

LES OBJETS MATHÉMATIQUES MATÉRIELS, L'EXEMPLE DU BOULIER CHINOIS

Caroline POISARD,
Doctorante à l'Université de Provence, Umr Adef¹.

Résumé : Cet article porte sur la fabrication et l'étude du boulier chinois. En particulier, nous proposons l'étude du boulier en classe à partir de la question de son fonctionnement et développons le lien entre les techniques habituelles de calcul et celles qui sont disponibles avec le boulier. Par ailleurs d'autres instruments à calculer, à mesurer, à tracer, ou encore des jeux, sont aussi des supports matériels adéquats ; nous les définissons ici comme des objets mathématiques.

Mots clefs : Objets mathématiques, boulier chinois, instruments à calculer, numération positionnelle, algorithmes de calcul

I. Introduction

Ce travail s'inscrit dans une définition des mathématiques comme une science expérimentale qui se construit autour d'expériences, de réalisations matérielles, de manipulations, d'observations et de mesures comme c'est le cas en sciences physiques et en sciences de la vie et de la terre. Certains ouvrages scolaires de mathématiques, souvent pour le CE2, traitent du boulier comme instrument pour compter. Ces bouliers se composent alors de dix boules par tige, de différentes couleurs, plus ou moins adéquat pour l'enseignement nous semble-t-il. Notre étude porte sur le boulier chinois en classe de CM2, pour approfondir la notion de numération positionnelle en base 10 et retravailler les algorithmes de calcul. Balacheff et Neyret (1981 et 1982) l'ont étudié en explicitant en particulier la base alternée (5,2) pour l'écriture, l'addition et la soustraction. Nous allons nous attacher à penser l'intégration du boulier en classe à partir de la question de son fonctionnement, question posée directement aux élèves, ainsi que l'étude du lien entre les techniques habituelles de calcul et la diversité de celles disponibles avec le boulier.

∞ Contexte de la recherche

Cet article porte sur des travaux de thèse en cours où l'originalité de la démarche pédagogique étudiée consiste à construire et utiliser des objets mathématiques, à les manier. Une autre particularité essentielle est que les observations n'ont pas été réalisées

¹ Avec le soutien financier de la Région Paca.

dans la classe à l'école (comme c'est presque exclusivement le cas en didactique des mathématiques), mais dans un centre d'animation. Les situations analysées vivent en relation avec le milieu de la classe, mais sont physiquement dans un autre lieu : un centre d'animation scientifique et technique qui reçoit des scolaires du cycle 3 du primaire. Notre questionnement touche différentes strates et différents acteurs de ces pratiques d'animation, en particulier le temps des animations et leur impact sur les connaissances concernées. Quels sont les moments importants pour l'apprentissage qui se réalisent au centre ? Existe-t-il un lien à faire entre l'école et le centre ? Quels peuvent être les instruments intéressants pour un apprentissage du calcul ? Quel sont leurs effets cognitifs ? Bien sûr, ces points ne pourront pas tous être développés dans la suite.

∞ Méthodologie

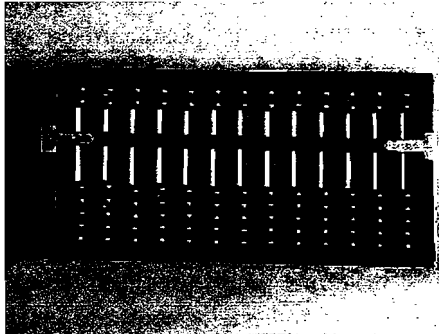
Les observations ont porté sur quatre classes de CM2 qui sont venues au centre d'animation travailler sur le thème des instruments à calculer. Les séances ont été filmées. Des entretiens avec les professeurs des écoles, les enfants et les animateurs ainsi que des questionnaires soumis aux enfants constituent les données empiriques. Le contenu de l'atelier a été réfléchi en fonction des contraintes du centre et de la thématique à aborder : les mathématiques. Il comporte la fabrication et l'étude du boulier chinois, des bâtons à multiplier (Néper et Genaille-Lucas) et de la règle à additionner (règle à calcul pour l'addition et la soustraction). Il se déroule sur trois journées au centre. Chaque classe est divisée en trois, deux groupes sont avec des animateurs pour construire des instruments avec divers outils (scies, perceuses électriques...) et le troisième groupe travaille avec le professeur. Le double objectif de l'animation scientifique : celui de recherche de plaisir pour les enfants avec une finalité d'apprentissage est un des points délicats à produire dans de bonnes conditions.

La réalisation des objets n'est pas précédée par une phase de réflexion sur la conception, comme c'est le cas pour la démarche de projet en technologie au collège. Une grosse part des explications est laissée volontairement à l'école, charge donc au professeur de déterminer l'enjeu didactique des séances. Cependant, le temps des animations constitue un moment important de l'apprentissage où les enfants sont fortement valorisés par la réalisation d'une œuvre personnelle. Ces objets sont définis ici comme des "œuvres" par opposition aux produits (Deforge, 1990). Celles-ci sont originales, rares, faites mains, exprimant un savoir-faire et la personnalité du créateur, de l'artisan, de l'artiste. C'est aussi une forte implication affective dans la réalisation des objets qui distingue l'œuvre du produit. Même si l'utilisation rapide des objets pendant les animations ne semble pas permettre une appropriation de leur mode de fonctionnement, lorsque les enfants décrivent ces moments chaque détail est mentionné et le déroulement des séances est repris point par point, ce qui montre bien une activité différente de l'ordinaire. Ces moments ont été pour eux "héroïques". Lors des séances avec le professeur, l'étude des instruments construits s'est déroulée à partir des questions posées aux enfants : Comment ça marche ? Pourquoi ça marche ? L'hypothèse est que l'exploration produit une activité qui s'organise bien autour d'un enseignement de mathématiques.

Tout d'abord, l'exemple du boulier chinois, autant sa fabrication et que son étude, sera développé. Ensuite, notre définition générale d'un objet mathématique sera explicitée ainsi que la justification du choix d'étude des instruments à calculer.

II. La fabrication du boulier chinois

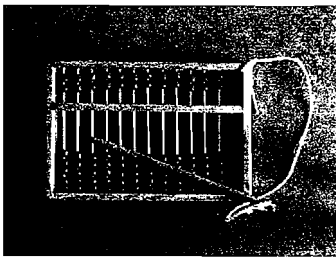
Le boulier chinois (ou suan-pan) a particulièrement retenu notre attention, la confrontation avec la classe et le professeur a révélé une situation bien plus riche qu'elle ne le paraissait. Celui-ci permet de réfléchir sur l'intérêt du système décimal positionnel et sur les techniques opératoires (addition, soustraction, multiplication, division). Il est aussi un support pour se poser de nouvelles questions qui aboutissent en particulier à un questionnement sur les bases de numération. De plus, l'étude du boulier soulève un questionnement qui intéresse autant les élèves (du primaire au lycée) que les enseignants.



Il est composé d'un cadre de bois séparé en deux dans le sens de la longueur et d'un ensemble de tiges avec des boules². La partie supérieure contient deux boules par tiges alors que la partie inférieure en possède cinq. Les plus anciennes traces de l'usage du boulier chinois remonte au 15^{ème} siècle, mais il semble avoir existé depuis les tous premiers siècles après J.-C. Il constitue un instrument portable (à l'inverse des abaques grecs), d'usage simple et efficace pour les opérations élémentaires.

Pour notre étude, la production des objets s'est faite au centre d'animation, avec les animateurs formés aux sciences et techniques. Le centre possède un atelier qui permet de travailler en toute sécurité avec tous les outils adéquats : scies électriques, serre-joints... Les fournitures utilisées sont des baguettes de bois, des tiges et des perles.

∞ Matériel nécessaire pour la construction d'un boulier chinois



- ✓ Cinq baguettes en bois de hauteur 0,5 cm et de largeur 2 cm. Pour la longueur : deux de 10 cm et trois de 14 cm
- ✓ Treize tiges en bois (ou rondins) de 2 mm de diamètre que l'on peut trouver dans les magasins de modélisme, pour enfiler des perles
- ✓ 91 perles, 26 (2x13) pour la partie supérieure et 65 (5x13) pour la partie inférieure
- ✓ Colle à bois, serre-joints...

∞ Argumentation sur nos choix

Nous avons choisi de construire un petit boulier c'est à dire de 14 cm par 10 cm. Ceux que l'on trouve en commerce mesurent au moins 25 cm par 12 cm. Ces bouliers " modèle réduit " présentent l'avantage d'un coût moindre, le problème est que les petites perles ne se déplacent pas facilement. On a donc rajouté un stylet pour que l'utilisation soit possible avec des doigts d'adulte ! Il faut donc bien noter dès à présent que la construction de ce boulier se fait dans l'objectif d'une activité en mathématiques et non dans les règles de l'art pratiquées en Asie. Le boulier chinois tel qu'on le connaît actuellement est le résultat de diverses évolutions, en particulier la taille, la forme, le

² On trouve des bouliers chinois à un prix très abordable dans les supermarchés asiatiques.

matériau des boules sont pensés pour que le déplacement soit le plus rapide possible. Pour écrire, on claque les boules vers la barre centrale, en un seul geste. Il va de soi que l'introduction d'un stylet ne va pas du tout dans ce sens. Notre objectif est que chaque enfant puisse construire un boulier pour qu'il soit le prétexte d'une réflexion sur la numération, le système positionnel décimal, les techniques opératoires, etc. Le boulier a donc été adapté à nos contraintes et à nos objectifs.

Le deuxième choix fait à propos du boulier, c'est la couleur des perles. Les objets qu'on construit au centre doivent être beaux. Les enfants accordent beaucoup d'importance aux finitions de leur réalisation, c'est une part d'eux qu'ils mettent dedans. Nous avons donc préféré deux couleurs pour les perles, plutôt qu'une seule. Mais ce choix n'est pas uniquement dans un but d'esthétique. Les boules du haut n'ont pas la même valeur que celles du bas. Celles du haut valent chacune cinq et celles du bas chacune un. Donner une couleur différente permet de pouvoir en parler : les boules bleues, les boules rouges, même si on ne connaît pas ou si on ne se rappelle plus du vocabulaire spécifique. Bien sûr il est hors de question de mettre des perles multicolores car on ne peut alors plus rien lire ! Changer la couleur selon la tige ne serait pas non plus une bonne idée : toutes les notions intéressantes sur le système positionnel montrées avec le boulier perdent leur sens. Le boulier permet de montrer matériellement que trois dans la tige des dizaines ou dans la tige des centaines s'écrit de la même manière, c'est à dire qu'on déplace trois unaires. Mais, selon la position de la tige, on ne lira pas le même nombre : ce sera 30 ou 300 ! On comprend alors ce que veut dire position dans le terme système positionnel.

∞ Aperçu sur l'analyse que les élèves font de l'atelier

Pour illustrer l'enjeu des animations, voici des passages d'un entretien réalisé avec un élève de CM2 quelques semaines après les séances aux Domaines. (I=interviewer et E=enfant)

I : Est-ce qu'il y avait des choses que tu avais pas trop comprises que tu as pu comprendre ?

E : Ben je savais pas ce que c'était le boulier et j'apprends mieux parce que on en a fait un. Parce que montrer au tableau c'est dur.

I : Quoi ?!

E : Quand on marque au tableau, on n'arrive pas trop à comprendre et quand on fait, quand on le crée, quand on nous explique on comprend mieux.

I : Tu parles de lorsque tu as construit l'objet ?

E : Ben oui, quand on le construit, on nous explique comment le faire parce que si on construit, si on ne sait pas comment le faire ça sert à rien.

I : Donc, quand tu l'as construit, tu penses que tu as fait aussi des maths ?

E : Bah on a fait la construction et aussi des maths parce qu'on a mesuré, il fallait faire plein de..., on a fait aussi pleins d'exercices sur le boulier heu des multiplications, des additions. [...]

I : Est-ce que c'était important d'en avoir construit un que tu gardes ?

E : Ben, c'est bien parce que comme ça on s'entraîne plutôt que d'avoir une semaine après de passer à un autre après on se rappelle plus. Par exemple s'il y a un contrôle dessus. [...]

I : Tu préfères les avoir construits ?

E : Oui, oui, que euh ce soit des personnes qui nous les donnent. On n'a plus de plaisir de construire de nos propres mains que une autre personne.

I : Est-ce que tu penses que tu l'aurais utilisé autant si c'est pas toi qui l'avait construit ?

E : Ben ce serait quand même le mien, mais j'aurais moins de plaisir par contre. "

Cet extrait reprend des idées clefs qui apparaissent dans la majorité des entretiens. Les enfants reconnaissent bien une activité en mathématiques lors des constructions : mesurer, tracer et aussi pour l'utilisation des instruments avec les opérations. On retrouve là citées par cet élève les trois grandes lignes de l'enseignement des mathématiques en primaire : mesurer, tracer et calculer. La réalisation, la création comme l'explique cet élève est une phase de plaisir, terme qu'il cite deux fois et qui montre bien que les fabrications ont un statut d'œuvre au sens de Deforge, comme remarqué en introduction.

III. L'étude du boulier chinois

Le boulier est considéré comme un support d'activité en mathématiques, l'utilisation montrée ici n'est pas celle d'une utilisation courante, machinale comme c'est le cas lorsqu'on apprend à l'utiliser en Chine ou au Japon, depuis l'enfance. Le but est de comprendre pourquoi un tel objet est efficace pour faire des calculs et non pas d'apprendre par cœur les règles de son utilisation.

En fin de primaire, la notion de numération positionnelle est souvent mal installée et constitue un obstacle concernant l'apprentissage des techniques opératoires. L'étude du boulier permet de remonter au sens mathématique en se posant des questions sur l'écriture des nombres, la notion de position d'un chiffre dans un nombre, sur la définition des retenues...

L'enjeu est de se confronter à des œuvres. Le sens du mot œuvre est cette fois-ci emprunté à Chevallard (2001). En se basant sur le principe que la réponse à une question peut être fournie par le recours à des connaissances et des savoirs, l'auteur considère ces connaissances et ces savoirs comme des œuvres, dans le sens où elles créent un milieu de production d'une réponse, pour une certaine institution. Pour illustrer cette remarque l'auteur développe l'exemple des TPE (travaux personnels encadrés) au lycée. Le problème actuel de l'école est le manque de questions et la tendance à fournir directement des réponses ce qui n'engendre qu'une reproduction d'œuvres. L'enjeu des TPE est donc de donner des questions et ainsi de produire des œuvres. Notre objectif est aussi de produire des œuvres, par l'étude d'instruments de calcul. Les questions proposées pour ce travail sont : Comment ça marche ? Pourquoi ça marche ? Qui s'en sert ? Pour quoi faire ?

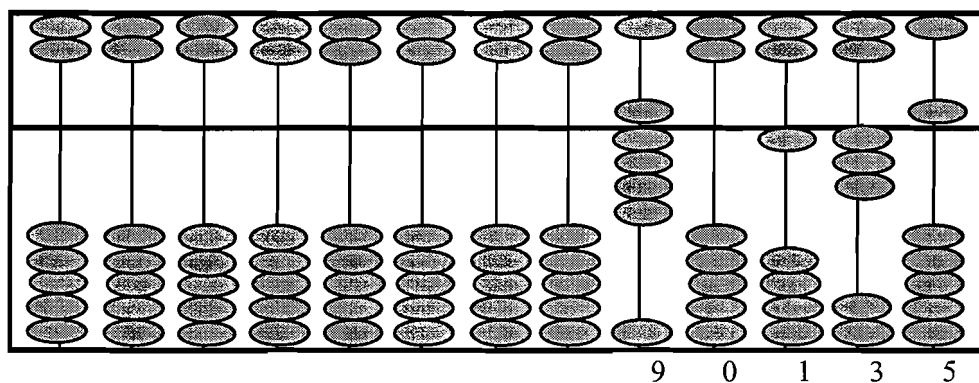
L'enjeu est de revisiter des savoirs en explorant le mode de fonctionnement du boulier (et de se poser de nouveaux problèmes qui sortent du cadre strict de son utilisation) L'œuvre revisitée est le système de numération. Les séances d'étude de boulier développées ici ont été expérimentées avec des professeurs d'école de cycle 3 (CM2) et par des professeurs de mathématiques en 5^{ème} et 4^{ème}. Elles ont aussi été le support d'ateliers de formations pour des professeurs de mathématiques du Secondaire et des IUFM et des professeurs des écoles.

Pour découvrir le boulier, il est préférable de le manipuler. Cette présentation vise à permettre au lecteur de repérer les contraintes d'enseignement pour que l'étude du boulier se déroule dans de bonnes conditions.

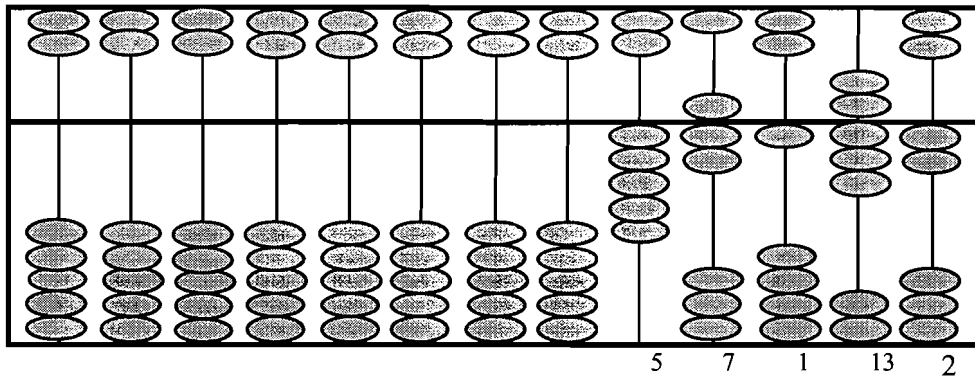
III.1 Principe du boulier chinois

La trace d'un usage d'un système décimal remonte au 14^{ème} siècle avant J.-C. en Chine, celle-ci a donc précédé l'Europe de 2300 ans ! Pour Temple (1987), *"une des raisons en est sans doute que l'écriture chinoise emploie des idéogrammes et non un alphabet. Un alphabet comprend nécessairement plus de neuf lettres et, si les nombres sont représentés par des lettres, on est tenté de ne pas s'arrêter après "neuf", mais de continuer"* (p139). La numération chinoise est définie par Guitel (1975) comme une *"numération de position de type hybride"* (pour les nombres inférieurs à 10^5). L'écriture d'un nombre en idéogramme est très régulière et très proche du développement polynomial, par exemple 982 est représenté par les idéogrammes successifs : 9, 10^2 , 8, 10, 2. Sans l'écriture des puissances de dix, on retombe sur une numération de position.

Dans chaque tige le boulier chinois possède deux quinaires (qui valent chacune cinq) et cinq unaires (qui valent chacune un). Chaque tige représente une position du système décimal : unités, dizaines, centaines, etc. en partant de la droite vers la gauche. La position zéro s'obtient lorsque les boules sont vers le cadre extérieur : celles du haut en haut et celles du bas en bas. Pour marquer un nombre on ramène les boules vers le cadre intérieur afin de déplacer les unaires et les quinaires en même temps. Il est inscrit 90 135 sur ce boulier.



Pour mieux comprendre le principe du boulier, regardons l'exemple ci-dessous. Comment lire ce nombre écrit sur le boulier ? Comment écrire autrement 13 dizaines ? Combien de possibilités a-t-on sur le boulier chinois ?



Dans les dizaines de mille, on peut échanger les cinq unaires contre une quinaire. Ensuite 13 dizaines c'est 130, on peut donc remonter les deux quinaires des dizaines et monter une unaire des centaines. Le résultat se lit alors : 57 232.

III.2 Une séance de découverte du boulier

On considère un boulier chinois (suan-pan) à 13 tiges, les boules du haut correspondent aux rangées de deux boules et celles du bas à celles de cinq boules. En haut on a 26 (13×2) boules et 65 (13×5) en bas. Le boulier permet en particulier d'écrire, d'additionner, de soustraire des nombres d'une manière très rapide quand on maîtrise son utilisation.

∞ Choix des variables

- Le niveau de la classe est au moins CM1. L'enjeu est une réorganisation des connaissances relatives à la numération (et aux algorithmes de calcul) avec la mise en relation des techniques avec le boulier et des techniques papier-crayon. La compréhension du système de numération positionnelle n'est pas évidente. D'ailleurs, si l'on regarde à l'échelle de l'histoire, la numération romaine non positionnelle a survécu longtemps (jusqu'au 18^{ème} siècle pour les comptes publics en France) mais elle nécessitait l'usage de jetons pour réaliser des calculs. Une numération positionnelle est indispensable pour effectuer des calculs, pour s'en convaincre calculer $XXV+IX$. Combien d'unités, de dizaines ? L'étude du boulier permet de reconstruire ce concept de numération positionnelle (en base 10).

- On insiste aussi sur l'argumentation en mathématiques. En plus des concepts mathématiques, notre démarche met en avant les savoirs transversaux qui interviennent en mathématiques dans tous les domaines : " *expérimentation, conjecture, argumentation, modélisation, définition, preuve, implication, structuration, décomposition/recomposition, induction...* ". (Grenier et Payan, 2003). La "question de recherche" posée par le professeur est : "Comment ça marche ? Le boulier est un instrument à calculer c'est à dire qu'il facilite les calculs. Il faut essayer d'imaginer comment on peut l'utiliser". Pour résoudre cette question il est nécessaire d'avoir un boulier par enfant. Il est important de travailler par groupes de deux, trois ou quatre afin de tester et confronter les opinions. D'après nos observations, la consigne de départ peut aussi être " Écrivez un nombre sur le boulier ", la grande majorité des élèves commence

quand même par écrire un, deux, trois... De plus, la question peut aussi se décliner " Comment on compte ? " ou " Comment on calcule ? " sans affecter notablement les recherches des élèves. Effectivement, en mathématiques, compter et calculer ce n'est pas la même chose : compter c'est dénombrer et calculer c'est faire des opérations. Par contre, dans le sens commun ou dans un dictionnaire, compter se définit comme : " Déterminer le nombre, la quantité en procédant à un calcul. Effectuer un calcul, énoncer la suite des nombres " et calculer comme : " Déterminer par le calcul. Opérer sur des nombres " Compter, c'est faire des comptes c'est à dire des additions, des multiplications, donc faire des calculs, calculer. Le sens courant de calculer et compter est trop proche pour que ce soit une variable de poids dans le choix de stratégie pour répondre à la question. Ceci a bien été confirmé par nos observations de classe. " C'est quoi compter pour vous ? ", question posée à une classe de 4^{ème}, deux élèves ont répondu : " Faire des additions ! ", " Et des multiplications aussi ! ". Par contre, ce qui fausserait complètement la recherche c'est de donner un nombre à inscrire : écrire 5123. Cela suppose qu'on peut écrire ce nombre et ce n'est alors plus du tout la même étude.

∞ A propos des élèves

- Cette recherche permet de souligner deux points : un chiffre n'a pas la même valeur selon sa position sur le boulier (système positionnel en base 10) et certaines boules ne valent pas un mais cinq, elles marquent cinq. Le passage de ces deux étapes est nécessaire pour répondre à la question.

- On voit apparaître deux stratégies. Pour la majorité, la méthode est d'écrire, de dénombrer tous les nombres : un, deux, trois, quatre, cinq, jusqu'à cinq ça va, pour la suite il faudra se donner des règles d'utilisation. Pour d'autre, la méthode est d'écrire directement un nombre, ceci est beaucoup moins courant. Nous avons observé, au fil des séances avec des enfants et des adultes, que choisir par soi-même un exemple que l'on va tester n'est pas spontané mais relève d'un raisonnement particulier (que les professeurs de mathématiques ont mieux maîtrisé lors des séances). Avec cette seconde stratégie, on voit apparaître des procédés " multiplicatif à trous ". Les boules ont différentes valeurs et on les multiplie entre elles pour fabriquer d'autres nombres, le problème c'est qu'il manque des nombres par exemple on pourra écrire 922 mais pas 77...

- Concernant l'écriture des nombres, certains élèves commencent et continuent longtemps avec la méthode suivante : pour écrire sept, ils dénombrent : un, deux, trois, quatre, cinq et cinq unaires s'échangent contre une quinaire puis six, sept. Penser sept comme cinq plus deux est une méthode très rapide pour inscrire un nombre mais pas obligatoire. Il n'est donc pas indispensable de connaître les décompositions des nombres entre cinq et dix par rapport à cinq, c'est à dire : $6=5+1$, $7=5+2$, $8=5+3$, $9=5+4$ pour écrire un nombre. Bien sûr, comme pour le calcul mental, utiliser ces décompositions simplifie la tâche !

∞ A propos du professeur

- Pour qu'une séance de classe se déroule dans de bonnes conditions, il est nécessaire que l'enseignant sache d'avance " à quoi s'attendre ". Une situation de ce type ne peut pas s'improviser, il faut prévoir les idées qui peuvent apparaître afin de les relancer et de permettre à la séance de vivre c'est-à-dire d'aboutir à l'utilisation courante du boulier. Les élèves doivent jouer le jeu, c'est-à-dire chercher par eux-même. Ceci ne

sera possible que si le professeur sait les motiver dans cette recherche, leur permet de rebondir dans leurs raisonnements sans pour autant donner la solution, ni même les guider vers celle-ci, son rôle est celui d'un régulateur. En particulier, il doit avoir conscience qu'il devra laisser les élèves sans réponse provisoirement, ce qui constitue un premier obstacle. L'exploration du boulier doit être large au début, elle nécessite du temps (deux ou trois heures), la confrontation finale des opinions permettra de se mettre d'accord sur une méthode. Pour que chaque groupe montre son travail à la classe, il est fort utile d'utiliser un rétroprojecteur sur lequel on posera le boulier.

- Le rôle du professeur est d'institutionnaliser les étapes franchies et de permettre aux élèves de faire le lien entre les techniques boulier et papier-crayon, afin que ces deux registres soient complémentaires.

∞ Évolution de la séance³

Maintenant, étudions les différentes étapes du raisonnement susceptibles d'apparaître lors de telles séances. Les points clefs sont le système décimal positionnel et la valeur de cinq pour certaines boules. Ce raisonnement comporte trois étapes : avant que le système positionnel en base 10 ne soit installé sur le boulier, une fois que celui-ci est admis mais avant que le système unaires-quinaires ne le soit, et enfin lorsque ces deux points sont posés (tableau).

Pré-système décimal positionnel	Post-système décimal positionnel Pré unaires-quinaires	Post-système décimal positionnel et unaires-quinaires
✓ Unités et dizaines avec des processus : additif ou additif-soustractif (avec ou sans trous) ou multiplicatif (à trous) ✓ Base 65	✓ En haut, on note les retenues ✓ Les boules du haut valent deux (on garde un en bas)	✓ Écrire à gauche ✓ Écrire à gauche en commençant par la puissance de 10 la plus petite

Tableau : Étapes du raisonnement pour arriver à l'utilisation courant du boulier chinois

Notons que généralement, la position choisie par quelqu'un qui découvre le boulier pour marquer le zéro sur celui-ci est de pousser les unaires vers la barre inférieure et les quinaires vers la barre transversale. Mais la position usuelle c'est à dire en poussant les quinaires vers la barre supérieure permet de déplacer en même temps unaires et quinaires pour les calculs ce qui représente un remarquable gain de temps... L'idée que l'on déplace des boules pour inscrire un nombre est intuitive.

✓ Unités et dizaines avec un processus additif :

Lors des mises en situation, les enfants commencent généralement par penser que le boulier est séparé en deux, en haut on a les dizaines et en bas les unités ce qui signifie qu'on accorde un comme valeur en bas et dix en haut (parfois cinq), puis on ajoute les

³ Nous rappelons au lecteur que pour une meilleure compréhension (de ce paragraphe en particulier), la manipulation du boulier lors de la lecture est préférable.

boules entre elles. Le nombre maximal alors inscriptible est 325 ($65+26 \times 10=325$). Pour permettre à la recherche de continuer, il est nécessaire de montrer le point faible, la limite en demandant d'écrire 9253 par exemple. La méthode proposée doit être invalidée pour recevoir d'autres propositions. Certains trouvent une astuce pour compter plus loin : on marque les dizaines en bas et les unités en haut. On arrive à 676 ($65 \times 10+26=676$), mais on ne peut toujours pas inscrire 9253.

✓ **Unités et dizaines avec un processus additif-soustractif :**

D'autres procédés peuvent être imaginés avec les boules du haut qui valent dix et celles du bas un. Ces dernières possèdent deux positions de déplacement, si elles sont contre la barre on les soustrait, si elles sont en milieu de tige, on les additionne. On pense 7 comme $10-3$ et 13 comme $10+3$. On écrit jusqu'à 25 dans une tige et 325 ($25 \times 13=325$) au plus. Outre le fait que l'on n'écrit pas des grands nombres, ce système trop compliqué est source d'erreurs pour le demi-déplacement, il s'éteindra face à d'autres propositions plus adaptées. Dans ce procédé on n'a pas de trous car le raisonnement a été guidé par un dénombrement. Par contre, lorsque celui-ci amène directement à écrire un nombre, n'importe lequel, on arrive à des procédés à trous, c'est à dire qu'il manque des nombres. Par exemple, en haut une boule compte 100 et un en bas. Lorsqu'on déplace des boules en bas à droite on soustrait et en bas à gauche on ajoute. Pour écrire 1731 on n'a pas de problème, mais pour écrire 7 ? $7=100-93$, mais on n'a que 65 boules en bas.

✓ **Unités et dizaines avec un processus multiplicatif (à trous) :**

Quand la méthode est toujours d'essayer d'écrire un nombre sans tous les dénombrer, on voit aussi apparaître un système à trous mais multiplicatif. On effectue le produit de la valeur des boules. Avec celles du bas on écrit un, deux, trois, quatre, cinq et avec celles du haut : $1 \times 2=2$, $2 \times 2=4$, $2 \times 3=6$, $2 \times 4=8$, $2 \times 5=10$. Et sept ? Et neuf ? Avec cette méthode, il manquera les nombres premiers qui ne s'obtiennent pas comme produit de deux entiers.

✓ **Base 65 :**

Si on part de la remarque : en bas, on a 65 boules, mais comment inscrire un nombre plus grand ? Et bien, pour compter plus loin, on va marquer 65 avec une boule en haut et ainsi pouvoir à nouveau utiliser les boules du bas. On a l'idée essentielle qu'en haut, ce sont des boules " témoins " qui gardent en mémoire une certaine valeur. On écrit jusqu'à 1755 ($65 \times 26+65=1755$), mais pour écrire 1721 par exemple on a besoin de le décomposer en multiples de 65...

✓ **Numération de position en base 10 :**

Avec la nécessité de la base 10 vient celle d'écrire de zéro à neuf (au moins) dans une colonne. En première analyse, on pense qu'il est nécessaire d'écrire jusqu'à 10, mais ce sont les dix chiffres de zéro à neuf qui sont indispensables. Arrêtons-nous sur une remarque importante. Nous avons choisi de travailler sur le boulier chinois car on peut inscrire jusqu'à 15 dans une colonne, ce qui permet lors des additions et des soustractions de bien voir le passage des retenues. Par contre, lors de la découverte le fait qu'il y ait trop de boules en quelque sorte, peut constituer un obstacle. Il pourra être utile de faire remarquer que le boulier japonais possède moins de boules mais fonctionne

exactement sur le même principe. Revenons sur le boulier chinois, l'idée qui peut apparaître, en cherchant à écrire jusqu'à dix c'est de regarder uniquement la partie inférieure du boulier et de regrouper deux tiges pour avoir dix et utiliser un système positionnel. Les deux tiges à l'extrémité droite représentent les dizaines, les deux autres immédiatement à gauche les dizaines, etc. A partir de là, on a gagné l'écriture positionnelle, mais on doit pouvoir encore l'améliorer, il faut prendre en compte la partie supérieure du boulier.

✓ **En haut, on note les retenues :**

En haut, on note les retenues, mais quelles sont les retenues possibles ? Pour l'addition ? Et pour la multiplication ? Cette idée est très intéressante dans le sens où elle ouvre sur d'autres questions qui ont été en particulier la clef de la mécanisation du calcul. Pour l'addition de deux nombres la retenue maximale c'est un ($9+9=18$) et pour la multiplication de deux nombres c'est huit ($9 \times 9=81$). On n'a pas alors la nécessité d'avoir 26 boules en haut.

✓ **Les boules du haut valent deux (on garde un en bas) :**

Si on revient à l'idée d'écrire jusqu'à neuf dans une colonne, peut-on donner deux comme valeur aux boules du haut ? On construit donc des nombres pairs et impairs. Cette méthode marche aussi bien que les valeurs cinq et un ! En fait, le boulier chinois fonctionne parfaitement si en gardant un pour les boules du bas, on donne aux boules du haut la valeur deux ou trois ou quatre ou six. On peut aussi donner la valeur un à celles du haut et deux ou trois à celles du bas. La faille est que l'écriture et la lecture des nombres sont moins rapides. Le choix d'une boule qui vaut cinq s'explique parce que l'œil arrive à dénombrer quatre boules, mais ensuite ce n'est plus possible rapidement. Notons que le boulier japonais est une amélioration du boulier chinois, il ne possède qu'une quinaire et quatre unaires et fonctionne sur le même principe. Il peut aussi fonctionner avec un pour la boule du haut et deux pour celle du bas. Maintenant l'écriture positionnelle en base 10 avec des marqueurs de cinq est acquise, mais il reste encore quelques détails à mentionner.

✓ **Écrire à gauche :**

L'idée que l'on voit aussi arriver, c'est que comme sur une feuille de papier (ou sur un logiciel de traitement de texte), on commence par écrire à gauche. Par exemple, on colle 127 à gauche, mais alors comment écrire 1 270 ? L'inscription du zéro a de l'importance et pour lire les nombres de gauche à droite, il faut les coller contre l'extrémité droite.

✓ **Écrire à gauche en commençant par la puissance de 10 la plus petite :**

Aussi, il n'est pas rare de voir quelqu'un écrire un nombre en commençant par la gauche, mais en collant les unités à gauche c'est à dire que l'inscription : 9-5-2 se lit 259. Ce système est tout à fait correct. Si on décompose 259, on a : $259=2 \times 10^2+5 \times 10+9=9+5 \times 10+2 \times 10^2$. Avec ce raisonnement, on inscrit un nombre en commençant par la plus petite puissance de 10, comme c'est d'ailleurs souvent le cas

$259=2 \times 10^2 + 5 \times 10 + 9 = 9 + 5 \times 10 + 2 \times 10^2$. Avec ce raisonnement, on inscrit un nombre en commençant par la plus petite puissance de 10, comme c'est d'ailleurs souvent le cas

avec les polynômes : $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. La seule objection est que l'on écrit à l'envers sur

le boulier par rapport à la méthode traditionnelle. C'est pour cette raison qu'on choisira la convention de coller les unités à droite.

Cette analyse reprend donc différents points importants du raisonnement mathématique pour parvenir à l'utilisation traditionnelle du suan-pan.

Reste une question à étudier : quel est le plus grand nombre inscriptible sur le boulier chinois ? 9 999 999 999 999 ou 16 666 666 666 665 ? Dans un premier temps, on peut réduire le problème (comme c'est souvent nécessaire en mathématiques) c'est à dire étudier un boulier à 6 tiges par exemple. Avec le soroban, la réponse ne donne pas lieu au débat car on n'écrit pas au-delà de neuf dans une colonne. Sur le boulier chinois, on inscrit jusqu'à quinze dans une colonne, quel est le nombre inscrit lorsque toutes les boules sont activées dans les treize tiges ? C'est :

$$\begin{aligned} & 15 + 150 + 1\,500 + \dots + 15 \times 10^{12} \\ &= 15 \times (1 + 10 + 100 + \dots + 10^{12}) \\ &= 15 \times 1\,111\,111\,111\,111 \\ &= 16\,666\,666\,666\,665, \text{ qui se lit 16 trillions 666 milliards 666 millions 666 mille 665.} \end{aligned}$$

Une fois l'écriture des nombres admise pour les élèves, on pourra poursuivre l'étude du boulier de la même manière : Comment faire une addition ? Une soustraction ? Une multiplication ?

III.3 L'addition puis la soustraction avec le boulier chinois

Ces opérations s'effectuent par-dessus, on ne garde pas de trace des calculs intermédiaires, on lit directement le résultat. Avec le boulier on voit le passage des retenues car on l'effectue à la main. Par exemple, le passage de dix dizaines en une centaine se fait par l'échange de dix dans la tige des dizaines avec une dans celle des centaines. Le boulier comporte une très bonne gestion des retenues, on peut commencer une opération par la gauche pour avoir un ordre de grandeur du résultat, sans avoir de soucis de retenue. Les nombres sont inscrits (ou codés) et cette inscription est dynamique, ce qui est impossible avec papier et crayon.

• L'addition

On peut l'écrire de cette manière :

$$\begin{array}{r} \\ 7 8 5 \\ + 1 6 3 \\ \hline 8 1 8 \\ \hline 9 4 8 \end{array}$$

Ou encore :

$$\begin{array}{r} \\ 7 8 5 \\ + 1 6 3 \\ \hline 8 \\ + 1 4 0 \\ + 8 0 0 \\ \hline 9 2 8 \end{array}$$

Peut-on réaliser $12,56 + 34,129$? Oui, il est alors nécessaire d'établir une convention pour placer les unités, par exemple la quatrième tige en partant de la droite, ce qui laisse trois chiffres inscriptibles après la virgule. On peut donc aussi travailler avec les décimaux sur le boulier.

- **La soustraction**

Pour la soustraction, regardons de plus près deux algorithmes que l'on enseigne en classes de primaire.

Technique 1 :

Tout d'abord, la technique habituelle ou par ajouts parallèles se présente de la manière suivante :

$$\begin{array}{r}
 9 \quad \mathbf{10+3} \quad 3 \\
 - \quad \mathbf{+1} \quad 5 \quad 1 \\
 \hline
 8 \quad 8 \quad 2
 \end{array}$$

On dit à l'oral : " cinq pour aller à trois, c'est impossible, je pose un et j'abaisse un ". On réalise le calcul : $933-51=(933+100)-(51+100)$ en prenant soin d'écrire 100 comme dix dizaines puis comme une centaine. On utilise d'une part que : $a-b=(a+x)-(b+x)$ c'est à dire que l'on peut additionner (ou soustraire) un même nombre aux deux termes d'une soustraction, le résultat sera le même. Et d'autre part, une propriété du système positionnel à base dix : 10 unités = 1 dizaine, 10 dizaines = 1 centaine, etc. Le (+10) des dizaines ne s'écrit pas, on rajoute un devant le trois qui donne bien $13=10+3$.

Technique 2 :

La deuxième technique s'appelle technique des échanges ou de transfert interne. Elle n'est pas totalement absente de la classe, mais elle est beaucoup moins répandue que la première. Elle peut servir d'introduction au cours élémentaire pour la technique habituelle.

$$\begin{array}{r}
 9 \quad \mathbf{10+3} \quad 3 \\
 \mathbf{8} \\
 - \quad 5 \quad 1 \\
 \hline
 8 \quad 8 \quad 2
 \end{array}$$

Ici, on prend dans une colonne pour mettre dans une autre. On peut dire : " cinq pour aller à trois, je ne peux pas. Je prends une centaine de 900 que j'écris dans les dizaines sous la forme de dix dizaines "On décompose : $933 = 800+130+3$ et $51 = 50+1$, ainsi : $933-51 = 800+130-50+3-1 = 800+80+2 = 882$. On utilise ici seulement la propriété du système positionnel décimal qui permet de faire des échanges entre les colonnes.

Avec le boulier, la technique habituelle ne se transpose pas, par contre il permet de bien mettre en pratique la méthode des échanges. Cette méthode a l'avantage de bien montrer les propriétés du système de numération positionnel en base 10 qui lorsqu'il est

mal ou pas compris par les élèves crée un obstacle supplémentaire pour se familiariser avec les techniques opératoires. Le boulier semble donc un support adéquat pour faire un lien entre la numération et les opérations. Pour calculer $933-51$ sur le boulier pour enlever un c'est comme avec le papier/crayon, c'est immédiat, mais il reste à enlever 50 de 932. On abaisse une uniaire des centaines que l'on remplace en abaissant les deux quinaires des dizaines. Dans la tige des dizaines, on en a 13, desquelles on peut maintenant enlever cinq dizaines et obtenir le résultat. Le passage de une centaine à dix dizaines se fait "à la main".

III.4 Une remarque importante : la non-unicité d'écriture

Pour aborder ce point, étudions les différentes manières d'inscrire dix. On peut l'écrire comme une dizaine et zéro unités ou comme dix unités (deux quinaires ou une quinaire et cinq unaires) On a donc trois possibilités de codage pour ce même nombre. On rencontre une situation similaire avec les fractions que l'on apprend à écrire de façon irréductible, on a bien plusieurs manières pour écrire un même nombre :

$$\frac{10}{2} = 5 \text{ ou } \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

C'est aussi le cas des radicaux $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et des entiers, $0,9999... = 1$

Enfin, une opération du type $1038 - 55$, montre que comme en algèbre, sur le boulier il est parfois nécessaire de décomposer une écriture pour arriver au résultat. Par exemple il faut parfois passer par $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ c'est à dire l'inverse de la factorisation pour trouver un résultat.

III.5 La multiplication sur le boulier chinois

La méthode classique s'écrit sur une feuille :

$$\begin{array}{r} 3 7 \\ \times 5 \\ \hline 1 8 5 \end{array}$$

On dit à l'oral ou dans sa tête : " cinq fois sept : 35. Je pose cinq et je retiens trois. Cinq fois trois : 15 et 3 : 18 ". Avec le boulier le calcul se décompose de telle manière que l'on n'a pas de retenue (le " je retiens trois " de précédemment). Ce qui est intéressant avec cette méthode c'est que l'on voit mieux le décalage, on remonte au sens mathématique. Pour écrire la seconde ligne, on se place dans la tige de dizaines, on laisse la tige des unités vide car on va multiplier cinq unités par trois dizaines.

$$\begin{array}{r} 3 7 \\ \times 5 \\ \hline 3 5 \\ + 1 5 0 \\ \hline 1 8 5 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 5 \times 7 \\ 5 \times 30 \end{array}$$

On trouvera en annexe des indications pour poursuivre l'étude du boulier.

III.6 Conclusion

Le boulier pour qui ? Pour des élèves en difficultés, il apparaît un support adéquat pour dédramatiser le rapport aux mathématiques afin de comprendre les techniques de calcul mal maîtrisées. Certains orthophonistes l'utilisent d'ailleurs pour traiter des problèmes de dyscalculie. Pour des élèves qui maîtrisent les techniques opératoires usuelles ou pour des adultes (professeurs...) il est un moyen pour retrouver le sens mathématique qui se cache derrière une technique devenue routinière.

Le boulier pour quoi ? Il est adapté pour la classe ou pour un atelier d'animation en mathématiques et peut être étudié sous différents angles, trois en particulier : l'approche pluridisciplinaire, l'étude des techniques opératoires ou l'histoire du calcul.

Comme c'est le cas dans le centre d'animation étudié, on peut envisager une approche pluridisciplinaire c'est à dire technologie et mathématiques avec la production d'instruments à calculer (boulier, réglettes à multiplier, règle à additionner) puis leur étude en classe de mathématiques. Une étude peut s'imaginer sur l'analyse des techniques opératoires disponibles pour le calcul : calcul mental, calcul posé (ou papier-crayon), avec une approche historique sur la numération et les techniques de calcul, du boulier à la calculatrice. Enfin, on peut partir de questions d'histoire : Comment faisait-on sans calculatrice avant ? On développe ainsi l'histoire du calcul par les instruments à calculer en touchant en particulier les notions de calcul approché (avec la règle à calcul des ingénieurs) et calcul exact (avec le boulier des marchands ou les besoins des comptables).

Dans tous les cas l'idée est de permettre d'explorer le boulier : Comment ça marche ? Quels sont les calculs que l'on peut réaliser, ceux qu'on ne peut pas ? C'est à dire d'insister sur le questionnement de départ pour permettre de " créer des œuvres ", puis se poser de nouveaux problèmes.

IV. Les objets mathématiques matériels

IV.1 Remarque préliminaire : point de vue épistémologique

Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? Qu'est-ce qui le caractérise ? Pourquoi ? Quel lien établir entre les objets mathématiques matériels et les objets mathématiques intellectuels ?

Si on s'en réfère à un dictionnaire, un objet mathématique est un nombre, une fonction, un ensemble, une suite, etc. ou une figure, un graphe, etc. L'activité mathématique consiste à manipuler ces objets. Il convient donc de lever l'ambiguïté sur le terme " objet mathématique ". Les objets mathématiques pour notre étude, sont plongés dans une dualité : ils sont concrets, destinés à un usage, maniables : la clepsydre, le sablier, l'horloge mesurent le temps, le boulier, les réglettes multiplicatrices facilitent des tâches de calcul, les patrons conduisent à la fabrication de volumes géométriques. Et ils sont aussi la base d'une activité en mathématiques concernant : la mesure (la précision, l'erreur, l'incertitude...), le calcul (le système positionnel décimal, les retenues...), la géométrie (les surfaces, les volumes...), etc.

Pour introduire notre questionnement, nous citerons Bachelard à propos de l'objet "ampoule électrique" (*Le rationalisme appliqué*, 1949) :

"Nous pouvons donc bien affirmer que l'ampoule électrique est un objet de la pensée scientifique. A ce titre, c'est pour nous un bien simple mais bien net exemple d'un objet abstrait-concret. Pour en comprendre le fonctionnement, il faut faire un détour qui nous entraîne dans une étude des relations des phénomènes, c'est à dire dans une science rationnelle, exprimée algébriquement." (p 59, Épistémologie)

Ce paragraphe soulève bien l'ambiguïté entre le concret et l'abstrait, ici exemplifié en physique. Nous reprenons le même questionnement pour les mathématiques. L'abstrait se révèle dès que l'on veut comprendre le fonctionnement, qu'on se pose les questions : Comment ça marche ? Pourquoi ? Le boulier, les tangrams, le compas de proportion, les tours de Hanoi, etc. sont des objets de la pensée mathématique.

Est-ce que des mathématiciens se sont intéressés à ces objets abstraits-concrets ? Bien sûr ! Néper a réfléchi aux bâtons à multiplier et à calculer les racines, Lucas aux bâtons à multiplier et à diviser ainsi qu'au problème des tours de Hanoi, Pascal et Leibniz aux machines à calculer, Descartes à un instrument pour calculer géométriquement la moyenne proportionnelle entre deux nombres, De l'Hospital, Pascal, Cavalieri aux traceurs de courbes, etc. La création d'objets matériels de ce type nécessite une culture mathématique conséquente, et à l'évidence, ces travaux sur le concret ont permis à ces mathématiciens d'avancer dans leurs travaux théoriques.

Notre opinion est qu'un objet mathématique est intellectuel ou matériel, abstrait ou concret, ce qui lui donne son caractère mathématique est le détour indispensable par la théorie pour comprendre son fonctionnement.

IV.2 Les ostensifs : point de vue didactique

Bosch et Chevallard (1999) se sont intéressés à la nature et la fonction des objets de l'activité mathématique. Ils explicitent les objets mathématiques selon deux registres : les objets ostensifs et non-ostensifs. Les auteurs précisent :

"Remarquons tout d'abord que, du point de vue sensoriel, l'idée d'ostension renvoie plus spécifiquement à la vue. Mais l'ostensivité dont nous parlons ici se réfère, plus généralement, à l'ensemble des sens, même si de fait, la vue et l'ouïe jouent un rôle privilégié. Signalons en second lieu que, au-delà de leur perceptibilité, ce qui apparaît propre aux objets ostensifs est le fait d'être "manipulables" par le sujet humain : un son peut être émis (et reçu), un graphisme peut être tracé (et lu), un geste peut être fait (et perçu), un objet matériel quelconque peut être manipulé concrètement de diverses manières." (p 91)

Un objet ostensif "se donne à voir" tels les objets matériels, les sons, les graphismes, les gestes, etc. alors que non-ostensifs sont les idées, les concepts, les intuitions, etc. L'exemple donné est celui d'une fonction : la notation log est un ostensif alors que la notion logarithme est un non-ostensif. Dans leur définition, les auteurs précisent que

"C'est par le fait qu'ils peuvent être concrètement manipulés que les ostensifs se distinguent des objets non-ostensifs".

Les notations de fonctions sont donc des objets mathématiques concrètement manipulables. Pour aller plus loin dans l'exemple précédent, nous précisons que log est un ostensif manipulable et qu'une règle à calculs est un " *ostensif maniable* ". En effet, pour la multiplication, les règles à calculs utilisent une propriété de la fonction logarithme népérien qui permet en quelque sorte de remplacer une multiplication par une addition (de longueurs), c'est la formule : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, pour $a > 0$ et $b > 0$ qui est utilisée pour placer les points de la règle à multiplier.

Pour marquer une différence entre une règle à calculs et la notation ln, il paraît donc nécessaire de distinguer les ostensifs manipulables (intellectuellement, sur le papier ou à l'écran d'ordinateur...) et les ostensifs maniables (nous pourrions préciser chirotactilement).

Pour les auteurs, cette distinction n'existe pas car l'activité en mathématique est supposée essentiellement intellectuelle. La manipulation des objets matériels se limite à celle de la feuille, du crayon, de la règle, du compas, de la machine à calculer et de l'ordinateur, alors que notre préoccupation est de définir une activité mathématique réalisée autour d'objets matériels.

Notre approche s'insère dans cette analyse en la complétant d'une nouvelle classe d'objets ostensifs.

Les auteurs précisent aussi la dialectique des ostensifs et non-ostensifs :

"Revenant aux notations fondamentales de l'approche anthropologique, nous dirons maintenant que la mise en œuvre d'une technique se traduit par une manipulation d'ostensifs réglés par des non-ostensifs." (p 92)

"La fonction sémiotique des ostensifs, leur capacité à produire du sens, ne peut en effet être séparée de leur fonction instrumentale, de leur capacité à s'intégrer à des manipulations techniques, technologiques, théoriques" (p 95)

Le boulier est un objet mathématique. Celui-ci est une première abstraction de choses que l'on dénombre, l'utilisation de cailloux pour compter (d'autres objets ou choses) est aussi une première abstraction. Par contre si l'on compte des pommes par exemple, les pommes ne sont pas des objets mathématiques, mais si on utilise ses doigts, alors on a recours à un objet mathématique : on ne se centre pas sur les caractéristiques de la pomme, sur sa forme ou sa couleur, mais à chaque pomme on fait correspondre un doigt (ou un caillou) pour connaître le nombre total.

Notre hypothèse est que le boulier chinois appartient au registre des ostensifs maniables. Nous nous plaçons toujours pour un enseignement au cycle 3 au moins, dont l'enjeu est de faire émerger une théorie cachée derrière des techniques devenues routinières avec le papier-crayon. Nous parlerons d'écriture économique sur le boulier lorsque le nombre de boules déplacées est minimal. Analysons la fonction instrumentale et la fonction sémiotique du boulier, c'est à dire la technique et la technologie induite par une tâche donnée.

∞ **Tâche 1 : Écriture d'un chiffre**

Exemple : Écrire 8.

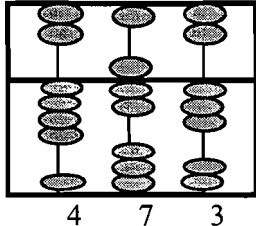
Registre : Matériel et gestuel avec le boulier chinois

<p>Technique 1 : 1+1+1+1+1=5 unaires que l'on échange avec une quinaire, puis 6, 7,8. Cette technique est provisoire, pour la découverte.</p>	<p>Technologie 1 : Dénombrement d'éléments, surcomptage.</p>
<p>Technique 2 : Activation d'une quinaire et de trois unaires en même temps. Cette technique est experte et économique.</p>	<p>Technologie 2 : Écriture d'un nombre $8 = 8$ unités et $8=5+3$.</p>

∞ **Tâche 2 : Écriture d'un nombre**

Exemple : Écrire 473.

Registre : Matériel et gestuel avec le boulier chinois

<p>Technique :</p>  <p>Activation des boules vers la barre centrale. Trois unaires dans les unités, une quinaire et deux unaires dans les dizaines et quatre unaires dans les centaines. Cette technique possède un très bon degré d'instrumentalité avec le boulier (c'est à dire une bonne efficacité).</p>	<p>Technologie :</p> <p>La numération positionnelle en base 10. Pour écrire un chiffre supérieur à 5 dans une tige, on le pense comme 5 plus quelque chose. (non ostensifs) $273 = 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 1$ et $7 = 5 + 2$ (ostensifs)</p>
---	---

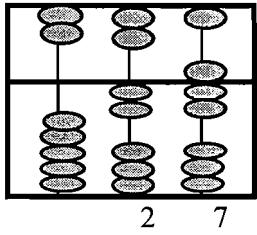
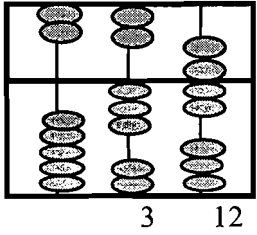
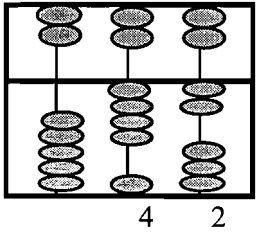
Registre : Papier-crayon et oral

<p>Technique : On entend "quatre cent soixante treize". Pour le "quatre cent" c'est conforme au système positionnel pour "soixante treize", c'est bien plus compliqué.</p>	<p>Technologie : La théorie est cachée par la routinisation d'écriture (ceci est indispensable).</p>
---	---

∞ **Tâche 3 : Effectuer une addition avec retenue**

Exemple : Calculer $27+15$.

Registre : Matériel et gestuel avec le boulier chinois

<p>Technique 1 : Écriture de 27 en activant une quinaire et deux unaires dans la tige des unités et deux unaires des dizaines.</p>  <p>Pour ajouter 15, on écrit par-dessus. On baisse une quinaire des unités et une unaire des dizaines. On obtient alors :</p>  <p>Pour lire ce nombre, il est nécessaire d'échanger dix unités contre une dizaine.</p> 	<p>Technologie 1 : $15=1$ dizaine et 5 unités. $27=2$ dizaines et 7 unités. $7=5+2$. 10 unités = 1 dizaine</p> $\begin{array}{r} 2 \quad 7 \\ + 1 \quad 5 \\ \hline 3 \quad 12 \\ 1 \quad 2 \\ + 3 \quad 0 \\ \hline 4 \quad 2 \end{array}$
<p>Technique 2 : On écrit 27, puis on décompose 15 en 20-5. On active deux unaires dans les dizaines et on désactive une quinaire dans les unités, ce qui donne directement le résultat lisible, 42. Cette technique, proche du calcul mental possède aussi un très bon degré d'instrumentalité.</p>	<p>Technologie 2 : $27+15=27+20-5=47-5=42$.</p>

Registre : Papier-crayon et oral

<p>Technique : "5 et 7, 12, je pose 2 et je retiens 1. 2 et 1, 3 et 1, 4. 42"</p> $ \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ - \quad 1 \\ \hline 4 \quad 2 \end{array} $	<p>Technologie : La théorie est cachée derrière l'algorithme routinisé.</p>
--	---

La technologie de la tâche 1, la plus élémentaire devient une technique pour les tâches 2 et 3.

Pour que l'enseignement soit pertinent, il est nécessaire de penser les objets mathématiques matériels comme des ostensifs maniables qui sous tendent des non-ostensifs et des ostensifs maniables. Le professeur a la charge d'institutionnaliser le lien entre la technique (la manière de faire avec le boulier) et la technologie (la numération, l'algorithme...). Car de la même manière qu'un élève peut manipuler des ostensifs sans comprendre les non-ostensifs qui les règlent, les ostensifs matériels peuvent se manier sans comprendre les notions mathématiques en jeu, et on se trouve alors dans une situation qui n'a guère de sens pour l'enseignement.

Depuis les années 1950, le soroban s'est répandu au Japon, ce boulier ne possède qu'une quinaire et quatre unaires, c'est à dire cinq boules par tige. Ainsi, sur le boulier japonais chaque nombre possède une écriture unique, et il n'est plus possible de faire à la main ni les échanges entre unaires et quinaires d'une même colonne, ni entre les colonnes. Le report des retenues ne peut donc plus se faire concrètement. Le soroban, qui se répand aussi en Chine nécessite de la part de l'utilisateur de connaître un registre de résultat beaucoup plus important, et pour l'enseignement il constitue une perte de sémioticité. D'autre part, les boules du soroban sont taill es de façon à pouvoir les claquer plus facilement. Il symbolise donc une évolution récente de la technique, dans l'objectif de calculer plus rapidement. D'ailleurs, écrire 500 est plus rapide sur le boulier que sur une calculatrice...

IV.3 Point de vue de la psychologie

La psychologie s'est intéressée de beaucoup plus près que la didactique aux objets matériels et à leur influence sur la construction des connaissances.

Piaget encourage l'exercice concret en mathématiques qui n'est pas un obstacle pour l'abstraction. Cependant, nous rejoignons sa mise à garde sur l'illusion de vouloir "*faciliter les choses en renforçant l'aspect figuratif*" (1998, p 250), car à vouloir trop montrer, on opacifie. Piaget soulève le problème des nombres en couleurs (ou réglettes Cuisenaire) en précisant qu'il y a "*un verbalisme de l'image aussi dangereux que le verbalisme du mot.*" (1998, p 250). L'enfant doit manipuler et découvrir par lui-même, mais "*ce matériel peut donner lieu à la tentation de démonstrations faites devant l'enfant par l'adulte seul [...] ce qui risque(et ce qui est renforcé par la présence des couleurs) de faire primer [...] les aspects figuratifs (perception, imitation et images) sur les aspects opératifs (action et opérations)*" (1969, p71)

Cette technique d'enseignement, imposée par l'État de Genève pendant quelques années, est donc bien plus difficile qu'il n'y paraît à mettre en place de manière efficace, avec le risque d'un enseignement qui devient intuitif. D'une manière générale il existe des contraintes d'utilisation concernant le matériel pédagogique, comme avec n'importe quel objet que l'on introduit dans la classe.

D'autre part, Rabardel (1999) donne des éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Il définit l'instrument selon deux composantes :

"d'une part, un artefact, matériel ou symbolique, produit par le sujet ou par d'autres; d'autre part, un ou des schèmes d'utilisation associés, résultant d'une construction propre du sujet, autonome ou résultant d'une appropriation de schèmes sociaux d'utilisation. L'instrument n'est donc pas "donné", mais doit être élaboré par le sujet au cours d'un processus de genèse instrumentale qui porte à la fois sur l'artefact et sur les schèmes [...]."

Par dimension symbolique, l'auteur entend :

"les cartes, les graphiques, les abaques, les tables de multiplication, les méthodes etc."

Il définit la genèse instrumentale selon ces deux composantes : l'instrumentalisation qui *"concerne l'émergence et l'évolution des composantes artefact de l'instrument"* et l'instrumentation *"relative à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation"*.

Cette théorisation est utilisée par Trouche (2002) pour l'étude des calculatrices en classe de mathématiques. Nous rejoignons plusieurs idées clefs du travail coordonné par Guin et Trouche (2002) : la volonté de rapprocher calcul et raisonnement ; la nécessaire réflexion pour l'intégration d'un instrument en classe pour une activité mathématique ; la notion d'activité expérimentale (Lagrange, 2002a) qui nécessite d'une part des connaissances suffisantes des élèves et d'autre part de mettre à l'épreuve une véritable question ; l'analyse anthropologique des techniques et des ostensifs (Lagrange, 2002b)... Mais, la genèse instrumentale ne nous est pas apparue comme le cadre théorique le plus adéquat pour notre étude car il ne prend pas en compte toute la dimension des objets mathématiques c'est à dire les notions "abstrait-concret" et "ostensifs-non ostensifs" c'est à dire la composante mathématique intrinsèque. Pour nous, l'étude se situe au niveau des variables didactiques, du rôle du professeur, des techniques mises en œuvres par les élèves, du contrat didactique à établir... pour que l'enseignement soit efficace.

Citons enfin le travail de Uttal, Scudder et Deloache (1997) sur les objets concrets pour l'enseignement, ce que les anglo-saxons nomment "manipulatives". Leur point de vue est que ces objets concrets sont des symboles mathématiques, dans le sens où l'intention des professeurs est de travailler un concept ou un symbole écrit à l'aide d'un support concret. Pour les auteurs, la distinction ferme entre les formes abstraites et concrètes des expressions mathématiques n'est pas justifiée parce que justement, un enseignement en mathématiques avec un support matériel n'est efficace que s'il permet de faire le lien entre le support et d'autres formes d'expression mathématique. Si les élèves ne font pas ce lien, il leur devient nécessaire d'apprendre deux systèmes séparés et l'enseignement est ainsi contre productif. Nous nous situons dans cette analyse.

IV.4 Quelques données empiriques

En primaire, l'introduction en classe d'un objet matériel est assez courante, mais ceci n'est plus le cas au collège et encore moins au lycée (calculatrice mise à part).

L'idée a été de demander à des professeurs de mathématiques de citer des objets mathématiques pour évaluer ce qu'ils entendaient par ce terme. Cette question n'a pas été posée dans un contexte complètement neutre car elle venait en introduction d'un atelier sur le calcul et les instruments à calculer, en particulier sur le boulier. Ainsi l'analyse a porté sur vingt professeurs (treize femmes et sept hommes) qui ont chacun cité cinq objets mathématiques. Notre échantillon se compose de neuf professeurs du Secondaire (quatre en Collège et cinq en Lycée) et onze du Supérieur (neuf en IUFM et deux à l'Université) Les âges sont entre 35 ans et 61 ans, avec une moyenne de 42 ans environ.

Tout d'abord, les objets cités ont été triés par catégories :

- les instruments et machines à calculer, des abaques à l'ordinateur,
- les instruments de géométrie habituellement utilisés en classe : règle, rapporteur, équerre, compas,
- les instruments divers : dé (probabilité), miroir (optique géométrique), sablier (mesure du temps), jeux,
- la géométrie dans un sens plus général (cercle, cube, pavé...) ou parfois il est difficile de distinguer si l'on parle d'objets matériels ou non, en particulier pour les solides,
- la numération et le calcul (nombres) tout proche du thème de l'atelier,
- l'analyse avec les fonctions, primitives, intégrales,
- les concepts propres aux mathématiques : raisonnement, théorèmes.

Ces catégories d'objets ont été regroupées en trois classes : les objets matériels c'est à dire les instruments, les objets théoriques ou intellectuels (numération, calcul, analyse, concepts) et les objets mixtes qui peuvent être pensés matériellement ou théoriquement (géométrie) : le cube se dessine et il se construit aussi. Sur 100 objets désignés, environ la moitié (52 exactement) sont des instruments mathématiques c'est à dire qu'ils sont matériels et environ les deux tiers (14 personnes sur les 20) ont cité au moins un instrument. Ensuite 30 sont des objets intellectuels (théoriques) et il reste donc 18 objets mixtes.

Deux idées intéressantes sont à noter :

- Les professeurs citent des objets proches d'eux (matériels ou non), qui font partie de leur activité quotidienne en mathématiques. En effet, les plus fréquemment cités appartiennent au monde de la classe (de Collège et de Lycée) c'est à dire : calculatrice et ordinateur (six fois) et règle, compas, équerre, rapporteur (23 fois). Seulement six professeurs ont qualifié un objet théorique d'objet mathématique, et seulement deux personnes n'ont cité que des objets théoriques. Trois de ces objets leur sont communs : équation, fonction, primitive (ou intégrale), les deux formateurs IUFM probablement manipulent quotidiennement ces objets là,

- Ce questionnaire montre aussi la tendance à ne pas mélanger objet matériel et non matériel. Seulement quatre sondés ont cité des objets qui se répartissent dans toutes les classes, pour eux, que l'objet soit matériel ou non il appartient au domaine des mathématiques alors que dans la plupart des questionnaires, les réponses se sont limitées à une zone. Pour nous positionner par rapport à cette remarque, nous définissons un objet mathématique en rapport de l'activité qu'il implique en mathématiques et non sa qualité matérielle ou intellectuelle.

Regardons maintenant la classification des objets mathématiques matériels proposée.

IV.5 Essai de classification

Afin de justifier la thématique retenue, à savoir les instruments à calculer, différents ateliers qui pouvaient aussi convenir à notre objectif ont été envisagés. L'enjeu de cette classification est aussi de montrer que le cas du boulier chinois n'est pas une exception et que différents supports matériels sont envisageables en mathématiques.

∞Présentation du contexte

La première partie de nos recherches a consisté à mettre au point un atelier d'animation scientifique et technique en mathématiques. Les contraintes étaient principalement induites par le centre d'animation d'une part et par l'école d'autre part. Pour le centre d'animation, il fallait monter un atelier en accord avec les principes de fonctionnement : la production d'objets (comme support d'une activité), un objet par enfant et par séance. La deuxième chose à prendre en compte était le programme solaire du cycle 3. En effet, pour que l'atelier soit choisi par les professeurs des écoles il fallait bien qu'à travers l'atelier ceux-ci reconnaissent des notions importantes pour le programme de mathématiques.

∞Essai de classification d'objets mathématiques matériels

Afin que notre réflexion soit complète, il a semblé nécessaire de distinguer trois familles d'objets :

- Les objets créés pour un besoin social ou instruments scientifiques

Instruments à calculer : Abaque, boulier, bâtons de Néper, réglettes de Genaille- Lucas, règle à calcul, additionneuse, calculatrices mécaniques, calculatrices électroniques, ordinateur	Instruments à mesurer : Temps (cadran solaire, clepsydre, sablier, horloge, montre électronique), masse (balances), distance (cercle répétiteur, lunette astronomique, laser), température, pression, humidité	Machines à tracer : Pantographes, traceurs de courbes
--	--	---

- **Les objets résultant de recherches en mathématiques ou jeux**

<p>Formes à géométrie : Surfaces : Pavages, tangrams, rectangle de Lewis Carroll, ruban de Möbius, mystère de Pythagore Volumes : Patrons, dés empilements, polyèdres Symétries : Kaléidoscopes, miroirs</p>	<p>Jeux et casses tête : Tours de Hanoi, pavages, cryptographie</p>
---	--

- **Les objets créés pour l'école ou matériel pédagogique**

<p>Calcul : Bande numérique, réglettes Cuisenaire, balance mathématique, boulier-compteur</p>	<p>Géométrie : Triangles en plastique, équerre, rapporteur, compas d'école</p>
--	---

Les premiers objets sont le résultat d'une avancée technique de l'homme, ils furent ou sont encore utilisés dans la vie courante ou par des savants (instruments à calculer ou à mesurer, machines à tracer). Ils sont le fruit d'un besoin social : faire des calculs fiables pour les comptes, pour la navigation en mer... Ils témoignent du savoir savant et permettent de développer une dimension historique et épistémologique de l'enseignement des mathématiques. On les désigne parfois par instruments scientifiques par opposition aux instruments techniques (Hébert, 2004). On peut ajouter dans cette catégorie les oeuvres artistiques : architecture, peinture... qui ont recours à des calculs mathématiques.

La deuxième famille comporte aussi une valeur historique. Ces objets symbolisent une ouverture sur un problème mathématique qui a été ou est encore d'actualité. Il faut noter leur particularité : c'est surtout lors de la fabrication de ces objets que l'on fait appel à certaines notions mathématiques (géométrie élémentaire, combinatoire...) et non pas lors de leur étude a posteriori. Combien existe-t-il de polyèdres réguliers convexes ? On peut en construire ou en dessiner cinq, mais n'en existe-t-il pas d'autres ? Quel est le nombre minimum de déplacements pour la Tour de Hanoi ? Si la tour n'est pas disposée dans l'ordre au départ existe-t-il toujours une solution ? Sur plusieurs poteaux ? Pour cette question, la réponse a été apportée récemment par l'équipe de Combinatoire Naïve du Laboratoire Leibniz de Grenoble. Et sur un seul poteau ? La question n'est pas résolue, alors à vous de jouer⁴ ! (4)

La troisième famille est constituée d'objets créés dans un but d'enseignement, pour la classe. On les appelle parfois " matériel pédagogique " dans les catalogues pour les écoles. Les réglettes Cuisenaire par exemple, sont beaucoup utilisées par l'école Montessori pour travailler en arithmétique. Ce sont des objets créés pour l'enseignement. La question que l'on se pose alors est pourquoi utiliser des artifices quand l'histoire nous donne des objets pour apprendre à compter ? Les réglettes Cuisenaire ont-elles un intérêt supplémentaire ? Pour le boulier la réponse est

⁴ www-leibniz.imag.fr/LAVALISE

immédiate : le boulier-compteur utilisé au début du 20^{ème} siècle dans les écoles en France comportait dix boules par tige, le problème est que la lecture est très délicate, l'œil a du mal à distinguer trop de boules. En un seul coup d'œil, on peut dénombrer quatre éléments au maximum. On peut bien sûr lire les nombres en utilisant les compléments à dix, c'est à dire sept se lit parce que trois boules ne sont pas activées, il est alors nécessaire de connaître les compléments à dix des nombres. Par contre les bouliers chinois et japonais résolvent ce problème : certaines boules valent cinq, ce qui permet une lecture rapide et sûre de tous les nombres. En plus, d'après notre étude de DEA, les enfants préfèrent construire et utiliser des objets " utiles à quelque chose ", c'est à dire qui symbolisent un aboutissement de la pensée humaine plutôt que des jeux comme les tangrams.

La thématique des machines à calculer a donc été retenue. Sa progression est historique : quels sont les instruments que l'homme a inventés pour dénombrer et compter de manière simple, efficace et sûre ? Après les dix doigts des mains, il a utilisé les jetons de l'abaque, le boulier (encore très répandu en Chine), les réglottes pour multiplier, les calculatrices mécaniques (pour alléger le travail des comptables), les tables à calculs utilisées jusque dans les années 1970 dans les bureaux d'études avant l'invention des calculettes électroniques. Enfin l'ordinateur a mis un terme à la concurrence entre machines numériques (mécaniques) et analogiques (les paramètres sont reliés par des relations mathématiques : tables à calculs, astrolabe, calculette électronique depuis quelques années) Cet atelier présente l'avantage d'aborder différents thèmes : l'histoire de la numération, du calcul, de sa mécanisation. Le calcul est une partie importante du programme du primaire⁵ qui inclut maintenant l'étude de la calculatrice. Pour comprendre tout l'enjeu de celles-ci, il est très intéressant de réfléchir aux instruments qui ont été inventés par l'homme pour l'aider dans ses calculs.

Conclusion

Il faut expliquer l'importance d'un projet d'interdisciplinarité technologie-mathématiques : Pourquoi fabriquer des objets mathématiques ? La fabrication engendre un rapport à l'objet différent. Le boulier que l'on a construit soit même devient une œuvre personnelle (au sens artistique ici), en même temps qu'il témoigne de ce que l'on a appris. D'une part, on atteint l'objectif de construction en développant un fort rapport affectif à cet objet : on s'aperçoit qu'il est important que chacun mette "un peu de soi dedans" lors de la décoration, de la personnalisation des réalisations, qui font partie intégrante de la phase de construction. D'autre part, cette trace matérielle permet de montrer ce que chacun est capable de faire au maître, aux camarades mais aussi aux parents, à la famille. De plus, l'utilisation d'un support matériel en mathématiques est un moyen de dédramatiser le rapport à cette discipline. C'est un biais pour rentrer dans les mathématiques. Par exemple avec le boulier, le premier réflexe lorsqu'on s'en empare est souvent de bouger les boules pour faire du bruit (même pour les adultes), c'est la manière de "rentrer" dans la découverte de cet objet. Chacun est capable de le faire, c'est la base qui doit susciter la curiosité pour réfléchir sur son mode de fonctionnement. Bien sûr, cette curiosité est aiguisée si le boulier a été construit personnellement, qu'on le gardera et qu'on pourra l'utiliser à nouveau si nécessaire, c'est à dire si l'on pense qu'il va

⁵ Programmes de l'école élémentaire 2002. Document d'accompagnement en mathématiques : Utiliser les calculatrices en classe, cycles des apprentissages fondamentaux et cycles des approfondissements. www.eduscol.education.fr/prog

s'installer dans le temps didactique de la classe. Ceci est bien exprimé dans les extraits d'entretien cités. Mais il faut aussi insister sur le fait que ce support matériel n'a pas seulement un sens psychologique pour "mieux comprendre". On a aussi un fait épistémologique : les hommes ont commencé à compter avec des cailloux, puis des abaques, des tables à calculs avec des jetons en Europe, des bouliers en Asie. Pour faire émerger une théorie mathématique des nombres, l'humanité a dû s'aider de différents objets. Cette remarque est aussi pertinente pour la géométrie (Chevallard, 2004) pour laquelle les figures tracées sur papier sont un premier pas vers une théorie mathématique de l'espace et pas seulement une aide pour les moins bons. À la fonction psychologique des situations décrites, s'ajoute donc la fonction épistémologique.

D'autre part, pour insérer les objets mathématiques dans le milieu de la classe il est nécessaire de réfléchir à leur étude en posant de véritables questions que les élèves doivent résoudre. Des savoirs précis résultant de l'étude du boulier chinois ont été mentionnés : la numération positionnelle, la base 10, les opérations avec les retenues ainsi que des savoirs transversaux qui interviennent en mathématiques dans tous les domaines.

Bibliographie

AYMÉ, N. (1997). Le boulier chinois. *Actes du colloque : L'Océan Indien, au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*. IUFM de La Réunion. Disponible sur :

www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/Seminaires/ActesPDF/Ayme52.pdf

BACHELARD, G. (1971 rééd 2001). *Épistémologie (textes choisis)*. Paris : PUF.

BALACHEFF, N. & NEYRET, R. (1981). Bouliers et écriture des nombres au CM. *Grand N*, 25, 39-81.

BALACHEFF, N. & NEYRET, R. (1982). Bouliers et opérations au CM. *Grand N*, 28, 67-87.

BARBIN, E. & LE GOFF J.-P. (2000). *Si le nombre m'était conté...* Paris : Ellipses.

BOSCH, M. & CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19, 77-124.

CHABERT, J.-L., BARBIN, E., GUILLEMOT, M., & al (1994). *Histoires d'algorithmes : du caillou à la puce*. Paris : Belin.

CHEVALLARD, Y., (2004). Enseigner les maths aujourd'hui. *Cahiers pédagogiques*, 427, 34-36.

CHEVALLARD, Y. (2001). Les TPE comme problème didactique. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Disponible sur :

www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fdf/topos3.html

CHEVALLARD, Y., (1991). Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x*, 30, 5-15.

CUMIN, J., HOSSENLOPP, J. (1994). *Le boulier : initiation*. Paris : Chiron.

CUMIN, J., HOSSENLOPP, J. (1998). *Le boulier : perfectionnement*. Paris : Chiron.

Ermel Enseignants, apprentissages numériques en CE1, 1993, INRP, Paris : Hatier.

DEFORGE, Y. (1990). *L'œuvre et le produit*. Seyssel : Champ Vallon.

GODIN, F., TIMON, R., WOROBEL, M. (2000). *Math CM2*, Paris : Hachette.

GRENIER, D. & PAYAN, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Les cahiers de laboratoire Leibniz*, 92. Disponible sur : www-leibniz.imag.fr/LesCahiers

GUIN, D. & TROUCHE, L. (Coord.). (2002). *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

GUITEL, G. (1975). *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris : Flammarion.

HÉBERT, E. (Dir.). (2004). *Instruments scientifiques à travers l'histoire*. Paris : Ellipses.

IFRAH, G. (1981). *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Robert Laffont.

LAGRANGE, J.-B. (2002a). Les outils informatiques entre "sciences mathématiques" et enseignement. Une difficile transposition ? In GUIN, D. & TROUCHE, L. *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage. 89-116.

LAGRANGE, J.-B. (2002b). Étudier les mathématiques avec les calculatrices symboliques. Quelle place pour les techniques ? In GUIN, D. & TROUCHE, L. *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage. 151-186.

MARGUIN, J. (1994). *Histoire des instruments et machines à calculer : trois siècles de mécanique pensante, 1642-1942*. Paris : Hermann.

MARTZLOFF, J.-C. (1987). *Histoire des mathématiques chinoises*. Paris : Masson.

Mathématiques CM2, Paris : Hachette éducation.

MERCIER, A., SALIN, M.-H. (1988). L'analyse a priori, outil pour l'observation. *Actes de l'université d'été de didactique des mathématiques*. IREM de Bordeaux.

PIAGET, J. (1998). *De la pédagogie*. Paris : Odile Jacob.

PIAGET, J. (1969, réed 1995). *Psychologie et pédagogie*. Paris : Folio.

RABARDEL, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, *Actes de la 10^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*.

SHÄRLIG, A. (2001). *Compter avec des cailloux*. Lausanne : Presses Polytechniques Universitaires Romandes.

TEMPLE, R. (1987). *Quand la Chine nous précédait*. Paris : Bordas.

TROUCHE, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. In GUIN, D. & TROUCHE, L. *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage. 187-214.

UTTAL, D., SCUDDER, K. & DELOACHE, J. (1997). Manipulatives as symbols : a new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of applied developmental psychology*, 18, 37-54.

Disponible sur : <http://www.psych.nwu.edu/~uttal/publications.htm>

Annexe : Pour aller plus loin avec le boulier

∞ Comment extraire une racine carrée avec le boulier ?

Calculons $\sqrt{25}$.

On peut utiliser la propriété que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2 , c'est à dire : $\sum_{i=0}^{n-1} 2i + 1 = n^2$

Cette formule peut se démontrer (par récurrence) en classe de Terminale. Dans cet exemple, $1+3+5+7+9=25=5^2$.

Pour ce calcul sur le boulier, on effectuera des soustractions successives en notant le nombre des soustractions effectuées :

$25-1=24$, on inscrit une boule à gauche. Total de soustractions = 1

$24-3=21$, on rajoute une boule à gauche. Total = 2.

$21-5=16$, total = 3.

$16-7=9$, total = 4.

$9-9=0$, total = 5. Le résultat est un nombre entier et c'est 5.

Voilà quelques questions qui permettent de rentrer dans l'étude du boulier et de revisiter des savoirs souvent délicats à acquérir. Maintenant, le boulier va servir à poser de nouveaux problèmes, les situations décrites par la suite s'inspirent des situations recherche (Grenier et Payan, 2003)

Avec ces questions, s'offre une possibilité de rentrer à nouveau dans la production d'objets. Avec de nouvelles contraintes d'utilisation on est amené à faire des choix techniques. On peut imaginer des questions comme : Construire un boulier pour écrire tous les nombres de manière unique. Certaines boules ont été perdues, reconstruire un boulier chinois qui pénalise le moins possible, c'est à dire qui inscrit le plus de nombres possibles. Construire un boulier avec un nombre minimal de boules (on pourra changer de base de numération)

∞ Enlever des boules

La question est : Combien peut-on enlever de boules au maximum par tige pour pouvoir calculer à la manière traditionnelle ? Ce qui peut aussi se formuler : Peut-on avoir une écriture unique de tous les nombres en base 10 ? Cette recherche fait (re)découvrir le boulier japonais ou soroban qui possède le nombre minimal de boules c'est à dire quatre unaires et une quinaire. Son apprentissage nécessite beaucoup plus de dextérité. Cette amélioration du suan-pan date des années 1950. En fait si on pousse le raisonnement du nombre minimum de boules, il suffit d'une boule par tige pour pouvoir inscrire n'importe quel nombre, en binaire !

Dans les deux points suivants, seulement quelques pistes de recherche seront données afin de permettre la recherche personnelle du lecteur.

∞ Changer la valeur des boules

Quelles valeurs peut-on donner aux boules pour que l'on puisse écrire tous les nombres ? Étudier tous les cas.

Pour le suan-pan, on peut donner les valeurs deux à six pour les boules du haut en gardant un en bas. Peut-on changer la valeur des boules du bas ? Oui, on peut leur donner la valeur deux ou trois (et un pour celles du haut). Quand on change de valeurs : quel est le nombre maximum inscriptible ? Quels sont ceux dont l'écriture est unique ?

∞ Coller des boules

Si certaines boules sont collées entre elles, peut-on encore utiliser le boulier ? Sous quelles conditions ? Si on a le choix, où peut-on placer ces boules coller pour perdre le moins de nombres possibles ? Étudier tous les cas.

On prendra le cas du boulier-compteur avec neuf boules par tige. Coller deux boules équivaut à enlever une boule. Perd-on autant de nombres si cette boule est dans les unités ou dans les dizaines ? Oui, ce phénomène n'est pas proportionnel à la taille du nombre comme on peut le penser en première analyse !

Ainsi, sur une tige on écrit 10 chiffres : de zéro à neuf. Sur deux tiges, on écrit de zéro à 99 (100 nombres), donc pour k tiges, on écrit 10^k nombres (et on compte de zéro à $10^k - 1$). Raisonnons avec les nombres qu'on peut encore écrire puis on calculera la perte. Pour n boules collées dans une même tige ; avec k tiges au total, on peut inscrire $10^{k-1} \times (10 - (n-1))$, donc on perd : $10^k - 10^{k-1} \times (10 - (n-1))$ nombres. Est-ce qu'il vaut mieux perdre les boules dans toutes les tiges ou en pénaliser une seule ? Avec trois tiges et quatre boules collées entre elles, dans une même tige, on inscrit $10 \times 10 \times 7 = 700$ nombres et on en perd $1000 - 700 = 300$. En effet, si on colle quatre boules, on perd l'écriture de trois nombres, il en reste donc bien sept dans une des tiges. Par contre, deux boules collées dans deux tiges, on peut inscrire $10 \times 9 \times 9 = 810$ et on en perd 190. Il vaut donc mieux répartir les pertes dans les tiges.