DEUX EXEMPLES D'ACTIVITES EN FORMATION DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES DU SECOND DEGRE

Aline Robert,
Equipe Didirem,
IUFM de Versailles

Résumé : Dans cet article nous présentons deux types d'activités à développer en formation d'enseignants. Les premières permettent de travailler les relations entre les énoncés proposés aux élèves et les activités mathématiques qu'ils peuvent enclencher en classe ; nous proposons en même temps quelques catégories pour différencier les énoncés en fonction de ces activités mathématiques. Les secondes permettent de travailler les relations entre les énoncés proposés aux élèves et les déroulements effectifs correspondants, à partir de vidéo. Nous abordons pour terminer la question des alternatives qui s'offrent aux enseignants, question qui peut organiser les réflexions à partir de ces types d'activités.

A l'heure où les Instituts Universitaires de formation des Maîtres sont très décriés, notamment dans les médias, où les crédits de la formation continue diminuent beaucoup, où, implicitement ou pas, seules les formations sur le terrain sont reconnues comme efficaces, je voudrais a contrario indiquer des exemples d'activités qui me semblent très utiles en formation et qui ne peuvent pas se passer "sur le terrain".

Des activités de ce type ont été menées effectivement depuis quelques années aussi bien en module préprofessionnel de licence de mathématiques qu'en formation continue d'enseignants (dans le cadre de Plans Académiques de Formations) ou de formateurs (dans le cadre d'une formation de formateurs). Elles ont apparemment atteint au moins en partie les objectifs attendus par les formateurs qui les ont proposées – des évaluations rigoureuses restent à faire cependant.

Il ne s'agit évidemment pas d'opposer les formations sur le terrain et "les autres" mais bien au contraire de chercher à construire des dynamiques entre les deux, en en reconnaissant et en travaillant les spécificités respectives[1].

[1] Des recherches en didactique des mathématiques se développent actuellement sur toutes ces questions (cf. Robert, 2001).

I. Des activités pour travailler la relation entre les énoncés mathématiques d'un même exercice et l'activité qu'ils peuvent enclencher

Nous développerons successivement le scénario de ce type d'activité, deux exemples précis et tirerons un bilan. D'autres exemples analogues ont été déjà décrits (cf. Robert et Rogalski, 2002, GRAF Toulouse et Paf Versailles, 2002).

I.1) Le scénario de la séance de formation

a) On distribue aux participants des énoncés (différents ou non). Les participants peuvent se regrouper en petits groupes de travail, avec un énoncé par groupe. On leur laisse entre une dizaine de minutes et une demi-heure pour commencer à résoudre les exercices en notant leurs activités mathématiques : expérimentation numérique ou géométrique, recherches d'outils, mise en place d'une démonstration... Cette attention sur les activités effectuées est très importante.

b) On arrête la recherche et on distribue à tous les participants tous les énoncés. On les corrige les uns après les autres en interrogeant d'abord le groupe qui a travaillé sur l'énoncé correspondant. On note ainsi les activités mathématiques qui correspondent à des énoncés précis.

c) Un bilan permet de constater la différence de ces activités et de généraliser en dégageant des caractéristiques des énoncés en relation avec les activités correspondantes.

I.2) Le premier exemple : des énoncés différents d'un même exercice

a) Les énoncés distribués aux petits groupes.

L'exercice a été trouvé dans un manuel scolaire ancien (IREM de Strasbourg).

Enoncé 1 (resp. 1bis).
Soient ABCD un parallélogramme, M un point quelconque de (AD), N le symétrique de A par rapport à M, P le point d'intersection de (CM) et (BN).
Etudier le point d'intersection de la droite (AP) et du côté (BC) [*resp. et du côté (DC)]*.
Quel est le lieu de P lorsque M décrit (AD) ?

Enoncé 2.
Soient ABCD un parallélogramme, M un point quelconque de (AD), N le symétrique de A par rapport à M, P le point d'intersection de (CM) et (BN).
Quel est le lieu de P lorsque M décrit (AD) ?

Enoncé 3.
Soient ABCD un parallélogramme, M un point quelconque de (AD), N le symétrique de A par rapport à M, P le point d'intersection de (CM) et (BN).
Etudier la droite (AP).
Quel est le lieu de P lorsque M décrit (AD) ?

Enoncé 4 (resp. 4 bis).
Soient ABCD un parallélogramme, M un point quelconque de (AD), N le symétrique de A par rapport à M, P le point d'intersection de (CM) et (BN).
Montrer que la droite (AP) coupe (BC) en un point I tel que C est le milieu de [BI] *(resp. coupe [DC] en son milieu].*
Quel est le lieu de P lorsque M décrit (AD) ?

Correction succincte :
La droite (AP) coupe (BC) en J et (DC) en I.
On applique le théorème de Thalès dans les triangles APM et PCJ puis PMN et PBC.
On obtient les égalités de rapports $\frac{AM}{CJ} = \frac{PM}{PC} = \frac{MN}{BC}$
Comme M est le milieu de [AN], l'égalité AM = MN implique l'égalité CJ = BC.
Il en résulte que J est fixe, C est le milieu de [BJ], de même I est le milieu de [DC].

Réciproquement on montre qu'un point quelconque de (AJ) est un point P sauf J, exclu, et A qui convient mais qu'il faut traiter à part directement.

Par suite le lieu cherché est la droite (AJ), J exclu.

b) Une mise en commun qui permet de mettre en évidence des différences d'activités selon les énoncés.

Un premier constat évident concerne la différence d'avancée dans l'exercice selon l'énoncé, plus l'énoncé est découpé (énoncé 4), plus la résolution a avancé.

Plus précisément, l'énoncé 2 demande une phase préliminaire de conjectures et amène souvent pour cela à tracer (ou faire tracer) quelques figures, voire quelques cas particuliers. Toutefois ces expériences ne mettent pas nécessairement sur la voie du choix d'un bon intermédiaire pour faire la démonstration. Elles peuvent néanmoins faciliter le travail de réciproque grâce à la familiarité avec la figure créée par les constructions préliminaires.

L'énoncé 3 exige d'introduire et de nommer un point intermédiaire mais il est plus facile à deviner grâce à l'indication.

Les énoncés 4 et 4bis en revanche ne laissent plus qu'à chercher un bon outil pour démontrer la propriété annoncée. Il reste à appliquer deux fois le théorème, de manière non indépendante, dans des configurations qui dépendent du cas de figure.

Un changement de point de vue échappe aux participants, qui, pourtant, peut gêner les élèves : c'est la traduction de N symétrique de M par rapport à A en A milieu de [MN].

Enfin la réciproque peut se faire ou directement, en partant d'un point quelconque de (AP) ou par l'absurde.

c) Bilan : relation activités/énoncés et disponibilité du théorème de Thalès.

Ce travail permet d'avancer sur trois plans.

Il illustre d'abord la diversité des activités mathématiques, et rappelle les détours éventuels qui accompagnent la recherche.

De plus, il montre l'étroite relation entre l'énoncé et ces activités, même si l'exercice est le même.

Enfin, quelque soit l'énoncé, le théorème de Thalès est utilisé sans avoir été annoncé – l'exercice est proposé hors de tout contexte. Nous qualifions une telle mise en fonctionnement d'un théorème, qui nécessite de trouver d'abord que c'est ce théorème qui est à utiliser, de « disponible ». Cela signifie que ce théorème est disponible pour ceux qui y ont pensé mais cela veut aussi dire que cet exercice permet peut-être de rendre le théorème disponible pour ceux qui sont en cours d'apprentissage : ils auront à chercher le théorème comme un outil adéquat. Nous dirons aussi que le niveau de mise en fonctionnement du théorème dans cet exercice est du type « disponible ».

I.3) Un deuxième exemple : diverses adaptations d'un même théorème

Cette première activité est en général suivie d'une deuxième où on propose aux participants, regroupés à nouveau en petits groupes de travail, les énoncés suivants, avec la consigne : résoudre l'exercice ci-joint en étant attentif aux modalités d'application du théorème de Thalès[1]. Une demi-heure permet de bien entrer dans les exercices.

a) Les énoncés distribués à tous

Exercice 1

Soit OAB un triangle, C un point de [OA], D un point de [OB] tels que les droites (CD) et (AB) sont parallèles. On suppose que OC = 4, OD = 3, CA = 6.
Montrer que OB = 15/2. Calculer DB.

Exercice 2

On donne un triangle ACG, E un point de [CG], B un point de [AC], D un point de [AE] tel que (BD) est parallèle à (CE). On appelle F le point d'intersection de (BD) et (AG).
Montrer que $\frac{BD}{DF} = \frac{CE}{EG}$

Exercice 3

ABCD est un quadrilatère. La parallèle à (BC) menée par D coupe (AC) en E. La parallèle à (AD) menée par C coupe (BD) en F. Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

Exercice 4

Soit ACE un triangle, B et D deux points appartenant respectivement à [AC] et [AE].
On suppose que (BD) et (CE) sont parallèles. On appelle F le point d'intersection de (BE) et (CD).
La droite (AF) coupe [BD] en I et [CE] en J. Montrer que I et J sont les milieux de [BD] et [CE].

[1] Les exercices 4 et 5 sont évoqués dans Robert et Rogalski (2002) dans un contexte un peu différent.

Exercice 5

a) Soit ABC un triangle, I le pied de la bissectrice intérieur issue de A sur [BC].

Montrer que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

Y a-t-il des prolongements à cet énoncé ?

b) Corrections et mise en évidence de diverses adaptations du théorème.

Dans tous les exercices la figure est à faire.

Dans l'exercice 1, c'est une application immédiate du théorème qui permet d'écrire l'égalité de rapports $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$. Un calcul numérico/algébrique permet de calculer OB puis DB par soustraction.

Notons un implicite : une unité de longueur est supposée donnée, la figure pourrait être tracée en vraie grandeur ce qui permettrait un contrôle a posteriori.

Pour en dire plus, il faut connaître davantage le niveau scolaire concerné : pour des élèves de quatrième par exemple, l'application demandée amène à reconnaître les lettres à utiliser, qui ne sont peut-être pas celles du cours, nous n'y reviendrons pas mais cela peut se poser à chaque fois. De plus un tel calcul n'est pas encore automatique.

En revanche au lycée un tel exercice représente ce que nous appelons *une application simple et isolée d'un théorème* : il n'y a qu'à remplacer des données générales par des données du contexte, aucune autre propriété mathématique n'est à utiliser (si ce n'est des connaissances anciennes réputées acquises).

Dans l'exercice 2, on utilise deux fois dans la même configuration le théorème de Thalès : on obtient, grâce à la transitivité de l'égalité, à partir des deux suites d'égalité de rapports : $\frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE} = \frac{DF}{EG}$.

Un travail algébrique sur l'égalité entre le premier et le troisième rapport permet de conclure.

Ici on doit reconnaître une application répétée du théorème, et faire un calcul de type algébrique sur des longueurs considérées comme des nombres généralisés : c'est ce que nous appelons *une adaptation du théorème de Thalès. L'application n'est pas isolée* – du moins si le calcul algébrique n'est pas encore automatique et représente un changement de cadre à considérer pour les élèves.

Elle n'est pas simple car on doit appliquer deux fois le théorème et de manière non indépendante.

Dans l'exercice 3, il faut reconnaître les configurations où appliquer le théorème puis la réciproque : c'est une adaptation que nous mettons sous l'étiquette générale de "reconnaissance des modalités d'application d'un théorème". Une autre spécificité de l'exercice est la nécessité de nommer un point : automatique chez les uns cette activité représente un *intermédiaire* à prendre en compte chez les autres. Deux applications du théorème dans deux configurations différentes sont à mettre en œuvre, puis un calcul sur des longueurs mettant en jeu la transitivité permet d'appliquer la réciproque du théorème de Thalès. Il y a donc *plusieurs étapes* à introduire soi-même. Cette adaptation n'est pas simple, et selon les élèves est ou non isolée (cf. exercice 2).

Dans l'exercice 4 (cf. Robert et Rogalski, 2002), l'application du théorème de Thalès n'est pas simple : des étapes à reconstituer soi-même amènent à l'utiliser 4 fois, dans des configurations différentes qui sont à reconnaître, avec un calcul algébrique qui amène à la résolution de $x^2 = 1$ (x étant un rapport de longueurs positif) au milieu d'un problème géométrique. Il y a là un *changement de cadres* qui fait de cet exercice une *application non isolée* du théorème (et évidemment non simple).

L'exercice 5 (cf. Robert et Rogalski, 2002), enfin, présente le cas d'une *construction intermédiaire à faire seul ainsi que l'utilisation de propriétés plus ou moins anciennes des droites parallèles et bissectrices.* En fait il y a *un petit choix de méthodes*, puisque 4 constructions intermédiaires sont possibles (mais équivalentes pour la résolution).

I.4) Un bilan : outils d'analyses des énoncés.

Ces deux activités permettent de mettre au point des outils pour analyser les énoncés en relation avec les activités des élèves. Elles ont pour ambition de renseigner sur les activités potentielles des élèves, pour comparer avec ce qui se passe en classe et permettre le cas échéant de saisir, dans un deuxième temps, soit des adaptations imprévues soit des modifications dues au déroulement.

Ces analyses sont relatives à un niveau scolaire donné, un programme donné, une classe donnée.

a) Les énoncés proposés aux élèves portent sur des connaissances qui peuvent être **anciennes, en cours d'acquisition** : c'est une première distinction à prendre en compte vis-à-vis des activités et des apprentissages qu'ils peuvent induire.

b) De plus ces connaissances peuvent être indiquées (directement ou indirectement par leur place) ou non : on parle de fonctionnement de type **mobilisable** ou **disponible**. Et le travail des élèves n'est pas analogue selon qu'ils doivent rechercher les connaissances à utiliser, c'est-à-dire mettre en relation une propriété à démontrer et différents outils (travail du pourquoi ou du quoi) ou mettre en fonctionnement en l'adaptant une propriété (travail du comment).

c) De même la question posée peut être **fermée** (montrer que…) ou nécessiter des conjectures, plus ou moins larges. Entre " calculer… " et " que peut-on dire de … ? " il peut y avoir beaucoup de différence de travail. Une question fermée sans aucune indication peut cependant ne pas être abordée immédiatement, ce qui nous intéresse en termes d'activité.

d) **Dans tous les cas**, que ce soit sur des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition, et qu'elles doivent être mobilisables ou disponibles, les mises en fonctionnement peuvent varier, avec des conséquences sur les activités et les apprentissages. Si le travail consiste à appliquer une propriété sans calcul supplémentaire ni reconnaissance (remplacer les données générales par des données particulières) on parle d'application simple et isolée ou immédiate. Sinon, nous distinguons des grands **types d'adaptations** que nous présentons ci-dessous.

e) **Les types d'adaptations des connaissances**

Six types se dégagent, qui peuvent intervenir simultanément, qui ont chacun un spectre assez large (et encore une fois relatif) :

A1. Les reconnaissances (partielles) des modalités d'application des notions, théorèmes, méthodes, formules... : typiquement en géométrie reconnaître la(es) configuration(s) où utiliser Thalès. Cela peut aller de reconnaissances de variables, de notations à des reconnaissances de formules ou de conditions d'applications de théorèmes...

A2. L'introduction d'intermédiaires – notations, points, expressions... : typiquement en géométrie introduire une parallèle, ou nommer un point pour utiliser Thalès. *Moins fréquent.*

A3. Les mélanges de plusieurs cadres ou notions..., les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres, les mises en relation ou interprétations : typiquement en géométrie, utiliser du calcul algébrique pour obtenir le résultat (par exemple résoudre $x^2 = 1$ au milieu d'un problème de géométrie). Les énoncés qui jouent sur graphique/fonction contiennent automatiquement cette adaptation.

A4. L'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements (cela va d'utilisation répétée (in) dépendante d'un même théorème à un raisonnement par l'absurde faisant intervenir le théorème) : typiquement en géométrie, utiliser quatre fois le théorème de Thalès de manière non indépendante puis sa réciproque. Les étapes peuvent être classiques (étude d'une fonction) ou à imaginer.

A5. L'utilisation de questions précédentes dans un problème.

A6. L'existence de choix – forcés (un seul convient finalement) ou non.

I.5) Conclusion : une utilité pour la classe et l'importance des déroulements

D'abord des activités de ce type ne relèvent pas du seul " terrain " : elles nécessitent un certain temps pour porter leurs fruits et ne peuvent pas être faites directement en classe, au moins pour la première, car les enseignants choisissent sauf exception un seul énoncé par exercice.

En revanche les caractéristiques qui peuvent être dégagées à partir de ces exemples peuvent être réinvesties en classe : on peut mettre en relation l'énoncé précis et ce que font les élèves, que ce soit pour saisir ce qui se passe ou même pour provoquer une activité intéressante.

Plus généralement les analyses d'énoncés permettent de mieux comprendre ce qui se passe en classe dans la mesure où on s'attend déjà à certaines activités et où les différences imprévues éclairent l'inconnu ; elles permettent aussi de mieux programmer tel ou tel type d'activité.

En fait les analyses de ce qui se passe en classe montrent toujours une grande différence entre les prévisions et les déroulements : c'est ce que nous travaillons dans le deuxième type d'activités développées ci-dessous.

II. Une activité pour travailler les relations entre les énoncés proposés aux élèves et les déroulements effectifs.

Nous développerons successivement le scénario de l'activité, l'exemple précis et tirerons un bilan. D'autres exemples analogues ont été déjà décrits (cf. Robert 2004, Roditi, 2004).

II.1) Le scénario de la séance de formation

On distribue aux participants un énoncé d'exercice qui peut être résolu en classe en une demi-heure environ (au maximum). Le niveau scolaire est précisé, ainsi que la progression dans la quelle se place l'exercice. On demande de résoudre cet exercice et de prévoir ce que les élèves peuvent développer comme activités mathématiques s'ils le travaillent en classe. On recueille les propositions des participants (au tableau par exemple).

On passe alors la vidéo d'une classe où l'exercice est effectivement proposé aux élèves. Une vingtaine de minutes semble un maximum pour ce visionnement.

On compare alors les prévisions et ce qui a pu être observé. Cela permet de mettre en évidence tout ce que les déroulements en classe peuvent modifier par rapport aux analyses d'énoncés.

On généralise en introduisant, là encore, quelques caractéristiques des déroulements qui interviennent pour comprendre les activités des élèves.

On termine par la question des alternatives : pour cet enseignant mais surtout pour une autre classe.

II.2) L'exemple (à partir d'une vidéo).

En troisième, dans une très bonne classe, un enseignant propose à ses élèves en milieu d'année l'énoncé suivant, qui n'est donc pas relié à un chapitre précis :

Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux donnés.

a) Analyse a priori[2]

Cet exercice est ouvert : aucune indication n'est donnée, et le mot " construire " correspond à une question qui n'est pas fermée. Il peut même y avoir une ambiguïté sur ce mot : entre programme de construction, construction à la règle et au compas, discussion de l'existence et /ou de l'unicité... On peut penser que c'est le contexte de la classe qui jouera pour que les élèves donnent un sens à ce mot.

Aucune étape n'est indiquée – aux élèves de mettre en place un découpage pour résoudre l'exercice.

Des intermédiaires doivent être introduits pour modéliser la situation : les longueurs des côtés donnés et inconnus (lettres utilisées comme nombres généralisés et inconnue).

---

[2] Il s'agit d'une analyse a priori « légère », qui ne se place pas au niveau de la recherche en didactique, nous ne mettons en œuvre que les outils précédents

Cette modélisation amène à écrire une équation, à condition que les formules des aires de triangles soient mobilisables : il y a un premier jeu de cadres entre le géométrique et l'algébrique, avec un petit travail algébrique pour "arranger" l'équation.

Mais la résolution de cette équation ne se fait pas dans le cadre numérique, la lettre inconnue ne prend pas le statut de variable. Cette "résolution" fait appel au théorème de Pythagore – supposé donc disponible. La mise en fonctionnement du théorème de Pythagore demande une adaptation importante (cf. A3), à la fois changement de point de vue et jeu de cadres : on doit reconnaître et interpréter une propriété géométrique à partir de l'égalité algébrique alors que cette égalité est souvent déduite de la situation géométrique.

Le côté inconnu s'obtient ainsi comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés donnés initialement sont les côtés de l'angle droit.

b) Déroulement

Nous décrivons la vidéo de la séance que l'enseignant a tournée lui-même en plaçant la caméra au fond de sa classe (sans observateur).

Première phase : une recherche individuelle de pistes

L'enseignant propose l'exercice et laisse chercher les élèves environ 4 minutes en répondant tout haut aux questions posées par les élèves. Il s'agit de "chercher des pistes".

Des élèves demandent si on a le droit de faire un dessin – "oui" répond l'enseignant - puis interrogent sur le sens du mot "donnés": est-ce que ces deux triangles "donnés" sont les mêmes ? L'enseignant répond que ces deux triangles sont fixés au départ.

L'enseignant écrit l'énoncé au tableau et fait un dessin (deux triangles) pendant cette première phase de recherche des élèves, puis circule dans les rangs en silence, ou en relançant les élèves de manière neutre ("tu cherches...").

Il reprend tout haut la proposition d'un élève : "on peut leur donner des noms"

Deuxième phase : une mise en commun des pistes un petit peu complétées par l'enseignant

L'enseignant interrompt cette recherche et interroge les élèves collectivement pour recueillir des pistes de travail.

Il doit poser de nombreuses questions : comment traduire l'énoncé ? Quels sont les mots importants ?

Une élève passe au tableau, et indique un codage sur un des triangles dessinés auquel elle rajoute une hauteur : " a " pour le côté, " $a\sqrt{3}/2$ " pour la hauteur.

Le mot équation est lancé et le professeur le reprend au vol : " quelle équation, qu'est-ce qui manque ? "

Des élèves reprennent : " faudrait qu'on connaisse l'aire ", " on n'a pas de données numériques ", " on peut mettre des lettres "...

Le professeur reprend et complète toutes ces idées en demandant " comment mettre x, où mettre x ? ". Mais il n'y a rien encore de précis, seulement des idées lancées par des mots.

Troisième phase : une nouvelle recherche individuelle courte

Puis les élèves cherchent de nouveau et deux minutes après l'enseignant corrige en envoyant un élève au tableau.

Quatrième phase : correction avec un élève au tableau

A partir de ce moment là le professeur reprend la main : il découpe le travail de l'élève au tableau en petites sous-tâches, il ne laisse aucune initiative, allant jusqu'à dicter par moments ce qu'il faut écrire. L'élève n'a plus que les calculs à faire seul.

- Ainsi l'enseignant fait d'abord écrire ce qu'est x (le côté du triangle inconnu) – il dicte une phrase habituelle pour la classe ; puis il demande la formule de l'aire du triangle.
- La formule de l'aire du triangle est écrite pour les trois triangles. L'enseignant ne s'arrête pas aux difficultés algébriques qui apparaissent au tableau, pour écrire l'aire du triangle (division d'une fraction par 2) les traitant comme des étourderies.
- L'enseignant fait écrire ensuite l'équation traduisant l'énoncé, là encore le calcul algébrique est dirigé étroitement, avec des questions à tout le monde pour arriver à simplifier par le facteur numérique $\sqrt{3}/4$. Finalement au bout de cinq minutes depuis le début de cette phase, l'élève au tableau arrive à l'équation : $a^2 + b^2 = x^2$

Et la cloche indiquant la fin de la séance sonne !

Un élève reconnaît pourtant " C'est Pythagore ", et l'enseignant donne à finir l'exercice à la maison. Deux jours après aucun élève n'a fini l'exercice, aucun élève n'arrive à la faire, l'indication " C'est Pythagore " s'est perdue même pour son auteur !...

c) Différences et précisions entre analyses a priori et déroulements : quelles activités pour les élèves ?

Plusieurs différences ou précisions apparaissent entre les prévisions et la vidéo et assez vite plusieurs questions se posent pour mieux comprendre.

Non seulement le mot construire mais déjà le mot " donnés " sont ambigus pour les élèves et l'enseignant lève en partie ces ambiguïtés.

La mise en place des découpages nécessaires se fait en deux temps : les élèves ont à chercher seuls la démarche d'abord, sans le faire jusqu'au bout (voire pas du tout pour certains).

Après 6 minutes de recherches, ce qui ne peut permettre à aucun élève de troisième d'aller très loin, le professeur prend en main le découpage en imposant de petites étapes grâce à la correction par un élève au tableau.

Une des très (trop ?) grandes difficultés prévisibles de l'exercice est donc finalement supprimée.

Les intermédiaires ont été pressentis par quelques élèves, l'enseignant donne l'indication à tout le monde : ce n'est plus une initiative à prendre.

Enfin le jeu de cadres géométrique/algébrique est pris en main par l'enseignant qui indique toutes les étapes. De plus le travail algébrique n'est pas approfondi, les erreurs ne sont pas reprises mais seulement corrigées très rapidement.

Finalement les activités des élèves diffèrent selon leur investissement, notamment dans les quatre premières minutes. A minima, un élève commencera à travailler au moment de la correction, en recopiant le tableau, présenté comme un lieu de savoir (cf. Robert et Vandebrouck, 2003). D'autres pourront effectuer les calculs en même temps que l'élève au tableau, en résolvant ainsi seuls des petites tâches séparées, l'enseignant ayant pris en main la structuration et la démarche d'ensemble. Quelques élèves auront suivi cette démarche sur laquelle cependant l'enseignant n'a pas eu le temps de revenir.

Certaines différences correspondent ainsi à des difficultés imprévues des élèves, que l'enseignant repère au moment où les élèves parlent et qu'il retient et approfondit plus ou moins selon les cas.

D'autres correspondent à la gestion particulière de cet enseignant et à l'organisation des activités des élèves qu'il induit. Nous allons préciser encore ce dernier point dans le paragraphe suivant.

d) Ce qu'en dit l'enseignant

Pour en savoir plus nous avons interrogé cet enseignant sur cette vidéo (un exemple de questionnaire, avec notamment les réponses de cet enseignant, figure dans le document pour la formation n°1, Beziaud et al.).

Le problème du temps est évidemment apparu d'abord, d'autant plus que cette activité, improvisée, a été rajoutée par l'enseignant à un emploi de temps déjà très chargé.

Cependant ce professeur a indiqué que le déroulement de l'exercice, mis à part la fin (l'interruption par la cloche) est très habituel. Les quatre phases, le fait de permettre à tous les élèves, même faibles, de faire " quelque chose " assez rapidement, la correction impeccable au tableau avec un élève " secrétaire ", sont autant de constantes que cet enseignant revendique.

Ces habitudes peuvent jouer pour faire apprendre les mathématiques aux élèves grâce à des répétitions à divers niveaux, pas nécessairement explicites : démarches, rigueur de l'écriture, formats des démonstrations[3].

De ce fait, ce professeur envisage peu d'alternatives finalement à ce déroulement qui s'intègre dans des pratiques stables et cohérentes : il pense que ses choix optimisent ses marges de manœuvre réduites par les contraintes de tous ordres qui pèsent sur l'enseignement des mathématiques et prédéterminées par sa personnalité. La contrainte du temps est une des plus pesantes, renforcée par les réductions d'horaires et la volonté de finir les programmes, eux peu allégés. L'hétérogénéité des classes est aussi ressentie comme une contrainte puisqu'elle amène à ménager des activités différentes pour que chacun puisse travailler, et cela peut aller jusqu'à des contradictions.

[3] Une autre vidéo révèle ainsi l'habitude de faire encadrer systématiquement les hypothèses et la conclusion avec deux couleurs différents.

3) Caractéristiques de déroulements et alternatives

Nous travaillons à la suite de cette activité sur les déroulements et les alternatives qu'on peut concevoir sur l'exercice précédent.

a) A propos de déroulements

Les caractéristiques des déroulements que nous retenons sont liées aux analyses précédentes.

- On note les formes de travail des élèves, individuelle, en petits groupes, au tableau...
- On étudie les accompagnements de l'enseignant globalement et dans chaque phase *(analyse des discours)* :
  - organisation globale : pour un exercice ou une activité, quelle est la préparation du travail, y a-t-il des rappels ou des découpages en sous-tâches, quelles sont les interventions en cours de travail (notamment les aides et les bilans), quels types d'échanges l'enseignant organise-t-il, de quelle nature sont les corrections qu'il propose, quelles synthèses sont faites, quelle utilisation du tableau adopte-t-il, quelle est la nature des enrôlements individuels et collectifs, de quelle manière gère-t-il les transitions.
  - localement (dynamique fine) : pendant une activité des élèves, on décrit les aides - relances, indications ou explications (à quel moment ?), questionnements, évaluations ou validations, encouragements.

b) Un travail sur les alternatives

Deux types d'alternatives se présentent, qui permettent d'utiliser ce qui précède : sur l'énoncé et sur la gestion.

Ce sont plutôt des énoncés plus découpés qui sont envisageables ici.

Par exemple on peut n'introduire qu'une inconnue en donnant des valeurs numériques aux deux côtés donnés (*Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux de côté respectivement 3 et 4*).

On peut aussi supprimer des difficultés algébriques en travaillant sur des carrés (*Construire un carré d'aire égale à la somme des aires de deux carrés donnés*).

On peut expliciter la consigne " construire " : *On donne deux triangles équilatéraux de côtés a et b. Donner une construction géométrique du côté d'un triangle équilatéral dont l'aire est égale à la somme des aires des deux triangles donnés.*

On peut enfin introduire des étapes : Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux donnés de côtés respectifs a et b. On pourra exprimer l'aire du triangle à construire en fonction de a et b et chercher une construction du côté de ce triangle.

Remarquons que dans tous ces énoncés l'utilisation du théorème de Pythagore reste de l'ordre du disponible !

Sur la gestion, nous envisageons une classe virtuelle.

Une première alternative correspond au *temps de recherche* laissé aux élèves : il apparaît que si on veut laisser chercher les élèves et les faire travailler sur l'utilisation du théorème de Pythagore il faut disposer de plus de temps. Rappelons que notre enseignant avait improvisé cet exercice supplémentaire...

. Une autre alternative est de faire travailler les élèves *en petits groupes*, ce qui peut permettre à l'enseignant d'intervenir moins rapidement (au moins collectivement).

Un autre type d'alternative concerne les aides de l'enseignant et le découpage à introduire. On peut envisager de laisser plus d'initiatives aux élèves, si ceux-ci y sont habitués : une gestion ne s'improvise pas et demande des habitudes quelle qu'elle soit !

c) En guise de bilan : un retour plus outillé à la complexité des choix d'un enseignant.

Mais contenus et gestion ne sont pas indépendants, de plus l'organisation globale de l'enseignement du professeur entre aussi en compte.

> *L'inscription dans un scénario global conditionne ainsi le bénéfice de tel ou tel énoncé, travaillé de telle ou telle manière, notamment selon la place par rapport à l'exposition des connaissances : les dynamiques entre cours et exercices entrent en jeu, ainsi que les mises en relation entre connaissances.*

En fait, presque tout énoncé peut être découpé pendant la classe. Un énoncé très découpé peut être travaillé de manière autonome par les élèves.

Il est donc nécessaire de revenir à un moment à la globalité de l'enseignement et à la complexité qui est au cœur des choix des enseignants : il est indispensable de faire intervenir non seulement le couple {énoncé/déroulement} mais de l'inscrire dans les contraintes institutionnelles (mathématiques, programmes et horaires), sociales (nature de la classe, habitudes de l'établissement), personnelles (conceptions du métier).

Ainsi le type de discussion qu'on peut avoir en formation, intégrant les outils introduits ci-dessus, est le suivant : par exemple si on veut rendre disponible un théorème, c'est-à-dire si c'est envisageable compte tenu des programmes et de la classe, un énoncé très découpé ou une gestion en cours dialogué peuvent restreindre les initiatives au démarrage, et donc ne pas servir l'objectif. Mais si un enseignant n'aime pas se taire en classe, parce qu'il considère qu'il faillit à sa mission, alors il n'est pas envisageable d'introduire de travail en petits groupes...

Conclusion

Un des prolongements possibles de ces activités de formation peut consister à proposer à des enseignants de choisir un des textes ci-dessus pour sa classe et d'exposer ensuite ce qui s'est passé en explicitant les choix. Cela permet à la fois de favoriser une appropriation des outils et de mutualiser des expériences en faisant découvrir les régularités et les diversités des pratiques enseignantes.

Références

GRAF TOULOUSE ET PAF VERSAILLES (2002) Deux expériences réalisées en formation continue autour d'énoncés de problèmes de mathématiques en classes scientifiques, *Cahier de Didirem,* n°41, IREM, Université paris 7

LATTUATI M., ROBERT A., PENNINCKX J. (1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée, un point de vue didactique*, Ellipses.

ROBERT A (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 21/1-2, pp. 57- 80

ROBERT A. ET ROGALSKI M. (2002) Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe, *Petit x n°60*, 6-25

ROBERT A. (2003) Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations individuelles introduites au démarrage des exercices cherchés en classe *Petit x n°62*, 61-71.

ROBERT A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation *Petit x n°63 pp7-29*

ROBERT A. ET ROGALSKI M. (2004) Problèmes et activités d'introduction, problèmes transversaux et problèmes de recherche au lycée *Repères IREM n°54 77-103*

ROBERT A. ET VANDEBROUCK F. avec la collaboration de P. BEZIAUD ET D. DUMORTIER (2001) Recherches sur l'utilisation du tableau par des enseignants de mathématiques en seconde pendant des séances d'exercices, *Cahier de Didirem* n°36, Université Paris 7

ROBERT A. ET VANDEBROUCK F. (2003) Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde *Recherches en didactique des mathématiques,*

RODITI E. (2004) Le théorème de l'angle inscrit au collège. Analyse d'une séance d'introduction et perspectives pour la formation, *Cahier de Didirem* n°45, Université Paris 7

VANDEBROUCK F. (2002) Utilisation du tableau et gestion de la classe de mathématiques : à la recherche d'invariants dans les pratiques d'enseignants *Cahier de Didirem* n°42, Université Paris 7

Des documents pour la formation des enseignants (publiés sous forme de cahiers bleus par l'IREM de Paris 7, Université Denis Diderot)

N°1 (Beziaud P., Dumortier D., Robert A., Vandebrouck F., 2003) Un questionnaire sur l'utilisation du tableau noir en classe de mathématiques (collège et lycée) : portée, limites, perspectives en formations

N°2 (A. Robert, 2003) analyses de vidéo, livret d'accompagnement

N°3 (A. Robert, 2004) : des analyses d'une séance de classe aux analyses de pratiques : perspectives en formation

N°4 (A. Robert et J. Desq, B. Joyeux, N. Terrée, 2004) : scénarios de formation des enseignants de mathématiques du second degré, un zoom sur l'utilisation de vidéo ; un exemple.

N°5 (A. Robert et N. Pouyanne, 2004) : formateurs d'enseignants du second degré : éléments pour une formation.