L'ELEVE, LE PROFESSEUR ET LE LABYRINTHE

Viviane DURAND-GUERRIER
IUFM de Lyon, LIRDHIST, UCB Lyon 1
et IREM de Lyon

The king's argument was, that anything that had a head could be beheaded, and that you weren't to talk nonsense.
(Lewis Carroll, Alice in Wonderland)

Résumé
La divergence d'interprétation de l'expression *si...alors* entre les élèves et les enseignants de mathématiques renvoie pour partie à la pratique mathématique de quantification implicite des énoncés conditionnels. Mais celle-ci est-elle vraiment toujours pertinente?
Mots clés : logique - implication - quantification - énoncé contingent.

Introduction

Parmi les outils logiques manipulés par l'enseignant de mathématiques dans sa classe, l'implication occupe une place à part. En effet, c'est le *noyau dur* de l'apprentissage de la démonstration au collège, puisque en effet les recommandations des programmes invitent à insister sur l'appropriation par les élèves des énoncés conditionnels donnés sous la forme *si...alors*. Dans ses travaux, Duval[1] insiste sur l'importance du pas de démonstration lié à un énoncé conditionnel de la forme *si p, alors q*. L'attention portée à cette acquisition peut s'expliquer sans doute par les résultats obtenus en psychologie

1 Voir par exemple Duval, 1993 et Duval, 1995.

cognitive depuis une trentaine d'années, lesquels mettent en évidence les difficultés pour la plupart des sujets humains, y compris des étudiants scientifiques, à utiliser correctement un énoncé de ce type pour faire des déductions[2]. La plupart des auteurs s'accordent à reconnaître que l'implication telle qu'elle est utilisée en mathématiques diffère sensiblement de la notion de conditionnel véhiculée par la langue vernaculaire, principalement parce que, pour le mathématicien, l'expression *si...alors* sous-entend de manière quasi systématique une forme de quantification universelle. Ceci conduit certains auteurs à proposer d'installer assez vite, dès la classe de quatrième, une notion de conditionnel conforme à l'usage qu'en font les praticiens des mathématiques, en institutionnalisant la pratique de quantification universelle implicite. Par exemple, dans un ouvrage récent (Houdebine, 98), les auteurs proposent pour les élèves de quatrième une activité autour des énoncés de la forme *si...alors* en indiquant :

> « Cette activité poursuit un double but. D'une part, faire travailler les élèves sur le quantificateur *quel que soit* qui est sous-entendu dans les énoncés de la forme *si...alors* ; l'idée centrale est qu'il suffit d'un contre-exemple pour dire qu'un énoncé de ce type est faux. D'autre part, mettre en évidence l'idée de théorème réciproque. » (p 114).

Cette préoccupation rejoint celle des auteurs de l'évaluation organisée en 1991 à l'échelon national par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) pour des enseignants volontaires qui proposaient aux élèves de seconde dans la rubrique *Argumentation-raisonnement-expression* un exercice autour d'un labyrinthe. L'ensemble de l'évaluation, les résultats obtenus et les commentaires des auteurs sont présentés dans la brochure EVAPM2/91 publiée par l'APMEP. L'exercice du labyrinthe visait à tester la maîtrise de l'implication dans une situation non classique, et les auteurs s'interrogent sur le rapport entre cette maîtrise et la capacité à produire des démonstrations correctes en mathématiques. Suite à l'analyse des résultats obtenus, les auteurs font part de leur étonnement :

> « La réussite à la question du labyrinthe se révèle indépendante, voire corrélée négativement avec la réussite aux démonstrations à contenu mathématique de l'épreuve T[3], avec la moyenne de l'année attribuée par les enseignants, avec le score obtenu dans la première passation. Les élèves qui réussissent le mieux cette question sont les futurs redoublants. Les élèves admis en Première S sont aussi ceux qui réussissent le mieux les démonstrations à contenu mathématique, mais ils répondent massivement « je ne sais pas » à la question concernant la phrase 5[4]. *Ainsi un échec à cet item est un bon indicateur de réussite aux autres questions, mais aussi aux évaluations des enseignants*[5]. »

---

2 Voir par exemple Richard, 1990
3 Il s'agit d'une épreuve de deux heures dont fait partie cet exercice (voir ci-dessous).
4 Il s'agit vraisemblablement de la phrase 6, puisque la phrase 5 a un taux de réussite de 69%.
5 C'est moi qui souligne.

L'étonnement est naturellement source de questionnement et ce paradoxe apparent éveille l'intérêt du chercheur en didactique des mathématiques et, je l'espère, celui du lecteur. J'articulerai donc mon propos autour de l'analyse de cette tâche, avec comme fil conducteur l'idée que les réponses des élèves nous invitent parfois à interroger nos certitudes et, dans ce cas précis, à nous déprendre de l'illusion de transparence[6] attaché à cet *objet de savoir* tellement *naturalisé* que l'on dira volontiers devant un énoncé conditionnel : « c'est un *si... alors* ».

I Le labyrinthe

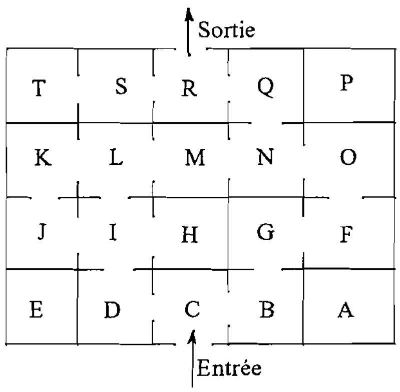
I-1 Présentation de la tâche

Le labyrinthe est le premier exercice d'une série de six présentée aux élèves sous la rubrique :

Epreuve portant sur le thème
ARGUMENTATON-RAISONNEMENT-EXPRESSION (Modalité T)

Les élèves étaient invités à lire la page d'entrée avant de commencer les exercices. Sur cette page, il était indiqué que cette épreuve, d'une durée de deux heures « *est spécialement destinée à observer votre façon de raisonner et la façon dont vous vous exprimez par écrit.* ». Dans la présentation, les auteurs insistent sur l'importance de la rédaction de la solution, la justification soignée des réponses, et préviennent les élèves que certaines questions pourront sembler différentes de ce qu'ils ont l'habitude de faire. Le contexte général de l'épreuve et son but (l'amélioration des conditions d'enseignement) étaient également indiqués aux élèves. L'exercice 1 se présentait ainsi :

Exercice 1
Voici un labyrinthe
Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.
Une personne que nous appellerons X, a traversé ce labyrinthe, de l'entrée la sortie, *sans jamais être passée* deux fois par la même porte.
Les pièces sont nommées A, B, C... comme il est indiqué sur la figure.



Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

---

6 Voir à ce sujet Artigue, 1991

Par exemple, la phrase « X est passée par C » est une phrase VRAIE.
En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C est la seule pièce d'entrée.
Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

Phrase n°1 : « X est passé par P »
Phrase n°2 : « X est passé par N »
Phrase n°3 : « X est passé par M »
Phrase n°4 : « Si X est passé par O, alors X est passé par F »
Phrase n°5 : « Si X est passé par K, alors X est passé par L »
Phrase n°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K »

J'invite vivement le lecteur à résoudre cette tâche[7] et à analyser le processus utilisé pour le faire avant de prendre connaissance des résultats et analyses qui vont suivre.

I-2 Les réponses des élèves

Dans la brochure citée ci-dessus, les auteurs de l'évaluation nous indiquent que les résultats obtenus sont les suivants :

Phrase n°1 : 100% - Phrase n°2 : 96% - Phrase n°3 : 85% - Phrase n°4 : 93% - Phrase n°5 : 69% - Phrase n°6 : 29%.

Ceci correspond au pourcentage de réussite vis à vis des réponses considérées comme exactes par les auteurs, à savoir :

Phrase n°1 : FAUSSE - Phrase n°2 : VRAIE - Phrase n°3 : ON NE PEUT PAS SAVOIR - Phrase n°4 : VRAIE - Phrase n°5 : VRAIE - PHRASE n°6 : FAUSSE.

On voit donc que les taux de réussite sont bons pour les quatre premières phrases[8], commencent à chuter pour la cinquième et s'effondrent pour la sixième. Dans les résultats complets par questionnaire, on obtient en outre des informations sur les réponses obtenues en fonction de différents critères. Pour coder les questions, un certain nombre d'items est attribué à chaque exercice. Pour le labyrinthe, il y a neuf items : les six premiers correspondent aux six réponses considérées comme exactes par les auteurs ; le septième correspond à la réponse *on ne peut pas savoir* pour la phrase n°6 ; le huitième et le neuvième correspondent à la clarté des explications, y compris si certaines réponses sont fausses. L'apparition du septième item dans le codage proposé aux enseignants avant la passation s'explique par le fait que les auteurs ayant repris une épreuve proposée par l'IREM de Besançon en 1986 sur une population réduite s'attendaient à voir apparaître

---

7 Vous pouvez retrouver cette tâche sur le site de l'IREM de Lyon, à l'adresse suivante : http://www.univ-lyon1.fr/IREM/, rubrique Le magazine, puis « à propos du *si...alors* »..
8 Les résultats un peu plus faibles pour la phrase n°3 viennent de ce quelques élèves hésitent à répondre *on ne peut pas savoir.*

avec une fréquence élevée la réponse *on ne peut pas savoir* et souhaitaient donc pouvoir la traiter dans l'analyse des résultats. Sur une population de 227 élèves répartis dans 16 classes, 29% répondent que *la phrase est fausse* ; 60% répondent *on ne peut pas savoir si la phrase est vraie ou fausse.* Si l'on rapporte ce taux à l'ensemble des élèves qui sont admis en Première Scientifique[9], ces taux sont respectivement de 19% et 70%, tandis que pour les redoublants, ils sont de respectivement de 42% et 47%. Ce sont ces résultats, entre autres, qui motivent l'étonnement des auteurs.

Pour essayer d'interpréter ces résultats, j'avais demandé à l'un des auteurs[10] de la brochure de me faire parvenir quelques copies d'élèves ayant été soumis à cette évaluation. J'en ai examinées cinquante et une pour lesquelles j'ai retenu la réponse donnée pour la phrase n°6 et la justification de cette réponse, et dans certains cas également la réponse pour la phrase n°5. Sur les cinquante et une copies consultées, on trouve cinq fois la réponse *vrai* treize fois la réponse *faux* et trente trois fois la réponse *on ne peut pas savoir*, soit respectivement environ 10%, 25% et 65% des réponses, si bien que l'échantillon est bien représentatif de la répartition des réponses de la population générale. Dans la plupart des copies, les réponses sont justifiées soigneusement. Les auteurs notent d'ailleurs dans leurs commentaires que

> « (...) les élèves appliqués et peu hasardeux rédigent longuement en terrain considéré comme sûr (ainsi pour les exercices T_1 et T_2[11]) en y consacrant trop d'énergie et de temps. »

Comme le font remarquer les auteurs, ceci est caractéristique des questions atypiques pour lesquelles les élèves ne disposent pas de références pour savoir ce qu'attend le professeur. Ceci est précieux pour le chercheur qui a ainsi accès à une argumentation assez riche permettant d'interpréter un certain nombre de réponses, ce que je vais tenter de faire ici.

Parmi les réponses *vrai*, on peut lire :

> *« Vraie : X a pu passer dans la pièce K pour se rendre dans la pièce L. »*

Ici l'élève semble répondre à la question : est-il possible que la phrase n°6 soit vraie?

Sur une autre copie, on trouve :

> *« Phrase 5 : vrai car si X passe par K, il passe par J et L; Phrase 6 : Vrai de même »*

Cette réponse peut être éventuellement rattachée à la conception « équivalence ».[12]

9 L'évaluation a été réalisée en Seconde entre le 21 Mai et 15 Juin 1991
10 Il s'agit d'Antoine Bodin que je tiens à remercier ici.
11 T_1 correspond au labyrinthe et T_2 est un exercice concernant des boules de différentes couleurs.
12 On dira qu'un élève a une conception de l'implication de type « équivalence » s'il ne semble pas distinguer entre un énoncé conditionnel vrai dont l'énoncé réciproque est également vrai et un énoncé conditionnel vrai dont l'énoncé réciproque est faux. Dans la population étudiée dans la thèse, seul un très petit nombre d'étudiants semblaient être dans ce cas.

Les autres réponses de ce type sont difficiles à interpréter.

Parmi les réponses *faux* on trouve une réponse faisant explicitement appel à la réciproque et utilisant la modalité du possible pour affirmer la fausseté.

> « *Faux, la réciproque de la phrase n°5 est fausse puisque X peut très bien emprunter un trajet sans passer par K.* »

Trois autres réponses introduisent la modalité du possible et peuvent être interprétées comme *l'énoncé est faux car ce qu'il affirme ne se réalise pas nécessairement.*

> « *Cette phrase est fausse car la case I est également possible pour arriver à L* »
>
> « *Cette phrase est fausse car X peut également passer par I* »
>
> « *Fausse car X a pu passer par J,L,M.* »

En termes mathématiques, ces réponses correspondent à la réponse standard : *l'énoncé est faux car il a un contre-exemple.*

Cinq réponses peuvent être interprétées comme : l'énoncé est faux car ce qu'il affirme n'est jamais réalisé.

> « *Elle est fausse car K n'est pas sur son trajet* ».
>
> « *Faux parce que L a deux portes, celle de droite mène à la sortie et ne passe pas par K.* »
>
> « *Faux car X ne peut pas aller vers K puisqu'il doit aller à la sortie.* »
>
> « *Faux : pour aller vers N, X devrait passer deux fois en I.* »
>
> « *En revanche, si X est passé par L, X n'est pas passé par K, car K n'est pas situé en (entre?) L et N et si X était passé par L et puis ensuite par K il aurait fallu traverser deux fois la porte allant de I à L.* »

On peut penser que ces élèves considèrent que l'antécédent est réalisé et que l'ordre temporel est congruent à celui de la phrase et donc que X est dans la pièce L, et examinent ensuite la possibilité de passer par K en respectant les consignes, ce qui n'est effectivement pas possible.

Une réponse utilise l'argument *du plus court chemin* :

> « *La phrase n°6 est une phrase fausse car en entrant par C, X est passé directement par I, puis par L car si X était passé par K, il aurait fait un grand détour inutile.* »

C'est donc l'interprétation de la vérité qui est en jeu ici.

Cette analyse rapide des justifications pour les réponses correspondant à *la phrase n°6 est fausse* nous montre qu'il faut relativiser l'affirmation selon laquelle « *Les élèves* *qui réussissent le mieux cette question sont les futurs redoublants.*[13] » ; en effet, réussir à cette question au sens habituel dans la classe de mathématiques, c'est déclarer la phrase fausse eu égard au fait qu'elle a un contre-exemple[14].

Parmi les réponses *on ne peut pas savoir,* la plupart des réponses (28 copies sur 33) expriment le fait qu'il y a au moins deux trajets possibles dont l'un met en défaut ce qu'énonce la phrase n°6. Par exemple :

« *On ne peut pas savoir. En effet, X aurait pu passer soit dans la pièce K, soit dans la pièce I pour rejoindre la pièce L.* »

« *On ne peut pas savoir car il a pu passer soit par D,I,L,M ou par D,I,J,K,L,M.* »

« *La phrase n°6 n'est ni vraie, ni fausse. On ne peut pas savoir. Car X a pu passer par K mais X a aussi pu passer par I, pièce communiquant directement avec l, évitant le passage par K.* »

Dans ces trois exemples, on voit apparaître la modalité du possible qui conduit à répondre *on ne peut pas savoir*, tandis que le même argument a conduit d'autres élèves à répondre que *la phrase est fausse.* Notons que dans la dernière copie, l'élève affirme que la phrase proposée n'a pas de valeur de vérité.

Plusieurs réponses évoquent, en outre, la notion de plus court chemin :

« *On ne peut pas savoir (pour que X soit passé par K, il faudrait qu'il soit passé par la pièce J, ce qui le conduit à faire un détour.)* »

« *On ne peut pas savoir car il existe plusieurs possibilités pour accéder à L et si X est passé par K, il a pris le chemin le plus long.* »

« *On ne peut pas savoir car X aurait aussi bien pu passer dans la pièce L en empruntant la porte de la pièce I ce qui lui aurait raccourci le trajet.* »

Deux réponses expriment le fait que la vérité de cette phrase n'est pas nécessaire :

« *Pas forcément car il aurait pu passer par I pour aller plus vite.* »

« *L'hypothèse ne se vérifie pas obligatoirement car pour sortir en passant par L, X n'est pas obligé de passer par K. (C,D,I,L,M,N,Q,R).* »

Enfin, un élève a dressé la liste des chemins possibles avant de répondre aux questions.

---

13 Cf. citation page 2.

14 Cf. citation Houdebine, 98 au début de ce texte.

Ce qui apparaît à la lumière de ces quelques copies, c'est que de nombreux élèves répondant *on ne peut pas savoir* invoquent comme argument le fait que certains trajets rendent la phrase vraie, mais pas tous. Il apparaît que nombre d'entre eux reconnaissent que la présence de la lettre L sans la présence de la lettre K dans le trajet emprunté rend l'implication fausse, mais sans en déduire que la phrase proposée est fausse. On voit également, comme on pouvait s'y attendre, qu'interviennent des arguments qui débordent le cadre strict consistant à répondre en tenant compte des trajets possibles.

I-3 Les analyses et les commentaires des auteurs de la brochure

On a vu précédemment que *pour de nombreux élèves, la phrase n°6 appelle la réponse « on ne peut pas savoir », tandis que pour les auteurs de l'évaluation, elle appelle la réponse « fausse »*. Il faut noter toutefois que cette réponse *« on ne peut pas savoir »* est donnée dans les consignes comme une réponse possible, et que c'est celle que donnent les auteurs de la brochure pour la phrase n°3. Dans leurs analyses pour tenter d'expliquer la réponse *« on ne peut pas savoir »* pour la phrase n°6, les auteurs avancent l'idée selon laquelle, pour la majorité des élèves, l'assertion « Si X est passé par O, alors X est passé par F » se traduit par la question : « Sachant que X est passé par O, X est-il passé par F? », ou même « sachant que X est passé par O, X est-il passé par F avant? », ce qui conduirait à cette réponse, erronée de leur point de vue :

> « Dans le cas de la phrase n°6 l'interprétation par les questions ci-dessus conduit à répondre ON NE PEUT PAS SAVOIR. C'est exactement ce que font la plupart des élèves. Ils ne sont que 29% à donner la bonne réponse ; on lit par exemple :
> *« La phrase n°6 n'est ni vraie, ni fausse. On ne peut pas savoir. Car X a pu passer par K mais X a aussi pu passer par I, pièce communiquant directement avec l, évitant le passage par K. »*

On a vu dans quelques unes des copies précédentes apparaître cette interprétation de la question, mais on la trouve également dans cinq copies pour lesquelles la réponse donnée est *la phrase n°6 est fausse*. Ainsi, contrairement à ce qu'affirme les auteurs, ce n'est pas cette interprétation de la question qui conduit à la réponse *« on ne peut pas savoir »* ; les copies examinées montrent que c'est le fait que la valeur de vérité de cette phrase dépend du trajet effectué qui conduit à cette réponse. Or pour les auteurs de la brochure, c'est précisément cette raison qui conduit à déclarer que la phrase n°6 est *fausse*. Leurs commentaires mettent en évidence le fait que pour eux, *les phrases 4, 5 et 6 sont quantifiées implicitement* et la question qu'ils semblent poser est la suivante :

Est-il vrai que pour toute personne X ayant traversé le labyrinthe, si X est passé par L, alors X est passé par K ?

Ils écrivent en effet, à propos de la phrase n°6 :

« S'agit-il d'énoncés mathématiques, qu'il s'agirait d'appréhender de façon globale? Dans ce cas, ce qui importe c'est la qualité d'un lien entre les deux assertions et non la véracité particulière de chacune des assertions. »

Il semble donc que la divergence entre la réponse majoritaire des élèves et celle considérée comme exacte par les auteurs de la brochure porte sur l'interprétation des énoncés conditionnels proposés.

I-4 De quelle implication parlons-nous ?

En logique classique, on distingue plusieurs types d'implications[15] ; deux d'entre elles sont évoquées par la citation ci-dessus. Ce sont d'une part l'implication entre propositions[16], dite aussi *implication matérielle*[17], et qui est fausse dans le seul cas où son antécédent est vrai tandis que son conséquent est faux ; c'est un énoncé vérifonctionnel dont la valeur de vérité est totalement déterminée par la valeur de vérité de l'antécédent et du conséquent, et ce, y compris si les deux énoncés n'ont pas de lien a priori, et d'autre part, l'implication universellement quantifiée reliant deux propriétés dépendant d'une même variable[18], introduite par Russell (1903) et qu'il appelle *implication formelle*[19] ; une telle implication est fausse dès lors que la phrase ouverte associée (c'est-à-dire la phrase obtenue en enlevant le quantificateur universel) admet un contre exemple. Nous pouvons illustrer ces deux notions par quelques exemples :

Exemple 1 : la phrase : « si 3 est un nombre pair, alors 4 est un nombre premier » est une *implication matérielle* vraie car l'antécédent est une proposition fausse.

Exemple 2 : la phrase : « si 8 est un nombre pair, alors 9 est un nombre premier » est une *implication matérielle* fausse, car son antécédent est une proposition vraie tandis que le conséquent est une proposition fausse.

Exemple 3 : la phrase : « pour tout x, si x est un nombre pair, alors le successeur de x est un nombre premier» est une *implication formelle* fausse dans l'ensemble des entiers naturels; en effet la propriété définie par la phrase ouverte « si x est un nombre pair, alors le successeur de x est un nombre premier » admet des contre-exemples, c'est-à-dire que lorsqu'on assigne à x certaines valeurs, on obtient une implication matérielle fausse ; c'est le cas lorsque l'on assigne à x la valeur 8 (cf. exemple 2)[20]. L'implication

---

15 Voir par exemple Durand-Guerrier, 1995

16 En logique classique, une proposition est une entité linguistique qui porte le vrai ou le faux.

17 L'implication matérielle est un connecteur logique du calcul des propositions.

18 Une propriété est associée à une phrase ouverte s'appliquant à une certaine catégorie d'objets : par exemple « être pair » est associé à la phrase ouverte « x est pair » ; une phrase ouverte n'a pas de valeur de vérité ; ce n'est pas une proposition.

19 L'implication formelle est un connecteur du calcul des prédicats. Un prédicat est associé à une propriété '« être pair » ou à une relation « être supérieur à » sur un domaine d'objets donné.

20 Compte tenu de ce qu'une implication matérielle dont l'antécédent est faux est un énoncé vrai, un contre-exemple est un objet tel lorsque l'on assigne cet objet à la variable, l'antécédent obtenu est un énoncé vrai tandis que le conséquent obtenu est un énoncé faux. Marc Legrand appelle *hors-sujet* un objet

matérielle obtenue est alors une instance[21] de la phrase ouverte correspondante. Par exemple, la phrase « si 8 est un nombre pair, alors 9 est un nombre premier » est une instance de la phrase ouverte « si x est un nombre pair, alors le successeur de x est un nombre premier. »

Exemple 4 : la phrase : « pour tout x, si x est un nombre pair, alors le successeur de x est un nombre impair» est une *implication formelle* vraie dans l'ensemble des entiers naturels; en effet la phrase ouverte « si x est un nombre pair, alors le successeur de x est un nombre impair» n'admet aucun contre-exemple dans cet ensemble ; toutes les implications matérielles obtenues en assignant à x une valeur déterminée sont vraies ; c'est le cas par exemple lorsqu'on assigne à x la valeur 2 ; c'est encore le cas lorsque l'on assigne à x la valeur 3.

En référence à ces deux types d'implication, *le commentaire des enseignants peut s'interpréter comme l'affirmation selon laquelle les phrases proposées sont des implications formelles et non des implications matérielles.* Ceci correspond comme on l'a dit plus haut à la pratique mathématique de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels.

I-5 Résolution de la tâche par des enseignants

Depuis plusieurs années, j'utilise cette tâche dans des stages de formation continue pour des enseignants de mathématiques articulés autour des questions de logique ; en 1998, cette tâche a été proposée également en formation initiale à des enseignants stagiaires (PCL2) à l'IUFM de Lyon. La consigne proposée est celle qui vous été suggérée plus haut, à savoir résoudre la tâche individuellement en explicitant la procédure employée. Ensuite, les participants sont invités à confronter leurs réponses par groupe de trois ou quatre afin d'essayer de trouver une réponse commune. Lors de la mise en commun chaque groupe donne d'une part les réponses apportées avant confrontation, puis les réponses apportées après confrontation et enfin les procédures utilisées.

Pour les phrases 1 à 5, il y a généralement unanimité à la fois sur la réponse à donner et sur les justifications apportées :

La phrase n°1 « *X est passée par P* » est *fausse* car P ne possède aucune porte; il est donc impossible que X soit passée par P.

La phrase n°2 est *vraie* car pour sortir du labyrinthe, il faut passer par R, et donc par Q ; or pour passer par Q, il faut passer par N. On ne peut donc pas sortir sans passer par N. La personne X est sortie; elle est donc passée par N. Certains dressent la liste de tous les trajets possibles permettant de sortir du labyrinthe et contrôlent qu'ils contiennent tous la lettre N.

---

pour lequel l'antécédent obtenu est un énoncé faux ; pour un tel hors-sujet, l'implication matérielle obtenue est un énoncé vrai.

21 Une instance d'une phrase ouverte ayant une variable libre est obtenue en assignant à cette variable libre un objet du domaine de référence. On obtient alors une proposition.

Pour la phrase n°3, *on ne peut pas savoir*, car on peut traverser le labyrinthe en passant par M (par exemple : CDILMNQR) ; mais il est aussi possible de le traverser sans passer par M (par exemple : CBGFONQR). Ne connaissant pas le trajet de X, on ne peut pas savoir si X est passé par M.

La phrase n°4 est *vraie* car on ne peut pas passer par O sans passer par F (en effet O a exactement deux portes dont l'une donne sur F). Donc, dès que l'antécédent est vrai, le conséquent l'est aussi. L'implication ne peut donc pas être mise en défaut. On peut également traiter cette question en listant tous les trajets possibles.

La phrase n° 5 est *vraie* pour une raison similaire.
Certains participants cependant posent pour cette phrase n°5 la question de la prise en compte de la temporalité. Compte tenu de ce que, dans la fiction proposée, l'action est terminée au moment où les phrases sont émises, l'accord se fait en général rapidement sur la non pertinence dans cet exercice de la prise en compte de la chronologie.

Pour la phrase n°6, chaque fois que j'ai proposé cette tâche, certains participants répondent que la phrase est *fausse* au motif qu'il est possible que l'antécédent soit *vrai* et le conséquent *faux*, par exemple si X a emprunté le trajet (CDILMNQR), si bien que cette phrase admet un contre-exemple, tandis que d'autres participants, généralement moins nombreux proposent la réponse *on ne peut pas savoir* en arguant du fait que la phrase peut être fausse, si X a emprunté le trajet (CDILMNQR) ; mais il se peut aussi qu'elle soit vraie, par exemple si X a emprunté le trajet (CDIJKLMNQR)[22]. Lors de la mise en commun par petits groupes, il arrive fréquemment que certains participants ayant répondu *on ne peut pas savoir* soient ébranlés par les arguments de ceux qui ont répondu *faux* et changent de point de vue.

En tout état de cause, lors de la mise en commun général, un débat s'installe toujours entre ceux, majoritaires, qui sont convaincus que la réponse correcte est *la phrase n°6 est fausse,* et ceux qui pensent qu'on doit plutôt répondre *on ne peut pas savoir.*

Ceux qui ne sont pas convaincus que la réponse correcte est *la phrase n°6 est fausse* s'interrogent sur la différence de traitement entre l'énoncé 3 et l'énoncé 6, et se demandent pourquoi avec les mêmes arguments on devrait répondre *on ne peut pas savoir* pour la phrase n°3 et c'est *faux* pour la phrase n°6.

Les arguments donnés par les premiers sont régulièrement les suivants :
- C'est un *si...alors* ; il y a un contre-exemple , donc la phrase est *fausse.*
- la phrase n°6 signifie en fait : *si X est passée par L, alors X est forcément passé par K.*
- il y a un *quel que soit* sous-entendu.

22 La proportion de réponses de ce type était plus élevée dans les groupes d'enseignants en formation initiale que dans les groupes d'enseignants en formation continue.

Certains participants pensent alors qu'il faudrait répondre *faux* à la question n°3.

A ce point du débat, il est difficile de départager les points de vue. Il semble qu'on assiste à une opposition entre un point de vue relevant plutôt de la logique de sens commun et un point de vue lié à la pratique mathématique. Le fait que certains enseignants puissent considérer que cette tâche n'est pas à strictement parler une tâche mathématique permet que ces deux points de vue cohabitent, alors même que tous les participants sont des enseignants de mathématiques. Elle apparaît ainsi comme un révélateur d'une pratique généralement non questionnée : la quantification universelle implicite des énoncés conditionnels.

Pour faire rebondir le débat, on peut s'interroger sur le statut logique des phrases proposées ; en particulier, on peut se demander à quel type de phrase s'applique la réponse *on ne peut pas savoir.* Pour cela, je propose une modélisation de la tâche permettant de mettre en évidence la structure logique sous-jacente.

I-6 Formalisation de la situation en utilisant la variable trajet. Structure logique sous-jacente[23].

Comme je l'ai dit plus haut, les commentaires des auteurs sur la divergence entre la réponse majoritaire des élèves et celle qu'ils considèrent comme la réponse correcte renvoie au statut logique des phrases proposées. La réponse des auteurs de la brochure relève clairement de la pratique implicite de quantification universelle des énoncés conditionnels, ce qui revient à considérer que les énoncés conditionnels en mathématiques sont des implications formelles. On vient de voir que cette opposition se retrouve dans les groupes d'enseignants de mathématiques en formation. De nombreux auteurs insistent sur l'écart entre la logique de sens commun et la logique à l'oeuvre dans la classe de mathématiques[24], et on peut voir dans cette tâche une nouvelle illustration de cet état de fait. Cependant le paradoxe apparent relevé par les auteurs de la brochure, la cohérence des explications des élèves qui répondent *« on ne peut pas savoir »* et le fait qu'un certain nombre d'enseignants répondent comme les élèves nous invitent à ne pas rester sur ce constat. Il s'agit alors de renvoyer la balle dans le camp des professeurs et d'interroger la certitude suivant laquelle l'interprétation pertinente est celle donnée par les auteurs de la brochure. Suivant en cela Quine[25], qui considère que la formalisation des énoncés de la langue dans le calcul des prédicats est un outil de clarification conceptuelle, je propose dans ce qui suit une troisième voix qui consiste à modéliser la tâche précisément dans le langage du calcul des prédicats[26].

Une modélisation devra prendre en charge le fait que pour répondre aux questions, il est fait appel aux modalités du nécessaire (il faut), du possible, de l'impossible et du

23 Les analyses qui suivent sont reprises de Durand-Guerrier, 1995 et 1996b.
24 Voir par exemple IREM de Grenoble, 1985.
25 Voir par exemple Quine, 1987, pp.134-137.
26 Pour d'autres exemples de modélisation dans le calcul des prédicats, voir Durand-Guerrier 1996a et 1996b.

contingent (on ne peut pas savoir). Par ailleurs, les arguments donnés pour les phrases 3 et 6 montrent qu'en fait, ici, la variable pertinente n'est pas la variable *personne*, mais la variable *trajet.*

Pour pouvoir proposer une modélisation, il faut tout d'abord choisir un point de vue concernant le statut logique de la lettre X dans l'énoncé de la tâche. La lecture de l'énoncé de l'exercice montre que X est le nom d'une personne qui a traversé le labyrinthe ; on aurait aussi bien pu l'appeler Paul ou Pierre, voir même Monsieur X ! Sous ce point de vue, X est une constante d'individu. La personne X étant donnée, chaque phrase de la forme « *X est passée par Z* », où Z désigne une pièce donnée du labyrinthe, est susceptible de recevoir une valeur de vérité puisque X a effectivement réalisé la traversée du labyrinthe ; ces phrases sont donc des propositions au sens logique du terme. Par suite, chacune des phrases de la forme « *si X est passée par Z, alors X est passée par W* », où Z et W désignent des pièces données est une implication matérielle. Ces propositions peuvent être considérées comme des instances d'énoncés ouverts. Cependant, comme on l'a dit, la variable pertinente n'est pas la variable *personne* mais la variable *trajet*.. Il faut donc utiliser des paraphrases supplémentaires et considérer les phrases : « la pièce Z se trouve sur le trajet de X » et « si la pièce Z se trouve sur le trajet de X, alors la pièce W se trouve sur le trajet de X », où Z et W sont des pièces données.

On peut définir ensuite un *trajet* comme une suite finie de lettres prises parmi les lettres de A à T. Puisque la personne considérée a traversé le labyrinthe, les *trajets* que nous aurons à examiner sont ceux permettant de traverser ce labyrinthe ; je noterai $\mathtt{T}$ l'ensemble formé de ces *trajets*. Chaque élément de $\mathtt{T}$ est une suite finie de lettres vérifiant certaines conditions : par exemple la suite commence par C ; se termine par NQR ; ne contient ni A, ni P, ni S, ni T.., et compte tenu de ce que l'on ne peut pas passer deux fois par la même porte, le nombre de ces *trajets* est fini et on peut décrire complètement $\mathtt{T}$. Pour poursuivre la modélisation, il nous faut définir les prédicats appropriés : τ étant un trajet, on dira qu'une pièce Z est élément de τ, si la lettre Z apparaît dans la suite τ. On associe ainsi à chaque pièce du labyrinthe un prédicat à valeur dans $\mathtt{T}$, que l'on notera Z. Ainsi pour chaque trajet considéré $Z(\tau)$ est vrai si la lettre Z apparaît dans τ, faux sinon. Comme les éléments de $\mathtt{T}$ sont parfaitement définis, les différents prédicats le sont également[27].

Une personne X ayant traversé le labyrinthe étant donnée, on peut lui associer son trajet τ_X, et les phrases se traduisent alors par les énoncés suivants :

E_1 : P est élément de τ_X

E_2 : N est élément de τ_X

E_3 : M est élément de τ_X

E_4 : si O est élément de τ_X, alors F est élément de τ_X

E_5 : si K est élément de τ_X, alors L est élément de τ_X

27 Un prédicat est parfaitement défini sur un domaine de référence donné dès lors que l'on peut lui associer de manière univoque l'ensemble des objets qui le satisfont.

E_6 : si L est élément de τ_X, alors K est élément de τ_X

Notons que l'énoncé E_6 est l'énoncé réciproque de l'énoncé E_5.

Si on note t la variable *trajet*, τ_X est une assignation de la variable t, on peut donc associer à chacune de ces phrases une formule non close du calcul des prédicats :

F_1 : $P(t)$	F_2 : $N(t)$	F_3 : $M(t)$
F_4 : $(O(t) \Rightarrow F(t))$	F_5 : $(K(t) \Rightarrow L(t))$	F_6 : $(L(t) \Rightarrow K(t))$

Les lettres P, N, M, O, F, K et L désignent les prédicats correspondant aux pièces désignées par ces lettres. Ces formules correspondent à des phrases ouvertes, sans valeur de vérité ; les énoncés E_1 à E_6 sont des instances[28] de ces phrases ouvertes.

Pour chacune de ces formules, on peut considérer leur clôture universelle[29] et leur clôture existentielle[30] et examiner leur valeur de vérité dans T.

Pour la formule F_1, la clôture universelle et la clôture existentielle s'interprètent par des propositions fausses de T ; ceci signifie que la clôture universelle de la formule « $\neg P(t)$[31] » est vraie dans T. Par suite pour chaque interprétation de t l'énoncé correspondant à F_1 est *faux* ; en particulier E_1 est *faux*.

Pour la formule F_2, la clôture universelle est un énoncé *vrai* dans T. Par suite pour chaque interprétation de t l'énoncé correspondant est *vrai* ; en particulier l'énoncé E_2 est *vrai*.

Pour la formule F_3, la clôture universelle est un énoncé *faux*, tandis que la clôture existentielle est un énoncé *vrai*. Certaines instances de F_3 dans T sont des énoncés *vrais*, tandis que d'autres instances sont des énoncés *faux*. Par suite, on ne peut pas se prononcer sur la valeur de vérité de E_3 sans information supplémentaire sur le trajet de X. La phrase n°3 est *contingente*[32] pour celui qui doit répondre à la question. Pour X, qui sait quel est son trajet, cette phrase est soit vraie, soit fausse.

Pour F_4, la clôture universelle est *vraie* ; d'où l'énoncé E_4 est *vrai* ; il en de même pour F_5 et E_5.

Pour F_6, la clôture universelle est *fausse* et la clôture existentielle est *vraie* ; on est dans le même cas que pour F_3 et donc on ne peut pas se prononcer sur la valeur de vérité de E_6 sans information supplémentaire sur le trajet de X. Comme celui qui doit répondre

28 C.f. note n°20

29 L'énoncé obtenu en ajoutant un quantificateur universel portant sur la variable t.

30 L'énoncé obtenu en ajoutant un quantificateur existentiel portant sur la variable t.

31 $\neg$ est le symbole logique pour la négation ; « $\neg P(t)$ » se lit donc « *non*P(t) ».

32 Un énoncé est contingent pour un sujet donné à un instant donné t si le sujet n'a pas, à l'instant t, les moyens de savoir si cet énoncé est vrai ou faux.(Durand-Guerrier, 1995 et 1996b)

ne connaît pas le trajet de X, il ne peut pas savoir si la phrase est vraie ou fausse. La phrase n°6 est *contingente* pour celui qui doit répondre à la question.

Dans la modélisation choisie, les phrases proposées dans l'exercice s'interprètent comme des propositions et, concernant les phrases 4 à 6, comme des implications matérielles. Comme on s'y attendait, le travail de modélisation contribue à clarifier le statut logique des énoncés en jeu, mais aussi de la lettre X ; plus précisément, dans ce travail de modélisation explicite, il n'est pas possible de changer le statut logique de la lettre X entre la phrase 3 et la phrase 6 ; en d'autres termes, il n'est pas possible de prendre en compte dans cette modélisation la pratique de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels. D'autre part, il s'agit de propositions ayant une valeur de vérité déterminée dès lors que l'on a spécifié le domaine de référence. En outre, l'analyse montre que l'expression *« on ne peut pas savoir »* a ici la signification suivante : la phrase a une valeur de vérité déterminée, mais celui qui doit répondre à la question ne dispose pas des informations suffisantes pour la déterminer. Dans ce cas là, il est cohérent de ne pas se prononcer. Comme on l'a vu plus haut, ceci correspond à la réponse donnée par la majorité des élèves. Cette modélisation dans le calcul des prédicats permet donc de rendre compte des arguments fournis par les élèves et de légitimer leurs réponses.

Il faut noter que pour pouvoir modéliser cette tâche dans le calcul des prédicats on ne peut pas choisir la variable *personne* car, sans connaître la population de référence, on ne peut pas définir les prédicats correspondant à certaines pièces ; c'est par exemple le cas de la pièce M. En effet, pour certaines populations, cette pièce pourrait n'être jamais traversée ; pour d'autres, elle pourrait l'être toujours ; pour d'autres encore, elle pourrait l'être par certaines personnes et pas par d'autres. Ceci montre également qu'une quantification sur la variable *personne* ne permet pas de répondre que la phrase n°6 est fausse, sauf à préciser que l'on se met dans une situation où tous les trajets possibles sont réalisés, ce qui nous ramène à la variable *trajet.* Un autre point de vue consisterait à choisir la variable *trajet*, et à considérer qu'elle est non quantifiée dans la phrase n°3, et quantifiée dans la phrase n°6, eu égard à la pratique mathématique standard. Ce point de vue, qui permet de rendre compte de la position de ceux qui considèrent que la phrase n°6 est *fausse*, correspond à une interprétation de la phrase n°3 qui n'est jamais donnée. En effet, dans ce cas, la phrase 3, qui est une phrase ouverte n'a pas de valeur de vérité ; et la réponse la plus appropriée serait : *la phrase n'est ni vraie, ni fausse.* C'est ce que dit par exemple Quine (1950) :

> « Ainsi tous les énoncés simples sont des énoncés ouverts tels que « x se promène » et « x>y » ; ils renferment des variables libres par conséquent ils ne sont ni vrais ni faux ; on peut seulement dire qu'ils sont satisfaits par certains objets (...) ».

Le fait de considérer la phrase n°3 comme une phrase ouverte n'apparaît pas en général dans les réponses ; cela tient au fait que la phrase ouverte appartient au modèle ; pour répondre, on considère qu'il s'agit d'une instance de cet énoncé. En tout état de cause, dans les deux cas, il y a un changement de statut pour la lettre X entre la phrase n°3 et la phrase n°6 : considérée soit comme une variable libre, soit comme une constante d'individu dans la phrase n°3, elle devient une variable quantifiée dans la phrase n°6.

II Prolongements didactiques

II-1 Un phénomène d'ambiguïté référentielle

La tâche du labyrinthe met en évidence le fait que, dans ce cas là, on peut légitimement s'interroger sur la pertinence d'une quantification universelle implicite des énoncés conditionnels proposés. En outre, la modélisation dans le langage du calcul des prédicats montre la pertinence de distinguer entre les phrases ouvertes dont la clôture existentielle est *fausse*, et donc dont toute instance est nécessairement un énoncé *faux*, et celles dont la clôture existentielle est *vraie* tandis que la clôture universelle est *fausse*, et dont certaines instances sont *fausses*, tandis que d'autres sont *vraies*. Cette distinction ne peux pas être prise en compte si l'on omet systématiquement la quantification universelle en formalisant tous les énoncés conditionnels sous la forme *si p, alors q*. En fait, on assiste ici à un écrasement entre les deux types d'implications introduites plus haut. En effet, a priori l'écriture « *si p, alors q* » renvoie à l'implication matérielle entre propositions, alors que la notion de contre-exemple renvoie à l'implication formelle. La disparition de la quantification universelle entraîne dans son sillage la disparition de la variable, et par voie de conséquence, de l'énoncé conditionnel ouvert associé à l'implication formelle. On peut illustrer ceci en considérant la règle du débat suivante, proposée dans Arsac et Ali , 1992 :

> « En mathématiques, des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai » (p 14)

Je ne discuterai pas ici cette règle en tant que telle[33] ; je m'intéresse plutôt à ce qu'elle recèle d'implicite dans sa formulation. Tout d'abord, si l'on regarde ce que signifie en français le verbe *vérifier*, on trouve dans le Petit Larousse illustré (édition 1997) :

> « faire voir la vérité, l'exactitude d'une chose ; prouver, corroborer »

et dans le Micro Robert (Edition de 1981) :

> « (suj.chose[34]) : Constituer le signe non récusable de la vérité de quelque chose. »

En mathématiques, on utilise le verbe *vérifier* le plus souvent au sens de *rendre vrai* : on dira par exemple que le nombre 2 vérifie l'équation « $x^2 - 4 = 0$ » car il est vrai que $2^2 - 4 = 0$.

33 Il faut noter cependant qu'elle ne peut en aucun cas s'appliquer aux énoncés existentiels.
34 Suj. chose : abréviation pour : le sujet est un nom désignant des choses.

Autrement dit, on peut paraphraser cette règle sous la forme :

« En mathématiques, des exemples qui rendent un énoncé vrai ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai. »

Or, selon les règles de la grammaire française, le pronom personnel *il* présent dans l'expression *il est vrai* renvoie au terme *énoncé* qui apparaît en amont dans la phrase : on peut donc proposer encore une autre paraphrase :

« En mathématiques, des exemples qui rendent un énoncé vrai ne suffisent pas à prouver que cet énoncé est vrai. »

Sous cette forme, l'ambiguïté de la formulation est manifeste et ferait le bonheur de certains chroniqueurs toujours à l'affût de « nonsense » au sens de Lewis Carroll. Pourtant, nous sommes tous d'accord avec ce que les auteurs entendent en énonçant cette règle : à savoir que pour prouver un énoncé universellement quantifié, il ne suffit pas, en général[35], de produire des exemples. En fait l'ambiguïté provient de ce que le terme *énoncé* n'a pas la même référence dans les deux occurrences : dans la deuxième occurrence, l'énoncé est une implication formelle au sens de Russell (un énoncé universellement quantifié, cette quantification pouvant être implicite), tandis que dans la première occurrence, la référence est l'énoncé ouvert associé à cette implication formelle. Ceci renvoie aux phénomènes d'ambiguïté référentielle analysés dans Politzer (1991). Il est habituel de penser que cette règle rentre en conflit avec la logique naturelle ; en effet, une réponse fréquemment obtenue lorsqu'un énoncé ouvert admet à la fois des exemples et des contre-exemples, c'est qu'il n'est *ni vrai, ni faux* ; ou encore qu'il est *parfois vrai, parfois faux*. Or, si cette réponse est incorrecte lorsqu'on considère qu'elle s'applique à un énoncé universellement quantifié, elle est par contre tout à fait légitime si elle s'applique aux différentes instances d'un énoncé ouvert ayant à la fois des exemples et des contre-exemples. Ceci conduit certains élèves à refuser la règle du contre-exemple qui peut s'énoncer (Arsac et Ali, 1992) :

« Un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé. »

Ici encore, il y a en fait coexistence des deux types d'énoncés puisqu'en effet seuls les énoncés ouverts ont des contre-exemples, tandis que l'énoncé invalidé ne peut être que l'énoncé universellement quantifié associé. Il ne s'agit pas de dire que la formulation des règles est la source unique de résistance des élèves à ces règles, mais il est clair qu'il n'est pas possible d'écarter certaines réponses des élèves sans expliciter la quantification cachée, à moins d'user d'un argument d'autorité.

II-2 Un exemple mathématique : le losange

Ce qui précède montre selon moi que la position selon laquelle, dans la classe de mathématiques, on ne manipule que des énoncés universellement quantifiés et que, par conséquent, il est inutile d'expliciter cette quantification n'est pas tenable. En effet, il est

---

35 Il est nécessaire de mettre cette restriction car si le domaine de référence est fini et que l'on peut facilement lister ses éléments, alors à condition de pouvoir montrer que chaque élément vérifie l'énoncé ouvert correspondant, on pourra conclure à la vérité de l'énoncé universellement quantifié correspondant..

clair que pour les deux règles du débat citées plus haut, seule l'explicitation de la quantification universelle attachée à l'énoncé dont on examine la vérité permet de lever l'ambiguïté. Je vais montrer la pertinence de l'explicitation de la quantification universelle à partir d'un exemple mathématique classique en quatrième et que j'avais testé dans le cadre de ma thèse auprès d'étudiants arrivant à l'université en 1992.

Il s'agit de répondre à la question suivante :

(1) Un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange; est-ce vrai ou faux ?

D'autre formulations sont possibles :

(2) Dire si la phrase suivante est vraie ou fausse :
Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

(3) Répondre à la question suivante :
Un quadrilatère (A,B,C,D) a ses diagonales perpendiculaires. Est-ce un losange ?

(4) Le maître dit qu'il a dessiné un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires. Les élèves qui ne voient pas son dessin doivent répondre à la question : est-ce un losange ?

Houdebine (1998) propose la formulation (2) et note une difficulté pour les élèves à se mettre d'accord sur le fait que cet énoncé est faux : l'énoncé ayant à la fois des exemples et des contre-exemples accessibles pour des élèves de quatrième, les élèves hésitent entre *faux, pas toujours vrai* et *vrai.* Ceci est confirmé par divers enseignants ayant proposé cet exercice dans leur classe ; par exemple, dans la formulation (1) certains élèves demandent que soit rajouté *toujours* pour pouvoir accepter la réponse *faux.* J'avais proposé la formulation (3) à 273 étudiants de DEUG A[36] arrivant à l'université à Valence en Octobre 1992, dans le cadre d'un questionnaire sur divers énoncés implicatifs. Il était demandé de justifier soigneusement les réponses. Les réponses obtenues se répartissent de la manière suivante : environ 31% des réponses sont du type *on ne peut pas savoir* ; environ 40% des étudiants répondent que la phrase est *fausse* et 22% environ qu'elle est *vraie* ; les autres réponses sont difficiles à interpréter. Le vocabulaire des modalités est assez bien représenté : *pas forcément* (44)[37] *pas obligatoirement* (22) *pas nécessairement* (4); *pas automatiquement, pas dans tous les cas, on ne peut pas savoir, on ne peut pas le dire, c'est possible mais pas certain, on ne peut pas donner de réponse, il est impossible d'affirmer* (une fois chaque expression). On trouve huit fois mentionné le fait que la condition n'est pas suffisante.

---

36 Le DEUG A correspond aux deux premières années d'études dans les université scientifiques, correspondant aux dominantes mathématiques, physique, chimie et informatique.
37 Il s'agit du nombre de fois où l'expression a été rencontrée.

Parmi les étudiants qui donnent la réponse *faux* plusieurs le font en appliquant *le principe du maximum d'information*[38] ; par exemple :

> « Non car un losange possède quatre côtés égaux et est un parallélogramme, alors que (A,B,C,D) est un quadrilatère quelconque qui a seulement ses diagonales perpendiculaires. »

Ceux qui répondent *vrai* disent qu'il y a comme seul contre-exemple le carré qui est un losange particulier ; il y a très peu de dessins proposés comme contre-exemples.

Si on considère la formulation (4) qui n'a pas été testée, il est clair que les élèves ne disposent pas des informations permettant de répondre à la question. Comment faut-il alors interpréter le fait de répondre *faux* dans le cas de la première formulation. Ici encore, le fait d'évacuer la quantification universelle crée une difficulté lorsqu'il faut traiter une instance de l'énoncé. Il est tout à fait clair que pour les formulations (3) et (4) qui sont clairement des instances d'un énoncé qui a à la fois des exemples et des contre-exemples, la réponse la plus cohérente est *on ne peut pas savoir compte tenu des informations données*. Pour les formulations (1) et (2), la réponse *la phrase est fausse* suppose pour l'enseignant la prise en compte de la quantification universelle implicite ; on a vu qu'elle pouvait aussi apparaître comme l'application du principe du maximum d'information. Sur le plan logique, en l'absence de quantification explicite, *un quadrilatère* a valeur d'élément générique et le fait que certaines instances sont des contre-exemples tandis que d'autres sont des exemples permet seulement d'affirmer que la clôture existentielle de la phrase ouverte associée d'une part, de sa négation d'autre part, sont des phrases *vraies*. Il y a dans la pratique mathématique une dissymétrie du vrai et du faux vis à vis de la quantification implicite : en effet une phrase sans quantificateur est déclarée *vraie* si toutes ses instances sont vraies et *fausse* si une au moins de ses instances est fausse. Cependant, comme la négation d'une phrase fausse est un phrase vraie, si on déclare que la phrase :

un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaire est un losange

est une phrase fausse, alors on devrait déclarer que la phrase :

un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires n'est pas un losange

est une phrase vraie.

Or bien entendu, les deux phrases sont fausses, mais seule l'explicitation de la quantification permet de lever le paradoxe :

un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires n'est pas toujours[39] *un losange.*

La négation des énoncés donnés sous la forme *si...alors* est plus délicate. Considérons l'énoncé

Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

---

38 Il s'agit d'une règle conversationnelle due à Grice selon laquelle le locuteur est censé avoir donné toute l'information pertinente dont il dispose.

39 Il serait évidemment plus correct de mettre *nécessairement*, mais est-ce bien raisonnable au niveau de la quatrième ?

La négation d'un tel énoncé, considéré comme un énoncé général, comporte explicitement une quantification existentielle :

Il existe au moins un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et qui n'est pas un losange.

Elle est naturellement reliée à la règle du contre-exemple ; cependant comme on l'a vu plus haut, c'est l'énoncé ouvert qui admet des contre-exemples et non l'énoncé général. L'énoncé général exprime une notion de nécessité dans le sens où la vérité d'un tel énoncé permet de déduire la vérité de chacune des instances de l'énoncé ouvert associé. Un des enjeux du développement du raisonnement mathématique est précisément la prise en compte de cette nécessité qui seule permet de faire des déductions. On peut s'interroger sur la pertinence de laisser à la charge de l'élève la reconnaissance de la présence de cette nécessité. On pourrait cependant penser que, à condition de se limiter strictement aux énoncés explicitement donnés sous la forme *si...alors*, il soit possible d'institutionnaliser la quantification universelle implicite de ces énoncés. C'est ce que semble proposer Houdebine 1998 et c'est ce qui est proposé explicitement dans certains manuels de DEUG A. Par exemple (Dehame et Clénet, 1995) : après avoir introduit les deux quantificateurs, écrivent :

« Remarques :

1. Quand une proposition, notamment une implication ou une équivalence, est donnée sans quantificateur, c'est le quantificateur universel qui est sous-entendu.

Quand on dit, par exemple, que l'implication $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ est vraie, on sous-entend $\forall x \in \mathbb{R} \;\; x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$.

2. Si P(x) est fausse pour tout x de E, on peut écrire $\forall x \in E \;\; \text{non}P(x)$. » (p 12)

Cependant, avant l'introduction des quantificateurs, ils avaient proposé l'exercice suivant (p 7) :

« Soient trois réels x,y,z parmi lesquels il y a 0 et deux réels de signes contraires.

On suppose que les trois implications suivantes sont vraies :

(1) $x = 0 \Rightarrow y > 0$

(2) $x > 0 \Rightarrow y < 0$

(3) $y \neq 0 \Rightarrow z > 0$

Comparer x, y et z. »

Il est tout à fait clair que les implications (1), (2) et (3) sont ici des implications matérielles. Ainsi, même au niveau du DEUG, on ne peut pas vraiment garantir que la quantification universelle implicite des énoncés conditionnels soit dans tous les cas la bonne interprétation.

En outre, en situation de résolution de problème, il est nécessaire de distinguer entre des énoncés conditionnels n'ayant aucun exemple (on n'a jamais à la fois l'antécédent et le conséquent *vrais*) et des énoncés ayant des exemples et des contre-exemples. En effet, en situation de résolution de problème, les élèves sont le plus souvent confrontés à des instances d'énoncés ouverts. L'enjeu de la démonstration étant de savoir s'il y a un énoncé général disponible permettant de garantir la validité d'une déduction. Ainsi, imaginons une situation où l'élève a démontré que les diagonales d'un certain quadrilatère (A,B,C,D) sont perpendiculaires. Peut-il en déduire qu'il s'agit d'un losange? Non, car il n'y a pas de théorème général, mais il ne peut pas non plus en déduire que ce n'est pas un losange. L'énoncé, à ce moment là de sa recherche, est contingent pour lui. On ne s'attend pas à ce qu'il s'arrête de chercher au motif que l'énoncé général est faux. Comme cet énoncé a aussi des exemples, il peut poursuivre son exploration et chercher soit un moyen de prouver que ce n'est pas un losange, soit un moyen de prouver que c'est un losange, soit encore attester que les deux cas sont possibles. Il n'en serait pas de même si on se demandait s'il s'agit d'un rectangle non carré. En effet, aucun rectangle non carré n'ayant ses diagonales perpendiculaires, il pourrait en déduire que le quadrilatère (A,B,C,D) n'est pas un rectangle non carré. Ceci correspond au fait que si un énoncé du type « si P(x), alors Q(x) » n'a aucun exemple, alors on peut affirmer que l'énoncé « Pour tout x, si P(x), alors non-Q(x) » est un énoncé vrai.

Tant dans le problème du labyrinthe que dans celui du losange, les énoncés litigieux examinés sont des énoncés conditionnels réciproques d'énoncés *vrais*. On peut donc penser que l'intention didactique sous-jacente à ces activités est de faire travailler les élèves sur des théorèmes conditionnels dont la réciproque n'est pas un théorème. Dans ce cas, en général, l'énoncé réciproque a précisément à la fois des exemples et des contre-exemples. Il est donc particulièrement important de bien s'entendre sur ce que signifie le fait qu'un tel énoncé soit faux.

Conclusion

Arrivés au terme de notre analyse, avons-nous résolu le paradoxe apparent présenté dans l'introduction[40] ? Je pense que l'on peut répondre oui, et cela pour trois raisons au moins. Tout d'abord, les analyses précédentes montrent que la réponse des élèves à la question n°6 non seulement n'était pas incohérente, puisqu'une modélisation de la tâche dans le calcul des prédicats conduit précisément à cette réponse, mais même qu'on pouvait la considérer comme particulièrement pertinente dans cette situation. Ensuite, nous avons vu que près d'un tiers des étudiants de DEUG A testés donnent une réponse du type *on ne peut pas savoir* à la question du losange ; ainsi il se confirme que ne pas rétablir de manière systématique la quantification universelle implicite n'est pas un obstacle pour réussir des études scientifiques au lycée. Enfin, et c'est sans doute le plus important, en situation de résolution de problème, la reconnaissance de ce qu'un énoncé est contingent à un moment donné de la résolution est ce qui motive la poursuite de la recherche, c'est en

40 Voir la citation des auteurs page 2 (« la réussite ....enseignants. ») et lignes suivantes.

quelque sorte le moteur de l'heuristique. Ce que les élèves nous montrent dans la tâche du labyrinthe et dans leurs résistances dans la situation du losange, c'est que la position dogmatique qui consiste à considérer qu'il n'existe qu'une seule catégorie d'énoncés conditionnels dans la classe de mathématiques, et que pour tout énoncé mathématique on peut trancher de manière radicale entre *le vrai* et *le faux* peut, et selon moi *doit*, être abandonnée au profit d'une position plus pragmatique consistant à laisser vivre dans la classe, sous certaines conditions, des énoncés contingents. Je rajouterai que ceci va dans le sens de l'un des objectifs avoué de l'enseignement des mathématiques, à savoir permettre au plus grand nombre d'élèves de découvrir ce qu'est l'activité mathématique et de favoriser le développement des capacités de découverte et de démonstration.

Bibliographie

A.P.M.E.P. (1992) *Publication n°88 : EVAPM91/2. Evaluation des programmes de mathématiques Seconde 1991*

ARSAC G. & ali. (1989) *Initiation au raisonnement déductif au collège.* Presses Universitaires de Lyon I.R.E.M.

ARTIGUE M. (1991) Epistémologie et didactique in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 10/2.3. Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

DEHAME F. & CLENET D.(1995) *Algèbre générale. Exercices corrigés. Conseils. Précis de cours.* Vuibert

DURAND-GUERRIER V. (1995) Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en oeuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. In ARSAC & ali, *Différents types de savoirs et leurs articulations.*, (205-233). Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

DURAND-GUERRIER V. (1996a) Place et rôle de la logique formelle dans la modélisation du raisonnement mathématique in *Actes de la VIII^{ème} école d'été de didactique des mathématiques.* Noirfalise & Perrin-Glorian. ed., IREM de Clermont-Ferrand.

DURAND-GUERRIER V.(1996b) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1.

DUVAL R. & EGRET M J. (1993) Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif in Repères n°12, Topiques Editions.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

HOUDEBINE J. (1998) *La démonstration. Ecrire des mathématiques au collège et au lycée.* Hachette Education.

IREM de GRENOBLE (1985) *Apprentissage du raisonnement..*

QUINE W.V.O. (1950) *Méthodes de logique.* Traduction française Armand Colin, 1972.

QUINE W.V.O. (1987) *Quiddités. Dictionnaire philosophique par intermittence.* Traduction française Editions du Seuil, 1992.

RICHARD J.F. (1990) *Les activité mentales, comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Armand Colin.

RUSSELL B. (1903) *Les principes de la mathématique*, traduction française in *RUSSEL, Ecrits de logique philosophique.* PUF: Paris 1989.