LES INEQUATIONS EN CLASSE DE SECONDE

Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques

Catherine SACKUR[1], Maryse MAUREL[2]
GECO, Irem de Nice

Résumé. Le caractère *nécessaire* des énoncés mathématiques ne fait pas partie des connaissances explicitement *enseignées.* Un travail sur la résolution des *inéquations* en *classe* de seconde a permis aux élèves d'en faire *l'expérience.*

Introduction[3]

Le travail que nous présentons ici relate une expérience menée en classe de seconde[4]. Notre projet était de nous attaquer à une erreur fréquente et tenace en Algèbre :

« si $a>b$ alors $a.x>b.x$ ».

Pour cela nous disposions d'outils provenant de notre travail théorique déjà ancien : les *connaissances locales* et les *orientations*[5], et évidemment des outils empruntés aux travaux didactiques connus (changement de cadre, narration de recherche...).

Cette expérience avait aussi pour but de valider un travail théorique en cours, relatif à « la nécessité[6] des énoncés mathématiques » et au rôle que peut jouer dans un apprentissage la confrontation avec autrui.

---

[1] GECO-IREM de NICE catherine.sackur@unice.fr

[2] GECO-IREM de NICE maurel@math.unice.fr

[3] Nous remercions Jean-Philippe Drouhard pour sa participation à l'expérience et pour ses critiques et ses remarques.

[4] Nous remercions les élèves de seconde 14 du lycée Thierry Maulnier (1997-98) qui avec bonne humeur et sérieux nous ont permis de réaliser de travail.

[5] Pour un exposé plus complet, voir notre article GECO (2).

[6] Pour le sens que nous attribuons aux mots « nécessité » et « nécessaires » à propos des énoncés mathématiques, on peut voir directement la partie 1.2.1.

La première partie, après un résumé rapide des notions de *connaissance locale* et d'*orientation* posera le problème central de ce travail, celui de la « nécessité » des énoncés mathématiques.

La deuxième partie présentera l'expérience et la troisième le travail des élèves, ainsi que leurs réponses à un questionnaire sur l'expérience. Au passage, on aura l'occasion de s'interroger sur le rôle du maître.

Nous travaillons sur l'apprentissage de l'algèbre élémentaire, c'est-à-dire sur l'algèbre du collège et de la classe de seconde du lycée. Pour ces connaissances, nous pensons pouvoir affirmer qu'il y a accord entre tous les mathématiciens sur la validité des contenus des différents énoncés. Tel n'est sans doute pas le cas pour des énoncés mathématiques plus complexes pour lesquels différentes positions épistémologiques peuvent être adoptées, mais nous ne nous poserons pas ce type de question qui ne saurait surgir au niveau auquel nous travaillons.

1. Un peu de théorie

1.1 Les connaissances locales et les orientations

Indiquons brièvement notre cadre théorique général : nous nous sommes placé, au départ, dans une perspective piagétienne, considérant que la construction des connaissances se fait par interaction d'un individu avec la réalité. Cependant, les mathématiques ont été, et sont encore, construites socialement, par le groupe social des mathématiciens. L'apprentissage des mathématiques est donc, de notre point de vue, la « reconstruction » par un individu des mathématiques socialement et historiquement déjà construites par les mathématiciens. Cette reconstruction se fait en classe sous la direction du maître dont l'enseignement permet ce travail. Nous serons amenés à distinguer ces mathématiques, qui sont des connaissances subjectives, celles d'un sujet particulier, (connaissances locales), des mathématiques des mathématiciens, qui sont, elles, des connaissances objectives (savoir mathématique), sur la nature desquelles nous n'entendons pas engager le débat ici.

1.1.1 Connaissance locale

De notre point de vue, et nous suivons en cela les approches constructivistes, les erreurs que nous constatons dans les travaux mathématiques des élèves ne sont pas le résultat d'incohérences, de conceptions erronées, mais de connaissances qui ont une « forme » particulière. Pour rendre compte de ce fait, nous avons créé la notion de *connaissance locale.*

Dans notre cadre théorique, comme nous venons de le dire, toute connaissance est le résultat d'interactions entre un sujet, un groupe social et la réalité. En d'autres termes, les connaissances sont construites par le *sujet* de façon à être acceptables par un *groupe social* et dans une confrontation permanente avec la *réalité*.

On voit ainsi apparaître le triplet qui est à la base de notre théorie.

1.1.2 Trois espaces

Nous proposons donc d'interpréter, à la fois les connaissances d'un sujet et son activité mathématique, dans chacun des trois espaces qui constituent ce triplet :

1. l'espace psychologique qui concerne le rapport intra-cognitif du sujet avec lui-même,
2. l'espace social qui concerne le rapport inter-cognitif du sujet avec un groupe social,
3. l'espace réel qui concerne le rapport avec une réalité matérielle, ou conceptuelle dans le cas des mathématiques. Le travail qui consiste à définir la réalité en mathématique est encore en chantier au GECO.

Ces trois espaces nous permettent de définir une connaissance locale :

Nous affirmons que toute connaissance est locale ; elle est « vraie », au sens usuel du terme, à l'intérieur de certaines limites ; le sujet ignore l'existence de ces limites et, évidemment, leur place dans le savoir. Ces limites sont identifiables par un « expert », c'est-à-dire quelqu'un qui possède une connaissance moins locale que celle du sujet.

Regardons de façon précise ce terme de connaissance « vraie » :

- dans *l'espace psychologique*, elle est *cohérente* en elle-même pour le sujet ; elle ne contient pas de contradiction à l'intérieur du domaine où le sujet est susceptible de l'utiliser,
- dans *l'espace social*, elle est *valide*, validée par un groupe social (ou l'un de ses représentants) qui la reconnaît comme telle,
- dans *l'espace réel*, elle est *efficace*.

Nous pouvons donner de nombreux exemples de connaissances locales bien connues des enseignants de mathématiques ; l'une des plus courantes est

$$x^2 \geq x.$$

Le domaine de validité de cette connaissance est l'ensemble des entiers. Un sujet qui l'utilise dans cet ensemble ne risque pas de se trouver en contradiction avec lui-même ; de la même façon, dans l'ensemble des entiers la connaissance est validée par les mathématiciens et elle y est évidemment efficace, au sens qu'elle conduit à des résultats exacts.

Une connaissance locale possède ces trois qualités à l'intérieur de ses limites, dès que les limites sont dépassées, elle perd les trois qualités à la fois.

Nous appelons ces qualités les *dimensions* de la connaissance locale. Cela correspond à un aspect statique, à la connaissance stable, en état d'équilibre, par exemple à la connaissance utilisée à l'intérieur de son ensemble de validité.

L'élève construit des connaissances locales qui vont évoluer depuis des connaissances très locales jusqu'à des connaissances acceptables par un certain groupe social, l'école ou les mathématiciens par exemple.

La connaissance $a>b$ alors $a.x>b.x$ qui conduit les élèves à multiplier par x dans une inéquation sans s'occuper du signe de x est pour nous une connaissance locale : vraie quand on travaille sur les réels strictement positifs, non cohérente, non valide, non efficace quand on sort de ces limites pour l'appliquer à tous les réels.

1.1.3 Trois orientations

Nous nous intéressons maintenant à l'aspect dynamique des connaissances et à une éventuelle évolution des connaissances locales. Les connaissances sont utilisées pour agir. L'action peut être source de déséquilibre, et donc d'évolution, dans le cas où une connaissance est utilisée en dehors de son ensemble de validité. Ce n'est pourtant pas forcément le cas, certains élèves ne prenant pas en considération la perturbation amenée par cette situation.

Toute action est orientée vers un objectif et il y a des critères d'atteinte de cet objectif qui sont aussi des critères d'arrêt de l'action.

Nous avons défini trois orientations de l'activité d'un sujet, relatives aux trois espaces étudiés ci-dessus[7] :

la *compréhension* dans l'espace psychologique, la *conformité* dans l'espace social, la *performance* dans l'espace réel.

Chacun des espaces est étroitement lié à l'orientation qui lui correspond puisque c'est cet espace qui détermine, entre autres, la nature des indices que le sujet prend en considération à partir des résultats de son action pour guider celle-ci. Ainsi, un sujet qui travaille en compréhension se souciera principalement de « comprendre » ce qu'il fait, ce qui ne veut pas dire que ce sera exact, alors qu'un sujet qui travaille en performance cherchera à « trouver le bon résultat » quitte à perdre la cohérence de ce qu'il fait. Nous aurons à plusieurs reprises des exemples de travail dans ces différentes orientations.

Ainsi les critères de travail suivant chacune des trois orientations sont :

1. pour la compréhension : l'accord avec lui-même (cohérence interne du sujet).
2. pour la conformité : l'accord avec les règles édictées par autrui (le professeur qui représente les mathématiciens ou les élèves de la classe).
3. pour la performance : l'accord avec la réalité mathématique.

Il n'est pas facile d'identifier de façon irréfutable l'orientation du sujet pendant qu'il est en train de travailler : ainsi, le rejet d'une valeur négative pour le module d'un nombre complexe, par exemple, peut, suivant le contexte, être le fait d'un travail en conformité avec des règles bien « apprises », d'un travail en performance ou d'un travail en compréhension. Nos travaux précédents [2] nous ont conduit à prendre en compte la communication non verbale et à attacher une grande importance au ton de la voix, à la rapidité du discours, aux gestes...

Ainsi un travail en compréhension est un travail très personnel, sans relation avec le questionneur, souvent accompagné de murmures relativement indistincts, ponctué d'exclamations sourdes (ah oui, ah mais non...) avec éventuellement une accélération au moment de la découverte (eurêka ! en quelque sorte).

Dans un travail en conformité, l'élève récite en cherchant des yeux notre acquiescement, énonce ses règles d'une voix égale plus ou moins assurée suivant les compétences qu'il ose se reconnaître.

---

[7] Il est nécessaire de ne pas attribuer aux noms donnés à ces orientations une connotation issue du langage courant qui pourrait conduire à une hiérarchie qui, comme nous le verrons, n'existe pas. Nous avons essayé de choisir ces noms en fonction des critères qu'est susceptible d'utiliser le sujet pour guider son action.

Dans un travail en performance, l'élève a l'intuition du résultat, ou bien il en a connaissance en comparant son travail à celui d'un autre élève, et il fait ce qu'il faut pour y arriver.

Les orientations sont, aussi, bien repérables lorsqu'un élève passe d'une orientation à une autre dans son travail, par exemple de la conformité à la compréhension : là, on assiste souvent une modification complète de sa « façon d'être », en même temps qu'à une modification de son activité mathématique : prise de décisions, envie de tester des hypothèses, retour en arrière pour comparer des résultats... De tels changements d'orientations ont été mis en évidence dans le travail de Leslie lors des entretiens Faire-Faux [2].

Il nous paraît important pour éclairer le sens de notre travail sur l'algèbre de nous arrêter quelques instants sur la conformité. Nous considérons qu'il n'y a pas de hiérarchie entre les orientations (cf. note 6) et la compréhension ne vaut pas nécessairement mieux que la conformité, si elle consiste pour le sujet à être en cohérence interne dans un système de connaissances locales au domaine de validité extrêmement limité[8]. Cependant la conformité risque de souffrir de la connotation négative du mot « conformisme ». Or, l'algèbre (et sans doute toutes les mathématiques) tire en partie sa force de la possibilité qu'elle offre de travailler sans revenir à chaque instant à la compréhension du « pourquoi » d'une transformation algébrique. Un mathématicien se permet de faire une confiance aveugle à des règles qu'il connaît et qui sont des règles valides, efficaces et cohérentes, et ceci tant qu'aucun obstacle ne survient. Il s'agit bien d'un travail en conformité : ce qui guide l'action du mathématicien étant l'accord avec les règles acceptées par la communauté mathématique. Cependant, en cas de difficulté, ou pour garder un contrôle sur la validité de son travail, il a la possibilité d'abandonner ce type de fonctionnement et de mettre en œuvre d'autres procédures. D'autre part le mathématicien connaît l'origine de ces règles, il les a construites (reconstruites) tout au long de son apprentissage ; s'il ne connaît plus leur justification, il sait qu'elle existe, qu'il pourrait la retrouver, et que ces règles sont les mêmes pour tous les mathématiciens.

Ce que nous constatons, dans l'enseignement, c'est que trop souvent l'algèbre est enseignée comme un système de règles (on entend souvent : « l'algèbre, c'est facile, il n'y a rien à comprendre, il n'y a qu'à apprendre et appliquer ») et que les élèves n'ont à peu près aucun moyen de contrôle. Ces règles apparaissent souvent aux élèves comme arbitraires, ils n'en connaissent pas bien l'origine, elles paraissent n'avoir aucun lien entre elles, alors que, mathématiquement, leur dépendance est très forte. Les élèves n'ont alors pas d'autre choix que de travailler en conformité, en naviguant en aveugle dans toutes ces règles dont, bien sûr, la mémorisation est impossible.

Il nous a paru que l'échec des élèves en algèbre, partie des mathématiques réputée facile, a, en grande partie, son origine dans cette vision atomisée et, d'une certaine façon, « irrationnelle » que les élèves en ont.

La situation proposée ici (qui conduit à une confrontation, au sein d'un groupe, de résultats produits individuellement) a pour but d'amener les élèves à comprendre que les règles de l'algèbre ne peuvent être autre chose que ce qu'elles sont, qu'elles sont

---

[8] Nous ne pouvons résister au plaisir de donner ici un exemple issu d'un entretien mené avec Leslie [2] : « un carré est toujours positif ; un nombre positif est précédé d'un signe plus, d'ailleurs il y a un signe plus devant b^2 dans $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ».

« nécessaires ». Cela se fera par un changement d'orientation de travail de l'élève. Nous allons montrer que le travail en groupe permet le passage de la conformité à la performance, alors que dans les entretiens « Faire–Faux », nous observons souvent des passages de la conformité à la compréhension.

1.2 Nécessité des énoncés mathématiques et autrui

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, les mathématiciens savent, évidemment, beaucoup *plus* que les énoncés formels des théorèmes qu'ils utilisent. De façon très sommaire nous pouvons dire, en particulier, qu'ils savent qu'un théorème se démontre, que la valeur d'une expression algébrique ne change pas quand on lui fait subir une transformation d'écriture, qu'un problème a la même solution quelle que soit la méthode utilisée pour le résoudre, que le sens d'un théorème est le même pour tout le monde et qu'il ne varie ni dans le temps ni dans l'espace... Nos travaux sur les élèves en difficulté en algèbre nous ont montré qu'il est important que les élèves aient aussi ces « connaissances », et nous proposons de ramener leur apprentissage explicite au sein de l'institution scolaire.

En d'autres termes, quand on enseigne des mathématiques, on enseigne *plus que le texte des mathématiques.*

Dans nos travaux actuels, nous cherchons à décrire ce *plus* des mathématiques qui n'est pas dans le texte et que nous voulons enseigner. Aujourd'hui, nous allons nous intéresser seulement à l'un de ses aspects, que nous appelons *la nécessité épistémique*, et proposer une situation d'enseignement.

1.2.1 Une caractéristique des énoncés mathématiques : la nécessité épistémique

Examinons les deux énoncés:

(1) « le Mont Blanc a une hauteur de 4807m »

(2) « la solution dans R de $ax=b$ pour $a\neq 0$ est b/a ».

Nous proposons de les distinguer de deux points de vue (non exclusifs d'autres que nous n'examinons pas ici) :

- le premier est vrai ici et maintenant. L'altitude d'une montagne est susceptible de variations, le deuxième n'est pas susceptible de variations dans le temps.
- le deuxième se place à l'intérieur d'une théorie qui rend impossible le fait qu'il ne soit pas vrai. Il est « nécessaire » en ce sens qu'il est le résultat d'inférences valides à partir d'axiomes connus, suivant des règles connues et communes à tous les mathématiciens. Le premier énonce simplement un fait.

La question de la nécessité des énoncés mathématiques n'est pas nouvelle ; ainsi que le dit Cavaillès [5] :

« Le développement des mathématiques est nécessaire, non en ce qu'il suit des lignes préétablies, prévisibles, ou obéit à un dessein, mais en ce qu'il se déploie par construction de relations entre des résultats que leur connexion rationnelle soustrait pour ainsi dire à la contingence.».

Cavaillès relie la « nécessité » à l' « autonomie » des mathématiques, ce qui veut dire que la *nécessité* est interne aux mathématiques. Ce n'est pas une nécessité subjective, ce n'est pas parce que l'élève en est convaincu, c'est une nécessité objective, qui tient à la nature des mathématiques. C'est ce que nous appelons la *nécessité épistémique.*

Les objets mathématiques sont des objets *idéaux* soumis à certaines règles : ils sont prévisibles, ils échappent à la contingence, donc ils résistent et les énoncés qui portent sur eux sont nécessaires.

Donnons un exemple : le cube mathématique, par opposition au cube matérialisé ou au cube représenté, est un objet idéal. Deux droites du cube mathématique se coupent (ou ne se coupent pas) pour tout le monde et une fois pour toutes, il ne saurait en être autrement, alors que sur un cube représenté les mêmes deux droites peuvent selon la représentation, ou selon l'angle de vision, ou selon ce que chacun voit dans la représentation, avoir des positions relatives différentes.

La question qui se pose alors est celle de l'enseignement. On enseigne souvent l'algèbre sans que soit mise en lumière cette différence, essentielle à nos yeux, que nous avons signalée entre les deux énoncés ci-dessus. Ainsi, au collège on enseigne l'énoncé (2) comme l'énoncé (1). Cela apprend certes à donner la solution de l'équation, mais n'apprend rien sur la nature de ce savoir. Cela occulte une facette fondamentale de cet énoncé qui est sa nécessité.

Nous voyons là une cause de ce que nous avons souligné dans le paragraphe précédent, à savoir que les connaissances mathématiques des élèves risquent de se réduire à une liste de règles sans liens entre elles.

Nous faisons l'hypothèse que connaître la nature particulière du savoir mathématique peut aider les élèves à apprendre et à utiliser les mathématiques. En allant plus loin, nous pensons que cette connaissance fait partie intégrante des connaissances mathématiques et est une condition nécessaire à une activité mathématique véritable. Dès lors cette connaissance doit être enseignée pour elle même puisqu'elle n'est pas dans l'énoncé factuel. Il paraît assez évident qu'il ne peut suffire de l'énoncer pour qu'elle soit acquise.

Notre réflexion nous a permis de mettre en évidence quelques pistes permettant d'expliquer comment se construit, pour le mathématicien expert ou apprenti, la nécessité épistémique d'un énoncé mathématique : on peut penser au contexte (pragmatique), à l'histoire de la connaissance pour ce sujet-là, à l'expérience personnelle du sujet, par exemple à travers l'expérience du débat collectif en classe, à l'action performative[9] du maître qui a institutionnalisé cette connaissance...

Nous avons choisi, ici, de faire prendre conscience, à des élèves de seconde, de la nécessité d'un énoncé mathématique à travers la confrontation des résultats obtenus par deux méthodes différentes à la résolution d'une inéquation, puis de désigner cette nécessité et de lui donner le statut d'une connaissance, c'est-à-dire de l'institutionnaliser.

---

[9] par performatif nous entendons le fait de désigner explicitement ce qu'on fait, par exemple la phrase suivante est performative : « quand on démontre qu'un résultat obtenu pour quelques valeurs de n est vrai pour tout n, on fait des mathématiques ».

1.2.2 L'institutionnalisation de la nécessité

Les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir.

L'institutionnalisation répond aux paradoxes de l'enseignement :
- si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir,
- l'évolution n'est pas la connaissance de l'évolution.

L'institutionnalisation clarifie le savoir auquel on peut légitimement faire référence : avant on connaît, mais on ne sait pas (on ne sait pas qu'on sait). Elle joue, d'autre part, un rôle dans le contrat didactique : après l'institutionnalisation, le maître peut exiger le savoir institutionnalisé. Nous nous sommes penchés sur le rôle que joue l'institutionnalisation dans les situations d'enseignement dans lesquelles on enseigne, de notre point de vue, *plus que le texte des mathématiques*, par exemple, les situations de débat scientifique [3] ou de problème ouvert [1].

Dans l'activité de Marc Legrand, qui est une situation de débat scientifique, le maître institutionnalise la nécessité de travailler dans un modèle, et dans le même modèle pour tous, pour pouvoir se mettre d'accord sur le vrai et le faux ; le groupe construit ainsi un espace mathématique qui va résister aux opinions des uns et des autres et qui va imposer la nécessité de ses résultats.

Dans une activité de problème ouvert, telle que la recherche du nombre de segments joignant n points, le maître institutionnalise la validité de la variété des méthodes de recherche conduisant à la solution, la nécessité d'une démonstration pour un résultat obtenu expérimentalement ainsi que la nécessité d'un résultat portant sur n et pas seulement sur des valeurs particulières. On est loin des connaissances susceptibles d'être encadrées en rouge dans le cahier et apprises par cœur.

Nous affirmons qu'en algèbre, il ne suffit pas d'appliquer des règles formelles telles les identités remarquables, qu'il y a aussi les règles du jeu (au sens de Wittgenstein : celles qui règlent la nature de l'activité mathématique) dont découle, entre autres choses, la nécessité des énoncés. Il faudra certes institutionnaliser la règle formelle, mais aussi ce qui donne sens à cette règle dans l'ensemble des mathématiques, c'est-à-dire ce qui fait que si elle était autre, c'est l'ensemble de l'algèbre qui s'effondrerait.

Nos travaux actuels nous amènent à distinguer les différentes connaissances mathématiques que le maître doit institutionnaliser dans la classe. L'idée est de déplier le savoir mathématique que nous sommes amenés à regarder sous plusieurs aspects : en plus du niveau I (le texte du savoir), nous proposons de définir un niveau II dans lequel nous placerions en particulier la nécessité (et d'autres choses telles que la dénotation [2], le rôle des contre-exemples, que nous ne regardons pas ici). Il nous semble qu'il devrait y avoir aussi un niveau III qui concerne les choix épistémologiques des mathématiciens. Le travail de recherche qui concerne ce point est en cours, et nous en avons exposé les premiers éléments dans le séminaire DIDIREM [4]. N'oublions pas que la description des niveaux est du coté des mathématiques (connaissances objectives) et non du côté du sujet (connaissances subjectives ou connaissances locales).

1.2.3 Quelles situations pour enseigner la nécessité épistémique ?

Nous pensons qu'il est impossible d'enseigner explicitement des connaissances qui ne sont pas des connaissances de niveau I. Si on regarde les manuels scolaires actuels on y trouve des rubriques intitulées, par exemple, qui peuvent faire penser à des connaissances de niveau II. Ce n'est pourtant pas le cas, de telles rubriques proposant effectivement des « méthodes » mais celles-ci n'insistent pas sur la *nature* des connaissances mathématiques, elles donnent des clefs pour une activité de type scolaire, alors que nous souhaitons faire que l'activité des élèves se rapproche d'une activité mathématique.

Nous trouvons là, autant ou plus qu'ailleurs, un des paradoxes de l'enseignant, le maître ne pouvant pas nommer *a priori* ces connaissances de niveau supérieur à I[10]. Il faut donc faire des détours, c'est-à-dire prévoir des situations a-didactiques pour l'enseignement de la nécessité.

1.2.4 Autrui et la réalité mathématique

a) la nécessité mathématique

Dans la perspective piagétienne, le sujet interagit avec son environnement : la réalité. Dans notre travail, nous avons besoin de définir une réalité qui puisse jouer le rôle du monde réel auquel est confronté un enfant quand il agit ; nous avons besoin d'une « réalité mathématique » à laquelle va être confronté un élève qui fait des mathématiques. En effet, si le monde réel, matériel peut tenir lieu de réalité mathématique pour les tous premiers apprentissages, tels que celui du nombre entier, on voit facilement que cette situation ne dure pas. Il nous faut donc définir une « réalité » de nature conceptuelle qui permet de regarder et d'interpréter l'activité d'un sujet qui construit ses connaissances mathématiques.

Dans une première approche, nous utiliserons l'idée de résistance. Dans le monde physique, les objets, un mur par exemple, résistent ; nous rencontrons tous cette résistance de la même façon : personne ne peut passer à travers un mur sans le casser. En mathématiques, nous proposons de dire que c'est la même chose. Les règles du jeu, c'est-à-dire les principes qui régissent l'activité mathématique (le principe de non-contradiction par exemple) amènent les mathématiciens à se confronter à des objets mathématiques qui résistent. Ce sont les êtres mathématiques, mais aussi les relations entre eux, les structures, ...

En ce qui concerne la nécessité, dire que : « l'énoncé *'5/3 est un rationnel'* est nécessaire » signifie que le quotient de 5 par 3 ne sera JAMAIS, et pour personne, un entier.

---

[10] On peut certes imaginer un professeur qui annoncerait en titre de chapitre : « nécessité des énoncés mathématiques » et qui à la suite d'un cours ferait un certain nombre d'exercices d'application sur ce sujet. Nous doutons de l'efficacité d'un tel enseignement.

b) expérience et autrui

Nous proposons donc de dire que la nécessité des énoncés mathématiques s'éprouve dans la confrontation avec l'aspect résistant des objets mathématiques. Ceci doit nous permettre de construire des situations a-didactiques qui permettent au sujet de rencontrer la nécessité. Cependant il reste une difficulté. Si nous revenons aux trois orientations de travail que nous avons étudiées dans la première partie, nous voyons qu'il est possible à un élève de travailler en conformité, c'est-à-dire, d'appliquer les règles que la communauté des mathématiciens a déclarées valides, sans se soucier réellement de leurs effets sur le travail qu'il accomplit. De façon analogue, un élève peut travailler en compréhension, c'est-à-dire en cohérence interne, avec ses propres connaissances locales qui risquent de ne rencontrer que de façon très imparfaite les connaissances mathématiques. La confrontation avec la réalité passe par un travail en performance. Il s'agit donc de créer des situations qui obligeront les élèves à travailler en performance, c'est-à-dire de prendre la réussite comme critère pour guider leur travail. Notre expérience d'enseignant nous a convaincus que laisser au maître l'appréciation de la réussite ne permet généralement pas de changer l'orientation de travail des élèves. Cela ne peut évidemment guère les faire bouger s'ils sont en conformité ; plus curieusement peut-être, cela ne les fait pas non plus nécessairement bouger s'ils sont en compréhension[11].

Nous pouvons résumer de la façon suivante, bien qu'un peu sommaire, les caractéristiques des situations que nous souhaitons installer : mettre les sujets en position de travailler en performance, leur donner comme critère pour guider leur action la réussite, celle-ci étant l'accord avec la réalité mathématique.

La réalité mathématique n'étant ni matérielle, ni symbolique, (nous ne sommes pas platoniciens), une de nos hypothèses de travail est qu'on peut rencontrer[12] cette réalité dans la confrontation avec autrui, de préférence un autrui élève, dans un dialogue durant lequel on fait l'expérience de la contradiction.

L'expérience que nous allons vous présenter a été construite sur ces bases, avec deux objectifs :

- mettre les élèves en situation de faire l'expérience de la nécessité, puis d'identifier cette nécessité en s'appuyant sur la prise de conscience de certains, puis de la nommer après coup de manière performative,
- montrer que nous pouvons faire ce travail en algèbre (alors qu'on dit souvent qu'en algèbre, il suffit d'appliquer des règles).

1.3 Le passage à l'écrit

Nous avons aussi voulu obliger les élèves à faire un *retour réflexif sur leur travail* ; c'est le rôle des narrations de recherche individuelles et collectives que nous leur avons

---

[11] Des élèves, auxquels on montrait que l'application de la règle exacte donne un résultat différent de celui qu'ils obtenaient avec une règle inexacte répondent: « et alors !, j'ai appliqué une règle, vous une autre, ce n'est pas étonnant que les résultats soient différents ! » Pour une explication de ce phénomène on peut se rapporter à nos différents travaux sur les « calculateurs aveugles » [2].

[12] Nous serions tentés de dire : « qu'on *ne peut* rencontrer cette réalité *que* dans la confrontation avec autrui ». Ceci est une hypothèse plus forte qui reste à étudier, et qui pose la question de ce que pourrait être un « autrui intériorisé ».

demandées, de l'accompagnement que nous avons fait dans le deuxième groupe et du questionnaire proposé après la fin de l'expérience dont un des buts était, pour les élèves, de fixer un souvenir de cette expérience pour en faire un épisode didactique leur servant de référence.

Nous n'étudierons pas ici les effets de ce dispositif de passage à l'écrit, car, nous ne disposons pas encore de moyens d'analyse fiables. C'est une autre piste de notre travail de recherche.

2. L'expérience

2.1 Déroulement

L'expérience s'est déroulée dans une classe de seconde de bon niveau, au deuxième trimestre. Les élèves connaissaient les représentations graphiques des fonctions de référence, avaient une bonne habitude des résolutions graphiques d'équations et d'inéquations. Les inéquations-produit avaient été étudiées et résolues par l'utilisation d'un tableau de signe, mais aucune inéquation-quotient n'avait été résolue algébriquement. Néanmoins à l'occasion de l'étude des fonctions affines et de la fonction inverse, la règle sur la multiplication par un négatif dans une inégalité avait été rappelée. Le professeur de la classe était assisté de deux observateurs, qui ont joué un rôle actif auprès des groupes pour les aider à verbaliser et à expliciter leur démarche. Le tableau ci-dessous présente le calendrier de l'expérience.

Dates	Groupe concerné	Travail proposé
17 mars 1998	Groupe 1 1h 30	30 mn de travail personnel et narration individuelle, 1 heure de confrontation et narration en groupe.
24 mars 1998	Groupe 2 1h 30	idem
1er avril 1998	Classe entière 1h	Synthèse (voir consigne)
30 avril 1998	Classe entière 1h	Questionnaire

Durant les trente premières minutes de travail individuel les élèves étaient placés seuls à une table. Nous avions dit qu'il ne serait répondu à aucune question ce qui n'a pas empêché l'un d'eux de demander si l'usage de la calculatrice était autorisé. Cette question a visiblement donné des idées à certains qui n'avaient pas pensé à la calculatrice et les a conduits vers la résolution graphique.

L'encadré ci - après reproduit la feuille de consigne distribuée aux deux groupes (le 17 et le 24 mars) :

Résoudre l' inéquation :
A : $\frac{3}{x} > x+2$
Toutes les méthodes de recherche et de résolution sont autorisées.
Ecrivez les différentes étapes de votre recherche.
Donnez un résultat dont vous êtes le plus sûr possible. Expliquez ce qui vous a servi pour être sûr.
Pensez à la façon dont vous pouvez convaincre quelqu'un que votre résultat est exact

Pendant la phase de travail individuel, les observateurs ont circulé dans la classe, pris des notes sur le travail des élèves et le professeur de la classe a commencé à organiser les groupes de travail en tenant compte de la méthode de résolution choisie pour permettre les confrontations, du niveau des élèves et de leur personnalité de façon à essayer de créer des situations de dialogue fructueux.

2.2 Analyse a priori

2.2.1 Rôle du travail en groupe

La phase de travail individuel doit permettre de déclencher des connaissances locales sur la résolution de l'inéquation et la production des erreurs éventuelles.

La phase de travail en groupe permet

- de déterminer le résultat exact si le groupe est confronté à des résultats individuels différents, ce qui a presque toujours été le cas,
- de faire l'expérience de la nécessité du résultat de l'inéquation,
- de faire mettre en échec les connaissances qui donnent des résultats faux,
- de faire l'expérience d'autrui par l'obligation à se mettre d'accord avec un autrui extériorisé,
- de construire un nouvelle connaissance (ou de réactiver la connaissance exacte).

2.2.2 Deux possibilités de voir les erreurs

Compte tenu de leurs connaissances, les élèves disposent de deux moyens pour résoudre l'inéquation, la méthode algébrique dont nous supposons qu'elle sera source d'erreurs en raison de la connaissance locale que nous cherchons justement à modifier :

« si $a>b$ alors $a.x>b.x$ »

et la méthode graphique en faisant apparaître sur l'écran de leur calculatrice, ou en traçant à la main, la droite et l'hyperbole. Nous n'avions pas prévu que certains élèves multiplieraient par x les deux membres de l'inéquation et feraient ensuite une résolution graphique mettant en jeu des paraboles ce qui a fournit des débats particulièrement riches (voir par exemple le groupe Magali, Mélanie, Renan).

En cas de contradiction, quand ils se retrouvent en groupe, la confrontation des deux méthodes leur fournit une première façon de déterminer la solution exacte. Ils peuvent d'autre part donner des valeurs à x et vérifier leur solution sur les valeurs numériques. Dans tous les cas, ils voient qu'il y a une erreur dans une des résolutions ; ils avaient, en principe, la possibilité de s'arrêter à ce moment du travail et de se contenter de fournir la solution qu'ils pensaient être exacte. Nous avions fait l'hypothèse que la confrontation avec d'autres élèves (rôle d'autrui) allait les conduire à poursuivre le travail, à trouver l'erreur et à réfléchir dessus.

2.2.3 Interprétation

En termes d'orientations de travail (cf. partie 1), notre analyse est la suivante. Les élèves qui utilisent la méthode algébrique font un travail en conformité, (les autres aussi sans doute, mais leur travail donne la réponse exacte) : ils connaissent une règle (la connaissance locale) et l'appliquent en dehors de ses limites de validité. La confrontation avec les résultats des autres élèves les met en face de la réalité mathématique : en mathématiques, un problème ne peut avoir deux solutions différentes, de cela nos élèves sont convaincus, une des solutions est nécessairement fausse. La solution exacte est la réalité de ce problème. Il s'agit donc pour eux de mettre leur solution en accord avec cette réalité, c'est-à-dire de modifier leurs connaissances pour en construire une qui conduise à cette solution. Ils vont faire un travail en performance. Dans le cas d'un travail en conformité, ce qui guide leur action c'est l'accord avec les règles de la communauté (ici la classe). Il nous semble que ce type de travail est bien visible chez Lisa (3.1.2) et chez Nathalie (3.1.5). Dans un travail en performance, il faut « coûte que coûte » parvenir à la solution exacte ; on en verra un exemple dans le travail de Magali, Mélanie, Renan (3.1.3).

On peut faire l'hypothèse que pour certains ceci sera l'occasion de faire aussi un travail en compréhension, mais nous n'avons aucune certitude à ce sujet. Il nous paraît que les solutions proposées par Julien et Jacques (3.1.4) peuvent être interprétées de façon différente et que leur orientation de travail n'est pas la même.

2.3 Les connaissances institutionnalisées

La séance de synthèse en classe entière s'est déroulée en deux parties. Chaque groupe est venu faire un compte rendu de son travail et des résultats auxquels il était parvenu ; certains groupes n'avaient pas réussi à trouver l'origine de l'erreur dans le travail algébrique. Ensuite, le professeur a institutionnalisé les connaissances mises à jour à travers ce travail.

2.3.1 Connaissances de niveau I

* multiplier les deux membres d'une inéquation par x nous oblige à regarder le signe de x,
* rappel de la méthode algébrique après factorisation (signe du binôme, tableau, lecture du tableau). Cette connaissance était acquise pour tous,
* méthode graphique (choix des fonctions, dessin, lecture des informations sur le graphique). Presque tous les élèves savent le faire ; pour les quelques uns qui ne savent pas, on propose un travail en module,
* utilisation de la calculatrice. Ici aussi, il y a très peu d'erreurs.

2.3.2 Connaissances de niveau II

* une inéquation se résout graphiquement ou algébriquement mais on doit trouver le même résultat au même problème de mathématiques résolu par deux méthodes différentes. On verra dans les réponses au questionnaire que plusieurs élèves ont retenu cette connaissance,
* on peut utiliser des valeurs numériques pour vérifier un résultat ; ce n'est pas une démonstration. On institutionnalise ainsi la notion de contre-exemple,
* nécessité : « si $a>b$, et si $x<0$ alors $a.x<b.x$ » est un énoncé nécessaire,
* rôle d'autrui : la confrontation avec une autre personne oblige à savoir convaincre, elle permet de voir des erreurs, elle donne des idées sur différentes méthodes, ce qui rejoint ce que nous avons dit plus haut, et ouvre la voie à la notion d' « autrui intériorisé ».
* Notion de problèmes équivalents : si après confrontation, on ne trouve pas pareil, et s'il n'y a pas d'erreur, les deux problèmes mathématiques qu'on cherche à résoudre ne sont pas équivalents. Cette question, non prévue *a priori* est sortie de l'exposé d'Anne à la séance bilan du 1er avril.

3. Le travail des élèves

3.1 Observations[13]

3.1.1 Vérification et contre-exemples

Nous trouvons dans les rédactions beaucoup de mentions de vérification avec des valeurs numériques. Par exemple (chez *Mathieu et Julien R.*) :

Pour une résolution graphique, trois étapes 1) tracé des courbes. 2) lecture graphique. 3) « Vérification par le calcul » je prends les valeurs de x comprises entre $]-\infty,-3[\cup]0,1[$ ex : $x = -4$ $\frac{3}{x} = \frac{3}{-4} = -0{,}75$ $\qquad x + 2 = -4 + 2 = -2$ On s'aperçoit que $\frac{3}{x} > x + 2$ Je pense que mon résultat est correct car lorsque je vérifie, je m'aperçois que les exemples vérifient mon résultat.

[13] Dans tout ce paragraphe, les parties encadrées sont des citations issues des narrations de recherche des élèves et les parties en italique sont nos commentaires.

Nous trouvons aussi chez *Sophie F.* :

Si l'on remplace x dans les 2 expressions par -3 puis par 1, on obtient
$\frac{3}{x} = \frac{3}{1} = 3$ $\qquad$ $x + 2 = 1 + 2 = 3$
$\frac{3}{x} = -\frac{3}{3} = -1$ $\qquad$ et $\qquad$ $x + 2 = -3 + 2 = -1$
Pour ces 2 valeurs de x, on a $\frac{3}{x} = x + 2$
Si l'on prend une valeur de x entre -3 et 0, on obtiendra $\frac{3}{x} < x+2$
Ex : pour $x = 2$ $\qquad$ $\frac{3}{2} < 4$
Donc $\frac{3}{x} < x + 2$ pour $x \in \,]\, 1,+\infty[$
Donc $\frac{3}{x} < x + 2$ quand $x \in \,]\, -\infty, 3[\cup]0,1[$

3.1.2 Un exemple de travail en conformité

Lisa fait un calcul à l'aveuglette, qui évolue vers un essai de travail en performance et qui échoue :

$\frac{3}{x} > x+2$
$\frac{3}{x} + x > 2$
$x + x > 2 \times 3$
$2x > 6$
$x > \frac{6}{2}$
$x > \frac{2}{3}$

Au-dessous de ce qui précède, elle reprend, à côté du graphique sur lequel on peut lire que -3 est l'abscisse d'un point commun aux deux courbes. La confrontation à la courbe la fait changer d'orientation.	$\frac{3}{x} > x+2$ $\frac{3}{x} - x - 2 > 0$ $\frac{3}{x} - x > 2$ $x\left(\frac{1}{3} - 1\right) > 2$ $x > \frac{2}{\frac{1}{3} - 1}$ $x > \frac{2}{\frac{1}{3} - \frac{3}{3}}$
Elle essaie de passer de la conformité à la performance pour trouver ce qu'il faut trouver d'après la courbe, c'est-à-dire -3.	$x > \frac{2}{-\frac{2}{3}}$ $x > -2 \times \frac{3}{2}$ $x > -3$

3.1.3 Passage de la conformité à la performance : Magali, Mélanie et Renan

Ils ont écrit quand ils étaient tous les trois :

D'abord on a comparé les résultats : Renan et moi, nous avons fait la même démarche (voir feuille Renan ou Magali) et nous avons les mêmes résultats]-∞,-3[∪]0,1[. Par contre Mélanie (*qui avait tout d'abord résolu graphiquement* $\frac{3}{x} - x + 2 < 0$, *puis a essayé une autre méthode, la multiplication par x, suivie de la résolution graphique de* $x^2 + 2x - 3 < 0$) avait 2 autres solutions (voir feuille) et ne trouve pas le même résultat. Idée : Il faut essayer de comprendre pourquoi. Dans la 2$^{\text{ème}}$ solution de Mélanie, on a essayé d'inverser le signe de l'inéquation car on ne connaît pas le signe de x (lorsqu'on divise par un nombre négatif). Mais ça n'a pas marché, on ne trouve pas le même résultat que Renan et moi. Problème : On avait une autre idée (solution de Mélanie) faire une parabole. Idée rejetée parce qu'on obtient pas le résultat dont on est presque sûr. Solution : - Grâce à la lecture graphique, on voit que quand x est compris entre]-∞,-3[∪]0,1[, $\frac{3}{x} > x + 2$ (voir feuille de Renan). - Grâce à l'autre qui consistait à obtenir une parabole, nous avons obtenu le même résultat après de multiples péripéties.

Nous les avons écoutés pendant la séance. Ils ont essayé les deux paraboles d'équation $y = x^2 + 2x - 3$ et $y = -x^2 - 2x + 3$, et devant nous ont conclu : « Ni l'une, ni l'autre ne vont ! ». D'ailleurs Renan dit : « Dès qu'il y a une parabole, ça cloche ! ».

Ils voulaient prendre ces deux paraboles globalement, l'une ou l'autre, mais en entier. Vers la fin de la discussion, ils semblaient aller vers l'idée de prendre une partie de la deuxième pour $x < 0$ et une partie de la première pour $x > 0$, mais nous ne savons pas exactement ce qu'ils ont fait dans leurs « multiples péripéties ».

Pour nous la performance, c'est l'accord avec la réalité mathématique. Il nous parait évident qu'ils essaient d'adapter la « solution » de Mélanie à la « solution » dont ils sont sûrs et qu'ils rejettent l'idée « parabole » « parce qu'on n'obtient pas le résultat » dont on est presque sûr.

Le compte-rendu qu'ils font de leur confrontation et ce que nous en avons observé nous permettent d'inférer qu'à la fin de la séance, ils ont travaillé en performance.

3.1.4 Passage de la conformité à la performance : Julien et Jacques

Julien et Jacques ont transformé l'inéquation en : « $x^2 + 2x - 3 < 0$ » et obtenu le résultat en utilisant un « tableau de signes » :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x - 1$		-		-	0	+	
$x + 3$		-	0	+		+	
$f(x)$		+	0	-	0	+	

obtenant comme solution l'intervalle [-3 ; 1] qui différait du résultat de ceux qui avaient travaillé graphiquement en utilisant les courbes : « $y = \frac{3}{x}$ » *et* « $y = x + 2$ ».

Julien

Julien fut convaincu de la solution obtenue par les autres élèves (qui devint alors la « réalité » mathématique, ce qui résiste) mais voulut une explication de son erreur. Il dit :

> si x est négatif il faut changer le sens de l'inégalité et on a alors deux inégalités à résoudre,
> $\frac{3}{x} > x + 2$, c'est-à-dire $3 - x^2 - 2x \geq 0$
> et $\frac{3}{x} < x + 2$, c'est-à-dire $3 - x^2 - 2x \leq 0$.

(On constate que le changement du sens de l'inégalité n'a pas lieu au moment de la multiplication par x).

Il les résout et met alors un zéro dans le tableau qui devient :

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	

et trouve ainsi la solution pour $x < 0$ *qui est* $]-\infty; -3[$.

Jacques

Jacques a une autre façon de s'adapter à la « réalité » mathématique. A partir de

x	-∞		-3		1		+∞
x - 1		-		-	0	+	
x + 3		-	0	+		+	
$f(x)$		+	0	-	0	+	

il corrige : quand x est négatif, il faut changer les signes parce que $-x$ c'est $(-1)x$ et ainsi il y a un facteur négatif de plus dans le tableau. Son tableau devient :

x	-∞		-3		0		1		+∞
x - 1		-		-		-	0	+	
x + 3		-	0	+		+		+	
- -1		-		-					
$f(x)$		-	0	+		-	0	+	

et le résultat de l'inéquation est :]-∞; -3[∪]0,1[.

3.1.5 Les groupe des « bons »

a) Le travail personnel de Nathalie, une des trois élèves de ce groupe

Elle fait un travail en conformité, mais pas en performance. Elle est la seule élève de la classe à avoir pensé, *a priori*, à distinguer les deux cas, suivant le signe de x. Elle a, en général, une très bonne conformité.

Tableau de signe Si $x>0$ $\frac{3}{x}>x+2$ $3>x^2+2x$ $0>\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}$ $0>\frac{x}{3}(x+2)$ Pas de solution dans R+.	 Si $x<0$ $\frac{3}{x}<x+2$ $3<x^2+2x$ $0<\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}$ $0<\frac{x}{3}(x+2)$ *Et au-dessous un tableau de signes avec lequel elle conclut que x appartient à]-∞,-2[.*

Nathalie fait un calcul aveugle et conforme, mais son calcul est faux. Elle n'utilise aucun moyen de contrôle de ses résultats ; sans doute en a -t- elle, mais elle ne s'en sert pas. Cependant, si on lui dit : « pour telle valeur de x, ça ne marche pas! », elle est d'accord. Nathalie qui est une bonne élève (et qui fonce) n'a pas réussi à corriger son erreur dans la première inéquation, elle semble n'être passée ni en performance, ni en compréhension. Le groupe des « bons » a tout jeté alors que l'idée de départ était bonne.

b) Regardons ce qu'ils ont écrit dans leur narration de recherche collective :

1) Les trois versions étaient différentes et ne donnaient pas les mêmes résultats. Emmanuel a calculé pour x positif, mais pas pour x négatif (graphiquement). Nathalie au lieu de soustraire a divisé (algébriquement). Florent a fait juste car il donne le même résultat que la calculatrice (graphiquement). 2) Florent et Emmanuel ont trouvé pareil. Nathalie a fait deux erreurs de calcul. On a vérifié avec -1 et - $\frac{2}{3}$ la façon graphique de Florent et Emmanuel et c'est juste.

c) Cela correspond effectivement à ce qu'ils avaient fait dans leur travail individuel :

Emmanuel

$\frac{3}{x} > x+2$ $\frac{3}{x} > \frac{x^2}{x} + \frac{2x^2}{x}$ je supprime les x en dénominateur je trace la parabole solution] -3,1[.

Nathalie

Nathalie, ainsi que nous l'avons dit, est la seule à distinguer dès le début les deux cas $x > 0$ et $x < 0$, mais elle n'en fait rien. Nous avons vu dans l'exemple cité plus haut, qu'elle fait une erreur de calcul et qu'elle s'arrête.

Florent a sans doute recopié l'écran de la calculatrice : il a tracé sur sa feuille l'hyperbole et la droite.

d) Analyse du fonctionnement du « groupe des bons »

L'observation de leur travail nous montre bien qu'il faut faire quelque chose de plus qu'amener les élèves à travailler sur leurs erreurs. Dans ce groupe, autrui ne joue pas son rôle pour permettre la confrontation à la réalité mathématique. Ils ne sont pas rentrés dans le contrat, il n'y a pas eu dévolution[14] de la situation problème. Ils sont restés dans un travail très « scolaire ». S'ils savent faire, ils foncent ; s'ils se trompent, ils ne recommencent pas à partir de l'endroit où ils ont repéré une erreur. Ils attendent la correction du maître. Nous rapprochons cette observation du fait que leurs narrations de recherche sont très pauvres : pour eux expliquer, ce n'est pas faire des mathématiques. De même, Emmanuel et Florent sont les seuls, dans la classe, à avoir mentionné, dans le questionnaire, le moment de la correction parmi les moments les plus importants. Les mathématiques, c'est « je calcule, je démontre ». Ils restent au niveau scolaire des tâches à effectuer. S'ils ont conscience qu'un problème ne peut avoir deux solutions

[14] on dit qu'il y a eu *dévolution* du problème si les élèves se le sont appropriés pour en faire un sujet d'étude personnel. Le problème n'est plus alors seulement, pour eux, un exercice scolaire proposé par le maître, il existe en lui même et la recherche de la solution est un enjeu pour les élèves.

contradictoires, ceci n'a pas d'effet sur leur travail en mathématiques, en classe. Nous sommes enclins à penser que leur activité actuelle en mathématiques n'est pas ce que nous appelons une activité mathématique. Nous pensons toucher ici une connaissance de niveau III, qui est une connaissance sur la nature de l'activité mathématique, qui nous paraît bien être de nature épistémologique.

3.2 Réponses au questionnaire

Rappelons que le questionnaire a été rempli en classe un mois après la séance de synthèse et d'institutionnalisation. Leurs réponses font nettement apparaître l'idée de confrontation des résultats et l'obligation de se mettre d'accord. Le travail en groupe n'est pas vécu comme une situation qui permet d'arriver plus vite au résultat, ni comme c'est souvent le cas, comme une situation d'aide en ce sens qu'un élève explique « avec des mots plus adaptés que ceux du professeur » à ceux qui n'ont pas compris. La mise en commun apporte plutôt du travail supplémentaire. Quand c'est le cas, nous estimons que la dévolution de la situation a été bien faite et que ces élèves là sont entrés dans une vraie activité mathématique.

3.2.1 Les moments les plus importants

« Le moment le plus important fut lorsque nous avons vérifié les résultats avec l'autre groupe. Les résultats paraissaient corrects pourtant les deux étaient différents. Nous avons compris que notre résultat était faux ».
« Les moments les plus importants ont été la confrontation des réponses entre les groupes avec l'arrivée de nouveaux problèmes à résoudre ».
« Il me semble que le moment le plus important a été la concertation avec les autres membres du groupe car c'est là qu'on peut discuter de nos certitudes, nos doutes, ... ».
« Le moment le plus important pour moi fut la confrontation des résultats de chacun (surtout lorsqu'on était quatre). En effet, la camarade avec qui j'ai d'abord travaillé, avait les mêmes solutions, nous n'avons donc pas cherché plus loin. mais lorsque l'autre groupe nous a présenté son travail, nous avons dû nous poser des questions et c'était intéressant ».

3.2.2 Vérification

Ils insistent aussi sur l'importance d'une vérification et les moyens de vérifier, en particulier grâce au changement de cadre.
« J'ai surtout appris que la résolution algébrique est une bonne méthode mais que l'on peut toujours faire une erreur de calcul, donc il vaut mieux vérifier par la méthode graphique. En fait si on a le temps, il vaut mieux vérifier les résultats trouvés par une autre méthode ».
« La résolution graphique ... permet de vérifier la résolution algébrique et de la corriger si besoin »

3.2.3 Ce qu'ils ont appris sur la connaissance locale

Nous trouvons des phrases qui montrent que les élèves ont pris conscience de la difficulté de manipuler les règles de calcul algébrique et la connaissance locale que nous visions pour eux.
« J'ai appris qu'il faut faire très attention lorsqu'on passe un dénominateur de signe inconnu de l'autre côté pour changer le signe de l'inéquation. Car c'est ça qui nous a posé le plus de problèmes. En fait, il faut faire deux équations séparées, une avec $x > 0$ et une avec $x < 0$ ».
« ... il faut toujours faire attention au signe de l'expression, elle est assez difficile ».
« J'ai appris que lorsqu'on a une inéquation avec un membre qui est une équation de forme $y = \frac{1}{x}$ (hyperbole), il fallait travailler séparément dans les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. »

3.2.4 Effet du dispositif

« ... la narration de recherche pour essayer de résoudre des exos et raconter ... donne des idées auxquelles je n'avais peut-être pas pensé ».
« ... comment remettre en question quelque chose mal démontré ».
« J'ai appris à ne pas me borner à ma solution et aller voir chez les autres pour comparer et en parler (calmement) tout en essayant de comprendre mes erreurs et quelles sont mes difficultés ».
« à discuter des résultats et des résolutions, et à convaincre quelqu'un de son erreur ».
« Ces séances permettent d'exposer ses idées, son opinion et de ne pas suivre ce qu'ont fait les autres. Maintenant, je laisserai tomber mon idée seulement si je suis sûre qu'elle est fausse ».

Enfin on trouve une trace de la notion de problèmes équivalents :
« Savoir garder le problème initial, ne pas le transformer en problème différent ».

Remarquons aussi que quelques élèves signalent n'avoir rien retenu ou appris sur la résolution algébrique, parce que dans leur groupe, tout le monde avait résolu par la méthode graphique. La confrontation n'a pas eu lieu par défaut de notre part dans la constitution des groupes lors de la première séance de module, mais aussi parce que nous n'avons pas su les mettre en situation d'expliquer comment ils avaient trouvé leurs résultat, et ces élèves disent n'avoir rien appris sur la connaissance locale visée. Pour ces élèves, le dispositif n'a pas marché. Mais la séance d'institutionnalisation peut avoir de l'effet, ou pourrait en avoir :
« Dans mon groupe, personne n'avait fait un tableau de signes. Personnellement ça ne m'était pas venu directement à l'idée. J'ai compris lorsqu'on l'a fait au tableau. Je ne m'en souviens plus très bien mais je crois qu'il fallait en faire 2 car 1 seul ne marchait pas ».

Conclusion

Notre but dans ce travail était de permettre à des élèves de modifier une connaissance locale en se confrontant à un objet mathématique résistant (la solution d'une inéquation). Cette confrontation devait être rendue possible par la présence et le travail d'autres élèves. Notre pari était que les différents élèves utilisant des méthodes différentes obtiendraient des résultats différents.

En d'autres termes, il s'agissait de substituer à un travail en conformité un travail en performance ou en compréhension, et, pour cela, d'obliger les élèves à se confronter à la réalité mathématique. Cette confrontation devait être rendue possible par l'interaction avec autrui.

Nous avons pu constater que :

- la connaissance locale responsable de l'erreur dans la résolution, n'a pas été toujours identifiée. Elle a dû être désignée par le professeur de façon performative lors de la séance d'institutionnalisation. On la retrouve, néanmoins, citée d'une façon ou d'une autre dans la quasi totalité des questionnaires.
- dans 6 groupes sur 9, le dispositif a joué son rôle, la confrontation avec la réalité mathématique a eu lieu. Les élèves ne se sont pas bornés à l'obtention de la bonne solution. Ils ont eu une véritable activité mathématique.
- la présence d'un autrui a été un élément déterminant et certains élèves ont aperçu le rôle que pourrait jouer un autrui intériorisé.

On peut se poser la question de savoir si ce qui était visé, à savoir la nécessité (sur un exemple) des énoncés mathématiques, a été atteint, au moins partiellement. Nous ne pensons pas que ce soit véritablement le cas pour une majorité d'élèves. Par contre nous sommes convaincus que la plupart d'entre eux ont changé d'orientation de travail, qu'ils ont abandonné la conformité, et que, sur un problème d'algèbre, ils ont travaillé en performance, et peut-être certains (Magali, Mélanie, Renan, Julien) en compréhension. Cette capacité à changer d'orientation de travail est, pour nous, le signe d'une certaine expertise en mathématiques.

Bibliographie

[1] ARSAC G., GERMAIN G. & MANTE M. (1988) *Problème ouvert et situation problème* , Irem de LYON, Université Lyon 1.

[2] GECO, (1997) *Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire?* Repères - IREM n° 28, Topiques éditions.

[3] LEGRAND M., (1993) *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse.* Repères-IREM n°10, Topiques éditions.

[4] SACKUR C. ET DROUHARD J.P., (1999) *Nécessité épistémique des énoncés mathématiques et niveaux de connaissances.* Exposé au séminaire DIDIREM, IREM de Paris VII.

[5] SINACEUR H., (1994) *Jean Cavaillès, Philosophie des mathématiques*, PUF.