plûtôt: mais cela ne jettera aucune difficulté dans la ſolution; les termes qui manqueront ſeront ſimplement réputés o.

Après cette premiere préparation il faut multiplier de ſuite les termes de cette progreſſion 1; x; $\frac{x}{2}$; $\frac{x^2 - 1}{3x}$; $\frac{x}{4}$; $\frac{x^4 - 4}{5x}$; $\frac{x}{6}$, &c. par eux-mêmes continûment, c'eſt-à-dire d'abord le premier par lui-même, puis le premier & le ſecond, enſuite les trois premiers, &c. cela donnera la ſuite des produits 1; x; $\frac{x^2}{2}$; $\frac{x^3 - x}{3x}$; $\frac{x^4 - xx}{24}$, &c. qu'on multipliera reſpectivement par m. p. q. r. s, &c. Ces produits, liés par le ſigne $+$, feront la valeur de l'ordonnée correſpondante à l'abciſſe x; ainſi l'équation de la courbe sera $m + px + q\frac{x^2}{2} + r\frac{x^3 - x}{6} + s\frac{x^4 - xx}{24}$. Il faut remarquer qu'alors les abciſſes x prennent leur origine au point F, qu'elles s'étendent poſitivement de F vers H, & négativement de F vers h; c'eſt-à-dire que la valeur de x eſt poſitive pour la partie de la courbe $FGIH$, & qu'elle doit être négative pour la partie contraire, ſuivant les regles ſi connues aujourd'hui de l'analyſe des courbes. Ainſi, pour avoir l'ordonnée po, il faudroit, dans l'équation précédente, changer les ſignes de toutes les puiſſances impaires de x.

Il eſt aiſé de s'aſſurer, par la méthode ſuivante, de la juſteſſe de la ſolution qu'on vient de voir; il n'y a qu'à examiner ſi lorſque les abciſſes deviennent o, FQ, FH, fq, fh, il en réſulte les ordonnées FG, QR, HI, gr, hi. A l'égard de la premiere cela eſt évident, car quand $x = 0$, il ne reſte pour la valeur de l'expreſſion que

le premier terme m, qui eſt égal à l'ordonnée moyenne C ou FG. Pour démontrer les autres cas, il faut développer les différences que nous avons déſignées par des lettres ſimples; ce procédé nous donnera pour les premieres $A - B$; $B - C$; $C - D$; $D - E$; & le coefficient $p =$ à la moyenne entre les deux du milieu $= \frac{B - D}{2}$. Les ſecondes différences ſeront $A - 2B + C$; $B - 2C + D$; $C - 2D + E$; dont la moyenne eſt $B - 2C + D$, qui eſt q. Les troiſiémes différences ſont $A - 3B + 3C - D$; $B - 3C + 3D - E$. Et la quatriéme $A - 4B + 6C - 4D + E$. Ici nous remarquerons en paſſant que les coefficiens de ces expreſſions ſont toujours ceux du binome $a + b$, élevé à la puiſſance dénotée par le rang de la différence. Faiſons à préſent $x = 1$ ou FQ, l'équation ſe réduira à Po ou $y = m + p + \frac{q}{2}$; & ſi au lieu de

$m. p. q.$ on met leurs valeurs trouvées ci-deſſus, elle deviendra $C + \frac{B - D}{2} + \frac{B - 2C + D}{2} = B$, c'eſt-à-dire la valeur de QR. Qu'on faſſe $x = -2$ ou fh, on aura $y = m - 2p + 2q - r + \frac{1}{2}s$, où mettant au lieu de $m. p. q. r. s$ leurs valeurs en $A. B. C. D. E.$ tout ſe réduit à $y = E$, ou HI. Il en ſera de même ſi on donne à x les autres valeurs fq ou Fh, c'eſt-à-dire qu'il en réſultera les ordonnées qr, hi; ainſi la courbe paſſe par les ſommets de toutes ces ordonnées.

Il n'a encore été queſtion que du cas où les ordonnées ſont en nombre impair; quand ce nombre ſera pair, par ex. $A.B.C.D$, on prendra, comme à l'ordinaire, leurs premieres, ſecondes, troiſiémes différences, juſqu'à la derniere (*voy. fig.* 23); on nommera m la moyenne arithmétique entre les deux du milieu, p la différence b ou

$B - C$, q la moyenne entre a', b', enfin a'' ſera appellée r. On multipliera enſuite, comme ci-deſſus, les termes ſuivans, 1; x; $\frac{4xx - 1}{4 \cdot 2x}$; $\frac{x}{3}$, $\frac{4xx - 4}{4 \cdot 4x}$; $\frac{x}{5}$, $\frac{4xx - 9}{4 \cdot 6x}$; &c. & leurs produits ſucceſſifs étant affectés des coefficiens $m. p\, q. r. s.$ &c. donneront $m + px + \frac{4qxx - q}{4 \cdot 2} + \frac{4rx^3 - rx}{12 \cdot 2}$, &c. pour l'équation cherchée de y, qui ne comprend ici que ces quatre premiers termes, parce que tous ceux au-delà de r ſont $= 0$. Ici l'origine des abciſſes eſt toujours le point qui partage en deux également l'intervalle des deux ordonnées moyennes, & elles s'étendent poſitivement vers H, & négativement dans le ſens contraire.

Rien à préſent n'eſt plus aiſé que de trouver l'aire entiere de la courbe qui paſſe par les points i, r, G, R, I; il ſuffit d'être initié dans le calcul intégral pour voir qu'il faut multiplier la somme des ordonnées PO, po par dx, & intégrer comme à l'ordinaire; car multipliant Po par dx, cela est visible à l'égard du segment $FGOP$. Mais il semble qu'on devroit multiplier po par $-dx$, car $fp = -x$; cependant comme par ce moyen l'aire $FGop$ paroîtroit sous une forme négative, & que néanmoins elle doit être ajoutée positivement à la premiere, il faudroit changer ses signes avant l'addition. Or la multiplication de po par dx, & non par $-dx$, produit précisément cet effet de changer les signes, ainsi il n'y a qu'à prendre la somme de Po, po & la multiplier par dx, son intégrale sera l'aire $OPpo$; & quand FP sera faite $= FH$, cette intégrale sera l'aire entiere $HIGih$.

Prenons à présent le cas des cinq ordonnées; en changeant les signes des termes où sont les puissances impaires de x, dans la valeur Po, ce qui donne la valeur de po, & les ajoutant ensemble,

nous aurons $PO + po = 2m + qx^2 + \frac{ſx^4 - ſx^2}{12}$. On peut remarquer ici que tous les termes affectés des différences premieres, troisiémes, cinquiémes, &c. s'évanouissent, & qu'il ne s'agit que de doubler les autres, ce qui facilitera beaucoup cette opération; cela est également vrai dans le cas des ordonnées en nombre pair. Enfin cette expression multipliée par dx & intégrée, devient $2mx + \frac{qx^3}{3} + \frac{ſx^5}{60} - \frac{ſx^3}{36}$. Il ne reste donc qu'à faire $x = 2$, & l'on aura pour l'aire cherchée $4m + \frac{8}{3}q + \frac{32}{60}ſ - \frac{8}{36}ſ$ égal à $4 \times (m + \frac{2}{3}q + \frac{8}{60}ſ - \frac{1}{18}ſ)$.

On trouvera, par un moyen semblable, que dans le cas des quatre ordonnées l'intégrale est $3 \times (m + \frac{9}{24}q - \frac{1}{8}q) = 3 \times (m + \frac{1}{4}q)$.

Le théorême de *Newton*, présenté sous cette forme, seroit déjà d'une grande utilité pour calculer assez com-

modément les aires approchées des courbes, & sur-tout de celles qui se résolvent en suites peu convergentes, dont l'approximation est extrêmement pénible; mais ce théorême fournit encore une pratique plus commode que je vais exposer. *Newton* s'étant contenté de l'indiquer dans le dernier scholie de son traité, ce que je vais ajouter en sera une espece de commentaire, de même que le discours précédent a pû servir à jetter quelque jour sur le reste de cet excellent traité.

Reprenons encore ici les cas des cinq ordonnées, pour lesquelles nous avons trouvé $4\,(m + \frac{2}{3}q + \frac{2}{15}ſ - \frac{1}{18}ſ)$; or l'on a fait voir plus haut qu'elles étoient les valeurs de $ſ$ & q, en expressions où il n'entre que des ordonnées: celle de q y a été trouvée $= B - 2C + D$, & celle de $ſ = A - 4B + 6C - 4D + E$. On pourra donc substituer à m. q. $ſ$. ces valeurs, & dans ce cas l'opération faite,

la formule ci-dessus devient $= \frac{4}{90}(7A + 32B + 12C + 32D + 7E)$, ce qui est égal à $\frac{1}{90}(7\overline{A + E} + 32\overline{B + D} + 12C)$, multiplié par 4, ou plus généralement par l'intervalle entre la premiere & la derniere ordonnée que nous nommerons dorénavant R. On s'assurera par un semblable procédé que lorsqu'on n'employera que trois ordonnées, l'aire approchée sera $\frac{1}{6}(\overline{A + C} + 4B)\,R$; pour sept elle sera $\frac{1}{840}(41\,\overline{A + G} + 216\,\overline{B + F} + 27\,\overline{C + E} - 272\,D)\,R$. Nous ne pousserons pas plus loin cette table pour les ordonnées impaires, parce qu'il est rare qu'on ait besoin d'en employer plus de sept; d'ailleurs il est aisé d'y suppléer dans le besoin.

La méthode n'est pas différente pour les ordonnées en nombre pair. On a vû plus haut que la formule pour 4 devenoit $3\,(m + \frac{1}{4}q)$, & un peu auparavant on a remarqué que q étoit la moyenne entre les deux différences $A - 2B + C$, & $B - 2C + D$, c'est-à-dire $= \frac{A - B - C + D}{2}$, & que m étoit la moyenne entre B, C, c'est-à-dire $\frac{B + C}{2}$, conséquemment la formule se réduira à $\frac{3}{8}(\overline{A + D} + 3\,\overline{B + C})$ ou bien, en nommant encore R la portion de l'axe entre la premiere & la derniere ordonnée, $\frac{1}{8}(\overline{A + D} + 3\,\overline{B + C})R$: pour six ordonnées on aura $\frac{1}{288}(19\,\overline{A + F} + 75\,\overline{B + E} + 50\,\overline{C + D})R$.

Nous allons enfin ranger toutes ces expressions en forme de table, pour la commodité des lecteurs qui en auroient besoin; mais pour abréger nous y nommerons A' simplement la somme de la premiere & la derniere ordonnée, B' celle de la seconde & la pénultiéme, &c. & dans le cas des ordonnées

impaires, la derniere lettre sera l'ordonnée du milieu. Nous avons négligé les cas où l'on n'employeroit qu'une ou deux ordonnées, parce qu'on ne doit en attendre aucune exactitude. La premiere colonne perpendiculaire contient le nombre des ordonnées, à côté duquel est exprimée l'aire.

3 $\frac{1}{6}(A' + 4B')R$.
4 $\frac{1}{8}(A' + 3B')R$.
5 $\frac{1}{90}(7A' + 32B' + 12C')R$.
6 $\frac{1}{288}(19A' + 75B' + 50C')R$.
7 $\frac{1}{840}(41A' + 216B' + 27C' + 272D')R$.

M. *Newton* ajoute, ce qui peut servir à simplifier beaucoup ces calculs, que si l'on prend le double de l'ordonnée du milieu, & que l'on joigne ensemble les ordonnées qui en sont également distantes, comme QR avec qr, HI avec hi; qu'enfin l'on substitue ces sommes à chacune des premieres QR, HI, il se formera une nouvelle

courbe $\gamma\xi\omega\iota$, dont l'aire sera égale à celle de la premiere. C'est ce qui a été démontré plus haut, que pour avoir l'aire des deux parties de la courbe par une même & unique intégration, il falloit ajouter les deux ordonnées PO, po, multiplier leur somme par dx, & qu'en intégrant ensuite, on auroit à la fois les deux aires $POGF$, $poGF$. M. *Newton* propose encore quelques moyens propres à transformer ces courbes, mais mon dessein n'est pas ici de faire un commentaire de son traité entier; ainsi je reviens à mon objet principal, en faisant une application de cette méthode à la mesure du cercle.

Nous supposerons donc pour cet effet que le rayon est 8, & qu'il est divisé en huit parties égales, afin d'avoir cinq ordonnées dans le segment $AEea$ qui répond au demi-rayon; mais ces ordonnées auront en fractions décimales les valeurs suivantes.

$Aa = 8.000000$; $Bb = \sqrt{63} = 7.937253$; $Cc = \sqrt{60} = 7.745966$; $Dd = \sqrt{55} = 7.416198$; Ee enfin $= \sqrt{48} = 6.928203$. Ainsi la somme A de la premiere Aa & de la derniere Ee sera 14.928203; celle de la 2e & la quatriéme (B') sera 15.353451; on aura enfin $Cc = 7.745966$. Par conséquent les $7A' + 32B' + 12C'$ de la formule qui convient au cas des cinq ordonnées, seront 688.759445, ce qui doit être multiplié par 4 & divisé par 90. Ces opérations donneront 30.611539 pour l'aire du segment $AaeE$, ce qui ne differe de sa vraie valeur que dans le sixiéme chiffre. Car si l'on en retranche le triangle $AEe = 13.856406$, le restant 16.755124 exprimera le secteur Aae dont le triple ou 50.265372 sera le quart de cercle entier, le quarré du rayon étant 64.000000 : & enfin réduisant ce rapport au dénominateur 1.000000 on trouvera le premier nombre = 0. 785396 ; suivant d'autres formules plus exactes on auroit eu 0. 785398. L'erreur de celle-ci n'est donc que dans le sixiéme chiffre, & elle est environ $\frac{2}{1.000000}$ ou $\frac{1}{5.00000}$; le nombre 0. 785398 étant à peine plus grand qu'il ne faut, puisque le chiffre suivant n'est que l'unité.

Nous donnerons encore un exemple de l'application de ces formules à la mesure d'un espace circulaire. Ici nous ne prendrons que quatre ordonnées également distantes dans le même segment dont il vient d'être question. Pour cela il faudra supposer le rayon divisé en six parties égales, & alors ces quatre ordonnées seront en fractions décimales 6. 00000 ; 5. 91756 ; 5. 65685 ; 5. 19615 ; par conséquent $A' + 4\,B'$ de la formule des quatre ordonnées auront pour valeur 45. 91938, qu'il faudra multiplier par 3 & diviser par 8, ce qui donnera

17. 21977. Afin de voir jusqu'à quel point on approche de l'exactitude, il n'y a qu'à en retrancher le triangle AEe, qui est ici 7. 79422, & le reste 9. 42555 étant triplé, donne pour le quart de cercle 28. 276650 ; ce qui comparé au quarré du rayon 36000000, est la même chose que 0. 785460 à 1. 000000. L'erreur est donc moindre que l'unité au cinquiéme chiffre, & elle va en tout à peu près à un 12000 seulement, ce qu'on doit regarder comme peu considérable eu égard à la facilité de l'opération.

Mais si on faisoit usage de la remarque de *Newton*, & qu'on doublât, dans le cas des cinq ordonnées, celle du milieu Cc, qu'on prît enfin les sommes des ordonnées QR, qr ; HI, hi pour en faire les nouvelles ordonnées $Q\varrho$, HI de la courbe $\gamma\varrho\nu\iota$, il faudroit seulement employer la formule (A'

$+ 4B')\,\frac{R}{6}$, ou $\frac{1}{3}\,(A' + 4\,B')$, puisqu'ici $R = 2$; on auroit alors A' $+ 4B' = 91.833939$: or ce nombre divisé par 3 donneroit 30. 611313, qui approche considérablement encore de la vraie valeur. Car en retranchant le triangle AEe, 13. 856406, & triplant le reste 16. 754907, on a pour rapport du quart du cercle au quarré du rayon, celui de 50. 264721 à 64. 000000 ; ce qui est la même chose que celui de 0. 785386 à 1. 000000. L'on voit que le premier nombre s'accorde avec ceux que donne la proportion de *Ludolph*, jusqu'aux deux derniers chiffres qui devroient être 98 au lieu de 86, de sorte que l'erreur n'est que d'une 83000. Il y a donc quelque avantage, comme le remarquoit M. *Newton*, à réduire le cas des cinq ordonnées à celui de trois, puisque l'erreur est encore presque insensible, & que l'opération est considéra-

blement abrégée. C'est pourquoi, afin de faire cette réduction commodément, nous substituerons dans la pratique à la formule usitée alors, celle-ci $\frac{1}{12}$ $(A' + 4B' + 2\,C') \times R$. en prenant comme à l'ordinaire A' pour la somme de la premiere & la cinquiéme, B' pour la seconde & la quatriéme, & C' pour la moyenne. Car cette formule équivaudra à la réduction qu'on vient de faire des cinq ordonnées à trois.

XXIV. M. *Thomas Simpson*, un des plus profonds Géometres qui illustrent aujourd'hui l'Angleterre, a donné* une nouvelle méthode pour la dimension des aires des courbes que nous croyons devoir joindre ici aux précédentes. Il suppose, de même qu'on a fait dans l'article ci dessus, un certain nombre d'ordonnées à égales distances ; &, par une opération fort simple, il

* *Math. Dissertations*, p. 109.

trouve l'aire de la courbe avec une exactitude qui approche beaucoup de la vérité : cette méthode est fondée sur la considération suivante. Soit la courbe $IRGri$ (*fig* 22.), & qu'on conçoive les sommets des deux ordonnées FG, hi, joints par une ligne droite, on peut imaginer dans le petit segment Gri, un segment parabolique inscrit qui aura son sommet en r, & son axe ou diametre dans la position rq. Lors donc que les ordonnées équidistantes seront suffisamment voisines, on pourra regarder cet arc parabolique comme coincidant avec la courbe proposée. Or ayant tiré une parallele à Gi par le sommet R, ce segment est égal aux deux tiers du parallelogramme $Gr\bar{i}$, ou son égal Fh par ur. L'aire $FGrih$ est donc égale au trapeze $FGih$, plus aux deux tiers de ce petit parallelogramme. Mais ur est la différence de qr & de qu moyenne arithmétique entre GF & hi, c'est par conséquent

$qr - \frac{GF + hi}{2}$ ou $\frac{2qr - GF - hi}{2}$; ce qui étant multiplié par $\frac{2}{3} Fh$, donne $\frac{1}{3} qh \times (4qr - 2GF + hi)$. D'un autre côté le trapeze $FGih = (GF + hi) \times qh$; d'où l'on tirera, en ajoutant ces deux grandeurs & réduisant à même dénomination, l'aire $FGrih = \frac{1}{3} qh \times (hi + 4\,qr + GF)$. Par la même méthode on trouvera l'aire $FGRIH = \frac{1}{3} QH \times (GF + HI + 4QR)$: conséquemment l'aire entiere sera $(hi + 4Qr + 2GF + 4QR + HI)$ multipliée par $\frac{1}{3}$ QH ou qh. De là il suit que si l'on prend quatre fois les ordonnées 2^e^. 4^e^. 6^e^. &c. une fois la premiere & la derniere, & le double de toutes les autres, qu'on multiplie enfin ces sommes par le tiers de la distance commune QH des ordonnées, on aura fort près l'aire de la courbe. Donnons-en un exemple.

Nous reprendrons pour cela les 5 ordonnées du segment $AaeE$, dont

l'abcisse AE est égale au demi-rayon; l'intervalle BA est l'unité; ainsi l'aire $AaeE$ sera $\frac{1}{3}$ $(Aa + Ee + 4Bb + 4Dd + 2Cc)$ ce qui deviendra en mettant à la place de ces ordonnées leurs valeurs, ce qui deviendra, dis-je, 30. 611313. d'où l'on tirera, comme on a fait plus haut, le rapport du quart de cercle au quarré du rayon, comme 0. 785386 à 1. 000000 : or ce rapport est vrai jusqu'au pénultiéme chiffre, qui ne devroit être plus grand que d'une unité pour s'accorder avec celui qu'on a si souvent cité. Je ne crois pas qu'on puisse rien trouver de plus simple, & en même temps de plus approchant de la précision.

Au reste, il est aisé d'appercevoir que cette regle exige nécessairement que le nombre des ordonnées soit impair; mais c'est une sujétion légere qui diminue très-peu ses avantages. Il est aussi à propos, afin qu'elle ait son effet entier, que la courbe soit ou toute con-

vexe, ou toute concave vers son axe, à moins que les ordonnées ne soient extrêmement voisines; autrement il faudroit tirer une ordonnée du point d'inflexion, qui la partageroit en deux segmens, l'un concave, l'autre convexe, vers l'axe, & on les mesureroit à part.

J'ajouterai qu'on pourroit dans certains cas rendre cette regle beaucoup plus parfaite, en déterminant quelle espece de parabole conviendroit le mieux avec le petit segment curviligne. Il faudroit pour cela examiner quel rapport auroient les secondes différences des ordonnées avec les secondes différences des abcisses. Si celles-là, par exemple, étoient comme les cubes de celles-ci, il est visible que le segment parabolique le plus voisin de celui de la courbe appartiendroit à une parabole dont l'équation est $y^3 = x$; alors la regle changeroit un peu, ce petit segment étant au parallelogramme circonscrit comme 3 à 4; mais je me contenterai d'indiquer cette addition l'ingénieuse regle de M. *Simpson*, parce que ce n'est pas ici le lieu d'en approfondir davantage la théorie. Les Géometres me comprendront du premier coup, & il faudroit pour les autres des explications assez longues.

XXV. Je terminerai ce chapitre en donnant une idée de l'ingénieux moyen dont M. *Jean Bernoulli* a fait usage pour déterminer des limites de plus en plus rapprochées du rapport de la circonférence circulaire au diametre. On s'est borné à ce brief extrait de son écrit, parce que sa nature ne permet gueres de l'analyser avec plus de detail, sans tomber dans une prolixité que nous cherchons à éviter. Les Lecteurs dont nous aurons excité la curiosité, pourront consulter les œuvres de ce grand Homme, qui sont ou qui doivent être entre les mains de tous ceux qui aspirent à des connoissances profondes dans la Géométrie & l'analyse.

La méthode dont nous venons de parler, consiste en ceci. Qu'on imagine une courbe telle qu'un quart de cercle (dont les tangentes aux deux extrêmités se rencontrent l'une l'autre perpendiculairement) se développer en commençant par une de ses extrêmités: l'extrêmité de cette circonférence courbe qui se roidit en ligne droite & se déplie, décrira une nouvelle courbe qu'on pourra supposer se développer aussi, mais en sens contraire, c'est-à-dire en commençant par le côté qui a été décrit le dernier ; de là en naîtra une troisieme qu'on concevra développée de la même maniere, & ainsi à l'infini. Toutes ces courbes, comme le remarque M. *Bernoulli*, approchent de plus en plus de l'égalité & de la similitude parfaite, & elles ne tardent même pas à être sensiblement égales ; on peut encore observer qu'elles deviennent de plus en plus semblables à des cycloïdes. C'est une conséquence de cette vérité

connue que ces courbes sont les seules ordonnées paralleles, dont le développement ne fait que les reproduire.

Ayant donc nommé a la premiere courbe, c'est-à-dire le quart de circonférence dont le rayon est l'unité, M. *Bernoulli* détermine la longueur de toutes les autres par une suite d'expressions fort régulieres & fort aisées à continuer pour tel nombre de courbes qu'on peut desirer. Ces expressions ont de plus cet avantage, d'être extrêmement simples ; car après les réductions convenables, elles ne renferment que la grandeur a élevée à une puissance dont l'exposant est celui du rang de la courbe en comptant la premiere, & affectée uniquement de quelques coefficiens numériques.

Que l'on suppose donc, ajoute M. *Bernoulli*, que deux de ces courbes qui se suivent immédiatement soient égales entr'elles, & qu'on égale les deux

expressions qui les désignent. Comme elles ont cette forme Ma^{r}, Na^{r+1}, il en résultera nécessairement une équation simple entre a ou le quart de la circonférence, & une fraction numérique qui sera sa valeur ; or il est évident que cette valeur approchera d'autant plus de l'exactitude, que la supposition qui l'a donnée s'en écartera moins.

Cette considération conduit à déterminer des limites alternativement moindres & plus grandes qu'il ne faut ; car en égalant la premiere & la seconde courbe, on trouve un rapport du quart de cercle au rayon qui excede le vrai ; au contraire la supposition d'égalité entre la seconde & la troisiéme en donne un trop petit, & ainsi de suite : au reste ces limites approchent avec assez de promptitude les unes des autres ; en effet la comparaison de la douziéme & de la treiziéme courbe fournit une proportion du diametre à la circonférence, telle que celle de 1. 00000. 00. à 3. 14159. 00, & l'égalité supposée entre la treiziéme & la quatorziéme, la donnent comme 1. 00000. 00 à 31415935; or ces deux valeurs de la circonférence 3.14159.00, 31415935, sont l'une trop petite, l'autre trop grande, & coincident néanmoins jusqu'au sixiéme chiffre; ainsi elles sont vraies dans les six premiers, comme on le sçait d'ailleurs par les approximations si connues de *Viete*, *Ludolph*, &c.

CHAPITRE V.

Histoire des Quadrateurs les plus célebres.

J'AI donné dans le cours de cet Ouvrage le nom de Quadrateurs à ces hommes qui, pour la plûpart. à peine initiés dans la Géometrie, entreprennent de quarrer le cercle, ou s'obsti-

nent à maintenir d'absurdes paralogismes pour une solution légitime de ce problême. Ayant à les nommer souvent, il me falloit un terme nouveau pour éviter les circonlocutions, ou ne pas leur prodiguer le titre de Géometres qu'ils méritent si peu. J'ai fait usage de la liberté qu'*Horace* accorde dans une pareille circonstance; le mot de quadrateur m'a paru assez heureux pour mon objet, & je l'ai adopté.

Le même motif qui m'a porté à désigner ces esprits d'une trempe si singuliere, par une dénomination nouvelle, m'a conduit à ne parler d'eux que dans un article à part. Le seul *Hippocrate* de *Chio* & *Gregoire* de *S. Vincent* méritoient quelque distinction à cet égard. Aurois-je dû exposer de suite les découvertes dont nous nous sommes occupés jusqu'ici, & les ridicules prétentions de tant de Quadrateurs anciens & modernes? Non sans doute, c'eût été trop honorer ces derniers & faire une espece

d'injure aux Auteurs des inventions ingénieuses qu'on a exposées dans les chapitres précédens; les noms d'un *Archimede*, d'un *Wallis*, d'un *Newton*, figureroient mal à côté de ceux des *Bryson*, des *Oronces*, des *Delaleu*, des *Basselin*, &c.

Mais, diront sans doute quelques personnes judicieuses, quelle utilité peut-il y avoir à tirer de la poussiere ces noms déja dégradés auprès de la postérité & de leur siécle même, par les erreurs de ceux qui les ont portés? Je me suis fait cette question plus d'une fois, & plus d'une fois j'ai été sur le point de supprimer cet article entier; cependant après quelques réflexions j'ai pensé que l'histoire d'un problême célebre par tant de tentatives & de chûtes honteuses, ne pouvoit être complette qu'en faisant connoître du moins quelques-uns de ceux qui se sont signalés par ce ridicule; il y a d'ailleurs une sorte de justice à traduire devant la postérité,

des hommes qui semblent avoir de propos délibéré fermé les yeux à la plus grande évidence. Si l'erreur grossiere, & presque volontaire, n'étoit punie que de l'obscurité & de l'oubli, ce châtiment léger seroit trop peu capable de retenir les nombreux imitateurs de ceux dont je parle: ils deviendront peut-être plus circonspects en voyant le mépris & l'espece de tache qui accompagne les noms de ceux dont ils suivent les traces.

II. Il y eut parmi les Anciens, comme parmi nous, un grand nombre de ces foibles Géometres, qui se persuaderent d'avoir trouvé la Quadrature du cercle; j'en ai déja cité quelques-uns par occasion. La prétendue quadrature de *Bryson*, qui faisoit le cercle moyen proportionnel entre les quarrés inscrit & circonscrit, est une erreur indigne de la Géométrie, soit qu'on l'entende du moyen arithmétique ou du moyen géométrique; car la différence est de près d'une vingt-uniéme dans le premier cas ; & à l'égard du dernier, on sçavoit déja de son tems que le moyen géométrique entre ces quarrés étoit l'octogone inscrit.

C'est sans doute de ce nombreux essain de Quadrateurs que parle *Archimede*, dans la préface de sa Quadrature de la parabole. On y lit que plusieurs avoient déja tenté de quarrer le cercle & l'ellipse, mais qu'ils n'avoient qu'enfanté des paralogismes, ou supposé des principes qu'on ne pouvoit leur accorder. La ressemblance de notre âge avec celui d'*Archimede* est entiere ; combien de Quadrateurs qui commencent à partir de quelque principe directement contraire à la Géométrie ! Nous en avons un aujourd'hui pour qui la partie n'est pas moindre que le tout, pour qui la diagonale du quarré n'est pas incommensurable au côté, qui réussit enfin à merveille avec ces principes féconds à quarrer le cercle, non par la méthode des Géométres, mais *par le méchanisme*

méchanisme en plein des figures ; ce sont là ses propres termes ; *spectatum admissi risum teneatis amici.*

III. Je ne dirai rien des siécles d'obscurité qui ont précédé le renouvellement des sciences parmi nous : on a dû trouver souvent la quadrature du cercle dans ces temps où les plus habiles sçavoient à peine une partie de la Géométrie élémentaire d'*Euclide* : je ne m'amuserai pas à y fouiller pour en retirer la précieuse découverte de quelque nom inconnu & qui mérite de l'être ; je passe à un tems sur lequel nous avons plus de lumiere.

IV. Le premier qui, à la renaissance des Lettres, occupa les Géometres à réfuter ses erreurs, est le fameux Cardinal de *Cusa* ; il prétendit avoir réussi à quarrer le cercle par deux voyes différentes. Suivant l'une il faisoit rouler sur un plan un cercle ou un cylindre, jusqu'à ce que le point qui l'avoit touché au commencement de la révolution,

retournât s'y appliquer ; cependant il faut lui rendre cette justice, il n'étoit pas assez mal-adroit pour prétendre déterminer ce point par un méchanisme si grossier ; il cherchoit à le faire géométriquement, mais son opération est tout à fait erronée : son autre méthode lui donnoit cette fausse détermination de la circonférence ; *si l'on a un cercle*, disoit-il, *& qu'on en décrive un second dont le diametre soit égal au rayon du premier, augmenté du côté du quarré inscrit ; le triangle équilatéral inscrit dans ce second cercle, sera isopérimetre au premier.* Ce n'est pas même là une approximation, car un calcul très-simple fait voir que la circonférence ainsi déterminée, s'écarte beaucoup en dessous des limites d'*Archimede*. *Royaumont* s'y prit de cette maniere pour réfuter la prétention de ce Cardinal Géometre : ce qu'il fit dans plusieurs Lettres écrites en 1464 ou 1465, mais imprimées seulement en 1533, avec quelques autres œuvres

posthumes de ce sçavant Astronome. Quant à la premiere quadrature du Cardinal de *Cusa*, elle fut de nouveau réchauffée au commencement du seiziéme siécle, par un certain *Bovillus* de Vermandois, que sa seule obscurité a préservé de la risée des Géometres.

V. A ces malheureux Quadrateurs succéda, vers le milieu du seiziéme siécle, *Oronce Finée.* Celui-ci se proposa un objet bien plus vaste qu'aucun Mathématicien de ses prédécesseurs ; la Quadrature du cercle n'est qu'une petite partie des nombreuses découvertes qui composent son Livre, *de rebus Mathematicis hactenus desideratis.* L'invention des deux moyennes proportionnelles, la trisection de l'angle, l'inscription de tous les polygones de côtés impairs dans le cercle, que sçais-je, rien ne se refusa à ses efforts ; il surmonta lui seul toutes les difficultés qui avoient jusques-là arrêté les Géometres, mais l'illusion ne fut pas de longue durée. Un de ses disciples nommé *Buteon*, Mathématicien plus judicieux, l'attaqua le premier, & démontra ses erreurs. Il fut secondé d'un Mathématicien Portugais, justement célebre de son tems; sçavoir *Pierre Nonius*, ou *Nugnes* dans sa langue, qui releva les bévues d'*Oronce* avec plus d'étendue, dans un livre exprès intitulé *de erratis Orontii*. Ainsi s'évanouit l'espérance d'une immortalité brillante dont *Oronce* s'étoit flaté, & cet ouvrage sur lequel il s'étoit reposé pour sa réputation, fut regardé comme une des plus misérables productions qu'on eut vûe depuis long-tems.

Au reste, *Oronce* prétendoit, ce qu'il peut être utile à quelqu'un de sçavoir pour le préserver de la même erreur; il prétendoit, dis-je, que la circonférence du cercle étoit la moindre des deux moyennes proportionnelles entre les contours des quarrés inscrit & circonscrit; mais cette moyenne excéde les simples limites d'*Archimede*, & on

le réfuta dès-lors en le lui montrant. Depuis ce tems M. *Huygens* a démontré immédiatement que la circonférence du cercle étoit toujours moindre que la moindre des deux moyennes, soit arithmétiques, soit géométriques, entre les contours des polygones semblables, inscrit & circonscrit, queis qu'ils soient.

VI. On vit peu de tems après la chûte d'*Oronce*, paroître dans la carriere un nouveau prétendant à l'honneur de quarrer le cercle; il se nommoit *Simon Wan-Eyk* (*du-Chesne*). Celui-ci fut apparemment moins maladroit que les précédens; car *Pierre Metius* qui le réfuta, fut obligé pour le faire, de déterminer des limites beaucoup plus resserrées que celles d'*Archimede*: ce fut là l'occasion de sa découverte du rapport approché de 113 à 355, qui convient avec les chiffres de *Ludolph*, jusqu'au septiéme inclusivement. La Quadrature de *Duchesne* ne

résista pas à cette rigoureuse épreuve, & fut universellement reconnue pour fausse.

VII. Parmi ceux qui se sont flatés dans ces derniers tems d'avoir atteint précisément la vraie mesure du cercle, aucun ne l'a fait avec plus de confiance que *Joseph Scaliger*. Non content de la célébrité dont il jouissoit à titre d'une profonde érudition, il prétendit acquerir le premier rang parmi les Mathématiciens. La découverte de la Quadrature du cercle lui en parut un moyen assuré, & il la trouva comme font tous ceux qui, à peine initiés dans la Géométrie, s'engagent à la rechercher, persuadés qu'elle ne leur échappera pas: il exposa sa rare découverte dans son livre intitulé *nova Cyclometria*, en 1592; & l'air d'assurance avec lequel il l'annonça, en imposa à bien des gens, qui n'hésiterent pas à lui ceindre le laurier de Géometre; mais ceux à qui seuls il appartenoit de décider du mérite géo-

métrique, en jugerent bien autrement: le grand nom de *Scaliger* demandoit de grands adversaires. *Viete*, le premier Mathématicien de son âge, le réfuta, de même qu'*Adrianus Romanus*, Géometre célebre des Pays-Bas, & le P. *Clavius*; ce dernier sur-tout le mortifia extrêmement, il fit voir que de la Quadrature prétendue de *Scaliger*, il s'en ensuivoit que la circonférence du dodécagone inscrit étoit plus grande que celle du cercle qui le renfermoit: il ne se borna pas à cela, ses autres solutions pitoyables de la trisection de l'angle, de l'inscription des polygones quelconques impairs, ne furent pas traitées avec plus d'indulgence. Le Géometre Allemand mit au grand jour ses paralogismes, sa contradiction perpétuelle avec les principes les plus assurés de la Géométrie. Pour mettre le comble à l'amertume de la critique, il forma de ces grossieres bévues, le contraste humiliant pour *Scaliger*, avec sa confiance

& la maniere insultante dont il avoit traité *Euclide* & *Archimede*. Il n'y eut qu'une voix à son sujet, du moins parmi les Géometres. J'ajoute à dessein cette restriction, car je n'ignore pas que tel est regardé comme un grand homme par gens hors d'état de l'apprécier, qui n'est qu'un objet de mépris pour ceux qui cultivent le même art ou la même science : nous en avons de nombreux exemples. Quant à *Scaliger*, couronné par ses amis ou quelques ignorans, il fut mis par ceux qui étoient versés dans la Géométrie, au rang des plus mal-adroits Quadrateurs.

VIII. Une histoire aussi détaillée des autres Géometres de cette espece seroit longue, & le peu d'intérêt qu'on doit y prendre ne la rendroit pas supportable. Je me borne donc à faire passer briévement en revûe ceux dont il me reste à parler. J'ai regret de trouver ici *Longomontanus* : ce célebre Astronome du commencement du siécle

dernier, se fit un vrai tort, par sa foiblesse, à se faire illusion sur la Quadrature du cercle. Il voulut que le diametre fût à la circonférence comme 100000 à 314185 (*a*); cela est suffisamment réfuté par les rapports qu'on a donnés ci-dessus, suivant lesquels la circonférence est moindre que 314160 des mêmes parties; mais *Longomontanus* mérite quelque indulgence, eu égard aux travaux utiles dont on lui est redevable en Astronomie. A peu près dans le même tems, *Jean-Baptiste Porta*, Napolitain, tenta la voye des lunulles pour parvenir à la Quadrature du cercle. On trouve bien des puérilités dans son ouvrage, qui aboutit enfin à des paralogismes palpables; quoiqu'il y eût mille propriétés curieuses des lunulles, que des Géometres qui ne songeoient pas à la Quadrature du cercle ont apperçues (*voyez* note 1, c. 2.),

(*a*) Huygens, *de circuli magnitudine inventa*, p. 20.

Porta n'en rencontra aucune, mais seulement des erreurs. Tel est ordinairement le procédé de ceux qui s'adonnent à ce problême : il est hors d'exemple que leur travail ait procuré la moindre découverte géometrique; j'en excepte le seul *Grégoire de S. Vincent*, dont j'ai parlé avec éloge.

Le fameux *Hobbes* donnoit il y a près d'un siécle dans un travers semblable; on peut même dire qu'il surpassa en ridicule tous ses prédécesseurs en ce genre; car non seulement il crut avoir réussi à quarrer le cercle, & à trouver les deux moyennes proportionnelles, mais on ne vit jamais un pareil acharnement à les soutenir contre *Wallis*, qui prit la peine de le réfuter par plusieurs écrits. Le dépit qu'il en conçut se tourna contre les Géometres & la Géométrie elle-même. D'abord il en avoit admis la méthode & les principes; les contradictions que *Wallis* lui opposa, le conduisirent peu-à-peu à

s'inscrire en faux contre tous ses axiomes, & il en entreprit la réforme entiere dans le livre intitulé, *de ratiociniis & fastu Geometrarum*. Cette querelle lui fit enfanter une foule d'autres écrits, dont les extraits consignés dans les Transactions philosophiques, ne contribueront pas à établir sa réputation dans la postérité.

Je citerois encore un grand nombre d'autres personnages à mettre à côté de ces premiers. Un *Olivier de Serres*, qui trouvoit sçavamment que le cercle étoit double du triangle équilateral inscrit; il ignoroit, ce qui donne une grande idée de ses connoissances en Géométrie, que ce double est l'exagone. Un sieur *Delaleu*, qui fatigua vers le milieu du siécle passé, les Géometres, par son obstination à maintenir ses paralogismes, contre les réfutations solides & évidentes qu'on y opposa. Un sieur *Mallement de Messange*, célébre dans les Journaux du tems, par ses impertinens systêmes physiques (*a*). Un sieur *Dethleve Cluver* (*b*), qui quarroit méthaphysiquement le cercle, & déquarroit (qu'on me permette ce terme) la parabole, insultant aux Géometres, qui avoient été si long-tems les dupes d'*Archimede*. Il ne tint pas à M. *Leibnitz* de se donner la comédie & à toute l'Europe, en le mettant aux prises avec M. *Neuwentiit*, qui dans le même tems entassoit bien de mauvais raisonnemens sur le calcul différentiel. Le sieur *Mathulon* enfin, condamné il y a environ trente ans, par un Tribunal de Justice à la peine qu'il s'étoit imposée lui-même, si l'on convainquoit sa quadrature de fausseté : la perte d'une somme de 1000 écus fut la punition qu'il essuya pour avoir eu l'ambition de quarrer le cercle, & la témérité de défier pardevant Notaires les Géometres de relever la moindre erreur dans ses raisonnemens.

(*a*) Journal des Sçavans, 1679, 80, 81, &c.
(*b*) Act. de *Leipsick*, ann. 1695.

Parmi cette foule de Quadrateurs obstinés à se refuser aux preuves les plus évidentes, le sieur *Basselin* est un des plus récens ; il ne faut qu'avoir jetté les yeux sur son livre, pour juger que c'étoit un des plus pitoyables & des plus embarrassés. Son prétendu rapport s'accordoit à peine avec les limites connues de *Ludolph*, jusqu'au quatriéme chiffre ; aussi prétendoit-il infirmer leur certitude, parce qu'elles sont au-dessous du juste milieu de celles d'*Archimede*. On lui demandoit quelle assurance il avoit que la véritable grandeur du cercle ne fût pas au-dessous de ce juste milieu ; c'étoit, répondoit-il, sa quadrature, & il se disoit assuré qu'elle étoit exacte, parce qu'elle se rencontroit dans les limites d'*Archimede*, comme si mille autres rapports aussi faux que le sien, ne se rencontroient pas également entre ces limites. En vain lui faisoit-on mille raisonnemens très-palpables pour le desabuser, ce pauvre

Géometre, qui dans le tems qu'il quarroit le cercle, ignoroit qu'*Archimede* eût quarré la parabole, est mort dans l'intime persuasion qu'une postérité plus équitable reconnoîtroit quelque jour ce que ses jaloux contemporains lui contestoient ; car c'est un foible qui ajoute encore au ridicule des gens de cette espece, que de se persuader que la jalousie seule des sçavans, & sur-tout des Académies, leur oppose les contradictions qu'ils essuyent. Le sieur *Basselin* appréhendoit extrêmement les effets de cette jalousie, ou quelque plagiat odieux ; il en agit toujours avec les Commissaires qu'il avoit extorqués, comme un homme qui craint de se voir enlever un secret inestimable ; il ne dévoila entierement sa découverte que dans l'impression, pour s'en assurer la gloire.

IX. J'avois crû d'abord devoir m'imposer la loi de ne point parler des Quadrateurs vivans, puisque je ne pouvois

avec équité les ranger dans une autre classe que ceux qu'on vient de voir ; mais j'ai fait réflexion que puisqu'ils avoient couru le hazard du jugement du public, il m'étoit permis de les citer devant lui : je me bornerai néanmoins à un petit nombre, c'est-à-dire à ceux que le hazard m'a présentés, ou à qui la singularité de leurs prétentions a donné une sorte de célébrité.

M. *Liger* a rempli les Mercures d'écrits concernant la Quadrature du cercle, & a fait un ouvrage particulier pour prouver que la partie n'est pas moindre que le tout, qu'il n'y a point d'incommensurables, que la racine quarrée de 24 est la même que celle de 25, & celle de 50 la même que celle de 49, &c. Il prouve tout cela, non par des raisonnemens métaphysiques, mais clairement & aux yeux, par le *méchanisme en plein des figures*, pour me servir de l'expression qu'il employe dans un écrit que j'ai vû de lui. Le sieur *Tondu* de *Nangis* est l'Auteur de l'insigne découverte de mesurer, non plus les lignes courbes en les comparant aux droites, mais les droites en les comparant aux courbes.

Le sieur *Clerget* a redressé les idées des Géometres sur le cercle. On l'avoit crû depuis l'enfance de la Géométrie, une figure plus grande qu'aucun polygone régulier inscriptible, quel que fût le nombre de ses côtés, ou suivant la Géométrie moderne, un polygone qui en a une infinité. L'Auteur dont nous parlons a trouvé que c'est un polygone d'un certain nombre de côtés déterminé. Fondé apparamment sur de nouvelles découvertes arithmétiques, il prétend qu'il y a de la contradiction dans la valeur approchée que les Géometres assignent à la circonférence circulaire; car, dit-il, comment se peut-il faire que les uns l'exprimant par $\frac{3.1415}{1.0000}$, d'autres nous disent qu'elle est $\frac{3.14159265}{1.00000000}$, & qu'enfin il y en a qui l'expriment par 20, 30 chiffres, &c. Avec une pa-

reille sagacité, l'Auteur pourra contester que la racine quarrée de 2 soit $\frac{1414}{1.000}$, à moins d'une milliéme près, parce qu'un autre affectant une exactitude supérieure, aura dit qu'elle étoit $\frac{1.4142135}{1.0000000}$, qui en differe de moins qu'une 1.0000000^e. *M. C.* enfin ne se bornant pas à la découverte de la Quadrature du cercle, a trouvé la trisection de l'angle, & sur-tout, ce qui est admirable, la grandeur du point où se touchent deux sphéres inégales. Il démontre aussi, à l'aide des principes féconds dont il est l'inventeur, que la terre ne peut tourner autour de son axe & dans son orbite, sans une absurdité palpable.

Il m'auroit été facile de grossir cette liste, si j'avois donné le moindre soin à rechercher ces écrits dignes de l'oubli où ils tombent, après avoir quelquefois amusé le public par leur singularité & la confiance de leurs Auteurs; mais je croirois avoir à me rendre compte à

moi-même d'un tems si mal employé, & je craindrois d'encourir le blâme des Géometres, si je leur présentois un plus grand nombre de ces objets, qui ont à peine auprès d'eux le mérite du ridicule.

CHAPITRE V.

Addition, contenant l'histoire de quelques autres problêmes fameux en Géometrie, comme ceux de la duplication du cube ou des deux moyennes proportionnelles, & de la trisection de l'angle.

I. L'Impression de cet Ouvrage étoit fort avancée, lorsque des personnes aux avis desquelles je défere, m'ont conseillé de profiter de l'occasion présente, pour traiter historiquement ces deux problêmes, qui le cédent peu en célébrité à celui de la Quadrature

du cercle. Je me suis déterminé sans peine à ce nouveau travail, dans la vûe de l'utilité qui peut en être le fruit. On ne voit en effet que trop de personnes malheureusement obstinées à la recherche des deux moyennes proportionnelles, ou de la trisection de l'angle, sans avoir jamais examiné & connu la nature de ces questions. Ce chapitre, indépendamment qu'il contient un morceau assez curieux de l'histoire de la Géométrie, m'a paru propre à les instruire & à les desabuser; elles y verront qu'elles s'occuppent infructueusement à rechercher, ou ce qui est déja trouvé, ou ce qui est impossible. Je m'explique, ces problêmes sont résolus autant qu'ils peuvent l'être : en ce sens, y travailler c'est chercher ce dont on est déja en possession; mais prétendre les resoudre par la régle & le compas seulement, c'est-à-dire par de simples intersections de lignes droites & circulaires, c'est s'obstiner à une recherche vaine & impoſſible. Cette vérité n'eſt aujourd'hui ſujette à aucune conteſtation parmi les Géometres, & l'on s'attachera plus bas à la bien prouver. J'entre en matiere & je commence par la duplication du cube.

II. Il s'agit dans cette premiere queſtion de trouver un cube, ou plus généralement un ſolide quelconque, préciſément double ou en raiſon donnée, avec un ſolide ſemblable. Les Géometres apperçurent bientôt que cela ſe réduiſoit à déterminer les deux moyennes proportionnelles continues entre deux lignes données. *Hippocrate de Chio* fut, dit-on, l'auteur de cette remarque; elle ſuit de cette propriété ſi connue des progreſſions géométriques, que le quarré du premier eſt au quarré du ſecond, comme le premier au troiſiéme; le cube du premier à celui du ſecond, comme le premier au quatriéme, &c. c'eſt-à-dire qu'en général la puiſſance du premier terme déſignée par

l'expoſant m, eſt à la puiſſance ſemblable du ſecond, comme le premier terme à celui dont le rang dans la ſuite eſt expoſé par $m + 1$. Ainſi la ligne A étant le côté d'un cube propoſé, la premiere des deux moyennes continues entre A & m, A ſera le côté d'un cube multiple du premier, comme m l'eſt de l'unité. Ce qu'on vient de dire des côtés d'un cube s'applique aux côtés homologues des ſolides ſemblables; il ſuffit pour le voir d'être initié dans la Géométrie.

III. Tout le monde ſçait la maniere dont on raconte l'origine du problême de la duplication du cube; c'eſt en Géométrie un trait auſſi fameux que celui de l'hecatombe immolée par *Pythagore*. Si l'on s'eſt moqué (*a*) avec juſtice de ce prétendu ſacrifice, qui n'eſt compatible ni avec les facultés d'un philoſophe, ni avec les dogmes qu'enſeignoit celui de Samos, on ne doit pas plus

(*a*) *Ciceron. Tuſculan.*

d'égards à l'hiſtoire qu'on fait du problême des deux moyennes proportionnelles. Je ne répéterai donc pas ici ce qu'on trouve dans tant d'autres endroits, la fable de cette divinité bizarre, qui demandoit un autel préciſément double de celui qu'elle avoit, & qui fit continuer la peſte qui ravageoit l'Attique, juſqu'à ce qu'on l'eut ſatisfaite. *Eratoſtenes* donne à ce problême célebre une origine moins brillante. Un certain tragique, dit-il, avoit introduit ſur la ſcene *Minos* élevant un monument à *Glaucus*, ſes entrepreneurs lui donnoient cent palmes en tous ſens; mais le Prince, ſur l'inſpection de l'ouvrage, qui ne répondoit pas à ſa magnificence, ordonnoit qu'on le fît double: de là, ajoute-t-il, quelques-uns prirent ſujet de demander aux Géometres comment ils exécuteroient une pareille volonté? Ils tenterent la queſtion de bien des manieres, tâchant de conſtruire un cube double d'un autre, juſqu'au

tems d'*Hippocrate*, qui leur enſeigna qu'elle ſe réduiſoit à l'invention des deux moyennes proportionnelles continues. Dans la ſuite l'oracle de *Delphes* ayant demandé qu'on doublât l'autel du dieu qui y préſidoit, les entrepreneurs voulant exécuter cet ordre, furent obligés de conſulter l'école platonicienne, qui faiſoit une étude ſpéciale de la Géométrie. Telle eſt ſuivant *Eratoſtenes*, la maniere dont le problême de la duplication du cercle ſe préſenta la premiere fois aux Géometres, & dont il leur fut propoſé de nouveau, après en avoir été, ce ſemble, oublié pendant quelque tems.

Mais quelle que ſoit l'occaſion qui les engagea dans cette recherche, il eſt certain qu'elle avoit acquiſe une grande célébrité dès le tems de *Platon*. *Valere Maxime* raconte au reſte un trait fabuleux, quand il dit que ce Philoſophe renvoya à *Euclide* les députés qu'on lui avoit adreſſés, comme au plus habile

Géometre de la Grece ; comment cela pourroit-il ſe ſoutenir, puiſqu'il eſt certain qu'*Euclide* le Géometre ne floriſſoit qu'un demi-ſiécle après *Platon*, & que le Philoſophe de *Megare* qui porta le même nom, ne s'occupoit que de ſophiſmes ? Quelques-uns ont ſoupçonné qu'il falloit lire *Eudoxe* ; il eſt je crois plus ſûr de traiter toute l'hiſtoire de fable.

IV. L'école platonicienne fournit pluſieurs ſolutions du problême de la duplication du cube. Platon en donna d'abord une fort ſimple, & qui n'employe que les moyens de la Géométrie élémentaire ; il eſt vrai qu'elle exige un tâtonnement, & l'uſage de quelque inſtrument autre que la régle & le compas, ce qui n'eſt point admis dans la rigueur géométrique. Ce défaut que le chef des Géometres ne chercha pas à éviter, nous donne lieu de penſer qu'il n'eut en vûe que la facilité de l'exécution, & qu'il ſacrifia à cet avantage réel une délicateſſe

licateſſe ſuperflue. Voici en ſubſtance le procédé de Platon. Si l'on a deux triangles rectangles, comme *A C D*, *C D E* (*fig.* 25.) appuyés ſur les deux baſes perpendiculaires l'une à l'autre *A D*, *C E*, les lignes *A B*, *B C*, *B D*, *B E* ſont en proportion continue. Ayant donc diſpoſé *A B*, *B E*, les deux extrêmes données à angles droits, il s'agit de tirer des points *A*, *E* les paralleles *A C*, *E D* juſques aux prolongemens de *A B*, *C B*, & de faire qu'en même temps les deux angles en *C* & *D* ſoient droits. Pour exécuter cela avec plus de facilité, Platon imagina un inſtrument compoſé d'une baſe & de deux couliſſes perpendiculaires, entre leſquelles s'avançoit une régle mobile, qui par là reſtoit toujours parallele à la baſe. Je n'en donne point la figure, parce que cette conſtruction eſt aſſez ſimple pour qu'on la concoive aiſément ſans ce ſecours. Cet inſtrument ſervoit à trouver à la fois les points *C*, *D* : pour cet effet

on écartoit la régle mobile de la baſe, & l'on faiſoit enſorte que les points *A*, *E*, étant dans ces deux paralleles, les lignes *A B D*, *E B C* paſſaſſent par les angles de ces paralleles avec l'une des couliſſes latérales. Par ce moyen les angles *C*, *D* étoient droits, & en même tems les lignes *A C*, *E D* paralleles, ce qui réſolvoit le problême. Quelques-uns variant la conſtruction de *Platon*, ſe ſervirent de deux équerres mobiles *A C D*, *C D E*, qu'on diſpoſoit de maniere que le point *A* étant dans le côté *A C*, & les lignes *B C*, *B D* paſſant par *C* & *D*, les angles des équerres, le côté *D E* rencontrât le point *E*. Ce dernier procédé a fourni à un analyſte du ſeiziéme ſiécle (*Raphael Bombelli*) l'idée de conſtruire par une voie ſemblable toutes les équations des troiſiéme & quatriéme dégrés, ce qu'il exécute fort ingénieuſement.

V. La ſolution donnée par *Platon* a, comme on voit, le défaut de ne pouvoir

être avouée par la Géométrie ; elle eſt à la vérité commode dans l'exécution, mais elle bleſſe la rigueur dont cette ſcience ſe fait gloire. *Architas* en donna une autre qui a un défaut tout à fait contraire ; celle-ci eſt uniquement intellectuelle, d'ailleurs elle eſt fort ſatisfaiſante pour l'eſprit, & l'on peut en concevoir une idée avantageuſe du génie de ſon inventeur. Afin d'abréger je me contenterai de l'indiquer. *Architas* imagine ſur la ſurface d'un cylindre droit une ligne courbe, décrite par l'interſection continuelle de cette ſurface, avec la circonférence d'un demi-cercle qui ſe meut d'une certaine maniere ; enſuite il fait rencontrer cette ligne courbe par une ſurface conique, ce qui donne un point d'où dépend la ſolution du problême. Au reſte, comme je l'ai déja dit, quelqu'ingénieux que ſoit ce procédé, il eſt tout pour l'eſprit, la pratique n'en ſçauroit tirer aucun ſecours.

VI. Ceux qui connoiſſent peu l'ancienne Géométrie, ſe perſuadent ordinairement que la vraie ſolution de ce problême eſt d'une date moderne, & que *Deſcartes* en a le premier dévoilé le principe. Il eſt vrai qu'il l'a beaucoup perfectionnée, mais les Anciens l'avoient déja ébauchée dès le tems de *Platon*. Nous avons deux ſolutions d'un Géometre contemporain, & diſciple de ce Philoſophe, qui employent les ſections coniques; dans l'une ce ſont deux paraboles, dans l'autre une hyperbole entre les aſymptotes combinée avec une parabole; ce Géometre eſt *Menechme*, frere de *Dinoſtrate*, à qui un vers d'*Eratoſtenes* ſemble attribuer l'invention des ſections coniques : ſes deux ſolutions ſont trop remarquables pour ne les pas rapporter ici, je les expoſerai en ſuivant la méthode analytique dont il ſe ſervit apparemment pour y parvenir.

Je ſuppoſe que les extrêmes données ſoient A & D, & les deux moyennes

cherchées B & C; le quarré de B ſera donc égal au rectangle de $A \times C$, à cauſe de la proportion continue qui régne entre A, B, C; par conſéquent la ligne B ſera l'ordonnée d'une parabole, dont A eſt le parametre & C l'abciſſe. Soit donc décrite ſur l'axe AC indéterminée, une parabole ABb (*fig.* 26.), les lignes BC ſeront quelques-unes des coordonnées BC, AC, ou bc, Ac, ou &c. mais B, C & D étant continuement proportionnelles, le quarré de C doit être égal au rectangle de $B \times D$, ou l'abciſſe AC cherchée de la premiere parabole doit être telle que ſon quarré ſoit égal au rectangle de BC, par la ſeconde des extrêmes données. AC étant donc encore conſidérée comme abciſſe, BC ſera l'ordonnée d'une parabole extérieure ABb, dont la propriété eſt, comme l'on ſçait, d'avoir les quarrés de ſes abciſſes conſtamment égaux aux rectangles de ſes ordonnées par une ligne conſtante; au reſte cette parabole

extérieure n'eſt que la parabole ordinaire décrite ſur un axe AD, perpendiculaire au premier. Ainſi l'interſection de ces deux paraboles donnera la ſolution deſirée, puiſque par ce moyen BC, comme ordonnée de la premiere parabole ABb, ſera telle que $A : BC :: BC : AC$; & qu'en vertu de la ſeconde ABb, on a BC ou $AD : BD :: BD$ ou $AC : D$; d'où il eſt manifeſte que A, BC, AC & D ſont en proportion continue.

Une analyſe facile conduit de même à la ſeconde ſolution de *Menechme*; car puiſque les quatre lignes A, B, C, D, ſont en proportion, le rectangle de $B \times C$ eſt égal au rectangle conſtant & donné de $A \times D$. Les lignes cherchées B, C, ſont donc les coordonnées d'une hyperbole entre les aſymptotes ODI, où les rectangles, comme $CIAB$, $ciaB$, ſont tous égaux entr'eux & au rectangle de $A \times D$. Or à cauſe de la proportion continue, le quarré de B eſt égal au

rectangle de $C \times A$: d'où il ſuit que B eſt l'ordonnée d'une parabole dont le parametre eſt A, & l'abciſſe C. Ayant donc pris BA pour axe, on voit que décrivant la parabole dont le parametre eſt A, elle coupera l'hyperbole à l'endroit cherché D, qui donnera les deux moyennes ED, BE. En effet à cauſe de la parabole $A : ED :: ED : BE$, & ces mêmes lignes ED, BE appartenant à l'hyperbole, donnent $ED \times BE = A \times D$, c'eſt-à-dire $A : ED : BE : D$; d'où ſe conclut aiſément la proportion continue.

Quoique j'aie donné des éloges à ces deux ſolutions, je n'ignore cependant pas qu'elles ont un défaut aſſez conſidérable, défaut qui n'a pas échappé aux Anciens même. Il conſiſte en ce qu'elles employent deux ſections coniques, tandis qu'une ſeule combinée avec un cercle pouvoit ſuffire. C'eſt en quoi les *Deſcartes*, les *Sluſes*, &c. ont beaucoup perfectionné la méthode des lieux géométriques. Les Anciens employoient ordinairement les premiers qui se présentoient, & ce n'étoient pas toujours les plus simples; les Modernes ont enseigné à choisir les plus commodes : mais cela doit peu diminuer le mérite de l'Auteur de cette ingénieuse invention; auroit-on droit d'attendre qu'il lui eût donné tout à coup la perfection dont elle étoit susceptible ? La Géométrie ancienne nous en fournit d'autres exemples où il n'y a rien de pareil à redire.

VII. *Eudoxe* de *Cnide* fut un des Géometres contemporains de *Platon*, qui travaillerent à la duplication du cube; il ne reste plus de traces de sa solution, graces à la mauvaise humeur d'*Eutocius*, (*a*) qui la déprime fort & nous la represente comme pitoyable. Cependant on en pensera bien autrement si l'on a quelqu'égard au témoignage

(*a*) *Comm. in Archimed. de sphæra & cylindro.*

d'*Eratostenes* (*a*), qui en parle avec autant d'éloge qu'Eutocius affecte de mépris pour elle, & le jugement de ce Philosophe & Géometre célébre doit l'emporter sur celui du commentateur d'*Archimede*, venu près de dix siécles après *Eudoxe*, & qui n'a peut-être vû qu'un manuscrit altéré. Cet endroit d'*Eratostenes* nous apprend que le Géometre de Cnide avoit imaginé certaines courbes particulieres pour la résolution de ce problême, & que ces courbes étoient différentes des sections coniques, puisqu'il parle plus haut de ces dernieres au sujet de *Menechme*. Les courbes inventées par Eudoxe avoient probablement de la ressemblance avec celles que le même motif a fait imaginer à divers Géometres, tels que le Pere *Griemberger* (*b*), *Renaldini* (*c*), qui nomme les siennes *Mediceæ*, comme

(*a*) *Ibidem.*
(*b*) *Villalpandi, descriptio templi Salomonis.*
(*c*) *De resolutione & comp. mathem.* tom. 3.

si une Maison illustre avoit à tirer quelque nouvel éclat d'une courbe géométrique; *Barrow* (*a*), qui fort sagement ne donne aucun nom aux siennes, &c.

VIII. Le problême des deux moyennes proportionnelles continua d'être un sujet sur lequel s'exercerent les plus habiles Géometres. *Eratostenes*, dont nous avons parlé si souvent, le résolut par une voie nouvelle, & qu'il est aisé d'appliquer à trouver tant de moyennes proportionnelles qu'on voudra; il n'y employe que des lignes droites, aussi est-il obligé de recourir à un instrument autre que la régle & le compas. Celui qu'il propose est composé de plusieurs planchettes mobiles, qui coulent les unes sur les autres parallelement à elles-mêmes : je ne le décris pas afin d'abréger, on peut le voir dans *Eutocius* ou dans *Pappus* (*b*). *Eratostenes* écrivit sur cela un petit traité intitulé *Mesolabium*,

(*a*) *Lectiones Geometricæ.*
(*b*) *Collectiones Mathem.* l. 3.

qu'il adressa au Roi *Ptolomée*, & qu'*Eutocius* nous a conservé, de même que les vers par lesquels il célébra son invention. Ces vers cependant ne la préserverent pas des railleries de *Nicomede*; celui-ci s'en mocquoit comme d'une chose qui n'étoit ni trop subtile ni trop conforme à l'esprit de la Géométrie; mais il y a un peu trop de rigueur dans cette critique. La solution d'*Eratostenes*, quoique méchanique, ne laisse pas d'être assez ingénieuse.

IX. Après ces solutions viennent celles d'*Appollonius*, d'*Heron* d'*Alexandrie* & de *Philon* de *Byzance*; je les joins ensemble, parce qu'elles ne sont proprement que la même, variée au gré de ces Géometres. Suivant l'un d'eux, après avoir fait des deux lignes données AC, CB le rectangle AB (*fig.* 28), & partagé la diagonale AB en deux également en R, il faut décrire de ce point un arc de cercle GIF, tel que la ligne GF menée par ses intersections *G*, *F* avec les côtés *C A*, *C B* prolongés passe par l'angle *D*; alors les lignes *B F*, *A G* sont les moyennes qu'on cherche. Cette construction revient à celle de décrire sur la ligne *A B* un demi-cercle, & de tirer *F D G*, de sorte que les segmens *F E*, *D G* soient égaux : on peut satisfaire en tâtonnant, à ces conditions, & ainsi le faisoit *Philon* de *Byzance*, & *Appollonius* même, au rapport du commentateur d'*Archimede*. Cet écrivain attribue à *Heron* d'Alexandrie, une solution rigoureusement géométrique, par le moyen de l'hyperbole. Ce Géometre en décrivoit une par le point *D*, entre les asymptotes *C A*, *C B*; & son intersection avec le demi-cercle *A D B* déterminoit le point *E*, par lequel il falloit mener la ligne *F D G*. Cette solution, il faut le remarquer, est une des plus simples & des plus élégantes ; mais on doit en faire honneur à *Appollonius*. Je me fonde en pensant ainsi, sur le témoignage de

Pappus (*a*), qui dit qu'*Appollonius* résolut le problême par les sections coniques, & qui attribue à *Heron* celle qu'*Eutocius* donne à cet autre : l'ouvrage d'*Heron* sur les machines de guerre, confirme le rapport de *Pappus*.

X. De toutes les solutions anciennes du problême de la duplication du cube, celle de *Nicomede* est une des plus ingénieuses (*b*) ; ce Géometre le réduisit par une analyse très-subtile, à celui d'inférer dans un angle comme *a D b*, une ligne droite de grandeur donnée,

(*a*) *Collect. Mathem.* l. 3. p. 4.

(*b*) Nicomede étoit un Géometre dont l'âge paroît devoir être fixé vers le second siécle avant J. C. car on sçait d'abord qu'il étoit postérieur à *Eratostenes*, qui fleurit dans le cours du troisiéme, puisque, suivant *Eutocius*, il se mocquoit de sa solution. D'un autre côté *Proclus* nous assure qu'il fut l'inventeur des conchoïdes, sur lesquelles *Geminus*, contemporain ou peu postérieur à *Hipparque*, écrivit au long dans ses *Enarrationes Geometricæ* que nous n'avons plus ; ces deux circonstances fixent l'âge du Géometre dont nous parlons, entre *Eratostenes* & *Hipparque*, à peu près vers l'an 180 avant l'ere chrétienne.

qui étant prolongée passe par un point assigné *P*; & comme cela ne se peut exécuter généralement par la Géométrie plane, il imagina pour y suppléer sa conchoïde, avec un instrument propre à la décrire par un mouvement continu. La propriété de cette ligne *a A a* (*fig.* 29.) est telle que *b B b* étant son axe, toutes les lignes *A B*, *a b*, *a b* tirées des points de la courbe vers le pole *P*, sont égales entr'elles. La figure 30 représente l'instrument dont la construction est assez aisée à appercevoir pour m'en épargner l'explication. On voit facilement que cette ligne est propre par sa génération, à satisfaire au problême auquel *Nicomede* rappelloit celui des deux moyennes proportionnelles ; car soit un angle *a D b*, où il s'agit d'inférer la ligne *a b*, donnée de grandeur & de sorte qu'étant prolongée, elle passe par le point *P* : qu'on décrive sur l'axe *b D b b*, &c, une conchoïde dont le pole soit *P*, son intersection

avec le côté *D a* donnera évidemment le point *a*; d'où doit être tirée la ligne *a b* vers le point *P*.

Cette construction préliminaire étant supposée, voici comment *Nicomede* résolvoit le problême des moyennes proportionnelles. Il faisoit d'abord un rectangle des lignes données *A C*, *C B*, & il les divisoit chacune en deux également aux points *I*, *L*; il menoit ensuite la ligne *D I H*, & ayant élévé la perpendiculaire *L K*, telle que *B K* fût égale à *C I*, il tiroit *K H*, & sa parallele *B S*; c'étoit dans l'angle *F B S* qu'il falloit adapter la ligne *S F* égale à *C I* & passant par *K*, ce qui déterminoit le point *F*; de sorte qu'en tirant *FDG*, les lignes *B F*, *A G* étoient les moyennes cherchées.

A l'égard de la démonstration, il donnoit la suivante. J'ai crû devoir la rapporter ici, parce qu'elle est assez composée pour ne pas se présenter facilement, même à des Géometres habiles.

La ligne BC, difoit-il, étant partagée en deux également au point L, donne le rectangle de $BF \times FC$, plus le quarré de BL égal au quarré de FL : ajoûtant donc de part & d'autre le quarré de LK, on a $CF \times BF + LB^2 + LK^2$, ou $CF \times BF + BK^2 = LF^2 + LK^2 = KF^2$; mais $GA : AC :: BC : BF$: donc $GA : \frac{1}{2} AC$ ou $AI :: 2\,BC$ ou $BH : BF$. Conféquemment en compofant, $GI : AI :: HF : SF :: KF : SF$, d'où il fuit que GI eft égal à KF, puifque AI eft égal à SF. Maintenant $GI^2 = CG \times GA + AI^2$; donc $CG \times GA + AI^2 = CF \times BF + BK^2$; parce qu'on a montré plus haut que ces derniers rectangles étoient égaux à KF^2 : donc ôtant ce qu'ils ont de commun, fçavoir, AI^2 & BK^2, égaux par la conftruction, reftera $CG \times GA = CF \times BF$; d'où l'on tire la proportion $CG : CF :: BF : GA$: or $CG : CF :: DB$ ou $AC : BF$: donc $AC : BF :: BF : GA$; mais $AC : BF :: GA : AD$;

par conféquent ces quatre lignes font en proportion continue.

Cette démonftration fait voir la raifon du procédé d'*Appollonius*, d'*Heron* & de *Philon* ; ils avoient réduit le problême à faire enforte que $CG \times GA$ fût égal à $CF \times BF$: or en décrivant un cercle $ADBC$, le premier de ces rectangles eft égal à $GE \times GD$, & le fecond à $FD \times FE$; il falloit donc que ces derniers fuffent égaux, ce qui arrivera quand GD & EF feront égales, & que demandoient en effet *Philon* & *Heron* d'*Alexandrie* : l'autre conftruction attribuée à *Appollonius*, fuit affez vifiblement de celle-ci, pour me difpenfer d'une explication.

La folution de *Nicomede* a l'avantage de réduire précifément à la même difficulté l'invention des deux moyennes proportionnelles & la trifection de l'angle ; il eft fort vraifemblable que ce fut l'objet qu'il fe propofa, ou le hazard le fervit bien heureufement : quoiqu'il

en foit, comme l'on a montré depuis que toutes les équations des troifiéme & quatriéme degré fe réduifent à ces deux problêmes, on voit déja que la conchoïde peut fervir à les conftruire avec la plus grande facilité. *Viete* en avoit fait la remarque; mais perfonne n'en a tiré meilleur parti que M. *Newton*. Cet illuftre Géometre a donné pour chaque forme d'équation du troifiéme degré, la pofition du pole, & la grandeur de l'angle & de la ligne à y inférer. D'un avis différent de *Defcartes*, dont il difcute les motifs de préférence pour les fections coniques, il établit que la conchoïde eft la courbe la plus commode pour conftruire les équations folides ; les raifons que M. *Newton* en apporte dans fon *Arithm. univerf.* méritent d'être confidérées.

XI. Il ne refte prefque plus à parler que de la folution de *Diocles* (*a*) ; celle-

ci eft encore une des plus remarquables. A l'imitation de *Nicomede*, ce Géometre imagina une courbe particuliere, fçavoir, celle que nous appellons aujourd'hui la cyffoïde, nom qui, pour le remarquer en paffant, paroît avoir été commun à une claffe entiere de courbes chez les Géometres anciens.

Pappus que je crois antérieur à *Diocles*, avoit réduit le problême des deux moyennes proportionnelles à la conftruction fuivante. Ayant difpofé à angles droits les lignes DC, CL, & tiré DLO (*fig.* 31.), il décrivoit du centre C le demi-cercle ABD; après quoi il s'agiffoit de trouver fur la prolongation de DL un point G, tel que menant la ligne AGH, les fegmens GO,

(*a*) *Diocles* eft un Géometre dont l'âge n'eft point connu. Je conjecture néanmoins qu'il vivoit plus tard que *Pappus*, qui eft du quatriéme fiecle, & je me fonde fur le filence de cet écrivain, qui ne dit rien de fa folution, quoiqu'il employe le même principe. *Eutocius* qui vivoit vers l'an 540, cite *Diocles* & fon livre *de Pyriis*, des machines à feu ; ce qui donne lieu de croire qu'il étoit un Ingénieur.

OH fussent égaux. La ligne CO étoit la premiere des moyennes cherchées; en voici la démonstration, qui nous donnera en même tems la propriété principale de la cyssoïde.

Les lignes GO, OH étant égales, il est évident que CF, CK le seront aussi, & par conséquent KH & FE : or $AK : KH$ ou $FE :: AF : FG$; & d'un autre côté, à cause des triangles semblables, HKD, AKH, AGF, $KH : KD$ ou $EF :: AF$, $AF : FG$. Donc FE, AF, FG sont en proportion continue; par conséquent les quatre lignes AK ou $DF : FE\ AF$, FG sont continuement proportionnelles, & FE, la premiere des deux moyennes entre AK ou DF & FG; mais comme c'est entre CD, CL qu'on cherche les moyennes proportionnelles, & que ces deux lignes sont en même raison que DF, FG, il s'ensuit qu'ayant trouvé la premiere des moyennes entre ces dernieres, il n'y aura plus qu'une simple analogie à faire

pour déterminer celle qui convient à CD, sçavoir celle-ci, comme DF à FE, ou AK à KH; ainsi CD ou AC à CO : par conséquent CO est la premiere des moyennes cherchées.

On voit donc que dans toutes les différentes positions de la ligne DLF, ou de AFH, le point G qui résoud le problême, est tellement situé, que $GO = OH$. De là *Diocles* prit occasion de décrire la courbe où se trouvent tous ces points, au lieu de les chercher méchaniquement. Alors la premiere propriété de cette courbe est, qu'ayant tiré une ordonnée quelconque EGF, les lignes DF, FE, AF, FG sont en proportion continue. Il est aisé d'en faire l'application au problême des deux moyennes; car ayant mis les extrêmes à angles droits comme ci-dessus, décrit le cercle ABD, & la cyssoïde $AgGB$, la ligne DL prolongée la rencontre en G; d'où tirant AGH, qui coupe CB en O, la ligne CO est la

premiere des moyennes. La construction de *Sporus* differe si peu de celles de *Pappus* & de *Diocles*, qu'on a lieu de s'étonner qu'*Eutocius* ait pris la peine de la developper au long; elle ne méritoit pas ce détail.

Je ne dois pas omettre une remarque qui releve beaucoup la solution de *Diocles*; c'est qu'on peut décrire sa cyssoïde par un mouvement continu. M. *Newton* en a donné le moyen, & il ne faut pour cela qu'une simple équerre. Le point P éloigné de l'axe CR de la quantité du diametre AD ayant été pris pour pole, qu'on ait une équerre dont le petit côté soit égal à AD, & l'autre indéfini; si on la fait mouvoir de maniere que ce dernier côté étant appliqué au point P, l'extrémité du petit côté R coule le long de l'axe ou régle CR; le point s qui le partage en deux également, décrira la cyssoïde.

XII. Le problême de la trisection de l'angle est de la même nature que le

précédent; son affinité avec lui m'engage à exposer d'abord les solutions qu'il reçut dans l'antiquité; je viendrai ensuite aux recherches que l'un & l'autre ont occasionnées parmi les Modernes.

Les premiers moyens qui se présentent pour parvenir à la trisection de l'angle, sont les suivans, & ils sont si naturels qu'il est à présumer qu'ils ne furent pas long tems ignorés des Anciens. Si BAC (*fig* 32) est l'angle proposé, après avoir abaissé la perpendiculaire BC, formé le parallelogramme CG & prolongé CA indéfiniment, il s'agit de tirer la ligne BDE de telle maniere que la partie DE soit égale à deux fois la diagonale AB; alors l'angle DAC est le tiers de BAC. Les Géometres les moins versés sont en état d'en appercevoir aussi-tôt la démonstration. Il étoit encore aisé de remarquer, que si d'un point C du demi-cercle ACD (*fig* 33) on tire CDE, de sorte que la partie DE interceptée entre la circonférence & le diametre prolongé, soit égale au rayon, on aura encore l'angle DEF égal au tiers de ABC.

On s'obstina sans doute long-tems à chercher la solution de l'un & de l'autre de ces problêmes par la Géométrie ordinaire, avant que de s'appercevoir qu'ils étoient d'une difficulté supérieure aux moyens que fournit cette Géométrie. Après un grand nombre de tentatives infructueuses, ou qui n'avoient produit que des paralogismes, on se tourna enfin du côté des sections coniques & de diverses autres courbes. *Pappus* (a) nous rapporte la maniere ingénieuse dont quelques Géometres employerent l'hyperbole pour résoudre le premier de ces problêmes auxquels on avoit réduit celui de la trisection. Je vais l'expliquer en employant l'analyse qui servit à la trouver.

Que DE soit la ligne cherchée, & que l'on acheve le parallelogramme

(a) *Coll. Mathem. l. 4. prop.* 31, 32.

GDEF

$GDEF$, on voit d'abord que $EC : CB :: BG : GD$ ou EF; conséquemment $EF \times EB = AC \times CB$; d'où il suit que le point F est dans une hyperbole entre les asymptotes CH, CE, & passant par le point G; mais DE est donnée de grandeur, par conséquent aussi son égale GF; ce qui fait voir que le point F est aussi dans la circonférence d'un cercle, dont C est le centre & CF le rayon; il est donc dans l'intersection commune de l'hyperbole & du cercle: ce qui le rend aisé à déterminer, puisqu'il n'y a qu'à décrire une hyperbole par le point G, entre les asymptotes CE, CH, & tracer un cercle du centre C au rayon CF égal à $2AB$; le point où ces deux courbes se couperont, sera tel qu'abaissant l'ordonnée FE, on aura le point E qu'on cherche & la position de la ligne DE.

On peut exécuter la même chose par le moyen de la conchoïde; car il est évident que celle qu'on décrira du pole

M

P, avec les ordonnées convergentes à ce pole de la longueur qu'on demande, coupera la ligne CE au point cherché; ainsi cette courbe sert également à résoudre le problême de la trisection & celui des deux moyennes proportionnelles.

A l'égard de la seconde construction que représente la figure 33, on y satisfera aussi aisément en employant une conchoïde, non pas à la vérité celle dont on vient de parler, que les Anciens nommoient la *premiere*; mais la *seconde*, qui se décrit au dessous de l'axe, au lieu que l'autre est décrite au dessus. Il est à propos de remarquer ici qu'on ne doit point regarder ces deux conchoïdes comme des courbes différentes; elles sont les deux branches de la même courbe: c'est ainsi que les hyperboles opposées forment ensemble l'hyperbole entiere, avec cette différence que ces dernieres s'éloignent de plus en plus de leur axe commun, au

lieu que les branches de la conchoïde s'en approchent de plus en plus.

XIII. Les Anciens donnerent une autre solution du problême de la trisection de l'angle, où ils employerent l'hyperbole d'une maniere différente de celle qu'on a fait connoître un peu plus haut; c'est encore *Pappus* (a) qui la rapporte: elle est si élégante qu'elle mérite qu'on en fasse mention; c'est une suite de cette belle propriété de l'hyperbole décrite entre des asymptotes, faisant un angle de 120°; sçavoir, que prenant sur son axe une abcisse BA, égale à la moitié de l'axe transverse DB (*fig.* 34.), & tirant de ce point A & de l'autre extrémité de l'axe D, deux lignes à un point quelconque E, l'angle EAD est toujours double de EDA; par conséquent si l'on décrit sur la ligne DA un arc quelconque, la partie AE en sera le tiers. Il est aisé de faire l'application de ceci à partager en trois éga-

(a) *Coll. Mathem. l. 4. prop.* 34.

lement un angle ou un arc quelconque ; il n'y aura qu'à décrire sur la ligne $D A$ l'arc qui mesure l'angle donné $D C A$, alors $E C A$ en sera le tiers.

Il y a ici une particularité digne d'être observée ; c'est que non seulement la même hyperbole retranche l'arc $A S$, égal au tiers de $A S D$, le restant du premier au cercle, mais que l'hyperbole opposée coupe le même arc dans un point E, tel que l'arc $A C E$ est le tiers de la circonférence entiere augmentée du petit arc $A E D$. Les Anciens ne paroissent pas avoir fait cette derniere remarque, elle auroit pû les étonner. A l'égard des Modernes, ils n'y trouveront aucun sujet de surprise ; ils sçavent que le problême conduit nécessairement à une construction qui doit donner trois valeurs différentes à la corde cherchée.

XIV. Plusieurs courbes que les Anciens considérerent, semblent avoir été imaginées dans la vûe de servir à ce

problême, du moins envisagé d'une maniere plus générale : telles sont la quadratrice & la spirale, dont la premiere n'a pas une date moins reculée que *Platon*. En effet, *Dinostrate* son inventeur, étoit un des Géometres de l'école platonicienne. On sçait que cette courbe est formée par l'intersection continuelle d'un rayon qui se meut d'un mouvement angulaire, & qui parcourt le quart de cercle, tandis qu'une ligne toujours parallele à elle-même, partant d'un même terme, se meut de la hauteur du rayon ; ainsi le mouvement angulaire de ce rayon est toujours mesuré par une ligne droite, ce qui fait qu'il est toujours facile de le diviser, non seulement en parties égales, mais encore suivant un rapport quelconque donné, fût-il irrationnel ; il ne faudra pour cet effet que diviser cette ligne droite de la même maniere, ensuite tirer les rayons par les points de la quadratrice qui répondent aux points de

division sur l'axe. La spirale ordinaire a évidemment la même propriété ; c'est aussi une suite de sa génération. Toutes les courbes enfin qui sont décrites par une combinaison de mouvemens rectilignes & circulaires, courbes dont la Géométrie moderne présente un grand nombre, jouissent du même avantage : mais il est à remarquer que ces courbes ne résolvent le problême que par une espece de pétition de principe ; il faut les supposer entierement décrites, & pour les décrire en entier, il faudroit avoir ou la Quadrature indéfinie du cercle, ou la solution du problême général de diviser un angle en raison quelconque ; par conséquent les solutions qu'elles donnent ne sont que des spéculations, dont la pratique ne peut tirer tout au plus que des moyens d'approcher de la vérité.

XV. Les deux problêmes dont on vient de traiter l'histoire chez les Anciens, n'ont pas moins occupé les Mo-

dernes. Plusieurs de ces derniers se sont en effet exercés à en trouver de nouvelles solutions, dans le goût de celles qu'on vient de voir, c'est-à-dire dont les unes consistent dans quelque méchanisme commode & facile, les autres dans l'emploi de quelque courbe particuliere. M. *Viete* (*a*) en a proposé quelques-unes de la premiere espece, & après lui M. *Huygens* en a donné un assez grand nombre dans un ouvrage qu'il publioit fort jeune en 1654 (*b*). M. *Viviani* a construit ces problêmes de diverses manieres élégantes & nouvelles dans plusieurs ouvrages (*c*). Le P. *Griemberger* (*d*) a imaginé quelques courbes particulieres pour servir à la résolution du problême des deux moyen-

(*a*) *Suppl. Geom. Variorum de rebus math. respons. l. 8. c. 5.*

(*b*) *Illustrium quorumd. problem. constructiones.*

(*c*) *Divin. in Aristæum. Solutio. probl. D. Comiers.*

(*d*) *Templi Salom. descriptio Thomæ Villalpandi.*

nes proportionnelles, en quoi il a été imité par *Renaldini* (*a*) & *Barrow* (*b*). Comme la plupart de ces inventions, quoique belles & ingénieuses dans la théorie, n'ont pas une utilité bien marquée, ou me conduiroient trop loin si j'entreprenois de les expliquer, je me contenterai de les avoir citées, afin de passer à ce que mon sujet me présente de plus intéressant.

Le P. *Ceva* (*c*) a proposé un compas de trisection, qui est fondé sur ceci. Soit l'angle BAD (*fig.* 35), & que les côtés AB, AD, BC, DC, de même que CF, CE, soient tous égaux entr'eux, l'angle FCE sera triple de BAD, & si l'on continuoit cette progression de lignes égales, on auroit des angles quintuples, septuples du premier; ainsi la construction de ce compas consiste en deux longues branches FA, AE mo-

(*a*) *De resol. & comp. Mathem. t.* 3.
(*b*) *Lectiones Geom.*
(*c*) *Act. Erud. ann.* 1695.

biles, auxquelles sont attachées par des charnieres BF, DE, les petits côtés qui se meuvent sur une charniere commune en C. On a revendiqué dans les mêmes Journaux, un instrument tout à fait semblable à M. *Tchirnausen*.

XVI. Quoique les Anciens paroissent avoir résolu ces deux problêmes autant qu'ils peuvent l'être, puisque ne pouvant les construire que par des courbes d'un genre supérieur au cercle, ils y ont employé les sections coniques, la conchoïde &c. de diverses manieres très-ingénieuses; cependant on peut dire que ce n'est qu'à la Géométrie moderne qu'est dûe leur solution complette. Ce sont en effet seulement les lumieres qu'elle nous fournit, qui nous mettent en état de faire voir qu'ils sont d'une nature à ne pouvoir être généralement résolus par la Géométrie plane, ce qui étoit un point nécessaire à démontrer avant de cesser ses efforts pour y parvenir par cette voye; mais l'analyse mo-

M v

derne leve tout doute à cet égard. D'ailleurs ce que les Anciens ont donné sur ce sujet, comparé aux inventions des Géometres du dernier siécle, n'est qu'un foible jour à côté d'une grande lumiere. Nous sommes aujourd'hui en possession d'une méthode par laquelle on peut trouver d'une infinité de manieres la solution de ces problêmes, & de tous les autres de même espece.

Avant que d'aller plus loin, il est essentiel de démontrer ce que nous avons annoncé dans tant d'endroits, je veux dire l'impossibilité de construire généralement ces problêmes, sans employer de courbe plus composée que le cercle. Je vais donc tâcher de le faire avec toute la clarté dont pareil sujet est susceptible, afin que personne ne soit plus tenté d'en rechercher la solution par des voyes qui ne sçauroient y conduire.

Cette impossibilité est fondée sur la théorie des équations & la nature des

courbes géométriques; ainsi je suis obligé d'en rappeller quelques points en faveur de ceux à qui elles ne seroient pas assez présentes. Le premier est que dans toute équation, la quantité inconnue doit être représentée par autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans l'exposant de sa plus haute puissance: à la vérité il peut arriver que quelques-unes de ces valeurs soient imaginaires; mais on examinera ce cas, & on fera voir qu'il ne nuit point aux conséquences qu'on tire dans les autres.

Le second principe est, qu'une équation ne se peut construire géométriquement, c'est-à-dire par un procédé certain & qui n'est sujet à aucun tâtonnement, qu'à l'aide de deux lignes qui se puissent couper en autant de points que le dégré de l'équation comprend d'unités; en voici la raison. Construire une équation, c'est assigner par une opération générale la valeur de l'inconnue qu'elle renferme; conséquemment

M vj

lorsque cette inconnue en aura plusieurs, il faudra une construction capable de les exprimer toutes également; car cette construction n'en regarde pas plutôt l'une que l'autre, puisque les donnés sont les mêmes à leur égard, & que ce sont eux seuls qui peuvent la modifier. Il faut donc que les lignes dont l'intersection doit résoudre le problême, puissent s'entrecouper en autant de points qu'il admet de solutions différentes.

Ce qu'on vient de dire est d'une évidence suffisante, lorsque l'équation proposée a toutes ses racines réelles; mais peut-être n'en trouvera-t-on pas autant dans le cas où elle aura des racines imaginaires. Comme il y a alors quelques valeurs de moins à déterminer, il semblera qu'il n'est pas nécessaire d'employer des courbes capables de se couper en autant de points que s'il n'y en avoit aucune d'impossible.

Ce doute n'est pas destitué de fon-

dement; il se dissipera néanmoins quand on connoîtra quelle est la nature & l'emploi des valeurs imaginaires dans les équations : ces valeurs ne deviennent telles que parce que certains donnés du problême croissant ou diminuant selon les circonstances, de réelles & inégales qu'elles étoient d'abord, elles sont devenues égales, deux points d'intersections se confondant ensemble, & formant un point de contact; & qu'enfin ce point de contact disparoît lui-même, l'une des courbes ne touchant ni ne coupant plus l'autre dans cet endroit, de sorte qu'il n'y a plus d'ordonnée. Cela montre que ces racines imaginaires sont toute autre chose qu'un *merum nihil*, & qu'elles ont une sorte d'existence, en ce qu'elles désignent des intersections, que des limitations particulieres ont rendues impossibles : toutes les fois donc qu'il y en aura de cette espece dans une équation, il n'en faudra pas moins des courbes qui puis-

sent s'entrecouper en autant de points que si toutes les racines étoient réelles, afin que toutes les intersections qui auront lieu exprimant ces dernieres, celles qui viennent à manquer désignent les imaginaires.

Après l'exposition de ces principes, il est aisé de montrer qu'il est impossible de construire généralement les problêmes de la trisection de l'angle & des deux moyennes proportionnelles, par des lignes simples, comme la droite & la circulaire. Il est en effet visible que l'équation qui convient au premier est nécessairement du troisiéme degré, puisque c'est le cube de la ligne cherchée, qui égale un parallelipipede donné, & cette équation qui est de cette forme $x^3 = a^2 b$ (a & b étant les deux extrêmes), sera toujours irréductible, à moins que b ne soit un tel multiple de a, que l'exposant de ce multiple ait une racine cube, parce qu'alors

l'extraction de la racine cubique réussiroit.

A l'égard du second problême, il est pareillement nécessaire qu'il soit du troisiéme degré, & nous allons en convaincre par les remarques suivantes. Quand on propose de partager un arc AB en trois également, c'est la même question que si l'on demandoit d'inscrire dans un segment dont AE est la corde, un quadrilatere tel que $ABCD$, dont les trois côtés AB, BD, DE soient égaux; or ce problême est de telle nature qu'il est susceptible de trois cas qui conduisent absolument à la même équation; car tous les donnés & la maniere de les employer sont les mêmes, soit qu'il s'agisse d'inscrire ce quadrilatere dans le petit ou dans le grand segment (*fig.* 36, 37), & même lorsqu'il s'agira d'en inscrire un de la forme *abde* (*fig.* 36), dans le dernier, de sorte qu'on doit aboutir à la même expression. Comme je ne connois aucun livre qui démontre cette vérité, je crois qu'il est à propos de le faire ici avec quelque détail, afin de ne laisser aucun doute à ce sujet. Je pourrois sans doute m'en dispenser si je n'écrivois que pour les Géometres habiles, mais il est des endroits dans cet ouvrage qui sont particulierement destinés à l'instruction des plus médiocres.

Dans le premier cas, les triangles ABC, BAF sont semblables, puisque l'angle B est commun, & que l'angle C a pour mesure l'arc AB, tiers de ABE, tandis que l'angle A est appuyé sur les deux tiers du même arc, & a son sommet à la circonférence; ainsi $CA : AB :: AB : BF$. Ayant donc nommé le rayon r, $AE = b$, & AF ou $AB = x$, nous aurons $r : x :: x : \frac{xx}{r}$; ensuite tirant DL parallele à BC, on a $CD : DB :: DG$ ou $BF : LG$, à cause des triangles semblables CDB, DLG; c'est pourquoi $r : x :: \frac{x^2}{r} : \frac{x^3}{rr}$, qui est la valeur de LG; or $AE = AF +$

LF ou AB ou $DF + EL$ ou $EG - LG$, d'où l'on tire $b = 2x + \frac{rrx - x^3}{rr}$, ce qui donne l'équation $x^3 - 3rrx + rrb = 0$.

Qu'il s'agisse à présent d'inscrire un pareil quadrilatere dans le grand segment, on aura de même les triangles fab, acb semblables, de sorte que $\frac{xx}{r}$ sera encore ici la valeur de bf; de plus en tirant dl parallele à bf, on a les triangles ldg, fba équiangles; ce qui donne $dg : lg :: cb : bd$ ou $r : x :: \frac{x^2}{r} : \frac{x^3}{rr}$; ainsi $lg = \frac{x^3}{rr}$; enfin $Ca = af + fl - le$, c'est-à-dire $b = 2x - \frac{x^3}{rr} + x$, d'où vient l'équation $-rrb = x^3 - 3rrx$, ou comme ci-dessus $x^3 - 3rrx + rrb = 0$.

Le troisiéme cas nous fournira la même équation par une analyse tout-à-fait semblable, pourvû que nous fassions ici attention que la ligne EF ou af, ayant été nommée x, quand elle tomboit au dedans du cercle, on devra la nom-

mer $-x$, lorsqu'il faudra la prendre au dehors de D vers le côté opposé. Après cette observation dont la nécessité est évidente pour tous ceux qui sont un peu versés dans l'analyse, on remarquera que les triangles $\kappa\beta\alpha$, $\beta\alpha\varphi$ sont semblables, comme l'étoient leurs homologues dans les figures précédentes; ainsi $r : -x :: -x : \frac{xx}{r}$, qui est la valeur de $\beta\kappa$; & ayant tiré comme on a fait ci-devant $\delta\lambda$ parallele à $\beta\varphi$, on aura $\varphi\lambda = \beta\delta$ ou $\beta\alpha = -x$; par conséquent $\kappa\lambda$ sera $-2x$: de plus les triangles semblables & égaux $\gamma\varepsilon\delta$, $\alpha\beta\varphi$ donnent $\gamma\varepsilon = \alpha\varphi = -x$; enfin à cause des triangles $\beta\kappa\delta$, $\gamma\delta\lambda$ on a $\beta\kappa : \beta\delta :: \delta\lambda$ ou $\beta\varphi : \gamma\lambda$, c'est-à-dire, $r : x :: \frac{x^2}{r} : -\frac{x^3}{rr} = \gamma\lambda$; mais $\varepsilon\alpha = \gamma\lambda - \gamma\varepsilon - \kappa\lambda$ ou $b = -\frac{x^3}{rr} + 3x$, d'où nous aurons pour la troisiéme fois $x^3 - 3rrx + rrb = 0$.

Si l'on proposoit d'inscrire un semblable quadrilatere dans le petit segment,

la réponse seroit aisée. Il est visible du premier coup d'œil que cela est impossible, à moins que ce quadrilatere ne soit confondu avec AE, ou supposé en être infiniment voisin, ce qui donneroit par la plus simple analyse $x = b$; ainsi ce dernier cas ne conduit point à la même équation que les précédens, & par cette raison celle qui convient au problême de la trisection de l'angle est du troisiéme dégré & ne le passe pas.

Qu'on se rappelle maintenant les principes qu'on a établis plus haut; il est aisé d'en faire l'application aux problêmes dont nous venons d'examiner la nature. Puisque nous avons démontré qu'ils conduisent nécessairement à des équations du troisiéme dégré; il est évident qu'on ne peut les construire en n'y employant que des courbes capables de donner moins de trois points d'intersection. Ceux qui tâchent de combiner des cercles & des lignes droites pour parvenir à cette solution, perdent infructueuſement leur tems & leurs veilles.

On peut donner à cette démonſtration un tour qui la rendra encore plus propre à convaincre l'eſprit de cette impoſſibilité. Suppoſons que quelque voie particuliere eût conduit à conſtruire généralement le problême de la triſection de l'angle par la ſeule Géométrie élémentaire ; comme il eſt d'ailleurs démontré qu'il dépend d'une équation irréductible où la corde cherchée a trois valeurs inégales, on auroit la conſtruction de cette équation, & par conſéquent la même opération réſoudroit de la même maniere trois problêmes dont les ſolutions doivent être différentes. La Géométrie ſeroit donc ici en défaut, ce qui eſt abſurde ; une ſcience fondée ſur des raiſonnemens dont la liaiſon eſt évidente & des principes certains, ne ſçauroient jamais conduire à l'erreur.

On objectera peut-être qu'il ne laiſſe pas d'y avoir des cas où l'on réuſſit par

la Géométrie plane à diviſer un arc en trois parties égales ; tels ſont ceux où l'on propoſe le cercle entier ou quelqu'une de ſes parties aliquotes pairement paires. Cette obſervation quoique vraie, ne détruit cependant pas ce que nous venons de dire ; il y a en effet quelques cas particuliers où la corde b a une telle valeur que l'équation peut être abaiſſée en la diviſant par une de ſes racines ; mais cette équation conſidérée généralement n'en eſt pas moins irréductible. C'eſt ainſi que la racine de $aa - xx$ ne peut être exprimée en termes finis, quoiqu'il ſoit poſſible quelquefois d'en extraire la racine exactement, ſçavoir, lorſque a & x ont des valeurs tellement combinées qu'elles repréſentent un quarré parfait.

XVII. *Deſcartes* a donné le premier des régles générales pour conſtruire les équations ſolides par une combinaiſon du cercle & des ſections coniques (a),

(a) *Geom. lib.* 3.

& il les a appliquées à la réſolution des deux problêmes de la triſection & des deux moyennes proportionnelles. La maniere dont il les réſoud eſt très-ſimple & mérite d'avoir place ici. Dans le cas des moyennes proportionnelles, les extrêmes étant a & b, il décrit une parabole au parametre a, & prend une abciſſe DC ſur l'axe égale à $\frac{1}{2}a$, après quoi il éleve une perpendiculaire ſur le point C égale à $\frac{1}{2}b$; le cercle décrit par le point D comme centre, & paſſant par le ſommet de la parabole, la coupe dans un autre point, dont l'ordonnée abaiſſée ſur l'axe, eſt la premiere des moyennes cherchées, & l'abciſſe qui lui répond eſt la ſeconde. S'il s'agit de diviſer un arc en trois également, que r ſoit le rayon, b la corde de l'arc propoſé, il décrit une parabole au parametre r ; puis ayant pris ſur l'axe une abciſſe Ad égale à $2r$, il éleve la perpendiculaire de égale à $\frac{1}{2}b$; le cercle décrit du point e, comme centre, par le

ſommet de la parabole, la coupe en trois autres points G, g, γ, dont les trois ordonnées ſont les trois valeurs de la corde cherchée ; ſçavoir, GK la plus petite, la corde du tiers du petit arc ; gk la moyenne, celle du reſtant au cercle entier, & enfin la plus grande qui égale les deux autres priſes enſemble, eſt celle du tiers de la circonférence augmentée du petit arc.

Les Géometres qui ont ſuccédé à *Deſcartes*, marchant ſur ſes traces, ont beaucoup ajouté à ces inventions. M. de *Sluſe* eſt un des principaux : on lui doit d'avoir fait connoître le véritable principe de la conſtruction des équations par les lieux géométriques, & d'avoir enſeigné à les varier de pluſieurs manieres, en employant telle courbe qu'on voudra combinée avec telle autre. C'eſt là l'objet du ſçavant ouvrage (a) qu'il

(a) *Meſolabum, ſeu duæ mediæ proportionales per circulum & ellipſion. vel hyp. infinitis modis exhibitæ*, in 4°. *Leodii*, 1654.

publia en 1654, où il résoud le problême de la duplication du cube d'une infinité de façons : cet ouvrage étoit écrit suivant le style des anciens Géometres, & à leur imitation son Auteur cachoit la méthode qui l'avoit conduit aux découvertes qu'il y exposoit; il la dévoila seulement en 1668, suivant la promesse qu'il en avoit donnée dans la préface du traité dont on vient de parler (*a*). Je me livrerois volontiers à expliquer cette méthode si je ne craignois d'être trop long; je me contenterai de renvoyer aux Auteurs sans nombre qui l'ont expliquée. M. *Wolf* sur tout l'a exposée avec beaucoup de précision & de netteté dans son cours de Mathématiques (*b*); il seroit à desirer, & pour l'avantage de ceux qui cherchent à s'initier dans ces sciences, & pour la réputation de son Auteur, que toutes les parties de ce cours répondissent à celle-là.

(*a*) *Mesolabum unà cum adjunctis Miscel.*
(*b*) *Elem. analys.* T. 1. chap. 7 & 8.

XVIII.

XVIII. Je ne puis mieux terminer le récit des travaux des Géometres sur les deux célebres problêmes qui nous ont occupé dans ce chapitre, qu'en exposant quelques unes des belles solutions que M. *Newton* en a données (*a*). J'ai déja dit ailleurs qu'il avoit fait voir, contre le sentiment de *Descartes*, que ce n'étoit pas le degré de composition des équations des courbes, mais uniquement le degré de facilité à les décrire qui devoit déterminer à faire usage des unes plutôt que des autres. Suivant ce principe, M. *Newton* employe la conchoïde à trouver les deux moyennes proportionnelles & la trisection de l'angle, & il le fait avec une élégance fort supérieure à celle des solutions du Géometre ancien, du moins dans le cas du premier de ces problêmes; je vais mettre le Lecteur en état d'en juger. Les deux extrêmes données étant a, b, il

(*a*) *Arithm. univers. appendix de constructione equationum.*

N

prend (*fig* 40) $KA = a$, & après l'avoir partagée en deux également en C, il décrit du centre K une circonférence circulaire CX, &c. où il inscrit $CX = b$; alors si l'on insere dans l'angle EXY, la ligne EY convergente au point K & égale à $\frac{1}{2}a$, les quatre lignes KA, XY, KE, CX seront en proportion continue. A l'égard de la trisection de l'angle, la corde de l'arc proposé (*fig.* 41.) étant CX, & CA le diametre, il suffit de prolonger indéfiniment AX, & d'adapter dans l'angle EXC, la ligne $EY = CA$, & convergente au centre K, l'arc XV sera le tiers cherché. Cette derniere construction revient, à la vérité, à celle de *Nicomede*; mais elle est une suite de la régle générale que *Newton* a établie plus haut pour la construction de tous les problêmes de cet ordre : la premiere est également neuve & recommendable par sa simplicité. M. *Newton* en donne un grand nombre d'autres dans le même

Ouvrage auquel je renvoye. Ce livre, quoique élémentaire, doit être entre les mains de tous les Géometres, comme étant marqué, ainsi que toutes les autres productions de ce grand homme, au coin de son génie, & d'ailleurs contenant des recherches & des questions qui ne sont pas au dessous des plus habiles en géométrie.

XIX. Il y eut dans l'antiquité, comme à présent, un grand nombre de prétendues solutions de ces deux problêmes par la Géométrie plane; *Pappus* (*a*) nous le dit d'une maniere expresse, & le commencement de son troisiéme livre des *Collections mathématiques*, est employé à réfuter une de ces solutions. Les autres tentatives de cette espece ont eu le sort qu'elles méritoient, & ne nous sont pas parvenues. Depuis le renouvellement des sciences parmi nous, les fausses duplications du cube ou trisections de l'angle, sont presque aussi

(*a*) *Coll. mathem. præf.* liv. 3.

N ii

communes que les prétendues Quadratures du cercle, & même rien n'eſt plus ordinaire que de voir ceux qui ſe vantent d'être en poſſeſſion du dernier problême, annoncer en même tems les deux autres. *Oronce Finée*, *Joſeph Scaliger*, *Delaleu*, les ſieurs *Clerget*, *Liger*, &c. en ſont des exemples. Je pourrois aiſément former un article aſſez étendu de leurs malheureuſes tentatives ; mais les mêmes raiſons qui m'ont fait terminer le chapitre précédent, malgré l'abondante matiere qui ſe préſentoit encore pour le groſſir, me font mettre fin à celui-ci. S'il eſt certaines erreurs qui méritent l'attention des Philoſophes, il n'en eſt aſſurément pas ainſi de celles de ces pygmées en geométrie, elles ne ſont dignes que de l'oubli qui les dérobe à la connoiſſance des Géometres.

Addition au Chapitre III.

ON a dit dans ce chapitre, en parlant de la démonſtration que M. *Gregori* a voulu donner de l'impoſſibilité de la Quadrature du cercle, qu'elle ne concluoit bien qu'à l'égard de l'indéfinie. Après avoir réfléchi plus attentivement ſur cette démonſtration, il me paroît que M. *Gregori* a eu raiſon d'en déduire l'impoſſibilité de la Quadrature même définie du cercle ; car s'il eſt vrai, comme il ſemble qu'on ne peut le lui conteſter, qu'en général le rapport d'un ſegment ou d'un ſecteur au polygone inſcrit ou circonſcrit ne peut être exprimé par une fonction finie, il eſt évident que cela aura également lieu à l'égard du cercle entier, & de quelque ſegment ou ſecteur particulier que ce ſoit. Il n'y aura donc dans le cercle aucun ſegment ou ſecteur dont le rapport avec une figure rectiligne puiſſe

être exprimé en termes finis ; ce qui exclut la Quadrature du cercle entier, & de tout autre ſegment quelconque.

FIN.

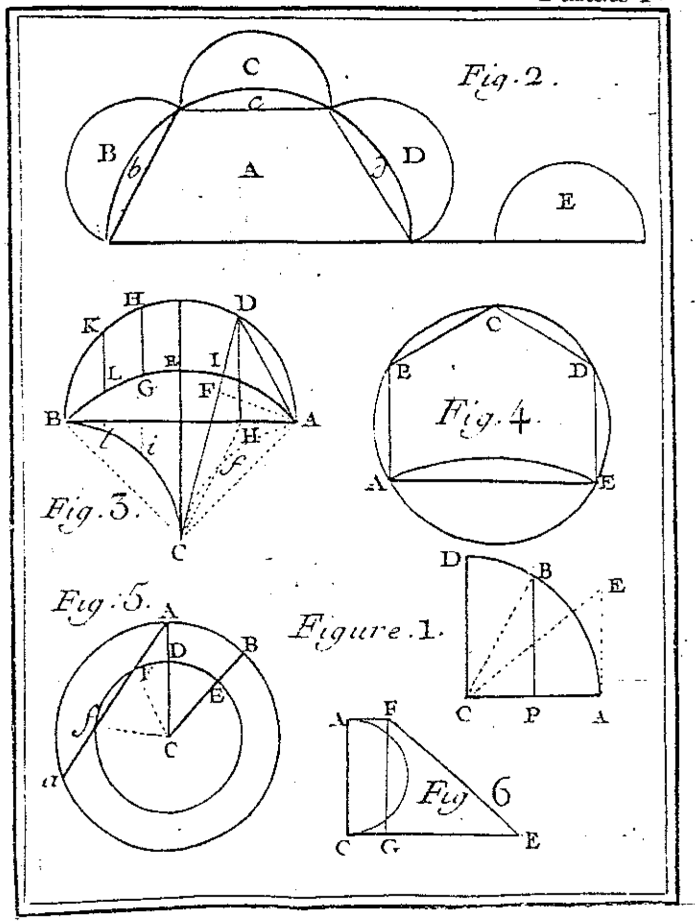


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Figure. 1.
Fig 6

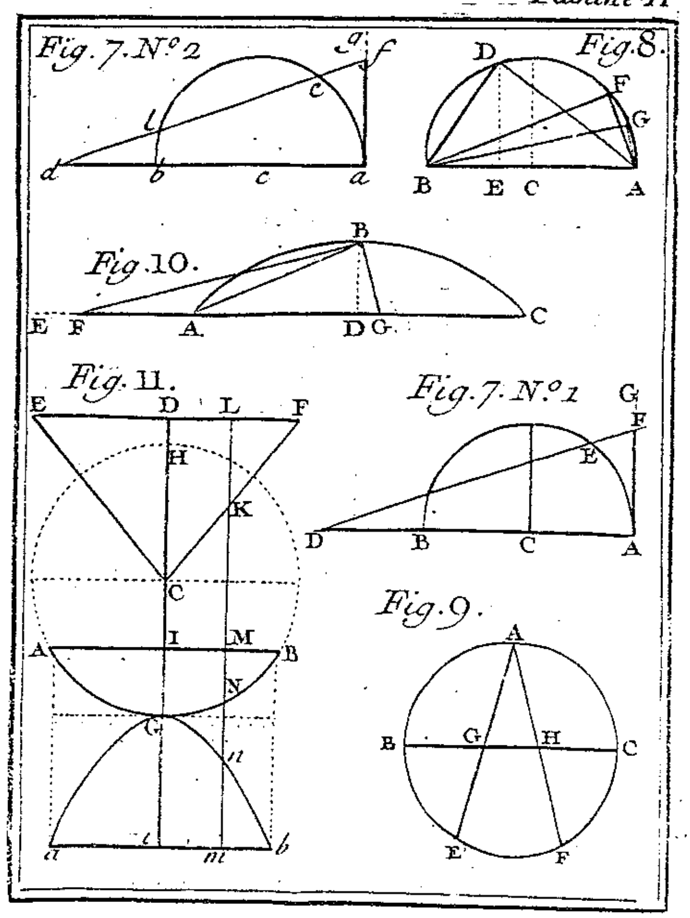


Fig. 7. N.° 2
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 7. N.° 1
Fig. 9.

Planche III.

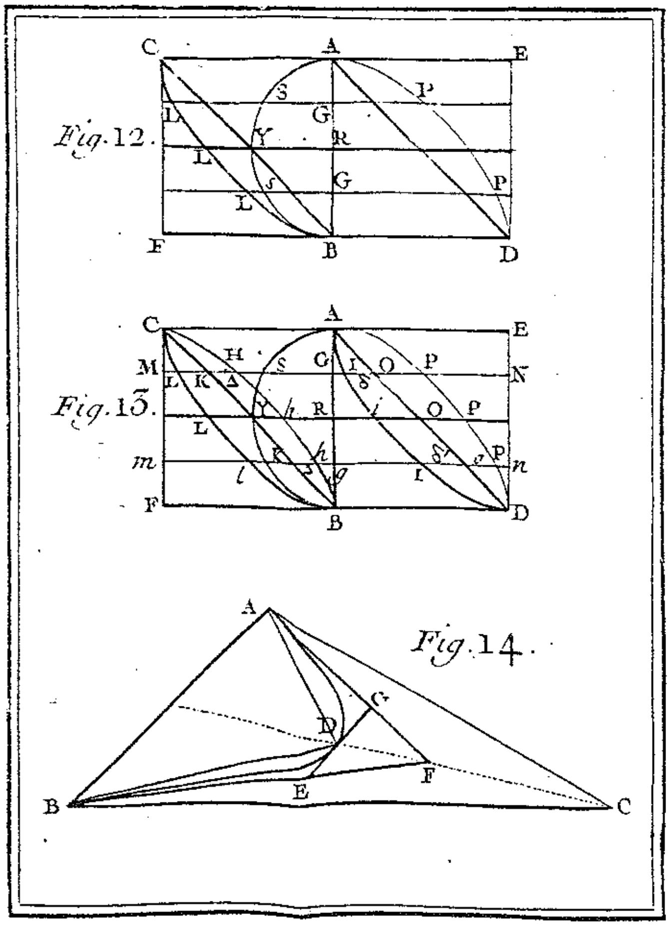
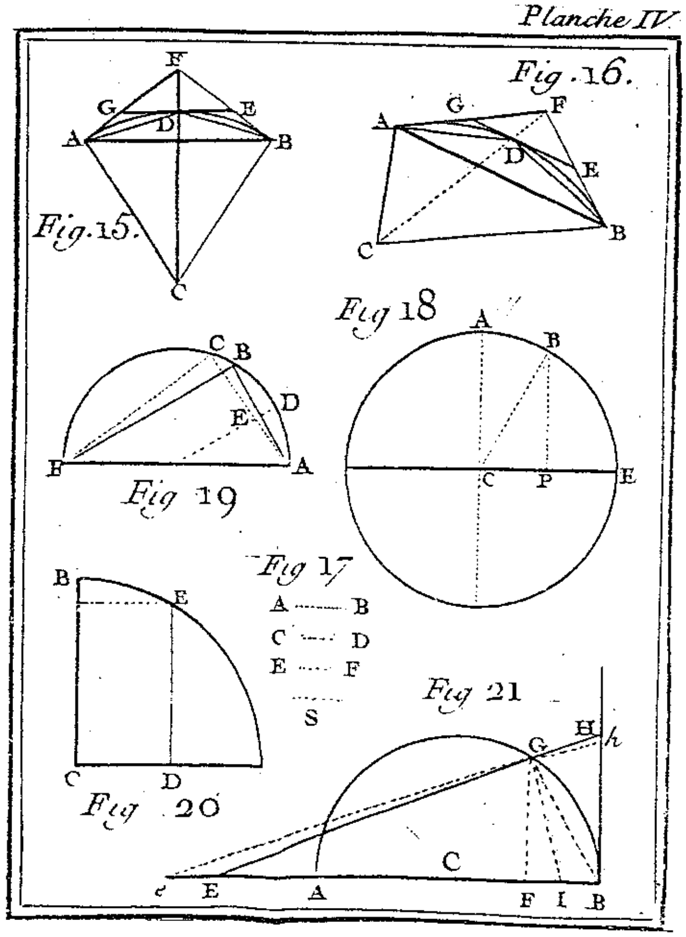


Planche IV.



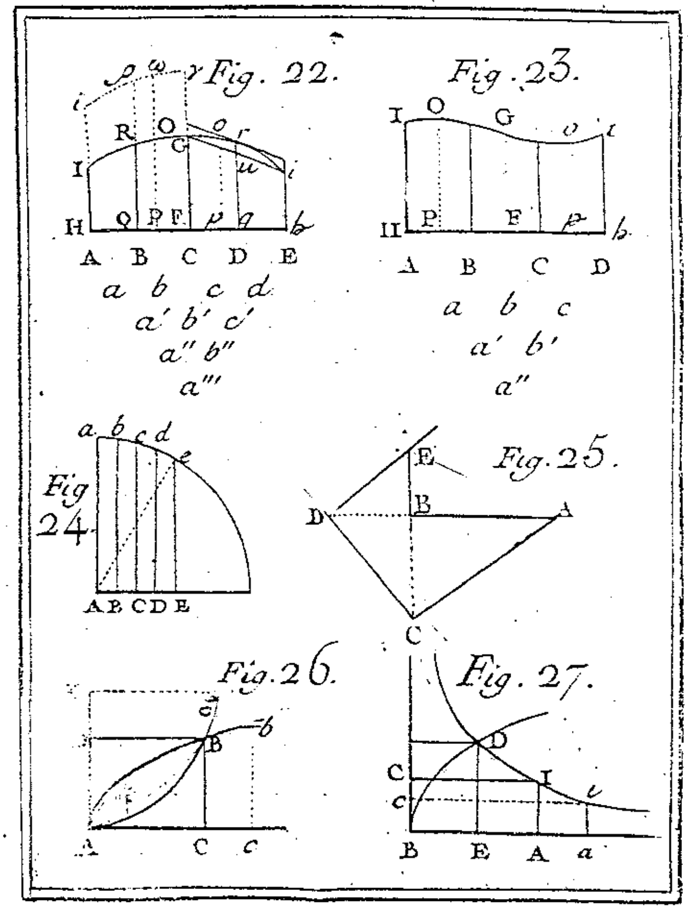


Fig. 22.
Fig. 23.
Fig 24
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.

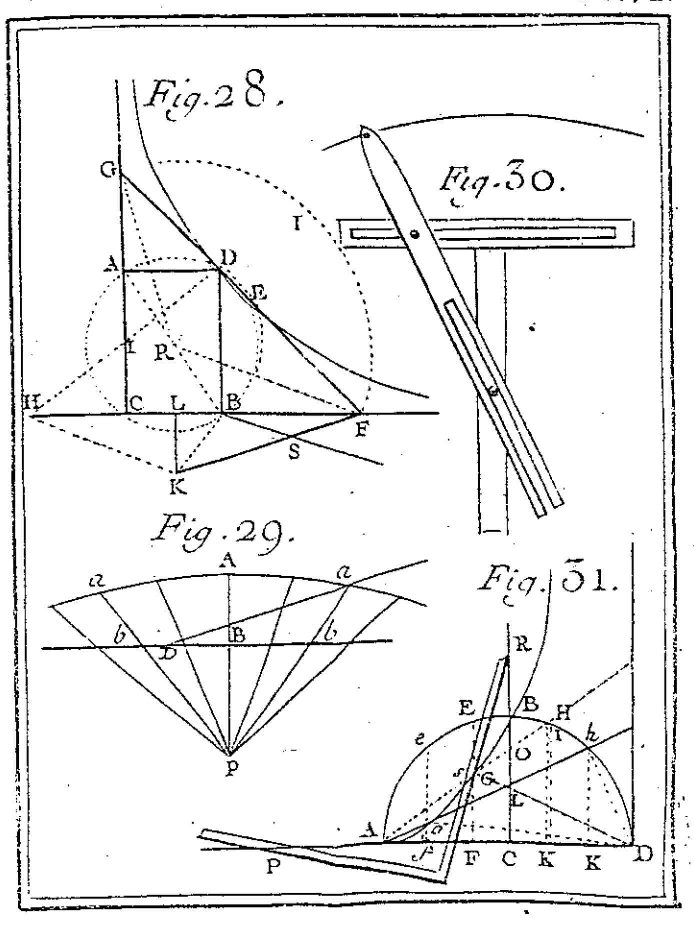
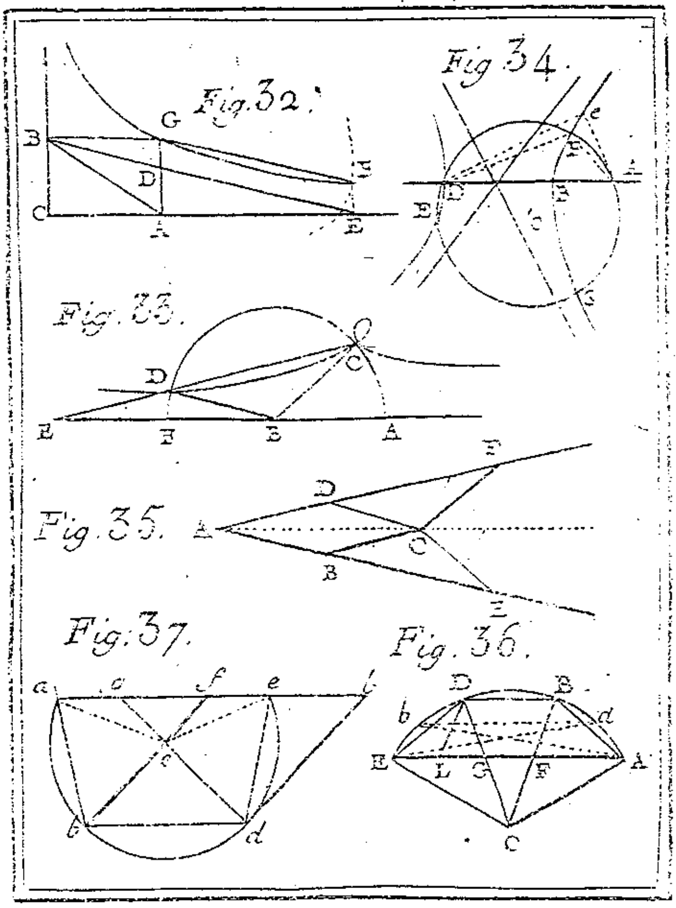


Fig. 28.
Fig. 30.
Fig. 29.
Fig. 31.

Pl. VII.



Pl. VIII.

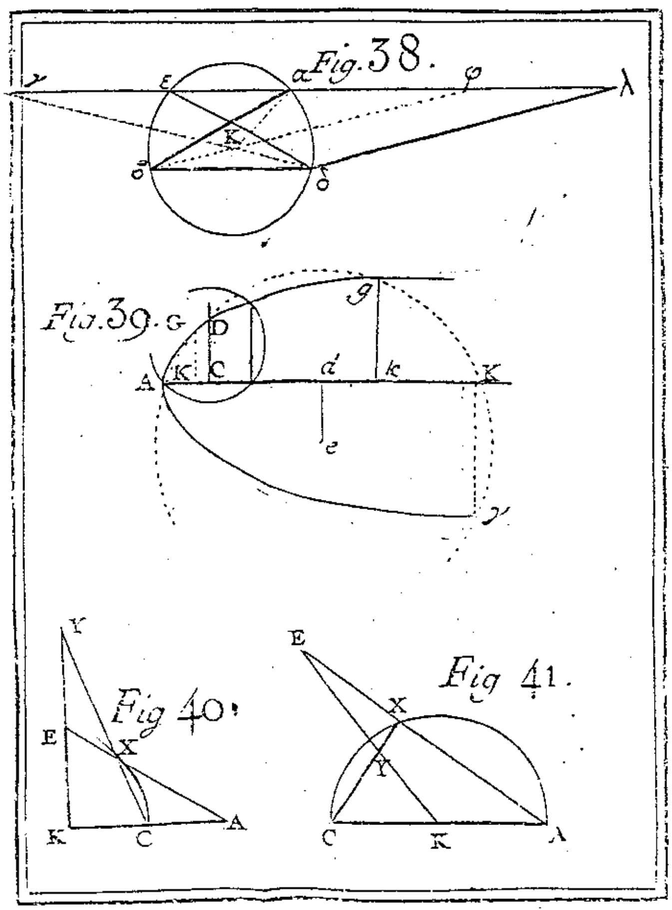


TABLE ALPHABETIQUE DES MATIERES.

Le nombre romain désigne le chapitre, & le chiffre arabe indique l'article.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

V.

W.

Fin de la Table des Matieres.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Histoire des recherches sur la quadrature du cercle

AUTEUR :

MONTUCLA Jean-Etienne

RESUME :

Par le grand historien des mathématiques, une étude historique détaillée des recherches sur nombre π

MOTS CLES :

Histoire
Epistémologie

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1986
ISBN : 2-86612-036-1