INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

n° 1

AVRIL 1992

M : A.T.H.

MNEMOSYNE

UNIVERSITE PARIS VII

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;

de cette union naquirent les neuf Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : **"La mémoire"**

gravure allégorique d'après Gravelot (XVIII ème)

n° 1

AVRIL 1992

MNEMOSYNE

M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

T. *textes*

H. *historiques*

SOMMAIRE

EDITORIAL

Depuis bientôt dix ans, le groupe M: A.T.H. (Mathématiques: Approche par les textes historiques) de l'IREM de Paris 7 réunit, à l'initiative de Jean Luc Verley, des enseignants qui ressentent la nécessité d'acquérir une culture historique pour leur formation personnelle et pour leur enseignement. Le travail historique et épistémologique, mené en relation étroite avec la Commission Inter-IREM d'Histoire et d'Epistémologie, permet de renouer avec les émerveillements et les exigences d'une démarche de recherche, de renouveler le plaisir d'enseigner.

En 1986 et en 1990, le groupe a publié deux brochures offrant des exemples d'utilisation de textes originaux en classe, dans des activités pédagogiques qui s'insèrent dans le cursus du collège ou du lycée. L'objectif était de sensibiliser les professeurs et les élèves à l'évolution des concepts et du langage mathématique. Ces brochures ne présentent qu'un aspect du travail du groupe. En amont d'une telle production, il y a des lectures de textes de mathématiciens, mais aussi d'épistémologues, de philosophes ou d'historiens, menées souvent en commun. C'est cet aspect de notre recherche que nous voulons maintenant diffuser.

Nous souhaitons ainsi ouvrir un espace où s'échangeraient expériences et éléments de réflexion sur tout ce qui concerne l'histoire et l'enseignement des mathématiques.

Quatre fois par an environ, Mnémosyne vous proposera:

- Un article de réflexion sur un thème ou un moment de l'histoire des mathématiques. Ce premier numéro propose l'étude de la démonstration par exhaustion chez les grecs et les arabes. Les numéros suivants reprendront, entre autres, les exposés du séminaire "Autour de l'histoire du calcul différentiel", animé par Jean Luc Verley, et du séminaire de l'Union des professeurs de Spéciales, animé par Michel Serfati.

- De "bonnes vieilles pages", extraits d'ouvrages anciens peu répandus, des textes inédits ou difficiles à trouver, des traductions inédites... Dans ce numéro, un extrait de la préface des "Leçons élémentaires de Mathématiques" de La Caille.

- "Les contes du lundi" , qui donneront un aperçu des exposés et des échanges qui ont lieu lors de réunions du groupe M:A.T.H., ouvertes à tous, rassemblant de façon régulière, un lundi par mois à l'IREM, une quinzaine d'enseignants partageant notre passion.

- Des exemples d'activités avec les élèves, des documents divers pour les classes.

- Des comptes rendus de lectures, de conférences...

- Un calendrier des diverses rencontres et manifestations parisiennes et nationales sur l'histoire des mathématiques. Ne manquez pas de nous envoyer des informations pour le compléter.

- Une place enfin est réservée au courrier des lecteurs: nous attendons vos remarques, vos compte-rendus de lectures ou d'expériences, et vos critiques.

Le groupe M: A.T.H.

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE
MATHÉMATIQUES.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Petersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Gottingue, & de l'Institut de Bologne; Professeur de Mathématiques au College Mazarin.*

NOUVELLE ÉDITION,

Avec de nouveaux Éléments d'Algebre, de Géométrie, de Trigonométrie rectiligne & sphérique, de Sections coniques, de plusieurs autres Courbes, de Calcul Différentiel & de Calcul Intégral.

Par M. l'Abbé MARIE, *de la Maison & Société de Sorbonne, Sous-Précepteur de Monseigneur* LE DUC D'ANGOULÊME, *Professeur de Mathématiques au Collége Mazarin.*

A PARIS,
Chez la Veuve DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXVIII.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

BONNES VIEILLES PAGES

En 1740 l'abbé de LA CAILLE est en Auvergne où il effectue avec CASSINI des travaux de géodésie nécessités par l'établissement de la carte de France . C'est alors que le Collège Mazarin, à Paris, lui demande de venir enseigner les mathématiques. Avec tout le sérieux que chacun lui reconnaît, La Caille s'attèle à cette tâche et rédige les " Leçons élémentaires de mathématiques" traduites en latin, espagnol, anglais et rééditées en français de nombreuses fois au cours du XVIIIème siècle.

Les "leçons" traitent de l'arithmétique, de l'algèbre, de la géométrie, de la trigonométrie, des sections coniques, du calcul différentiel, du calcul intégral, c'est à dire à peu près de l'ensemble des mathématiques enseignées à l'époque. On y relève explicitement le désir de présenter simplement les questions à étudier et d'en montrer les applications.

Nous proposons ici à la lecture, l'introduction du chapitre sur le calcul différentiel.

ÉLÉMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Il en est du Calcul Différentiel comme de l'Algebre : on ne sauroit le définir d'une maniere intelligible pour ceux qui n'en connoissent pas les premiers éléments.

Newton fut le premier Inventeur de ce calcul, & personne n'en eût partagé la gloire avec lui, s'il eût été plus empressé de mettre au jour ses découvertes.

Mais l'espece de mystere dont il les enveloppa dans l'origine, donna le temps à Leibnitz de marcher à grands pas dans la même carriere. Bientôt après Jacques & Jean Bernoulli coururent sur ses traces; de-là cette vive contestation que les Géometres Allemands eurent avec les Géometres Anglois, pour savoir à qui de Léibnitz ou de Newton étoit dûe la principale gloire. Sans entrer dans cette discussion, nous observerons que d'autres Géometres avoient préludé depuis long-temps à la découverte du calcul Différentiel.

Il ne seroit même pas difficile de faire voir une espece de filiation entre ce calcul & *la Méthode d'Exhaustion*, si connue des Anciens, *la Méthode des Indivisibles*, donnée par Cavalieri, & les procédés dont Fermat, Descartes, Barrow & tant d'autres faisoient usage avant Newton. Les travaux de ces derniers Géometres semblent avoir servi d'échelons à ce grand homme.

775. Quoi qu'il en soit, supposons qu'une *variable* quelconque x reçoive un accroissement fini, & de maniere qu'après l'avoir reçu, son état soit exprimé par $x + e$. On demande quels doivent être les accroissements correspondants des autres fonctions de x ?

D'abord il est clair que si x devient $x + e$, son quarré x^2 deviendra $x^2 + 2ex + ee$; ainsi le rapport de ces deux accroissements sera $\frac{1}{2x + e}$. Mais si e diminue, ce rapport augmentera, & il approchera de plus en plus de celui de $\frac{1}{2x}$. Cependant il ne lui deviendra égal, qu'au moment où e s'évanouira : le rapport de $\frac{1}{2x}$ est donc la *limite* de ceux que les accroissements finis de x & de xx peuvent avoir entre eux. On trouvera de même que la limite de ceux de x & de x^n est $\frac{1}{nx^{n-1}}$.

776. Or le calcul différentiel a pour objet de déterminer ces limites dans tous les cas. Voyez ce que M. d'Alembert a écrit sur cette matiere; vous y trouverez les vraies notions de ce calcul. S'il reste encore quelques difficultés de Métaphysique, c'est qu'elles sont inséparables des idées toujours abstraites de limite & d'infini.

777. Voici une des applications les plus propres à faire entendre la maniere de déterminer ces limites. Soit propoſé de mener une tangente au point M de la courbe AMm, ou, ce qui revient au même, ſoit propoſé de déterminer la ſoutangente PT. FIG. 184.

On ſuppoſera que l'abſciſſe $AP = x$ croît d'une quantité finie $Pp = e$; on menera l'ordonnée $PM = y$, & on déterminera l'ordonnée mp, en ſubſtituant $x + e$ au lieu de x dans l'équation de la courbe. Quelle que ſoit la valeur de cette ordonnée, on pourra toujours la repréſenter par $y + Pe + Qe^2 + Re^3 +$ &c. (P, Q, R, &c. étant des fonctions de x); on aura donc pour l'expreſſion de rm, accroiſſement correſpondant de l'ordonnée PM, la quantité $Pe + Qe^2 + Re^3 +$ &c.

Cela poſé, ſoient menées la ſécante SMm, & la ligne Mr parallele & égale à Pp; on aura $PS = \frac{y}{P + Qe + Re^2 + \&c}$. Rapprochons maintenant le point p du point P; le point m s'approchera du point M, & le point S du point T : mais on aura toujours $PS = \frac{y}{P + Qe + Re^2 + \&c}$. Si la quantité Pp diminue encore & devient très-petite, il ne s'en faudra que de très-peu que m ne ſe confonde avec M, & que la ſécante ne devienne tangente. Mais ſi e s'évanouit, le rapport déja trouvé ſe réduit à $\frac{y}{P}$, PS devient PT, Sm devient TM qui n'a plus que le point M de commun avec la courbe, & la ſoutangente eſt déterminée par cette limite.

PAR EX. Si AMm eſt une parabole, on ſubſtituera $x + e$ à x dans l'équation $y = \sqrt{px}$, & on aura $y = p^{\frac{1}{2}}(x + e)^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} \cdot p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} e -$ &c, qui donne $P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$; d'où $PT = \frac{\sqrt{px}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}} = 2x$, comme nous l'avons déja trouvé (669). 184.

On voit par là avec quelle promptitude cette méthode réſout le problême des tangentes, qui eſt en quelque ſorte le berceau du calcul différentiel. Mais on verra bien plus amplement dans la ſuite la conformité des réſultats de ce calcul avec ceux de l'ancienne Géométrie.

En attendant, nous remarquerons que ces quantités Pp, ou Mr, & rm que nous avons ſuppoſées diminuer de plus en plus, à meſure que le point p ſe rapproche du point P, ſont les éléments reſpectifs de l'abſciſſe AP & de l'ordonnée MP.

778. Ces éléments, quelque petits qu'on les ſuppoſe, conſervent entre eux le même rapport que les quantités finies auxquelles ils appartiennent; cela eſt viſible par la ſeule inſpection des triangles

ſemblables TPM & M*mr*. Et comme la limite de ce rapport n'a lieu qu'au moment où ces élémens s'evanouiſſent, on peut dire avec M. Euler, que le calcul différentiel a pour objet de faire connoître à quoi ſe réduiſent les rapports des élémens des quantités variables, lorſque ces élémens deviennent nuls.

Mais ne pouvant devenir nuls, ſans paſſer par tous les degrés poſſibles de diminution, on ſent bien qu'il doit réſulter de leur décroiſſement infini des idées un peu confuſes : car notre eſprit ne comporte pas de perception claire de ce qui tient à l'infini. Auſſi depuis ſon origine, le calcul différentiel a-t-il éprouvé beaucoup de contradictions. Il en éprouvera ſans doute encore ; mais s'il falloit répondre à toutes les chicanes d'une Métaphyſique pointilleuſe, on n'en finiroit pas. L'exiſtence même du mouvement ſeroit encore un problême, ſi on s'étoit arrêté aux difficultés que Zénon propoſoit autrefois pour la combattre.

Ce n'eſt pas au reſte que Maclaurin, dans ſon *Traité des Fluxions*, n'ait répondu à la plûpart des ſophiſmes dont quelques Auteurs ont voulu embrouiller la matiere. C'eſt un Ouvrage qu'il faut lire, quand on veut approfondir cette théorie : mais on ne peut ſe diſſimuler que pour ſuivre la marche rigoureuſe de ce ſavant homme, il faut eſſuyer bien des longueurs.

779. Si les principes dont Leibnitz eſt parti, ne ſemblent pas auſſi exacts, ils ont du moins l'avantage de conduire aux mêmes réſultats que ceux de Newton, & de ne demander, pour ainſi dire, que deux ſuppoſitions : la premiere, qu'en diminuant de plus en plus les élémens des quantités variables, on peut les réduire à des *infiniment petits*. La ſeconde, qu'il exiſte entre les infiniment petits de deux ordres différents, la même ſubordination qui eſt entre les quantités finies & leurs éléments. Ces deux ſuppoſitions, une fois admiſes, les regles du calcul ne ſouffrent plus de difficulté.

Or telle eſt la ſubordination d'une quantité infiniment petite par rapport à la quantité finie dont on la conſidere comme l'élément, qu'elle peut être négligée ſans erreur ſenſible, de même qu'on néglige une quantité finie par rapport à une quantité infinie. C'eſt ainſi, par exemple, que $\infty - 1$, & plus généralement $\infty \pm a$ ſe réduiſent à ∞. On peut donc regarder un infiniment petit du ſecond ordre, comme une quantité qui s'évanouit par rapport à un infiniment petit du premier.

Cela poſé, Leibnitz imagine qu'une variable x croiſſe ou décroiſſe d'une quantité infiniment petite, qu'il déſigne par dx, & il cherche quels doivent être les accroiſſements ou les décroiſſemens reſpectifs des autres fonctions de x. Son quarré x^2, par exemple, devenant $(x \pm dx)^2 = x^2 \pm 2x dx + dx dx$, il eſt clair que $dxdx$ doit être rejeté comme un infiniment petit du ſecond ordre, & que par conſéquent la différence entre x^2 & $x^2 + 2xdx$ eſt $\pm 2xdx$. Ainſi l'accroiſſement correſpondant du quarré d'une variable quelconque eſt le produit du double de cette variable multiplié par ſon accroiſſement.

780. En général, la différence qui régne entre une quantité variable avant qu'elle ait reçu aucune altération infiniment petite, & cette même quantité après qu'elle a reçu quelque altération de ce genre, s'appelle *la différentielle* de cette quantité; ce qui a fait donner le nom de calcul différentiel, à la méthode qui détermine dans tous les cas ces différences.

Newton lui avoit donné auparavant le nom de *Calcul des Fluxions*, par une suite de l'idée qu'il s'étoit faite de la formation de toutes les quantités. Imaginant en effet que tout ce qui croît ou diminue dans la nature, reçoit ces accroissements ou ces diminutions par le mouvement d'un de ses éléments, il appella calcul des fluxions, la méthode dont il se servoit pour déterminer les rapports de ces variations.

781. Il nomma *Fluentes* les quantités que Leibnitz appelle *variables*, & ce que nous désignerons par dx, il le désigna par un point mis sur x; ensorte que dx & $\dot{x}$ signifient la même chose, & que fluxion de x, ou différentielle de x sont absolument synonymes. Le seul avantage qu'il y ait à se servir de la lettre d, au lieu d'un point, pour marquer les différentielles ou les fluxions des variables, c'est qu'elle les fait mieux reconnoître parmi d'autres quantités. Il eût même été à propos d'introduire dès le commencement quelque caractere propre à marquer les différentielles, comme on en a introduit un pour marquer les radicaux. Mais à présent que l'usage a prévalu, toute innovation de ce genre seroit déplacée, outre qu'elle auroit bien peu d'utilité.

782. Ainsi que les quantités finies & variables x & y ont des différentielles dx & dy, ces différentielles à leur tour en ont aussi. On les appelle *Différences secondes*, pour les distinguer des premieres, & on les désigne indifféremment par ddx & ddy, ou par $\ddot{x}$ & $\ddot{y}$. Les différentielles troisiemes sont $dddx$ & $dddy$, ou $\dddot{x}$ & $\dddot{y}$, & ainsi de suite.

Pour abréger, on écrit d^2x, d^3x au lieu de ddx, $dddx$. En général, la lettre d mise devant une quantité quelconque indique qu'il faut *différentier* cette quantité; & l'exposant de la même lettre d annonce combien de fois de suite il faut procéder à la *différentiation*.

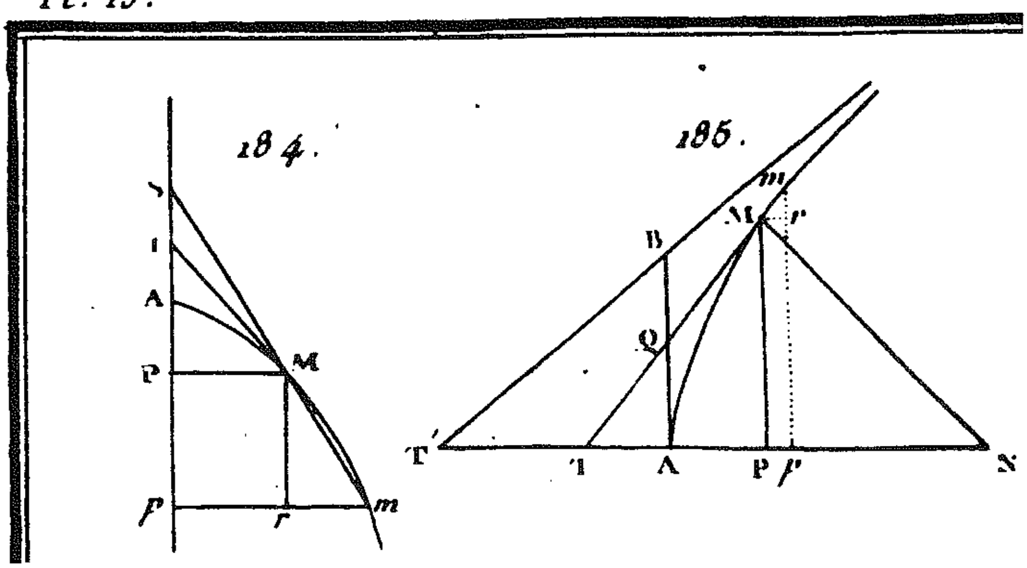
Lorsque la quantité proposée est polynome, on la met entre deux parentheses, que l'on fait précéder de la lettre d. Ainsi $d(x^2+y^2)$ indique qu'il faut différentier le binome x^2+y^2.

783. Quoique les différentielles de même degré soient toutes infiniment petites, il s'en faut bien qu'elles soient toujours égales. Et si on demande quel rapport peut se trouver entre dx & dy, dans la supposition que ces différentielles s'évanouissent, il est aisé de faire voir qu'il y en a un. En attendant que nous enseignions

FIG. la maniere d'en trouver l'expreſſion, ſoit $\frac{aa - xx}{a - x}$; il eſt certain que $a + x$ exprime la valeur de cette fraction, quelle que ſoit la valeur de x; mais ſi $x = a$, la fraction ſe réduit à $\frac{0}{0}$, & le quotient devient $2a$. Voilà donc un exemple de ces ſortes de fractions dont le numérateur & le dénominateur s'évanouiſſent en même temps, & qui cependant ont des valeurs très-réelles.

784. Si on ſuppoſe infini le diviſeur d'une quantité finie quelconque a, il eſt clair que le quotient doit alors ſe réduire à zéro. On a donc $\frac{a}{\infty} = 0$; ce qui donne $a = 0 \times \infty$; d'où il ſuit que zéro multiplié par une quantité infinie peut repréſenter indifféremment toute ſorte de quantités finies; & réciproquement, que *toute quantité finie diviſée par zéro a pour quotient l'infini*, c'eſt-à-dire, que ∞ & 0 ſervent dans le calcul différentiel, comme autant de quantités indéterminées. Ce ſont des expreſſions vagues, dont il ſemble que l'on ne s'eſt aviſé que pour éviter des circonlocutions.

Pl. 10.



ICONOGRAPHIE

Les ouvrages de mathématiques anciens sont souvent illustrés de beaux frontispices ou titres gravés. Nous nous proposons ici, dans chaque numéro, d'en donner quelques exemples.

Euler *Introductio in Analysin Infinitorum* Lausanne 1748 (publié en Latin)
frontispice en français

JOHANNIS BERNOULLI,

M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,
Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ, BEROLINENSIS, *Socii* &c.

OPERA OMNIA,

TAM ANTEA SPARSIM EDITA,
quam hactenus inedita,

TOMUS PRIMUS,

Quo continentur ea
Quæ ab ANNO 1690 ad ANNUM 1713 prodierunt.

Delamonce del. Daudet Sculp.

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.

MDCCXLII.

Cum Privilegio Sacræ Cæsareæ Majestatis, & Sereniss. Poloniæ Regis, Elect. Saxon.

DANS NOS CLASSES

La section dorée dans les <u>Eléments</u> d'Euclide

Voici une activité facile pour les classes de 1ère, autour des équations du second degré. Cette activité introduit au langage de l' "algèbre géométrique" d'Euclide, amène à faire le lien entre l'écriture algébrique d'égalités et leur interprétation géométrique.

<u>La section dorée:</u>

De nombreux artistes ont utilisé, pour composer harmonieusement le plan d'un bâtiment ou d'un tableau, des dimensions dont le rapport est égal au nombre d'or. C'est déjà le cas de Phidias, l'architecte du Parthénon à Athènes; c'est en son honneur que la lettre Φ a été choisie (au début du XXème siècle), pour désigner le nombre d'or. Euclide emploie, au livre V des <u>Eléments</u> une expression qu'on traduit par " partage en extrême et moyenne raison "; l'expression "section dorée" est de Léonard de Vinci.

• Le point H réalise "la section dorée" du segment [AB] si les deux parties inégales AH (la majeure) et HB (la mineure) qu'il définit sont telles que:
" le rapport du tout à la majeure soit égal au rapport de la majeure à la mineure "
ce que nous écrivons $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{AH}{HB}$

<u>Question 1</u> :
Où l'on vérifie que le rapport $\dfrac{AB}{AH}$ ou $\dfrac{AH}{HB}$, appelé nombre d'or , ne dépend pas de la longueur AB:

a) Soit $AB = d$, $AH = x$; écrire une équation dont x est solution.

b) Soit $\Phi = \dfrac{d}{x}$ Montrer que $\Phi^2 = \Phi + 1$ et donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près de Φ.

<u>Le texte d'Euclide :</u>

Le plus ancien texte qui s'interesse à la section dorée est celui des <u>Eléments</u> d'Euclide. Un tel partage d'un segment y est en particulier utilisé pour la construction d'un pentagone régulier. Ce problème est équivalent à la résolution d'une équation du second degré, mais comme dans la plupart des textes de l'Antiquité grecque, le problème est posé en termes géométriques. Le produit de deux grandeurs a et b est pour lui l'aire d'un rectangle de côtés a et b, le carré a^2 est l'aire d'un carré de côté a, la somme $ab + a^2$ est l'aire de la réunion des deux figures....

Avant de résoudre le problème, à la proposition 11 du Livre II, Euclide avait établi diverses propriétés que nous reconnaissons comme des identités algébriques (par exemple: $a(b+c) = ab + ac$ $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ .....); elles sont toujours présentées dans un langage géométrique. On en étudiera un exemple: la proposition 6 du Livre II.

Dans d'autres parties de son œuvre, Euclide résout d'autres problèmes que nous reconnaissons comme des exemples de problèmes du second degré, mais on ne trouve pas d'étude systématique de ces problèmes.

Extrait de la proposition 6 (Livre II)

"Qu'une certaine droite (1) AC soit coupée en deux parties égales au point E et qu'une certaine droite AF lui soit ajoutée en alignement . Je dis que le rectangle contenu par CF.FA (2), pris avec le carré sur AE (3) est égal (4) au carré sur EF (3)"

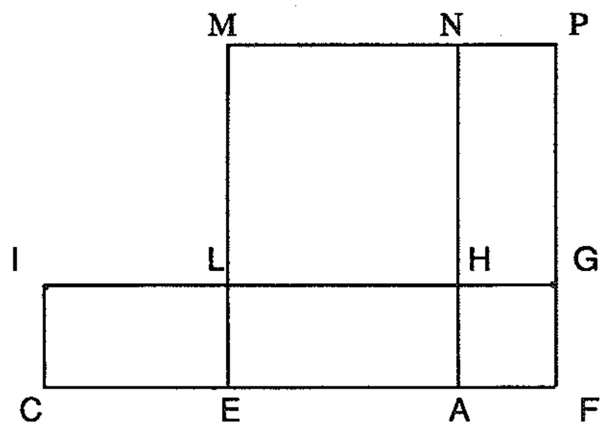
Vocabulaire:

(1) droite signifie toujours pour Euclide segment de droite.

(2) le rectangle contenu par CF, FA : c'est le rectangle dont les côtés ont pour longueur CF et FA

(4) l'égalité des figures signifie ici l'égalité des aires de ces figures.

(3) le carré sur AE : un carré de côté AE.



La proposition énonce donc :
(r) rectangle CFGI + carré LHNM = carré EFPM

Question 2:

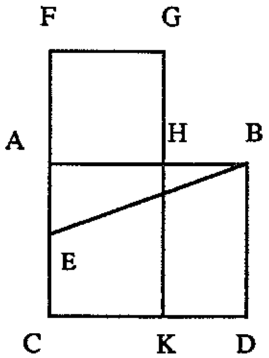
a) Démontrer la relation (r) géométriquement.

b) Poser $d = AC$, $y = AF$; traduire algébriquement la relation (r) et la vérifier.

c) Poser $a = \frac{d}{2} + y$ $b = \frac{d}{2}$

Ecrire (r) en fonction de a et b. Quelle identité remarquable reconnaît-on?

Proposition 11 (livre II)



"Couper une droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

Soit la droite donnée AB . Il faut alors couper la droite AB de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment ı estant."

Pour mieux comprendre l'énoncé de la proposition :

Il faut déterminer la position du point H sur le segment [AB] (donné) de sorte que l'aire du rectangle dont les côtés ont pour longueur AB ("la droite entière") et BH ("un des segments") soit égal au carré de côté AH (le "segment restant"). Euclide écrira aussi: " le rectangle contenu par AB, AH " égal au "carré sur AH"

Question 3 :
Montrer que ce problème équivaut à celui du partage du segment AB selon la section dorée.

Voici la construction proposée par Euclide :

"En effet, que le carré ABCD soit décrit sur AB. Et que AC soit coupée en deux parties égales au point E. Que BE soit jointe, et que CA soit conduite jusqu'en F ; et que soit placée EF égale à BE (1)*, et que le carré FH*(2) *soit décrit sur AF ; et que GH soit conduite jusqu'en K. Je dis que AB a été coupé en H de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH*(3) *égal au carré sur AH."*

Vocabulaire:

(1) Le segment CA est prolongé jusqu'en F de sorte que EF = EB

(2) Le carré FH : le carré est désigné par sa diagonale [FH], de même, les rectangles sont souvent désignés par une de leurs diagonales.

(3) Quel est le rectangle de la figure " contenu par AB, BH" ?

Question 4 : Soit d = AB; calculer en fonction de d : EB, AF, HB, puis $\frac{AB}{AH}$ et $\frac{AH}{HB}$
Quel type de partage du segment a-t-on réalisé?

Et maintenant voici la démonstration d'Euclide.

"En effet, puisque la droite AC a été coupée en deux parties égales au point E et, puisque FA lui a été ajoutée, le rectangle contenu par CF, FA, pris avec le carré sur AE, est égal au carré sur EF (II,6) .Or EF est égal à EB. Donc le rectangle contenu par CF, FA avec le carré sur AE est égal au carré sur EB. Mais à celui sur EB sont égaux ceux sur BA, AE, (I, 47), car l'angle en A est droit : Donc le rectangle contenu par CF, FA avec le carré sur AE est égal à ceux sur BA, AE.Que le carré sur AE soit retranché de part et d'autre. Donc ce qui reste, le rectangle contenu par CF, FA est égal au carré sur AB. Que (le rectangle*) AK soit retranché de part et d'autre; le reste (* le carré*)* FH *est donc égal à HD. Donc le rectangle contenu par AB, BH est égal au carré sur AH.*

Donc la droite donnée AB a été coupée en H, de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH. Ce qu'il fallait faire."

Pour mieux comprendre :

(1) Euclide renvoie à la proposition 6 du livre II étudiée à la question 2.

(2) Euclide renvoie à la proposition 47 du livre I que nous intitulons "Théorème de Pythagore". Réécrire dans le langage contemporain la phrase "Au carré sur EB sont égaux les carrés sur BA, AE ".

(3) retranché de part et d'autre de l'égalité obtenue.

Question 5:

Rédiger la démonstration en langage contemporain en réécrivant avec vos notations la suite des égalités énoncées par Euclide.

Question 6:

Commenter et comparer les démarches des deux dernières questions.

N.B. Les extraits des Eléments d'Euclide sont repris de la traduction de B. Vitrac P.U.F. Paris 1990

DE LA METHODE PAR EXHAUSTION

GROUPE M: A.T.H.
d'après un travail de M. F. Jozeau

Dans son oeuvre, Archimède[1] utilise à plusieurs reprises une méthode de démonstration appelée méthode d'exhaustion [2] qu'il dit détenir d'Eudoxe, qui a déjà été reprise par Euclide, au Livre XII des Eléments. Archimède va la porter à un point culminant, pour le calcul des aires et des volumes.

A l'aide de cette méthode, Archimède démontre beaucoup de nouveaux résultats: entre autres, il montre que l'aire d'un segment de parabole est égale aux quatre tiers de l'aire du triangle de même base et de même sommet [3]; que le volume d'un segment de paraboloïde de révolution[4] est égal à la moitié du cylindre circonscrit. Il établit la relation entre l'aire d'un secteur de la spirale et l'aire d'un secteur circulaire. Il se servira aussi de la méthode d'exhaustion dans les recherches de centre de gravité. Archimède exploite au mieux l'ensemble des connaissances qu'Euclide avait rassemblées peu de temps avant lui.

Malgré la perte d'une part importante de ses oeuvres, on peut suivre ses découvertes au travers de certaines de ses oeuvres mathématiques et noter une progression entre le traité De la Sphère et du Cylindre et celui Des Conoïdes et des Sphéroïdes ; on peut remarquer que les résultats des Equilibres Plans I sont utilisés dans La Quadrature de la Parabole, dans les Equilibres Plans II, dans le traité de La Méthode[5], et dans Les Corps Flottants.

A partir du IXème siècle, les mathématiciens arabes vont s'attaquer au même type de problèmes. Ils connaissent et maîtrisent certains écrits d'Archimède où se trouve mise en jeu la méthode d'exhaustion, mais ils semblent ignorer une grande partie de ses oeuvres. Ils vont retrouver par des voies différentes certaines des découvertes d'Archimède, obtenir de nouveaux résultats et enrichir eux aussi la méthode d'exhaustion .

Après une courte présentation de la méthode dite d'exhaustion, telle qu'elle est développée par Euclide, nous verrons comment Archimède l'a précisée et perfectionnée, puis quels ont été les apports de deux mathématiciens arabes Ibn Qurra et Ibn al-Haytham .

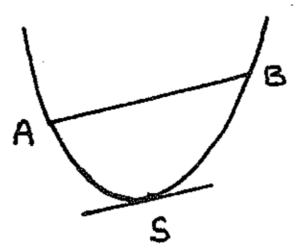
---

1 Archimède est mort en 212 av. J.C. Cette date est sûre, car elle est liée à un évenement militaire et politique: la prise de Syracuse par les troupes romaines. Il est difficile actuellement de donner la date de sa naissance . Jean Tzetzes déclare, dans un vers de ses Chiliades, qu'Archimède a vécu 75 ans. Proclus dit qu'Archimède vivait au temps d'Euclide. D'autres repères sont possibles d'après les préfaces adressées à des personnages connus par ailleurs : Dosithée, Eratosthène ...

2 Nom donné par Grégoire de St Vincent au XVIIème siècle, dans son "Opus Geometricum" et qui signifie épuisement.

3 Le sommet d'un segment de parabole limité par l'arc et la corde AB est le point de cet arc dont la tangente est parallèle à la corde.

4 Un segment de paraboloïde de révolution est une portion de ce solide de révolution (engendré par une parabole tournant autour de son axe) comprise entre le plan tangent au sommet et un plan parallèle. (cf. figure)



5 Signalons que La Méthode fut retrouvée en 1906 seulement, dans un monastère de Jérusalem.

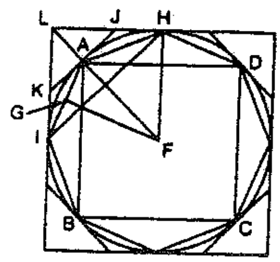
I. La méthode d'exhaustion

Voici comment est définie la méthode d'exhaustion dans <u>l'Encyclopédie</u> de D'Alembert, à l'article "exhaustion", rédigé par M. l'abbé de La Chapelle :

" La méthode d'exhaustion est une manière de prouver l'égalité de deux grandeurs, en faisant voir que leur différence est plus petite qu'aucune grandeur assignable ; et en employant, pour le démontrer, le raisonnement par l'absurde ".

Cette méthode fut, dit Archimède, introduite par Eudoxe pour résoudre les nombreux problèmes relevant d'un calcul de nature infinitésimale (quadratures, cubatures...). Rappelons que pour les géomètres grecs, il n'est pas question d'associer des nombres aux longueurs de segments ou de courbes, aux aires des surfaces et aux volumes des solides car, incapables de trouver une unité de mesure commune aux grandeurs incommensurables, les Grecs ne mesurent pas les grandeurs géométriques mais les comparent entre elles en calculant leurs rapports.

Ainsi la méthode d'exhaustion permet de comparer, par exemple, l'aire d'une surface S à l'aire d'une surface T connue.



S : disque ABCD

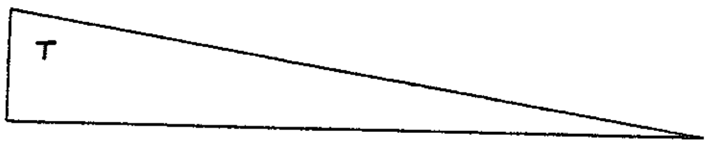


Figure extraite de <u>La Mesure du Cercle</u> d'Archimède

1. Principe de la méthode avant Archimède

Pour démontrer l'égalité de deux figures A et B (au sens de l'aire ou du volume), cette méthode procède indirectement en recourant à un double raisonnement par l'absurde. On démontre que chacune des deux hypothèses $A > B$ et $A < B$ conduit à une contradiction, on conclut donc que $A = B$.

Pour obtenir les contradictions, on approxime la figure curviligne A par une figure rectiligne C inscrite, de sorte que la différence entre les figures A et C soit **plus petite qu'une grandeur donnée.**

2. Fondements de la méthode

La méthode est rigoureusement fondée. Elle s'appuie sur la proposition 1 du livre X des <u>Eléments</u> d'Euclide: *"Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées."*

La démonstration de cette proposition repose sur la définition 5 du livre V, qu'on appelle l'axiome d'Archimède ou axiome de mesurabilité : *"Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement."*

Cet axiome important s'applique aussi bien à des grandeurs incommensurables que commensurables. Le livre V des Eléments d'Euclide expose la théorie des proportions d'Eudoxe. Cette théorie est à la base de la méthode d'exhaustion. Elle présente une tentative de donner un statut aux grandeurs incommensurables, et permet de fonder la théorie de la similitude des figures. Mais elle présente une sérieuse limitation: elle ne permet pas de concevoir une raison comme une entité ou une valeur numérique. De ce fait, comme nous l'avons vu, les Grecs n'établissent que des relations entre des grandeurs. Ainsi, par exemple, alors que nous parlons de proportionalité de l'aire d'un triangle à sa base, on lit à la première proposition du Livre VI: *"Les triangles (...) qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases."* La notion de raison est difficile, elle ne se confond pas, en particulier, avec la raison d'une progression géométrique que nous retrouverons plus loin; nous nous autoriserons parfois, dans la suite, des abus de langage dans les commentaires que nous ferons sur les textes étudiés.

Rigoureuse, la méthode d'exhaustion fait cependant appel à un postulat implicite supplémentaire, que Clavius a explicité en commentaire de sa traduction latine des six premiers livres des Eléments (1574) : *"Soient trois grandeurs A, B et C dont les premières sont de même espèce. Il existe toujours une grandeur D de même espèce que C, telle que les rapports de A à B et de C à D soient égaux."* Ce postulat et souvent désigné comme l'hypothèse de la quatrième proportionnelle [6]. Celle-ci est utilisée par Euclide de façon implicite lorsqu'il démontre au livre V des propriétés opératoires des proportions et apparait, par exemple, à la proposition 12 du livre VI, que nous appelons maintenant le "théorème de Thalès".

3. Caractères de la méthode d'exhaustion

- Elle évite le recours à tout processus infini.

La géométrie grecque est finitiste, à l'image des considérations cosmologiques qui ont dominé le monde grec dont l'univers est clos. Ainsi, la méthode d'exhaustion contourne tout passage à l'infini, car l'infini soulevait des paradoxes tels que ceux de Zénon.

Par exemple, dans La Mesure du cercle, Archimède n'utilise pas la notion de polygone à un nombre infini de côtés qui coïnciderait, à la limite, avec le segment de cercle. Il augmente le nombre de côtés du polygone **jusqu'à ce que la quantité résiduelle soit aussi petite que l'on voudra,** suffisamment pour faire jouer la contradiction MAIS IL Y AURA TOUJOURS UN RESTE comme le laisse comprendre cet extrait : *" Divisons les arcs en deux parties égales et que les segments du cercle aient à la fin une somme inférieure à la différence entre l'aire du cercle et celle du triangle "*

Les aires approchées n'épuisent pas exhaustivement l'aire recherchée.

- La méthode d'exhaustion n'est pas une méthode de recherche.

Cette méthode est un modèle achevé de technique démonstrative. Jusqu'au XVIIIème siècle, elle sera la seule méthode légitime universelle de démonstration, pour ces questions infinitésimales. C'est une méthode d'exposition qui force l'admiration aux dépens de la compréhension. *" Ce que nous avons connu des Anciens sur ces matières, principalement d'Archimède, est assurément digne d'admiration ."* écrit le Marquis de L'Hospital en 1696.

Suffisante pour montrer, elle s'avère cependant insuffisante pour expliquer et découvrir. En effet, elle suppose que l'on connaisse **a priori** le résultat que l'on veut prouver. La recherche de celui-ci se fait par d'autres démarches intuitives ou expérimentales. Ainsi Archimède découvrira de nombreux résultats par une méthode mécanique de pesée sur un levier fictif. Ce procédé de recherche ne nous sera connu qu'après la découverte, en 1906, par

[6] Déjà au XIème siècle, Al-Hayyam célèbre poète et mathématicien arabe avait cherché à justifier l'existence de la quatrième proportionnelle.

Heiberg du traité de La Méthode . Pour Archimède, cette pesée n'est pas une justification rigoureuse : " *La proposition qui précède n'est certes pas démontrée par ce que nous venons de dire, mais elle donne une certaine idée que la conclusion est vraie ; pour cette raison, voyant que la propriété n'est pas démontrée, mais pressentant que la conclusion est vraie, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique que nous avons trouvée."*

Les géomètres du XVIIème siecle, pour découvrir des résultats nouveaux se serviront de la méthode des indivisibles : méthode brève, directe et éclairante. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de cette méthode et de la polémique qui opposa alors les défenseurs des indivisibles, méthode des Modernes, et les adeptes de la méthode d'exhaustion, méthode des Anciens. Notons cependant que les géomètres du XVIIème siècle pensent que les Anciens possédaient une méthode de découverte, mais qu'ils la gardaient secrète. Torricelli s'en explique ainsi : "*Que cette géométrie des indivisibles soit une découverte entièrement nouvelle, je n'oserais l'affirmer. Je croirais plus volontiers que les anciens géomètres se sont servi de cette méthode dans la découverte des théorèmes les plus difficiles, bien qu'ils aient préféré une autre voie dans les démonstrations, soit pour cacher les secrets de l'art, soit pour ôter à des détracteurs jaloux l'occasion de les contredire.* " Nardi, ami de Torricelli dit : "*Il est certain que les admirateurs d'Achimède ont besoin d'expliquer sa manière oblique, parce qu'elle est longue et difficile dans les constructions et les preuves, parce qu'elle ne satisfait pas entièrement et qu'elle engendre la certitude mais non l'évidence.* "

- La méthode d'exhaustion nécessite de résoudre chaque problème cas par cas, de trouver pour chacun d'eux une procédure géométrique ad hoc.

- Cette méthode, enfin, est laborieuse et longue. Méthode indirecte, reposant sur un double raisonnement par l'absurde, elle nécessite de longs développements. Au XVIIème siècle, Wallis, à qui on reprochait de ne pas faire une démonstration à l'ancienne, rétorque: " *J'ai bien pu ne pas toujours en donner les prolixes développements ; je cherchais à m'épargner un travail pénible, à éviter l'ennui du lecteur* ".

II . Les apports d'Archimède

Bien que le schéma de démonstration reste le même que chez Euclide, Archimède le généralise à d'autres comparaisons de surfaces et de solides, et il en complexifie les éléments et les différentes étapes.

1. La notion de grandeur

Archimède apporte des précisions théoriques sur la notion de grandeur. Euclide ne définit pas ce qu'il entend par grandeur. Pour Euclide, les grandeurs peuvent être des segments de droite, des aires (limitées par des portions de droites ou des arcs de cercle), des volumes (sphère, cône, pyramide) ou des angles rectilignes. Les propriétés intuitives de ces grandeurs sont de s'additionner, de se partager, de se comparer et de satisfaire l'axiome dit d'Archimède (voir page 18).

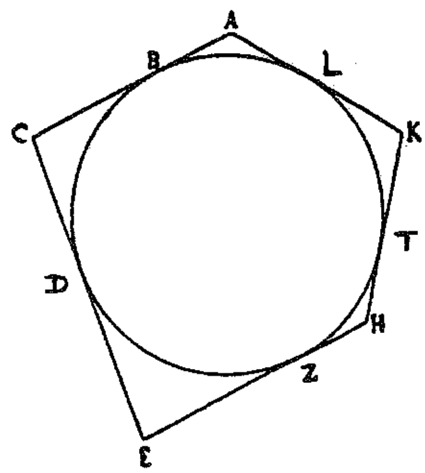
Archimède étend la notion de grandeur à des arcs de cercles, des portions de coniques, des surfaces gauches (la sphère), des poids et des durées.

2. La concavité des courbes

Archimède précise certaines notions relatives à la concavité des courbes. " *J'appelle concave dans la même direction une ligne ou une surface telle qu'ayant pris deux points quelconques sur cette ligne ou cette surface les droites qui joignent ces deux points tombent du même côté de la ligne ou de la surface* ". Il postule ensuite que " *la ligne droite est la plus courte des lignes ayant les mêmes extrémités (...) Quant aux autres lignes, lorsque, situées dans un plan, elles ont les mêmes extrémités, elles sont inégales si, étant les unes et les autres concaves dans la même direction, l'une d'elles est entièrement comprise entre une autre et la droite ayant les mêmes extrémités, ou est en partie comprise et en partie commune; et la ligne comprise est la plus petite.* "

Dans les <u>Eléments</u> d'Euclide on avait seulement *"Le tout est plus grand que la partie"*, ce qui ne lui permettait pas de comparer des lignes droites et des lignes courbes. Archimède peut le faire, comme le montre l'exemple de la proposition 1 du Livre I <u>De La Sphère et du Cylindre</u> : " *Si un polygone est circonscrit à un cercle, le périmètre du polygone circonscrit est plus grand que la circonférence du cercle.*" En voici la démonstration:

Circonscrivons un polygone au cercle donné ci-dessous ; je dis que le périmètre de ce polygone est plus grand que la circonférence de ce cercle. En effet, puisque la somme de BA, AL est plus grande que l'arc BL , parce que ces droites comprennent un arc ayant les mêmes extrémités, il en est aussi de même pour la somme de DC, CB, plus grande que l'arc DB ; pour la somme de LK, KT, plus grande que l'arc LT et pour la somme de ZH, HT, plus grande que l'arc ZT ; enfin pour la somme de DE, EZ, plus grande que l'arc DZ. Par conséquent, le périmètre entier du polygone est plus grand que la circonférence du cercle."



3. L'axiome d'Archimède ou de mesurabilité.

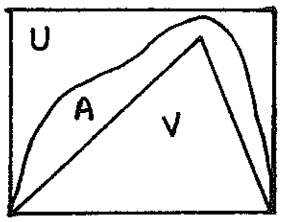
Archimède énonce cet axiome dans plusieurs de ses écrits : " *Parmi les lignes, surfaces et solides inégaux, le plus grand excède le plus petit d'une grandeur telle qu'étant ajoutée à elle-même, elle peut dépasser toute grandeur donnée ayant un rapport avec l'une et l'autre des premières.* " Remarquons que cet axiome n'était pas donné sous cette forme chez Euclide (voir page 18).

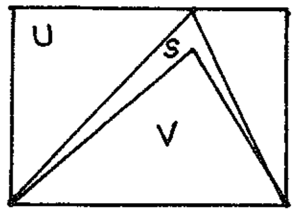
4. Usage des figures inscrites et circonscrites.

Archimède utilise à la fois une figure inscrite et une figure circonscrite. Le raisonnement procède en deux étapes.

- On construit les figures U et V, encadrant à la fois la figure A inconnue et la figure S connue, et telles que la différence V-U soit aussi petite que l'on veut, suffisamment petite pour aboutir aux contradictions nécessaires à la deuxième étape du raisonnement.
- Après un **double raisonnement par l'absurde,** on conclut que A est égale à S.

Les exemples étudiés dans la partie suivante mettront en évidence l'usage des figures inscrites et circonscrites.





5. Apparition des "sommes intégrales"

Archimède, comme le montrent les exemples de la partie IV, utilise à plusieurs reprises une suite de polygones inscrits et circonscrits dont les aires constituent une suite géométrique convergente. Pour calculer la mesure de la grandeur inscrite, Archimède utilise une méthode consistant à calculer la somme des n premiers termes d'une série, mais il évite de calculer la somme de ce qui serait pour nous la série infinie.

III. Utilisation des figures inscrites et circonscrites

La Mesure du cercle

Le résultat est semblable à celui de la proposition 2 du livre XII d'Euclide mais il s'en différencie par la démonstration qui fait apparaître un encadrement du cercle par des polygones inscrits et circonscrits. Les énoncés se présentent différemment :

Pour Euclide : " *Les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs diamètres* " (annexe 1)

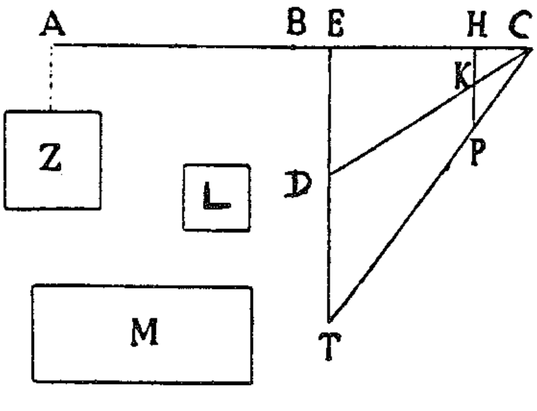
Pour Archimède : " *Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base égale au périmètre du cercle*" (annexe 2)

La Quadrature de la parabole

Le traité commence ainsi : " *Archimède à Dosithée, Prospérité ! (...) aucun de mes prédécesseurs n'a encore que je sache, cherché la quadrature d'un segment délimité par une droite et parabole, chose que nous avons trouvé maintenant.. (...) Je t'envoie donc les démonstrations que j'en ai écrites, d'abord telles que je les ai examinées par la mécanique, puis telles que je les ai établies par la géométrie.* "

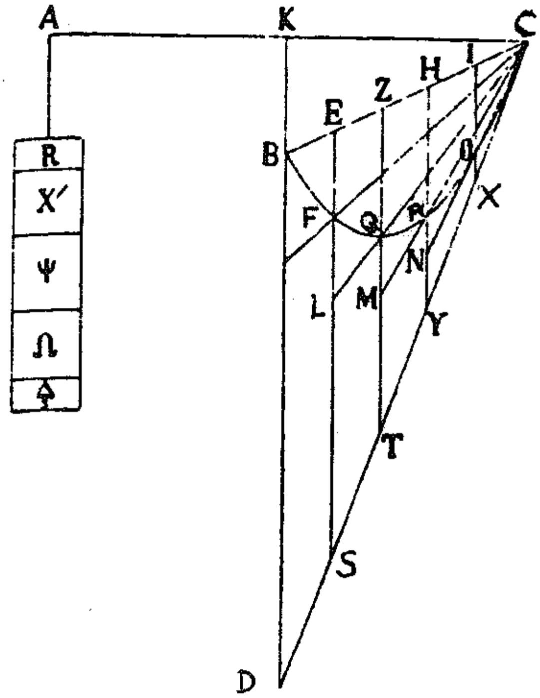
Décrivons rapidement la méthode qu'il appelle mécanique. Dans les propositions 6 à 13, Archimède imagine un levier fictif ayant un point fixe autour duquel sont opérées des pesées fictives de trapèzes et de surfaces de forme non précisée, permettant d'équilibrer le levier.

Lisons, par exemple la proposition 13 : "*Soit de nouveau un levier AC, le point B étant placé en son milieu, et un trapèze KDTP ayant ses côtés DK, TP dirigés vers le point C, et ses côtés DT, KP perpendiculaires à la droite BC. Que le trapèze soit suspendu au levier aux points E, H, et qu'une aire Z, suspendue au point A, fasse équilibre au trapèze DKTP dans la position qu'il occupe maintenant. De plus, que le rapport du trapèze DKTP à une aire L soit le même que celui de AB à BE, et que le rapport de ce trapèze à une aire M soit le même que celui de AB à BH. Dès lors on démontrera, de la même manière que précédemment, que l'aire Z est plus grande que l'aire L et plus petite que l'aire M .*"



Dans les propositions suivantes, 14, 15, 16, l'utilisation des figures inscrites et circonscrites, encadrant le segment de parabole, est bien mise en évidence. Ici, il s'agit de trapèzes (voir le texte en annexe 3). Voici le principe de la démonstration:

Archimède partage BC en segments égaux qui permettent de construire des trapèzes inscrits dans le segment de parabole et d'autres circonscrits à ce segment. Dans les propositions 14 et 15, Archimède montre que l'aire du triangle BDC est inférieure à 3 fois l'aire des trapèzes inscrits. (Il imagine, pour la démonstration, une balance dont le triangle BDC serait l'un des poids et les aires des trapèzes, l'autre poids). Puis à la proposition 16 intervient le double raisonnement par l'absurde.



Archimède suppose d'abord que l'aire du segment BQC est supérieure au tiers de l'aire du triangle BDC. Il choisit un partage de BC assez fin pour que la figure rectiligne inscrite diffère du segment d'une quantité inférieure à la différence

$\mathcal{A}\ (BQC) - \frac{1}{3}\mathcal{A}\ (BDC)$. Il aboutit alors à une absurdité. Il suppose ensuite que l'aire du segment est inférieure au tiers de celle du triangle. Il montre aussi que l'on aboutit à une absurdité; d'où la conclusion : l'aire du segment de parabole est le tiers de celle du triangle BDC.

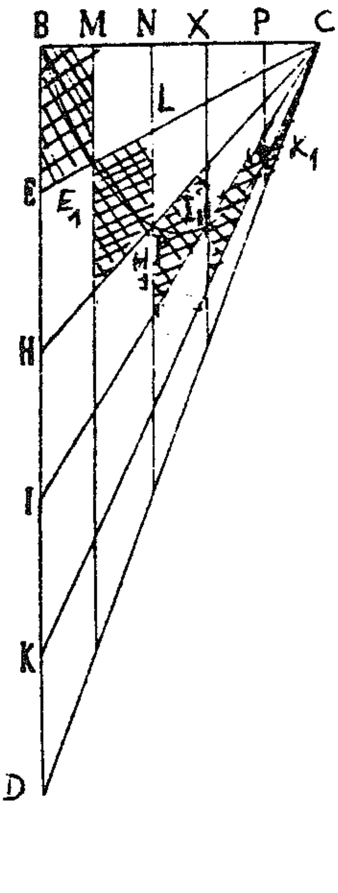
Décrivons maintenant la démarche de la première partie de la proposition 16, où Archimède montre, par un raisonnement par l'absurde, que l'aire A du segment de parabole BCQ n'est pas supérieure au tiers Z de l'aire du triangle BDC.

L'hypothèse de ce raisonnement par l'absurde est $A > Z$; il suppose donc l'existence d'un excédent e, égal à $A-Z$. D'après le lemme énoncé dans son introduction, il existe un entier n non nul tel que $n \times e > 3Z$. Il est donc possible de choisir une aire S telle que $S < e$ et telle que $nS = 3Z$.

Considérons alors un triangle BCE d'aire S. Les triangles BCE et BCD ont la même hauteur BC ; ils sont entre eux comme leurs bases BE et BD, donc $n \times BE = BD$. Archimède divise alors BD à l'aide de cette mesure BE, en n segments égaux (par exemple BE, EH, HI, IK, KD). Il trace les segments CE, CH... qui coupent la parabole en E_1, H_1, I_1,... Par ces points, il trace des parallèles au diamètre qui partagent BC en n segments égaux par exemple BM, MN, NX, XP et PC. Puisque

$S < e$, c'est à dire $S < A - Z$ on obtient

$Z + S < A$ (i)



Il remarque d'autre part que la somme des aires hachurées sur la figure ci-contre est égale à l'aire de BCD c'est à dire à S (il montre, en utilisant la méthode des aires, que par exemple, les trapèzes ML et LF ont même aire). La somme de ces aires hachurées représente par ailleurs la différence entre l'aire de la figure circonscrite et celle de la figure inscrite. L'aire A-S est donc inférieure à l'aire des trapèzes non hachurés NE_1, XH_1, PI_1 et du triangle PK_1C, situés dans le segment de parabole étudié. Avec l'inégalité (i), on obtient $Z < NE_1 + XH_1 + PI_1 + PK_1C$.

Or $Z = \frac{1}{3} BDC$ Il obtient l' inégalité : $BDG < 3\ (NE_1 + XH_1 + PI_1 + PK_1C)$

Cette dernière inégalité est impossible, car la proposition 14 a prouvé l'inégalité contraire. Donc l'hypothèse $A > Z$ est à rejeter.

Remarquons que le résultat d'Archimède est équivalent à celui qu'on obtient en calculant l'aire $\mathcal{A}$ du segment de parabole avec l'outil du calcul intégral, de la façon suivante :

$\mathcal{A} = \frac{1}{A^2} \int_0^a Y dY$ où A désigne l'aire de BCD, et $A = nY$, si Y désigne l'aire de BEC.

IV. Utilisation des "sommes intégrales"

Regardons de près quelques exemples, où Archimède calcule des sommes de termes de progressions géométriques.

La Quadrature de la parabole par la "méthode géométrique"

Nous nous intéressons ici à la méthode qu'Archimède appelle géométrique, c'est à dire aux raisonnements tenus aux propositions 23 et 24 de La Quadrature de la parabole (voir l'annexe 4). L'utilisation de la sommation d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{4}$ apparait clairement dans la proposition 23: *"Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre [7], la somme de toutes ces grandeurs, augmentées du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande ."* Cette proposition montre donc que, si les A_i représentent les grandeurs successives,

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + ... + A_n + \frac{1}{3} A_n = \frac{4}{3} A_1$$

Remarquons que, lorsque le nombre de termes de la série augmente, le reste $\frac{1}{3} A_n$ (ou $\frac{1}{3} \times (\frac{1}{4})^{n-1} A_1$), devient aussi petit que l'on veut.

Reprenons son raisonnement.

Soit S l'aire du segment de parabole ABC, de sommet B, et K une aire équivalente aux quatre tiers de celle du triangle ABC.

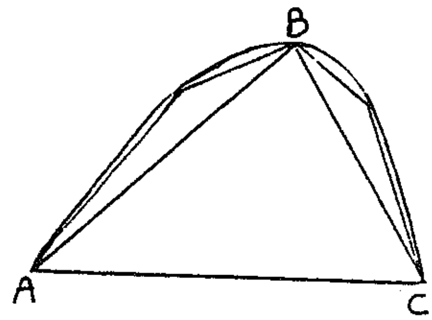
- Supposons $S > K$ et posons $e = S - K$.

D'après le corollaire de la proposition 20 (annexe 4), lorsque le polygone inscrit (dont l'aire est P, et qui est formé par additions successives de triangles dont les aires forment une

---

7 Nous dirions que la raison est $\frac{1}{4}$

suite de raison $\frac{1}{4}$), aura un nombre suffisant de côtés, on aura " la somme des segments restants " inférieure à e, donc $S - P < e$ ou $S - P < S - K$ d'où $K < P$. On aurait donc $P > \frac{4}{3} A$; ceci est impossible car, d'après la proposition 23, $P < \frac{4}{3} A$;



donc la supposition $S > K$ est fausse.

- Supposons $S < K$ et posons $K\text{-}S = e$. Soit Z l'aire du triangle ABC, puis $H = \frac{1}{4} Z$, $Q = \frac{1}{4} H$ etc. On définit ainsi des aires, jusqu'à ce que la dernière aire I soit inférieure à e. Or, par la proposition 23 :

$$Z + H + Q + I + \frac{1}{3} I = \frac{4}{3} Z = K \quad \text{donc} \quad K - (Z+H+Q+I) < I < e$$

or $K\text{-}S = e$; donc $Z+H+Q+I > S$. Ceci est impossible d'après la proposition 22, donc la supposition $S < K$ est fausse.

On conclut que $S = K$. On remarque qu'Archimède ne parle pas en termes de limite. C'est la double réduction à l'absurde, présente dans la proposition 24, qui assure le résultat qui, pour nous, s'exprimerait en termes de limite.

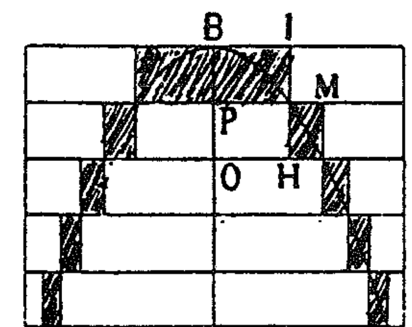
Volume du segment de paraboloïde

On retrouve un calcul de somme de série pour le volume du segment de paraboloïde de révolution. (Traité des Conoïdes et des Sphéroïdes, propositions 21 et suivantes)

Pour sa démonstration, Archimède utilise des inégalités (1) que nous exprimons ainsi :

$$h + 2h + 3h + \ldots + nh > \frac{1}{2} n^2 h \quad \text{et} \quad h + 2h + 3h + \ldots + (n-1)h < \frac{1}{2} n^2 h$$

Il inscrit et circonscrit des cylindres autour du segment de paraboloïde de révolution comme l'indique la figure ci-dessous. Les n cylindres circonscrits ont la même hauteur h. Donc $n h = BD$. Archimède remarque que *"la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'un cylindre ayant le cercle décrit autour du diamètre AC comme base et la droite ED comme axe"*, donc la différence entre la figure inscrite et la circonscrite peut être rendue aussi petite que l'on veut. Nous verrons plus loin que Ibn al-Haytham procède différemment. Soit un cône K valant une fois et demie le cône dont la base est le disque de diamètre AC et dont l'axe est BD. En se servant des inégalités (1) et de la remarque ci-dessus, Archimède met en place un raisonnement par double réduction à l'absurde.



Suggérons la démarche :

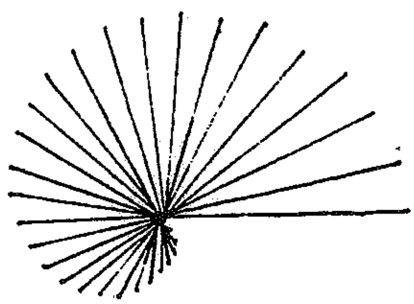
Il suppose d'abord que le segment de paraboloïde est plus grand que le cône K, et montre que le cylindre entier, dont l'axe est DB est plus grand que le double de la figure circonscrite, ce qui est impossible. Il suppose ensuite que le segment de paraboloïde est plus petit que le cône K, et montre que le cylindre entier, dont l'axe est DB est plus petit que le double de la figure circonscrite, ce qui est impossible. Il peut maintenant en conclure que le cylindre entier est égal au double du segment de paraboloïde et que le segment ABC est égal aux trois demis du cône ABC.

Le résultat obtenu dans cet exemple est équivalent à celui qu'on obtient par un calcul intégral moderne du type $\int_0^a x\,dx$.

A l'image de ce qu'il avait obtenu pour l'aire du cercle ou du segment de parabole, Archimède étudie la **raison** du segment de paraboloïde au cylindre entier circonscrit ; il **n'évalue pas** le volume du segment de paraboloïde.

Remarquons que sa méthode, quant à l'idée d'encadrer le segment de paraboloïde, est très proche de celle que l'on utilise en classe de lycée pour évaluer, par exemple, le volume d'une sphère.

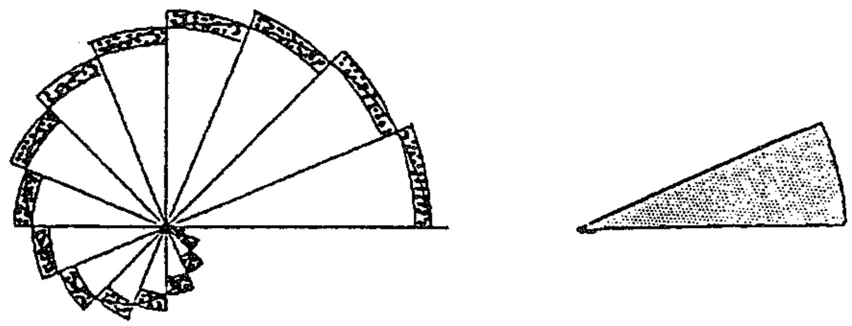
L'aire d'une portion de spirale



Pour déterminer, dans le traité Des spirales, l'aire de la première révolution de la spirale, Archimède utilise encore une méthode analogue (Des spirales, propositions 21 et suivantes, voir l'annexe 5).

La spirale est décrite comme composée de deux mouvements [8]. Le premier est le mouvement uniforme d'une demi-droite autour de son origine, l'autre, le mouvement uniforme d'un point sur la demi-droite, à partir de l'origine.

Comment trouver l'aire de la première révolution ? La première révolution de la spirale est découpée par n secteurs angulaires égaux. Comme l'illustre la figure ci-dessous, son aire est donc encadrée par deux sommes de secteurs circulaires. La différence entre les deux figures inscrite et circonscrite est égale à un secteur du grand disque. On peut donc rendre l'excèdent plus petit que toute aire donnée à l'avance.



La proposition 21 énonce:
"Si l'on prend l'aire comprise entre une spirale décrite en première révolution et entre la première droite à l'origine de la révolution, il est possible de lui circonscrire une figure plane et de lui en inscrire une autre qui soient composées de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une aire moindre que toute aire donnée."

Archimède établit à la proposition 24 que :

"L'aire comprise entre la spirale décrite en première révolution et la première des droites en position initiale de révolution est équivalente au tiers du premier cercle".

Le raisonnement qu'utilise Archimède est semblable à ceux décrits dans les exemples précedents. Il repose sur des relations équivalentes à celles que nous écrivons :

$$(n+1)^2\, a^2 + (a + 2a + 3a + ... + na) = 3\,[\, a^2 + (2a)^2 + ... + (na)^2\,]$$

---

[8] Une définition cinématique des courbes est très rare chez les mathématiciens grecs.

$n^3 < 3\ [1^2 + b\ 2^2 + ... + (n-1)^2]$
$n^3 > 3\ [1^2 + b\ 2^2 + ... + (n-1)^2]$

Comme à l'exemple 1, l'intégrale équivalente est du type : $\int_0^a x^2\, dx$

V. Les apports de Thabit ibn Qurra et de Ibn al-Haytham

Dans le monde grec, comme le souligne par exemple Eutocius (VIème siècle après J.C.), Archimède n'eut pas de successeur véritable. Ce sont les mathématiciens arabes du IXème siècle qui, les premiers, prolongèrent les résultats d'Archimède. Ces mathématiciens connaissaient la pensée grecque, ils disposaient de certaines oeuvres des mathématiciens grecs, ils traduisirent les Eléments d'Euclide, La Mesure du cercle d'Archimède; Thabit ibn-Qurra (836-901) est le traducteur des livres V à VII des Coniques d'Apollonius[9], et du traité d'Archimède De la sphère et du cylindre. Dans ces livres, comme nous l'avons vu ci-dessus, la méthode d'exhaustion apparaît sans le recours aux "sommes intégrales", qui figurent dans d'autres traités dont les mathématiciens arabes ignoraient vraisemblablement l'existence. Ils réussirent, non seulement à maîtriser la méthode d'exhaustion, mais à redécouvrir par des moyens nouveaux certains résultats donnés par Archimède. Nous noterons dans les travaux de Thabit ibn-Qurra et de Ibn al-Haytham (965-1041), appelé Alhazen par ses traducteurs latins, des méthodes originales et même des résultats qui ne se trouvent pas dans l'oeuvre d'Archimède.

Nous ne disposons malheureusement pas encore de traduction des oeuvres concernant cette étude . Ce n'est que par l'intermédiaire des lectures de A.Youschkevitch, de R. Rashed, et d'un groupe d'étudiants marocains de l'IREM de Rouen, que nous nous y référons.

1. La redécouverte des "sommes intégrales"

Les mathématiciens arabes redécouvrent ces sommes en les introduisant d'une façon différente. Nous allons le voir sur l'exemple de la quadrature de la parabole par Thabit ibn-Qurra, dans son Livre sur la mesure de la section conique appelée parabole (Kitab fi masahat qat al-mahrut alladi yusamma al mukafi). Il y retrouve le résultat qu'Archimède avait démontré en considérant le segment de parabole comme la somme d'une série géométrique dont les sommes partielles sont des aires de polygones inscrits (cf. p. 24). Son calcul est équivalent à ceui de l'intégrale $\int_0^a \sqrt{x}\, dx$.

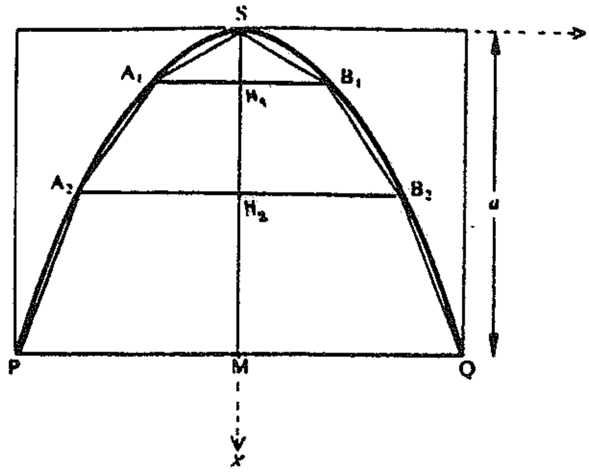
Son procédé consiste à diviser l'intervalle d'étude en parties inégales. Le calcul de l'intégrale évoquée ci-dessus, en subdivisant l'intervalle [0, a] en n parties égales aurait exigé la sommation de la série $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n}$. Thabit ibn-Qurra élimine cette difficulté à l'aide d'une idée ingénieuse: il subdivise l'intervalle [0, a] en n parties, telles que les abscisses des points de la subdivision soient proportionnelles à la suite des carrés des entiers, 1^2, 2^2, 3^2, et que la somme des n parties soit égale à a. Ainsi les valeurs de $\sqrt{x}$ deviennent des nombres entiers. Sa méthode consiste dans un premier temps à établir quinze lemmes arithmétiques, où, entre autres, il calcule les sommes:

[9] Cette oeuvre de première importance ne nous est parvenue que grâce à cette traduction arabe

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + \frac{n}{3} = \frac{2}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right] \times 2n$$

Voici une description sommaire de la démonstration, en termes modernes. Thabit ibn-Qurra définit la parabole, suivant la tradition d'Apollonius et d'Archimède, par une propriété correspondant à l'équation $y^2 = px$. Nous décrivons le calcul, en suivant l'interprétation de la Brochure "Découvrir les mathématiques arabes" de l'IREM de Rouen, dans le cas d'un segment "droit" de parabole (la corde est perpendiculaire à l'axe) ; mais le calcul est mené dans la cas général.

Soit SPMQ le segment de parabole. Posons SM = a.



Puisque $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, on peut diviser SM à l'aide des points H_1, H_2,..., tels que:

$SH_1 = \frac{a}{n^2}$ $H_1H_2 = \frac{3a}{n^2}$ $H_2H_3 = \frac{5a}{n^2}$ etc...

$H_{n-1}M = \frac{(2n-1)a}{n^2}$. Notons $f(x) = \sqrt{px}$; les bases des trapèzes inscrits dans le segment de parabole vérifient:

$$A_1B_1 = 2\,f\left(\frac{a}{n^2}\right) = 2\frac{\sqrt{ap}}{n}$$

$$A_2B_2 = 2\,f\left(\frac{a}{n^2} + \frac{3a}{n^2}\right) = 4\frac{\sqrt{ap}}{n}$$

....

* L'aire S_n du polygone inscrit dans la parabole peut être évaluée en additionnant l'aire s_n du triangle A_1SB_1 et les aires des trapèzes $A_2\,A_1\,B_1\,B_2$, ...:

$$S_n = \frac{1}{2}A_1B_1 \times SH_1 + \frac{1}{2}(A_1B_1 + A_2B_2)\,H_1H_2 + \ldots$$

$$= \frac{a}{n^2} \times \frac{\sqrt{ap}}{n} \times (\,1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2\,)$$

$$= \frac{a}{n^2} \times \frac{\sqrt{ap}}{n} \times \frac{4n^3 - n}{3}$$ (en utilisant l'expression de la somme des carrés des entiers impairs).

* L'aire R du rectangle circonscrit à la parabole vaut: $R = a \times f(a) = a \times 2\sqrt{ap}$. Donc $\frac{2}{3}R - S_n = \frac{a\sqrt{ap}}{3n^2}$. Cette différence, qui pour Ibn-Qurra est égale à $\frac{n}{3}$ fois l'aire s_n du triangle A_1SB_1 peut être rendue plus petite que toute aire arbitrairement donnée, à condition que le nombre n de subdivisions soit assez grand.

* D'autre part, la différence $S - S_n$ entre l'aire S du segment de parabole et l'aire S_n du polygone inscrit peut également être rendue aussi petite que l'on veut. C'est toujours à l'aide de la proposition 1 du Livre X des Eléments d'Euclide, qu'Ibn-Qurra obtient ces résultats. [10]

---

[10] Signalons que, dans un autre ouvrage Sur le calcul des paraboloïdes, Ibn-Qurra généralise la proposition 1 du Livre X, en énonçant à peu près: "si on soustrait de la plus grande de deux grandeurs données une partie dont le rapport à cette grandeur ne soit pas plus petit que $\frac{a}{b} < 1$; et que l'on soustrait de nouveau du reste une partie qui

* Les deux hypothèses $S > \frac{2}{3}R$ et $S < \frac{2}{3}R$ aboutissent à des contradictions; Ibn-Qurra en conclut donc que $S = \frac{2}{3}R$, c'est à dire S est égal aux quatre tiers de l'aire du triangle SPQ.

2. La mesure du paraboloïde de révolution par Ibn al-Haytham

Ibn al-Haytham reprend l'ensemble des études précédentes, et en particulier l'étude du paraboloïde de révolution déjà faite par Ibn-Qurra. Cependant Ibn al-Haytham améliore les démonstrations en réduisant le nombre de lemmes nécessaires. Comme ses prédécesseurs, il étudie le volume du solide de révolution engendré par la rotation d'un segment de parabole autour de son axe (paraboloïde de première espèce), mais également du solide engendré par la révolution d'un segment de parabole autour d'une "ordonnée" (c'est à dire une perpendiculaire à l'axe de la parabole), qu'Ibn al-Haytham appelle paraboloïde de deuxième espèce.

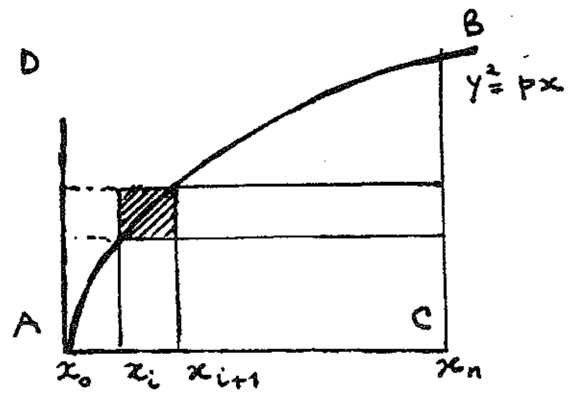
A l'occasion de ces calculs il obtient des résultats intéressants, donnant les sommes de puissances entières des premiers entiers successifs. Notons par exemple, ce résultat nouveau, obtenu par induction:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = n\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n(n+1)-\frac{1}{3}\right)$$

Volume du segment de paraboloïde de première espèce

Comme Archimède, Ibn al-Haytham inscrit et circonscrit des cylindres autour du segment de paraboloïde. Il divise le segment AC en n segments égaux (que nous désignons par $[x_i, x_{i+1}]$, pour i variant de 0 à n-1). Si on désigne par V le volume du cylindre de base le cercle de rayon AD et de hauteur AC, par I_n la somme des volumes des n cylindres inscrits dans le paraboloïde et C_n la somme des volumes des n cylindres circonscrits, Ibn al-Haytham établit que

$I_n < \frac{1}{2}V$ et que $C_n > \frac{1}{2}V$.



Sa démarche diffère ensuite de celle d'Archimède. Si on augmente le nombre des points de subdivision, en ajoutant les milieux de chacun des petits segments, on obtient une nouvelle subdivision comportant deux fois plus de petits segments, et il montre que, si d désigne la différence $C_n - I_n$, la nouvelle différence $C_{2n} - I_{2n}$ est égale à $\frac{d}{2}$. La différence $C_n - I_n$ peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut.

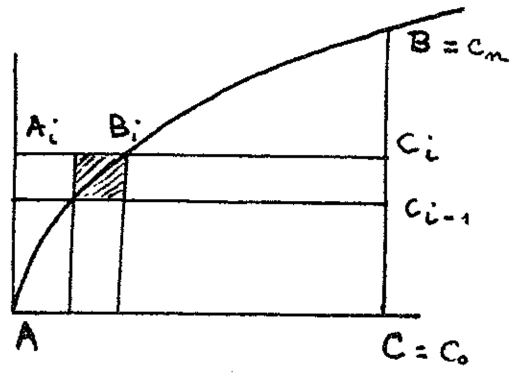
Enfin , pour montrer que le volume du segment de paraboloïde est égal à $\frac{1}{2}V$, Ibn al-Haytham emprunte la voie traditionnelle du double raisonnement par l'absurde.

Volume du paraboloïde de deuxième espèce.

Ce paraboloïde est obtenu en faisant tourner le segment de parabole ABC autour de "l'ordonnée" BC.

a même rapport avec ce reste et ainsi de suite, on obtient, lorsqu'on poursuit ce procédé un certain nombre de fois, un reste plus petit que la plus petite des deux grandeurs données." (Youschkevitch, p. 128) On retrouve chez Ibn al-Haytham cette même généralisation.

Ibn al-Haytham subdivise le segment BC de longueur b en n intervalles égaux, de longueur h (nous nommons ces intervalles $[c_i \, c_{i+1}]$). Le nombre n d'intervalles est une puissance de 2 . Traduisons son calcul dans un système de coordonnées où l'équation de la parabole est $x = ky^2$ et où les coordonnées d'un point M_i de la parabole sont x_i et y_i, le rayon r_i d'un cylindre est $r_i = k\,(b^2 - y_i^2) = k\,h^2\,(n^2 - i^2)$



Avec les mêmes notations qu'au dessus, on obtient

$$I_n = \sum_{i=1}^{n-1} \pi \; k^2 \; h^5 \; (n^2 - i^2)^2$$

$$\text{et } C_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi \; k^2 \; h^5 \; (n^2 - i^2)^2$$

L'encadrement suivant , obtenu par Ibn al-Haytham à l'aide de ses calculs sur les sommes de puissances:

$$\sum_{k=1}^{n} [(n+1)^2 - k^2]^2 < \frac{8}{15}(n+1)\,(n+1)^4 < \sum_{k=0}^{n} [(n+1)^2 - k^2]^2$$

permet de montrer que $I_n < \frac{8}{15} V < C_n$.

Puis, par un double raisonnement par l'absurde, Ibn al-Haytham montre que le volume du paraboloïde est égal aux huit quinzièmes du volume du cylindre circonscrit.

Nous pouvons noter que son calcul équivaut à celui d'une intégrale du type $\int_0^a t^4 \, dt$

Il est intéressant de remarquer qu' Ibn al-Haytham conclut son traité par une réflexion sur la méthode qu'il a suivie. Il craint que le lecteur n'attache d'importance dans la preuve qu'à la réduction à l'absurde et que le contenu du raisonnement ne lui échappe. Il a choisi d'élucider "la cause grâce à laquelle s'est parfaitement réalisée la démonstration". Citons le commentaire de R. Rashed: "Il s'agit de déterminer avec rigueur la principale raison qui fait que le volume du paraboloïde est égal à $\frac{8}{15}$ V,(...) et égal à cette valeur seulement. (...) L'idée est la suivante: $\frac{8}{15}$ V est le plus petit majorant de l'ensemble des valeurs de la suite monotone croissante (I_n) et le plus grand minorant de l'ensemble des valeurs de la suite décroissante (C_n) ; et elle est la seule valeur qui possède cette propriété. Ibn al-Haytham n'a certes pas formulé son idée dans de tels termes mais tout est présent pour qu'une telle traduction soit permise."[11] R. Rashed, qui signale de plus que Ibn al- Haytham s'intéresse à la variation des petits solides représentant les différences entre les cylindres inscrits et circonscrits (hachurés sur la figure), quand le nombre des points de la subdivision augmente indéfiniment, pense que l'on trouve là une pensée franchement infinitésimale.

Toujours selon l'étude de R. Rashed, la méthode d'Ibn al-Haytham est une version infléchie de la méthode d'exhaustion: " Ibn al-Haytham a jugé, sans ambiguïté aucune, que cette méthode est à la fois apodictique et heuristique", qu'elle permet aussi bien de prouver que de découvrir un résultat.

[11] R. Rashed, p. 205

Conclusion

Nous avons suivi l'évolution de la méthode d'exhaustion d'Euclide à Ibn al-Haytham. Cette méthode procède toujours par un double raisonnement par l'absurde et elle est fondée sur l'axiome dit "d'Archimède". De processus purement géométriques, elle glisse peu à peu, chez Archimède, vers des processus plus numériques. Cette évolution est encore plus marquée chez les mathématiciens arabes, qui enrichissent les procédés de calcul. La méthode devient plus arithmétique chez Ibn al-Haytham, qui utilise de nombreuses relations sur les puissances d'entiers consécutifs, pour les déterminations de volumes. De plus, il nous livre ses réflexions sur la nature de cette méthode.

La méthode d'exhaustion subira des évolutions diverses au cours des siècles suivants. Par exemple, on pourra voir chez Stevin un abandon progressif du recours à la double réduction par l'absurde, et une mise en forme d'un processus plus général. Par la suite, des techniques arithmétiques seront développées, par Roberval, Wallis.... Dans une autre direction, Grégoire de Saint Vincent s'autorisera l'extension à l'infini du polygone inscrit pour épuiser la surface du segment de parabole... Malgré les inconvénients qui sont reprochés à la méthode d'exhaustion (elle est longue, laborieuse, peu éclairante...), et malgré l'apparition d'autres méthodes (les indivisibles, le calcul différentiel de Newton et celui de Leibniz - certes contestés quant à leurs fondements-), cette méthode d'exhaustion reste, jusqu'à une époque tardive, la seule méthode légitime de démonstration, la méthode de référence par excellence; Legendre, dans ses Eléments de Géométrie, à la fin du XVIIIème siècle, y a encore recours pour le volume de la pyramide.

Bibliographie

Aragnol A. et alii Mathématiques en Méditerranée, Edisud- Musées de Marseille, Aix en Provence, 1988

Archimède L'Oeuvre complète, Traduction P.Ver Eecke, 1921, réédition Blanchard, Paris, 1961

Boyer C.B. The history of the calculus and its conceptual development, Dover, New York, 1949

Dhombres J. Nombre, mesure et continu, Cedic, Nathan, Paris, 1978

Euclide Les Eléments, traduction de Peyrard, 1819, réédition Blanchard, 1966

Heath T. L. A History of greek Mathematics, Dover, New York, 1981

IREM de Rouen Découvrir les mathématiques arabes, sous la responsabilité d'E. Hébert, 1988-89 BP 27 Mt Saint Aignan 76130

Le Goff J.P. De la méthode dite d'exhaustion in "La démonstration mathématique dans l'histoire", Actes du 7ème colloque inter-Irem d'épistémologie et d'histoire des mathématiques publié par l'Irem de Lyon, 1990 Université Claude Bernard 43 Bd du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex

Rashed R. Ibn al-Haytham et la mesure du Paraboloïde, in Journal for the History of Arabic Science, vol. 5, 1981

Youschkevitch A.P. Les mathématiques arabes, trad. de M. Cazenave et K. Jaouiche, Vrin, Paris, 1976

ANNEXE 1

LA MESURE DU CERCLE

1.

Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base (c'est-à-dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle[1].

Que le cercle ΑΒΓΔ soit au triangle E comme l'indique l'hypothèse ; je dis qu'il lui est équivalent.

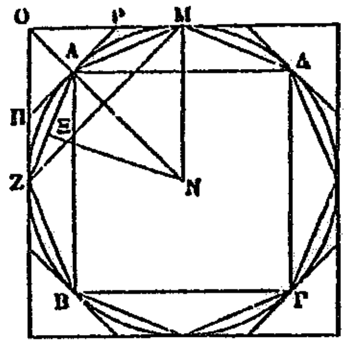


Fig. 61.

Que le cercle soit en effet, si possible, plus grand. Inscrivons-y le carré ΑΓ et divisons en deux parties égales les arcs (sc. admettant comme cordes les côtés du carré) ; que les segments de cercle aient à la fin (sc. si on répète les opérations de division en deux parties égales) une somme inférieure à la différence entre l'aire du cercle et celle du triangle[2]. La figure rectiligne sera donc encore plus grande que le triangle. Prenons le centre N et abaissons la perpendiculaire NΞ. NΞ sera donc inférieur au (sc. plus petit) côté du triangle. Mais le périmètre de la figure rectiligne est à son tour plus petit que le côté restant, du moment qu'il est plus petit que le périmètre du cercle[1]. La figure rectiligne est par conséquent plus petite que le triangle E, ce qui est absurde.

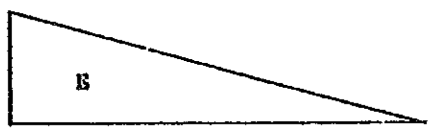


Fig. 62.

Que le cercle soit, d'autre part, plus petit, si possible, que le triangle E ; circonscrivons-lui un carré, divisons les arcs en deux parties égales et menons des tangentes par les points (sc. de division). L'angle OAP est donc droit[3] ; OP est par conséquent supérieur à MP, du moment que PM est égal à PA, et le triangle POΠ est plus grand que la moitié de la figure OZAM[4]. Qu'il reste donc des segments tels que ΠZA, dont la somme soit inférieure à la différence entre l'aire du triangle E et celle du cercle ΑΒΓΔ[4]. La figure rectiligne circonscrite est, par conséquent, encore inférieure au triangle E, ce qui est absurde ; elle est, en effet, plus grande, du moment que NA est égal à la hauteur du triangle, et que le périmètre est plus grand que la base du triangle[5]. Il s'ensuit que le cercle est équivalent au triangle E.

ANNEXE 2

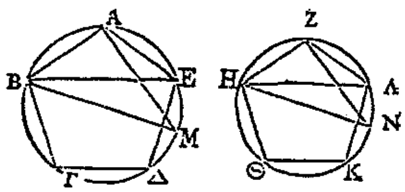
LE DOUZIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION I.

Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entr'eux comme les quarrés des diamètres.

Soient les cercles ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ; soient dans ces cercles les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et que les diamètres de ces cercles soient ΒΜ, ΗΝ; je dis que le quarré de ΒΜ est au quarré de ΗΝ comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΛ.

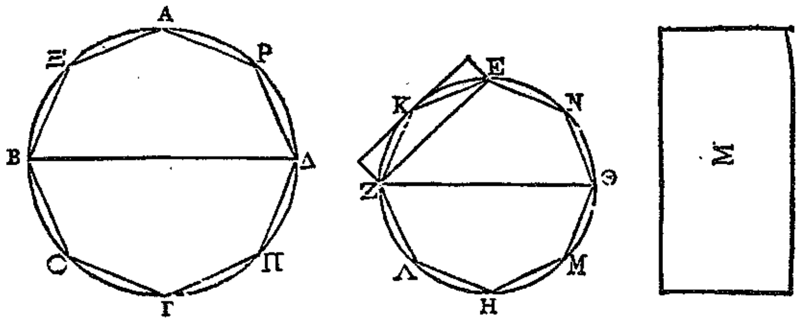


Car joignons ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. Puisque le polygone ΑΒΓΔΕ est semblable au polygone ΖΗΘΚΛ, que l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΗΖΛ (déf. 1. 6), et que ΒΑ est à ΑΕ comme ΗΖ est à ΖΛ, les deux triangles ΒΑΕ, ΗΖΛ ont un angle égal à un angle; savoir, l'angle ΒΑΕ égal à l'angle ΗΖΛ, et les côtés, placés autour de ces angles, proportionnels; les triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ sont donc équiangles (6. 6); l'angle ΑΕΒ est donc égal à l'angle ΖΛΗ. Mais l'angle ΑΕΒ est égal à l'angle ΑΜΒ (21. 3), car ces angles sont appuyés sur le même arc, et l'angle ΖΛΗ est aussi égal à l'angle ΖΝΗ; l'angle ΑΜΒ est donc égal à l'angle ΖΝΗ. Mais l'angle droit ΒΑΜ est égal à l'angle droit ΗΖΝ (31. 3); l'angle restant est donc égal à l'angle restant; les deux triangles ΑΒΜ, ΖΗΝ sont donc équiangles; ΒΜ est donc à ΗΝ comme ΒΑ est à ΗΖ (4. 6). Mais la raison du quarré de ΒΜ au quarré de ΗΝ est double de la raison ΒΜ à ΗΝ (20. 6), et la raison du polygone ΑΒΓΔΕ au polygone ΖΗΘΚΛ est double de la raison de ΒΑ à ΗΖ; le quarré de ΒΜ est donc au quarré de ΗΝ comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΛ (11. 5). Donc, etc.

PROPOSITION II.

Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres.

Soient les cercles ABΓΔ, EZHΘ, et que leurs diamètres soient BΔ, ZΘ; je dis que le quarré de BΔ est au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est au cercle EZHΘ.



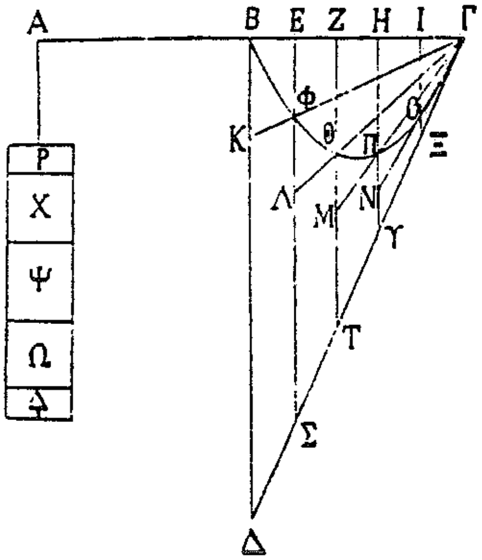
Car si le quarré de BΔ n'est pas au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est au cercle EZHΘ, le quarré BΔ sera au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle EZHΘ. Que ce soit d'abord à une surface Σ plus petite. Dans le cercle EZHΘ décrivons le quarré EZHΘ; le quarré décrit sera plus grand que la moitié du cercle EZHΘ, parce que, si par les points E, Z, H, Θ nous menons des tangentes à ce cercle, le quarré EZHΘ sera la moitié du quarré circonscrit au cercle (47. 11 et 31. 3). Mais le cercle est plus petit que le quarré circonscrit; le quarré inscrit EZHΘ est donc plus grand que la moitié du cercle EZHΘ. Partageons les arcs EZ, ZH, HΘ, ΘE en deux parties égales aux points K, Λ, M, N, et joignons EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE. Chacun des triangles EKZ, ZΛH, MHΘ, ΘNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; parce que si par les points K, Λ, M, N nous menons des tangentes au cercle, et si sur les droites EZ, ZH, HΘ, ΘE nous construisons des parallélogrammes, chacun des triangles EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE sera la moitié du parallélogramme dans lequel il est placé (37. 1). Mais un segment est plus petit que le parallélogramme où il est placé; chacun des triangles EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès du cercle EZHΘ sur la surface Σ; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs exposées. Qu'on ait ce reste, et que ce soient les segments du cercle EZHΘ placés sur les droites EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE, et qu'ils soient plus petits que l'excès du cercle EZHΘ sur la surface Σ; le polygone restant EKZΛHMΘN sera plus grand que la surface Σ. Décrivons dans le cercle ABΓΔ un polygone AΞBOΓΠΔP semblable au polygone EKZΛHMΘN; le quarré de BΔ sera au quarré de ZΘ comme le polygone AΞBOΓΠΔP est au polygone EKZΛHMΘN (1. 12). Mais le quarré de BΔ est au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à la surface Σ; le cercle ABΓΔ est donc à la surface Σ comme le polygone AΞBOΓΠΔP est au polygone EKZΛHMΘN; donc, par permutation, le cercle ABΓΔ est au polygone qui lui est inscrit comme la surface Σ est au polygone EKZΛHMΘN. Mais le cercle ABΓΔ est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; la surface Σ est donc plus grande que le polygone EKZΛHMΘN. Mais il est aussi plus petit, ce qui est impossible; le quarré de BΔ n'est donc point au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus petite que le cercle EZHΘ. Nous démontrerons semblablement que le quarré de ZΘ n'est point au quarré de BΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface plus petite que le cercle ABΓΔ. Je dis ensuite que le quarré de BΔ n'est point au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus grande que le cercle EZHΘ. Car si cela est possible, que le quarré de BΔ soit au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface Σ plus grande. Par inversion, le quarré de ZΘ sera au quarré de BΔ comme la surface Σ est au cercle ABΓΔ. Mais la surface Σ est au cercle ABΓΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface plus petite que le cercle ABΓΔ; le quarré de ZΘ est donc au quarré de BΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface plus petite que le cercle ABΓΔ, ce qui a été démontré impossible; le quarré de BΔ n'est donc pas au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus grande que le cercle EZHΘ. Mais on a démontré que le quarré de BΔ n'est point au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus petite que le cercle EZHΘ; le quarré de BΔ est donc au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est au cercle EZHΘ. Donc, etc.

ANNEXE 3

PROPOSITION XIV

Soit BΘΓ un segment délimité par une droite et par une parabole. Soit, dans un premier cas, la droite BΓ perpendiculaire au diamètre. Menons, par le point B, la droite BΔ parallèle au diamètre, et, par le point Γ, la droite ΓΔ tangente à la parabole au point Γ ; le triangle BΓΔ sera donc rectangle. Partageons la droite BΓ en autant de parties égales qu'on voudra : BE, EZ, ZH, IΓ ; menons, par les points de division, les parallèles au diamètre EΣ, ZT, HΥ, IΞ, et relions au point Γ, par des droites que nous prolongeons, les points où ces parallèles coupent la parabole. Dès lors, je dis que le triangle BΔΓ est plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes KE, ΛZ, MH, NI et du triangle ΞIΓ, et qu'il est plus grand que le triple de l'ensemble des trapèzes ZΦ, HΦ, IΠ et du triangle IOΓ.

En effet, menons la droite ABΓ ; découpons-en une droite AB égale à la droite BΓ, et imaginons que AΓ soit un levier, dont le milieu est le point B, et qui soit suspendu au point B. Suspendons aussi le triangle BΔΓ au levier aux points B, Γ, et suspendons à l'autre partie du levier, au point A, des aires P, X, Ψ, Ω, Δ. Que l'aire P fasse équilibre au trapèze ΔE tel qu'il est placé, l'aire X au trapèze ZΣ, l'aire Ψ au trapèze TH, l'aire Ω au trapèze ΥI, et l'aire Δ au triangle ΞIΓ. Dès lors, l'un ensemble fera équilibre à l'autre, en sorte que le triangle BΔΓ sera triple de l'aire PXΨΩΔ (1). De plus, puisque BΓΘ est un segment délimité par une droite et par une parabole, que la droite BΔ a été menée du point B parallèlement au diamètre, que la droite ΓΔ a été menée du point Γ tangentiellement à la parabole en Γ, et qu'une autre droite ΣE a aussi été menée parallèlement au diamètre, le rapport de BΓ à BE sera le même que celui de ΣE à EΦ (2) ; en sorte que le rapport de BA à BE sera aussi le même que celui du trapèze ΔE au trapèze KE (3). On démontrerait, de la même manière, que le rapport de AB à BZ est le même que celui du trapèze ΣZ au



1. Voir proposition VI.

2. On a, en vertu de la proposition V : $\frac{E\Gamma}{BE} = \frac{\Phi\Sigma}{E\Phi}$, d'où : $\frac{BE + E\Gamma}{BE} = \frac{E\Phi + \Phi\Sigma}{E\Phi}$, ou, comme le texte : $\frac{B\Gamma}{BE} = \frac{\Sigma E}{E\Phi}$.

3. Les trapèzes étant entre eux comme leurs aires :
$\frac{\text{trap. } \Delta E}{\text{trap. } KE} = \frac{BE \times \frac{1}{2}[B\Delta + \Sigma E]}{BE \times \frac{1}{2}[BK + E\Phi]} = \frac{B\Delta + \Sigma E}{BK + E\Phi}$. Or, par similitude de triangles : $\frac{B\Delta}{BK} = \frac{\Sigma E}{E\Phi}$; donc : $\frac{B\Delta + \Sigma E}{BK + E\Phi} = \frac{\Sigma E}{E\Phi}$, d'où : $\frac{\text{trap. } \Delta E}{\text{trap. } KE} = \frac{\Sigma E}{E\Phi}$, et, comparant avec la relation de la note précédente, en observant que BA = BΓ, il vient, comme le texte : $\frac{BA}{BE} = \frac{\text{trapèze } \Delta E}{\text{trapèze } KE}$.

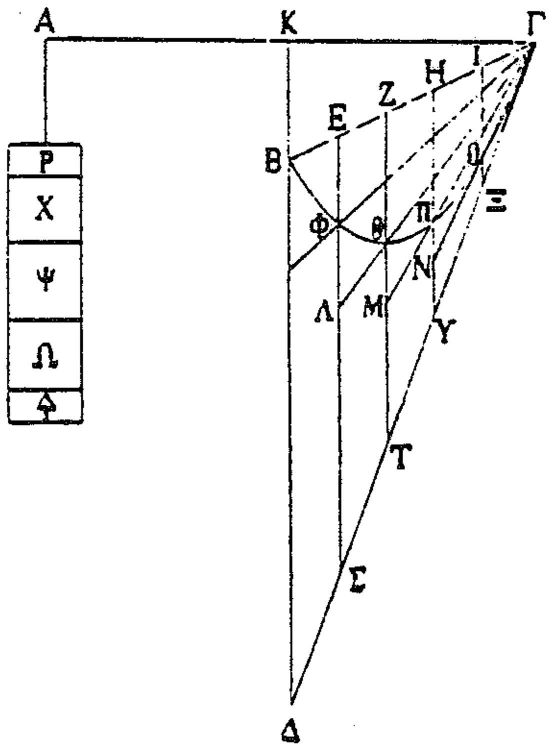
trapèze ΛZ, que son rapport à BH est le même que celui du trapèze TH au trapèze MH, et que son rapport à BI est le même que celui du trapèze YI au trapèze NI. Dès lors, puisque l'on a un trapèze ΔE, ayant les angles placés aux points B et E droits et les côtés dirigés vers le point Γ, tandis qu'une aire P, suspendue au levier au point A, fait équilibre à ce trapèze dans la position qu'il occupe maintenant, et que le trapèze ΔE est au trapèze KE comme BA est à BE, il s'ensuit que l'aire KE est plus grande que l'aire P ; car cela a été démontré (1). D'autre part, on a de nouveau un trapèze ZΣ, ayant les angles situés en Z et E droits et la droite ΣT dirigée vers le point Γ, tandis qu'une aire X, suspendue au levier en A, fait équilibre à ce trapèze dans la position qu'il occupe maintenant ; de plus, le trapèze ZΣ est au trapèze ZΦ comme AB est à BE, et le trapèze ZΣ est au trapèze ΛZ comme AB est à BZ. En conséquence, l'aire X sera plus petite que le trapèze ΛZ et plus grande que le trapèze ZΦ ; car cela a été démontré aussi (2). Enfin, pour les mêmes raisons, l'aire Ψ sera plus petite que le trapèze MH et plus grande que le trapèze ΘH ; l'aire Ω sera plus petite que le trapèze NOIH et plus grande que le trapèze ΠI, et, de même (3) encore, l'aire Δ̣ sera plus petite que le triangle ΞΓ et plus grande que le triangle ΓIO. Dès lors, puisque le trapèze KE est plus grand que l'aire P, le trapèze ΛZ plus grand que l'aire X, le trapèze MH plus grand que l'aire Ψ, le trapèze NI plus grand que l'aire Ω, et le triangle ΞIΓ plus grand que l'aire Δ̣, il est clair que l'ensemble des aires, que nous venons de dire, est plus grand que l'aire PXΨΩΔ̣. Or, l'aire PXΨΩΔ̣ est la troisième partie du triangle BΓΔ ; par conséquent, il est évident que le triangle BΓΔ est plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes KE, ΛZ, MH, NI et du triangle ΞIΓ. D'un autre côté, puisque le trapèze ZΦ est plus petit que l'aire X, le trapèze ΘH plus petit que l'aire Ψ, le trapèze IΠ plus petit que l'aire Ω, et le triangle IOΓ plus petit que l'aire Δ̣, il est clair que l'ensemble des aires, que nous venons de dire, sera aussi plus petit que l'aire Δ̣ΩΨX. Donc, il est évident que le triangle BΔΓ est plus grand que le triple de l'ensemble des trapèzes ΦZ, ΘH, IΠ et du

1. Voir proposition X.
2. Voir proposition XII.
3. Voir proposition VIII.

triangle ΙΓΟ, et qu'il est plus petit que le triple des aires désignées en premier lieu (1).

PROPOSITION XV

Soit de nouveau un segment ΒΘΓ délimité par une droite et par une parabole, et que la droite ΒΓ ne soit plus perpendiculaire au diamètre. Dès lors, il faut nécessairement qu'un angle obtus soit formé avec la droite ΒΓ, soit par la droite menée du point Β parallèlement au diamètre du côté du segment, soit par la droite menée du point Γ. Que la droite formant l'angle obtus soit celle qui est située du côté du point Β. Du point Β, menons la droite ΒΔ parallèle au diamètre, et du point Γ, la droite ΓΔ tangente à la parabole en Γ. Divisons la droite ΒΓ en autant de parties égales qu'on voudra : ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ ; des points Ε, Ζ, Η, Ι, menons les droites ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, et, des points où ces dernières coupent la parabole, menons, vers le point Γ, les droites de jonction que nous prolongeons. Je dis que, maintenant encore, le triangle ΒΔΓ est plus petit que le triple des trapèzes ΒΦ,



1. On aura, en vertu des propositions VIII et XII :
$\sum$ trapèzes (ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ) + triangle ΞΙΓ $>$ aire (Ρ + Χ + Ψ + Ω + Δ), et $\sum$ trapèzes (ΖΦ, ΘΗ, ΙΠ) + triangle ΙΟΓ $<$ aire (Χ + Ψ + Ω + Δ). Or, en vertu de la proposition VI, on a : aire (Ρ + Χ + Ψ + Ω + Δ) $= \frac{1}{3}$ triangle ΒΓΔ ; donc :
triangle ΒΓΔ $=$ 3 aires (Ρ + Χ + Ψ + Ω + Δ), et triangle ΒΓΔ $>$ 3 aires (Χ + Ψ + Ω + Δ), d'où, par substitution des valeurs précédentes, il vient, comme dans le texte :
triangle ΒΔΓ $<$ 3 [$\sum$ trapèzes (ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ) + triangle ΞΙΓ], et triangle ΒΔΓ $>$ 3 [$\sum$ trapèzes (ΖΦ, ΘΗ, ΙΠ) + triangle ΙΟΓ].

ΛZ, MH, NI, augmentés du triangle ΓΙΞ, et qu'il est plus grand que le triple des trapèzes ZΦ, HΘ, IΠ, augmentés du triangle ΓΟΙ.

Prolongeons la droite ΔB de l'autre côté (1). Ayant mené perpendiculairement la droite ΓK, prenons la droite AK égale à la droite ΓK. Imaginons de nouveau que AΓ est un levier, dont le milieu est le point K, et qu'il est suspendu au point K. Suspendons le triangle ΓKΔ, tel qu'il est disposé maintenant, à la moitié du levier, aux points Γ et K, et suspendons à l'autre partie du levier, au point A, des aires P, X, Ψ, Ω, Δ̧. Que l'aire P fasse équilibre au trapèze ΔE tel qu'il est placé maintenant, l'aire X au trapèze ZΣ, l'aire Ψ au trapèze TH, l'aire Ω au trapèze TI, et l'aire Δ̧ au triangle ΓΙΞ. Dès lors, l'un ensemble fera équilibre à l'autre ; en sorte que le triangle ΔBΓ sera triple de l'aire PXΨΩΔ̧ (2). On démontrerait, comme précédemment (3), que le trapèze BΦ est plus grand que l'aire P ; que le trapèze ΘE est plus grand que l'aire X, et que le trapèze ZΦ est plus petit ; que le trapèze MH est plus grand que l'aire Ψ, et que le trapèze HΘ est plus petit ; que le trapèze NI est plus grand que l'aire Ω, et que le trapèze ΠI est plus petit ; que le triangle ΞΙΓ est plus grand que l'aire Δ̧, et que le triangle ΓΙΟ est plus petit. En conséquence, la proposition est évidente.

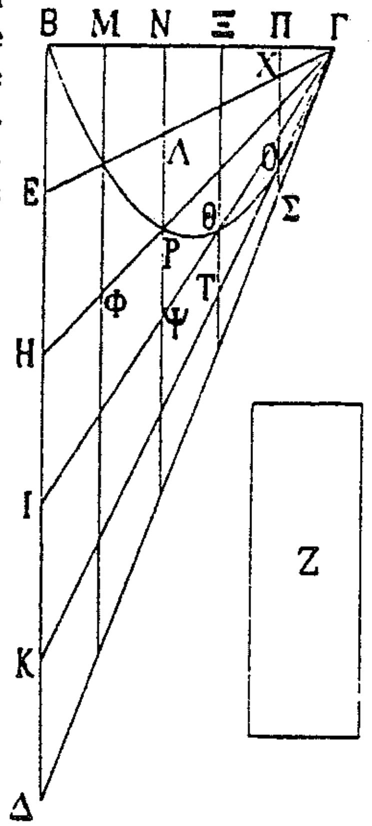
PROPOSITION XVI

Soit de nouveau un segment BΘΓ délimité par une droite et par une parabole. Par le point B, menons la droite BΔ parallèle au diamètre, et, par le point Γ, la droite ΓΔ tangente à la parabole au point Γ. Soit une aire Z la troisième partie du triangle BΔΓ. Dès lors, je dis que le segment BΓΘ est équivalent à l'aire Z.

En effet, s'il n'est pas équivalent, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, s'il se peut. Dès lors, l'excédent dont

1. C'est-à-dire de l'autre côté du segment.
2. Voir proposition VII.
3. Voir proposition XIV, et, subsidiairement, les propositions IX, XI et XIII, au lieu des propositions VIII, X et XII qui visent les cas particuliers du triangle rectangle et du trapèze à angles droits.

le segment dépasse l'aire Z, ajouté à lui-même ([1]), sera plus grand que le triangle ΒΓΔ ([2]). Au reste, il est possible de choisir une certaine aire qui, plus petite que cet excédent, soit une portion du triangle ΒΔΓ. Soit donc ΒΓΕ un triangle, plus petit que l'excédent en question, et qui soit une portion du triangle ΒΔΓ ; il en résulte que la droite ΒΕ sera une portion adéquate de la droite ΒΔ ([3]). Dès lors, divisons la droite ΒΔ dans la mesure de cette portion. Soient Η, Ι, Κ les points de division, et menons les droites qui relient les points Η, Ι, Κ au point Γ ; ces droites coupent la parabole, parce que la droite ΓΔ lui est tangente au point Γ. Par les points où ces droites coupent la parabole, menons les droites ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ parallèlement au diamètre ; elles seront elles-mêmes parallèles à ΒΔ ([4]). En conséquence, puisque le triangle ΒΓΕ est plus petit que l'excédent dont le segment ΒΘΓ dépasse l'aire Z, il est évident que l'ensemble de l'aire Z et du triangle ΒΓΕ sera plus petit que le segment. De plus, les trapèzes ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ et le triangle ΓΟΣ, au travers desquels passe la parabole, valent le triangle ΒΓΕ; car le trapèze ΜΕ est commun, et le trapèze ΜΛ équivaut au trapèze ΦΛ, le trapèze ΛΞ au trapèze ΘΡ, le trapèze ΧΞ au trapèze ΟΘ, et le triangle ΓΧΠ au triangle ΓΟΣ ([5]). Donc, l'aire Z sera plus petite que l'ensemble des trapèzes ΜΛ, ΞΡ,



1. C'est-à-dire ajouté continuellement à lui-même.
2. Voir le lemme invoqué par Archimède dans son introduction adressée à Dosithée.
3. Car, les triangles ΒΓΕ, ΒΓΔ ont même hauteur et sont entre eux comme les bases.
4. Car, ΒΔ a été mené par le point Β parallèlement au diamètre du segment.
5. La droite ΒΔ, ayant été divisée en parties égales, le faisceau qui relie les points de division au point Γ divise les parallèles à ΒΔ en parties égales, d'où équivalence des trapèzes de même rang, ayant même hauteur et côtés parallèles égaux, et équivalence des triangles ΓΧΠ, ΓΟΣ, ayant même hauteur et bases égales. Dès lors, on a, comme le texte : trap. ΜΕ + trap. ΦΛ + trap. ΘΡ + trap. ΘΟ + triangle ΓΟΣ = triangle ΒΕΓ.

ΠΘ et du triangle ΠΟΓ (1). Or, le triangle ΒΔΓ est triple de l'aire Z; par conséquent, le triangle ΒΔΓ sera plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ et du triangle ΠΟΓ ; ce qui est impossible, car il a été démontré qu'il est plus grand que le triple (2). Donc, le segment ΒΘΓ n'est pas plus grand que l'aire Z.

D'autre part, je dis qu'il n'est pas plus petit. Et, en effet, qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, l'excédent dont l'aire Z dépasse le segment ΒΘΓ, ajouté à lui-même, sera aussi plus grand que le triangle ΒΔΓ, et il est possible de choisir une certaine aire, plus petite que cet excédent, qui soit une portion du triangle ΒΔΓ. Soit donc ΒΓΕ le triangle, plus petit que cet excédent, qui soit une portion du triangle ΒΔΓ, et que les autres constructions soient les mêmes que les précédentes. En conséquence, puisque le triangle ΒΓΕ est plus petit que l'excédent dont l'aire Z dépasse le segment ΒΘΓ, l'ensemble du triangle ΒΕΓ et du segment ΒΘΓ est moindre que l'aire Z. Or, l'aire Z est aussi moindre que l'ensemble des quadrilatères ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ et du triangle ΓΠΣ ; car le triangle ΒΔΓ est triple de l'aire Z, et il est plus petit que le triple des aires que nous venons de dire, comme on l'a démontré à la proposition précédente. Donc, l'ensemble du triangle ΒΓΕ et du segment ΒΘΓ sera moindre que l'ensemble des quadrilatères ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ et du triangle ΓΠΣ ; en sorte que, si nous retranchons le segment commun, le triangle ΓΒΕ sera moindre que les aires restantes ; ce qui est impossible. En effet, il a été démontré que le triangle ΒΕΓ équivaut aux trapèzes ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, augmentés du triangle ΓΟΣ ; ce qui est plus grand que les aires restantes (3). Donc, le segment ΒΘΓ n'est pas plus petit que l'aire Z. Or, il a été démontré qu'il n'est pas plus grand ; par conséquent, le segment équivaut à l'aire Z.

1. Par hypothèse, triangle ΒΓΕ < segment ΒΘΓ — aire Z, d'où, en présence de la relation de la note précédente et de la relation évidente : ΜΕ + ΝΦ + ΞΨ + ΠΤ + ΠΣΓ > segt ΒΘΓ, on aura: ΜΕ + ΦΛ + ΘΡ + ΘΟ + ΓΟΣ < ΜΕ + ΝΦ + ΞΨ + ΠΤ + ΠΣΓ — aire Z, d'où : aire Z < (ΝΦ — ΦΛ) + (ΞΨ — ΟΡ) + (ΠΤ — ΘΟ) + (ΠΣΓ — ΓΟΣ), ou, comme le texte : aire Z < ΜΛ + ΞΡ + ΠΘ + triangle ΠΟΓ.

2. Par hypothèse : aire $Z = \frac{1}{3}$ triangle ΒΔΓ, d'où, en présence de la relation de la note précédente : triangle ΒΔΓ < 3[ΜΛ + ΡΞ + ΘΠ + ΠΟΓ] ; ce qui est absurde, car, en vertu des propositions XIV et XV, on a : triangle ΒΔΓ > 3[ΜΛ + ΡΞ + ΘΠ + ΠΟΓ].

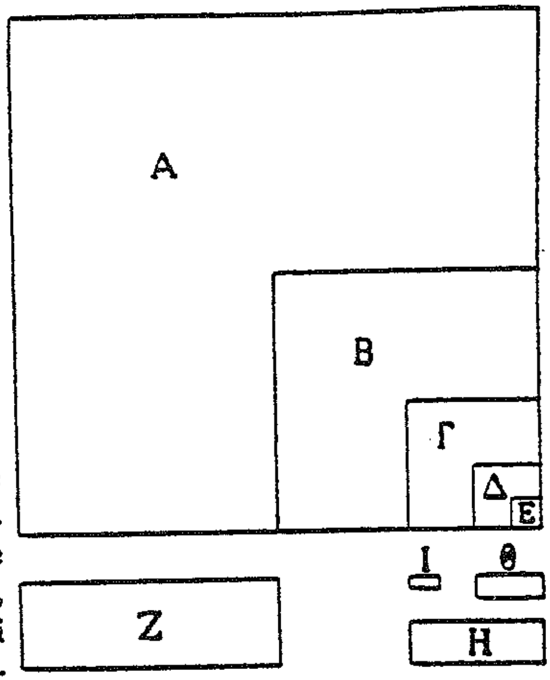
3. La seconde partie de la démonstration se résume comme suit :

On a, en 2de hypothèse : triangle ΒΓΕ < aire Z — segment ΒΘΓ. Or, on a posé : aire $Z = \frac{1}{3}$ triangle ΒΔΓ, et on a, en vertu des propositions XIV et XV :
triangle ΒΔΓ < 3[ΕΜ + ΦΝ + ΨΞ + ΠΤ + ΓΠΣ] ; donc, comme le texte :
triangle ΒΓΕ + segment ΒΘΓ < ΕΜ + ΦΝ + ΨΞ + ΠΤ + ΓΠΣ, d'où :
triangle ΒΓΕ < ΕΜ + ΦΝ + ΨΞ + ΠΤ + ΓΠΞ — segment ΒΘΓ ; ce qui est impossible, car on a vu (1re partie de la démonstration) que : triangle ΒΕΓ = ΜΕ + ΦΛ + ΘΡ +

PROPOSITION XXIII

Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre, la somme de toutes ces grandeurs, augmentée du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande.

Soient A, B, Γ, Δ, E des grandeurs en nombre quelconque, établies en série, dont chacune est quadruple de la suivante, et soit A la plus grande. D'autre part, soit Z le tiers de B, H le tiers de Γ, Θ le tiers de Δ, et I le tiers de E. Dès lors, puisque Z est la troisième partie de B, tandis que B est la quatrième partie de A, l'ensemble de B, Z sera la troisième partie de A; par conséquent, pour la même raison, l'ensemble de H, Γ, sera la troisième partie de B ; l'ensemble de Θ, Δ, la troisième partie de Γ, et l'ensemble de I, E, la troisième partie de Δ. Il en résulte que l'ensemble de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I sera aussi la troisième partie de l'ensemble de A, B, Γ, Δ. Or, l'ensemble de Z,H,Θ est aussi la troisième partie de l'ensemble de B, Γ, Δ ; par conséquent, l'ensemble de B, Γ, Δ, E, I est aussi la troisième partie du reste A. Dès lors, il est évident que l'ensemble de A, B, Γ, Δ, E, augmenté de I, c'est-à-dire augmenté du tiers de E, vaut les quatre tiers de A (1).



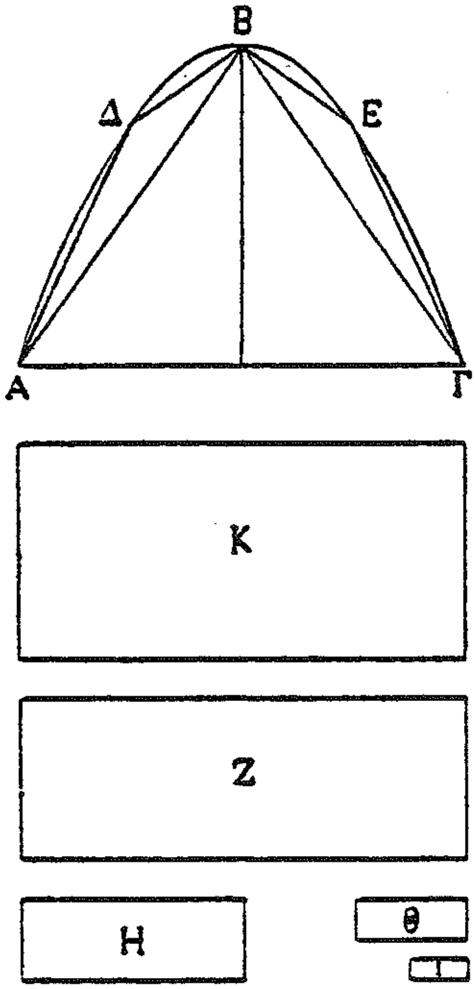
1. Les grandeurs A, B, Γ, Δ, E étant en progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{4}$, on aura : $B=\frac{1}{4}A$. Or, on pose : $Z=\frac{1}{3}B$; donc : $B+Z=(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})A=\frac{1}{3}A$. On aura de même : $H+\Gamma=\frac{1}{3}B$, $\Theta+\Delta=\frac{1}{3}\Gamma$, et $I+E=\frac{1}{3}\Delta$; d'où : $B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta+I=\frac{1}{3}(A+B+\Gamma+\Delta)$. Or, on a posé : $Z=\frac{1}{3}B$, $H=\frac{1}{3}\Gamma$, et $\Theta=\frac{1}{3}\Delta$; donc : $Z+H+\Theta=\frac{1}{3}(B+\Gamma+\Delta)$, d'où, substituant dans l'égalité précédente, il vient : $B+\Gamma+\Delta+E+\frac{1}{3}(B+\Gamma+\Delta)+I=\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B+\Gamma+\Delta$, ou $B+\Gamma+\Delta+E+I=\frac{1}{3}A$, d'où, ajoutant A de part et d'autre, et observant que l'on a posé $I=\frac{1}{3}E$, il vient, comme le texte : $A+B+\Gamma+\Delta+E+\frac{1}{3}E=\frac{4}{3}A$.

Algébriquement, la somme d'une progression décroissante par quotient s'obte-

PROPOSITION XXIV

Tout segment délimité par une droite et par une parabole équivaut aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment.

En effet, soit ΑΔΒΕΓ un segment délimité par une droite et par une parabole ; soit ΑΒΓ un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et soit une aire Κ équivalente aux quatre tiers du triangle ΑΒΓ. Il faut démontrer que cette aire est équivalente au segment ΑΔΒΕΓ. En effet, si elle n'est pas équivalente, elle est plus grande ou plus petite. Que le segment ΑΔΒΕΓ soit d'abord plus grand que l'aire Κ, s'il se peut. Dès lors, inscrivons les triangles ΑΔΒ, ΒΕΓ, comme il a été dit (1), et, dans les segments qui restent alentour, inscrivons d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments ; enfin, inscrivons, dans les segments successivement obtenus, deux triangles ayant même base et même hauteur que les segments. Il en résulte que les segments abandonnés seront plus petits que l'excédent dont le segment ΑΔΒΕΓ dépasse l'aire Κ (2) ; en



nant en retranchant du premier terme le produit du dernier terme par la raison, et en divisant la différence par l'excès de l'unité sur la raison, on aurait aussitôt : $S = \frac{A - \frac{1}{4}E}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E$, d'où : $S + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A$.

1. C'est-à-dire, comme il a été dit à la proposition XXI.
2. Voir proposition XX, corollaire.

sorte que le polygone inscrit sera plus grand que l'aire K ; ce qui est impossible. En effet, puisque certaines aires sont disposées dans une série dont la raison est quatre, que le triangle ΑΒΓ est d'abord quadruple des triangles ΑΔΒ, ΒΕΓ (1), qu'ensuite ces derniers sont quadruples des triangles inscrits dans les segments suivants, et ainsi continuellement, il est évident que l'ensemble de ces aires est plus petit que les quatre tiers de la plus grande (2). Or, l'aire K vaut les quatre tiers de la plus grande aire (3) ; par conséquent, le segment ΑΔΒΕΓ n'est pas plus grand que l'aire K.

Au reste, qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, disposons une aire Z équivalente au triangle ΑΒΓ, une aire H équivalente au quart de l'aire Z, et, de même, une aire Θ équivalente au quart de l'aire H ; et disposons ainsi successivement des aires jusqu'à l'obtention d'une dernière aire plus petite que l'excédent dont l'aire K dépasse le segment. Soit I cette plus petite aire. Donc, l'ensemble des aires Z, H, Θ, I, augmenté du tiers de l'aire I, vaut les quatre tiers de l'aire Z (4).

Or, l'aire K vaut aussi les quatre tiers de l'aire Z ; par conséquent, l'aire K équivaut à l'ensemble des aires Z, H, Θ, I, augmenté de la troisième partie de l'aire I (5). Dès lors, puisque l'aire K excède l'ensemble des aires Z, H, Θ, I d'une aire plus petite que l'aire I, et qu'elle excède le segment d'une aire plus grande que l'aire I, il est évident que l'ensemble des aires Z, H, Θ, I est plus grand que le segment ; ce qui est impossible. En effet, il a été démontré que, lorsque des aires en nombre quelconque sont établies dans une série dont la raison est quatre, et que la plus grande est équivalente au triangle inscrit dans le segment, l'ensemble de ces aires sera plus petit que le segment (6). En conséquence, le segment ΑΔΒΕΓ n'est pas plus petit que l'aire K. Or, il a été démontré qu'il n'est pas plus

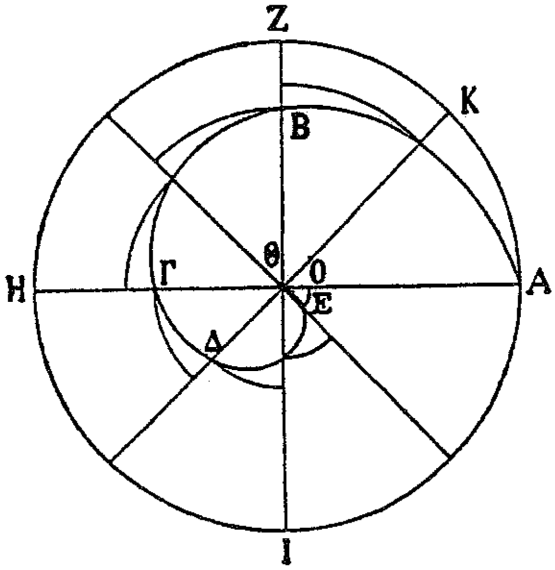
1. Voir proposition XXI.
2. Voir proposition XXIII et note.
3. Par hypothèse : $K = \frac{4}{3}$ triangle ΑΒΓ, et triangle ΑΒΓ est la plus grande aire.
4. Voir proposition XXIII. On aura : $Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3}I = \frac{4}{3}Z$.
5. On a posé : $K = \frac{4}{3}Z$; donc, en présence de l'égalité de la note précédente, on a, comme le texte : $K = Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3}I$.
6. L'égalité de la note précédente donne : $K - (Z + H + \Theta + I) = \frac{1}{3}I < I$. D'autre part, en 2de hypothèse, on a : aire $K >$ segt ΑΔΒΕΓ, et aire $K -$ segt ΑΔΒΕΓ $> I$, d'où, comparant avec la 1re inégalité, on a, à fortiori : $K - (Z + H + \Theta + I) < K -$ segment ΑΔΒΕΓ, ou, comme le texte : $Z + H + \Theta + I >$ segment ΑΔΒΕΓ ; relation impossible. En effet, la proposition XXII a démontré que l'on a : $Z + H + \Theta + I <$ segment ΑΔΒΕΓ.

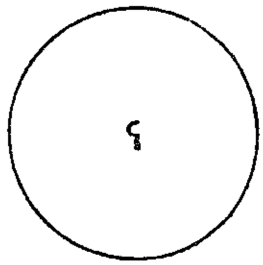
grand ; donc, il est équivalent à l'aire K. Or, l'aire K vaut les quatre tiers du triangle ΑΒΓ ; donc, le segment ΑΔΒΕΓ vaut aussi les quatre tiers du triangle ΑΒΓ.

PROPOSITION XXIV

L'aire comprise entre la spirale décrite en première révolution et la première des droites en position initiale de révolution est équivalente au tiers du premier cercle ([1]).

Soit une spirale décrite en première révolution sur laquelle on a l'arc ΑΒΓΔΕΘ. Soit le point Θ l'origine de la spirale, ΘΑ la première des droites en position initiale de révolution et ΑΚΖΗΙ le premier cercle dont le tiers est le cercle placé en ϛ. On doit démontrer que l'aire que nous venons de dire est équivalente au cercle ϛ.





En effet, si elle ne lui est pas équivalente, elle est soit plus grande soit plus petite. Qu'elle soit d'abord plus petite, s'il se peut. Or, il est possible de circonscrire à l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕΘ et la droite ΑΘ une figure plane, composée de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite excède l'aire de moins que l'excédent du cercle ϛ sur la dite aire ([2]). Circonscrivons-la donc, et soit ΘΑΚ le plus grand et ΘΕΟ le plus petit des secteurs dont se compose la dite figure. Dès lors, il est évident que la figure circonscrite est plus petite que le cercle ϛ ([3]). Prolongeons maintenant les droites qui forment

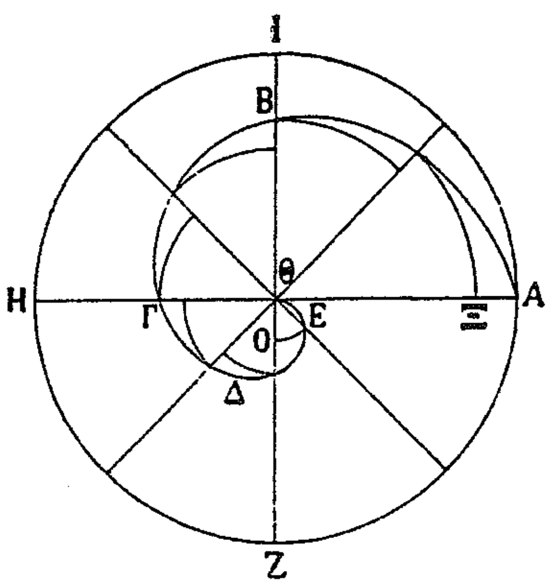
1. Proposition déjà mentionnée dans le préambule.
2. Voir proposition XXI, corollaire.
3. Par hypothèse première : fig. circonscrite — aire spirale $<$ cercle ϛ — aire spirale, d'où : fig. circonscrite $<$ cercle ϛ.

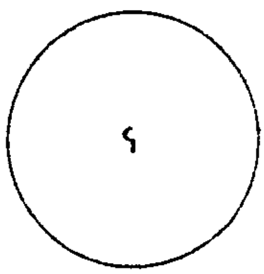
des angles égaux en Θ jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle. On a donc certaines droites menées du point Θ à la rencontre de la spirale, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, dont la plus grande est ΘA, la plus petite ΘE (1), et dont la plus petite est égale à l'excédent (2). De plus, on a d'autres droites menées du point Θ à la rencontre de la circonférence du cercle, en même nombre que les précédentes, toutes égales à la plus grande de celles-ci, et l'on a construit sur toutes des secteurs semblables, tant sur celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur que sur celles qui sont égales entre elles et égales à la plus grande. Il s'ensuit que l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales à la plus grande sera moindre que le triple de l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur ; car cela a été démontré (3). Or, l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales entre elles et égales à la plus grande équivaut au cercle AZHI ; tandis que l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur équivaut à la figure circonscrite ; par conséquent, le cercle AZHI est plus petit que le triple de la figure circonscrite. Or, ce cercle est le triple du cercle ϛ (4) ; donc le cercle ϛ est plus petit que la figure circonscrite. Or, il n'est pas plus petit, mais plus grand (5) ; par conséquent, l'aire comprise entre la spirale ABΓΔEΘ et la droite AΘ n'est pas plus petite que l'aire ϛ.

Au reste, elle n'est pas plus grande. En effet, qu'elle soit plus grande, s'il se peut. Il est donc de nouveau possible d'inscrire une figure dans l'aire comprise entre la spirale ABΓΔEΘ et la droite AΘ, de manière que la dite aire dépasse la figure inscrite de moins de l'excédent de la dite aire sur le cercle ϛ (6). Inscrivons-la donc, et soit ΘPΞ le plus grand et OΘE le plus petit des secteurs dont se compose la figure inscrite. Il est évident que, dès lors, la figure inscrite sera plus grande que le cercle ϛ (7). Prolongeons maintenant les droites qui forment des angles égaux en Θ jusqu'à leur rencontre avec la

1. Voir proposition XII.
2. Voir proposition I.
3. Voir proposition X, corollaire.
4. Par hypothèse.
5. Par hypothèse première.
6. Voir proposition XXI, corollaire.
7. Par hypothèse seconde : aire spirale — fig. inscrite $<$ aire spirale — cercle ϛ, d'où : figure inscrite $>$ cercle ϛ.

circonférence du cercle. On a donc de nouveau certaines droites menées du point Θ à la rencontre de la spirale, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, dont la plus grande est ΘA, la plus petite ΘE [1], et dont la plus petite est égale à l'excédent [2]. De plus, on a certaines autres droites menées du point Θ à la rencontre de la circonférence du cercle AZHI, en même nombre que les précédentes, égales chacune à la plus grande de celles-ci ; et l'on a construit sur toutes des secteurs semblables, tant sur celles qui sont égales entre elles et égales à la plus grande, que sur celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur. Il en résulte que l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales à la plus grande sera plus grand que le triple de l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur construit sur la plus grande ; car cela a été démontré [3]. Or, l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales à la plus grande est équivalent au cercle AZHI, et l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur construit sur la plus grande, est équivalent à la figure inscrite ; par conséquent, le cercle AZHI est plus grand que le triple de la figure inscrite. Or, ce cercle est le triple du cercle ϛ ; donc le cercle ϛ est plus grand que

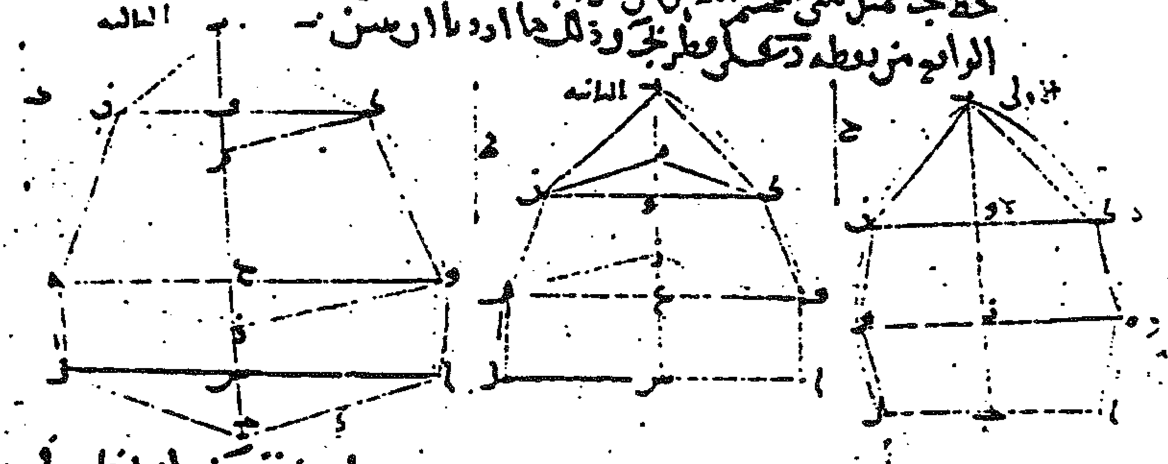




1. Voir proposition XII.
2. Voir proposition I.
3. Voir proposition X, corollaire.

la figure inscrite. Or, il n'est pas plus grand, mais plus petit ; par conséquent, l'aire comprise entre la spirale ABΓΔEΘ et la droite AΘ n'est pas plus grande que le cercle ϛ ; elle lui est donc équivalente.

دهمر وبين الصورة اللامة ولمساحة المجسم الذي عليه ا ط د هم وفي الصورة الثالثة
الذي هو اما فضلة معين مجسم واما فضل مخروط احوف واما المجتمع من ضرب بحـ في الدائرة
التي قطرها الى الهو مساو للاسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها الى وارتفاعها بحـ فيكون
المجسم الذي عليه د ـ الذي هو في الصورة الثانية مخروط احوف وفي الصورة الثالثة اما
معين مجسم واما مخروط احوف ومجسما دهمر و و ر ملحا اللذان هما في الصورة الثانية فضلتا
مخروطين احوفين وهما في الصورة الثالثة اما فضلتا معينين مجسمين واما فضلتا مخروطين
احوفين واما احدهما فضلة مخروط احوف والاخر فضلة معين مجسم مع مثلي المجسم المجتمع من ضرب
بحـ في الدائرة التي قطرها د ب مساو لضعف الاسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ال
وارتفاعها بحـ المخروط الاحوف المستدير الذي ذكرنا مع فضلتي المخروطين الاحوفين مساو
للمجسم الذي يحدث من ادارة شكل ا ح و د ب من الصورة اللامة اذا كان الخط الثابت بحـ وكذلك
ايضا حال المعين المجسم او المخروط الاحوف من الصورة الثالثة مع فضلتي المعينين المجسمين
منها او المخروطين الاحوفين او المجسمين اللذين احدهما معين مجسم والاخر مخروط احوف فالمجسم
الذي يحدث اذا ادير خط بحـ وادير سائر اضلاع شكل ا ح و ز ب من موضع ما حتى يعود
الى ذلك الموضع اعظم من نصف الاسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها الى وارتفاعها
خط بحـ بمثل مثلي المجسم الكائن من ضرب بحـ في الدائرة التي قطرها د ب الذي هو العمود
الواقع من نقطة د على و ... وذلك ما اردنا ان نبين



بحـ اذا كانت قطعة مكافئة معتدلة الراس معلومة ومجسم معلوم فقد تبين ان خط في
البسيط المحيط بالقبة دوائر هي قواعد لقاعدة ذلك البسيط تكون متى اخرجت من
الخطوط المحيطة بها خطوط من علي الى السهم القبة قسمته اقساما تكون نسبتها بعضها
الى بعض اذا اخذت على الولاء كنسب اعداد افراد متوالية مبتدئة من الواحد

Ibn al-Haytham (965-1041)
Volume du paraboloïde

"Découvrir les mathématiques arabes"

A) Lundi 23 septembre 1991

CANTOR ET LES NOMBRES :

Annie Hupé

Georg Cantor est né en 1845 à Saint Petersbourg dans un famille de riches commerçants. Il est l'élève de Kummer, Kronecker et Weierstrass. Si, en 1867, il soutient une thèse sur la théorie des nombres, c'est vers l'analyse qu'il se tourne ensuite, sous l'influence de Weierstrass, et il étudie plus spécialement les séries trigonométriques. " A l'occasion de recherches fines d'analyse, Cantor étudia et compara directement des ensembles infinis, introduisant à cet effet de nouveaux concepts, qui constituaient une véritable arithmétique de l'infini." (Encyclopédia Universalis. "Cantor").

Son nom reste attaché à la théorie des ensembles. Il est cependant plus exact de dire que Richard Dedekind et Georg Cantor dégagèrent conjointement cette notion abstraite d'ensemble. En effet, leur rencontre en 1872 fut suivie d'une correspondance quasi quotidienne, témoignage de la démarche, des questions, doutes et des hésitations des deux mathématiciens. (Cavaillès a publié en grande partie la traduction française de cette correspondance : Philosophie mathématique 1962 Hermann)

L'aspect sur lequel l'exposé a voulu mettre l'accent est le caractère "fatal" de la création de nombres et pour cela deux textes seront plus particulièrement utilisés.

–Le premier texte date de 1871 (il n'est traduit en français qu'en 1883). Ce mémoire s' intitule: *Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques*.(Annales Mathématiques de Leipzig 1872 ; traduction française Acta Mathematica 1883) Il veut alléger les hypothèses et commence par dégager la notion de nombres réels : à toute suite de Cauchy de rationnels a est associé un nombre b qu'il nomme "limite". De façon formelle il crée l'ensemble B des éléments b ainsi obtenus. Il définit alors une addition, une multiplication et un ordre. Il peut alors réintroduire la notion de limite. Mais il n'y a plus de raison de s' arrêter là. De même qu'à partir des rationnels l'emploi de limites a crée les nombres b, dans B il construit à nouveau des nombres c (nombres de seconde espèce) qui constitueront l'ensemble C. Etc... " *la notion de nombre, si développée qu'elle soit , porte en soi le principe d'une extension nécessaire en elle-même et absolument infinie.*"

Il est ensuite conduit à introduire P' ensemble dérivé de P : c'est l'ensemble des points d'accumulation de P (Borel reprendra ultérieurement cette notion)

–Le second texte qui date de 1883 est immédiatement traduit en français. Il insiste sur le caractère nécessaire de l'extension des nombres – Cantor va jusqu'à dire "être contraint". Dans ce texte il expose la construction des nombres transfinis toutefois il faut attendre 1897 pour que ce mot "transfini" soit employé, dans le dernier mémoire: "*Contribution à la fondation de la théorie des nombres transfinis*".

B) Lundi 14 octobre 1991

LA NOTION DE NOMBRE CHEZ LES PYTHAGORICIENS

Marie Françoise JOZEAU :

Essai de réflexion sur la façon dont la notion de nombre s'est mise en place chez les Pythagoriciens

L' école pythagoricienne, très vaste, s'étend sur 9 ou 10 générations. Cependant elle est mal connue car on n' en possède aucun écrit.

Le premier à en parler est Hérodote (Vème s. avant J.C.)

Platon ne l'évoque qu'une fois (≈ 428 - 347 av. J.C.)

Quant aux écrits d'Aristote (≈ 384 - 322 av. J.C.) qui nous sont parvenus, ils renferment quelques 35 passages qui font allusion à Pythagore.

Il faut ensuite attendre le III ème siècle après J.C. pour que Pythagore soit à nouveau mentionné.

C'est donc toujours en tenant compte du Platonisme et de la philosophie d'Aristote qu'il faudra interpréter les écrits. Nombreux sont les résultats attribués à Pythagore mais une polémique demeure : l'enseignement de Pythagore fut-il purement oral ou non?

"On s'accorde à reconnaitre que Pythagore n'a laissé aucun traité de sa main ; mais nombreux sont ceux qui ont rapporté ses faits et gestes. " (Flavius Josèphe) (1)

"Quand Posidonius parle de Pythagore, étant donné qu'il ne nous est pas parvenu d'écrit de sa main, c'est à travers les écrits de quelques-uns de ses disciples qu'il témoigne. (Galien)

• Pythagore introduit le mot philosophie; mais il n'y a pas alors de distinction entre philosophie et sciences et ce terme sous entend un souci religieux et un rôle politique.

"Pythagore se rendit en Egypte , ..., et fut le premier à introduire en Grèce la philosophie ; et particulièrement pour tout ce qui est rites ...." (Isocrate)

• Il inaugure et développe une méthode déductive en mathématiques. *"Pythagore qui a donné à la philosophie géométrique la forme d'une culture libérale, en reprenant les choses au commencement pour découvrir les principes , par un examen des théorèmes mettant en oeuvre une méthode non empirique et purement intellectuelle ; c'est lui qui précisément découvrit la théorie des proportions..." (Proclus)*

•Par le témoignage de Jamblique on constate l'importance en nombre de cette école et on y remarque la présence de femmes .

---

(1)L'ouvrage de référence utilisé pour cet exposé est :

Les Présocratiques Ed. La Pléiade Textes réunis par H. Diels (Berlin 1903) et traduits par J.P. Dumont et D. Delattre. .

Chronologie relative à l'école pythagoricienne :

(les dates qui figurent indiquent approximativement l'acmé c'est à dire la période à laquelle on peut présumer que la personne a accompli le principal de son oeuvre.)

Pythagore de Samos		525
Les Pythagoriciens anciens :	Hippase	?
Les Pythagoriciens moyens :	Alcméon de Crotone	450
	Zénon d' Elée	445
Les Pythagoriciens récents	Ion de Chio	?
	Damon (Damonidés d' OEé)	?
	Polyclète d'Argos	?
	Hippocrate de Chio	430
	Théodore de Cyrène	405
	Philolaos de Crotone	410
	Archytas de Tarente	385

Pour en savoir plus:

Les Pythagoriciens anciens :

Hippase : Les adeptes de la philosophie pythagoricienne constituaient deux groupes : les acousmaticiens ("ceux qui avaient à écouter.") et les mathématiciens. Hippase avait en charge les premiers tandis que Pythagore enseignait aux seconds.

"A l'époque de Pythagore et des mathématiciens qui lui sont comptenporains , il n'existait que trois médiétés; l'arithmétique, la géométrique et ....l'harmonique." (Jamblique) .

Le feu constitue le principe unique et l' âme "ignée" est le nombre. Ainsi le nombre fait son apparition. "*Le nombre est le modèle premier de la création de l'univers, et encore il est l'instrument de décision du dieu artisan de l'ordre du monde.* (- cité par Nicomaque de Gérase-). Ceci évoluera ensuite. Mais, selon Aristote: " *Les pythagoriciens, eux aussi, affirmant l'existence d'un seul nombre, le nombre mathématique ; mais celui ci, loin d'exister séparément constitue pour eux les substences sensibles mêmes"*.

Les Pythagoriciens moyens :

• **Alcméon** : l'essentiel de son oeuvre est d'ordre médical. Il fixe le nombre de principes à dix , rangés en deux séries parallèles. Il fait ainsi apparaitre un certain dualisme.

limité	illimité	en repos	en mouvement
impair	pair	droit	courbe
un	multiple	lumière	ténèbres
droite	gauche	bon	mauvais
mâle	femelle	carré	oblong

C'est la première fois que les opposés sont les principes des êtres; les trois premiers jouant un rôle essentiel pour le mathématicien.

• **Zénon d'Elée** passe pour l'inventeur de la dialectique. Il met en évidence des paradoxes qui "tournent" autour du limité et de l'illimité. "Les paradoxes (Achille et la tortue est l'un des plus connus) ... se présentent sous la forme d'un dilemme c'est-à-dire que si l'on accepte une chose ou bien son contraire on aboutit deans les deux cas à une contradiction....Pour le paradoxe d'Achille, si un segment ne contient qu'un nombre fini de points, il y a bien une impossibilité mais cette impossibilité se maintient s'il y en a une infinité, du moins en étendant au nombre infini les résultats du fini. ...Le coeur du problème est l'infini opposé au fini, le continu opposé au discret. (J. Dhombres Nombre, mesure et continu. Cédic Nathan 1980)

Les Pythagoriciens récents :

• **Ion de Chio** est l'auteur d' un traité : La Triade " *Toutes choses sont trois et rien n'est ni plus ni moins que ces trois. Ce qui fait la valeur de chaque être particulier, c'est la triade formée de l'intelligence, de la force et de la fortune".*
Ses préoccupations portent sur l'astronomie et la musique.

• **Damon** le musicien. L'idée d'harmonie est présente ainsi que celle de rythme. Selon Platon : "*Il existe en effet trois genres (de rythmes) qu'on entrelace pour composer les mesures , de la même manière qu'il y a quatre voix d'où l'on tire toutes les harmonies."*

• **Polyclète** le sculpteur. L'idée d'harmonie est également présente et liée à la notion de rapport."*Je songe en particulier à une statue fort admirée de Polyclète, qu'on appelle le Canon et qui tire cette appellation de la parfaite harmonie de toutes ses parties entre elles."* (*Galien*)

• **Hippocrate de Chio** acquit sa célébrité comme géomètre et astronome. Il découvrit la quadrature du ménisque (ou de la lunule) ce qui revient au calcul de l'aire du segment de cercle. Il établit également que le problème de la duplication du cube se ramène à un problème de proportions. " En notations modernes , a étant le côté du cube initial il s'agit de résoudre $x^3 = 2a^3$. il suffit alors de trouver deux nombres x et y de sorte que (a,x ; x,y) soit une proportion comme (x,y ; y,2a) " (J. Dhombres)
"Il est le premier, parmi ceux dont on a gardé le nom, à avoir composé, entre autres, un ouvrage intitulé Eléments.".

• **Théodore de Cyrène** est géomètre . Il s' intéresse aux irrationnels mais "*on ignore comment Théodore démontrait l'irrationalité de* $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *, jusqu'à* $\sqrt{17}$*....Il fut pourtant assez célèbre en son temps pour donner des leçons à Platon - pas seulement de géomètrie mais aussi d'arithmétique, d'astronomie, de musique , toutes sciences fort en honneur chez les pythagoriciens.."*

• **Philolaos :** privilégie la paire "limité - illimité "
Jusqu'alors la vision du nombre était pratique. Les pythagoriciens semblent les premiers à ne plus lier le nombre à un usage."*...au lieu de s'en tenir à l'utilisation qu'en font les marchands ils vont jusqu'à assimiler toutes les choses à des nombres. En effet le nombre contient tout ce qui n'est pas lui, et il y a un rapport de tous les nombres entre eux.*"(Stobée) Parmi les nombres 10 joue un rôle particulier : " *La tétractys est le garant préféré des pythagoriciens ..., parce qu'elle réalise le nombre 10 qui est pour eux un nombre parfait* " (1+2+3+4 =10)"*dans le nombre 10 sont contenus tous les rapports .. ainsi que les nombres linéaires, plans , cubiques; en effet 1 est le point, 2 la ligne, 3 le triangle, 4 la pyramide..." (Pseudo Jamblique)*

C'est à l'école pythagoricienne que l'on doit la distinction entre nombre pair et nombre impair.

Toutefois certaines questions restent sans réponse, par exemple le sens de l' "Un " et de la monade "*Philolaos donne indifféremment à l'Un le nom de monade et le nom de l'Un à la monade. (Théon de Smyrne).* Archytas fera de même.

• **Archytas :** il semble être le premier à considérer que Un est un nombre (cette discussion est toujours présente au XVIème!) Auparavant "Un" engendrait les nombres. Voici ce qui est rapporté à ce sujet : " *...l'Un participe à la nature des deux* (nombres) *En effet, ajouté à nombre pair, il produit un impair, et, ajouté à un impair, il produit un pair : cela serait impossible s'il ne participait à la nature des deux . C'est pour cela précisement qu'on appelle l'Un pair -impair."* Il demeure quand même de nombreuses hésitations : le un sert à engendrer les nombres mais "(les pythagoriciens) *construisent en effet la totalité du ciel à partir de nombres mais ces nombres ne sont pas composés d'unités (arithmétiques abstraites) car ils partent de l'hypothèse que les unités sont des grandeurs spaciales.Néanmoins, comme il se fait que le premier Un possède de par sa construction l'étendue, ils sont incapables semble-t-il de l'expliquer. " Aristote*

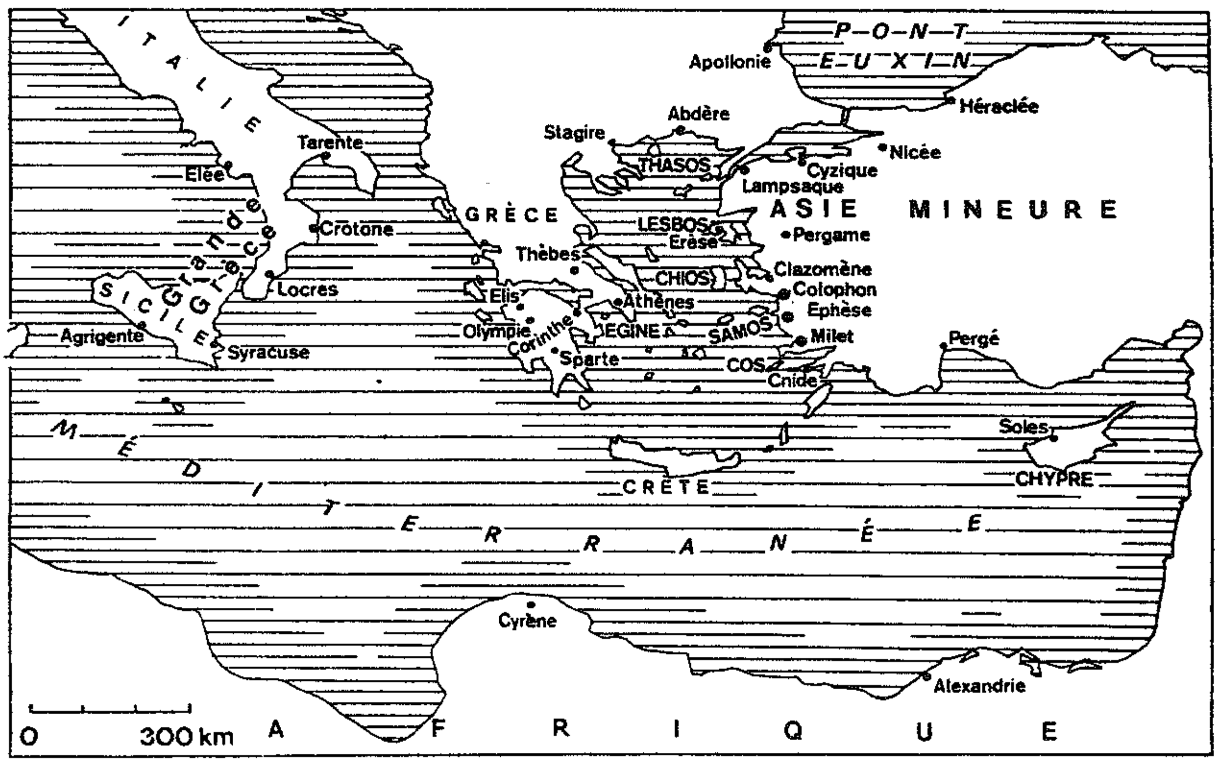
• **Eurytos :** *"Il affirmait qu'à chaque être correspond un nombre particulier: tel nombre à l'homme , tel autre nombre au cheval et tel autre à autre chose."* (Théophraste) . Quant à Aristote, il s'exprimait en ces termes: *"Il s'aidait de jetons pour reproduire les formes comme on ramène les nombres aux figures du triangle et du carré"*. Il faisait ainsi allusion à l'association que faisaient les grecs entre certains nombres et des figures géométriques - ce que l'on désigne couramment par "nombres figurés ".On parle aussi de nombres triangulaires, carrés etc.....

Mais déjà s'amorçait la grande mutation liée à Platon.

"Les pythagoriciens furent les premiers à s'engager sur la voie des mathématiques et firent progresser cette discipline; leur familiarité avec elle les conduisit à penser que ses principes étaient les principes de toutes choses . Mais parmi ces principes , les nombres sont par nature les premiers, et ils crurent apercevoir dans les nombres beaucoup de traits de ressemblance avec les choses qui sont et qui viennent à être —plus que dans le feu , la terre et l'eau—....ils supposèrent que les éléments des nombres étaient les éléments de toutes choses. " Aristote

(Les débuts de la science grecque LLoyd - ed. la découverte.)

Les auteurs cités : Aristote: IVème siècle avant J.C.
Flavius Josephe : historien environ — 37 ; 66
Galien : médecin de Pergame IIème siècle
Isocrate IV ème avant J.C.
Il dirige une école qui est une sorte d'établissement d'enseignement supèrieur
Jamblique IVème siècle, auteur d'une vie pythagorique
Nicomaque de Gérase: IIème siècle mathématicien.
Proclus: Philosophe néoplatonicien Vème siècle
Stobée: Vème siècle.
Théon de Smyrne: mathématicien et philosophe platonicien du IIème siècle



NOTES D' ECOUTE

Echo du colloque Desargues

Fin novembre 1991 s'est tenu à Paris puis à Lyon un colloque Desargues , colloque durant lequel une quarantaine de spécialistes venus de diverses universités européennes ont cherché à cerner la personnalité du "géomètre et architecte lyonnais" du 17 ème siècle. Les intervenants ont spécialement insisté sur l'influence qu'il a pu exercer sur ses comptemporains en mathématiques et autres arts.

Né en 1591, mort en 1661, Sieur Girard Desargues Lyonnais - S.G.D.L.- a été lié au monde savant du "réseau " Mersenne: Fermat, Descartes, les Pascal, Cavalieri, Mydorge, Bosse, Pell, Gassendi, Beaugrand, Roberval, Champaigne....

Est-ce au collège de la Trinité à Lyon que les pères jésuites lui ont fait connaître les œuvres de Kepler ou d'Apollonius? Des connaisseurs apprécièrent rapidement ses travaux pour leur nouveauté. Le "traité sur la perspective" est salué par Mersenne comme: "Le plus succulent que tout ce que vous avez vu". Pascal a dit tout ce que son "Essay sur les coniques " devait au "Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan". Et bien plus tard Poncelet et Chasles seront témoins que l'œuvre de S.G.D.L. n'était pas tombée dans l'oubli lorsque surgit la géométrie projective de Monge.

Mais ce n'est pas seulement en géométrie que Desargues a laissé son empreinte mais aussi :

- en musique avec son étude des combinaisons reprise par Mersenne dans son "Harmonie universelle" et sa "Méthode aisée pour apprendre et enseigner à lire et écrire la musique".

- en gnomonique avec sa "Manière universelle de poser le style et tracer les lignes d'un quadran aux rayons du soleil".

- dans l'art de tailler les pierres avec sa "Manière universelle touchant la practique du trait à preuves pour la coupe des pierres".

- et, bien entendu dans le monde des architectes sculpteurs et peintres. Desargues pense "qu'il ne faut pas dessiner n'y peindre comme l'œil voit" mais comme l'exigent les règles de la perspective. A cela les peintres répliquent: "Nous désirerions bien que les règles s'accomodassent à nous et non pas nous à elles".

Ces quelques échos ne sont , bien sûr, qu'un survol .

La librairie Blanchard doit éditer prochainement sous la direction de R.Taton et J. Dhombres les "Œuvres complètes de Girard Desargues".

La parution des actes du colloque est prévue pour 1992; s'adresser à :
C.N.R.S. Laboratoire d'histoire des sciences - 27 rue Damesne 75013 PARIS.

Depuis quand, où et comment l'enseignement des probabilités et des statistiques se fait-il en France?

Séminaire sur l'histoire de l'enseignement scientifique. (Centre Alexandre Koyré)

Enseignement des statistiques et des probabilités en France, au XIX ème siècle.

Exposé de Pierre Crépel.

Un parcours nous est proposé depuis le projet des encyclopédistes de la fin du XVIIIème en passant par Laplace, pour aboutir à l'après guerre de 1914 et le rôle de Lévy dans l'enseignement.

Remarque préliminaire :
Durant cette période l'expression statistiques et probabilités correspond à des réalités fluctuantes, en particulier le terme de statistiques ne se généralise qu'au XXème siècle. Cette branche des mathématiques est inséparable d'applications les plus diverses : politique, démographie, arithmétique sociale, astronomie, géodésie, artillerie ...

Où enseigne-t-on les probabilités?
L'enseignement est très variable suivant les lieux. Si, à partir de 1834, un cours est régulièrement assuré à la faculté des sciences de Paris, l'école Polytechnique joue un rôle essentiel pour trois raisons :

— Très tôt, (dès l'an III) les probabilités y sont enseignées (par Fourier)

— Après quelques années d'interruption des cours sont régulièrement assurés de 1819 à nos jours.

— En fin ces cours concernent un grand nombre d'étudiants (plus d'une centaine chaque année). Ces derniers sont ensuite souvent appelés dans les écoles d'application (artillerie, génie à Metz entre autres) et vont alors transmettre leur savoir.

En outre les archives de l'Ecole Polytechnique sont soigneusement tenues et offrent donc des données précises pour l'étude dont il est question.

Auparavant, si l'on parle de calcul des probabilités au XVIII ème, il n'y a aucun cours ni manuel d'enseignement. Cependant des échanges épistolaires conduisent Condorcet à rédiger un programme détaillé de calcul des probabilités et son application à l'arithmétique sociale dans le projet sur l'instruction publique de 1792.

Tout puissant, Laplace jouera un rôle essentiel pour le développement de l'enseignement du calcul des probabilités et impose ses idées. Mais c'est à Lacroix que l'on doit un traité en 1816. Une question reste cependant sans réponse : Lacroix a-t-il ou non enseigné les probabilités à la faculté des sciences?

Au cours du XIX ème nombreuses sont les modifications de programme : l'arithmétique sociale sera progressivement abandonnée et la partie générale est intégrée au cours d'analyse tandis que la théorie des erreurs est rattachée à l'astronomie et la géodésie. Progressivement les probabilités disparaissent du cours d'analyse , par contre les préoccupations militaires conduisent à un retour de la méthode des "moindres carrés" (supprimée lors de la réforme Le Verrier, car jugée trop difficile et trop peu pratique.)

Il faut attendre 1919, avec P. Lévy , pour qu'à nouveau une partie du cours d'analyse soit consacrée aux probabilités (la théorie des erreurs restant en astronomie). Il redonne ainsi à cette discipline un nouvel essor.

NOTES DE LECTURE

Initiation à la géométrie LEHMANN et BKOUCHE (P.U.F. 1988)

Nombre de professeurs de mathématiques en poste actuellement demandent à en savoir un peu plus sur la géométrie, trop absente de leurs études. Le livre de Daniel Lehmann est là, et bien là dans ce but.

> *"Je n'ai rien inventé* - écrit l'auteur - *j'ai tout au plus voulu structurer progressivement et élaguer .... certains cours de géométrie d'il y a trente ou cinquante ans."*

L'ouvrage comprend un important appendice historique de Rudolph Bkouche à fin de

> *"démêler les fils directeurs et expliciter les problématiques qui permettent de comprendre les enjeux et les significations du savoir d'aujourd'hui."*

Mesurer aussi bien la terre que le ciel BOYE et LEFORT (IREM de Nantes 1991)

Nos collègues publient le point de leur travail historique sur la cartographie au XVIII ème siècle et tout spécialement sur l'établissement de la carte de France de Cassini de Thury.

Ils ont voulu que ce travail soit marqué au coin d'une recherche pédagogique pluridisciplinaire à la portée des élèves du secondaire .

Ils y réussissent. Il faut les en remercier.

****

Pour alimenter le coin "revues scientifiques" d'un C.D.I. de Lycée.

Les cahiers de Science et Vie (publié par excelsior publications S.A. : 1 rue du colonel Pierre Avia Paris cedex 15) Une collection de 6 numéros par an paraissant tous les 2 mois (30 F. le numéro)

• Il s'agit de faire découvrir la problématique des grandes controverses scientifiques. "La science a une histoire dont les héros sont parfois des génies , parfois des imposteurs des importunistes ou des fous ... Mais toujours ce sont des hommes avec leurs grands et leurs petits côtés."

• Déjà parus :

n° 1	FARMAN	Qui a inventé l'avion?	(Février 1991)
n° 2	GALILEE	Naissance de la physique	(Avril 1991)
n° 3	A. WEGENER	La dérive des continent	(Juin 1991)
n° 4	PASTEUR	La tumultueuse naissance de la biologie moderne	(Août 1991)
n° 5	FRESNEL et ARAGO	Qu'est -ce-que la lumière?	(Octobre 1991)
n° 6	DARWIN	Le grand scandale du XIXème siècle	(Décembre 91)

Un premier pas pour aborder ce qu'est l'épistémologie.....

Une approche "transdisciplinaire et humaniste" bien présentée , une iconographie bien choisie et d'excellentes reproductions.

<u>Chaque numéro respecte le plan souligné ci-dessous:</u> (En exemple le n°2)

1) Comment on pensait les "choses"
- Quand la terre était le nombril du monde W. Shea
- Le Nombre et la matière J. Dhombres

2) Les acteurs
- Princes , savants et religieux W. Journet
- L'air du temps

3) L'histoire
- A deux doigts du bûcher L. Carpentier
- Textes à l'appui avec références.
- Faits et preuves . Fallait - il le croire? J. Stengers D. Gilles
- La lunette de Galilée. B. Morando
- Galilée , Newton . Qui a dit quoi? G. Chevalier

4) L'histoire de l'histoire
- Le mythe de Galilée. P. Redondi

5) Et maintenant
- Mea culpa ou pas B.Eymard-Duver
- Terres creuses et autres lunes P. Lagrange

Le cahier n° 2 peut-être utilisé par des élèves de TA_2A_3 ayant choisi l'option astronomie en math.

Pour alimenter la bibliothèque d'un C.D.I. de collège :

- Aux éditions du May (1988) 116 rue du Bac 75007 PARIS

<u>L'Aventure des Sciences</u> : images des sciences et techniques par **J.F. Gauthier**.

Pour de jeunes lecteurs, voilà posés les jalons d'une mémoire scientifique qui répond à la culture de leur siècle .

Vaste projet fort bien réussi en 80 étapes et sur 150 pages est racontée et illustrée l'aventure des sciences de la préhistoire aux problèmes actuels de la mort et de la transformation de l'univers. Le point de vue historique permet de mesurer combien sont fragiles les avancées du savoir .

L'auteur montre qu'il n'existe guère de grandes découvertes sans de grandes questions, que les problèmes posés laissés sans réponses se transmettent d'homme à homme comme un bâton de relais dans une course. L'aventure existe en science, elle a ses concurrents et ses enjeux. En même temps qu'il nous dévoile ce mouvement d'idées permanent dû à des personnages le plus souvent exceptionnels, il nous montre que ceux là même jouent un rôle, à leur manière, dans l'histoire des hommes et le développement des cultures.

Pour la culture du professeur!

• **La revue Sciences Humaines** (S H) qui depuis novembre 90 est devenue mensuelle, se trouve en "librairie de la presse" au prix de 28 F. le numéro (éditeur: 83 rue de Paris 89000 Auxerre).

Cette revue pluridisciplinaire cherche à créer au delà des goûts et des formations de chacun, un lieu de confrontations et de synthèse. Ouverte à toutes les formes d'analyse et à toutes les écoles de pensée elle cherche à être une revue de vulgarisation exigeante, une revue de référence utile, une revue lisible avec plaisir!

Signalons le **numéro 10 d'octobre 1991** dont le dossier pédagogique et synthétique aborde le thème de l'Education : crise et évolution . L'école aujourd'hui - Réformes et effets pervers - Les stratégies scolaires - Etats des lieux - L'orientation à l'école - L'ethnographie de l'école

Signalons également le dossier du **numéro 11 de novembre 1991** qui porte sur la question: Qu'est-ce-que la science? Voici les problèmes abordés : -La science et ses enjeux - La science à la recherche d'elle - même - La recherche en France - Comment faire une recherche? - Voyage au centre des labos - Bibliographie, mots clefs - La vulgarisation scientifique comme composante de la science?

Courrier à adresser à : Groupe M: A.T.H.
IREM de l'université Paris VII
Tour 55-56 3ème étage
75005 PARIS

Pour échanger expériences et réflexions à propos de

l'histoire et l'enseignement des mathématiques

M.: *Mathématiques*
A. *Approche par les*
T. *Textes*
H. *Historiques*

SOMMAIRE

En vente au prix de 4,00 Euros

Editeur : IREM
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Dépôt légal : Avril 1992
ISBN : 2-86612-083-3
IREM Université Paris VII Denis Diderot
Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83