LE CALCUL ALGEBRIQUE AU COLLEGE
ETUDE D'UN EXEMPLE

Michel JULLIEN
IREM d'Aix-Marseille

Ce court article a pour but de montrer, sur un exemple banal - en ce sens qu'un enseignant de mathématiques peut le rencontrer très ordinairement dans sa pratique quotidienne -, que la théorie didactique permet de voir des phénomènes qui, sans elle, passeraient inaperçus.

Considérons l'exercice suivant, extrait de l'épreuve de mathématique du Brevet des Collèges donnée dans les académies d'Aix-Marseille, de Montpellier, de Nice et de Corse en 1988. Dans la partie «Travaux numériques»[1] de cette épreuve on trouve quatre questions indépendantes, dont l'une (la troisième) était composée des deux sous-questions présentées de la façon suivante (les élèves avaient à répondre sur la feuille même sur laquelle figurait l'énoncé) :

a) x désignant un nombre réel quelconque, développer $(x + 5)^2$.

....

....

b) Expliquer pourquoi $(x + 5)^2$ *est toujours strictement supérieur à 10x.*

....

....

....

On peut examiner cet exercice de différents points de vue. Il y a d'abord le point de vue du candidat. Il y a aussi le point de vue du (ou des) concepteur(s) de l'énoncé. On peut envisager encore le point de vue des professeurs de troisième (qui ont préparé au Brevet leurs élèves et seront curieux d'examiner l'épreuve afin de faire un pronostic sur leur réussite) ; le point de vue des professeurs de seconde (qui vont voir arriver ces élèves dans leurs classes), le point de vue du didacticien des mathématiques, celui du psychologue, etc.

[1] Il est à noter que l'expression «Travaux numériques» est issue des nouveaux programmes de Collège qui, pour l'année scolaire 1987-88, ne concernaient pas encore la classe de troisième puisqu'ils n'entraient en vigueur dans cette classe qu'à la rentrée 1989. Les concepteurs de l'épreuve avaient donc une avance de deux années scolaires...

Examinons le point de vue des concepteurs de l'épreuve. On voit bien ce qui était attendu des élèves à propos de la première question. Celle-ci fait appel à un «résultat de cours» très classique à ce niveau des études. C'est un exemple typique de calcul algébrique *formel*[2] : il n'a d'autre motivation que la consigne inscrite dans l'énoncé même, à savoir «développer». La deuxième question est d'un tout autre type. Il n'y a rien ici dans la consigne qui porte à penser qu'un calcul soit utile (voire nécessaire) pour répondre à la question. il est simplement exigé une «explication». Si l'élève s'engageait malgré tout dans un calcul, celui-ci prendrait (sauf exception) un tout autre statut que le calcul précédent : il proviendrait d'un choix, d'une décision de l'élève. Il s'agirait là d'un exemple de calcul algébrique *fonctionnel.*

Qu'avaient donc en tête les concepteurs de l'épreuve ? Leur idée est sans doute que tout élève de troisième doit être capable de développer l'expression $(x + 5)^2$, et que, puisqu'une telle question fait partie de ce que les nouveaux programmes appellent les «capacités exigibles», il est tout à fait légitime de la poser. Mais dans cette hypothèse la deuxième question prend alors un tout autre statut. En effet, elle ne fait certainement pas partie de ce que l'on peut appeler le «minimum requis» d'un élève de troisième. Elle est d'une autre difficulté et on peut alors penser qu'elle apparaît pour constituer un «plus», c'est-à-dire une question un peu plus difficile qui apportera des points aux meilleurs élèves. J'ajoute, afin d'éviter tout malentendu, que je trouve personnellement tout à fait légitime de poser à un examen une question à laquelle on sait très bien que seule une minorité d'élèves parviendra à donner une réponse satisfaisante.

Le problème que je considérerai est de savoir pourquoi cette question apparaît et pourquoi (et comment) elle fait échouer les élèves, si elle les fait échouer.

Pourquoi cette question apparaît-elle ? Il existe, depuis quelques années, dans la noosphère, un mouvement qui semble promouvoir l'idée que l'enseignement des mathématiques doit montrer que les mathématiques sont «utiles», qu'elles «servent», etc. De ce mouvement relève par exemple le thème des «mathématiques de service»[3]. On voit bien la double origine d'une telle orientation. Il y a, d'une part, la pression de la société pour contrôler ce qui se fait à l'école : ce qui s'y fait doit donc se montrer relativement transparent, et la réponse en terme d'«utilité» permet une certaine négociation à ce sujet. Il y a d'autre part (mais les deux aspects sont évidemment liés), le désir d'effacer la «commotion» de la réforme des mathématiques modernes - lesquelles sont aujourd'hui présentées comme un sommet des mathématiques non «utiles». Les discours apologétiques accompagnant ce mouvement se nourrissent de la nécessité de *faire concret* afin de *motiver* les élèves pour *supprimer l'échec* grâce à une *pédagogie de la réussite.*

Ce mouvement d'idées paraît a priori très éloigné des problèmes posés par la conception d'une épreuve de Brevet des Collèges. Mais c'est bien lui que nous trouvons à l'œuvre dans l'exemple examiné ici. En effet, la première question, véritablement élémentaire, demandait à être complétée d'une seconde question qui

[2] Je ferai référence, dans tout ce qui suit, aux analyses que l'on peut trouver dans la série d'articles de Yves Chevallard intitulée «Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège» et parue dans petit x, numéros 5 et 19.

[3] Voir, à ce propos, l'article de J.P. Kahane dans le bulletin de l'APMEP n° 363.

mette en œuvre le résultat obtenu dans la première question. Tout se passe comme si la deuxième question était amenée par *le besoin d'utiliser le résultat* obtenu lors du développement de $(x + 5)^2$, de montrer que ce développement n'est pas inutile, qu'il n'est pas simplement une «question de cours», mais qu'il peut servir à démontrer, par exemple, que $(x + 5)^2$ est toujours strictement supérieur à $10x$ [4]. On peut voir là un souci de «déformaliser» le calcul algébrique, en en montrant l'utilité et le fonctionnement. Mais cette noble intention bute sur la réalité du fonctionnement didactique, déjà pour la simple raison qu'elle exige que les élèves reconnaissent dans la deuxième question, la nécessité d'utiliser le résultat obtenu dans la première. L'indice ordinaire qui permet cette reconnaissance est l'emploi d'une formule du type «En déduire que...» ou encore «En utilisant le résultat précédent...», etc. Or, dans cet énoncé il ne figure aucun indice de cette sorte. Cette absence pointe, à mon sens, l'influence du mouvement d'idées décrit ci-dessus à laquelle sont soumis malgré eux les concepteurs de l'épreuve.

Les élèves échouent-ils ? Voyons maintenant le comportement des élèves sur cette question. A la suite d'une procédure exceptionnelle effectuée dans l'Académie d'Aix-Marseille, on dispose d'une radiographie de 431 copies, permettant de connaître la note attribuée par le correcteur à chacune des questions. Or, si à la première question le pourcentage de réussite a été de 75 % (il s'agit du pourcentage de réussite le plus élevé parmi toutes les questions de l'épreuve), celui de la deuxième question est de 9 %, ce qui la met au 4ème rang des questions les plus mal réussies, y compris les deux dernières de l'épreuve auxquelles, on peut le supposer, un grand nombre d'élèves n'a pu consacrer un temps raisonnable. Les élèves échouent donc massivement à la deuxième question examinée.

Comment les élèves échouent-ils, et pourquoi échouent-ils ? N'ayant pas eu accès à un nombre suffisant de copies, je ne dispose pas des éléments qui permettraient de dire précisément de quelle manière les élèves échouent. On peut tout de même supposer que la réponse largement majoritaire est... l'absence de réponse. L'une des raisons que l'on peut invoquer à ce propos étant qu'ils n'imaginent pas ce qu'on attend d'eux, ou plus exactement qu'ils n'imaginent pas ce qu'il y a à faire pour répondre «juste» à cette question.

C'est ce que je voudrais essayer de montrer maintenant. La raison avancée peut paraître d'autant plus choquante que spontanément les professeurs (et les «noosphériens» peut-être encore plus qu'eux) espèrent qu'un mystérieux «transfert» permettra aux élèves de savoir répondre à la question posée puisqu'ils savent développer $(x + 5)^2$. Il n'y aurait pas d'autre savoir nécessaire pour répondre correctement à la question. Le passage de la question a) à la question b) est entièrement transparent : il devrait se faire «naturellement» à partir d'un certain niveau en mathématiques. C'est en partie la réalité, puisque effectivement on peut supposer que cette question serait résolue par des élèves de Première S. Mais le problème aujourd'hui est bien de faire en sorte que d'autres élèves que ceux-là parviennent à résoudre une telle question !

---

[4] Dans ce cas, les mathématiques seraient «au service» des mathématiques elles-mêmes, la modélisation étant ici intramathématique.

Si les professeurs n'identifient pas les éléments de savoir qui doivent entrer en jeu pour passer de la question a) à la question b) c'est que ces éléments de savoir n'existent pas à leurs yeux, puisqu'*ils n'existent pas pour l'institution.* En particulier, il n'y a pas de mot dans le lexique de l'institution pour les désigner. Evidemment on peut toujours essayer de les nommer ou plutôt de les cerner en dehors de l'institution. On fera intervenir, par exemple, l'idée qu'un nombre peut être désigné par plusieurs noms différents - que ce nombre soit, d'ailleurs, connu ou inconnu - et que chacun de ces noms est plus ou moins bien adapté pour montrer des propriétés de ce nombre. On fera alors intervenir la notion de «nom-bien-choisi-pour-montrer-une-propriété» (par exemple 16 est un nom bien choisi du nombre *seize* pour montrer qu'il est pair, car se terminant par 6, mais c'est un nom mal choisi, si l'on veut montrer qu'il est un carré - au contraire de 4^2). Cela nécessite de savoir «jouer» avec les expressions algébriques (pour les nombres inconnus), de savoir lire une expression algébrique comme un nom montrant certaines propriétés du nombre qu'elle désigne : ainsi l'expression $(x + 5)^2$ montre que le nombre qu'elle désigne est un carré, tandis que l'expression $10x + (x^2 + 25)$, qui désigne le même nombre, montre que celui-ci s'écrit 10x plus quelque chose qui est positif et montre donc qu'il est supérieur à 10x. Dans ces conditions, montrer que $(x + 5)^2$ est supérieur à 10x revient à trouver un nom («bien choisi») de $(x + 5)^2$ qui *montre* qu'il est supérieur à 10x. La réponse attendue sera alors une réponse du type :

> *Puisque* $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$, *on peut écrire*
>
> $$(x + 5)^2 = 10x + (x^2 + 25).$$
>
> *Or le nombre* $x^2 + 25$ *étant strictement positif quel que soit le nombre x,* $(x + 5)^2$ *s'écrit comme la somme de 10x et d'un nombre strictement positif : il est donc toujours strictement supérieur à 10x.*

En réalité, et compte tenu de ce que nous avons précédemment dit, cette réponse est hautement improbable. Le rapport institutionnel à l'objet de savoir «calcul algébrique» mis en place au Collège n'inclut pas que celui-ci soit pensé comme un *outil* permettant d'explorer les propriétés des nombres. Il y a un saut entre d'une part, *savoir* que $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$ et, d'autre part, voir dans cette égalité un outil de démonstration des propriétés du nombre que ces deux expressions désignent.

Quel type de solution s'attendait-on à ce que les élèves nous fournissent ? Les quelques indications de correction, proposées aux correcteurs en même temps que le barème, peuvent nous mettre sur la voie. Il était en effet conseillé, pour cette question (notée sur 1,5), d'*«accepter toute méthode où figure le fait que* $x^2 + 25 > 0$*»* et de *«compter 0,5 point si la «comparaison» de* $(x + 5)^2$ *et 10x est envisagée, mais que la démonstration n'est pas achevée».* Etant donnée la forme de la question, la réponse attendue est sans doute celle qui consiste à comparer les deux expressions algébriques en étudiant le signe de leur différence :

$$(x + 5)^2 - 10x = x^2 + 10x + 25 - 10x = x^2 + 25.$$

Mais comme la somme d'un carré et du nombre 25 est toujours strictement positive, il en résulte que $(x + 5)^2$ est toujours strictement plus grand que 10x.

Cette solution utilise un outil de comparaison (l'étude du signe de la différence) qui est bien évidemment à ranger du côté de l'algèbre puisqu'il n'a de sens que si les nombres sont indéterminés. Elle n'évite ni la connaissance du fait que l'expression $x^2 + 25$ désigne un nombre strictement positif, ni la nécessité de prendre une initiative, une *décision de calcul :* décider de calculer la différence $(x + 5)^2 - 10x$, puis développer dans cette expression la «sous-expression» $(x + 5)^2$ — et non pas tenter de factoriser le tout, par exemple[5] —, etc. De telles prises de décision, ou plus exactement, la capacité à prendre de telles décisions, nécessitent un rapport au calcul algébrique plus libre, moins soumis aux «codes de (bonne) conduite» qu'exige son apprentissage[6], ou plus précisément l'apprentissage de son maniement formel[7].

L'analyse didactique nous permet ainsi de conclure que la réussite à un tel exercice ne pouvait être que fort improbable, compte tenu du rapport à l'objet de savoir «calcul algébrique» qui est mis en place au Collège. En effet, aujourd'hui, au Collège, on peut constater qu'aucun intitulé de programme ne comporte la mention «Algèbre». Ceci ne veut pas dire qu'on n'y fait pas de l'algèbre ni du calcul algébrique, mais signifie que ce dernier est traité comme du calcul numérique - dans lequel il y a en plus des lettres - sans que vienne sur le devant de la scène le rôle du calcul algébrique en tant qu'outil. Autrement dit encore, dans le partage des rôles entre les élèves et le professeur (ce que Yves Chevallard a appelé la *topogénèse*) le calcul dans son aspect formel est du côté de l'élève, et dans son aspect fonctionnel du côté du professeur. Ainsi la première question est bien une question pour les élèves (et ils réussissent très bien), tandis que la deuxième question tombe dans le «lieu» du professeur.

Cet exemple montre à mon sens que le rapport à l'objet de savoir «calcul algébrique» que l'enseignement du Collège met en place (à l'insu des professeurs et malgré eux, mais à travers leur action tout de même) ne permet pas à un élève de fin de troisième de répondre à la deuxième question de cet exercice. Le vrai problème reste que, très vite, dans la suite de ses études au Lycée, ce qu'on lui demandera de plus en plus, c'est justement d'être capable de mettre en œuvre le calcul algébrique de manière fonctionnelle[8]. Devant les difficultés ainsi rencontrées, l'action de remédiation du professeur de Lycée consistera le plus souvent à exhorter l'élève à «apprendre à calculer», tandis que dans la salle des professeurs on entendra : «Les élèves de seconde ne savent plus calculer !»...

---

[5] On pourrait imaginer qu'un élève écrive, par exemple, $(x+5)^2 - 10x = (x+5 -\sqrt{10x})(x+5 + \sqrt{10x})$, et s'arrête là ne sachant pas comment poursuivre... Observons en outre que l'égalité écrite ici ne vaut que pour x positif ou nul.

[6] Voir Jacques Tonnelle, *Le monde clos de la factorisation*, mémoire de DEA, IREM d'Aix-Marseille et IREM de Bordeaux, 1979.

[7] Voir Y. Chevallard, op. cit.

[8] Par exemple, l'expression $x^2 + 10x + 28$ sera écrite $(x + 5)^2 + 3$, expression qui montre que le nombre qu'elle désigne est toujours supérieur à 3 et que, par conséquent, la fonction $f(x) = x^2+10x+28$ admet un minimum qui vaut 3 et qui est atteint pour $x = -5$.