DIFFICULTES RENCONTREES PAR DES ELEVES DE CINQUIEME EN CE QUI CONCERNE LA DISSOCIATION AIRE/PERIMETRE POUR DES RECTANGLES[1]

Paula MOREIRA BALTAR
DidaTech - U.J.F. - Grenoble
Claude COMITI
DidaTech et I.U.F.M. - Grenoble

Introduction

Plusieurs travaux portant sur l'enseignement et l'apprentissage du concept d'aire de surface plane ont montré l'importance que joue, dans l'acquisition de la notion d'aire, la dissociation de l'aire et du périmètre. Douady et Perrin-Glorian (1989) ont proposé et exp
érimenté une ingénierie didactique permettant de dépasser certaines difficultés liées à l'acquisition de la notion d'aire mais elles constatent que cela n'empêche pas des phénomènes de non-dissociation de réapparaître dans des contextes particuliers.

Dans le travail proposé ci-dessous, nous nous proposons d'étudier les difficultés rencontrées par les élèves de collège -classe de cinquième- pour dissocier aire et périmètre d'un rectangle, et notamment de repérer, parmi leurs sources de difficulté, l'importance de la mise en oeuvre du "théorème-en-acte" suivant : "une somme (respectivement un produit) ne peut augmenter si l'un des termes (respectivement l'un des facteurs) diminue".

I. Cadre du travail et problématique

1.1 Cadre de travail

Pour ce travail, concernant le problème de la dissociation de l'aire et du périmètre de rectangles, nous nous situons dans le cadre des recherches développées par Rogalski (1982), Balacheff (1988) et Douady & Perrin-Glorian (1989).

Les recherches développées par Douady & Perrin-Glorian (1989) sur le concept d'aire ont mis en évidence les points suivants :

---

[1] Cet article est la suite d'un travail fait dans le cadre du DEA de Didactique des Disciplines Scientifiques de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

«petit x» n° 34 pp. 5 à 29, 1993-1994

- la construction de la notion d'aire exige la dissociation de trois pôles : le pôle géométrique, avec les surfaces ; le pôle des grandeurs, avec les aires - notion indépendante à la fois de la forme et de quelque unité de mesure que soit - et le pôle numérique, avec les mesures ;

- une identification trop précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs (ici longueurs et aires) ;

- la dissociation entre aire et nombre ne vient pas du savoir mathématique. La construction de la notion d'aire en tant que grandeur a des raisons didactiques : "...cet objet d'enseignement n'existe en fait pas dans le savoir mathématique où par le choix d'une surface unité, on établit une correspondance entre surfaces et nombres : l'invariant des surfaces d'une même classe est un nombre" (Perrin-Glorian, 1989-1990, p.12) ;

- le point de vue généralement adopté dans l'enseignement est celui de choisir une unité et puis d'identifier aires et mesures. Dans ce cas il n'y a que deux pôles retenus : surfaces et nombres ;

- la conception d'aire comme nombre obtenu par un calcul à partir d'une formule paraît, chez certains élèves, devenir dominante dès qu'elle est introduite, et semble "éluder chez eux toute autre considération".

Douady et Perrin-Glorian attribuent ces difficultés au fait qu'il n'y a pas de travail sur la notion d'aire comme grandeur autonome. Tandis que Rogalski, dans son analyse, met l'accent sur la liaison entre ces difficultés et les propriétés spécifiques de la bi-dimensionnalité.

Les recherches développées par Rogalski mettent en évidence les problèmes rencontrés par les élèves dans l'acquisition des relations entre les différentes quantités spatiales. En particulier, "ces relations mettent en oeuvre un double processus de différenciation et de coordination : différenciation de propriétés simultanément présentes dans un objet ou une figure (la longueur du bord/la surface intérieure ; la surface d'un solide/son volume...) et coordination de ces propriétés de façon non seulement qualitative mais quantitative, aboutissant aux équations aux dimensions :

" $S = L \times L$, $V = S \times L = L \times L \times L$" (Rogalski, 1982, p. 348).

Les travaux de Vinh Bang et Lunzer (1965) ont mis en évidence l'importance des difficultés liées au passage d'opérations de compensation "additive" (suffisantes pour traiter les questions de conservation de longueurs) aux compensations "multiplicatives" (nécessaires pour travailler sur la conservation des aires et volumes).

De la thèse de N. Balacheff (1988) sur les processus de preuve mis en oeuvre par les élèves, et plus particulièrement du chapitre s'intéressant aux concepts d'aire et périmètre, nous avons retenu l'organisation du fonctionnement des élèves selon deux types de conception :

Conception géométrique (C_1) : conception selon laquelle "les élèves confondent aire et surface, périmètre et contour",

Conception numérique (C_2) : conception dans laquelle "les assertions sont traitées en référence aux formules de calcul de l'aire et du périmètre".

Dans les conceptions de type C_1 domine une notion forme, dans les conceptions de type C_2 domine une notion nombre.

D'ailleurs, Douady et Perrin-Glorian montrent que "...au sujet de l'aire, les élèves développeraient une "conception forme" liée au cadre géométrique ou une conception nombre liée au cadre numérique, ou les deux mais de façon indépendante, et ils traiteraient les problèmes sans établir de relation entre les deux points de vue" (Douady et Perrin--Glorian, 1989, p. 395).

Balacheff signale encore que "dans le cadre numérique, les propriétés arithmétiques utilisées peuvent résulter d'une utilisation des formules d'aire et de périmètre sous le contrôle sémantique d'une conception de type C_1, ou de la mise en oeuvre d'un théorème-en-acte[2] arithmétique : si on augmente une somme (resp. un produit) alors chacun des termes (resp. des facteurs) est augmenté".

1.2 Problématique

Il s'agit ici d'approfondir l'étude des sources des difficultés des élèves à propos de la dissociation de l'aire et du périmètre et non d'élaborer des séquences d'apprentissage susceptibles de faire évoluer les connaissances des élèves.

Nous nous proposons d'étudier plus particulièrement, parmi les difficultés des élèves pour dissocier aire et périmètre, celles qui sont liées aux conceptions numériques, c'est-à-dire celles qui apparaissent quand les élèves semblent avoir, à propos des aires, une notion nombre.

Nous avons fait ce choix pour plusieurs raisons, que nous avons déjà abordées ci-dessus :

- le point de vue généralement adopté dans l'enseignement est celui d'identifier aires et nombres, à travers le choix d'une unité ;
- la dissociation des aires (pôle grandeurs) et des mesures (pôle numérique) a des raisons essentiellement didactiques ;
- dès que les formules du calcul de l'aire sont introduites, la conception numérique paraît être dominante.

Parmi les sources de difficultés des élèves pour dissocier aire et périmètre, l'un des aspects que nous souhaitons étudier tout particulièrement, est le rôle de la mise en oeuvre du théorème-en-acte (TA1) proposé par N. Balacheff - "si on augmente une somme (resp. un produit) alors chacun des termes (resp. des facteurs) est augmenté" - et/ou d'un autre théorème en acte très proche de ce dernier - "une somme (resp. un produit) ne peut augmenter si l'un des termes (resp. facteurs) diminue" (TA2).

II. Choix méthodologiques

2.1 Choix entre questionnaire individuel écrit et situation d'interaction

Nous avons choisi de faire passer à cinq classes de $5^{ème}$ - choisies sur la base de l'acceptation des enseignants - regroupant 99 élèves, un questionnaire écrit individuel

---

[2] Le concept de théorème-en-acte d'après Gérard Vergnaud désigne "les propriétés, des relations saisies et utilisées par l'élève en situation de résolution de problème, étant entendu que cela ne signifie pas qu'il est capable pour autant de les expliciter ou de les justifier". Notons qu'un théorème en acte n'est pas forcément vrai.

car cette méthode nous permettait de recueillir des informations sur un nombre plus significatif d'élèves dans le peu de temps dont nous disposions. Nous espérions en particulier que l'application du questionnaire à une centaine d'élèves de 5ème nous permettrait de formuler des hypothèses sur les causes des difficultés des élèves à propos de la dissociation aire-périmètre, hypothèses qui pourraient être testées dans des études postérieures.

2.2 Choix du type de questionnaire

Plutôt que de proposer une suite de questions directes soit ouvertes soit fermées, nous avons élaboré un questionnaire dans lequel les élèves étaient amenés à prendre des décisions sur la validité d'assertions supposées "formulées" par d'autres élèves[3].

Ce type de situation permet en effet à l'élève d'adopter une position plus critique par rapport à ce qui est proposé. Elle exige de plus que l'élève justifie son accord ou son désaccord, ce qui l'amène à se sentir responsable de sa réponse davantage que dans une situation habituelle de résolution d'exercices où les bonnes réponses sont détenues par le Maître. Ces justifications, traces écrites de son raisonnement, sont les observables à partir desquels nous avons conduit notre analyse.

2.3 Choix du niveau de classe

L'enseignement des concepts d'aire et périmètre commence au cours moyen. A ce niveau il fait partie du chapitre intitulé “Mesures de quelques grandeurs”. Au Collège, l'étude des mesures, et en particulier des concepts d'aire et de périmètre "n'est jamais l'objet d'un paragraphe du programme mais on les rencontre à propos de l'étude des transformations ponctuelles ou de l'organisation et de la gestion de données, comme l'occasion d'étudier des fonctions" (Perrin-Glorian, 1989, p. 21).

Si nous avons choisi de proposer le questionnaire à des élèves de 5ème, c'est que l'aire et le périmètre d'un rectangle sont considérés comme acquis et que l'on peut donc considérer que les connaissances des élèves sur ces notions sont disponibles.

2.4 Dispositif expérimental retenu

Le professeur explique aux élèves qu'ils vont participer à un travail de recherche et que leurs réponses ne seront pas prises en compte pour leur évaluation. Il s'agit pour eux de fournir des éléments nécessaires au travail du chercheur.

Puis il leur distribue la feuille qui figure ci-dessous.

Pour répondre à ce questionnaire les élèves disposent de leur trousse. Cependant l'utilisation de crayon papier, d'effaceur et de gomme est interdite. S'ils désirent rectifier une réponse, ils doivent le faire sur une seconde feuille de réponses, ceci afin de permettre d'analyser l'évolution de leurs réponses et le rôle éventuel des rétroactions des questions finales sur celles du début.

---

[3] Bien que l'élaboration de ces formulations ait donné lieu à des discussions avec des enseignants de Collège, afin de nous assurer de leur compréhension par des élèves de ce niveau, il est possible que certaines d'entre elles aient posé des problèmes aux élèves avec lesquels nous avons travaillé.

Voici le texte du questionnaire.

Des élèves de $5^{ème}$ ont travaillé sur l'aire et le périmètre de rectangles. Voici ce qu'ils disent à propos d'un rectangle A de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.
Que penses-tu de ce que raconte chacun de ces élèves ?
Es-tu d'accord ou non avec chacun d'entre eux ?
Explique pourquoi à chaque fois.

Pierre :	Le périmètre de A est 16 cm .
Michel :	Le rectangle A a pour aire 15 cm^2.
Jean :	Je peux trouver un rectangle d'aire plus petite que celle de A et de périmètre plus grand que celui de A.
Christine :	Un rectangle d'aire plus grande que celle de A a obligatoirement à la fois une longueur et une largeur plus grandes que celles de A.
Guy :	Un rectangle dont l'un des côtés est plus petit que la largeur de A a obligatoirement un périmètre plus petit que celui de A.
Marie :	Je peux trouver un rectangle dont l'un des côtés mesure 2 cm et dont l'aire est plus grande que celle de A.
Sophie :	Je peux trouver un rectangle dont l'un des côtés mesure 6 cm et dont le périmètre est plus petit que celui de A.
Thérèse :	Un rectangle dont le périmètre est égal à celui de A a obligatoirement même aire que A.

III. Analyse a priori

Le but de l'analyse a priori est de déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens.

Cette analyse comporte les points suivants :
- une analyse mathématique ;
- une analyse didactique.

3.1 Analyse mathématique

Etant donné un rectangle de côtés x_0 et y_0, son aire est donnée par le produit $x_0 \times y_0$ et son périmètre par la somme $2 \times (x_0+y_0)$. Donc, pour étudier les liens entre les variations de l'aire et du périmètre, nous pouvons nous ramener à l'étude des variations entre les deux quantités numériques :

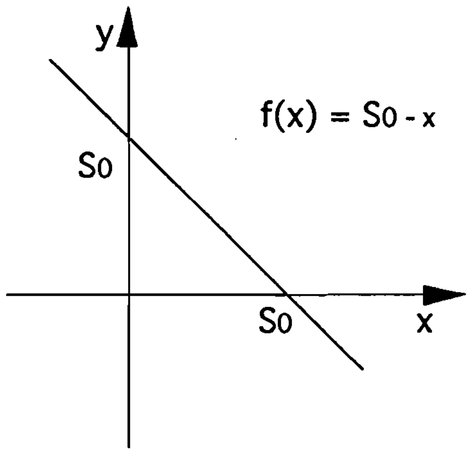
$S = x+y$ et $P = x \times y$.

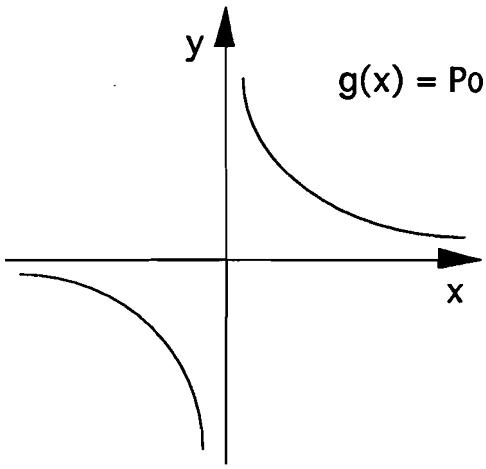
Il s'agit de chercher les valeurs des dimensions de rectangles dont l'aire est plus grande que celle du rectangle donné et le périmètre plus petit.

Soit x_0, $y_0 > 0$, strictement différents ; nous nous placerons dans le cas $x_0 > y_0$.

$x_0 + y_0 = S_0$ et $x_0.y_0 = P_0$. Montrons qu'il est toujours possible de trouver une paire (x_1, y_1) tel que: $x_1 + y_1 = S_1 < S_0$ et $x_1 . y_1 = P_1 > P_0$.

Soit $f(x) = S_0 - x$ et $g(x) = P_0 /x$.

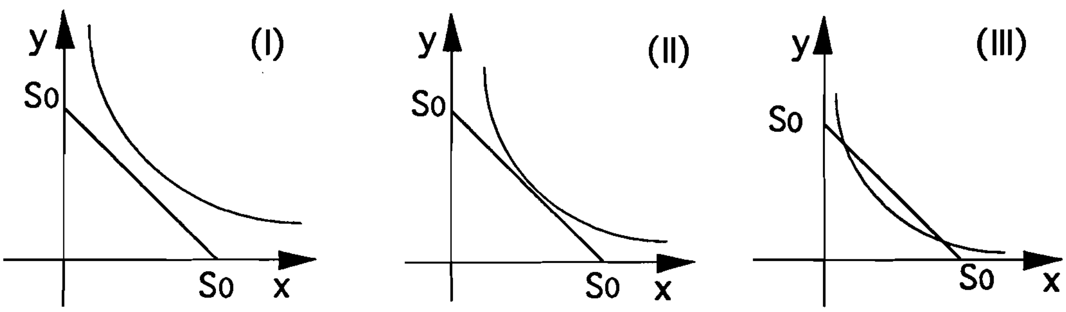




f et g sont monotones décroissantes.

Dans le cas qui nous intéresse, x et y sont des dimensions de rectangles. Donc, $x,y > 0$.

Les seules positions relatives des graphiques de la droite et de l'hyperbole, pour les valeurs de x et y non négatifs, sont les suivantes:



Les points communs à f(x) et g(x) sont les points d'abscisse u tels que
$f(u) = g(u)$. Donc,
$S_0 - u = P_0 / u \Rightarrow u^2 - S_0u + P_0 = 0 \Rightarrow$
$u_1 = 1/2(S_0 - (S_0^2 - 4P_0)^{1/2})$ et $u_2 = 1/2(S_0 + (S_0^2 - 4P_0)^{1/2})$
Le graphique (I) correspond à $S_0^2 - 4P_0 < 0$.
Le graphique (II) correspond à $S_0^2 - 4P_0 = 0$.
Le graphique (III) correspond à $S_0^2 - 4P_0 > 0$.

Or, $S_0^2 - 4P_0 = (x_0 + y_0)^2 - 4x_0y_0 = x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2 - 4x_0y_0 =$
$x_0^2 - 2x_0y_0 + y_0^2 = (x_0 - y_0)^2 \geq 0$.

Nous pouvons alors remarquer que :

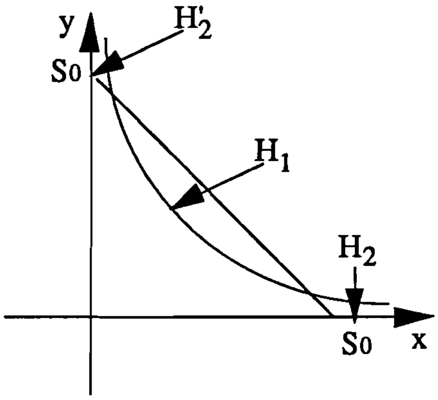
1) $S_0^2 - 4P_0$ ne peut pas être inférieur à zéro. Donc, la position (I) est impossible.

2) $S_0^2 - 4P_0 = 0$ si et seulement si $x_0 = y_0$. La position (II) correspond au cas où le rectangle initial est un carré.

3) Si $x_0 \neq y_0$, $S_0^2 - 4P_0$ est toujours strictement positif. Cette situation correspond au graphique (III).

f(x) et g(x) ont alors deux points d'intersection d'abscisses u_1 et u_2 tels que :
$u_1 = 1/2(S_0 - (S_0^2 - 4P_0)^{1/2}) = 1/2((x_0 + y_0) - (x_0 - y_0)) = y_0$
$u_2 = 1/2(S_0 + (S_0^2 - 4P_0)^{1/2}) = 1/2((x_0 + y_0) + (x_0 - y_0)) = x_0$

Donc, si le rectangle initial n'est pas un carré, la position relative des graphiques de $f(x) = S_0 - x$ et $g(x) = P_0/x$ est la suivante :



Il existe donc des points de coordonnées (x,y) x,y >0 tels que
$x+y < S_0$ et $x.y > P_0$ (zone H1).
Il existe également des points (x,y) , x,y > 0 tels que
$x+y > S_0$ et $x.y < P_0$ (zones H2 et H2').
Caractérisons les points qui appartiennent aux régions H1 et H2.
Les points (x_1, y_1) qui appartiennent à H1 sont tels que
$S_1 = x_1 + x_2 < S_0$ et $P_1 = x_1 . x_2 > P_0$.
On a alors $u_1 < x_1 < u_2$ et $(P_0/ x_1) < y_1 < S_0 - x_1$.

Autrement dit, étant donné un rectangle R_0 de dimensions x_0 et y_0, les rectangles dont le périmètre est plus petit que celui de R_0 ($S_1 = x_1 + x_2 < S_0$) et dont l'aire est plus grande que celle de R_0 ($P_1 = x_1.x_2 > P_0$) sont tels que leurs dimensions, x_1 et y_1, sont comprises dans les intervalles suivantes :

$y_0 < x_1 < x_0$
$(P_0/ x_1) < y_1 < S_0 - x_1.$

Réciproquement, tous les rectangles dont les dimensions sont comprises dans les intervalles ci-dessus sont tels que leurs aires sont plus petites que celle de R_0 et leurs périmètres sont plus grands que celui de R_0.

En ce qui concerne la zone H2, les coordonnées des points (x_2,y_2) qui lui appartiennent sont donnés par les intervalles suivants :

$x_2 < y_0$ ou $x_2 > x_0$ et
$S_0 - x_2 < y_2 < P_0/ x_2.$

Les points de cette zone sont tels que la somme de ses coordonnées est plus grande que S_0 et leur produit est plus petit que P_0. Autrement dit, ces points correspondent aux rectangles dont le périmètre est plus petit que celui R_0 et l'aire plus grande que celle de R_0.

3.2 Analyse didactique

La question qui nous intéresse est l'analyse des sources des difficultés des élèves lorsqu'ils mettent en oeuvre une conception numérique - traitement des assertions en référence aux formules de calcul.

Nous avons choisi de travailler sur le rectangle, car les formules de calcul de l'aire et du périmètre du rectangle nous permettent d'envisager des relations entre les difficultés de dissociation aire/périmètre et celles liées à la somme et le produit (où s'inscrit en particulier la mise en oeuvre des théorèmes en acte TA1 et TA2[4]).

3.2.1 Variables didactiques

Les principales variables didactiques sont :

- le statut du rectangle sur lequel on va faire travailler les élèves : un rectangle quelconque ou un rectangle dont les dimensions sont données.

Nous considérons que l'évocation d'un rectangle de dimensions quelconques pourrait induire un travail dans l'une des directions suivantes :

* cadre algébrique - ce qui n'est pas possible pour des élèves de 5ème qui ne connaissent pas l'algèbre ;

* cadre géométrique, que nous ne voulons pas favoriser par notre choix de situation.

Nous avons donc choisi un rectangle donné par la longueur de ses côtés afin d'induire, dès le départ, le travail des élèves dans le cadre numérique. Ceci nous permettait de plus de pouvoir contrôler, dès le début du questionnaire, si les élèves savent calculer aire et périmètre d'un rectangle.

- le fait de dessiner ou non le rectangle sur la feuille.

Nous avons choisi de ne pas reproduire le rectangle sur la feuille afin de ne pas introduire nous-même le cadre géométrique. Ceci nous permet de plus de pouvoir noter pour chaque élève s'il éprouve le besoin d'utiliser les dessins à propos d'une telle question.

- les dimensions des côtés.

En ce qui concerne le choix des longueurs des côtés, nous avons fait l'hypothèse qu'en 5ème, la plupart des élèves ne travailleraient que sur les entiers - fait observé par N. Balacheff dans son expérimentation à propos de l'aire et périmètre de rectangles. Nous avons choisi les mesures de 3cm et 5cm. En effet ces mesures sont telles que les élèves peuvent trouver facilement des exemples ou des contre-exemples avec des côtés entiers, mais ces exemples et contre-exemples ne sont pas très nombreux - si on se restreint aux nombres entiers - comme on le mettra en évidence dans l'analyse des réponses et modes de raisonnement attendus (§ 2.3).

[4] TA1 : si on augmente une somme (resp. un produit) alors chacun des termes (resp. des facteurs) est augmenté.

TA2 : une somme (resp. un produit) ne peut augmenter si l'un des termes (resp. facteurs) diminue.

3.2.2 Choix des assertions et de leur ordre

Les assertions Pierre et Michel facilitent pour les élèves une entrée dans la situation qui leur est proposée. De plus, leurs réponses à ces questions nous permettent de vérifier si les élèves savent bien calculer l'aire et le périmètre d'un rectangle. Enfin, ces questions servent aussi à orienter les élèves vers le cadre numérique de façon à privilégier l'apparition de conceptions de type C_2 (conceptions numériques, au sens de Balacheff).

On peut reformuler les assertions suivantes, comme :
Jean : Il existe un rectangle J tel que $A_J < A_A$ *et* $P_J > P_A$.
Christine : Pour tout rectangle C, si $A_C > A_A$ *alors* $L_C > L_A$ *et* $l_C > l_A$.
Guy : Pour tout rectangle G, si $l_G < l_A$ *alors* $P_G < P_A$.
Marie : Il existe un rectangle M dont l'un des côtés mesure 2 cm et dont l'aire est plus grande que celle de A.
Sophie : Il existe un rectangle S dont l'un des côtés mesure 6 cm et dont le périmètre est plus petit que celui de A.
Thérèse: Pour tout rectangle T, si $P_T = P_A$ *alors* $A_T = A_A$.

Nous avons formulé ces assertions de façon qu'il soit possible de justifier chaque réponse exacte en utilisant des exemples (pour les assertions vraies) ou des contre-exemples (pour les assertions fausses).

Pour Jean, Marie et Sophie il suffit de donner un exemple pour prouver l'existence du rectangle respectant les consignes données et donc pour prouver la vérité des assertions. Les assertions Christine, Guy et Thérèse sont fausses, les réponses correctes peuvent être justifiées par des contre-exemples.

Les assertions Jean et Thérèse mettent en relation l'aire et le périmètre, les assertions Christine et Guy mettent en relation soit l'aire, soit le périmètre, avec les dimensions du rectangle.

L'assertion Jean, placée en tête des autres assertions, permet de mettre en évidence les élèves qui dissocient aire et périmètre.

Les assertions Guy et Christine sont formulées de façon à voir si les élèves mettent en oeuvre les théorèmes-en-acte TA1 ou TA2. Dire que Christine (resp. Guy) dit vrai peut revenir à affirmer, dans le cadre numérique, que "si on augmente un produit alors chaque facteur va augmenter" (resp. "une somme ne peut pas augmenter si l'un de ses termes diminue").

Les assertions Marie et Sophie, tout en permettant de vérifier la capacité des élèves à travailler sur une dimension, cas plus simple puisqu'un côté est fixé, peuvent amener ces derniers à construire des exemples mettant en défaut les théorème-en-actes TA1 et TA2.

Il faut remarquer que, quand on dit que l'une des dimensions est fixée, ce n'est pas par rapport au rectangle initial mais par rapport à ce qui est laissé à la charge de l'élève. Dans ces assertions nous changeons préalablement l'une des dimensions et nous demandons à l'élève de changer l'autre de façon à augmenter/ diminuer soit l'aire, soit le périmètre.

Enfin, l'assertion Thérèse pose autrement la question de la dissociation de l'aire et du périmètre.

Cette assertion suit les assertions Marie et Sophie, car certains des exemples trouvés précédemment peuvent être utilisés ici comme contre-exemples. Une réponse exacte pour Thérèse nous paraît de plus susceptible d'un retour en arrière pour la réponse concernant Jean.

3.2.3 Analyse des réponses possibles et des justifications prévues

On trouvera ci-dessous l'étude des différentes réponses et justifications attendues pour chaque type de réponse ainsi que les interprétations que nous en proposons, étude effectuée en liaison avec notre problématique de départ.

C'est à cette étude que nous nous référerons lors de l'analyse des copies des élèves, à partir de l'ensemble de leurs réponses et surtout des justifications qu'ils donnent.

On peut s'attendre à trouver certaines questions sans réponse, d'autres sans justification.

Les réponses à Pierre -"*Le périmètre de A est 16 cm*"- et à Michel -"*Le rectangle A a pour aire 15 cm²*"- montreront si les formules de l'aire et du périmètres sont acquises ou non. Nous dirons que ;

- la formule du périmètre est acquise si l'élève répond "vrai" et justifie en effectuant le calcul du périmètre en utilisant une formule exacte (soit $P = 2 \times (L + l)$ soit $P = L + L + l + l$) ;
- la formule du périmètre n'est pas acquise si l'élève répond "faux" et fait le calcul du périmètre en utilisant une formule erronée ;
- la formule de l'aire est acquise si l'élève répond "vrai" et justifie en effectuant le calcul de l'aire en utilisant une formule exacte ($A = L \times l$) ;
- la formule de l'aire n'est pas acquise si l'élève répond "faux" et fait le calcul de l'aire en utilisant une formule erronée.

Si l'élève donne la valeur de vérité correcte sans aucun calcul pour justifier cette réponse, nous déciderons de l'exactitude de la réponse en fonction des réponses aux autres questions.

Distinguons les types de justification exacts des justifications erronées.

a) Justifications conduisant à des réponses exactes.

- Justification par argument : cas d'une assertion fausse pour laquelle l'élève donne la réponse exacte (valeur F) et la justifie par des arguments où il y a dissociation de l'aire et du périmètre et la mise en cause des théorèmes en acte 1 et 2. Par exemple, pour les assertions Christine et Guy, l'élève donne la valeur F et justifie en disant que "le rectangle peut avoir une longueur plus grande que celle de A et une largeur suffisamment petite".
- Justification par utilisation d'un contre-exemple : cas d'une assertion fausse pour laquelle l'élève donne la réponse exacte (valeur F) et la justifie par un contre-exemple.
- Justification par utilisation d'un exemple : cas d'une assertion vraie pour laquelle l'élève donne la réponse exacte (valeur V) et la justifie en donnant un exemple. Nous avons déjà remarqué que les assertions vraies que nous avons proposées peuvent être prouvées à l'aide d'un exemple.

b) Justifications conduisant à des réponses erronées

* Justifications s'appuyant sur des comparaisons aire/périmètre :
par exemple l'aire du rectangle est plus grande que son périmètre.
* Justifications traduisant une conception géométrique.
- Le périmètre et l'aire varient dans le même sens : l'élève donne une justification du type "si l'aire du rectangle est plus petite que celle de A, alors son périmètre est plus petit que celui de A aussi".
- Deux rectangles qui ont même périmètre sont identiques : l'élève donne une justification du type : "si le rectangle a le même périmètre que A, alors il a les mêmes dimensions que A".
* Mise en oeuvre de l'un des théorèmes en acte.
- "Si un produit augmente alors chacun des facteurs augmente aussi" (TA1).
- "Une somme ne peut augmenter si l'un des termes diminue" (TA2).

Il est indispensable, pour faciliter les analyses ultérieures des copies, de préciser au préalable les différents types de réponses possibles ainsi que les significations que nous leur donnerons.

*** pour Jean** -"*Je peux trouver un rectangle d'aire plus petite que celle de A et de périmètre plus grand que celui de A*"-.

D'après l'analyse mathématique que nous avons faite, les mesures des côtés (l', L') d'un rectangle satisfaisant aux consignes données par l'assertion sont telles que: $l' < 3$ cm et $8 - l' < L' < 15 / l'$ ou $L' > 5$ cm et $8 - L' < l' < 15 / L'$.

En s'appuyant sur l'hypothèse qu'en général la recherche d'exemples se fera essentiellement, chez des élèves de 5[ème], sur des entiers, on trouve pour l'assertion Jean, les exemples possibles suivants : Ex1: $l = 2$ cm et $L = 7$ cm Ex2: $l = 1$ cm et 7 cm $< L < 15$ cm.

Nous dirons qu'il y a :

- dissociation entre aire et périmètre si l'élève donne la valeur V et justifie en utilisant des arguments (confère les critères énoncés ci-dessus pour des justifications conduisant à des réponses exactes) ou en donnant un exemple

- non dissociation entre l'aire et le périmètre si l'élève donne la valeur F et justifie par des arguments ou en donnant un exemple.

*** pour Christine** -"*Un rectangle d'aire plus grande que celle de A a obligatoirement à la fois une longueur et une largeur plus grandes que celles de A*"-.

Tous les rectangles de largeur l' et longueur L' telles que $l' < 3$ cm et $L' > (15/l')$ cm sont des contre-exemples. Mais avec l'hypothèse que la plupart des élèves ne vont chercher des contre-exemples que sur les entiers, les contre- exemples possibles sont ,
- si l'élève ne prend en compte que "plus petit" comme négation de "plus grand"
contre-exemples 1 : $l = 2$ cm et $L \geq 8$ cm ;
contre-exemples 2 : $l = 1$ cm et $L \geq 15$ cm.
- si l'élève prend la négation correcte "plus petit ou égal"
contre-exemples 3 : $l = 3$ cm et $L \geq 6$ cm ;
contre-exemples 4 : $l = 4$ cm et $L = 5$ cm ;

L'élève peut donner la réponse exacte (valeur F pour l'assertion) et la justifier soit par un contre-exemple, soit par des arguments selon lesquels il suffit d'augmenter l'un des côtés pour que l'aire soit augmentée. Dans cette réponse il y a la mise en cause du théorème en acte TA1 mais pas forcément celle du théorème en acte TA2. Un élève qui donne cette réponse accepte bien qu'un rectangle dont l'un des côtés est plus grand que la longueur de A et l'autre côté est égal à la largeur de A aura une aire plus grande. Pourtant si on imposait de ne conserver la dimension d'aucun des côtés (c'est bien ça qui fait la différence entre les deux théorèmes en acte), rien ne prouve qu'il donnerait une réponse exacte.

Nous dirons qu'il y a mise en oeuvre du théorème en acte TA1 si l'élève donne une réponse erronée (valeur V pour l'assertion) et la justifie en disant que si l'aire du rectangle obtenu est plus grande, les deux dimensions de ce rectangle sont plus grandes que celles du rectangle A ; cette justification correspond dans le cadre numérique à "si on augmente un produit, chacun des facteurs sera augmenté".

*** pour Guy** -*"Un rectangle dont l'un des côtés est plus petit que la largeur de A a obligatoirement un périmètre plus petit que celui de A"*-.

Tous les rectangles de largeur l' et de longueur L' tels que $l' < 3$ cm et $L' > 8 - l'$ sont des contre-exemples . Mais les seuls contre-exemples possibles avec des entiers sont:

cex1 : $l = 2$ cm et $L \geq 6$ cm ;
cex2 : $l = 1$ cm et $L \geq 7$ cm.

Nous dirons qu'il y a mise en oeuvre du théorème en acte TA2 si l'élève donne une réponse erronée (valeur V pour l'assertion) et la justifie en utilisant des arguments selon lesquels si l'une des dimensions d'un rectangle est plus petite que la largeur de A, son périmètre est forcément plus petit que celui de A, car cette justification correspond dans le cadre numérique à la mise en oeuvre de TA2, selon lequel une somme ne peut pas augmenter si l'un des termes diminue.

*** pour Marie** -*"Je peux trouver un rectangle dont l'un des côtés mesure 2 cm et dont l'aire est plus grande que celle de A"*-.
et Sophie -*"Je peux trouver un rectangle dont l'un des côtés mesure 6 cm et dont le périmètre est plus petit que celui de A"*-.

En ce qui concerne les exemples possibles pour justifier une réponse exacte aux assertions Marie et Sophie, nous pouvons remarquer que : pour Marie, $l = 2$ cm $\Rightarrow L > 7{,}5$ cm. et pour Sophie, $L = 6$ cm $\Rightarrow l < 2$ cm.

Donc pour Sophie il n'y a que le rectangle (6 cm, 1 cm) qui répond à la consigne avec les côtés entiers, tandis que pour Marie il y a une infinité d'exemples entiers qui répondent à la consigne.

Nous faisons l'hypothèse que, pour la plupart des élèves, ces questions ne posent pas de problème car leur résolution porte sur le changement d'une seule des dimensions (l'autre est fixée par nous). Ces questions doivent servir aussi, nous l'avons vu, pour produire des contre-exemples pour les assertions Jean, Christine, Guy et Thérèse et pour provoquer donc des retours en arrière.

Nous dirons que l'élève

- maîtrise le cas où une dimension seulement varie, si l'une des dimensions du rectangle étant fixée, il donne un exemple de rectangle respectant les consignes données ou justifie par des arguments. Ces arguments peuvent être du type : pour

Marie "il suffit de prendre une longueur suffisamment grande" et pour Sophie "il suffit de prendre une largeur suffisamment petite" ;

- ne maîtrise pas ce cas, si l'élève donne une réponse erronée (valeur F à l'assertion) et la justifie soit par argument, soit par exemple : pour la largeur 2 cm dans l'assertion Marie, l'aire est forcement plus petite que celle de A et pour la longueur 6 cm dans l'assertion Sophie, le périmètre est forcément plus grand. Cette réponse indiquerait que les Théorèmes en acte sont très forts pour l'élève, car même lorsque l'une des dimensions est fixée, ce qui lui permet d'agir seulement sur l'autre, il pense toujours qu'une somme (resp. un produit) ne peut augmenter si l'un des termes (resp. des facteurs) diminue.

*** pour Thérèse** -*"Un rectangle dont le périmètre est égal à celui de A a obligatoirement même aire que A"*-

les contre-exemples entiers possibles sont :

(2 cm, 6 cm) ; qui peut avoir été produit lors du traitement de l'assertion Marie;

(1 cm, 7 cm) ;

(4 cm, 4 cm) ; qui peut poser problème car c'est un carré et pour certains élèves un carré n'est pas un rectangle.

Nous dirons, comme dans le cas de Jean, que l'élève :

- dissocie aire et périmètre s'il donne la réponse correcte (valeur F) et la justifie en utilisant des arguments ou en donnant un contre-exemple ;

- ne dissocie pas aire et périmètre s'il donne une réponse erronée (valeur V) et la justifie en donnant un exemple ou par des arguments.

IV. Résultats obtenus

Nous avons fait l'étude des copies des deux points de vue : quantitatif et qualitatif.

Nous présentons d'abord une statistique des résultats. Ensuite, nous analysons, du point de vue qualitatif et en relation avec notre problématique, certains types d'erreur qui apportent des informations importantes.

4.1 Analyse statistique des résultats obtenus

En ce qui concerne l'analyse statistique, nous avons choisi de noter 1 pour les réponses exactes et semi-exactes[5] et 0 pour les réponses erronées et les questions sans réponse.

---

[5] Nous dirons qu'une réponse est semi-exacte dans les cas où la justification n'est pas tout à fait exacte, mais correspond à un raisonnement qui pourrait conduire à une réponse exacte. Par exemple, un élève donne la valeur correcte (Vrai) pour l'assertion Marie et donne un exemple de rectangle d'aire plus grande que celle de A dont l'un des côtés mesure 2 cm et au lieu de calculer l'aire du rectangle, calcule son périmètre.

tableau 1 : répartition de l'ensemble des élèves selon les réponses aux deux premières questions

	Pierre : 0	Pierre : 1	total
Michel: 0	7	12	19
Michel: 1	13	67	80
total	20	79	99

Un premier résultat quantitatif[6] est que la formule de l'aire et/ou celle du périmètre ne sont pas acquises pour 32 des 99 copies étudiées. Autrement dit, à peu près 1/3 des élèves qui ont répondu au questionnaire n'ont pas acquis la formule de l'aire et/ou celle du périmètre.

tableau 2 : répartition selon les réponses à Marie et Sophie des 67 élèves ayant répondu correctement à Pierre et Michel

	Marie : 0	Marie : 1	total
Sophie : 0	9	10	19
Sophie : 1	3	45	48
total	12	55	67

Parmi les 67 élèves qui calculent correctement l'aire et le périmètre il y en a 9 qui ne traitent correctement ni Marie ni Sophie, dont 7 ne traitent correctement aucune des autres assertions.

Nous trouvons de plus 10 élèves pour lesquels il y a réussite pour l'assertion Marie et échec pour l'assertion Sophie. On peut remarquer que, pour Marie, il était facile de trouver un exemple de rectangle de largeur 2 cm et d'aire plus grande que celle de A, puisque toute longueur plus grande que 7,5 cm répondait à la question. Alors que pour Sophie, lorsqu'on ne travaille que sur les entiers on ne trouve que le rectangle de côtés (6, 1) qui répond à la question. Certains de ces élèves donnent une réponse exacte (vrai) mais une justification fausse (production du rectangle (6,2) ou calcul de l'aire et non du périmètre du rectangle). De plus l'étude des justifications qu'ils donnent à leurs réponses à Jean, Christine, Guy et Thérèse nous amène à penser qu'ils amalgament fortement aire et périmètre.

45 élèves traitent correctement au moins les assertions Pierre, Michel, Marie et Sophie. Nous allons centrer notre analyse maintenant sur les copies de ces élèves. Les réponses correctes aux assertions Pierre et Michel montrent que les formules de l'aire et du périmètre d'un rectangle sont acquises et les réponses exactes à Marie et Sophie correspondent à la maîtrise du cas plus simple de variation de l'aire et du périmètre du rectangle lorsque l'une des dimensions est fixée.

tableau 3 : répartition selon les réponses à Jean et Thérèse des 45 élèves ayant répondu correctement aux questions Pierre, Michel, Marie, Sophie

	Thér. : 0	Thér. : 1	total
Jean : 0	19	14	33
Jean : 1	5	7	12
total	24	21	45

[6] Rappel : les assertions soumises aux élèves sont reproduites page 9.

Seuls 12 élèves répondent correctement pour l'assertion Jean.

On peut de plus remarquer que 2/3 des élèves ayant réussi pour Thérèse ont échoué pour Jean. La réussite pour Thérèse n'empêche pas forcément les élèves de croire et d'affirmer que A et P varient dans le même sens.

Cela renforce le résultat annoncé dans l'expérimentation faite par N.Balacheff (1988) : le degré de difficulté de l'assertion Jean est plus grand que celui de l'assertion Thérèse.

tableau 4 : répartition selon les réponses à Jean et Christine des 45 élèves ayant répondu correctement aux questions Pierre, Michel, Marie, Sophie

	Christ. : 0	Christ : 1	total
Jean : 0	21	12	33
Jean : 1	5	7	12
total	26	19	45

tableau 5 : répartition selon les réponses à Jean et Guy des 45 élèves ayant répondu correctement aux questions Pierre, Michel, Marie, Sophie

	Guy : 0	Guy : 1	total
Jean : 0	21	12	33
Jean : 1	2	10	12
total	23	22	45

tableau 6 : répartition selon les réponses à Guy et Christine des 45 élèves ayant répondu correctement aux questions Pierre, Michel, Marie, Sophie

	Christ. : 0	Christ : 1	total
Guy : 0	19	4	23
Guy : 1	7	15	22
total	26	19	45

Ces élèves appliquent correctement les formules de l'aire et du périmètre, comprennent bien les assertions Marie et Sophie et font preuve de la maîtrise de la variation d'une part de l'aire et d'autre part du périmètre lorsque l'une des dimensions du rectangle est fixée.

Parmi les élèves de ce groupe il y en a 12 qui donnent des réponses fausses pour toutes les autres assertions et 6 qui donnent une seule réponse exacte pour l'assertion Thérèse (certains en utilisant comme contre-exemple pour Thérèse le rectangle de côtés (6,2) proposé dans une première étape pour Sophie).

Le retour au tableau global nous montre que sur les 45 élèves qui donnent des réponses exactes pour Pierre, Michel, Marie et Sophie :

- 4 élèves seulement donnent des réponses exactes pour toutes les assertions ;
- 11 élèves donnent des réponses exactes pour toutes les assertions sauf une :

* 6 qui donnent des réponses exactes pour toutes les assertions sauf Jean (dont 3 mettent en oeuvre une conception géométrique) ;

* 2 qui traitent correctement toutes les assertions sauf Christine (pour laquelle ils font une erreur de logique de négation) ;

* 2 qui donnent des réponses exactes pour toutes les assertions sauf Thérèse ;

* 1 qui donne des réponses exactes pour toutes les assertions sauf Guy (car il ajoute l'implicite que l'un des côtés est gardé).

4.2 Analyse des procédures rencontrées dans les copies

4.2.1 Retour sur l'analyse a priori

L'analyse des copies a mis en évidence les justifications suivantes que nous n'avions pas prévues lors de l'analyse a priori.

- L'élève donne une justification qui montre qu'il n'a pas compris la consigne.
- Au lieu de comparer l'aire et le périmètre de deux rectangles, l'élève prend un seul rectangle et compare les nombres trouvés en calculant son aire et son périmètre. C'est un cas particulier de non compréhension de la consigne que nous avons appelé "prise en considération d'un seul rectangle".
- L'élève utilise un argument qui indique la mise en cause des théorèmes en acte mais le contre-exemple donné est faux (soit l'élève mélange A et P, soit le contre-exemple ne correspond pas aux consignes).
- Au lieu de traiter l'implication ($A' > A \Rightarrow L' > L$ et $l' > l$), il traite l'implication ($L' > L$ et $l' > l \Rightarrow A' > A$). De la validité de cette deuxième implication, il déduit la validité de la première. C'est une erreur liée au raisonnement que nous appelerons Inversion de l'Assertion.
- L'assertion Christine peut être formulée comme: $A' > A \Rightarrow L' > L$ et $l' > l$. Pour traiter cette assertion, l'élève traite l'implication équivalente non ($L' > L$ et $l' > l$) $\Rightarrow$ non ($A' > A$). Pourtant, pour nier l'hypothèse que la largeur et la longueur du rectangle sont plus grandes que celles de A, il dit que la largeur et la longueur sont plus petites que celles de A. Donc, il fait l'erreur de logique de négation suivante : non (A et B) = (non A et non B).

Nous avons choisi d'analyser tout particulièrement dans la suite, quatre types d'erreurs observées dans les copies, en liaison avec notre problématique de départ. Ce sont les erreurs que nous interprétons comme

1. *erreurs de contrat*
2. *conception "surface" de l'aire ;*
3. *mise en oeuvre des théorèmes en acte TA1 ou TA2 ;*
4. *erreurs de raisonnement que nous avons qualifiées d'erreurs de logique.*

En prenant comme critère les différents types d'erreur, nous avons sélectionné les copies d'élèves dans lesquelles on décèle au moins une fois ce type de raisonnement.

Il faut en effet noter que l'on n'obtient bien évidemment pas par ce procédé une partition des copies. En effet, les différentes conceptions mises en évidence coexistent chez la plupart des élèves et sont ou non mobilisées selon la situation devant laquelle se trouve l'élève et donc ici, selon le type d'assertion et de formulation de l'assertion considérée.

Pour chaque type d'interprétation, nous présenterons les copies séparées en deux groupes :

G1 : celles dans lesquelles on trouve des réponses justes pour les assertions Pierre, Michel, Marie et Sophie (élèves qui ont acquis les formules de l'aire et du périmètre et qui de plus maîtrisent la variation de l'aire et du périmètre séparément lorsque l'une des dimensions du second rectangle est fixée).

G2 : celles présentant de une à quatre réponses fausses pour ces assertions.

1 - Erreurs pouvant être interprétées en terme de contrat

- Erreurs sur l'assertion Guy

Certaines réponses données pour Guy sont justifiées, soit par argument soit par exemple, où il n'y a qu'un côté qui change. Ces élèves ont ajouté de manière implicite l'hypothèse suivante : le côté dont on ne parle pas dans l'énoncé est conservé.

On trouve surtout dans les exemples donnés pour justifier la valeur vrai donnée à l'assertion Guy l'exhibition de rectangles où très souvent l'une des dimensions est conservée. Mais on peut encore identifier cet implicite dans l'argumentation suivante "Oui car la largeur se multipliera par un nombre inférieur donc le résultat sera plus petit que 16"

On peut interpréter cette erreur comme due aux différences d'usage de certains mots en langue naturelle et en mathématiques. Dans la langue naturelle, quand on dit "un" on veut dire "un seul" et c'est bien cette identification qui, à notre avis, a conduit les élèves à supposer que l'autre côté était conservé.

- Erreurs sur les assertions Jean et Thérèse

Certains élèves ont utilisé la comparaison de l'aire et du périmètre d'un même rectangle au lieu de comparer l'aire et le périmètre du rectangle proposé avec les mêmes grandeurs de A.

Par exemple, un élève répond à l'assertion Thérèse. (*Un rectangle dont le périmètre est égal à celui de A a obligatoirement même aire que A.*) en disant que "Thérèse a tort car l'aire peut être plus grande que le périmètre".

Dans le groupe G1 on trouve ce type d'erreur dans 8 copies ; dans le groupe G2 dans 12.

Ce mode de raisonnement se rencontre essentiellement pour justifier que Jean n'a pas raison ou que Thérèse a raison (18 fois), plus rarement pour Guy (1 fois) ou Sophie (1 fois). Ceci s'explique car les assertions Jean et Thérèse mettent en relation l'aire et le périmètre de deux rectangles, tandis que les autres mettent en relation soit l'aire soit le périmètre et les dimensions du rectangle.

Cette erreur nous semble pouvoir relever du contrat : une lecture trop rapide et mal comprise des assertions Jean et Thérèse permet quand même de faire quelque chose qui ressemble à la tâche proposée, alors que ce n'est pas le cas pour les assertions Guy et Christine.

Pourtant, à notre avis, ce type de réponse peut également relever du plan cognitif: Si l'élève envisage la possibilité de comparer l'aire et le périmètre d'un rectangle, c'est parce que pour lui ce sont des grandeurs de même nature. Il nous semble que ceci peut également provenir de ce que Douady et Perrin-Glorian ont appelé amalgame de l'aire et du périmètre : "pour les élèves le périmètre est une autre 'mesure' de la surface".

2 - Erreurs liées à une conception "surface" de l'aire

Nous reprenons, dans cette partie, la définition de "conception surface" donnée par Douady et Perrin-Glorian (1989) et reprise par N. Balacheff sous la dénomination "conception géométrique" -*C1*. Nous dirons donc que l'élève met en oeuvre une conception surface quand il utilise des arguments, ou donne des exemples, selon lesquels il est sous-jacent qu'une "diminution de l'aire est comprise comme une diminution de la surface avec sa forme et va de pair avec une diminution du périmètre" : l'aire et le périmètre sont liés à la surface et à sa forme.

On trouve ce type d'erreur dans 13 copies du groupe G1 et dans 20 copies du groupe G2.

Parmi les justifications utilisées par les élèves, nous avons relevé ici celles selon lesquelles "aire et périmètre varient dans le même sens" ou "deux rectangles qui ont même périmètre sont identiques" .Ces justifications apparaissent essentiellement dans les assertions Jean et Thérèse, ce qui s'explique par le fait que ce sont les seules assertions qui font intervenir en même temps les variations de l'aire et du périmètre. Il nous semble que, là encore, on peut parler de ce type d'erreur en terme d'amalgame aire/périmètre au sens ci-dessus.

Pour illustrer ce type d'erreur, prenons quelques exemples des copies :

- pour l'assertion Jean *(je peux trouver un rectangle d'aire plus petite que celle de A et de périmètre plus grand que celui de A)* on trouve :

"je ne suis pas d'accord parce que si on a un périmètre plus grand que A on a une aire plus grande".

"non, on ne peut pas; parce que plus l'aire est petite plus le périmètre est petit";

- pour l'assertion Thérèse *(un rectangle dont le périmètre est égal à celui de A a obligatoirement même aire que A)* on trouve :

"oui, parce que ce sera le même rectangle".

"oui car il est identique".

Ces élèves ont utilisé différents modes de raisonnement qui traduisent différentes conceptions. Tant que les concepts d'aire et de périmètre ne sont pas complètement construits, ces conceptions fonctionnent ou pas selon la situation.

On peut remarquer que parmi les élèves qui ont donné les réponses exactes pour Pierre, Michel, Marie et Sophie, il y a 5 élèves qui ont utilisé les arguments "aire et périmètre varient dans le même sens" pour l'assertion Jean et "deux rectangles qui ont même périmètre sont identiques" pour Thérèse. De plus 3 élèves qui ont répondu correctement pour toutes les autres assertions, y compris en produisant des contre-exemples, ont pourtant donné une justification pour Jean du type "aire et périmètre varient dans le même sens".

On peut se demander si cela ne traduit pas le fait que les élèves ont développé une "conception surface" et une "conception nombre" de façon indépendante l'une de l'autre et si l'enseignement dont l'on trouve des exemples dans les manuels, qui privilégie le cadre numérique, ne favorise pas ce type d'apprentissage.

3 - Mise en oeuvre des théorèmes en acte TA1 et TA2

Rappelons que nous disons qu'il y a mise en oeuvre des théorèmes en acte TA1 ou TA2 transposés dans le cadre géométrique lorsque l'on rencontre des justifications du type "si on augmente l'aire (resp. le périmètre) alors chacun des côtés sera augmenté" (TA1) ou "l'aire (resp. le périmètre) ne peut augmenter si l'un des côtés diminue" (TA2).

L'analyse des résultats obtenus nous montre que la mise en oeuvre de ces théorèmes en acte apparaît très souvent. Surtout pour les assertions Christine et Guy, ce qui est normal car ces assertions mettent en relation l'aire (ou le périmètre) et les dimensions du rectangle.

Pour l'assertion Christine *(Un rectangle d'aire plus grande que celle de A a obligatoirement à la fois une largeur et une longueur plus grandes que celle de A)* on trouve par exemple:

- "je suis d'accord parce que plus l'aire est grande et plus les côtés sont grands"
- "oui il aura des nouvelles dimensions et elles seront forcement plus grandes puisque l'aire sera plus grande"
- "elle a raison car pour avoir une plus grande aire il faut avoir des plus grands côtés"

Pour l'assertion Guy *(Un rectangle dont l'un des côtés est plus petit que la largeur de A a obligatoirement un périmètre plus petit que celui de A)* on trouve par exemple :

- "d'accord. Pourquoi ? car les côtés sont plus petits donc, l'aire est plus petite"
- "oui, puisque les dimensions sont réduites".

On peut remarquer de plus que l'on rencontre également la mise en oeuvre de ces théorèmes en acte pour les assertions Marie et Sophie. Dans ce cas, la conviction de l'élève de la validité de ces "théorèmes" est encore plus forte, car il n'essaye même pas de faire varier la dimension libre des rectangles de Marie et de Sophie pour voir ce que ça donne.

On remarquera enfin que, parmi les élèves qui ont donné des réponses correctes pour les assertions Pierre, Michel, Marie et Sophie, à peu près la moitié mettent en oeuvre ces théorèmes en acte ce qui conforte l'hypothèse de la difficulté que constituent ces théorèmes en acte à la construction par l'élève de la dissociation aire/périmètre.

4 - Autres erreurs de raisonnement

Nous avons relevé différents autres types d'erreur de raisonnement qui nous semblent relever plus généralement d'erreurs de logique mathématique.

- Justification du fait que les assertions Christine et Guy sont vraies en utilisant un exemple.

Pour répondre à l'assertion Guy, un élève dessine un rectangle de côtés 2 cm et 4 cm et écrit à côté " oui il a raison. exemple: (4 + 2) x 2 = 12 cm".

Pour l'assertion Christine, on trouve des élèves qui dessinent des rectangles de côtés 4 cm et 8 cm ; 6 cm et 8 cm ; 6 cm et 4 cm et calculent les aires.

On trouve encore un élève qui dit: "elle a raison car si on fait 4 × 6 = 24 cm".

Nous avons déjà remarqué que ces assertions sont du type "tous les rectangles tels que ... sont tels que..." et qu'elles sont fausses.

Donner un exemple qui marche ne suffit pas pour justifier que l'assertion est vraie.

- Erreurs de raisonnement sur l'assertion Christine :

L'assertion Christine met en relation les dimensions du rectangle et son aire. Elle est formulée de la façon suivante : on fait une hypothèse sur la variation de l'aire et on demande si la conclusion sur la variation des côtés est juste. Donc, l'hypothèse est faite sur une grandeur bidimensionnelle et la conclusion sur des longueurs qui sont unidimensionnelles, ce qui, à notre avis, a été à l'origine de difficultés pour les élèves.

Nous avons trouvé des copies où les élèves ont "retourné l'assertion". Ils ont donc traité soit l'implication inverse (ce qui nous avons appelé Inversion de l'Assertion IA) soit une implication du type : "la négation de la conclusion implique la négation de l'hypothèse" (ce qui en fait est correcte mais qui vient dans les copies accompagné de "non (A et B)" égal à "(non A) et (non B))".

- Inversion de l'assertion

Notre interprétation de ce type d'erreur est que, pour l'élève, il est plus facile de faire varier les côtés et de vérifier l'effet sur la variation de l'aire que le contraire. En général, nous n'avons noté comme inversion de l'assertion que les copies dans lesquelles figuraient des justifications par argument mettant en évidence ce type de raisonnement. Pourtant, il faut remarquer que les copies qui ont justifié que Christine dit vrai en utilisant des exemples pourraient être également interprétées comme inversion de l'assertion. Ces élèves ont en effet produit des exemples où les côtés sont plus grands que ceux de A et où l'aire aussi.

Voici des exemples de telle réponse à l'assertion Christine.(*Un rectangle d'aire plus grande que celle de A a obligatoirement à la fois une longueur et une largeur plus grandes que celles de A*)

- "elle a raison car plus la longueur et la largeur sont grandes plus l'aire est grande donc il faut absolument qu'un rectangle ait une longueur et une largeur plus grandes que celles de A pour que ce même rectangle ait l'aire plus grande que celle de A" ;
- "elle a raison car c'est obligé que si un rectangle est plus grand en longueur et en largeur donc, l'aire doit être plus grande que A" ;
- "d'accord, car les côtés sont plus grands donc l'aire est plus grande" ;
- "oui car si la largeur et la longueur sont plus grandes que le rectangle A, le périmètre est plus grand que A et même l'aire".

Les choix méthodologiques que nous avons faits ne nous permettent pas d'être sûrs de l'interprétation de ces dernières réponses. Nous les avons personnellement interprétées comme si l'élève nous proposait des côtés plus grands en prenant en compte l'hypothèse "aire plus grande que celle de A" et en mettant en oeuvre le théorème en acte. Une autre interprétation aurait pu être : les élèves prennent comme hypothèse que les côtés sont plus grands et en déduisent que l'aire est plus grande (et là il s'agit de l'inversion de l'assertion). Des entretiens ou des situations d'interaction auraient été nécessaires pour nous permettre de trancher entre ces interprétations.

- Erreur de logique de négation.

Des élèves ont aussi transformé l'assertion Christine, en partant d'une hypothèse sur les côtés pour arriver à une conclusion sur l'aire. Leur hypothèse est que les côtés du nouveau rectangle sont plus petits que ceux de A et de cette hypothèse ils concluent que l'aire est plus petite que celle de A.

Exemple : "C'est juste, on ne peut pas trouver une longueur plus petite que 5 cm et une largeur plus petite que 3 cm qui puissent donner une aire plus grande que 15 cm^2". Il faut remarquer que l'élève qui a donné cette réponse a répondu juste à toutes les autres assertions. On trouve encore des copies dans lesquelles les élèves utilisent des exemples pour justifier leurs réponses vrai à l'assertion Christine dans lesquelles ils diminuent les côtés du rectangle et calculent l'aire du nouveau rectangle ainsi obtenu.

Nous interprétons cette justification comme erreur de logique de négation car, il nous semble que pour ces élèves non(A et B) = (non A et non B). Donc, pour nier "les côtés du rectangle sont plus grands que ceux de A" ils utilisent "les côtés du rectangle sont plus petits que ceux de A".

On peut en particulier remarquer la présence de ce type de raisonnement pour l'assertion Christine chez des élèves qui ont répondu correctement à toutes les autres questions.

V. Conclusion

Les travaux antérieurs aux nôtres, cités en introduction, montrent que la dissociation aire/périmètre est un aspect de l'apprentissage du concept d'aire qui pose des difficultés de différents ordres pour les élèves. De plus, ils n'ont pas permis de dépasser complètement les difficultés liées à cette dissociation.

La question que nous nous sommes posée au départ était la suivante :

"A quoi sont dues les difficultés de dissociation aire/périmètre lorsque les élèves mettent en oeuvre une conception numérique, c'est-à-dire, quand ils traitent les problèmes d'aire et périmètre en référence à ces formules de calcul ?".

En fait, la situation que nous avons proposée ne nous permet pas d'être sûres que les élèves ont effectivement mis en oeuvre une conception numérique. Car, même lorsque leurs réponses ne font référence qu'à des calculs et qu'ils n'utilisent pas d'arguments liés aux conceptions géométriques, rien ne les empêche de travailler dans le cadre géométrique à partir d'images mentales liées à la surface.

Cependant, même si l'on ne peut pas toujours savoir avec certitude dans quel cadre l'élève a travaillé et quel type de conception il a mobilisé, l'étude faite permet de proposer des pistes de réflexion en ce qui concerne les sources d'erreurs des élèves à propos de la dissociation aire et périmètre.

D'une part, elle confirme des résultats déjà connus. D'autre part, elle introduit d'autres éléments d'analyse susceptibles d'être pris en compte dans des études ultérieures.

5.1 Confirmation de résultats déjà connus

Il y a développement d'une conception nombre et d'une conception forme de façon indépendante. La mise en oeuvre d'une conception numérique dans certaines situations n'empêche pas que l'élève puisse, dans d'autres situations, mobiliser une conception géométrique selon laquelle l'aire et le périmètre ne se dissocient pas.

Nous retrouvons ici ce qu'énonce Duroux (Duroux, 1983, p.54) : "il est fréquent que, à propos d'un même concept, plusieurs conceptions, parfois antinomiques, se développent, chacune recouvrant une partie du champ conceptuel". D'ailleurs, le développement de ces deux types de conceptions chez un même élève, fonctionnant de façon indépendante, était déjà signalé par Douady et Perrin-Glorian (1989). Nous avons trouvé un nombre important de copies où semblent coexister ces deux conceptions.

5.2 Perspectives nouvelles

Existence de plusieurs niveaux de dissociation

Il arrive que l'on trouve chez un même élève la coexistence d'arguments qui laissent croire que cet élève dissocie aire et périmètre et d'autres qui montrent que cette dissociation n'est pas acquise. Dans ce cas, en général, la mise en cause de "rectangles qui ont même périmètre ont même aire" est antérieure à celle de "l'aire et le périmètre d'un rectangle varient dans le même sens". D'ailleurs ce phénomène apparaît déjà dans l'expérimentation réalisée par Balacheff (1988).

Il nous semble qu'il y a là deux niveaux de dissociation :

- le niveau 1 consiste à accepter que des rectangles qui ont même périmètre puissent avoir des aires différentes (et réciproquement) ;
- le niveau 2 exige que l'on puisse envisager des variations d'aire et de périmètre dans des sens différents.

Nous faisons l'hypothèse qu'il y a une hiérarchie entre ces deux niveaux: la maîtrise du niveau 1 se fait beaucoup plus facilement que celle du niveau 2. Les résultats que nous avons trouvés vont dans ce sens mais il faut encore approfondir les études pour pouvoir confirmer cette hypothèse.

Rôle du "domaine de validité" restreint dans la non dissociation aire/périmètre

De l'analyse mathématique que nous avons faite, au moins dans le cas des rectangles, nous pouvons retenir que le domaine de validité où l'aire et le périmètre varient dans des sens différents est en général très restreint : étant donné un rectangle A, cette étude montre que l'on a beaucoup plus de chance de produire des exemples de rectangles dont l'aire et le périmètre sont tous les deux plus grands (ou plus petits) que ceux de A que des rectangles d'aire plus grande et de périmètre plus petit (ou réciproquement).

Cette restriction est encore plus forte si on prend en compte la réduction aux entiers très souvent faite par les élèves. D'ailleurs cette question du "domaine de validité" avait été évoquée par Perrin-Glorian (1992), sans avoir, à notre connaissance, été traitée. Ceci constitue à notre avis une source importante de difficulté.

Rôle des "connaissances locales"

Lorsqu'on demande aux élèves de trouver un rectangle dont l'aire est plus petite que celle de A, les procédures qui apparaissent le plus souvent sont :

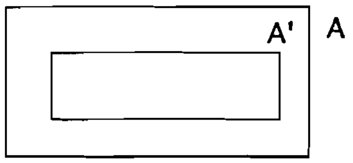
- celle qui consiste à diminuer chacun des deux côtés ;
- celle qui consiste à conserver l'un des côtés et à diminuer l'autre ;

D'où la mise en place possible d'une "connaissance locale" (Léonard et Sackur,1990) selon laquelle aire et périmètre varient dans le même sens - connaissance induite par ces deux types de procédure. Il y a des interprétations possibles pour expliquer la mise en place de chacune de ces procédures.

1) L'augmentation des deux côtés.

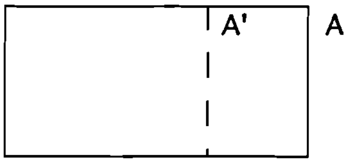
Cette procédure peut être interprétée comme la mise en oeuvre des théorèmes en acte TA1 - si on augmente une somme (resp. un produit) alors chacun des termes (resp. des facteurs) est augmenté - et/ou TA2 - une somme (resp. un produit) ne peut augmenter si l'un des termes (resp. facteurs) diminue. Celle-ci constitue, en effet, une source importante d'erreurs. Elle apparaît même chez des élèves qui ont acquis les formules de l'aire et du périmètre, et qui, de plus, maîtrisent la variation de l'aire et du périmètre d'un rectangle lorsque l'une des dimensions est fixée.

Une deuxième interprétation possible correspond à une conception géométrique de l'aire - la variation de l'aire se fait tout en gardant la forme du rectangle. Dans ce cas, un rectangle dont l'aire est plus petite que celle de A est dans le rectangle A.



2) La conservation de l'une des dimensions du rectangle initial.

Nous pouvons interpréter que cette procédure correspond à couper un morceau du rectangle.



Une autre interprétation possible c'est qu'elle apparaît parce que le dispositif que nous avons utilisé l'induit[7] ou bien qu'il s'agit, pour l'élève, d'une simplification de la tâche. Quoi qu'il en soit, on peut se demander si la maîtrise de la variation de l'aire (ou du périmètre) lorsque l'une des dimensions est fixée ne se constitue pas en obstacle à la dissociation aire/périmètre.

En effet, les recherches antérieures montrent que l'un des points importants de difficulté dans la construction de la notion d'aire est celui de l'acquisition de la bidimensionnalité. C'est en nous appuyant sur ce résultat que nous avons introduit des items où les consignes portaient sur des variations, soit de l'aire soit du périmètre, en fixant convenablement l'une des dimensions et en faisant varier l'autre. Ces items étaient des outils pour fournir aux élèves des contre-exemples mettant en cause les théorèmes en acte TA1 et TA2.

[7] Dans les assertions Marie (Je peux trouver un rectangle dont l'un des côtés mesure 2 cm et dont l'aire est plus grande que celle de A) et Sophie (Je peux trouver un rectangle dont l'un des côtés mesure 6 cm et dont le périmètre est plus petit que celui de A) l'une des dimensions du rectangle est convenablement fixée.

En fait, l'analyse des copies nous amène à nous demander si ces questions n'ont pas renforcé l'utilisation de la procédure qui consiste à conserver l'une des dimensions et à constater que l'aire et le périmètre varient, dans ce cas, dans le même sens.

La connaissance localement exacte de ce que lorsque l'une des dimensions est conservée, l'augmentation de l'autre entraîne à la fois celle de l'aire et celle du périmètre, tout en étant une étape indispensable à la construction des concepts en jeu, ne se constituerait-elle pas en obstacle à la maîtrise de la dissociation aire périmètre? Des nouveaux travaux seraient nécessaires pour confirmer ces hypothèses.

Les difficultés des élèves de 5ème en ce qui concerne la dissociation de l'aire et du périmètre de rectangles ont des raisons objectives, nous l'avons vu.

Elaborer une ingénierie didactique qui permette de les dépasser reste une question ouverte.

Références bibliographiques

BALACHEFF N., (1988), Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège, *Thèse d'état Université Joseph Fourier, Grenoble,* pp.281-319.

DOUADY R. (1986): Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 7, n°2.

DOUADY R. & PERRIN-GLORIAN M.J., (1989), Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, *Educational Studies in Mathematics,* 20, pp.387-424.

DOUADY R. & PERRIN-GLORIAN M.J., (1988), Conceptions des élèves à propos d'aires de surfaces planes, *Actes du 1er Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique,* pp.161-172.

DUROUX A., (1983), La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure, *Petit x* , n°3, pp.43 - 67.

LEONARD F. & SACKUR C., (1990), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 10, n° 2.3, pp.205 à 240.

PERRIN-GLORIAN M.J., (1989-1990), L'aire et la mesure, *Petit x,* 24, pp.5 - 36.

PERRIN-GLORIAN M.J., (1992), Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème, *Thèse d'état,Université Paris 7, Paris, Exposé de soutenance.*

ROGALSKI J., (1982), Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface), *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol.3, n° 3, pp.343 - 396.

VERGNAUD G., (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol.10, n°2.3, pp.133-169.

VINH BANG et LUNZER, E., (1965) Conservations Spatiales, Presses Universitaires de France, Paris.

Annexe : les concepts d'aire et de périmètre dans les programmes de l'école primaire et du collège

L'enseignement des concepts d'aire et périmètre commence au cours moyen. Les programmes et instructions officielles prévoient pour ce niveau :

"Formation des concepts de longueur, d'aire, de volume, de masse, d'angle et de durée ; l'utilisation des systèmes de mesure : expression par un nombre ou par un encadrement du résultat d'un mesurage.

Utilisation des unités du système légal et usuel.

Détermination du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'un rectangle, de l'aire d'un triangle, et du volume d'un pavé.

Utilisation d'un formulaire pour calculer l'aire ou le volume d'un objet donné".

Les compétences à acquérir dans ce domaine au niveau du cours moyen sont ainsi précisées :

- maîtriser les notions d'aire et de volume; connaître les unités couramment utilisées (cm^2, m^2, l, dm^3, m^3) ;

- calculer le périmètre et l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un disque, et savoir utiliser un formulaire ;

Au Collège :

En classe de sixième, en ce qui concerne l'aire et le périmètre, nous trouvons : comparaison d'aires planes, conservation des aires dans la symétrie orthogonale, calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle.

En cinquième, on trouve conservation des aires dans la symétrie centrale, calcul de l'aire d'un parallélogramme, d'un triangle et d'un disque.