

UNE NOUVELLE REPRESENTATION EN ARBRE DES EXPRESSIONS ALGEBRIQUES DANS LE MICROMONDE D'ALGEBRE APLUSIX

Hamid CHAACHOUA*, Jana TRGALOVA**,
Christophe VIUDEZ* et Jean-François NICAUD*
*Université Joseph Fourier - MeTAH - LIG Grenoble
** INRP Lyon et MeTAH – LIG Grenoble

Résumé. Une expression algébrique recèle deux aspects : procédural et structural. De nombreuses tâches en algèbre nécessitent la considération de l'aspect structural, comme la factorisation ou la résolution d'équations. Cependant, dans l'enseignement de l'algèbre en France, l'aspect procédural prédomine. La non prise en compte de l'aspect structural d'une expression se manifeste dans de nombreuses erreurs commises par les élèves dans les manipulations algébriques. La représentation de l'expression sous forme d'un arbre permet d'en montrer la structure. Dans ce texte, nous présentons la version « arbre » du logiciel Aplusix qui permet de représenter les expressions algébriques dans les registres usuel et arbre et un scénario d'apprentissage conçu dans le but d'aider les élèves à comprendre la structure des expressions algébriques.

Mots-clés. Algèbre, registre de représentation, arbre, micromonde, apprentissage, aspect structural, aspect procédural.

1. Introduction et problématique

En mathématiques, les notions ne peuvent être manipulées qu'à travers des représentations sémiotiques comme le registre du langage naturel, celui des écritures numériques, des représentations graphiques. Comme le précise Duval (1993), « *les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système (sémiotique) de représentation qui a ses propres contraintes de signifiante et de fonctionnement* » (p. 39). Dans cette approche, la conceptualisation des notions mathématiques nécessite la manipulation de plusieurs registres pour un même objet mathématique permettant ainsi de le détacher de ses représentations. Duval (ibid.) distingue trois types d'activités :

- la *formation* d'une représentation identifiable répondant à des règles données. Ces règles permettent d'une part d'identifier et de reconnaître la représentation, et d'autre part en permettent des traitements (Duval, 1995). Par exemple, dans le registre numérique, les deux expressions $\frac{3^2}{2}$ et $(\frac{3}{2})^2$ représentent deux nombres différents.
- le *traitement* d'une représentation dans son propre registre. Il consiste à transformer une représentation à l'intérieur du registre. Par exemple, l'expression $(\frac{3}{2})^2$ peut être transformée en $\frac{3^2}{2^2}$.
- la *conversion* d'une représentation d'un registre dans un autre registre. Duval souligne que cette activité joue un rôle essentiel dans la conceptualisation. En effet, le jeu sur les registres

sémiotiques, permettant au sujet d'identifier une représentation, de la traiter à l'intérieur d'un même registre ou de la convertir dans un autre registre engage la distanciation entre le signe et l'objet, et construit la signification en mathématiques et c'est la raison pour laquelle « *la compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion* » (Duval, 1993, p. 51).

Nous nous sommes appuyés sur ces hypothèses didactiques pour faire évoluer le logiciel Aplusix¹. En effet, dans la première version du logiciel, seul le registre « usuel » a été implanté. Ce registre permet la formation des expressions algébriques et leur traitement. Dans le cadre du projet européen ReMath², nous avons introduit un nouveau registre de représentation : arbre. L'introduction de ce nouveau registre a permis de prendre en charge les trois types d'activités décrites ci-dessus.

Après avoir montré l'intérêt du registre arbre dans l'enseignement (paragraphe 2), nous présenterons comment le logiciel Aplusix a introduit ce registre de représentation en arbre (paragraphe 3), avec des illustrations de types d'activités possibles dans ce registre (paragraphe 4). Ensuite, nous présenterons quelques résultats des premières expérimentations que nous avons réalisées (paragraphe 5). L'objectif principal de ces expérimentations est de montrer la possibilité d'intégrer le registre arbre de Aplusix dans l'enseignement des mathématiques. Le scénario a été construit dans le but d'aider les élèves à comprendre la structure des expressions algébriques.

2. Intérêt du registre arbre dans l'enseignement

Sfard (1991) propose de distinguer deux conceptions principales pour une expression algébrique : conception structurale qui considère l'expression comme un objet, et conception opérationnelle ou procédurale, qui considère l'expression comme un processus. Elle souligne que, dans une activité mathématique, on articule ces deux conceptions en fonction des besoins. Selon le registre de représentation utilisé, l'une de ces deux conceptions peut être favorisée.

Ainsi, le registre usuel favorise la conception procédurale, et à défaut de la conception structurale, celle-ci peut être à l'origine des erreurs typiques liées à la lecture linéaire de gauche à droite (par exemple : $3+2 \times 5 = 5 \times 5 = 25$ ou $7-3(x+1) = 4(x+1)$).

La distinction entre ces deux conceptions est présentée³ dans un document de ressources, pour accompagner les nouveaux programmes, intitulé « Du numérique au littéral au collège »⁴. Ce document précise :

« Les expressions algébriques sont introduites et très largement utilisées au collège sous leur aspect « procédural », pour formaliser, pour mathématiser un programme de calcul [...]. Les élèves sont alors confrontés au type de tâches suivant : évaluer l'expression algébrique lorsqu'on donne aux variables qui y figurent des valeurs numériques. Le qualificatif « procédural » résume le caractère à la fois « dynamique, séquentiel et détaillé » que revêt l'expression algébrique. Cet aspect procédural est également sollicité lors d'un test d'égalité comportant un ou deux nombres indéterminés (programme de 5e). Les règles de priorités opératoires sont largement utilisées. » (Du numérique au littéral au collège, 2008, p. 5)

Ce document insiste sur le fait que dans de nombreuses tâches, il est nécessaire de considérer les expressions algébriques comme des objets avec lesquels on peut faire des calculs sans substituer les

1 <http://www.aplusix.com/fr/index.html>

2 ReMath (Representation in Mathematics with Digital Media), Project number IST4-26751, <http://remath.cti.gr/>.

3 En termes d'aspects procédural et structural

4 Document disponible au : <http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe.html>

lettres par des nombres et que c'est donc l'aspect structural qui est alors sollicité. Cet aspect est décrit comme suit : « le qualificatif « structural » résume le caractère à la fois « statique, instantané et intégral », qui s'oppose terme à terme au caractère « dynamique, séquentiel et détaillé » évoqué plus haut » (ibid.).

Ainsi, l'expression $2(x+3)+6$ doit être vue comme une somme en référence à l'assembleur de plus haut niveau figurant dans l'expression. Or, la lecture ou la formation de cette expression dans le registre usuel (RU) met en avant chez les élèves l'opération de multiplication (2 par $x+3$) et ensuite l'addition avec le terme 6. Il y a ainsi, une congruence sémantique au sens de Duval (1995) entre l'écriture d'une expression dans le registre RU et l'aspect procédural de cette expression.

En revanche, le registre arbre (RA) favorise la conception structurale. En effet, la « lecture » de haut en bas met en évidence la structure de l'expression. Ainsi dans (Figure 1) on regardera l'expression comme la somme de deux termes, $2(x+3)$ et 6, le premier terme étant un produit etc.

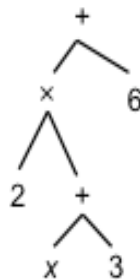


Figure 1. L'expression $2(x+3)+6$ représentée sous forme d'arbre.
L'opérateur du plus haut niveau donne la forme de l'expression, ici la somme.

Chaque registre de représentation montre des facettes différentes de l'expression algébrique et permet de l'appréhender différemment : la lecture d'une expression dans le registre RU montre l'aspect procédural, et sa lecture dans le registre RA montre l'aspect structural. D'où l'importance de disposer de plusieurs registres de représentation d'une expression algébrique permettant de travailler ces deux aspects d'une expression algébrique.

L'analyse des programmes et des manuels montre une évolution dans les nouveaux programmes du collège de 2008 dans le sens de la prise en compte de ces deux aspects, comme nous l'avons dit plus haut. Ces programmes préconisent l'usage de plusieurs registres pour développer ces deux aspects d'une expression algébrique, comme le précise le document d'accompagnement⁵ :

« Plusieurs activités peuvent aider les élèves à faire la distinction entre ces deux aspects d'une expression algébrique :

- la description en **langue naturelle**⁶ d'une expression algébrique conduit à la considérer sous son aspect « structural » : par exemple, énoncer que $(3x-1)(x^2+2)$ est le **produit** d'une différence et d'une somme, différence du produit de 3 et de x et 1 et somme du carré de x et de 2 [...]. Le premier nom de la phrase ainsi construite donne la forme de l'expression (il n'est donc pas indispensable de la produire entièrement). [...]

- L'usage d'un **arbre** : la réalisation de l'arbre s'appuie sur les priorités opératoires et l'ordre des calculs à effectuer (aspect « procédural »), mais l'assembleur de plus haut niveau donne la forme de l'expression (aspect « structural ») » (p. 5).

Comme on peut le voir, les programmes suggèrent le registre arbre pour développer les deux aspects d'une expression algébrique : procédural et structural.

⁵ Op. cit

⁶ C'est nous qui soulignons.

3. Les registres de représentation dans Aplusix

3.1. Le logiciel Aplusix

L'environnement Aplusix (Nicaud *et al.*, 2004) est un EIAH⁷ pour pratiquer l'algèbre élémentaire : les transformations d'expressions algébriques, les résolutions d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations, ou encore les résolutions de problèmes par la mise en équation, au lycée et au collège. Il est composé, principalement :

- d'un micromonde d'édition des expressions algébriques, éditeur riche et souple, offrant diverses rétroactions syntaxiques et sémantiques ;
- d'un module de génération automatique d'exercices comportant plusieurs centaines de patrons d'exercices ;
- de modules pour l'enseignant (éditeur d'exercices et de problèmes, administrateur des comptes).

Dans Aplusix, l'objectif de l'élève consiste à résoudre, comme sur le papier, des exercices d'algèbre en produisant, ligne de calcul après ligne de calcul, les différents pas de calcul en suivant son raisonnement algébrique. Le cadre mathématique offert pour ce travail est la résolution par équivalence : l'élève doit, à chaque étape, donner une expression algébrique équivalente à l'expression précédente. Il a toute liberté, comme sur le papier, pour le choix de l'expression algébrique de chaque étape et de la forme de son raisonnement (linéaire ou avec des retours en arrière).

Le logiciel propose trois modes pour les activités : *entraînement* où des rétroactions sont fournies à l'élève pendant la résolution, *test* qui se déroule sans rétroactions et *autocorrection* qui permet à l'élève d'accéder à l'évaluation de ses résolutions pendant les tests et de les corriger avec les mêmes rétroactions qu'en mode entraînement.

Deux expressions littérales éditées dans Aplusix sont considérées comme équivalentes si elles dénotent le même polynôme. La présence d'une sémantique dans Aplusix permet de fournir des rétroactions assez riches à l'élève sur l'exactitude de ses pas de calcul. Ainsi, dans le mode *entraînement* trois types de rétroactions sont fournies offrant à l'élève la possibilité de voir si :

- chacune de ses transformations conserve la dénotation (Drouhard, 1992), cf. figure 2 ;
- son expression finale est bien celle attendue par l'enseignant ;
- chacune de ses expressions est mathématiquement bien formée (nombre de parenthèses ouvrantes correspondant au nombre de parenthèses fermantes, opérateurs binaires utilisés comme tels etc.).

Ces trois types de rétroactions⁸ sont paramétrables par l'enseignant qui peut les accepter systématiquement, les limiter à un certain nombre de demandes de vérifications par l'élève ou les interdire (ce qui est le cas par défaut en mode *test*).

Au cours de la conception d'Aplusix, les auteurs se sont efforcés de proposer une représentation des expressions algébriques utilisée à l'écran aussi fidèle que possible à la représentation usuelle de ces expressions, telle que chacun peut la donner sur le papier ou au tableau (cf. Figure 2). Cette représentation utilise le registre usuel de l'algèbre.

⁷ Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain

⁸ Pour concevoir et implémenter ces fonctionnalités, les didacticiens et les informaticiens ont travaillé en collaboration (Bouhineau *et al.* 2005).

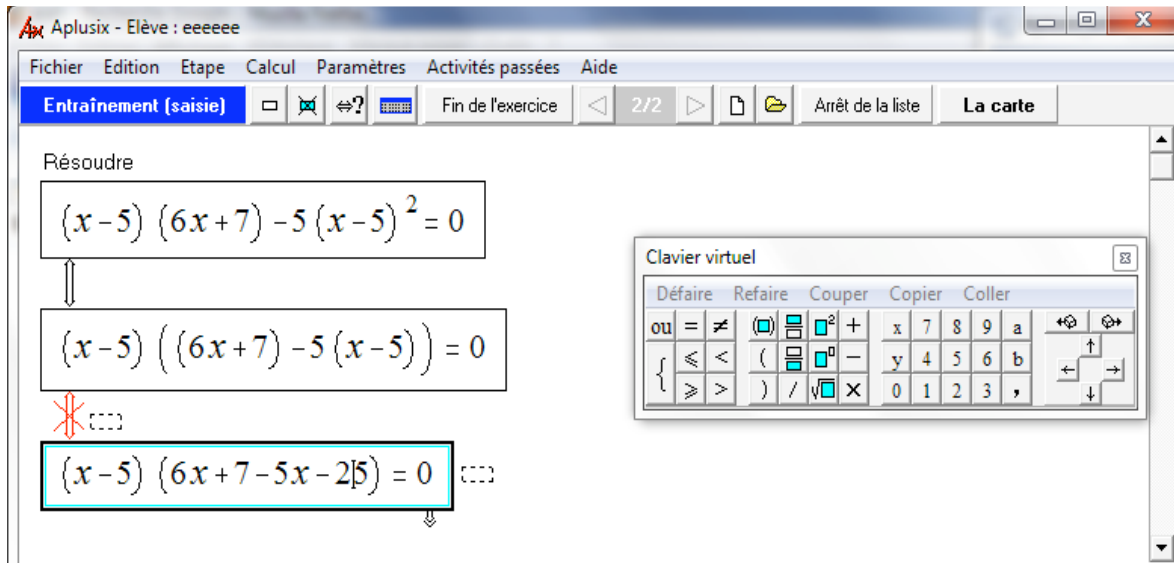


Figure 2. Représentation dans Aplusix des expressions algébriques dans le registre usuel.

Ce registre permet deux types d'activités : la formation des expressions et leur traitement.

Afin de permettre de développer des activités de conversion, un deuxième registre a été ajouté : le registre arbre (Bouhineau *et al.*, 2007a, b). Les raisons du choix de ce registre sont présentées dans le paragraphe 3.2.

Notons qu'un troisième registre existe dans Aplusix, celui de la langue naturelle, qu'on notera RLN, mais il n'est pas contrôlé et évalué par le logiciel.

3.2. Conception de la représentation des expressions en arbre

Les premières questions soulevées lors de la phase de spécification ont été primordiales : quel genre d'arbres voulons-nous introduire dans Aplusix ? Est-ce les arbres internes utilisés pour représenter les expressions algébriques ? Y a-t-il un lien (fort) entre ces arbres et la représentation usuelle déjà utilisée dans Aplusix ? Doit-on pouvoir éditer ces arbres ? Les expressions algébriques incomplètes ou malformées ont-elles une représentation en arbre ? Existe-t-il des arbres incomplets ou malformés ? Ces arbres ne sont-ils qu'une nouvelle façon d'afficher des expressions algébriques ou sont-ils des objets à part entière ?

Quelques questions avaient un caractère plus mathématique : quelle est l'arité dans la représentation en arbre des nœuds représentant les opérateurs associatifs « + » et « × » et l'opérateur « - » ? Les parenthèses sont-elles représentées dans l'arbre ? Les parenthèses n'appartiennent pas à l'ensemble des opérateurs mathématiques, elles sont nécessaires dans la représentation usuelle pour signifier la structure des expressions, même si des règles de priorité entre opérateurs permettent de s'en affranchir souvent. Dans les arbres, la structure des expressions étant explicite, les parenthèses ne sont pas nécessaires.

Un long processus de collaboration entre informaticiens et didacticiens de notre équipe⁹ a abouti à la réponse suivante : les arbres sont des objets à part entière du micromonde, ils correspondent aux arbres abstraits de l'informatique, sur lesquels l'utilisateur a toute possibilité d'édition. Selon différents modes de paramétrage, les arbres d'expressions algébriques peuvent être complètement développés ou semi développés. Cette réponse devait bien évidemment respecter les principes

⁹ Equipe de recherche MeTAH du laboratoire LIG, <http://www.noe-kaleidoscope.org/group/metah/>.

fondateurs du logiciel afin de ne pas compromettre la cohérence globale de celui-ci (Trgalova et Chaachoua, 2009).

Plus précisément, sur la forme, dans leur plus grande généralité, les arbres retenus associent la représentation usuelle des expressions en deux dimensions avec une représentation purement abstraite d'arbres : les feuilles de l'arbre peuvent être des expressions algébriques en représentation usuelle, les nœuds internes étant des symboles d'opérateurs. Deux paramétrages permettent de limiter les nœuds internes à l'emploi d'opérateurs mathématiques valides et les feuilles aux nombres ou aux variables. Le premier mode est appelé *contrôlé* (il comporte un étayage garantissant la définition d'arbres mathématiques), le second *développé* (au sens où la structure en arbre reprenant la structure algébrique des expressions est complètement développée ou pas). Trois formes de représentations d'arbres sont ainsi définies :

- la représentation *arbre libre* : arbre en mode développé - non contrôlé, où on peut éditer librement l'arbre et écrire librement dans les nœuds ;

- la représentation *arbre contrôlé* : arbre en mode développé - contrôlé, l'arbre d'une expression algébrique est ici complètement développé ; on ne peut utiliser que des opérateurs connus avec un nombre correct d'arguments, et

- la représentation *mixte* : arbre en mode non développé – contrôlé (cf. Figure 3). Dans ce cas, quand la souris s'approche d'une feuille représentant une expression algébrique non élémentaire, un \oplus apparaît (Figure 3a) pour développer cette expression sous forme d'arbre, le développement s'effectue avec un niveau d'opérateur (sauf si précédemment, l'arbre avait été déjà développé, auquel cas, on réinstalle la forme développée précédente), le résultat est un arbre de hauteur 1 ayant comme nœud l'opérateur de plus haut niveau de l'expression initiale et comme fils ses opérands. Un mécanisme analogue permet de (re)compacter l'arbre en une expression algébrique en représentation usuelle (Figures 3b et 3c).

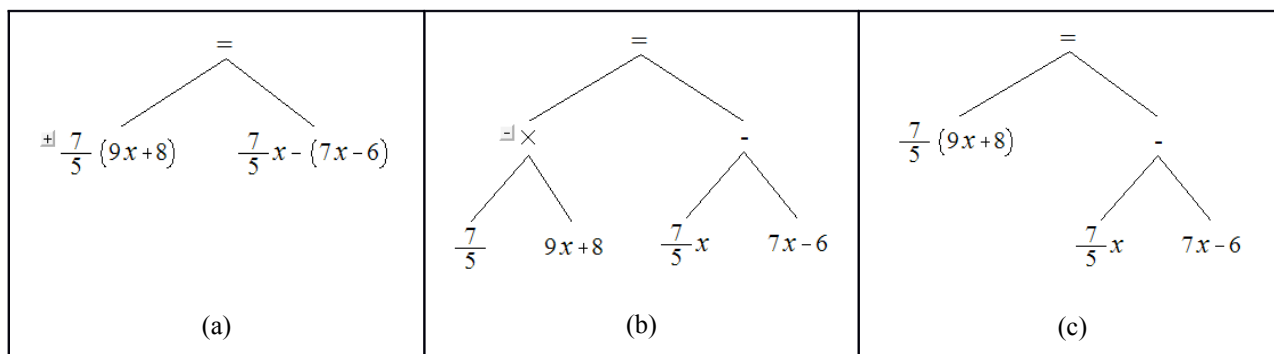


Figure 3. En mode mixte, l'arbre est partiellement développé et il peut se développer ou se réduire en utilisant les boutons « + » et « - ».

En ce qui concerne l'édition, dans les feuilles des arbres mixtes, des expressions algébriques représentées en représentation usuelle, l'édition naturelle est pratiquée. Pour les autres types d'arbres, une édition spécifique aux arbres est définie. Celle-ci dépend du mode *contrôlé* ou *libre*. Dans le mode libre, tous les arbres sont possibles, sans vérification de la validité mathématique du nom des opérateurs ou de leur arité. Cette édition comporte l'ajout, la suppression d'un père ou d'un fils, la sélection, la copie d'un sous arbre, le changement du label d'un nœud, le tout sous une forme aussi facile à utiliser que possible, en suivant les mêmes principes d'édition libre, intuitive que pour

l'édition des expressions algébriques dans leur représentation usuelle. Dans le mode contrôlé, une vérification est effectuée lors de la saisie des labels de nœud pour garantir leur existence mathématique et gérer leur arité. Pour les aspects mathématiques, visibles dans le mode contrôlé seulement, les réponses à nos questions portent sur l'arité minimum des opérateurs n-aires (ils sont d'arité minimum 2), sur le sens de l'opérateur « - » et son arité (les deux opérateurs *différence* et *opposé* sont possibles), et sur l'absence de parenthèses.

L'introduction du registre arbre dans Aplusix permet donc à l'élève de choisir entre 4 modes de représentation : *représentation usuelle*, *représentation arbre libre*, *représentation arbre contrôlé* et *représentation mixte*.

A chaque étape l'élève peut passer d'une représentation à l'autre. De plus, il est possible d'afficher, pour une expression donnée exprimée dans une représentation, une deuxième représentation simultanément sur la fenêtre, en utilisant la fonctionnalité « Seconde vue » du logiciel (cf. Figure 4). Quand l'élève modifie l'expression dans la représentation de départ, cette modification est prise en compte automatiquement dans la deuxième. Le passage d'un mode de représentation à un autre permet de faire des conversions entre registres de façon automatique.

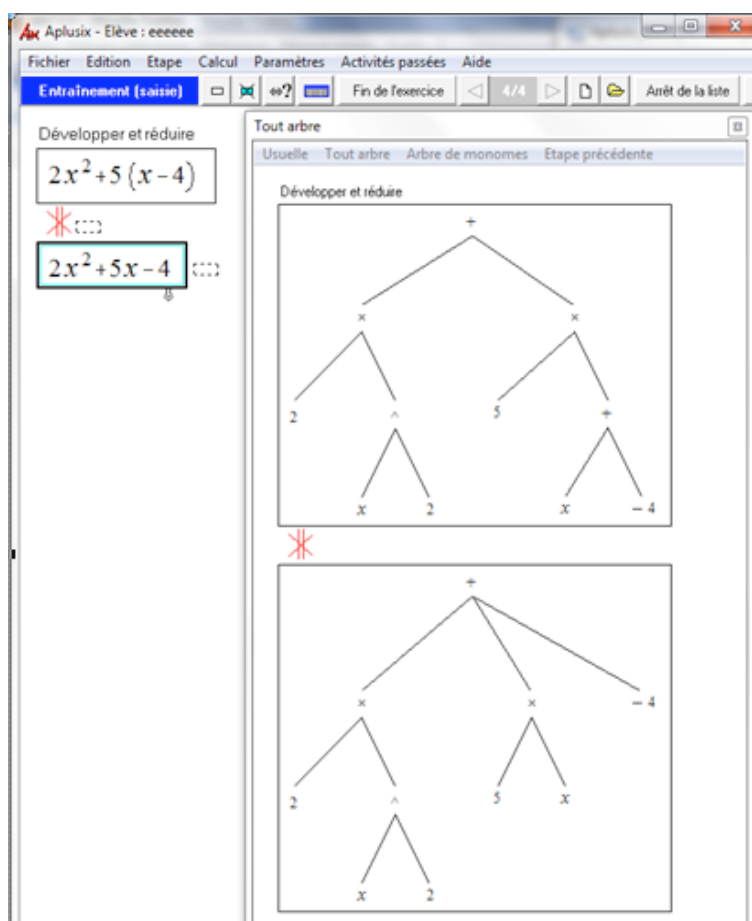


Figure 4 . Un pas de calcul dans le registre usuel sur la feuille de calcul et dans le registre « arbre » dans la seconde vue.

Le développement de ce registre a été fait pour permettre la viabilité dans Aplusix des trois types d'activités présentés plus haut (paragraphe 1) : formation, traitement et conversion. En particulier, des tâches de conversion entre registres usuel et arbre ont été implantées dans le logiciel permettant à l'enseignant, grâce à l'éditeur d'exercices, de construire des activités pour les conversions des expressions algébriques entre les registres suivants : usuel vers arbre, arbre vers usuel, langue naturelle vers usuel ou arbre.

4. Types d'activités possibles dans le registre arbre dans Aplusix

Nous présentons ci-dessous des utilisations possibles de ce nouveau registre dont certaines ont été expérimentées dans des classes.

4.1. Explorer l'aspect structural d'une expression numérique

Il s'agit de comprendre la structure d'une expression numérique et plus précisément d'explorer les priorités des opérations sans la convention des parenthèses. Cette exploration peut être faite dès le début du collège et avant l'introduction des expressions algébriques. Deux types d'activités peuvent être proposés :

- a) *Activités de conversion entre registres RU et RA*

Exemple. On demande d'écrire sous forme d'arbre l'expression $2 \times (5 + 4 \times 6) + 3$ (cf. Figure 5).

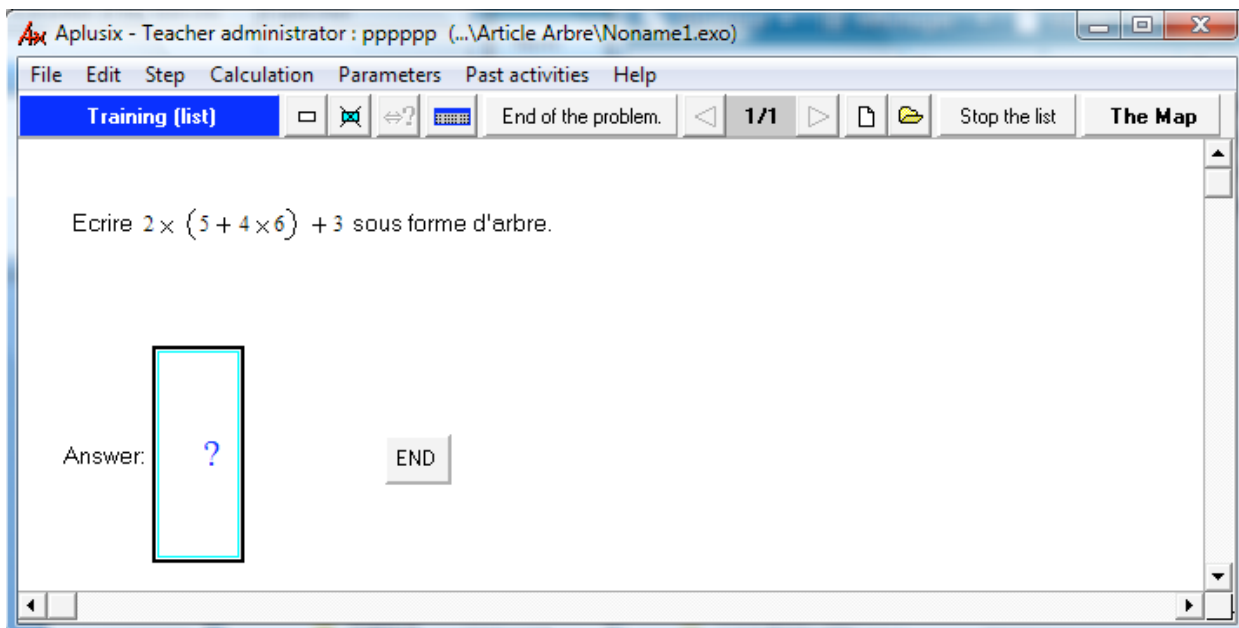


Figure 5. Exemple de conversion du registre RU au registre RA.

On peut choisir deux modes pour la résolution de l'exercice : mode contrôlé ou mode libre. La figure 6 montre trois étapes de la résolution de l'exercice. La production de chaque étape nécessite une analyse de la structure de l'expression.

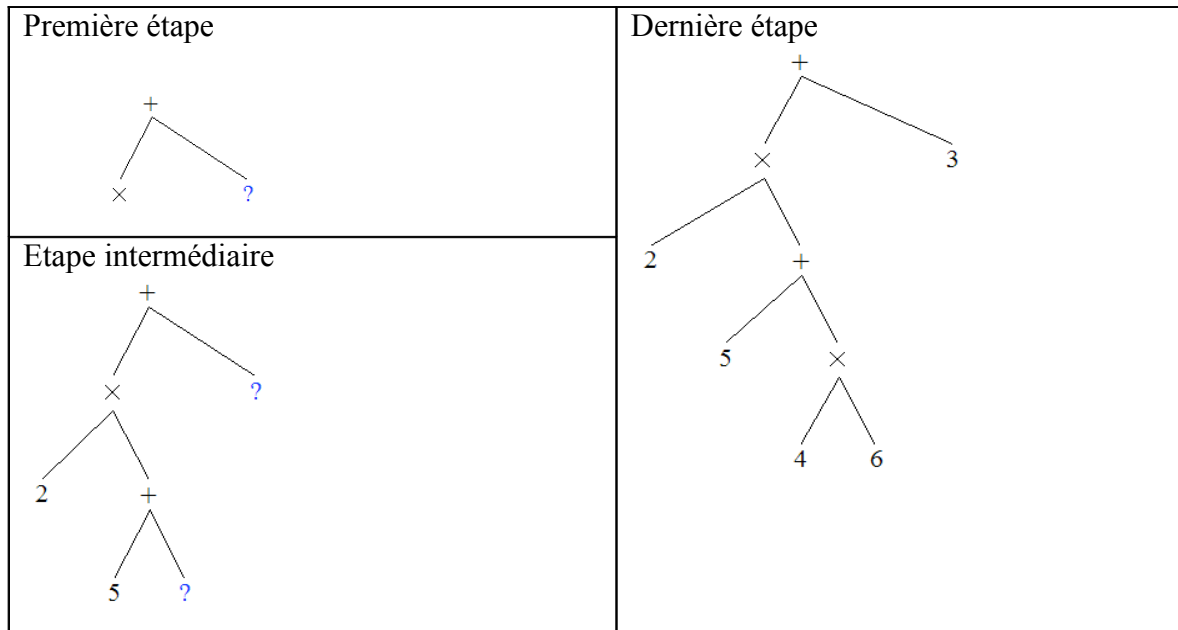


Figure 6. Extrait de trois étapes de résolution de l'exercice.

- b) Compléter une expression dans un registre pour qu'elle soit égale à l'expression donnée dans un autre registre.

Il s'agit des deux registres RU et RA (cf. Figure 7). Ce type d'activité a été expérimenté par des équipes italiennes (Maffei et Mariotti, 2010) dans le cadre du projet ReMath dont les analyses sont en cours.

Exemple

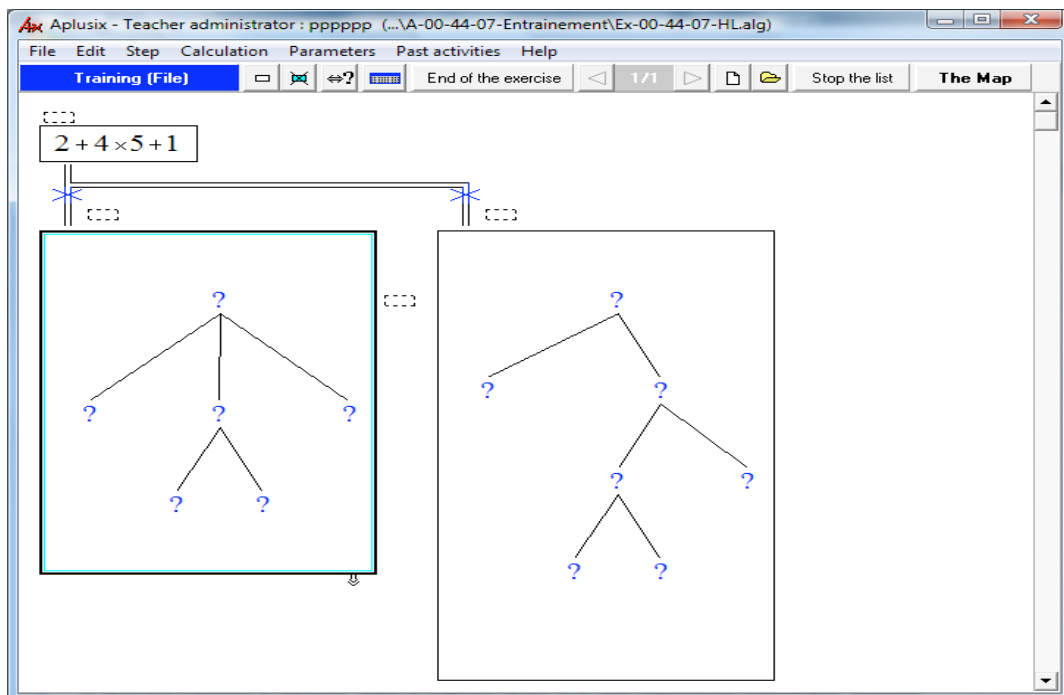


Figure 7. Exercice dans lequel la consigne est « Remplacer les points d'interrogation dans les arbres de manière à obtenir des expressions équivalentes à l'expression $2+4 \times 5+1$ donnée ».

Dans cet exemple, l'élève doit compléter les « ? » par des opérateurs et des nombres. La validation de la réponse sera faite par la rétroaction du logiciel en indiquant l'équivalence avec la première étape. Deux développements en arbre sont proposés à l'élève :

- le premier développement propose une lecture de l'arbre comme somme de trois termes dont le second est un produit de deux facteurs qui peut se traduire à l'aide des parenthèses par $2+(4 \times 5)+1$.
- le deuxième développement propose une lecture de l'arbre comme somme de deux termes dont le second est également une somme de deux termes qui peut se traduire à l'aide des parenthèses par $2+((4 \times 5)+1)$.

4.2. Calculer une expression numérique dans le registre arbre

L'activité consiste à calculer dans le registre RA une expression numérique donnée initialement dans le registre RU. L'expression de départ peut contenir différentes opérations avec éventuellement des parenthèses. Pour ce type d'activité, on peut utiliser la seconde vue en RU pour faire visualiser à l'élève la traduction de ses actions dans RA. On peut proposer ce type d'activité dès le début du collège, avant l'introduction des expressions algébriques.

Exemple

L'élève doit calculer $2(5-2)+(3+1)/2$ dans le registre arbre. Les calculs sont faits à gauche en plusieurs étapes. A droite, la seconde vue affiche en RU l'étape active et l'étape précédente (cf. Figure 8).

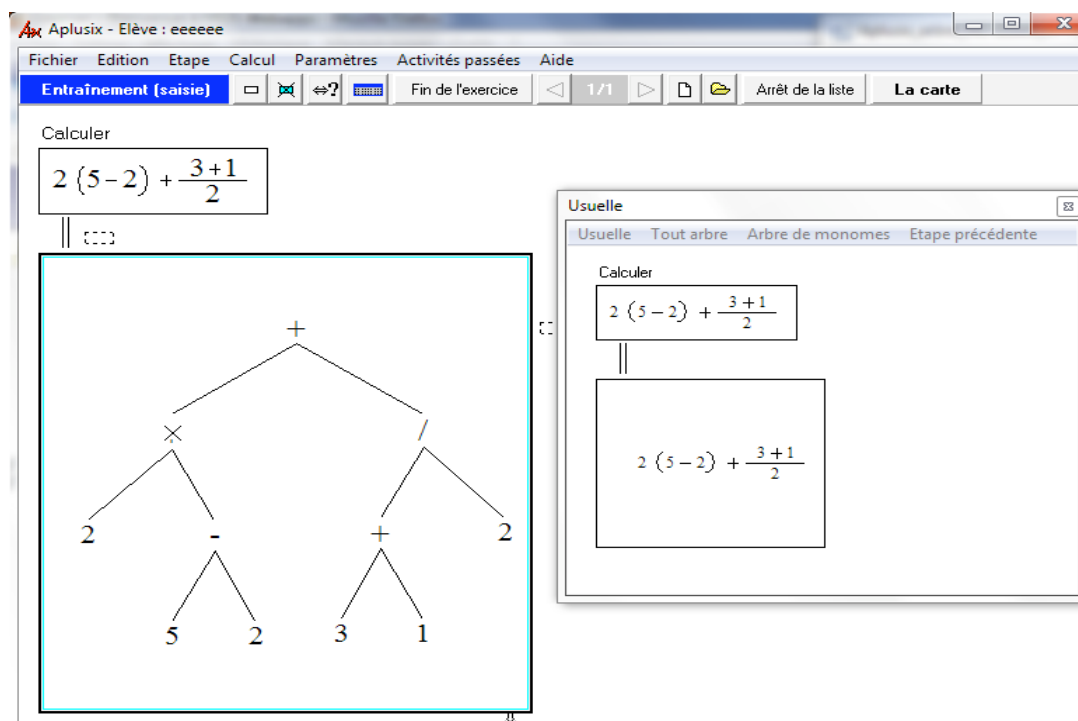


Figure 8. Calcul d'une expression numérique dans le registre arbre avec seconde vue en registre usuel.

A la troisième étape, l'élève effectue, dans le registre arbre, deux calculs partiels $5-2$ et $3+1$. Ces deux opérations sont représentées à droite dans le registre usuel (cf. Figure 9).

The screenshot shows the Aplusix software interface. The main window displays two algebraic trees. The top tree has a root node 'x' with children '2' and '-'. The '-' node has children '5' and '2'. The right child of 'x' is a division node '/' with children '+' and '2'. The '+' node has children '3' and '1'. Below this tree is a smaller tree with a root node '+' and children 'x' and '/'. The 'x' node has children '2' and '3', and the '/' node has children '4' and '2'. To the right, a 'Usuelle' (Usual) register window shows the expression $2(s-2) + \frac{3+1}{2}$ in the top box and $2 \times 3 + \frac{4}{2}$ in the bottom box, with a double vertical bar indicating the simplification step.

Figure 9. Résultat après premiers calculs partiels.

4.3. Réduire une expression algébrique dans le registre arbre

Pour ce type activités, il est nécessaire d'utiliser le mode de représentation mixte qui permet, dans une feuille de l'arbre, d'écrire une expression dans le registre usuel (cf. figure 3).

5. Une expérimentation avec les arbres

Nous avons conçu une séquence dont l'objectif est d'aider des élèves¹⁰, de fin du collège ou début du lycée, à comprendre la structure d'une expression algébrique par l'utilisation du registre arbre. L'élaboration et l'expérimentation de la séquence ont été réalisées dans le cadre d'un projet de l'INRP sur les usages d'Aplusix dans la classe. Nous l'avons proposé à 3 enseignants¹¹ sous forme de tableau accompagné de l'ensemble des activités. Les enseignants avaient la possibilité d'adapter le scénario aux contraintes de leur classe. Dans cet article, on se limitera à une des expérimentations qui a eu lieu dans une classe de seconde au cours du mois d'octobre de l'année scolaire 2007/08. Soulignons qu'il s'agit d'une première expérimentation d'Aplusix avec le registre arbre.

La séquence est composée de 5 phases :

- 1) activités de conversion entre le registre de la langue naturelle RLN et usuel RU ;
- 2) introduction du registre arbre RA ;
- 3) conversion du registre RLN vers RA ;
- 4) interaction des registres RA et RU ;
- 5) conversion du RA vers RLN.

¹⁰ 14-15 ans.

¹¹ Membres de l'équipe Aplusix de l'INRP (educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/equipes_associees/aplusix/)

La quasi-totalité des activités peut être proposée dans Aplusix dans le sens où le logiciel peut valider la réponse de l'élève. Pour des raisons de limitation de nombre de pages nous ne pouvons pas présenter les contenus des activités. Le Tableau 1 suivant présente de façon synthétique le découpage de la séquence.

Phases	Environnement
1) Conversion RLN \leftrightarrow RU Jeux de communication	Papier-crayon
2) Introduction de RA	Aplusix en vidéoprojection
3) Conversion RLN \rightarrow RA	Aplusix : arbre contrôlé, puis libre Papier-crayon
4) Conversion RU \leftrightarrow RA	Aplusix : arbre contrôlé, puis libre
5) Conversion RA \rightarrow RLN	Papier-crayon

Tableau 1. Structure de la séquence

5.1. Description et analyse a priori des activités

Phase 1

Pour cette phase, nous avons mis en place un jeu de communication entre les élèves (cf. Figure 10) où ils doivent décrire une expression donnée dans l'un des deux registres (RLN ou RU) vers l'autre registre. Le message est transmis à un autre élève qui doit le décoder dans le registre de départ. La réponse sera validée par comparaison avec l'expression de départ. Contrairement aux activités de traitement qui sont proposées dans Aplusix, les activités de conversion se déroulent dans l'environnement papier-crayon, car Aplusix ne permet pas d'évaluer les réponses dans le registre RLN. L'objectif est de faire prendre conscience aux élèves de l'insuffisance de leur message dans le registre de la langue naturelle, quand celui-ci ne respecte pas la structure algébrique de l'expression.

<p>Test1.4 Fiche élève A</p> <p>Ecris en mots chacune des deux expressions suivantes : A1) $2x - y^2$; A2) $\frac{(3x+2)(3x-1)}{a-(x+2)}$</p> <ol style="list-style-type: none"> Lis ce que tu as écrit à ton voisin qui doit reconstituer l'expression donnée. Compare l'expression écrite par ton voisin avec celle de départ. <p>.....</p> <p>Test1.4 Fiche élève B</p> <p>Ecris en mots chacune des deux expressions suivantes : B1) $3\sqrt{2} - 2a$; B2) $\frac{-2a(x-1)}{x^2-(3+x)}$</p> <ol style="list-style-type: none"> Lis ce que tu as écrit à ton voisin qui doit reconstituer l'expression donnée. Compare l'expression écrite par ton voisin avec celle de départ.
--

Figure 10. Jeu de communication

Les expressions A1 et B1 ne présentent aucune difficulté. La façon la plus naturelle de les lire, « 2 x moins y carré » et « 3 racine de 2 moins 2 a » permettent la production correcte de l'expression dans le registre usuel.

Les expressions A2 et B2 combinent plusieurs difficultés. Par exemple, pour B2, un message du type « moins 2 a facteur de x moins 1 sur x au carré moins 3 plus x » peut conduire à l'écriture

$$\frac{2a(3x-1)}{x^2} - 3 + x \quad \text{ou encore à} \quad \frac{2a(3x-1)}{x^2-3} + x .$$

De nombreuses difficultés et mauvaises réponses sont donc attendues.

Phase 2

Nous avons proposé à l'enseignant un scénario d'usage (cf. annexe) pour l'introduction du registre arbre. L'objectif est de montrer les règles de formation du registre arbre dans l'environnement papier-crayon, mais aussi dans l'environnement Aplusix, ainsi que d'aborder les premières activités de conversion entre registres arbre, langue naturelle et usuel.

Phases 3 et 4

Les élèves travaillent sur Aplusix en mode entraînement, sur des activités de conversion entre les registres : RLN vers RA (Figure 11), RU vers RA et RA vers RU. Le mode « entraînement » d'Aplusix permet d'avoir des rétroactions du logiciel sur l'équivalence entre les expressions algébriques. Nous avons choisi de faire travailler les élèves d'abord en mode contrôlé, qui oblige l'élève à respecter les règles syntaxiques du registre arbre. Par exemple, dans la Figure 12, l'élève reçoit une rétroaction que 4 n'est pas correct car ce n'est pas un opérateur étant donné qu'au niveau des nœuds on ne peut avoir que des opérateurs. De même, dans la Figure 13, la rétroaction indique que « z-4 » est incorrect car on ne peut pas avoir une expression dans les nœuds ou les feuilles. Notons que cette rétroaction est spécifique de la représentation *arbre contrôlé* puisque l'arbre de la Figure 13 est correct en mode *arbre libre* ou *mixte*.

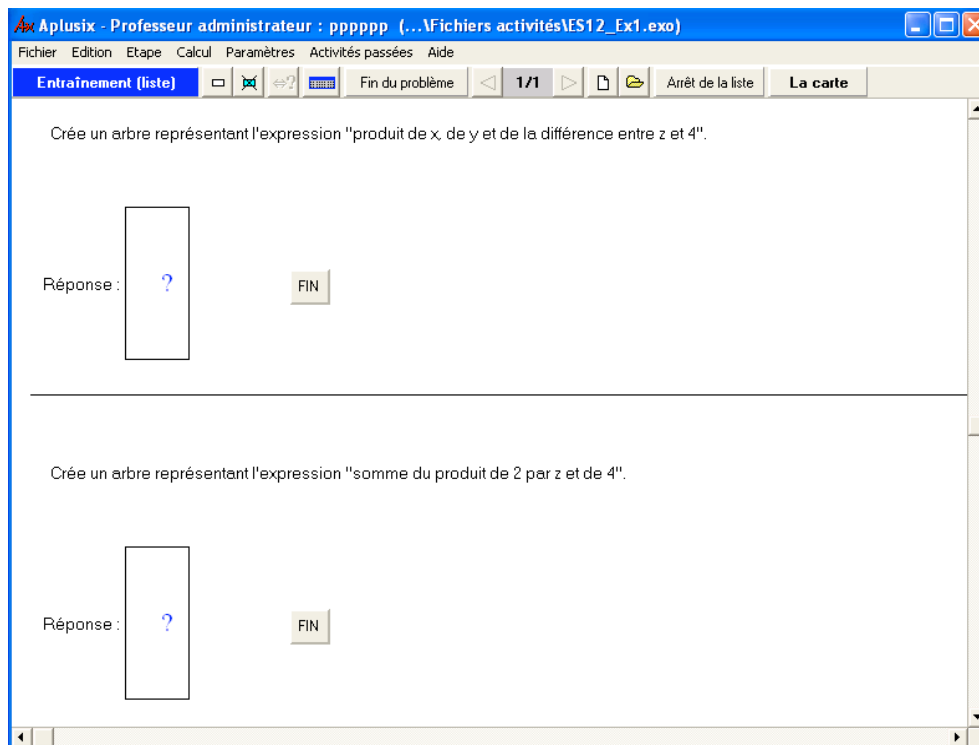


Figure 11. Activité de conversion de RL vers RA

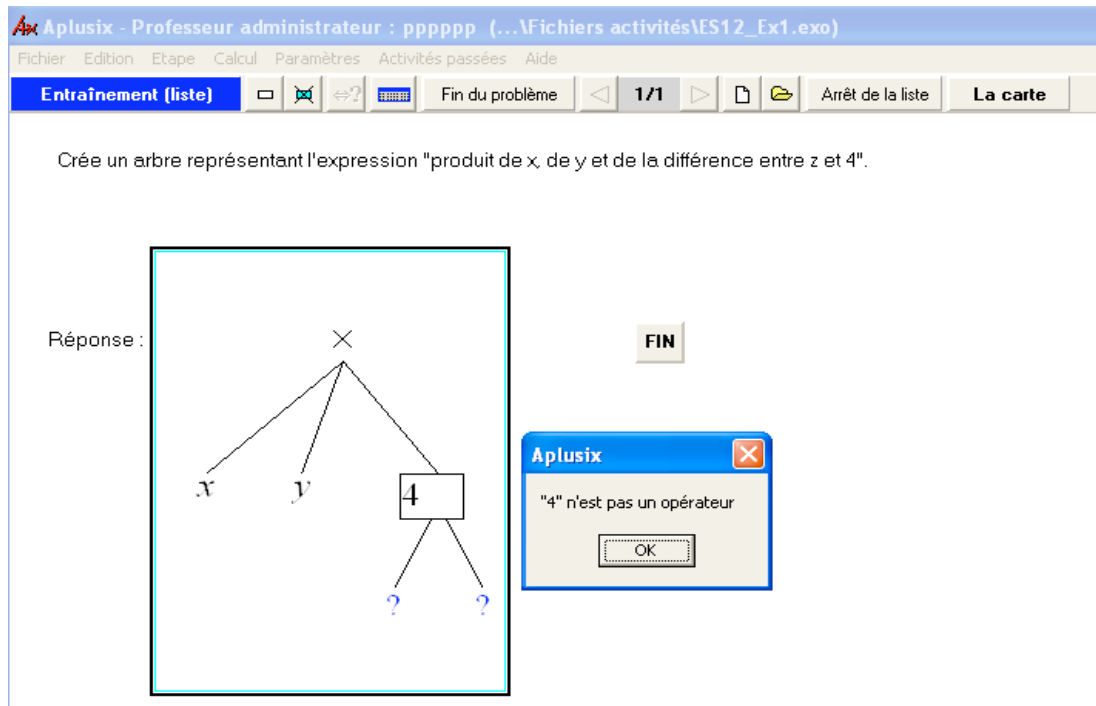


Figure 12. Une rétroaction du logiciel en mode arbre contrôlé

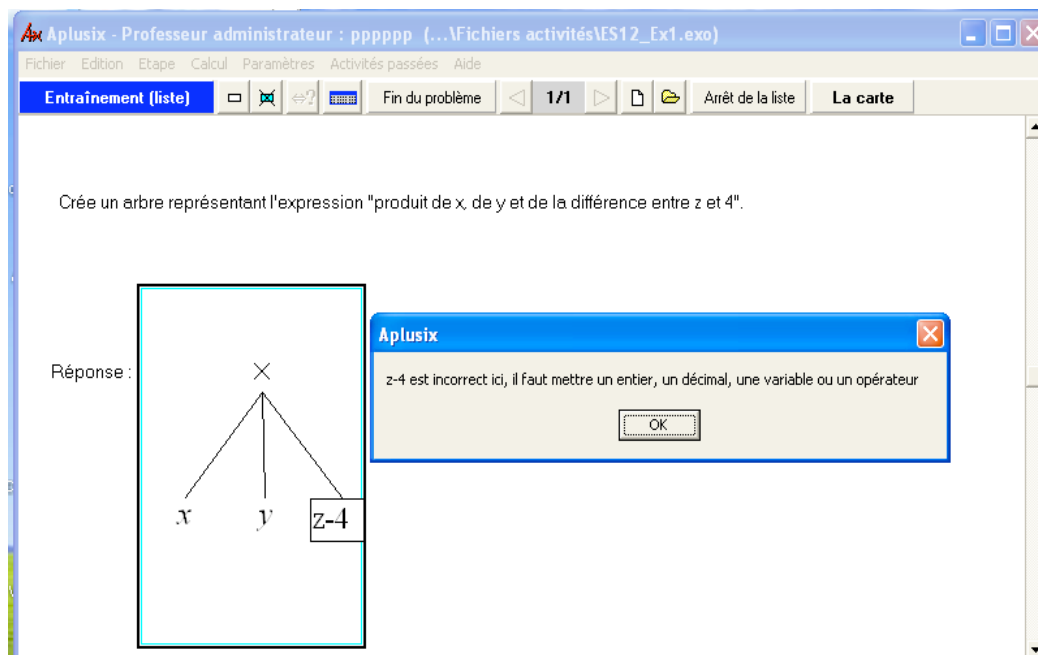


Figure 13. Une rétroaction du logiciel en mode arbre contrôlé

Phase 5

Les élèves doivent produire dans le registre RLN des expressions données dans le registre RA. Comme Aplusix ne peut pas contrôler les réponses dans le registre RLN, cette phase s'est déroulée dans l'environnement papier-crayon sous forme de travail à la maison.

5.2. Analyse a posteriori

Phase 1

Nous avons été surpris par les résultats du jeu de communication. Les expressions algébriques de départ dans le registre usuel ont été décrites dans le registre de la langue naturelle avec des spécificités du registre oral. Ce registre utilise la structure langagière qu'on utilise pour lire une expression dans le registre usuel. Il présente deux particularités : lecture de gauche vers la droite et présence d'implicites. On le désignera par « registre oral ». Les élèves ont ainsi décrit les actions qui permettent de reproduire dans le registre usuel l'expression (cf. Tableau 2).

Expression de départ dans RU	Elève émetteur		Elève récepteur
	Registre	Exemples de message	Correct dans RU
$2x - y$	Oral (gauche droite)	Deux x moins y	14
$2x - y^2$	Oral avec ambiguïté	Deux x moins y au carré	22
$\frac{(3x+2)(3x-1)}{a-(x+2)}$	Oral en explicitant les parenthèses	Ouvrir la parenthèse, 3 x plus 2, fermer la parenthèse, ouvrir la parenthèse, 3 x moins 1, le tout sur a moins, ouvrir la parenthèse, x plus 2, fermer la parenthèse	7
$\frac{(3x+2)(3x-1)}{a-(x+2)}$	Oral en explicitant les parenthèses avec ambiguïté	Ouvrir la parenthèse, 3 x plus 2, fermer la parenthèse, ouvrir la parenthèse, 3 x moins 1, sur, ouvrir la parenthèse, x plus 2, fermer la parenthèse	19
Total			62

Tableau 2. Conversion de RU vers RLN

Tous les messages des élèves sont dans le registre oral et mettent en avant l'aspect procédural plutôt que l'aspect structural. Cela va dans le sens de notre analyse a priori, d'autant plus que 66% de messages présentent des ambiguïtés. Mais, contrairement à notre analyse a priori, où nous pensions que ce type de message aboutirait à des expressions erronées dans le registre RU, 92% des productions sont correctes. Cela montre que le registre oral contient des codes implicites que les élèves partagent comme éléments du contrat didactique. L'activité de jeu de communication n'a donc pas rempli sa fonction, à savoir montrer aux élèves l'insuffisance de leur registre oral qui ne prend pas en compte l'aspect structural des expressions algébriques.

Phase 2

L'enseignant a souhaité que la séance d'introduction du registre arbre soit mise en œuvre par un des chercheurs concepteurs du scénario. La raison avancée par l'enseignant est sa maîtrise jugée insuffisante de la manipulation du registre arbre dans Aplusix. La séance s'est déroulée comme prévu dans le scénario d'usage (cf. annexe) : les spécificités de la représentation sous forme d'arbre et le vocabulaire lié à ce nouveau registre ont été introduits. Une attention particulière a été donnée à la lecture des expressions selon l'aspect structural et nous avons montré, que comme dans le registre RU, des arbres différents peuvent représenter une même expression.

Un accent particulier a été mis sur les trois statuts du signe « moins »¹² : signe d'un nombre relatif, signe de l'opération « différence » et opérateur « opposé d'une expression ». Ces trois statuts du signe « moins » se traduisent dans le registre arbre de trois façons différentes, comme le montre (Figure 14).

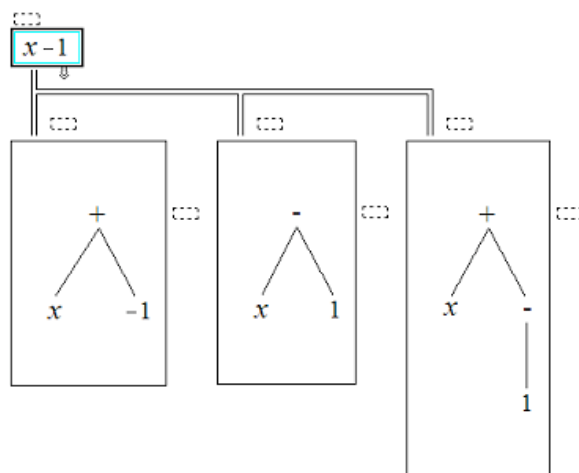


Figure 14. Trois statuts du signe « moins »

Phases 3, 4 et 5

Le déroulement de la suite du scénario a été modifié pour raccourcir sa durée, afin de respecter la progression commune des classes de seconde établie par l'équipe pédagogique de l'établissement. L'enseignant a différencié la mise en œuvre du scénario selon le niveau des élèves de la façon suivante :

- Conversion RLN \rightarrow RA et RU \leftrightarrow RA en mode contrôlé uniquement (un demi-groupe : G1)
- Conversion RA \rightarrow RLN en devoir à la maison (classe).

Le groupe G1 a été constitué des élèves qui sont relativement en difficulté. Les résultats de l'activité « Conversion RA \rightarrow RLN » en devoir à la maison ont montré une différence importante entre les deux groupes (cf. Tableau 3). Ces résultats semblent attester de l'efficacité de la séance « Conversion RLN \rightarrow RA et RU \leftrightarrow RA ».

	RLN avec aspect « structural »	RLN avec aspect « procédural » (registre oral)
G1 (15 élèves) Ont travaillé avec Aplusix sur le mode contrôlé	10	5
G2 (15 élèves)	3	12

Tableau 3. Résultats du devoir à la maison

12 Dans le registre RU, les deux écritures $x+(-1)$ et $x-1$ mettent en avant deux statuts du signe moins : signe d'un nombre relatif et signe de l'opération « différence ». Le troisième statut, opérateur « opposé d'une expression », est mis en avant par l'expression $-(1)+x$.

6. Conclusion

Dans cet article, nous avons abordé deux questions principales : celle de la conception d'artefacts technologiques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et celle de l'impact des représentations de notions mathématiques sur les apprentissages des élèves.

En ce qui concerne la question de la conception de logiciels éducatifs, l'exemple du développement d'Aplusix présenté dans ce texte montre l'impact des résultats des recherches en didactique des mathématiques sur les choix du développement du logiciel. Ainsi, notamment l'introduction du nouveau registre arbre a été motivée par des considérations didactiques sur la nécessité de disposer de plusieurs registres de représentation pour une même notion mathématique.

Concernant la seconde question sur l'impact des représentations des objets mathématiques sur les apprentissages, l'expérience présentée et analysée dans le texte tend à montrer un apport bénéfique du registre arbre sur la conceptualisation de la structure des expressions algébriques. Cependant, s'agissant d'une première expérimentation de ce nouveau registre, il serait trop hâtif d'en tirer des conclusions générales. Par ailleurs, d'autres expérimentations avec Aplusix-arbre sont en cours dans le cadre du projet ReMath. Elles sont menées par des équipes italiennes dans des contextes très différents. Après avoir analysé les résultats de ces expérimentations, nous aurons sans doute d'autres éléments pour appuyer notre hypothèse.

Nous pouvons cependant avancer deux hypothèses suite à cette première expérimentation. Premièrement, il semble souhaitable d'introduire le registre arbre plus tôt dans l'enseignement de l'algèbre, en début de collège, comme le préconisent les nouveaux programmes. En effet, comme on a pu observer dans notre expérimentation, d'une part pour des raisons de contraintes institutionnelles, un travail approfondi sur l'aspect structural des expressions algébriques est difficile à intégrer en classe de seconde et d'autre part, les conceptions des élèves concernant les expressions algébriques sont déjà relativement stables et plus difficiles à faire évoluer en quelques séances. Deuxièmement, l'intégration du logiciel Aplusix avec la nouvelle représentation ne va pas de soi et demande un vrai investissement de la part de l'enseignant. En effet, l'enseignant qui a participé à cette expérimentation peut être considéré comme « expert » de l'utilisation du logiciel Aplusix standard qu'il utilise régulièrement et depuis plusieurs années avec ses classes et pourtant, il ne s'est pas senti à l'aise pour introduire lui-même le nouveau registre. La prise en compte des genèses instrumentales liées à la manipulation du logiciel chez l'enseignant et chez les élèves est donc indispensable. Nous avons pris en compte ces deux hypothèses pour une nouvelle expérimentation en cours dans le cadre d'un mémoire de master de recherche en didactique des sciences.

Bibliographie

- BLOCH I. (2002) Un milieu graphique pour l'enseignement de la notion de fonction au lycée. *Petit x* 58, 25-46.
- BOUHINEAU D., CHAACHOUA H., VIUDEZ C. & NICAUD J.-F. (2007a) Introduction de nouvelles représentations dans le micromonde Aplusix : représentations sous forme mixte naturelle & arbre et sous forme graphique d'expressions algébriques. *Actes de la conférence EIAH2007*, Lausanne, 27-29 juin 2007.
- BOUHINEAU D., CHAACHOUA H., NICAUD J.-F & VIUDEZ C. (2007b) Adding new Representations of Mathematical Objects to Aplusix. In *Proceedings of the 8th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, Hradec Kralove, Czech Republic, 1-4 July 2007.