LE CARACTERE EXPERIMENTAL DE L'ACTIVITE MATHEMATIQUE

Yves CHEVALLARD
IREM d'Aix-Marseille

1. Les ambiguïtés de la notion d'expérience

Il est devenu presque courant de parler d'expérimentation en mathématiques. Du point de vue des mathématiques savantes elles-mêmes, toutefois, ce type d'affirmation reste encore marginal, voire discuté, et renvoie d'abord, aujourd'hui, à l'emploi de l'ordinateur à différents niveaux de l'activité mathématique au sens classique. L'expérimentation - en ce sens - interviendrait ainsi dans l'exploration de certains phénomènes mathématiques, dans l'étude de certains types de problèmes, dans la formation de conjectures, voire - l'exemple princeps est ici celui du « théorème des quatre couleurs » - dans la démonstration de théorèmes elle-même[1].

Dans les proclamations concernant *l'enseignement* des mathématiques, dans les textes officiels récents notamment[2], l'affirmation du caractère expérimental de l'activité mathématique est tout à la fois plus insistante et plus vague. Dans tous les cas cependant, deux traits semblent sous-jacents à toute idée d'expérimentation : essentiellement, celle-ci suppose une situation dans laquelle se produit l'*articulation-séparation* d'un réel *théorique* et d'un réel *empirique*, apte à être « manipulé ».

La *séparation* du réel empirique d'avec le réel théorique, son autonomie relative, fonde la puissance de vérité de l'expérience, nous assure qu'elle n'est pas la simple projection, l'*alter ego* masqué, la pure redite du réel théorique.

En sens inverse, l'*articulation* avec le réel théorique est nécessaire autant en amont de l'expérimentation (elle permet de définir une manipulation pertinente du réel empirique) qu'en son aval (elle permet de « faire parler » l'expérience à propos du réel théorique).

Le premier trait fait échapper le réel théorique à l'enfermement idéologique, au dialogue consensuel avec lui-même. Le second trait distingue l'expérience scientifique,

[1] Sur le problème des quatre couleurs, voir par exemple Dieudonné 1987, pp. 91-93 ; sur les « mathématiques expérimentales », voir Hazewinkel 1986.

[2] Nous renvoyons sur ce point à l'étude contenue dans Johsua et Johsua 1988.

l'expérimentation, de l'expérience au sens quotidien, qui ne se pose que par rapport à elle-même, et dont la leçon qu'on en peut tirer - au sens où l'on dit que l'on a tiré les leçons de l'expérience - ne s'intègre a priori en aucune organisation de savoir spécifique.

Mais il s'agit là, en tout état de cause, d'un simple schéma formel, énoncé en termes de « réel », de « concret », etc. C'est un schéma qu'il faut creuser pour en saisir toutes les ambiguïtés. Ecoutons là-dessus Dominique Lecourt parlant de l'oeuvre de Gaston Bachelard :

> Le plus profond, sans doute, de son œuvre, le plus efficace assurément aura été de montrer que la philosophie, par le biais de la catégorie générale d'expérience et de ses connexes : fait, donné, concret, réel, etc., importait dans la pratique scientifique des idées venues de la vie quotidienne, c'est-à-dire véhicules de valeurs idéologiques étrangères aux sciences[3].

L'origine de cette méprise intéressée s'énonce en peu de mots :

> ... le concept d'expérience, de fait, ou de donné, a dans la pratique scientifique un sens tout à fait étranger à son acception philosophique... C'est que, dans l'expérience scientifique, tout est construit, rien n'est donné, rien n'est immédiat, tout est solidaire d'un système de concepts soigneusement élaboré et éprouvé. Le donné est construit, le fait est un effet, le concret est abstrait[4].

C'est précisément sur la question du concret (ce que nous nommions plus haut le réel empirique) que les discours ordinaires sur l'expérience en mathématiques, et les pratiques qui, peu ou prou, leur répondent ou les inspirent, viennent buter. Aux niveaux d'enseignement les plus élémentaires (c'est-à-dire, outre l'école primaire, le cycle des classes de cinquième et sixième), le concret sera le concret *matériel,* celui des « matériels pédagogiques », des découpages et des collages, etc. A ce niveau déjà, mais aux niveaux ultérieurs surtout, on prendra encore pour concret le *numérique* et les *figures*, ou, selon la formule qu'utilisaient autrefois les dictionnaires pour « définir » les mathématiques, « le nombre et l'espace ».

C'est à ce réel empirique là que s'attachera durablement l'idée d'expérimentation. Mais déjà la notion d'expérience tend à se dissoudre, à « perdre ses marques ». Car, à vouloir juger de tout dans les seuls termes du vécu quotidien, il faut bien reconnaître que ce concret qu'elle mobilise est dès lors quelque peu abstrait. Trois poires dans une coupe à fruits, ou une roue de bicyclette appuyée contre un mur, voilà qui est concret, sans doute. Le nombre trois, ou un cercle (même non idéel, matériellement tracé sur la feuille blanche), le sont déjà un peu moins. Ils sont, au fond, des modèles, des symboles, qui, sans doute, s'enveloppent d'une substance concrète, sonore (les signifiants /trois/ et /cercle/) et graphique (le tracé du chiffre 3 et le tracé d'un cercle), mais qui ne se superposent pas au concret qu'ils modélisent. Dès lors si, par l'effet de certaines valeurs idéologiques, on entend encore parler d'expérience, ce sera dans des termes généraux, dans un flou qui trahit l'impuissance à traiter comme réel ce que la culture courante ne nous *donne* pas comme tel, mais qu'il s'agit bel et bien de *construire* comme réel - de réaliser.

---

[3] Lecourt 1985, p. 670 a.

[4] *Ibid.*

2. Entre « expérience » et « démonstration »

Suivons sur un exemple cette *volatilisation du « réel »* et la dissolution corrélative de la catégorie vulgaire d'expérience. Nous reprenons ici les figures triangulaires formées de croix nécessairement familières aux lecteurs fidèles de *Petit x* [5]. Soit par exemple la figure F(4) :

```
      x
    x   x
  x   x   x
x   x   x   x
```

Nous cherchions à déterminer, d'une manière générale, le nombre P(n) de croix dont est composée la figure F(n). Pour cela, nous avons complété la figure F(4) de la manière suivante :

```
      x
    x   x
  x   x   x
x   x   x   x
  o   o   o
    o   o
      o
```

Une telle manipulation peut encore être lue comme une *expérience.* Le laboratoire est ici le laboratoire habituel du mathématicien : la feuille blanche, la pointe qui trace ; et le résultat de l'expérience peut se lire ainsi (on voit bien ici qu'il s'agit d'une lecture instruite, orientée par une problématique déterminée) : $P(4)+(P(4)-4)=4^2$.

Mais de cette expérience « concrète », conduite sur un système nécessairement déterminé (la figure F(4), non la « figure » F(n)), nous avons tiré une conclusion de portée générale : $P(n) + (P(n) - n) = n^2$. Il y a là, dira-t-on dans le vocabulaire « philosophique » qui rôde autour de l'idée d'expérience, un fait d'*induction,* un saut qui peut être regardé comme une béance dans le travail de production de connaissances.

Le mathématicien praticien pourrait contourner ou lever la difficulté ainsi : au lieu de considérer la figure F(4), ou telle ou telle autre figure déterminée qu'il voudra, il peut déclarer considérer la figure « générale » F(n), représentée de la manière suivante :

```
                x
              x   x
            x   x   x
n         x   x   x   x
       ......................
     ..............................
x    x    x .......  x    x    x
\_______________________________/
                n
```

Cela étant, il reprendra la manipulation expérimentale réalisée plus haut sur F(4), mais en déclarant travailler ici sur F(n), et il arrivera alors à la conclusion générale déjà

---

[5] Voir Chevallard 1990, II.3.

obtenue. « On a donc, dira-t-il, $P(n) + P(n) - n = n^2$ ». La béance demeure : elle est seulement occultée par l'usage.

Mais reprenons le problème autrement. Partons cette fois, non des figures, mais des nombres « triangulaires » P(n), définis par : $P(1) = 1$, $P(2) = 1 + 2$, $P(3) = 1 + 2 + 3$, ... $P(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

On notera d'abord que l'« induction », la « béance » existent ici tout autant que dans la situation précédente : formellement, elles se marquent par ces passages mystérieux que désignent les deux groupes de trois points, qui relient, le premier une suite d'expressions numériques à une expression mixte (numéro-littérale), le second, une succession de chiffres (1, 2, 3) à une lettre (n). Pour combler cette béance (que le mathématicien praticien peut ignorer), il ne faut rien de moins qu'un axiome, qui assure la signification des définitions par induction[6]. Mais passons.

Au lieu de nous livrer à une expérience sur une ou des figures particulières prises comme paradigmatiques, génériques (c'est-à-dire supposées ne contenir rien de plus ni rien de moins que la figure « générale » F(n)), ou encore sur la figure générale F(n), nous allons travailler sur l'expression de P(n). L'expérimentation consiste alors en ceci :

1. On modifie cette expression en laissant sa valeur inchangée : la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ (de n termes) est remplacée par la somme de n + 1 termes $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$;

2. à chacun des n + 1 termes, on ajoute alors le complément de ce terme à n, successivement n, n - 1, n - 2, n - 3, ... n - n.

On a donc rajouté au total exactement le nombre P(n), et l'expression obtenue est égale à n + 1 fois le nombre n. De cette « expérience », on peut alors conclure que l'on a : $P(n) + P(n) = (n + 1)n$, d'où enfin $P(n) = \frac{n(n + 1)}{2}$.

Ce qui peut gêner, dérouter, voire irriter le lecteur, c'est que le vocabulaire de l'expérimentation est ici hors de mise selon les usages courants. Si l'expérience avec la figure F(4) avait été réalisée sur une table avec des jetons de deux couleurs par exemple - ce qui n'est guère l'habitude du mathématicien, et pour cause : il n'en a guère besoin ! -, d'aucuns n'auraient pas hésité à parler franchement d'expérience. On accordera encore, à la limite, le caractère expérimental du traitement appliqué plus haut à la figure F(4). Mais on cessera de le reconnaître dans la manipulation de l'expression P(n) que l'on vient d'effectuer. On ne verra là qu'une *démonstration*, probante ou non, non une *expérience*. L'expérience se dissimulerait-elle donc, en mathématiques, derrière les démonstrations ? La réponse à cette question exigera d'approfondir la notion d'expérimental en mathématiques.

3. L'expérience, entre système et modèles

Le débat autour du caractère expérimental de l'activité mathématique, on vient de le voir, bute sur un obstacle épistémologique déterminé : celui du caractère, « concret » ou non, accordé aux objets manipulés. Mais si l'on ignore un instant la frontière que

---

[6] Voir par exemple Halmos 1967.

trace la culture entre « concret » et « abstrait », il n'est pas de raison décisive de ne pas reconnaître à l'activité mathématique un caractère expérimental. Tout au contraire, une fois que l'obstacle a été dépassé, c'est-à-dire une fois qu'a été dissoute la catégorie vulgaire d'expérience, on aperçoit que l'activité mathématique est essentiellement expérimentale. C'est sur cet obstacle, en effet, que se concentre tout le poids de la culture, de la culture courante comme de la culture « philosophique ». Il est donc nécessaire d'effectuer, de ce point de vue, tout un travail de déconstruction des fausses évidences d'origine culturelle.

L'activité expérimentale, avons-nous dit, suppose une réalité sur laquelle va porter l'expérimentation, une réalité ayant son autonomie de fonctionnement, et qui ne soit pas la simple projection de nos désirs. Toute la question est celle de la *nature* de cette réalité. L'expérience suppose, plus précisément, un objet de l'expérience, ce que nous avons appelé au fond un *système* (en n'oubliant pas qu'un système, même matériel, est toujours construit théoriquement, n'est jamais un pur donné).

A ce système, l'expérience fera subir une *manipulation*, réglée par un *montage expérimental*. La détermination de la manipulation à effectuer se fait en fonction de ce que l'on recherche, et en fonction de la théorie (savoir et connaissances) dont on dispose. Jusqu'à un certain point, le résultat de l'expérience peut être partiellement prédit à l'aide de la théorie. Mais, si l'expérience n'est pas de pure routine, son résultat comporte a priori une certaine *incertitude* (au moins du point de vue numérique par exemple).

Nous ferons fonctionner ce schéma sur un exemple mathématique élémentaire. Soit le système constitué par deux points fixes B et C et par un point A mobile sur l'un des demi-cercles de diamètre BC (figure 1). Le triangle ABC est rectangle en A. On se demande pour quelle position de A ce triangle a une aire maximum (si une telle position existe).

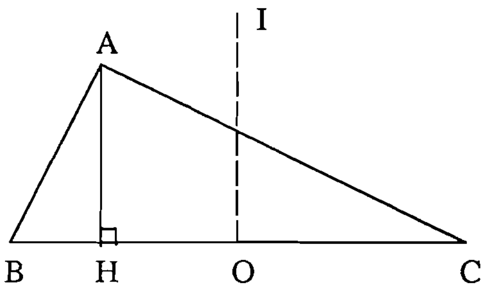

figure 1

Classiquement, on répondrait à cette question par le raisonnement suivant. L'aire du triangle ABC est donnée par la formule AH.BC/2, où H est l'intersection de la hauteur issue de A avec l'hypoténuse de ABC. Cette aire est donc maximum lorsque AH est maximum, c'est-à-dire lorsque H est le milieu O de l'hypoténuse. Le point A est alors en I, intersection de la médiatrice de l'hypoténuse avec le demi-cercle. Ainsi, le triangle ABC est d'aire maximum lorsqu'il est isocèle.

Où est, demandera-t-on, l'expérience là-dedans ? Pour éclairer le problème, il convient ici de séparer les plans du *mathématisé* et du *mathématique*, du *système* et du *modèle*. Partons du système considéré au départ. La formule donnant l'aire fournit un modèle du système (modèle qui ne modélise, bien entendu, que l'aire). On le verra mieux, on échappera davantage au « risque » de le voir ne faire qu'un avec le système, si on l'écrit sous la forme $S(x) = rx$, où l'on a posé $BC = 2r$ et $AH = x$. Le modèle, c'est alors la fonction S.

On peut, à ce moment-là, *oublier* le système initial, pour ne plus considérer que le modèle, la fonction S. Dès lors pourtant qu'on ne regarde plus que le modèle, celui-ci devient un *système*, qu'on peut étudier à son tour, ou, comme ici, sur lequel on peut posséder des connaissances antécédentes. Nous savons que S(x) est d'autant plus grand que x est plus grand : S est une fonction linéaire à coefficient directeur strictement positif. On revient alors au système de départ : l'aire du triangle ABC est d'autant plus grande que AH est plus grand. Or nous savons - admettons-le un instant du moins - que AH est maximum lorsque H est en O. D'où la réponse.

En fait, *il n'y a pas eu ici d'expérience.* Chaque fois, en effet, que nous avons rencontré un système, *nous n'avons pas eu à le manipuler pour produire des connaissances à son propos*, soit que nous ayons utilisé des connaissances antécédentes le concernant, soit que nous l'ayons modélisé pour tirer, de notre connaissance antécédente de ce système qu'est le modèle obtenu, des connaissances quant au système modélisé lui-même.

L'affirmation précédente, pourtant, doit être nuancée. Il y a bien eu une manipulation du système de départ, mais une manipulation si habituelle que nous pouvions fort bien la regarder comme anodine : le tracé de la hauteur AH (figure 1). Celle-ci est la clé de tout le reste. Cette intervention sur le système a pour objet, non de produire une connaissance nouvelle relative au système, mais de faire passer à un système nouveau, qui est en fait un modèle (graphique) du système initial. Ce que nous avons modélisé par la fonction S, c'était donc *un modèle du système initial.* Mais, cela noté, tout le reste a découlé des connaissances dont nous disposions (ou croyions disposer) à propos des différents systèmes rencontrés.

Un mot encore s'agissant d'une connaissance que nous avons tenue pour acquise : AH est maximum quand H est en O (et A en I). Pour produire cette connaissance, il faut procéder à une nouvelle manipulation du système graphique modèle du système initial : on trace le segment AO (figure 2).

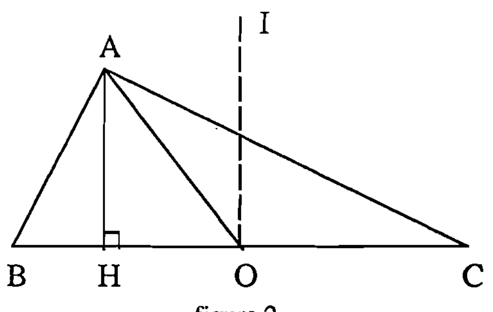

figure 2

Comme (AH) est perpendiculaire à l'hypoténuse, on peut, en vertu d'une connaissance antécédente sur les perpendiculaires et les obliques, conclure que $AH < AO$. Comme $AO = IO$, on a aussi $AH < IO$.

Reprenons maintenant le problème posé, en empruntant une autre route, que nous choisissons volontairement plus tortueuse d'apparence. Comme précédemment, à partir du système initial nous passons d'abord au système graphique constitué par la figure 2. Supposons alors que nous décidions[7] d'exprimer l'aire par $\frac{(x+y)\sqrt{xy}}{2}$ avec x = BH et y = HC. On a ici x + y = 2r. Posons u = x ; il vient y = 2r - u. Pour des raisons de symétrie (par rapport à la médiatrice de l'hypoténuse), on décrit tous les états possibles du système étudié par le modèle :

$$\begin{cases} T(u) = r\sqrt{u(2r-u)} \\ 0 \leq u \leq r, \end{cases}$$

où T(u) est l'aire du triangle (avec BH = u).

On observera d'abord que le modèle comporte une double inégalité qui n'était pas apparue antérieurement : son absence explique que l'on ait dû, après avoir étudié la fonction S, revenir au système pour déterminer la valeur maximum possible de x = AH. Ici, le modèle permet une séparation plus poussée d'avec le système : tout le problème est transféré au modèle, qui devient pour nous un système (« algébrique ») à étudier.

C'est alors qu'on va effectuer *une suite d'expériences.* Admettons que la considération du système de départ, lorsque le point A varie de B en I, pousse à conjecturer que l'aire est maximum lorsque A est en I, c'est-à-dire lorsque H est en O, soit encore lorsque u = r. L'aire est à ce moment-là égale à

$$T(r) = r\sqrt{r(2r-r)} = r\sqrt{r^2} = r^2.$$

On conjecture donc que si $0 \leq u < r$, on a : $T(u) < r^2$.

On effectue une première expérience sur T(u), qui consiste à manipuler cette expression pour la réécrire sous la forme : $T(u) = r^2 - (r^2 - T(u))$. Cette expérience permet de reformuler notre conjecture : celle-ci revient à dire que la fonction $D(u) = r^2 - T(u)$ est strictement positive lorsque $0 \leq u < r$.

C'est sur le système qu'est la fonction D que va alors porter une seconde expérience, beaucoup plus sophistiquée. Mais soulignons d'abord qu'on retrouve ici un déplacement familier dans les sciences expérimentales : alors que l'on étudie un certain type de phénomènes, relatif à une certaine classe de systèmes, l'expérience va porter sur un « montage » qui, pour l'œil non averti du profane, *semblera n'avoir rien de commun avec le point de départ de l'étude.*

L'expérience consistera en une suite de manipulations qui, à partir du système D, feront apparaître des modèles successifs qui seront autant de systèmes soit à modéliser à leur tour, soit à étudier comme systèmes, pour produire des connaissances en retour relatives au système initial.

L'idée de l'expérience - le « plan expérimental » - est la suivante : on va faire disparaître la différence entre radicaux qui figure dans l'expression de D, afin d'obtenir un polynôme en u, dont il devrait se révéler qu'il est positif, au moins pour u compris entre 0 et r.

En fait, on peut faire une *prédiction* beaucoup plus précise : puisque le polynôme qu'on obtiendra sera du second degré en u, puisqu'il doit s'annuler pour u = r, s'il est positif (pour u compris entre 0 et r), il doit se présenter, à un facteur constant positif près, sous la forme du carré $(r - u)^2$. C'est cela que la *théorie* (mathématique) dont

---

[7] Voir Chevallard 1990, I.4.

nous disposons, jointe à l'analyse préalable du système algébrique à étudier et à la conjecture faite, nous porte à attendre comme « résultat de l'expérience ».

Effectuons maintenant l'expérience annoncée.

1. Une première manipulation consiste à mettre r en facteurs :

$$D(u) = r^2 - r\sqrt{u(2r-u)} = r(r - \sqrt{u(2r-u)}\,)$$

On obtient ainsi un premier modèle (M1) du système D.

2. La seconde manipulation est, pour l'élève-expérimentateur, tout à fait classique - elle consiste à « multiplier par la quantité conjuguée » :

$$D(u) = \frac{r(r^2 - u(2r - u))}{r + \sqrt{u(2r-u)}}$$

On obtient alors un second modèle (M2) de D.

3. La troisième manipulation va porter sur cette composante du système qu'est le facteur $N(u) = r^2 - u(2r - u)$ figurant au numérateur (les autres facteurs sont tous positifs, on peut donc les ignorer si l'on s'intéresse seulement au signe de la fonction D) :

$$N(u) = r^2 - u(2r - u) = r^2 - 2ur + u^2 = (r - u)^2.$$

On obtient par là un troisième modèle de D, à savoir l'expression

$$\frac{r(r - u)^2}{r + \sqrt{u(2r - u)}}$$

Notre connaissance des systèmes « expressions algébriques » nous montre que cette dernière expression est toujours positive. Il en est donc de même de D (puisqu'ici les modélisations successives se sont faites en conservant les valeurs des expressions successivement apparues). Cela confirme - c'est-à-dire prouve - que l'aire est maximum quand A est en I.

4. L'expérimental en mathématiques

Une conclusion importante des considérations précédentes est que si, comme dans les sciences dites expérimentales, il y a bien de l'expérimental en mathématiques, là notamment où la raison commune ne l'attend pas et ne le voit pas, tout cependant n'y est pas expérimental. *Il y a expérience quand il y a manipulation d'un système.* Or la construction d'un modèle n'appelle pas forcément une manipulation du système à modéliser. En revanche, l'étude du modèle appelle presque toujours *une expérience sur le modèle devenu (fonctionnellement) système*, afin de produire des connaissances relatives au système, ou pour produire un modèle du modèle (récurrence des modèles). L'expérience se concentre dans le *travail du modèle.*

On notera en particulier que la « mise en relation » d'un système et d'un modèle de ce système n'engage pas nécessairement une activité de type expérimental. Pour souligner ce phénomène, nous allons reprendre un exemple déjà abordé. Supposons que nous voulions obtenir l'expression de la mesure AH de la hauteur d'un triangle rectangle ABC en fonction des mesures BH et HC - expression que nous avons implicitement utilisée plus haut.

Nous supposons que nous savons (il s'agit-là d'une connaissance générale à propos des figures du plan ou de l'espace) que, lorsqu'on agrandit ou diminue une figure par une homothétie, tous les segments de la figure sont agrandis ou diminués dans le même rapport. Pour tirer avantage de cette connaissance, nous allons paramétrer le triangle par la demi-mesure de l'hypoténuse, soit r, et le nombre x (sans dimension, avec $0 \leq x \leq 1$) tel que HO = xr. On cherche donc la fonction f(x, r) telle que : AH = f(x, r). On passera ensuite aisément du paramétrage (x, r) au paramétrage (BH, HC) par des formules dont l'établissement résulte de notre connaissance antécédente de la géométrie, et non d'une expérience menée *hic et nunc* : $BH = r - xr = r(1 - x)$ et $HC = r + xr = r(1 + x)$.

La connaissance énoncée plus haut permet alors d'écrire : $f(x, r) = rf(x, 1)$. Il y a là un passage du système au modèle à construire, *non une expérience*. Posons maintenant $f(x, 1) = k(x)$. C'est la fonction k(x), $0 \leq x \leq 1$, qu'il s'agit de déterminer. Considérons un triangle ABC dans lequel BC = 2, i.e. pour lequel r = 1. Le triangle AHO est rectangle en H et l'on a : $AH = f(x, 1) = k(x)$, AO = 1, HO = x. La relation de Pythagore permet alors d'écrire : $k(x)^2 = 1 - x^2$. D'où $k(x) = r\sqrt{1 - x^2}$. Les relations déjà écrites entre les deux paramétrages montrent alors que $BH.HC = r^2(1-x^2)$. On a donc : $AH = \sqrt{BH.BC}$ comme prévu. L'expression de k(x) obtenue ici procède certes d'une mise en relation du système et du modèle : mais ce jeu entre système et modèle n'a en lui-même rien d'expérimental.

Il n'en aurait pas été de même si nous avions eu à produire la connaissance relative aux effets d'une homothétie sur une figure : celle-ci aurait pu procéder par une expérience graphique[8]. De même si, à partir de la formule $AH = r\sqrt{1 - x^2}$, on voulait déterminer pour quelle valeur de x ($0 \leq x \leq 1$), AH est maximum, on pourrait procéder à une expérience *portant sur l'expression obtenue*, $r\sqrt{1 - x^2}$. Conjecturant que AH est maximum pour x = 0, on « manipulerait » ainsi cette expression :

$$r\sqrt{1 - x^2} = r - (r - r\sqrt{1 - x^2}) = r - r(1 - \sqrt{1 - x^2})$$

$$= r - \frac{r(1 - (1 - x^2))}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = r - \frac{rx^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

La dernière expression obtenue montre alors que AH est maximum lorsque x = 0.

Le lecteur aura observé que les manipulations précédentes, autrement dit l'expérience conduite sur l'expression $r\sqrt{1 - x^2}$, n'étaient en fait nullement nécessaires. On aurait pu en effet conclure, directement sur l'expression initiale, que celle-ci est maximum pour $0 \leq x \leq 1$ lorsque x = 0. Mais j'ajouterai ici, non sans perfidie, que nombre d'élèves de lycée, mis devant ce problème, se seraient vraisemblablement lancés dans une autre expérience tout aussi inutile : le calcul de la dérivée de $\sqrt{1 - x^2}$ (en vue d'étudier les variations de cette fonction sur [0,1]). Il y a

---

[8] Sur la notion d'expérience graphique, voir Mercier et Tonnelle 1992.

là un thème de réflexion essentiel du point de vue de l'éducation mathématique au lycée comme au collège, que je ne ferai que mentionner ici : celui du rôle et de la pertinence des « gestes expérimentaux » dans le travail mathématique.

L'enseignement prodigué au collège et au-delà apporte aux élèves la connaissance d'un certain nombre de *manipulations expérimentales, en algèbre comme en géométrie*. Ces manipulations sont en principe les plus fréquemment nécessaires dans le traitement que les élèves doivent faire subir aux systèmes algébriques et géométriques auxquels ils sont couramment confrontés.

On reconnaîtra en même temps que ces répertoires de manipulations, en eux-mêmes déjà fortement stéréotypés, sont pourtant souvent mobilisés de manière formelle, rigide, dénuée de toute « intuition expérimentale ». L'idée de la maîtrise du calcul algébrique *fonctionnel*, développée dans un travail antérieur[9], n'est au fond rien d'autre que l'idée de la maîtrise des *choix expérimentaux pertinents* dans la manipulation des expressions algébriques.

Une autre remarque encore. Ce qu'on peut appeler le « besoin expérimental », en mathématiques, est à la base d'un phénomène constamment observé : l'apparition - on pourrait dire la cristallisation - *de nouveaux objets*. A partir de l'idée d'une variété d'objets, on définira la notion d'ensemble, obtenant ainsi des objets sur lesquels on pourra définir une véritable algèbre. A partir de l'idée de distance séparant deux points on en viendra à définir la notion de distance, être mathématique apte à être manipulé (par exemple : si d prend ses valeurs de 0 à plus l'infini, $d' = d/(1 + d)$ est encore une distance, qui prend ses valeurs entre 0 et 1). A partir de la simple idée de correspondance entre objets, on passera à l'objet « fonction », dont on pourra étudier les propriétés (est-elle croissante ? décroissante ? etc.). A partir de l'idée d'un ensemble de fonctions, à celle d'un espace vectoriel de fonctions, etc.[10]. Ces objets pourront alors être manipulés comme systèmes et comme modèles, comme objets d'étude et comme outils d'étude.

On voit ordinairement dans le processus de création d'objets mathématiques une montée de l'abstraction. La réalité est tout bonnement contraire : ces objets nouveaux, de « niveau supérieur », constituent le concret dont se nourrit l'activité expérimentale en mathématiques. Il appartient à l'enseignement de réconcilier la culture avec ce concret-là, sans lequel il n'est pas d'activité mathématique possible.

Références

Chevallard Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège : la notion de modélisation, *Petit x*, 19, pp.43-75.

Chevallard Y. (1990), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège : voies d'attaque et problèmes didactiques, *Petit x*, 23, pp.5-38.

Dieudonné J. (1987), *Pour l'honneur de l'esprit humain - Les mathématiques aujourd'hui*, Hachette, Paris.

[9] Voir Chevallard 1989, pp. 46-49.

[10] Sur le thème de la création d'objets mathématiques, voir Dieudonné 1987, chapitre V.

Halmos P.R. (1967), *Introduction à la théorie naïve des ensembles*, Gauthier-Villars, Paris, et Mouton, Paris-La Haye, deuxième édition 1970.

Hazewinkel M. (1986, Experimental Mathematics, *in* J.W. de Bakker, M. Hazewinkel et J.K. Lenstra (eds), *Mathematics and Computer Science*, North-Holland, New York, Oxford, Tokyo.

Johsua M.-A. et Johsua S. (1988), Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique (première partie), *Recherches en didactique des mathématiques*, 8, 3, pp.231-266.

Lecourt D. (1985), Expérience, *Encyclopaedia Universalis*, 7, Paris, pp.668-670.

Mercier A. et Tonnelle J. (1992), Autour de l'enseignement de la géométrie au collège : vers une étude rationelle de l'espace et des objets de l'espace, *Petit x*, 29, pp.15-56.