AUTOUR DE L'ENSEIGNEMENT
DE LA GEOMETRIE AU COLLEGE

Première partie

Yves CHEVALLARD
Michel JULLIEN
IREM d'Aix-Marseille

Le lecteur trouvera ci-après la première partie d'un dossier élaboré à l'occasion et dans le cadre d'un stage de formation continue de quatre jours, réalisé, sous l'égide de la MAFPEN de l'Académie d'Aix-Marseille, et à l'intention de professeurs de Collège confrontés à la mise en oeuvre de nouveaux programmes, par une équipe de l'IREM d'Aix-Marseille constituée d'Yves Chevallard, Michel Jullien, Alain Mercier et Jacques Tonnelle.

Le texte qui suit se compose de deux sections assez différentes d'allure.

La première, intitulée ***La géométrie et son enseignement comme problèmes****, constitue une manière de « leçon inaugurale » qui tente d'esquisser un questionnement à notre avis fondamental.*

La seconde, ***La notion de construction géométrique comme problème****, est d'aspect plus technique, et se veut une illustration du phénomène, sur lequel on ne saurait, nous semble-t-il, trop insister, de l'intrication du didactique et du mathématique.*

Soulignons que les analyses proposées ci-après étaient accompagnées de nombreux documents illustratifs, que nous avons dû renoncer à présenter ici. Enfin ajoutons que ces textes ne se veulent nullement ouverts à une lecture cursive et indolente : faits pour l'étude, ils appellent l'étude...

A. LA GEOMETRIE ET SON ENSEIGNEMENT COMME PROBLEMES

1. Didactique et formation

1.1. Qu'est-ce que la didactique des mathématiques ?

La didactique des mathématiques est un champ scientifique relativement récent - une trentaine d'années tout au plus - dont l'objet peut être décrit d'abord, de manière (apparemment) naïve, comme *l'étude des faits d'enseignement des mathématiques*.

Cette étude peut être résumée (ou présentée), au moins partiellement, par une liste - a priori illimitée - de *questions*, dont les objets peuvent être fort divers, macro-objets comme micro-objets.

Par exemple le didacticien des mathématiques pourra se poser aussi bien la question « Pourquoi existe-t-il, dans notre enseignement général des collèges et des lycées, un enseignement de mathématiques ? » que la question « Pourquoi nombre d'élèves s'obstinent-ils à écrire des égalités du type $(a+b)^2 = a^2 + b^2$? »

1.2. Pourquoi doit-on se demander si la didactique des mathématiques peut intéresser les enseignants ?

Les enseignants de mathématiques sont les *acteurs* d'un *système*, le système d'enseignement des mathématiques. (Nous verrons plus loin qu'ils sont, plus particulièrement, des *agents* de l'institution où ils interviennent comme acteurs ; les élèves sont, eux, des acteurs sans être des agents de l'institution.)

Tout acteur d'un système va y vivre différents types de situations, en lesquelles il va rencontrer des *faits*, se trouver confronté à des faits. Par exemple les enseignants de mathématiques des collèges sont confrontés au fait suivant : les programmes de mathématiques des classes de collège changent.

Pendant que l'enseignant-acteur vit des faits à l'intérieur du système, le didacticien, qui observe et analyse le système, s'intéresse à ces faits (et à d'autres, que l'acteur ne perçoit peut-être pas) pour découvrir, derrière eux, des *phénomènes*.

Une pierre qui tombe est un fait ; mais le physicien étudie, quant à lui, le phénomène de la chute des corps. Dans cette étude, il peut être amené à considérer des faits dont le lien n'est pas immédiat, pour l'acteur de la vie quotidienne dans le monde sensible (lequel par exemple voudra simplement éviter de recevoir, un jour de grand vent, une tuile sur la tête...) avec ce qu'il identifie comme un « type » de faits, la chute d'objets. Par exemple, le physicien fera rouler des billes sur un plan incliné, ce qui, en tant que fait, n'a rien à voir avec la chute d'un objet que l'on lâche dans le vide, mais relève pourtant, du point de vue de la physique, de la même classe de *phénomènes*.

Le point de vue du didacticien et le point de vue de l'enseignant sont donc *a priori* distincts. Le point de vue de l'enseignant intéresse certainement le didacticien : il entre dans la catégorie de ces faits derrière lesquels le didacticien voudra saisir des phénomènes didactiques. Mais en quoi le point de vue du didacticien peut-il intéresser l'enseignant ? Telle est la question que nous examinerons maintenant.

1.3. En quoi le point de vue du didacticien peut-il intéresser l'enseignant ?

Pour commencer de répondre à cette question, nous utiliserons une image. L'enseignant, avons-nous dit, est un acteur, c'est-à-dire qu'il agit. Son action, peut-on dire maintenant, consiste à jouer une pièce. C'est une pièce qu'il n'a pas écrite lui-même ; mais c'est aussi une pièce dont le texte intégral ne lui est pas communiqué. Pour jouer son rôle, il dispose d'abord d'un simple canevas, celui que lui fournit le programme officiel. Il dispose en outre de commentaires et d'instructions, en principe tout aussi officiels. Enfin, il a à sa disposition, de manière moins officielle mais banalisée par la tradition, un ou des manuels. Ceux-ci lui fournissent « du texte » censé lui permettre de remplir, selon les principes directeurs que les commentaires et instructions apportent, le canevas que le programme impose.

Tout cela constitue un ensemble de contraintes sur l'action, imposées au libre jeu de l'enseignant. Mais il ne faut pas se méprendre sur le mot de contrainte. Si, en effet, ces contraintes contraignent l'enseignant dans son jeu, elles dessinent en même temps pour lui un *espace de liberté* ou - ce qui revient au même, mais en négatif - un espace d'*incertitude*.

L'acte d'enseignement va mettre en oeuvre cette liberté sous contraintes, et annuler cette incertitude, en se réalisant. Parmi l'ensemble des enseignements effectifs *a priori* possibles, l'un, et l'un seulement, va être réalisé - un peu comme si l'enseignant effectuait un choix. (Notons ici, sans nous y arrêter, que l'étude des « textes officiels » devrait permettre de dégager ce que sont les divers choix *a priori* possibles : mais la didactique des mathématiques n'est aujourd'hui que très partiellement capable de mener à bien une telle étude.)

L'idée d'un choix, libre et véritable, de l'enseignant est pourtant très hautement contestable. Il est bien certain que, d'un enseignement à l'autre, il y a des variations : chaque enseignant peut s'en assurer, ne serait-ce qu'en observant l'enseignement effectivement prodigué par tel ou tel de ses collègues enseignant dans des classes de même niveau. Mais l'enseignant est soumis, le plus souvent à son insu, à bien d'autres ensembles de contraintes que ceux énumérés plus haut.

Les contraintes auxquelles on a fait allusion, en effet, méconnaissent le détail des faits qui surviendront dans la classe. Ainsi leur formulation ne prend-elle pas en compte nombre de contraintes « internes », imposées à l'enseignant par le jeu effectif de la classe, par le comportement des élèves, leurs conduites dans telle ou telle situation, etc. De même, sera négligé fréquemment le poids du « métier » de l'enseignant, de ses habitudes, de ses manières de faire ou de réagir. Ou, du moins, ainsi qu'on le verra, seuls certains aspects, relativement généraux, en seront retenus.

On notera ici le paradoxe qui préside à l'organisation de l'enseignement tel que nous le connaissons. Si l'on croit suffisant de n'indiquer aux enseignants que les grandes lignes de la pièce qu'ils devront jouer, c'est parce qu'on pense que l'enseignant, tel un comédien, a « du métier », et que cela lui permettra de combler les lacunes, de régler les détails de l'organisation didactique qui a été préparée à son intention. Mais, en même temps, son métier - c'est-à-dire une certaine manière, acquise et « indurée », de voir et de faire - pourra gêner sa mise en scène et son interprétation de la pièce qu'il lui échoit de jouer. N'importe quel acteur, aussi chevronné soit-il, n'est pas également à l'aise dans toutes les pièces et dans tous les styles de jeu : de même pour l'enseignant.

C'est ici que la didactique peut intervenir par le biais de la formation des enseignants. (Elle peut intervenir en d'autres points du processus qui conduit à la réalisation d'un enseignement effectif : mais nous ne considérerons ici que ce point d'impact-là.) Elle peut fournir une vision claire des contraintes qui pèsent sur l'acte d'enseignement. Elle peut, au delà, permettre de faire « bouger » ces contraintes, en les faisant apparaître comme de simples *conditions* parmi tout une gamme de conditions, entre lesquelles l'enseignant fera un choix plus libre, et davantage raisonné.

Un tel travail, soulignons-le, peut être amorcé dans le cadre d'un stage de formation ; mais il ne peut être mené à bien entièrement, car il ne prend ses effets que dans le cadre de l'action, du « jeu », de l'enseignant. Aussi doit-il exister des aller et retour entre la formation et l'action. La formation est le prélude à l'action ; en retour, elle prend sa signification d'avoir été éprouvée comme besoin dans le cadre de l'action. Il y a ainsi une dialectique entre action et formation.

2. Formation et géométrie

2.1. Pourquoi poser la question « Qu'est-ce que la géométrie ? »

Dans les périodes « normales » - c'est-à-dire non critiques - de son activité, l'enseignant est peu enclin à se poser une telle question. Enseignant les mathématiques au Collège, il est, du point de vue du système, du point de vue de l'institution dont il est un agent, censé connaître ce qu'il a mission d'enseigner. Aussi est-il peu probable qu'il se pose des questions telles les suivantes : qu'est-ce qu'une construction géométrique ? Qu'est-ce qu'une transformation géométrique ? Qu'est-ce qu'une démonstration ? Ou, encore, s'agissant d'autres secteurs mathématiques qu'il enseigne : qu'est-ce qu'un nombre ? Qu'est-ce qu'un nombre relatif ? Qu'est-ce qu'un calcul ? Etc.

Ce n'est pas que de telles questions ne se posent pas. (Nous verrons plus loin que ces questions, et bien d'autres, sont en permanence des questions *vives*, sinon pour l'enseignant, du moins pour le didacticien.) Mais, étant assujetti, par sa position dans le système, à la croyance qu'il *sait* ce qu'est la géométrie, une construction géométrique, une transformation, une démonstration, un nombre, un nombre relatif, un calcul, etc., l'enseignant ne formulera ces questions que *travesties* - et il pourra le faire, alors, avec une certaine obstination : qu'est-ce que je dois faire *aux élèves* en géométrie ? Qu'est-ce que je dois faire *aux élèves* en matière de constructions géométriques ? Qu'est-ce que je dois faire *aux élèves* en ce qui concerne les transformations géométriques ? Qu'est-ce que je dois faire *aux élèves* à propos des démonstrations en géométrie ? Etc.

En d'autres termes, il ne formulera de question à propos du savoir à enseigner qu'en mettant entre parenthèses la question du savoir et de son propre rapport au savoir ; ou, du moins, en la relativisant. Cette question ne se poserait que parce qu'il y a des élèves, et qu'il faut (les) enseigner. Supprimez les élèves et l'enseignement, la question cesse d'exister. Ou bien elle devient une question « purement philosophique » - sous entendu : qui ne m'intéresse pas ; voire, qu'il est ridicule et vain de se poser.

Cette manière de réagir permet d'ignorer un problème fondamental de l'enseignement : en en permettant l'évitement elle en permet la dénégation. C'est un problème que nous formulerons plus loin, mais dont on peut dire déjà qu'il se posera plus douloureusement dans les périodes *critiques* de l'activité de l'enseignant - par opposition aux périodes que nous avons appelées normales. Ces périodes critiques, ce sont, en gros, les périodes de changement de programmes. Comme on peut aisément l'observer, c'est alors que des questions du type « Que dois-je faire à propos de... ? » vont être posées avec le plus de force et d'opiniâtreté par les enseignants.

De telles périodes, par définition, voient un changement de l'activité de l'enseignant. Le contenu de l'enseignement et la manière de l'enseigner y subissent fréquemment des altérations plus ou moins profondes. Parfois même, de nouveaux secteurs entiers apparaissent : c'est le cas, aujourd'hui, avec la rubrique *Organisation et gestion de données* par exemple. Mais même dans de tels cas, l'enseignant sera plutôt enclin à demander « Qu'est-ce que je dois *leur* faire à ce propos ? » plutôt que « Qu'est-ce que c'est ? ». C'est-à-dire qu'il sera porté à penser, restrictivement, son rapport au savoir à enseigner *comme rapport au rapport des élèves à ce savoir.*

Cette conduite de l'enseignant masque pourtant une réalité incontournable. Un changement de programme peut constituer pour lui la source d'une véritable commotion. S'agissant de géométrie par exemple, il a, de manière implicite, ou plutôt, en acte, une conception de ce qu'est la géométrie - une conception qui s'est imprimée en lui dans l'exercice de son métier d'enseignant. Il enseignait « la géométrie » ; voici aujourd'hui que l'institution qui l'emploie lui enjoint, non plus exactement d'enseigner la géométrie, mais de faire faire aux élèves des *travaux géométriques*. A travers ce changement, qui se présente comme affectant l'enseignement, c'est la conception de la géométrie sur laquelle il a vécu son métier d'enseignant qui se trouve aussi, nécessairement, mise en question.

Tout changement du programme d'enseignement porte en lui nécessairement, une critique plus ou moins douloureuse des conceptions épistémologiques, de l'épistémologie « spontanée » de l'enseignant. A cet égard, la formation doit tenter de repérer le surgissement, fût-ce sous un certain travestissement, de la question « Qu'est ce que la géométrie ? », et tenter, à partir de là, d'amener l'enseignant à en déchiffrer la signification et à reconnaître l'existence *d'une pluralité de réponses possibles.*

2.2. Que signifie la question « Qu'est-ce que la géométrie ? » ?

La géométrie, comme l'arithmétique, l'algèbre, les mathématiques, l'art, la peinture, la littérature, le cinéma, etc., sont ce que nous appelons des *objets culturels*. Cela signifie d'abord que ce sont des entités reçues par la culture courante, et connues, en un certain sens, par ceux qui lui sont soumis - chacun de nous, ou presque. Mais ce sont en plus des objets culturels « sensibles », en ce sens qu'ils sont l'enjeu de débats visant précisément à les définir. Cela s'exprimera, dans le cadre même des conversations de la vie quotidienne, par des déclarations du type : « Ce n'est pas de la peinture, ça ! Du barbouillage, oui ! ». Ou bien encore : « Ce n'est pas ça que j'appelle du cinéma, moi ! Dans un film, il faut d'abord qu'il y ait une histoire, que ça ne soit pas n'importe quoi » (par exemple : « comme dans les films de Jean-Luc Godard »). Et aussi : « Vous appelez ça de la littérature ! De la littérature de gare, oui ! Et encore ! ». Etc.

S'agissant des mathématiques, le débat « définitionnel » existe depuis l'Antiquité. Dans *La République* (VII, 525e), Platon (v. 428-v. 348 av. J.-C.) exprime son mépris pour la « logistique » des calculateurs qui, utilisant les nombres dans des tâches indignes du philosophe, se livrent sur eux à des manipulations inacceptables : pour vérifier par exemple - *horribile dictu !* - que les rapports d'entiers a/b et c/d sont égaux, ils diviseront a par b et c par d. Il loue en revanche la science des nombres, l'arithmétique chère aux vrais amants de la sagesse qui, à rebours de l'art des calculateurs, conduira, pour comparer a/b et c/d, à multiplier a par d et c par b, sans jamais diviser. (On reconnaîtra là, au passage, une opposition que l'enseignant *vit encore dans sa classe aujourd'hui* : à l'élève de quatrième qui prétendra comparer les fractions 5/6 et 6/7 en effectuant les divisions à l'aide de sa calculette et en comparant leurs « valeurs décimales », il fera entendre que ce genre de manipulation n'a guère sa place dans la classe de mathématiques - même si l'élève peut être amené à le faire en classe de sciences physiques par exemple -, et qu'il convient, ici, de comparer les produits 5x7 et 6x6...)

De la même façon, à côté d'une géométrie savante, spéculative - celle qui, bien évidemment, avait les faveurs de Platon et dont les *Eléments* d'Euclide (v. 300 av. J.-C.) ont constitué, quasiment jusqu'au XIXe siècle, l'exposé fondamental -, il a toujours existé une géométrie pratique, laquelle, soulignons-le, démarque dans une large mesure la géométrie savante.

En fait, plus généralement, l'histoire de la géométrie montrerait une suite de conflits autour de la définition de « ce que c'est que la géométrie ». Une querelle des plus célèbres, qui allait un temps diviser les mathématiciens, naquit ainsi au XIXe siècle entre les tenants de la géométrie pure (ou synthétique) et ceux - les plus nombreux au demeurant - qui acceptaient sans condition la géométrie « analytique » issue des travaux de Descartes (1596-1650) deux siècles auparavant. (Michel Chasles (1793-1880), par exemple, pensait que les méthodes analytiques introduisaient une trop grande facilité en géométrie, à ce point que n'importe qui, désormais, pourrait établir des théorèmes de géométrie par le seul usage de ces méthodes...)

D'une manière plus générale, de multiples groupes sociaux, qui agissent alors comme autant de groupes de pression, tentent d'imposer, au sein de l'institution scolaire, leur propre définition de ce que c'est que la géométrie. (Il en est de même bien entendu pour la plupart des matières enseignées.) Le processus d'élaboration des programmes, qui va proposer aux enseignants concernés une définition au moins partielle de ce qu'est la géométrie, doit composer avec l'ensemble de ces pressions. Ces pressions sont autant de contraintes sur l'élaboration des programmes.

Pour décrire un peu plus précisément ce phénomène de production sous contraintes des programmes, il faut introduire ici une notion importante, celle de *noosphère*. La noosphère est constituée de l'ensemble des gens qui s'« activent » autour de l'enseignement (des mathématiques, en ce qui nous concerne) ; qui, d'une manière ou d'une autre, s'en préoccupent ; qui réfléchissent, pensent à son sujet ; qui ont des idées à son propos ; qui avancent des propositions pour le modifier en tel ou tel sens ; etc.

Ainsi, en France, les IREM, l'APMEP sont des composantes importantes de la noosphère de l'enseignement des mathématiques, qui en compte pourtant bien d'autres, depuis les Inspections pédagogiques régionales ou l'Inspection Générale jusqu'aux syndicats d'enseignants ou aux associations pédagogiques.

Quel rôle joue la noosphère, globalement, dans la production des programmes ? Un rôle qu'il faut situer bien *en amont* de la stricte rédaction des programmes. C'est la noosphère qui doit en quelque sorte « traiter » les pressions, les exigences qui ont leur origine dans les divers groupes sociaux dont nous avons évoqué l'existence. Son rôle essentiel est, à cet égard, une fonction de régulation des exigences qui s'exercent sur le système d'enseignement. Sans cela, l'acte d'enseignement, en butte à des critiques violentes et incessantes, deviendrait quasiment impossible. La noosphère doit permettre notamment de produire des programmes censés mieux satisfaire les contraintes dont elle a à connaître. L'élaboration de programmes « adaptés » à l'ensemble des pressions auxquelles le système d'enseignement est en proie est un élément important, ou jugé tel, de la réponse que le système d'enseignement doit avancer pour satisfaire ces pressions.

Dans les périodes dites normales, les programmes en vigueur fournissent *en acte* une réponse satisfaisante. Mais vient le moment où la réponse « traditionnelle » cesse de contenir les critiques. Une autre réponse doit être donnée. La noosphère joue son rôle régulateur en soumettant les multiples contraintes, plus ou moins affirmées, que subit le système d'enseignement, à un double processus de *globalisation* et de *réduction*. Elle dessine un type de solution fondé généralement sur quelques principes explicites simples. Pour les actuels « nouveaux programmes » du Collège par exemple, ce seront, notamment, le thème de la *continuité des programmes* de la sixième à la troisième, et celui de l'*activité de l'élève*.

Ce dernier point mérite d'être quelque peu commenté. Formellement, la notion d'activité, après avoir circulé dans la noosphère (une collection de manuels s'intitule depuis plusieurs années *Faire des mathématiques*, par exemple), vient aujourd'hui trouver sa place dans les textes officiels. En outre, elle se relie immédiatement à l'expression de *travaux géométriques* (ou *numériques*), qui figure dans l'intitulé des rubriques des programmes. La définition de la géométrie qui en résulte - elle tient en une formule : savoir de la géométrie c'est savoir « faire » de la géométrie - est celle-là même que les enseignants doivent aujourd'hui défendre et illustrer dans leur enseignement. Mais, en cette notion d'activité, il faut voir plus largement une réponse à tout un faisceau d'exigences, de critiques proférées, parfois sourdement mais de manière insistante, à l'encontre du système d'enseignement : que celui-ci prodigue un enseignement inintéressant, coupé de la vie, démotivant, engendrant l'échec et le refus, etc. Autant d'exigences - non nécessairement cohérentes entre elles - que la réponse avancée tente de globaliser et de réduire, de fondre ensemble pour rétablir la légitimité et l'autonomie menacées de l'acte d'enseignement.

La réponse qu'esquissent les programmes, et que l'enseignant devra élaborer en tous ses détails concrets dans le cadre de la classe, apparaît ainsi comme une solution optimale par rapport à un certain nombre de contraintes, au problème que l'on peut formuler ainsi : « Comment enseigner la géométrie de façon à satisfaire ces contraintes ? »

En tentant de répondre à cette question, la noosphère d'abord, l'administration ensuite avancent du même coup une réponse, ou du moins un schéma de réponse, à la question « Qu'est-ce que la géométrie ? » elle-même. On rencontre là le principe même de la transposition didactique : les mathématiques sont « manipulées » afin de pouvoir être enseignées dans une conjoncture donnée - soit sous un ensemble donné de contraintes.

Un tel schéma de réponse est ainsi déterminé par les contraintes qu'il doit tenter de satisfaire. Pour cela, il *apparaîtra* bientôt, à ceux qui en seront les « agents d'exécution », comme *nécessaire* et allant de soi. Mais, dans un premier temps, en cette période critique où les programmes changent, pour l'enseignant qui vit, de par sa pratique antérieure de l'enseignement (qui est aussi la pratique d'un état antérieur de l'enseignement), une autre conception de la géométrie et de son enseignement, et qui vit sur cette conception, il apparaît comme au moins différent, et peut-être même arbitraire. L'enseignant est ainsi pris, alors, entre (au moins) deux « définitions » de la géométrie et de son enseignement. Il peut avoir l'impression d'être le jouet de changements, aussi mystérieux qu'arbitraires d'ailleurs, dont sa vie d'enseignant va dépendre jour après jour.

Ce sentiment a quelque chose de profond et de nécessaire. Toute définition de la géométrie à travers la définition d'un enseignement de la géométrie est en un sens arbitraire. Dans la mesure où elle est déterminée par les contraintes prévalentes elle est, certes, déterminée par une nécessité sur laquelle l'enseignant n'a guère de prises. Mais que changent les contraintes ; ou, encore, que les contraintes réduites par la noosphère dans son action régulatrice viennent à réapparaître et à s'imposer : et une autre définition de la géométrie devra être mise en avant par la noosphère, pour être officialisée demain par de nouveaux « nouveaux programmes »...

En un peu plus de quinze ans, les enseignants des collèges auront ainsi connu au moins deux grands changements. A la commotion de la réforme des mathématiques modernes autour des années soixante-dix - l'un des bouleversements les plus radicaux sans doute de l'histoire de l'enseignement des mathématiques - succède aujourd'hui après une période transitoire d'une dizaine d'années, une évolution, plus douce d'apparence, mais qui s'éloigne tout aussi résolument et de l'état antérieur à la Réforme, et de celui que cette dernière eut l'ambition de promouvoir.

Rien ne nous assure d'ailleurs que l'on en restera là, que le nouveau curriculum des collèges se révèlera, à l'usage, d'une stabilité supérieure à ceux qui l'ont immédiatement précédé. Le changement réalisé - qui porte sur la géométrie et sur bien d'autres secteurs des programmes - n'est pas le premier que les enseignants aient eu à vivre. Tout donne à penser qu'il ne sera pas le dernier. Et cela, pas seulement parce que, comme on le dit légèrement, il y a des ministres, et qui veulent laisser leur nom à une « réforme ».

Ce changement doit être regardé, bien plutôt, comme l'un de ces épisodes « normalement critiques », si l'on peut dire, qui viennent régulièrement rétablir la compatibilité entre le geste de l'enseignant dans sa classe et l'ensemble des contraintes sous lesquelles son activité, dans une société donnée, doit s'exercer.

La formation des enseignants, à cet égard, est sans doute d'abord une formation *à analyser le changement, ses enjeux, ses significations et ses implications*. Elle doit aider l'agent du système d'enseignement qu'il est à explorer, de manière approfondie, *le nouvel espace de liberté sous contraintes* qu'ouvre le changement, autant qu'*à réduire l'incertitude* qu'il ne peut manquer d'engendrer.

2.3. Pourquoi la question « Qu'est-ce que la géométrie ? » n'est-elle pas ordinairement posée ?

Le changement du curriculum n'est qu'amorcé par le changement officiel des programmes. Il appartient à l'enseignant de le rendre effectif. L'institution qui l'emploie ne voit en lui qu'un agent d'exécution du changement inscrit dans les nouveaux programmes alors qu'il est, objectivement, un agent *de production* du nouveau curriculum.

C'est parce qu'il est - qu'il le veuille, en ait conscience, ou non - un agent de production du curriculum que l'enseignant doit - s'il veut faire un usage effectif de la liberté que les programmes lui offrent réellement - se poser la question « Qu'est-ce que la géométrie ? ». Mais c'est parce que l'institution qu'il sert le considère comme un simple agent d'exécution - dans le dessein de maîtriser, plus ou moins imaginairement, le processus de changement, en diminuant le nombre des paramètres dont ce processus dépend - que cette question n'est pas posée officiellement. La place de l'enseignant, ici, n'est souvent reconnue que négativement. On ne se demandera pas si l'enseignant est « capable » ou non de créer le curriculum (au sens strict du verbe créer, comme au sens où l'on « crée » une pièce), mais seulement s'il est capable ou non de « mettre en oeuvre », en « application », les programmes. Dans cette perspective, la formation des enseignants apparaîtra restrictivement comme une manière de les rendre capables d'appliquer « correctement » les programmes.

3. Géométrie et enseignement

3.1. Peut-on répondre autrement à la question « Qu'est-ce que la géométrie ? » ?

Répondre à la question « Qu'est-ce que la géométrie ? » apparaît démesurément ambitieux si on l'entend au sens de la « polémique culturelle » que nous avons évoquée plus haut, c'est-à-dire si on la considère dans cette problématique normative où des questions telles que *Qu'est-ce que la géométrie ?* ou *Qu'est-ce que le cinéma ?* deviennent quasi synonymes des formulations plus explicitement prescriptives : que *doit être* [à votre (mon) avis] la géométrie ? Que *doit être* [à votre (mon) avis] la littérature ? Que *doit être* [à votre (mon) avis] le cinéma ? Etc.

Une autre approche peut être tentée, que nous adopterons ici : elle consiste à construire une image objective - par opposition aux images culturellement déformées que promeuvent les divers groupes sociaux - de ce qu'est, dans la réalité historico-culturelle, la géométrie.

Un tel portrait ne peut sans doute se soustraire d'emblée à la polémique : membres d'une société et de ses institutions - notamment de l'Ecole - nous sommes tributaires des débats qu'elles abritent et qui nous sont imposés, souvent à notre insu. Mais l'ambition de construire une telle image peut être considérée : elle est celle de toute science, et n'est pas plus irréalisable, ni plus facile au demeurant, que celle que toute science forme à l'endroit des « réalités » qu'elle vise. En vérité, dans son registre propre, un tel projet n'est pas moins ambitieux que la perspective normativiste précédemment écartée. Il équivaut, somme toute, à un immense travail d'*épistémologie historique, culturelle et sociale*, qu'il ne nous est guère permis d'accomplir ici et maintenant, ni, de toute façon, en une seule fois.

Car il est de la nature de la connaissance objective d'être une connaissance *approchée*, une connaissance qui, ainsi que le disait Gaston Bachelard, n'est que de *l'erreur rectifiée*. Un tel point de vue sur les choses du monde importe moins - pour le dire rapidement - par la « vérité » qu'il nous assure que par l'« erreur » qu'il permet de dénoncer. Or, c'est là exactement ce dont nous avons besoin dans le travail sur notre *rapport à l'enseignement de la géométrie* qu'il s'agit d'amorcer ici.

C'est un travail que l'on peut résumer par une formule : il s'agit de *laisser flotter la norme*, afin même de pouvoir repérer la multiplicité des normes et d'apprécier les effets de la normativité - sur l'enseignement, sur les enseignants, sur les enseignés.

C'est à un travail de cette sorte que nous nous risquerons ci-après, par le moyen de quelques analyses forcément incomplètes, courtes même, et toujours à reprendre.

3.2. Quel est l'objet de la géométrie ?

A lire les dictionnaires - lesquels définissent généralement la géométrie comme la « science de l'espace » -, on peut répondre que la géométrie a pour objet l'espace. Science de l'espace, ou des *« objets »* de l'espace ? Se référant tacitement à l'étymologie, Littré définit la géométrie comme étant la « science qui a pour but la mesure des lignes, des surfaces et des volumes ». La géométrie s'intéresserait donc aux objets qui sont *dans* l'espace.

Il s'agit-là d'une première ligne de clivage, qui court jusqu'à nos jours. La géométrie « tridimensionnelle » est ainsi appelée tantôt « géométrie *dans* l'espace », tantôt « géométrie *de* l'espace » - mais il n'y a là d'abord qu'un simple indice de quelque chose de plus profond. La conception euclidienne semble surtout concernée, non pas par l'espace, mais par les « objets » de l'espace (qu'elle rend par des *figures*) et par les *propriétés* (« géométriques ») des objets de l'espace. L'espace est ici le cadre pur des phénomènes géométriques (dont les objets de l'espace sont le siège). Il est un ensemble de localisations possibles, un même objet pouvant occuper indifféremment telle ou telle région de l'espace. Cette conception se fonde sur l'idée que l'objet ni ses propriétés géométriques ne changent quand on modifie la localisation de l'objet dans l'espace. Son emblème est une certaine notion de figure - qu'il est au demeurant difficile de définir.

Lorsqu'elle est manipulée naïvement, la notion de figure conduit à regarder la figure, tracée sur un support quelconque, comme une représentation *de l'objet*. Dans la conception de la géométrie comme s'intéressant à l'espace, en revanche, la figure n'est pas une représentation de l'objet, mais une représentation (matérielle-graphique) de *l'ensemble des points de l'espace* que l'objet (matériel) vient occuper. La première conception est la source de plusieurs difficultés.

Considérons un objet situé dans le plan, auquel nous faisons subir une rotation autour d'un point. Lorsque le déplacement de l'objet a été accompli, là où il se trouvait, *il n'y a plus rien*. Dans la représentation graphique que l'on se donne de l'espace, la première figure *devrait donc avoir disparu*, tandis qu'une seconde figure apparaît. Du point de vue de la « géométrie *dans* l'espace », les deux tracés sont équivalents, les deux figures sont essentiellement la même figure... Pour rendre compte de l'usage de faire apparaître sur le *même support* deux figures distinctes (la figure F et sa transformée par rotation F'), il faut alors supposer *que l'on a superposé deux états de l'espace* entendu comme ensemble des objets qu'il « renferme ».

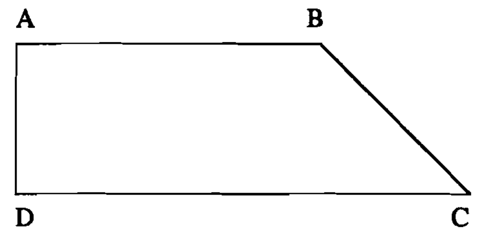
Si, en revanche, la figure est l'ensemble des points de l'espace qu'occupe l'objet, alors le tracé correspondant (que l'on appelle encore figure par abus de langage) est une représentation de cet ensemble de points, *lequel n'a nullement changé de place*. Les deux tracés sont alors tout simplement la matérialisation graphique *simultanée* de deux ensembles de points de l'espace qui, eux, n'ont pas bougé - une « transformation » de l'espace étant simplement une mise en correspondance de l'espace (comme ensemble de points) avec lui-même. Notons ici que l'usage de l'écran de l'ordinateur - au lieu de la feuille de papier traditionnelle - pour le tracé des figures semble plus propice à nous faire saisir cette conception : une figure à l'écran est un ensemble de « points » (de pixels) *allumés*. Quand on allume les points qu'occuperait l'objet dans sa seconde localisation, on peut éteindre ou laisser allumés les points de l'écran qu'il « occupait » dans sa première localisation : on imagine bien que, même s'ils sont éteints, ces points continuent d'« exister ».

L'espace a des propriétés, que l'on peut assimiler aux propriétés de l'infinité des figures de l'espace. Et ces propriétés s'imposent aux objets qui sont *dans* l'espace. Si, par exemple, un triangle en bois est muni d'une baguette clouée au milieu de l'un de ses côtés et maintenue parallèle à l'un des deux autres côtés, cette baguette coupera le troisième côté en son milieu. Ainsi, la connaissance des propriétés *de l'espace* nous fournit des connaissances *concernant les objets qui sont dans l'espace*.

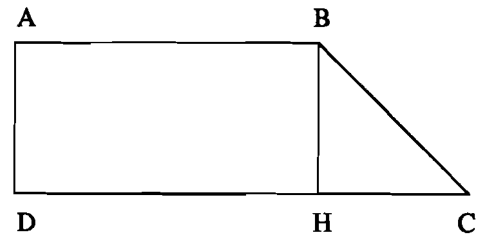
La conception de la figure comme représentation graphique d'objets matériels dans l'espace bute sur une autre difficulté : elle ne rend pas compte de l'usage que nous faisons, dans le travail géométrique - même « appliqué » -, de l'espace et de ses propriétés. Soit à mesurer la profondeur d'un puits ou la hauteur d'une tour - problème classique de géométrie pratique, dont le prototype nous est fourni par Thalès mesurant la hauteur des pyramides. La tour ou le puits sont certes des objets existant dans l'espace. Mais la détermination de la longueur cherchée suppose une figure qui réduit l'objet à un segment (sous-figure) et l'augmente de tracés intermédiaires, tel le rayon visuel que l'on voit tracé dans les anciens manuels de géométrie pratique (sur-figure).

Ainsi la connaissance géométrique des objets de l'espace prend appui sur l'étude d'une figure - d'un ensemble de points - de l'espace qu'on pourrait appeler, plus généralement, une « sur-sous-figure » - par rapport à la figure constituée des points qu'occupe l'objet matériel. C'est cette figure qui est effectivement étudiée, pour en faire dériver une connaissance relative à l'objet matériel. Elle n'est pas donnée avec l'objet matériel : elle doit être construite par le géomètre.

Ce fonctionnement de la géométrie comme mode de production de connaissances relatives aux objets matériels de l'espace se retrouve, bien entendu, dans les classes des collèges. Le profil en coupe d'un certain objet a la forme d'un trapèze rectangle ABCD.



On a : AB = 6, AD = 3, DC = 10. On désire calculer BC. On considère - on trace - pour cela la hauteur [BH], c'est-à-dire que l'on passe à une sur-figure de l'espace, qui n'a a priori aucune contrepartie dans l'objet matériel lui-même.



Cela fait, on considère alors la sous-figure ABHD, dont on établit qu'elle est un rectangle, ce qui entraîne que DH = AB = 6. Passant à la sous-figure formée des points alignés D, H et C, on établit alors que HC = 10 - 6 = 4. Enfin on considère la sous-figure BHC, triangle rectangle en H dans lequel, par application de la relation de Pythagore, on obtient ce qui était cherché : $BC = (4^2 + 3^2)^{1/2} = 5$.

Il est facile de voir en cet exemple le paradigme du « jeu » géométrique que l'élève va devoir apprendre à maîtriser : manipuler avec pertinence les sur- et sous-figures. Or la conception des figures comme représentations d'objets de l'espace est un obstacle à ce libre jeu avec les figures comme ensemble de points de l'espace, qui fait la fécondité de la géométrie.

3.3. Qu'est-ce que l'espace ?

Dans ce qui précède on a parlé, sans détour, de « l'espace ». De quel espace s'agit-il ? On a parlé, encore, de « points ». Qu'appelle-t-on points ? L'espace dont il faut partir est ce qu'on appelle l'espace sensible, cet espace contenant des objets, et qui nous est accessible par le biais des sens. Est-ce là l'espace de la géométrie ?

L'espace sensible, notons-le d'abord, ne peut être égalé à ce que l'on appelle l'espace physique (et qu'on pourrait appeler plus justement l'espace de la physique). La physique en effet décrit un univers où il est question de « masses », de « forces », de « quantités de mouvement », etc. : toutes choses étrangères à la perception non physicienne de l'espace sensible. L'espace de la physique est ainsi un espace construit, peuplé de réalités que l'espace sensible n'ignore pas entièrement, mais qu'il méconnaît : nous rencontrons ainsi des « corps », des objets, non des masses ; des corps en mouvement, non des quantités de mouvement ; etc.

L'espace dont nous parlions n'est pas encore l'espace de la physique (classique). Mais il en est, si l'on peut dire, le substrat, le cadre, où la physique installera ses masses et ses forces. Cet espace de la géométrie ne contient pas encore de masses ni de forces ; mais il contient des points, il est fait de points. Pas plus que la masse pourtant, le point n'appartient à l'espace sensible. Il en est de même de la droite, du cercle, etc. Toutes ces réalités sont des « idéalités », que l'intuition sensible nous apporte mais qui échappent à son emprise immédiate.

« Le point, écrit Euclide (traduction Peyrard), est ce dont la partie est nulle ». Les « définitions » euclidiennes de la ligne (« une ligne est une longueur sans largeur ») ou de la droite (« la ligne droite est celle qui est également placée entre ses points ») semblent ne pas être plus précises. Elles ont pourtant une vertu essentielle : celle de nous rappeler que, si on peut bien concevoir de telles réalités, elles ne sont pas cependant de notre monde sensible où rien ne saurait être « sans partie » ou « sans épaisseur » ; ou, encore, comme la droite de l'espace de la géométrie, être « infinie dans les deux sens ». Au demeurant, il est possible de fonder la géométrie sur d'autres termes primitifs que ceux-là : non sur la rectilinéarité, par exemple, mais sur la circularité (ou sur la sphéricité, dans l'espace à trois dimensions) ; non sur le point, mais sur la notion de volume ; etc.

La doctrine platonicienne voyait en toutes ces entités les éléments d'un monde d'idées, d'un monde idéel, distinct du monde sensible ; et les Grecs pensaient, plus généralement, que notre monde sensible, fruit de la chute des idées dans le sensible, ce qu'Aristote (384-322 av. J.-C.) nommait encore le monde sublunaire, ne se prêtait pas aux considérations de la géométrie, dont pouvait par ailleurs relever le monde des astres, celui de la voûte étoilée : manière philosophiquement et culturellement déterminée de dire essentiellement la même chose.

Nous dirons aujourd'hui que la géométrie part du monde sensible pour le constituer en monde géométrique, celui des points, des droites, des cercles, des sphères, des courbes des surfaces et des volumes, etc., de la même façon que, plus largement, la physique part du monde sensible pour le constituer en monde physique. La relation, épistémologiquement si difficile, entre la réalité sensible et la réalité théorique (géométrique, physique) par laquelle on essaie alors de rendre raison du sensible (non sans y parvenir fréquemment), est un des points fondamentaux de tout enseignement des sciences. Sa prise en charge par l'enseignement de la géométrie (dans des formes qui restent pour le moment indéterminées) est un autre point de clivage.

A cet égard, on observera une évolution nette de cet enseignement sur une période de quelques décennies. Alors en effet que l'enseignement « prémoderne » (antérieur à la réforme des mathématiques modernes) se référait encore, grosso modo, aux définitions euclidiennes évoquées précédemment, la solution « moderne », promue dès la fin des années 1960, a rendu illégitime une telle référence. (Cette illégitimation était présente, dans la sphère savante puis dans la noosphère, depuis longtemps déjà : c'est un leitmotiv de toute présentation de l'exposé axiomatique de la géométrie que de prendre pour repoussoir les définitions d'Euclide que nous avons mentionnées...) La solution géométrique « moderne » - à base axiomatique - a, dans un premier temps, résolu par le vide le problème des rapports entre le géométrique et le sensible, en installant d'emblée l'espace géométrique comme en-soi. Au passage, on comprendra mieux pourquoi ce type d'exposé s'est flatté parfois de pouvoir se passer de figures (i.e. de tracés) : dans la mesure en effet où l'espace géométrique ne contient pas d'objets matériels (lesquels relèvent de l'univers sensible), dans la mesure où les tracés de la géométrie tendent, culturellement, à se confondre avec la représentation des objets de l'espace sensible (et non des figures de l'espace géométrique), les tracés n'avaient plus lieu d'être... L'espace géométrique y devenait un espace « abstrait », si l'on peut dire, mais un espace *qui n'était abstrait de rien du tout.*

Dépassant cet épisode somme toute bref, il est plus important encore de souligner le legs - en forme d'interdit - que l'enseignement moderne a fait à l'enseignement « postmoderne », sur lequel nous vivons aujourd'hui. Cet héritage en effet rendait désormais *impossible* un traitement du problème des relations entre sensible et géométrique à la manière euclidienne, c'est-à-dire semi-implicite, et s'explicitant en des formulations (les « définitions ») qui sont plus des commentaires épimathématiques que des définitions mathématiques - quoi qu'elles aient reçu ce dernier statut chez Euclide et dans tout l'enseignement classique.

Alors que, sous la pression de contraintes qui venaient refouler le théoricisme moderniste, l'enseignement postmoderne redécouvrait le sensible - un sensible d'opérette, à la vérité -, il se trouvait en même temps fort démuni pour indiquer adéquatement le rapport entre sensible et géométrique, et laissait fleurir la solution empiriste (qui feint d'ignorer le décalage entre droite géométrique et droite sensible, par exemple), solution virtuellement (ou même réellement) présente dans la solution moderne dont il héritait.

3.4. Comment s'organisent nos connaissances relatives à l'espace ?

La description de la manière dont s'organisent nos connaissances relatives à l'espace est très semblable, dans son principe, à la description qu'on pourrait donner de l'organisation des connaissances relatives à l'objet de n'importe quelle science. Mais ce fait a été recouvert par certains traits de la situation, historique et théorique, de la géométrie, qui en dissimule l'évidence.

Les connaissances relatives à un objet d'étude, en effet, s'organisent en un savoir qui, matériellement, se présente comme un ensemble, plus ou moins structuré, de discours. En toute science, cet ensemble de discours prend d'abord la forme d'une multiplicité de fragments discursifs, relatifs à des « objets partiels », c'est-à-dire à une certaine espèce, reconnue pour homogène, de phénomènes. Tels sont, en physique, les phénomènes relatifs aux « corps flottants » (étudiés par Archimède) ou ceux relatifs à la « chute des graves » (explorés par Galilée). Même situation en mathématiques, si l'on considère par exemple ces ilôts discursifs dont le noyau dur est constitué du théorème de Pythagore, ou, encore, du théorème de Thalès.

Les mathématiques grecques, pourtant, passent d'emblée de ce stade à un état d'avancement qui n'est généralement atteint que lentement par les autres sciences. D'une part, elles structurent fortement les fragments discursifs qui font leur trésor, par le biais de l'enchaînement démonstratif - que l'Aristote des *Seconds Analytiques* tenait pour la caractéristique du savoir. En cela, elles réduisent au minimum la dialectique (de type expérimental) avec l'espace sensible ; elles autonomisent le discours géométrique, qui semblera bientôt pouvoir vivre dans une autarcie parfaite, une fois donné l'élan initial qu'apportent axiomes et postulats. D'autre part, elles organisent leurs fragments discursifs - fruits d'une longue genèse historique - en ce qu'on peut appeler une théorie d'ensemble - ou encore, selon l'expression utilisée en physique aujourd'hui, une « théorie unitaire » des phénomènes géométriques.

Cette synthèse, la première de notre histoire en son genre, recueillie dans les *Eléments* d'Euclide, et qui fait passer d'un savoir local à un savoir global, va constituer, dans l'histoire occidentale, une source intellectuelle jamais tarie, fertilisant les domaines apparemment les plus éloignés par leur objet, qui reprendront souvent les exigences formelles auxquelles elles faisaient droit de si heureuse manière. (Les philosophes, les savants de toute espèce, ambitionneront explicitement de procéder *more geometrico*, à la façon des géomètres.)

La mélodie si plaisante venait faire oublier les paroles. La théorie géométrique allait faire oublier, dans une certaine mesure, l'objet de la théorie - l'espace et la connaissance de l'espace. La géométrie, culturellement, tendait à n'être plus que résiduellement une théorie (explicite) de l'espace ; pendant des siècles, elle jouera le rôle d'une théorie (en acte) *de la rationalité*. Elle apparaissait ainsi comme une indépassable propédeutique intellectuelle (fort différente, en cela, de l'algèbre par exemple). L'enseignement de la géométrie n'échappera pas à cette double sollicitation. Pendant toute la longue période classique (à laquelle la réforme des mathématiques modernes mettra un point final), sa préférence va essentiellement à la géométrie comme théorie de la rationalité - non sans tiraillements d'ailleurs, comme l'illustrera par exemple l'action de A.-C. Clairaut (1713-1765) en faveur d'une autre conception de cet enseignement.

Dans la sphère savante, une double rupture se produit à partir de la première moitié du XIXe siècle (avec les travaux de Riemann, Lobatchevski, Bolyai notamment) et s'approfondit jusqu'aux premières décennies du XXe siècle. En premier lieu, l'acceptation multiséculaire de la théorie euclidienne comme théorie de l'espace va être contestée, et sera finalement rejetée, sous les coups de boutoir de la théorie de la relativité. Dès 1817, Gauss (1777-1855) écrit prémonitoirement (dans une lettre adressée à Olbers) :

> *Je suis de plus en plus convaincu que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne. Il est possible que dans l'avenir nous puissions avoir des idées sur la nature de l'espace qui aujourd'hui nous sont inaccessibles. Ainsi, la géométrie ne peut être mise à côté*

de l'arithmétique, qui est de nature a priori, mais plutôt à côté de la mécanique.

On passait ainsi de l'idée de *la* géométrie (en fait, de l'euclidienne) à l'idée d'une *pluralité* de théories géométriques (on dira plus simplement : *de géométries*), toutes formellement cohérentes, mais dont, en tant que « théories physiques », l'adéquation avec l'espace sensible restait à vérifier. Le problème de l'adéquation redevenait ainsi l'un des thèmes directeurs de la réflexion. La géométrie pouvait redevenir une théorie physique, établie sur une base expérimentale. L'épistémologue Ferdinand Gonseth écrivait en 1939 (dans sa *Philosophie mathématique*) :

> *C'est la volonté d'instrumenter les phénomènes qui fait s'éloigner la spécificité de la physique de celle des mathématiques. Et cependant cette volonté n'est point absente de la géométrie élémentaire, la pratique de la règle et du compas dépasse et prolonge instrumentalement nos facultés naturelles quant à la mesure et à la localisation des objets ; c'est un authentique chapitre de la physique.*

Mais, dans le même temps à peu près - dans les dernières décennies du XIXe siècle -, une autre évolution se faisait jour : le réexamen du corpus euclidien selon des normes de rigueur renouvelées conduisait à la notion de théorie axiomatique. Cette évolution devait se révéler ambiguë. D'une part, en séparant la théorie formelle de son ou ses domaines de validité, en explicitant ses propriétés de consistance et autres caractéristiques logiques comme indépendantes de toute adéquation au sensible, elle permettait de poser plus clairement le problème du rapport entre théories géométriques et espace sensible et redonnait du sens à la question - longuement oubliée parce que, croyait-on résolue - des rapports entre géométrie et réalité extramathématique. Mais, d'autre part, elle permettait aussi de penser la théorie géométrique (euclidienne ou non) comme théorie mathématique pure, dont la portée et la signification pouvaient être appréciées pour elles-mêmes et en elles-mêmes.

On s'aperçut ainsi que l'axiomatique issue du corpus euclidien pouvait recevoir un sens « concret » à l'intérieur même des mathématiques - sans qu'il fût besoin d'aller chasser sur les terres des physiciens. Un point pouvait ainsi s'interpréter - pouvait être défini - comme un triplet de nombres (x,y,z) ; un plan, comme l'ensemble des triplets de nombres (x,y,z) vérifiant une relation numérique $ax+by+cz = 0$; etc. Bref, la géométrie s'arithmétisait. La connaissance des phénomènes de « l'espace géométrique » n'était plus nécessairement - et, au regard des théories physiques les plus récentes, n'était qu'imparfaitement - le moyen de la connaissance de l'espace sensible (que la physique moderne appréhendait avec d'autres « géométries »).

Cette voie possible de développement fut celle que tenta de promouvoir la réforme des mathématiques modernes, ainsi qu'en témoigne (dans la noosphère) le livre de Jean Dieudonné publié en 1964 : un livre au titre bien significatif - *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* - qui valait défense et illustration de la résorption sans reste de la « géométrie élémentaire » dans l'algèbre linéaire. Ce mouvement pourtant buta très vite sur des contraintes qui, au même moment, se faisaient entendre de manière de plus en plus bruyante - le retour au sensible, au concret, à la vie quotidienne, au *real world* comme le disent encore aujourd'hui nombre de noosphériens anglo-américains. La Réforme apparaît à cet égard, rétrospectivement, sinon comme une affaire de dupes, du moins comme un malentendu radical - même s'il est possible de montrer que cette révolution de notre enseignement avait un caractère nécessaire. Le désenchantement fut rapide et vif.

Nous voudrions souligner ici une autre contrainte encore, interne au jeu didactique celle-là. L'approche axiomatique moderne exigeait que soit présentée une axiomatique. Or l'une des marques usuelles de la transposition didactique est bien un processus par lequel le savoir savant est réduit, miniaturisé, selon un mouvement de décomposition, prélude quasi obligé à une recomposition didactique. Que pouvait être alors la « réduction » ou la « miniaturisation » d'une axiomatique ? L'idée même, en vérité, est une contradiction dans les termes. Pourtant cette réduction était ici éminemment nécessaire. Contrairement à l'axiomatique de la théorie des groupes, par exemple, toute axiomatique de la géométrie plane est en effet d'emblée très lourde. Pis, la plupart supposent « connus » les nombres - les nombres réels ou un succédané d'iceux. (Celles qui ne le font pas, en utilisant le calcul segmentaire de Hilbert, par exemple, sont plus lourdes encore.) Or, c'est l'une des tâches du Collège que d'enseigner, concurremment avec la géométrie euclidienne, les nombres (relatifs, décimaux, rationnels, « réels »). Il y avait donc là un ensemble de contraintes rédhibitoires, que seule une construction très - trop - exigeante pouvait satisfaire. Elle fut courageusement tentée, avec l'insuccès que l'on sait. Cet échec redonna de l'intérêt à l'idée d'une *organisation locale* du savoir géométrique enseigné, idée aujourd'hui retenue *de facto*, sans grande rigueur au demeurant.

3.5. Comment se construit le savoir géométrique ?

Nous avons présenté plus haut l'organisation du savoir géométrique, telle que la sphère savante la propose, comme déterminée à partir de ce « premier moteur » que constitueraient les axiomes. Mais la production des connaissances géométriques - cette matière qui peut alors être organisée au sein du savoir géométrique -, suppose, si l'on peut dire, en chaque cas un second moteur. Partons d'un exemple. En 1899, alors que l'on peut croire avoir tiré de la géométrie élémentaire tout ce qu'elle pouvait donner, un professeur de mathématiques à l'Université John Hopkins, Frank Morley, découvre un nouveau théorème de cette sorte. Le théorème de Morley dit que, étant donné un triangle quelconque, les points d'intersection des trisectrices adjacentes des angles du triangle forment un triangle équilatéral. Plusieurs démonstrations du théorème de Morley furent données dans les années qui suivirent sa découverte (notamment par le mathématicien français Raoul Bricard, en 1922). Certaines d'entre elles sont très élémentaires. Formellement, donc, ce théorème « existait » comme tel, virtuellement, dès lors que l'on avait posé une axiomatique - à l'ancienne, ou moderne, formelle - de la géométrie du plan. Encore pourtant fallait-il le « produire » : ce qui ne fut fait, dans le cas d'espèce, que relativement tard - eu égard à cette longue aventure de la géométrie qui commença plusieurs siècles avant notre ère.

Là encore, il faut répéter que, dans son principe, le travail géométrique ne diffère pas essentiellement du travail en un quelconque domaine de la physique (ou, en fait, des mathématiques). Schématiquement sans doute, mais non sans vraisemblance, on pourra se le représenter ainsi : sur la base du savoir géométrique organisé, l'exploration d'un domaine de phénomènes géométriques conduit à formuler des conjectures, qui fournissent autant et plus de problèmes de géométrie, qu'il s'agit de résoudre, soit dans le cadre de la théorie existante, soit - plus rarement - par un développement adéquat de la théorie existante. (C'est ainsi par exemple que l'on est passé, au XVIIIe siècle, de la géométrie élémentaire à la géométrie différentielle.)

Comment se fait classiquement cette phase du travail que nous avons appelée l'exploration de phénomènes ? Il s'agit avant tout d'une phase expérimentale, qui met en rapport la théorie avec l'espace sensible, par le biais d'un montage expérimental. En géométrie, le montage expérimental est réalisé avec des moyens qui sont demeurés essentiellement inchangés sur plusieurs millénaires. L'expérience est ici une expérience graphique, qui suppose seulement un support et des instruments de tracé. La qualité du matériel employé dans le montage de l'expérience graphique a pu évoluer : les supports et les instruments utilisés par les premiers « expérimentateurs-géomètres » ne permettaient sans doute qu'une précision fort réduite (et on comprend qu'il leur ait fallu apprendre « à raisonner juste sur des figures fausses »). Mais quel qu'ait été le support - courte étendue bien plane de sable tamisé par exemple, ou feuille de papier comme aujourd'hui -, le montage permettait de donner aux notions de la théorie une contrepartie sensible, nécessairement approchée - à moins que l'on ne considère que ce sont les réalités sensibles qui sont seulement approchées par leur description théorique en termes de points, de droites, etc.

On soulignera ici un fait peu remarqué nous semble-t-il, mais qui se déduit pourtant immédiatement des conceptions modernes de la géométrie comme théorie mathématique. La notion de « droite sensible », à laquelle nous lions assez spontanément la notion de droite géométrique (celle que définit par exemple telle ou telle axiomatique de la géométrie), n'est en rien contenue dans la géométrie comme théorie mathématique. Un petit raisonnement mathématique le fera voir. Identifions le plan géométrique (euclidien) à l'espace R^2 muni de sa structure euclidienne usuelle et canonique. Nous avons l'habitude de représenter les droites de R^2, sur la feuille de papier qui nous sert de support graphique, par des droites sensibles (tracées à l'aide de la règle). Considérons alors une bijection f de R^2 : cette bijection permet de transporter la structure euclidienne canonique de R^2 sur lui-même. Le nouvel « espace » ainsi obtenu contient des droites, qui sont les ensembles de points f(D), où D est une droite « canonique » (représentée figurativement par une droite sensible). Ces droites f(D) vérifient toutes les propriétés que la théorie attribue idéalement aux droites sensibles : par exemple, deux telles droites, soit ne se coupent pas (elles sont strictement parallèles), soit se coupent en un point et un seul, soit sont confondues. Mais, si l'on tient à représenter sur la feuille de papier les droites D par des droites sensibles, les droites f(D) *ne seront pas représentées par des droites sensibles*. Par exemple, si la bijection f est définie par $x' = x^{1/3}$ et $y' = y$, les droites D parallèles à l'axe des abscisses ou à l'axe des ordonnées resteront inchangées, mais les droites d'équation $y = ax+b$, avec a non nul, deviendront les « droites » d'équation $y' = ax'^3+b$, c'est-à-dire des cubiques par rapport à la structure euclidienne canonique.

En d'autres termes, il n'est pas possible de définir mathématiquement la notion de droite sensible (ou la notion sensible de droite). Notons encore qu'il n'est pas davantage possible de définir mathématiquement la notion sensible de *perpendicularité*. Choisissons dans le plan R^2 deux vecteurs linéairement indépendants, et définissons sur R^2 la structure euclidienne pour laquelle ces deux vecteurs sont orthogonaux et normés. On obtient ainsi une notion de perpendicularité ayant toutes les propriétés attribuées par la géométrie euclidienne à la notion sensible de perpendicularité, mais qui en est toute différente en sa traduction sensible. (Un problème intéressant de construction géométrique est alors le suivant : soient trois points non alignés A, B et C ; ces points définissent une métrique euclidienne pour laquelle les vecteurs d'extrémités A et B d'une part et d'extrémités A et C d'autre part sont normés et perpendiculaires ; comment alors construire, à la règle et au compas, la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné, au sens de cette métrique ?)

La manière dont la tradition euclidienne a assumé le rapport de la théorie à l'espace sensible - par le biais d'un support graphique d'étendue nécessairement limitée - ne va pas a priori sans faire difficulté. Il y a, en fait, plusieurs types de difficulté. Le premier est de nature théorique : comment est-il possible de saisir expérimentalement l'espace sensible en n'expérimentant que sur une portion limitée de cet espace - celui que limite la feuille de papier sur laquelle sera réalisée l'expérience graphique ? La chose nous semble aller de soi. Elle est pourtant étrange. Pourrait-on par exemple étudier les océans en n'ayant accès qu'à l'étendue d'un petit bassin d'eau de mer ? Ou, de même, envisagerait-on d'étudier le ciel en n'observant qu'une mince portion de l'infinité céleste ?

La raison de cette anomalie fructueuse n'est apparue en réalité qu'assez tard dans l'histoire de la géométrie. Les multiples tentatives qui se sont succédé, dès l'antiquité gréco-latine, pour tirer au clair le statut du postulat d'Euclide ont en effet amené les mathématiciens à multiplier les énoncés équivalents à ce postulat. Parmi ceux-ci, un énoncé, dû au mathématicien anglais John Wallis (1616-1703), allait apporter la lumière sur le point que nous examinons : Wallis montrait en effet que le postulat d'Euclide est équivalent à celui affirmant que, étant donnée une figure quelconque, il existe une figure semblable de taille arbitraire (c'est-à-dire arbitrairement grande ou arbitrairement petite). Ultérieurement, Carnot (1753-1823) et Laplace (1749-1827) allaient revenir sur ce principe d'invariance de la structure de l'espace par homothétie, montrant notamment son lien fondamental avec le fait que les lois physiques (que nous dirions classiques) n'impliquent aucune unité de mesure absolue (l'univers physique est défini globalement à une homothétie près). Mais, contrairement à nombre de phénomènes physiques pour lesquels un système n'est pas nécessairement équivalent à un système homothétique (effet d'allométrie), tout système géométrique est réputé être le siège de phénomènes géométriques identiques quelle que soit l'échelle.

Par le biais du postulat d'Euclide, on postulait donc en même temps que tout phénomène géométrique qui peut se produire dans l'univers sensible, quelle que soit l'étendue de la « figure » lui correspondant, pouvait être recréé à l'identique - la taille exceptée - dans le cadre d'une simple feuille de papier. En ne travaillant qu'à l'échelle de ce que nous nommerons, avec Guy Brousseau, le micro-espace, on pouvait atteindre et connaître l'infinité du macro-espace. Toute la géométrie de la réalité sensible étudiée pouvait être enfermée dans les limites d'une feuille de papier...

La théorie euclidienne définissait du même coup, on le voit, les limites des exigences de sa méthodologie expérimentale spécifique. L'expérimentation géométrique engageait ainsi tous ses moyens dans une seule forme d'expérimentation, l'expérimentation graphique. Cette normalisation inaugurale de l'expérimentation en géométrie atténuait un peu plus encore - en association avec le rôle majeur de l'enchaînement démonstratif, déjà souligné - le caractère expérimental et physique de la géométrie. Elle créait en même temps des difficultés d'une autre nature, sur lesquelles nous dirons maintenant quelques mots.

La feuille de papier dont nous avons parlé intervient d'au moins deux façons dans le travail géométrique. La première manière est commune au géomètre et, disons, au physicien. Celui-ci peut, sur une feuille de papier, tracer un schéma d'un montage expérimental : la dispersion de la lumière par le prisme, le mouvement d'un pendule simple, etc. De tels schémas peuvent être tracés approximativement, à main levée, de manière suffisamment réaliste pour soutenir le raisonnement. Le *schéma*, ici, clairement, *n'est pas l'expérience* (physique) à laquelle il renvoie en la représentant figurativement (et schématiquement). Tout de même, en géométrie, on pourra utiliser des schémas, grossièrement tracés, pour représenter des expériences graphiques : à l'énoncé du théorème de Morley, je pourrai tracer à main levée un triangle (suffisamment) quelconque ; puis, toujours approximativement, les trisectrices (qui, de toute façon, ne sont pas constructibles à l'aide de la règle et du compas), afin de reconnaître déjà de quel phénomène géométrique me parle l'énoncé.

La difficulté tient alors à ce fait qu'une longue tradition, prolongée jusque dans nos actuelles classes de Collège, a plus ou moins confondu le *schéma* de l'expérience graphique avec la *réalisation effective* de l'expérience graphique (aboutissant à ce qu'on peut appeler une *épure*), confusion qui n'est évidemment guère possible en matières d'expériences physiques, dès lors que l'expérience et la représentation graphique de l'expérience se situent dans des plans de réalité nettement distincts (1).

Un des facteurs de cette confusion a été sans nul doute l'effet de normalisation graphique opéré par le passage historique (à partir de la fin du XVe siècle) du manuscrit à l'imprimé. Aujourd'hui encore, un simple schéma, volontairement tracé à main levé par ce dessinateur profane qu'est en général l'auteur, se transformera, sauf à dépenser beaucoup d'énergie pour contrecarrer ce funeste destin, en une impeccable épure confiée (par l'éditeur ou l'imprimeur) à la main experte d'un homme de l'art... Mais, du point de vue didactique, d'autres facteurs ont dû jouer aussi, jusqu'à aujourd'hui, pour confirmer cette méprise : le rabattement de l'activité géométrique sur une activité de pur dessin (dans les petites classes du Collège) - phénomène qu'au demeurant les actuels nouveaux programmes ne font qu'amplifier -, de même que le désir d'éduquer à la propreté qui imprègne une certaine version moralisante de l'enseignement, sont certainement à compter parmi eux. Quoi qu'il en soit, la confusion a des effets déterminés dans l'enseignement passé et contemporain de la géométrie.

3.6. Comment se sert-on du savoir géométrique ?

Le savoir géométrique - « la géométrie » - a été associé depuis ses origines à l'aventure de la civilisation occidentale. Dans cette entreprise, il a joué constamment un double rôle. D'une part, la géométrie s'est constituée comme une science de l'espace, se fixant ses propres valeurs, ses propres enjeux, ses propres problèmes, et ayant pour cela un développement partiellement autonome. Socialement, elle a constitué de ce point de vue un savoir savant, proposé en modèle à tous les autres (quand elle n'était pas en conflit avec eux - comme ce fut le cas avec la rhétorique, dans l'Europe des XVIIe et XVIIIe siècles). Dans le même temps, regardée culturellement comme théorie en acte de la rationalité, elle a, comme on l'a déjà souligné, joué un rôle majeur dans la formation intellectuelle et culturelle des hommes - dans certaines couches

---

1. On pourra noter, au passage, s'agissant de l'expérience graphique correspondant au théorème de Morley : a) que celle-ci peut être réalisée à la règle et au compas - même si les trisectrices d'un angle donné ne sont pas constructibles avec ces instruments ; b) qu'elle est d'une réalisation délicate.

sociales du moins. On pourra, à cet égard, se référer à l'appréciation de Pascal telle qu'il l'exprime dans *De l'esprit géométrique* (1657).

Mais, d'autre part, quelque savante qu'ait été son organisation, la géométrie n'a jamais cessé de jouer le rôle de *technologie de l'espace*, de théorie de la maîtrise pratique de l'espace. Il s'agit-là d'une fonction sociale attestée dès la plus haute antiquité et dont même la tradition savante nous a rapporté l'existence à travers quelques épisodes mémorables - Thalès et les pyramides ou, plus près de nous, Archimède et ses « méchaniques ». A cet égard, si on la considère comme l'une des branches de la physique, la géométrie est une physique efficace - une physique qui « s'applique » - alors même que les chapitres les plus classiques de la physique (statique des solides, hydrostatique, dynamique des solides, etc.) n'existent encore qu'à l'état de germes peu opérants. Ce rôle social ne laisse pourtant pas de poser de nombreux problèmes, qui trouvent un écho indéfiniment répété dans notre enseignement de la géométrie.

Tout d'abord, l'usage de la géométrie comme technologie de l'espace apparaît, dès l'antiquité et de manière étonnamment pérenne, comme un ensemble de pratiques sociales *culturellement dominées*. (Le récit que nous a laissé Plutarque dans sa *Vie des hommes illustres*, à propos des travaux mécaniques d'Archimède - dont il parle dans la *Vie de Marcellus* - est bien caractéristique de cet état des choses.) Si, dans la sphère didactique, les deux tendances - savante et technique - seront, à des degrés divers, toujours coprésentes, les proportions respectives de l'une et de l'autre seront aussi, du moins dans l'enseignement général, un effet et un indice d'une différenciation culturelle fréquemment associée à une différenciation sociale - la prépondérance de l'option technologique étant la conséquence et le signe d'un profil culturel et social « bas ». Le problème didactique du traitement de la géométrie comme technologie de l'espace est, malgré qu'on en ait, un problème à résoudre, aujourd'hui encore, sous cette contrainte culturelle - que les sociétés modernes n'ont pas vu, à ce jour, s'effacer.

Mais une autre grande difficulté surgit encore. Alors que la gestion savante de la géométrie aboutit - par nature pourrait-on dire - à une organisation intégrée (ou du moins qui vise constamment à l'intégration), la géométrie comme technologie de l'espace va refléter la diffraction sociale, la diversité des pratiques de manipulation de l'espace. Les techniques de maîtrise de l'espace se présentent ainsi comme une série de corps de principes d'action, de méthodes, voire de tours de main, spécifiques de tel ou tel domaine de gestion efficace de la « spatialité ». Cette pluralité technique correspond à une pluralité d'organisations techniques et instrumentales qu'il est difficile de maîtriser comme un tout cohérent - en partie sans doute parce que l'effort intellectuel et culturel historiquement nécessaire, tenté non sans succès au Siècle des Lumières, n'a pas été suffisant pour vaincre l'opacité, la parcellisation et l'hétérogénéité des pratiques sociales effectives.

Nous éclairerons ces considérations d'un exemple simple, celui d'un problème relativement classique de repérage. Je me tiens en un point A de l'espace, que je voudrais situer sur une carte de la région où je me trouve. De A j'aperçois trois points remarquables, trois repères B, C et D, matérialisés d'une certaine manière (le sommet d'une tour, la flèche d'une église, l'antenne installée sur une hauteur) et repérés sur la carte dont je dispose. Muni d'un instrument adéquat (théodolite, etc.) je peux relever les mesures u et v des angles BAC et CAD. Cela fait, muni maintenant d'autres instruments (la règle, le compas, etc.), je peux me proposer de construire, sur la carte, le point correspondant à ma position, à partir des données que constituent les mesures d'angle u et v (et les points B', C' et D' de la carte correspondant respectivement à B, C et D). Je suis alors confronté à un problème géométrique « microspatial », un problème de constructibilité (par exemple : est-il possible de construire le point cherché à la règle et au compas, à partir des données que je me suis rendues disponibles ?) et un problème de construction (s'il en est bien ainsi, comment construire le point en question ?). Le point cherché, on le sait, est l'intersection (autre que C') des arcs capables sous lesquels on voit les segments [B'C'] et [C'D'] respectivement sous des angles de mesure u et v.

La technologie de l'espace mise en oeuvre ici passe, comme toute technologie de l'espace, par la mise en relation d'une partie de l'espace sensible - ici le macro-espace - avec le micro-espace, l'espace de la feuille de papier, ici celui de la carte : elle passe, dirons-nous, par une *modélisation graphique*. Mais les traitements des deux types d'espace sont manifestement différents : dans le macro-espace, ce qui est possible et, si l'on peut dire, peu coûteux, c'est la mesure des angles - et non la mesure directe des distances, souvent difficile ou impossible. La notion d'angle est une notion pleinement instrumentale de la technologie du macro-espace, que le savoir géométrique, technologie du micro-espace, enregistre d'abord à ce titre. (Si la géométrie ne devait servir qu'à la technologie du micro-espace, elle pourrait fort bien faire l'économie de la notion d'angle : ce fut là le choix des précédents programmes du Collège, un fait bien significatif du repliement de la géométrie enseignée sur la « science » géométrique et, corrélativement, sur le micro-espace.)

Le problème précédent appartient au vaste domaine des problèmes de représentation plane des figures de l'espace. De la représentation artistique à la représentation technique - plus exactement : à telle ou telle représentation technique -, il y a une continuité où s'inscrit l'unité d'un même principe qui, on l'a dit, fonde la géométrie euclidienne (et qui, en cela, n'est sans doute que la continuation d'un schème culturel présent dès les premiers graphismes représentatifs que l'Homme s'est donnés) : la réduction, dans l'étendue limitée d'un support quelconque, des figures d'un espace d'extension indéfinie. Dans cet immense travail de mise en représentation de l'espace sensible et de ses figures par l'Homme, tout un ensemble de technologies de l'espace vont naître au fil des siècles, qui seront autant de corps de savoirs ordonnés à la maîtrise d'un certain usage de l'espace.

Ces savoirs géométriques mettront souvent du temps à s'intégrer au corpus principal (celui, en gros, de la géométrie des *Eléments*). Euclide, qui aborde le problème, le fait dans son *Optique*. Vitruve (au premier siècle avant Jésus-Christ), d'un point de vue différent, le traitera dans *Les dix livres d'architecture*. Les théories de la perspective (qui concernent peintres et architectes) entraîneront, à la Renaissance, un printemps de la réflexion. La géométrie projective en découlera. Le dessin technique, celui de l'ingénieur militaire d'abord, sera fécondé par le génie de l'espace d'un Gaspard Monge (1746-1818) - l'inventeur de la géométrie descriptive. Et, de nos jours, dans la plus récente période, le problème de la représentation a été posé en des termes renouvelés par l'apparition du micro-ordinateur, dont l'écran constitue un nouveau support, d'une autre nature, et dont l'utilisation (en matière de D.A.O. et de C.A.O.) a engendré ce corps de savoir géométrique appelé infographie.

Il y a en tout cela une diversification du savoir géométrique, qui ne trouve son unité de principe qu'au plus haut niveau d'intégration théorique. Le technicien reste proche de sa technique - quand même se sera-t-il frotté à la technologie qui la ressaisit théoriquement. Dans l'attrait que l'enseignement de la géométrie peut éprouver pour des technologies de l'espace, sous l'influence de contraintes hostiles à « l'abstraction théorique », il y a un risque majeur face auquel, croyons-nous, la didactique des mathématiques est encore démunie : que l'ambition démesurée qui en peut naître ne cède la place - subrepticement - à la naïveté et au malentendu ; que, par exemple, la représentation graphique (qui n'est nullement, en elle-même, « de la géométrie ») ne se substitue, comme valeur, but de l'enseignement et source de son inspiration, à la *technique de représentation* ; et celle-ci, à son tour, à la *technologie* qui la fonde et en rend raison.

La représentation désirée, quelles qu'en soient les spécifications, n'est rien d'autre que le produit d'un geste technique que le savoir géométrique doit diriger. Elle n'est, à cet égard, que fort peu différente - n'était la nature du produit : l'un graphique, l'autre numérique - d'un résultat de calcul qu'il faut obtenir. Elle constitue la fin pragmatique d'une recherche dont le nerf est un certain corps de savoir géométrique. Cette recherche pourra passer par un ou des schémas, par des calculs que ces schémas guideront, par d'autres types de représentation même. En fin de compte, elle est toute semblable, par sa fonction, à tout ce qui la prépare. Et à tout ce qui la suit : car, de même que l'architecte doit restituer dans l'espace, en vraie grandeur, les représentations planes à quoi il aura préalablement ramené l'espace sensible pour en modeler les figures à sa guise, de même, plus généralement, tout « technicien » de l'espace ne recherche la représentation que pour revenir à l'espace, et en maîtriser les figures. Toute représentation graphique est ainsi un moment, une forme déterminée (et variable), d'une modélisation de l'espace, moyen de production de connaissances que commande le savoir géométrique et qui commande l'action sur le sensible. C'est à cette notion que l'on devra tenter de rapporter ce que tout enseignement de la géométrie, quel qu'il soit, propose.

B. LA NOTION DE CONSTRUCTION GEOMETRIQUE COMME PROBLEME

1. Constructibilité et construction

Pour aborder la notion de construction géométrique, nous devons nous situer d'emblée en dehors de la problématique de l'enseignant dans sa classe, afin de permettre le *détour théorique* nécessaire.

On s'appuiera tout d'abord sur la notion préconstruite (naïve, pourrait-on dire) de construction géométrique dans le plan, à la règle et au compas, sans préciser davantage ce que l'on peut entendre par là. Et c'est à la suite des difficultés rencontrées que nous serons amenés à préciser la notion.

1.1. Un exemple

Nous montrerons d'abord que la notion de construction géométrique n'est pas aussi transparente que l'on pourrait penser. Nous mettrons pour cela en évidence, sur un exemple, le décalage qui peut exister entre la simplicité apparente de la solution classique à un problème de construction donné - solution qui donne de manière évidente la bonne réponse -, et la difficulté relative de la réalisation *effective* du procédé de construction contenu dans cette solution.

L'exemple choisi est le suivant (2) :

Trouver la bissectrice de l'angle formé par deux droites (AB) et (CD) qu'on ne peut pas prolonger jusqu'à leur point d'intersection.

Voici la solution proposée par les auteurs de l'ouvrage :

On mène une perpendiculaire quelconque (EP) sur (AB) et une perpendiculaire (FQ) sur (CD). Sur ces perpendiculaires, on prend deux longueurs égales HF et GE; puis, par H, on mène une parallèle à (CD), et, par G, une parallèle à (AB) ; le point de rencontre M de ces deux lignes est un point de la bissectrice cherchée. En effet, ce point M est à des distances GE et HF des deux droites proposées. En prenant deux autres longueurs égales sur (EP) et (FQ), on obtiendrait un second point M' de la bissectrice, et il ne resterait plus qu'à tirer (MM').

La simplicité de cette solution est telle que les auteurs ne prennent qu'une ligne pour la justifier tant il leur paraît clair que la construction proposée donne bien ce qu'elle prétend. Mais à cette simplicité s'oppose une difficulté lorsqu'il s'agit de *réaliser* effectivement la construction correspondante à la règle et au compas. Il suffit de s'y essayer pour en être convaincu. Il est en effet nécessaire de tracer deux perpendiculaires à une droite donnée sur lesquelles on prend des longueurs égales, puis deux parallèles à une droite donnée passant par un point donné. On obtient un premier point de la bissectrice cherchée. Il faut alors recommencer le même travail pour obtenir un second point, et, enfin, tracer la bissectrice...

Cet exemple montre que la solution fournie par les auteurs répond plutôt à la question

Est-il possible de construire à la règle et au compas la bissectrice de...?

qu'à la question

Comment faire pour tracer à la règle et au compas la bissectrice de...?

Autrement dit, cette solution constitue davantage une *preuve de constructibilité* à la règle et au compas de cette bissectrice plutôt qu'un « bon » *algorithme de construction* permettant de construire effectivement cette bissectrice (3). Il est clair que la donnée d'un algorithme de construction, quel qu'il soit - pourvu, bien sûr,

---

2. Ce problème provient d'un manuel de géométrie qui fut longuement en usage au XIXe et au début du XXe siècles : Rouché E. & de Comberousse Ch., *Traité de Géométrie*, géométrie plane, huitième édition, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

3. Nous préciserons plus loin ce que l'on peut entendre par un « bon » algorithme de construction.

qu'il soit accompagné de la preuve qu'il donne bien ce qu'il prétend -, fournit par la même occasion une preuve de constructibilité.

On peut mieux voir encore les deux sens contenus dans le mot de construction si, toujours à propos du même exemple, on propose la solution suivante :

> *Soit un cercle de centre A qui coupe (AB) en E et (CD) en F. Le cercle de centre F et de rayon AE coupe (CD) en G. Le cercle de centre E et de rayon AE coupe le cercle précédent du même côté de (AB) que F en un point H. La droite (HG) coupe (AB) en I. Il suffit alors de tracer la médiatrice du segment [GI] : c'est la droite cherchée.*

Si cette construction est plus simple du point de vue de sa réalisation effective (elle nécessite le tracé de 5 cercles et 2 droites seulement), en revanche il est moins évident que c'est bien la bissectrice des droites (AB) et (CD) que l'on obtient en fin de compte ! (Nous laissons au lecteur le soin de fournir une démonstration.) On voit bien, dans cet exemple encore, les deux notions s'opposer : d'un côté un algorithme de construction donnant un moyen (plus ou moins simple) d'obtenir effectivement la figure annoncée, et, d'un autre côté, le souci de montrer qu'il est possible de réaliser une telle figure sans nécessairement se préoccuper des moyens de sa réalisation effective. On peut reconnaître, dans ce deuxième aspect, les préoccupations des mathématiciens depuis Euclide.

Pour s'en convaincre, on peut signaler tout d'abord que les figures des manuscrits de mathématiques antiques comportent presque toujours des figures tracées à main levée (sauf les cercles) : ces figures sont donc des *schémas* venant soutenir visuellement le raisonnement. Ce sont les normes graphiques imposées par l'imprimerie qui vont transformer ces schémas en *épures* et ainsi jeter un doute sur ce qui intéresse le mathématicien.

1.2. Les constructions dans les Eléments d'Euclide

C'est en se penchant sur le détail des propositions euclidiennes que l'on peut mieux voir quelles sont les préoccupations de son auteur. Considérons par exemple la proposition X du Livre I (4) :

> *Partager une droite donnée et finie en deux parties égales.*

Autrement dit, il s'agit de la construction du milieu d'un segment et, comme toutes les constructions euclidiennes, en utilisant seulement la règle et le compas. La construction donnée n'est pas du tout celle enseignée classiquement au Collège et nous paraît beaucoup plus sophistiquée (5) :

> *Soit donnée une droite finie AB ; il faut partager la droite finie AB en deux parties égales.*

---

4. Dans tout ce qui suit nous nous référons aux *Oeuvres d'Euclide* dans la traduction de F. Peyrard (réédition, Librairie A. Blanchard, Paris, 1966) : la proposition X se trouve à la page 10 de cet ouvrage.

5. *Op. cit.*, p.10.

Construisons sur cette droite un triangle équilatéral ABC, et partageons l'angle ACB en deux parties égales par la droite CD ; je dis que la droite AB est partagée en deux parties égales au point D.

Suit alors la démonstration. Si on détaille cette construction en remontant aux propositions 1 et 9 qui donnent respectivement une construction d'un triangle équilatéral sur un segment donné et une construction de la bissectrice d'un angle donné, on obtient l'algorithme suivant :

1. Sur [AB] construire un triangle équilatéral ABC, soit
1.1. Tracer le cercle de centre A et de rayon AB ;
1.2. Tracer le cercle de centre B et de rayon AB ;
1.3. Choisir l'un des deux points d'intersections des cercles, C ;
1.4. Tracer [AC] et [BC].
2. Déterminer la bissectrice de l'angle ACB, soit
2.1. Prendre sur [CA] un point A' ;
2.2. Prendre sur [CB] le point B' tel que CB' = CA' ;
2.3. Tracer [A'B'] ;
2.4. Sur [A'B'] tracer un triangle équilatéral, soit
2.4.1. Tracer le cercle de centre A' et de rayon A'B' ;
2.4.2. Tracer le cercle de centre B' et de rayon A'B' ;
2.4.3. Ces deux cercles se coupent en C et en un autre point C' ;
2.4.4. Tracer [A'C'] et [B'C'] ;
2.5. Tracer (CC'). Le milieu est le point d'intersection des droites (AB) et (CC').

On ne peut saisir l'intérêt de cette construction que si l'on prend en compte le fait que le point de vue d'Euclide est, avant tout, celui de la *constructibilité* : il montre, par un enchaînement logique de propositions - en ne se permettant donc d'utiliser que des propositions déjà établies -, que le milieu d'un segment est constructible à la règle et au compas. La construction euclidienne est donc celle d'une certaine rationalité...

Cette idée éclaire à bien des égards la lecture de cette partie de l'oeuvre géométrique d'Euclide. Cependant, la proposition II ne se laisse pas facilement interpréter. Il s'agit de la construction suivante (6) :

A un point donné, tracer une droite égale à une droite donnée

Sans examiner la solution proposée par Euclide, on voit tout de suite une réponse (trop) simple à ce problème : il suffirait de « transporter la distance », à l'aide d'un compas, au point considéré. Or, la solution euclidienne (7) nous apparaît

---

6. *Ibid.*, p.4. La proposition suivante se traduit en langage contemporain par : étant donnés un segment [AB] et un point C, construire un segment [CD] tel que CD = AB.

7. La solution est la suivante (*ibid.*, p.4) : soit A le point donné, et [BC] le segment donné. Tracer un triangle équilatéral ABD. Tracer le cercle de centre B passant par C ; on appelle E le point

d'une complexité sans rapport avec la simplicité du problème posé. C'est que, pour comprendre l'intérêt de cette proposition, il est nécessaire de savoir ce qu'est le compas d'Euclide. C'est un instrument idéal (ou idéel) qui trace les cercles de centre donné passant par un point donné... et ne réalise pas d'autre construction. En particulier, il ne peut transporter les distances comme le ferait un compas banal ; on peut imaginer qu'il se referme dès que ses deux pointes quittent le papier : d'où le nom de *collapsible compass* que lui donnent les Anglo-saxons. Dans ces conditions, la proposition II apparaît comme fondamentale puisqu'elle montre que le compas « traceur de cercles » permet *théoriquement* de transporter les distances. Par suite, dès la proposition III, l'instrument théorique d'Euclide peut être matérialisé par notre compas courant qui permet, et le tracé de cercles connaissant le centre et un point, et le transport de distances. Ce détail montre encore une fois que le souci d'Euclide n'est nullement la réalisation effective des constructions : il serait incongru de réaliser la construction indiquée à la proposition II chaque fois que l'on veut transporter une distance !

2. Les procédés de construction

2.1. Un point singulier dans l'histoire des mathématiques, la géométrographie

Après avoir montré, dans le paragraphe précédent, que les problèmes de construction sont, pour les mathématiciens, des problèmes de constructibilité, il s'agit de renforcer cette idée en étudiant un point singulier de l'histoire des mathématiques (ou, au moins, de leur enseignement) : la *géométrographie*. Dans l'ouvrage déjà cité de Rouché et de Comberousse se trouve une note, due à E. Lemoine (8), intitulée *Sur la géométrographie*, ou *Art des constructions géométriques*. Comme l'indique son auteur, cet « art » a un quadruple objet :

- chiffrer, de manière conventionnelle, la simplicité et l'exactitude des constructions géométriques - ce qui permettra leur comparaison ;
- trouver des « procédés pour effectuer, le plus simplement possible, une construction déterminée indiquée par la Géométrie » ;
- discuter une construction donnée pour en trouver une plus simple ;
- enfin, déterminer parmi toutes les constructions possibles d'un même objet celle qui est la plus simple et que l'on nommera alors *la construction géométrographique*.

On voit donc que la géométrographie s'intéresse aux *procédés* de construction eux-mêmes, en se proposant de les comparer afin de trouver les plus simples, selon des critères déterminés. La singularité même de cette façon d'envisager l'étude des procédés de construction - et, déjà, d'envisager que l'on puisse les étudier pour eux-mêmes - et le peu de succès qu'elle a rencontré montre, a contrario, l'omniprésence des problèmes de constructibilité en mathématiques et met en évidence de nouveau, et

---

d'intersection de ce cercle et de la droite (BD). Tracer le cercle de centre D passant par E ; on appelle F le point d'intersection de ce cercle avec la droite (AD). Le segment [AF] répond à la question.

8. *Ibid.*, note IV, pp.515-546.

de manière plus précise encore, la distinction entre démonstration de constructibilité et algorithme de construction.

Examinons de plus près le travail de Lemoine. Il définit d'abord des « opérations élémentaires de construction » de la façon suivante :

- faire passer le bord d'une règle par un point est l'opération notée R_1 ;
- tracer une ligne en suivant le bord de la règle est l'opération notée R_2 ;
- poser une pointe de compas en un point est l'opération C_1 ;
- poser une pointe de compas en un point indéterminé d'une ligne est l'opération C_2 ;
- enfin, tracer un cercle est l'opération C_3.

Ainsi, par exemple, prendre la distance de deux points donnés sera noté « op.: $(2C_1)$ » ; tracer la droite passant par deux points donnés « op.: $(2R_1+R_2)$ ». Pour chaque procédé de construction, moyennant un certain nombre de conventions (9), on sera ainsi en mesure de donner un symbole du type

$$\text{op.: } (l_1R_1+l_2R_2+m_1C_1+m_2C_2+m_3C_3)$$

obtenu en faisant la somme de chacune des opérations élémentaires. Dans ces conditions, le nombre $l_1+l_2+m_1+m_2+m_3$ sera le *coefficient de simplicité*, le nombre $l_1+m_1+m_2$ le *coefficient d'exactitude*, tandis que les nombres l_2 et m_3 indiqueront respectivement le nombre de droites et de cercles tracés.

La construction usuelle de la médiatrice d'un segment [AB] obtient le symbole op.: $(2R_1+R_2+2C_1+2C_3)$ puisqu'elle nécessite le tracé d'un cercle de centre A, soit op.: (C_1+C_3), du cercle de centre B et de même rayon, soit encore op.: (C_1+C_3), et du tracé de la droite joignant les points d'intersections, soit op.: $(2R_1+R_2)$. Elle a donc une simplicité de 7, une exactitude de 4 et utilise le tracé d'une droite et de 2 cercles.

Bien qu'il mentionne quelques constructions utilisant l'équerre (avec, dans ce cas, d'autres opérations élémentaires), la plupart des constructions étudiées se font à la règle et au compas : « A la Géométrie *canonique* des Grecs, qui n'admet que les solutions par la droite et le cercle, correspondra la Géométrographie canonique qui admettra seulement la règle et le compas comme instruments de construction. » (10).

Le cadre théorique étant dressé, l'auteur étudie par ce moyen un certain nombre de constructions classiques (que l'on trouve usuellement dans les manuels) et montre qu'en général, non seulement ce ne sont pas des constructions géométrographiques, mais qu'en plus elles obtiennent souvent des scores élevés, aussi bien en simplicité - ce qui, avec la convention adoptée, signifie qu'elles en manquent ! - qu'en exactitude (même remarque) ou en nombre de droites et de cercles à tracer. Entre autres, il s'intéresse à la solution proposée par Rouché et de Comberousse au

9. Il est par exemple convenu que toute droite tracée et tout cercle tracé le sont en entier, ou encore que la feuille de dessin est aussi grande qu'on le désire, etc. (*ibid.*, pp.515-516).

10. *Ibid.*, p.516. Il est à noter que Lemoine ne cite pas le mot « instrument » à propos de la géométrie grecque, mais parle de « solutions par la droite et le cercle ».

problème du tracé de la bissectrice d'un angle dont on ne connaît pas le sommet. Cette construction obtient le symbole

$$\text{op.: } (18R_1+9R_2+32C_1+4C_2+28C_3),$$

soit une simplicité de 91, une exactitude de 54, avec 9 droites et 28 cercles tracés. Il propose alors sa construction géométrographique (indiquée ci-dessus), qui, elle, obtient une simplicité de 16, une exactitude de 9, avec 2 droites et 5 cercles (11).

La preuve est là : du point de vue du procédé de construction, les solutions proposées par les mathématiciens sont (souvent) de mauvaises solutions. Certes, Lemoine ne fait pas encore siennes les préoccupations du dessinateur, dont le métier est de réaliser des constructions géométriques - certaines contraintes, comme la précision relative des instruments ou même leur taille, ne sont pas prises en compte -, mais déjà il s'en rapproche. On pourrait dire qu'il fournit une théorie de la pratique du dessinateur.

A la lumière de ce qui précède, on peut alors analyser la solution d'un problème de construction géométrique selon quatre exigences :

1. elle doit fournir une preuve de l'existence de « l'objet » à construire ;
2. elle doit fournir une preuve de sa constructibilité ;
3. elle doit fournir un algorithme de construction ;
4. éventuellement, elle peut fournir la construction géométrographique.

Ces exigences sont évidemment « emboîtées » les unes dans les autres, c'est-à-dire que la satisfaction de la dernière entraîne la satisfaction des trois autres, la satisfaction de l'avant-dernière celle des deux précédentes, et ainsi de suite. Le problème que l'on se propose d'étudier maintenant a pour but de tenter de faire vivre sur un exemple le schéma décrit précédemment.

2.2. Etude d'un problème de géométrie

Considérons le problème suivant :

Etant donné un triangle ABC, existe-t-il une droite perpendiculaire au côté [BC] qui partage ce triangle en deux polygones de même aire ?

Si l'on suit le plan proposé, la première étape consiste donc à prouver l'existence d'une telle droite. Pour ce faire on peut envisager, par exemple, un raisonnement du type suivant : imaginons que la droite se déplace, de manière continue, du point B vers le point C (en demeurant perpendiculaire à [BC]) ; à l'une des extrémités, B, elle découpe d'un côté un polygone d'aire nulle, soit 0% de l'aire du triangle, et de l'autre tout le triangle, soit 100% de l'aire du triangle ; à l'autre extrémité, C, la situation est évidemment inversée (100% d'un côté, 0% de l'autre) ; ce qui permet de conclure qu'il y a bien un endroit, entre B et C, où l'aire de la portion de triangle découpée par

---

11. Son symbole est op.: $(4R_1+2R_2+4C_1+C_2+5C_3)$, et Lemoine conclut : « De 91 opérations élémentaires à 16 avec la Géométrographie canonique (...), telles sont les réductions que la géométrographie conduit à opérer dans la construction de ce très simple problème. »

la droite, d'un côté comme de l'autre de celle-ci, est égale à 50% de l'aire du triangle. Sur cette idée-là, il est bien sûr possible de bâtir une démonstration rigoureuse, en utilisant la propriété des valeurs intermédiaires que possède, comme fonction continue, la fonction qui associe, à la distance de la droite au point B, l'aire de la portion de triangle du côté de B.

Admettons donc l'existence d'une position de cette droite partageant le triangle en deux polygones de même aire. La question qui vient alors est celle de sa constructibilité à la règle et au compas.

Le problème est résolu si l'on prouve que le point M, en lequel elle coupe [BC], est lui-même constructible. Par un calcul simple, on démontre que, si on appelle H le pied de la hauteur issue de A et I le milieu de [BC], on a l'égalité

$$CM^2 = CH.CI,$$

ce qui signifie donc que la distance de C à M est la moyenne proportionnelle des distances CH et CI. Or, la moyenne proportionnelle de deux distances données est constructible à la règle et au compas (12). La droite cherchée est donc elle-même constructible.

On a ainsi fourni une preuve d'existence et une preuve de constructibilité sans fournir aucun procédé effectif d'obtention de cette droite. L'étape suivante consisterait donc à obtenir un algorithme de construction puis, éventuellement, à chercher la construction géométrographique de cette droite. On a ainsi, de manière un peu artificielle et à propos d'un problème précis, accentué les différences de point de vue entre les questions de constructibilité et les questions de construction.

3. La notion de constructibilité

3.1. Trois problèmes célèbres

Nous avons vu qu'une notion importante de la mathématique grecque est celle de constructibilité *à la règle et au compas*. Or trois problèmes se révélèrent rapidement « intraitables » :

- *la quadrature du cercle*, soit la construction, à la règle et au compas, d'un carré d'aire égale à celle d'un cercle donné ;
- *la duplication du cube*, soit la construction, à la règle et au compas, d'un cube de volume double d'un cube donné ;
- *la trisection de l'angle*, soit la construction, à la règle et au compas, des demi-droites partageant un angle en trois angles égaux (13).

---

12. Pour une preuve de cette constructibilité, voir par exemple la proposition XIV du livre II des *Eléments* d'Euclide.

13. Un quatrième problème, sur lequel nous ne nous attarderons pas, a lui aussi résisté durant des siècles : il s'agit de la construction à la règle et au compas des polygones réguliers ayant un nombre de côtés quelconque (supérieur ou égal à 3).

Chacun de ces problèmes a, durant quelque 24 siècles, défié les mathématiciens. De nombreuses solutions ont été proposées, les unes approchées (celle, par exemple, d'Hippocrate de Chios, au V^{e} siècle avant J.-C., ou encore, plus près de nous, en 1913, celle de Srinivasa Ramanujan, toutes deux concernant la quadrature du cercle), d'autres nécessitant, en plus de la règle et du compas, une courbe auxiliaire tracée dans le plan. C'est ainsi que, par exemple, la conchoïde de Nicomède permet la trisection de l'angle (et aussi la duplication du cube) ; les coniques de Menechme, la duplication du cube ; et la quadratrice de Dinostrate, la quadrature du cercle (ainsi que la trisection de l'angle).

En réalité, ce deuxième type de solution était considéré par les Grecs comme tout aussi approché. En effet, si la courbe peut être construite point par point à la règle et au compas (14), on ne peut cependant construire qu'un nombre fini de points. Il faut donc, à la main, compléter la courbe par un trait continu, et on comprend alors que les Grecs n'aient attribué qu'un caractère approché aux constructions qu'on pouvait en tirer. De telles solutions sont appelées des solutions *graphiques*.

Il pouvait exister aussi un procédé mécanique permettant de tracer la courbe de manière continue : on appelait *mécaniques* les solutions ainsi obtenues. Bien qu'il en soit ainsi pour le tracé des cercles et des droites (pour lesquels le compas et la règle sont les procédés mécaniques), l'emploi de tels procédés était perçu comme « altérant la pureté de la géométrie ». Nous laisserons de côté l'examen des raisons expliquant cette répugnance pour les solutions mécaniques ou graphiques. Signalons seulement qu'en 1775 l'Académie des Sciences de Paris, « submergée par les manuscrits de trisecteurs, duplicateurs et quadrateurs de toutes sortes, refuse désormais de lire ce genre de travaux. » (15).

Ces trois problèmes résistent donc, et il faudra, pour parvenir à les résoudre, donner une meilleure définition de ce que l'on peut entendre par « point constructible à la règle et au compas ». En fait, on sait, depuis Descartes, que toute longueur obtenue comme expression algébrique de longueurs données ne contenant que des radicaux carrés est constructible à la règle et au compas. Mais cet énoncé est encore trop vague. Il faudra attendre le XIX^{e} siècle pour que ces notions soient précisées.

3.2. Points et nombres constructibles

Etant donné un ensemble fini de points, que l'on appellera les points de *base*, on dira qu'un point est constructible à la règle et au compas s'il peut être obtenu comme l'intersection de droites et de cercles eux-mêmes constructibles, c'est-à-dire définis à partir des points de base et des points déjà construits. Une droite est réputée constructible quand deux de ses points le sont ; un cercle, quand son centre et l'un de

---

14. Il faut noter ici que, contrairement à la conchoïde de Nicomède et aux coniques de Menechme, la quadratrice de Dinostrate ne peut pas être construite point par point à la règle et au compas : on ne peut en obtenir qu'un certain nombre (infini) d'entre eux.

15. Extrait de Carrega 1981. Dans tout ce chapitre nous avons beaucoup emprunté à cet ouvrage, ainsi qu'à Lebesgue 1949. On s'y reportera avec profit pour davantage d'éclaircissements.

ses points sont constructibles (16). Dans tout ce qui suit, nous prendrons deux points, O et I, pour seuls points de base.

On démontre qu'à partir de ces deux points, on peut construire un repère orthonormé (O,I,J) et l'on peut donc considérer les coordonnées, dans ce repère, des points constructibles. On dira alors qu'un nombre est constructible s'il est l'une des coordonnées dans le repère (O,I,J) d'un point constructible.

C'est l'étude de l'ensemble des nombres constructibles, au sens donné ci-dessus, qui permettra de résoudre les problèmes précédents. Appelons W cet ensemble. Nous savons déjà que cet ensemble contient 0 et 1 (puisque ce sont les abscisses des points de base O et I). En fait, on démontre le résultat suivant : *l'ensemble W est un sous-corps de R, stable par racine carrée.* Il suffit de démontrer que la somme et le produit de deux nombres constructibles sont constructibles, que l'opposé et l'inverse d'un nombre constructible sont constructibles et, enfin, que la racine carrée d'un nombre constructible positif ou nul est constructible (17).

Ce résultat nous permet de prouver que tout nombre rationnel est constructible, puisque Q est le plus petit sous-corps de R et que la racine carrée de tout nombre rationnel est aussi constructible (par exemple, le nombre $(2 + \sqrt{3} + \sqrt{5})/\sqrt{3}$ est donc constructible (18)).

3.3. Le résultat de Wantzel

Afin de mieux caractériser les nombres constructibles, il est nécessaire d'utiliser certaines notions de la théorie des extensions de corps. On rappelle que l'on note $Q(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ le plus petit sous-corps de R contenant a_1, $a_2,\ldots$, a_n, c'est-à-dire l'intersection de tous les sous-corps de R contenant a_1, $a_2,\ldots$, a_n. D'une manière générale, si K et L sont deux corps tels que K est inclus dans L, on dit que L est une extension de K. Ainsi, par exemple, le corps des nombres complexes est une extension du corps des nombres réels.

Si L est une extension du corps K, alors L peut être considéré comme un espace vectoriel sur le corps K ; la dimension de cet espace vectoriel est appelée le *degré de l'extension*. D'autre part, si a appartient à L, on dit que a est *algébrique* sur K s'il existe un polynôme (non nul) à coefficients dans K dont a est un zéro (si a n'est pas

---

16. Définir un cercle par son centre et l'un de ses points revient à considérer le compas comme un simple *traceur de cercles*. Si l'on veut qu'il soit aussi un *transporteur de distances*, on peut alors définir un cercle par la donnée de son centre et de la distance de deux points de base ou déjà construits. En fait, comme nous l'avons déjà vu, un traceur de cercle est aussi un transporteur de distances. En effet, pour construire le cercle de centre A et de rayon BC il suffit de construire la médiatrice de [AB], puis le symétrique C' de C par rapport à cette médiatrice (constructions qui se font toutes deux avec un traceur de cercles) : le cercle cherché est le cercle de centre A passant par C'.

17. Pour cette dernière démonstration par exemple, on produit un algorithme de construction qui consiste à tracer un demi-cercle de diamètre [AB] où AB = AH+HB (avec H appartenant à [AB], AH = a (a positif ou nul) et HB = 1), puis de considérer le segment [HM] où M est l'intersection de ce demi-cercle avec la perpendiculaire à [AB] en H : on démontre alors que $HM = \sqrt{a}$.

18. Au passage on retrouve cette idée qu'une chose est de savoir si tel objet (point, nombre, figure) est constructible, autre chose d'être capable d'en donner une construction !

algébrique, il est dit *transcendant* sur K). Par exemple, le nombre i est algébrique sur Q puisqu'il est un zéro du polynôme x^2+1 dont les coefficients (1,0,1) appartiennent à Q. Parmi tous les polynômes à coefficients dans K admettant le nombre algébrique a comme zéro, il en existe un (et un seul) possédant les caractéristiques suivantes :

- il est irréductible dans K[X] ;
- son terme de plus haut degré est 1 (unité de K).

On l'appelle le polynôme *minimal* de a sur K. Si n est le degré du polynôme minimal du nombre a sur K, on dit que a est algébrique *de degré n* sur K. Ainsi, par exemple, le nombre i est algébrique de degré 2 sur Q (on démontre que x^2+1 est son polynôme minimal).

Moyennant ces considérations, on peut alors démontrer un résultat décisif pour la résolution de nos trois problèmes, résultat obtenu en 1837 par un répétiteur à l'Ecole Polytechnique, Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) : *tout nombre constructible est algébrique sur Q et son degré est une puissance de 2.* Le corps des nombres constructibles est donc inclus dans le corps des nombres algébriques et l'inclusion est stricte. Ce résultat, dont la réciproque est fausse, ne caractérise pas entièrement les nombres constructibles mais est particulièrement utile pour prouver que des nombres *ne sont pas constructibles.* C'est de cette manière que nous allons l'utiliser.

3.4. La réponse aux trois problèmes

Le nombre π, qui n'est pas algébrique sur Q (19), n'est donc pas constructible. Si en effet la quadrature du cercle était possible, on pourrait construire un carré de côté $\sqrt{\pi}$, donc le nombre $\sqrt{\pi}$ serait constructible et il en serait de même de π (puisqu'il est égal au carré de $\sqrt{\pi}$). Ceci fournit donc la preuve de l'impossibilité de la quadrature du cercle.

De la même manière, si la duplication du cube (d'arête 1) était possible, la racine cubique de 2 serait un nombre constructible. Or, son polynôme minimal est évidemment X^3-2. Son degré est donc 3, qui n'est pas une puissance de 2. D'après le résultat de Wantzel, il n'est pas constructible. D'où l'impossibilité de la duplication du cube.

En ce qui concerne la trisection de l'angle, le problème est un peu plus délicat. Il s'agit de prouver qu'il y a des angles non trisectables. (On sait évidemment trisecter certains angles, ne serait-ce que, par exemple, l'angle droit, puisque l'angle $\pi/6$ est constructible.) Nous allons montrer que l'angle $\pi/3$ n'est pas trisectable, et pour ce faire, nous allons montrer que l'angle $\pi/9$ n'est pas constructible. S'il l'était, l'intersection M du cercle de centre O passant par I et de la demi-droite [OA) telle que l'angle (IOA) ait pour mesure $\pi/9$ serait un point constructible et donc le nombre $\cos(\pi/9)$ serait un nombre constructible en tant qu'abscisse d'un point constructible, le point M. Il nous suffit alors de prouver qu'en fait le nombre $\cos(\pi/9)$ n'est pas

---

19. Ce résultat sera en fait établi plus tard, en 1882, par Ferdinand Lindenmann (1852-1939) et mettra ainsi un point final - négativement - à la fameuse question de la quadrature du cercle.

constructible. La formule classique $\cos t = 4\cos^3(t/3)-3\cos(t/3)$ montre que $\cos(\pi/9)$ est racine du polynôme

$$P(X) = 4X^3-3X-1/2$$

et il suffit de prouver que le polynôme $P(X)/4$ est son polynôme minimal. Soit p/q un rationnel irréductible racine de $P(X)$. On a (en multipliant par $2q^3$)

$$8p^3-6pq^2-q^3 = 0$$

soit encore $8p^3-6pq^2 = q^3$. Ainsi, p divise q^3 et, puisque ces nombres sont premiers entre eux, il vient $p = 1$ ou $p = -1$. En écrivant maintenant l'égalité ci-dessus sous la forme $8p^3 = q^3+6pq^2$, on voit que q divise $8p^3$ et que, par conséquent q peut prendre l'une quelconque des valeurs 1, -1, 2, -2. D'où les quatre valeurs possibles de p/q : 1, -1, 1/2, -1/2. On vérifie qu'aucune d'entre elles n'est racine de $P(X)$. Ainsi le nombre $\cos(\pi/9)$ est algébrique sur Q et de degré 3. Il n'est donc pas constructible, et il en est alors de même de l'angle $\pi/9$. Il en résulte que l'angle $\pi/3$ n'est pas trisectable.

3.5. Systèmes d'instruments

La caractérisation des nombres constructibles permet en outre de faire varier le système d'« instruments », ou, plus exactement, de donner une caractérisation des nombres constructibles avec d'autres instruments que la règle et le compas. En particulier, on pourra dire que deux systèmes sont *équivalents* s'ils définissent le même ensemble de nombres constructibles. Il faut aussi rappeler ce que l'on entend par « règle » - instrument à *un seul* bord rectiligne, supposé illimité et sans graduation ni marque -, et par « compas » - instrument permettant de tracer le cercle de centre donné passant par un point donné (mais ne permettant pas le transport de distances).

La première idée qui vient à l'esprit est d'essayer de faire « aussi bien » mais avec le moins possible d'instruments. Que se passe-t-il si l'on supprime la règle ? Si l'on convient de dire qu'une droite est construite lorsque sont construits deux de ses points, alors tout ce qui est constructible à la règle et au compas l'est aussi à l'aide du compas seul. Autrement dit, les systèmes « règle et compas » et « compas » *sont équivalents*. Cela signifie donc que tout point obtenu comme intersection d'une droite et d'un cercle, ou d'une droite et d'une droite, ou d'un cercle et d'un cercle, peut être obtenu comme intersection *de deux cercles*. Cela signifie encore que, pour toute construction obtenue à la règle et au compas, il existe un algorithme réalisant la même construction mais utilisant le compas seulement. Si dans certains cas, comme la construction de la médiatrice d'un segment ou de la bissectrice d'un angle, le résultat semble trivial, il n'en est pas toujours ainsi : que l'on songe par exemple à la construction du centre (que l'on aurait perdu) d'un cercle donné (20).

Cette « géométrie du compas » avait été étudiée par le Danois Georg Mohr dans un ouvrage, publié en 1672, et intitulé *Euclides Danicus*. Mais le travail de Mohr resta

---

20. Ce problème - construire le centre d'un cercle donné avec le compas seulement - est resté célèbre sous le nom de *problème de Napoléon*.

longtemps ignoré. Quelque 125 ans plus tard, le géomètre italien Mascheroni écrivit une *Geometria del Compasso* qui devait attirer l'attention sur ces problèmes.

La question de la suppression du compas est, elle, beaucoup plus délicate. Avant de l'aborder, voyons ce que l'on peut faire avec une règle et un compas... *rouillé*, c'est-à-dire, un compas qui ne peut tracer que des cercles de même rayon (seul le centre pouvant varier). On démontre que ce système est, en fait, équivalent au système « règle et compas ». Ainsi ne perd-on rien, si l'on peut dire, en remplaçant le compas par un compas rouillé (21) !

Supprimons maintenant le compas et remplaçons-le par un cercle dessiné dans le plan avec son centre. Là encore, on ne perd rien, c'est-à-dire que ce système est équivalent lui aussi au système « règle et compas ». Supprimons complètement le compas et « enrichissons » notre règle en lui ajoutant un deuxième bord rectiligne, parallèle ou non au premier : le système obtenu est encore équivalent au système « règle et compas ».

Ce n'est que si l'on considère la *règle seule* que l'on obtient un système strictement plus faible. On démontre en effet que le corps des nombres constructibles à la règle seule est le plus petit sous-corps de R, soit le corps Q des nombres rationnels. Bien d'autres systèmes d'instruments peuvent être utilisés et étudiés dans cette perspective. On citera, par exemple, le transporteur de distances (compas à pointes sèches) ou le bissecteur (tout appareil permettant de bissecter les angles) : les systèmes que chacun de ces instruments forme en association avec la règle sont strictement plus faibles que le système « règle et compas ». Mentionnons aussi les pliages, ainsi que la règle marquée (c'est-à-dire comportant deux marques fixes), qui permet de trisecter les angles.

On voit donc que la notion de constructibilité, dominante en mathématique, est mathématiquement bien définie ; et qu'elle l'est indépendamment de toute référence à des algorithmes de construction particuliers. Mais ces considérations ne permettent pas encore de prendre en compte le passage effectif au dessin sur papier, c'est-à-dire à ce que nous appellerons les *procédés de tracé.*

La confusion essentielle à cet égard semble bien se situer dans le fait que « constructibilité à la règle et au compas » - expression qui désigne une certaine classe de problèmes - a pris subrepticement le sens de « tracé avec les *instruments* que sont la règle et le compas ». Or, comme nous l'avons vu chez Euclide, les figures sont des idéalités, des entités immatérielles, et la « règle » et le « compas » sont, de même, des instruments idéels : la règle est illimitée, sans marque aucune et n'a qu'un seul bord ; le compas est un *collapsible compass* et ne permet donc que le tracé de cercles. De plus, les dessins n'y sont que des *représentations* - nécessairement imparfaites - de ces idéalités et ne sont là que pour aider le raisonnement. On comprend alors que traduire les problèmes euclidiens de constructions à la règle et au compas en termes de « tracés n'utilisant comme seuls instruments de dessin que la règle et le compas » constitue un changement de problématique et le passage du point de vue du mathématicien à un *faux* point de vue de dessinateur - faux, puisque c'est là introduire des contraintes étrangères à son art.

---

21. L'idée, qui peut paraître saugrenue, de remplacer le compas par un compas rouillé, est pourtant très ancienne : on la trouve en 980 chez le géomètre arabe Abul Wafa (Coolidge 1948, p.57).

4. Constructions et procédés de tracé

Les liens entre construction et constructibilité en géométrie euclidienne sont maintenant suffisamment clairs pour que nous puissions interroger les « pratiques de tracés graphiques ou géométriques ». Notre but est, dans un premier temps, d'en repérer les caractères originaux et de les situer clairement par rapport aux constructions et aux problèmes de constructibilité.

Afin que ce texte prenne tout son sens pour le lecteur, il est nécessaire que celui-ci accepte de se laisser guider pas à pas sur les chemins qu'il propose...

4.1. Un tracé précis n'est pas une construction

Soit à résoudre le problème suivant : tracer un triangle ABC dont on connaît les longueurs a, b et c des trois côtés, à l'aide d'une règle et d'un transporteur de distances (une bande de papier marquée aux trois longueurs, par exemple). Voici le procédé que nous considèrerons :

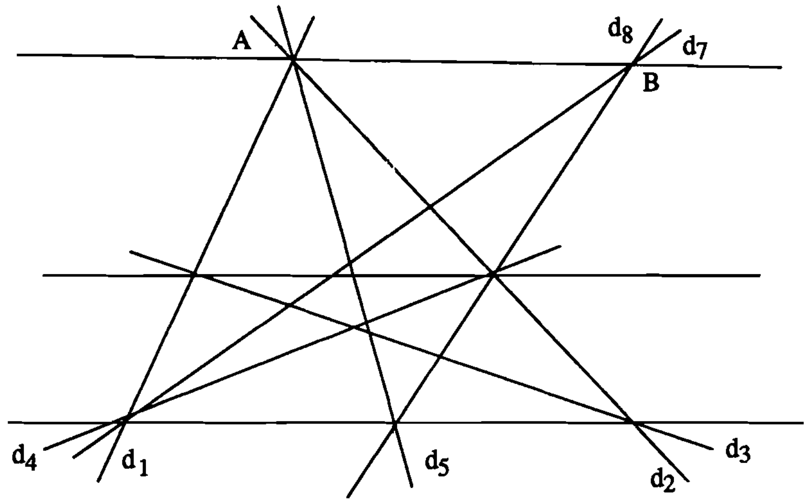
> *si a est la plus grande des trois longueurs, placer deux points B et C tels que BC = a ; dans une direction quelconque, placer un point A_1 à la distance c du point B, puis vérifier que $A_1C = b$. Si c'est le cas, le triangle est tracé ; sinon, placer A_2 sur la demi-droite $[CA_2)$ tel que $A_2C = b$; vérifier que $A_2B = c$; si ce n'est pas le cas, placer, sur la demi-droite $[BA_3)$, le point A_3 tel que $A_3B = c$. On réitère le procédé jusqu'à ce que les points A_n et A_{n-1} ne soient matériellement plus distinguables.*

En pratique, le triangle est tracé en quelques itérations avec une précision telle qu'il n'est pas possible de contester graphiquement le tracé obtenu. Les élèves de Collège qui ont oublié leur compas l'utilisent assez fréquemment « en cachette du professeur » - quitte à augmenter le tracé de deux « croisillons » passant par A, afin d'ajouter à la mystification.

Il est clair que cette solution n'est pas une construction exacte : construction approchée, elle résulte d'une suite infinie de tracés... dont il faudrait encore montrer la « convergence ». L'existence d'une solution n'est donc pas réglée par ce procédé qui, en l'état, fournit une solution pratique... quand il en fournit une ! (Il peut ne pas exister de triangle correspondant aux trois longueurs données.) C'est là le principal reproche que l'on peut faire à ce procédé : n'offrant pas la possibilité de prévoir l'éventuelle inexistence du triangle, il ne permet pas non plus de réaliser une « expérience » ni d'interpréter son échec éventuel. La connaissance du rôle de l'inégalité triangulaire est ici aussi peu pertinente que l'est la connaissance des notions d'abaque circulaire et de graphe d'un homomorphisme bilinéaire pour lire la balance de l'épicier lorsque le prix unitaire ne figure pas sur l'aiguille indicatrice. Le procédé présenté s'apparente alors à une pratique quotidienne non réfléchie qui ne fournit pas les outils de modélisation adéquats.

4.2. Construction exacte et tracé approché

Considérons le problème suivant : étant données deux droites D et D' parallèles et un point A extérieur à ces deux droites, on veut tracer à la règle seule la parallèle aux deux droites passant par A. On trouvera une réponse à ce problème en consultant la figure ci-dessous.



En comparant ce type de procédé à celui que nous avons examiné précédemment, nous pouvons dire que le premier est théoriquement approché mais qu'il est techniquement tout à fait acceptable ; et que le second, quoique théoriquement exact, ne donne que très approximativement ce qu'il prétend fournir. Ainsi, le premier satisferait pleinement le dessinateur mais serait rejeté par le mathématicien : les points de vue seraient inversés en ce qui concerne le second type de procédé.

Ce clivage est patent dès lors que l'on a affaire à un cas de non constructibilité. Pour le dessinateur il existe toujours un algorithme de construction, exact ou approché, nécessitant tels ou tels instruments, lui permettant de réaliser son projet. La notion de non constructibilité - et, par suite, celle de constructibilité - devient, en conséquence, caduque de son point de vue. Elle n'a guère de pertinence *graphique* ; elle conserve pourtant toute sa pertinence *mathématique*.

Une bibliographie relative aux thèmes traités dans cette partie sera fournie au lecteur avec la deuxième partie du travail présenté.