PETITES PROMENADES MATHÉMATIQUES EN CHINE ANCIENNE

Arnaud Gazagnes

IREM de Lyon

Nota : la transcription des idéogrammes adoptée ici est la transcription en pinyin.

1. En Chine Ancienne...

1. 1 Une compilation.

Pour se faire une première idée, il est correct de penser que les ouvrages chinois sont des ouvrages pratiques et pédagogiques, c'est-à-dire des supports pour un enseignement du calcul numérique (et des problèmes d'application) ou encore des modes d'emploi (de descriptions) de techniques. Nous pouvons nous demander d'où nous viennent les textes mathématiques chinois. En effet, comme dans d'autres civilisations, les mathématiques ont été étroitement liées aux connaissances de leur époque et, à ce titre, il n'y a pas de traité mathématique en tant que tel. On les trouve dans deux domaines différents : le premier est scientifique (traités de calendrier, d'astronomie, …), le second, littéraire ou historique, lorsqu'il y est fait mention de connaissances mathématiques. Les premiers textes mathématiques chinois qui nous sont parvenus datent de la dynastie des Han (– 202, 220), pendant laquelle s'est faite la première unification solide de l'empire. Un système bureaucratique s'installe. On assiste dans de nombreux domaines du savoir à un travail de synthèse, de mise en ordre des acquis antérieurs par des fonctionnaires savants (de tendance confucéenne).

Au cours de cette période se sont développées la géométrie appliquée (où l'on trouve des relations dans le triangle rectangle, le carré et le cercle, la détermination des distances, des calculs de surfaces et de volumes, le théorème dit « de Pythagore ») et l'arithmétique (où se trouvent des problèmes sur les 4 opérations, avec des nombres entiers ou fractionnaires, des extractions de racines carrées ou cubiques, des résolutions des problèmes à une ou plusieurs inconnues, …).

Notons leur connaissance des nombres négatifs dès les débuts de l'ère chrétienne. Alors que les Européens réfléchissaient sur le statut particulier de ces nombres, les Chinois les utilisaient depuis fort longtemps. Très tôt, les mathématiciens chinois ont ajouté, multiplié et retranché des nombres à l'aide de baguettes, rouges pour les nombres positifs et noires pour les négatifs.

Les dix Classiques du Calcul (*Suanjing shi shu* 算 經 十 書) est un nom donné communément à la collection de manuels mathématiques compilés officiellement au début de la dynastie Tang (vers 750), à partir de textes anciens ou modernes, en vue des examens impériaux de mathématiques. Les fonctionnaires mathématiciens reçurent alors un statut qui leur donnait les traités (et de facto les notions) à connaître, la durée des études, … En effet, auparavant, la majorité des fonctionnaires lettrés étaient plus intéressés par les belles-lettres (dont les textes étaient écrits au pinceau et recopiés en nombre très réduit) ; leur recrutement et leur avancement étaient basés sur des concours purement littéraires ou militaires. La pratique des calculs qui s'y trouvent a non seulement été très développée au début de ce millénaire mais s'est aussi très vite stabilisée lors des siècles suivants. C'est au VII^{e} siècle, par l'exigence d'un enseignement officiel et le regroupement des notions connues alors, qu'ils furent compilés sous ce titre générique.

Aucun de ces livres n'a survécu (pillages, autodafés, bibliothèques brûlées, ...) mais, par chance, on possède malgré tout quelques fragments arithmétiques de la même époque (premier millénaire de notre ère), notamment une table de multiplication (*jui jui* 九九, « neuf neuf ») pour les nombres de 1 à 9, où l'économie du produit $b \times a$ est faite lorsque le produit $a \times b$ est déjà noté, datée de 952.

Il y a deux traits essentiels dans les mathématiques chinoises anciennes. Le premier est qu'elles sont étroitement liées à la pratique, les travaux en mathématiques répondant aux besoins des technocrates dans les problèmes de « tous les jours ». Le second est qu'elles relèvent de techniques de calcul et non pas de théories, de « mathématiques pour les mathématiques » : leur objet principal était de dégager des méthodes pour résoudre des problèmes concrets : finances, arpentage, commerce, … Cette caractéristique n'a guère changé durant les deux mille ans suivants.

1.2 Le *Zhoubi Suanjing* 周筆算經

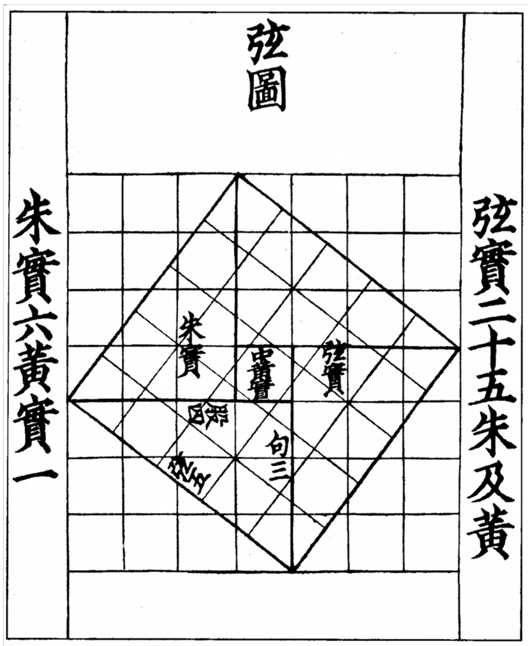
Son titre se traduit par *Canon des calculs gnomoniques des Zhou* (la dynastie des Zhou a régné sur la Chine de –1121 à –256) et commenté plus tard par Zhao Shang (IIIe siècle), Zhen Luan (VIe siècle) et Li Chunfeng (VIIe siècle). Ce livre n’est pas une liste de problèmes accompagnés de leurs réponses mais un dialogue entre un maître (Chen Zi) et son élève (Rong Fong). Il est surtout important pour l’histoire de l’astronomie chinoise. Les astronomes le connaissent comme étant leur plus ancien ouvrage. Il s’y trouve la description « du toit ouvrant » (la Terre est plate et l’Univers est fini) ; la théorie cosmologique repose sur des textes mathématiques. Dans cet esprit, la hauteur du soleil peut être calculée avec son ombre et un gnomon (*bi* 筆).

La numération décimale, les 4 opérations élémentaires sur les fractions et l’extraction de la racine carrée d’un nombre quelconque sont utilisées. Le théorème de Pythagore pour des triangles 3-4(-5) et 6-8(-10) et la similitude pour des triangles rectangles sont exposés. 3 est pris comme valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre, même si une meilleure approximation est connue.

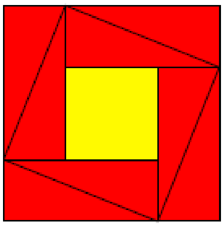
Cet ouvrage est à signaler pour deux raisons principales.

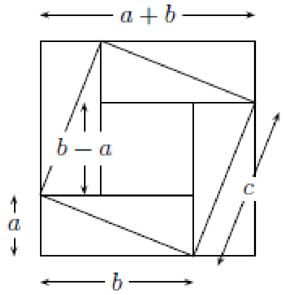
1. Un des commentaires (par Zhao Shuang) contient une liste de 15 formules pour résoudre les triangles rectangles.

2. Il contient la figure « de l’hypoténuse » (xian tu) qui fournit une preuve visuelle du théorème de Pythagore, sans explication.



Zhao Shuang (fin du IIIe) a commenté ce passage en écrivant que « le carré de l'hypoténuse contient 4 surfaces rouges et 1 surface jaune ».





Autrement dit, le carré qui est inscrit « obliquement », de côté c, dans le grand carré est constitué de quatre triangles rectangles rouges et d'un carré jaune (voir figure ci-dessus). Ce qui permet de calculer son aire. De nos jours, on écrirait : $c^2=4\times\frac{ab}{2}+(b-a)^2$.

De plus, en appliquant le même raisonnement au « grand » carré (qui a pour côté $a+b$), il obtient ce que nous traduisons par : $(a+b)^2=(b-a)^2+4ab$.

Formule qui est intéressante lorsque connaissant la somme (ou la différence) et le produit de deux nombres, on veuille les connaître.

La « figure de l'hypoténuse » n'est pas très patente en tant que démonstration du théorème de Pythagore ; cela semble être plutôt une sorte de vérification en comptant les petits carreaux. On peut voir cette situation comme une sorte de boîte à outils de propriétés arithmétiques et algébriques avec, venant s'y surajouter, une superstructure graphique dont l'une serait, bien sûr, la justification et une autre, une aide à la mémorisation des formules car il est plus facile de se souvenir de ce que l'on comprend que d'apprendre des mécanismes bruts.

1. 3 Le *Jiu zhang suan shu* (*JZSS*) 九章算术

C’est l’un des ouvrages les plus notoires de cette époque. En décomposant ce titre (*jiu* 九 = 9, *zhang* 章 = chapitre, *suan* 算 = calcul et *shu* = technique 术), on peut le traduire par *Les neuf chapitres sur les procédures de calcul*. Bien qu'il ait exercé une influence sur la majeure partie des mathématiciens en Chine (et aussi dans les pays voisins) pour des siècles -on en trouve encore la marque dans des manuels d'enseignement utilisés dans les campagnes au début du XX^e siècle-, on ne sait quasiment rien des circonstances précises qui présidèrent à sa rédaction. On sait seulement qu'il a été compilé entre –200 et 300 (et plus tard si l’on tient compte des commentaires).

À la différence des *Éléments* d'Euclide, le *JZSS* présente les connaissances mathématiques dans le contexte de problèmes, sous forme de procédures de calcul, ou algorithmes, et non pas sous forme de théorèmes. Le nombre de chapitres du *JZSS* ne repose pas sur une subdivision logique mais sur une répartition des problèmes de façon mnémotechnique. En effet, les mathématiques chinoises ne se divisent pas de la même façon interne que la nôtre (arithmétique, géométrie, algèbre, …). Le *JZSS* est une collection de 246 problèmes qui comprennent toujours (1) l'énoncé du problème, (2) la réponse numérique et (3) la méthode qui doit être utilisée pour calculer la solution d'après les données. Chaque problème suit un plan invariable et ne contient ni définition, ni explication logique.

D'une façon générale, chaque chapitre du *JZSS* est construit dans un ordre qui dépend du degré de complexité mathématique (par exemple, le calcul d'aires planes précède celui des aires curvilignes). De même que tous les autres classiques, le *JZSS* fut l'objet de commentaires, dont certains sélectionnés par la tradition étaient appelés à accompagner le texte dans toutes ses rééditions. Liu Hui (env. 263) est un grand mathématicien, que d'aucuns nomment l' « Euclide chinois ». On ne sait quasiment rien de lui. C'est patiemment qu'il commente et justifie, en y attachant une importance certaine, les résultats de cet ouvrage. Tout étudiant qui avait à se pencher sur le *JZSS* se penchait aussi sur les commentaires (indissociables) de Liu Hui. Ce dernier n'a pas été le seul commentateur : on peut citer Li Chunfeng (et son équipe) au VII^e siècle, Liang Shi, … Toutes ces personnes ont validé les procédures données, s'interrogeant à chaque fois sur la question de la correction de celles-ci. C'est une autre pratique de la démonstration mathématique que celle que nous connaissons dans sa modalité dans les *Éléments* d'Euclide.

Voici les grandes lignes de ces 9 chapitres. [1] *fang tian* 方田 [champ carré], relatif au calcul de l'aire des triangles, des trapèzes, des cercles ; il y a aussi tout un travail sur les fractions. [2] *su mi* 粟米 [millet et grain décortiqué], relatif aux pourcentages et proportions. [3] *shuai fen* 衰分 [parts décroissantes selon les rangs], relatif aux partages proportionnels et à la « règle de 3 ». [4] *shaoguang* 少廣 [diminution de la longueur], où il s'agit de calculer la largeur d'un rectangle d'aire donnée et de longueur variable ; le chapitre finit par des extractions de racine. [5] *shang gong* 商攻 [estimation des travaux publics], relatif au génie civil (volumes à édifier, …). [6] *junshu* 均輸 [distribution équitable de marchandises] ou paiement égalitaire de l'impôt en fonction du transport. [7] *ying bu zu* 盈不足 [trop et pas assez], relatif aux méthodes de fausses positions pour résoudre des équations ou des systèmes 2×2 linéaires. [8] *fangcheng* 方程 [champs carrés], relatif à des résolutions de systèmes carrés linéaires. [9] *gougu* 勾股 [base hauteur] pour des résolutions de triangles rectangles.

2. Nombre

2. 1 Des systèmes de numération

Les caractères chinois (dont ceux représentant les chiffres) voient le jour vers le milieu de la dynastie Shang (vers −1600). Les plus anciennes traces connues (pourtant découvertes seulement en 1899) sont des inscriptions divinatoires sur des os et des écailles de tortue (*jiaguwen*).

On trouve deux systèmes de numération. Le premier est lié au calendrier, du moins à la façon de compter les jours par blocs de 60, puis les mois lunaires et les années : une première série de 10 symboles (se référant aux 10 troncs célestes (*gan*)) et une seconde série de 12 symboles (se référant aux 12 rameaux terrestres (*zhi*)) combinées donne un « cycle sexagésimal ». Toutefois, ce système (qui ne correspond à aucun cycle astronomique naturel) n'a jamais été utilisé dans des calculs, mais dans la datation.

Intéressons-nous au second. Quatorze signes sont utilisés : neuf pour représenter les nombres de 1 à 9, quatre pour les nombres 10, 100, 1 000 et 10 000 et un pour « et » (parfois utilisé) ; ce nombre quatorze ne tient pas compte des évolutions graphiques de ces caractères. Dans les *jiugawen*, on compte avec un système décimal ; il n'est écrit aucun nombre supérieur à 10 000. Pour écrire un nombre « composé », on utilise une combinaison des signes précédents ; ainsi le symbole composé du signe 100 en bas et du signe 5 en haut représente le nombre 500. Dans le même esprit, 734 est écrit, verticalement, « 7 100 » (« et ») « 3 10 » (« et ») « 4 », utilisant les principes additif et multiplicatif. Dans ce système, 30 000 est le plus grand nombre connu.

Ce système s'est rapidement développé sous la dynastie des Shang (vers la fin du XIe siècle avant notre ère), probablement grâce à l'expansion économique d'alors qui invite à créer un système de notation plus maniable : il fallait déjà utiliser des livres où étaient enregistrés des nombres.

On peut aussi citer les *jiajiezi*. On appelle ainsi tout caractère d'écriture employé dans un sens nouveau, c'est-à-dire qu'il n'avait pas à l'origine. C'est l'un des six procédés qui ont permis la formation de caractères chinois. Par exemple, les symboles du scorpion et de la myriade (*wan* 万) sont identiques, peut-être parce que la multitude de ses petits sur le dos de la femelle fait penser à un nombre immense (une myriade d'unités en compte 10 000). De même, celui du doigt et celui de 10 sont identiques, les deux mains réunies comptant 10 doigts.

2. 2 Une suite linéaire.

La numération des *jiugawen* s'est développée dans le temps. L'étape suivante, qui remonte à environ 2 500 ans (pendant la dynastie des Zhou occidentaux), voit apparaître des inscriptions sur bronze. Les caractères changent de forme (à part 1, 2 et 3). Dans le même temps, le « et » additif disparaît, les nombres sont écrits en suite linéaire de caractères et un nouveau caractère, *yi*, apparaît (tantôt pour dix mille tantôt pour cent millions, suivant que le nombre est inférieur ou supérieur à cent millions) et, du coup, de plus grands nombres sont écrits. En chinois, les nombres sont décomposés toutes les quatre puissances de 10, et non toutes les trois, comme dans les langues occidentales.

Pour les nombres inférieurs à cent millions.

Les traités font état de 13 caractères numériques fondamentaux :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	万
yi	*er*	*san*	*sin*	*wu*	*liu*	*qi*	*ba*	*jiu*	*shi*	*bai*	*qian*	*wan*

Pour écrire un nombre, on énumère les dizaines de mille, les milliers, les centaines, les dizaines et les unités qu'il contient :

138 : 1 (fois) 100, 3 (fois) 10, 8 百三十八

1 035 : 1 (fois) 1 000, 3 (fois) 10, 5 千三十五

142 800 : [1 (fois) 10 (et) 4] (fois) 10 000 (et) 2 (fois) 1 000 (et) 8 (fois) 100
一十四万二千八百

Ce système est très proche du système de numération positionnel décimal (qui, lui, ne recourt qu'à 10 symboles). Il ne fait pas cas de la valeur 0 ; nous y reviendrons.

Pour les nombres entiers supérieurs à cent millions, qui n'apparaissent qu'exceptionnellement dans les traités, une unité particulière est apparue pour éviter une trop grande répétition du caractère *wan*. Un caractère spécial 亿 , *yi*, apparaît donc pour 100 000 000 (= $10\ 000^2$). On décompose en centaines de millions, centaines de mille, dizaines de mille, milliers, centaines, dizaines et unités.

Prenons le cas de 1 644 866 437 500, qui se trouve dans le problème 4 - 24 du *JZSS* et qui a aussi la particularité d'être le plus grand nombre rencontré dans cet ouvrage. Ce nombre est égal à :

$$(10\ 000 + 6\ 000 + 400 + 40 + 8) \times 100\ 000\ 000 + (6\ 000 + 600 + 40 + 3) \times 10\ 000 + 7\ 000 + 500$$

(ou encore 16 448 centaines de millions 6 643 dizaines de milliers 7 milliers 5 centaines) et s'écrit mot à mot : 1 - myriade - 6 - milliers - 4 - centaines - 4 - dizaines - 8 - centaines de millions - 6 - milliers - 6 - centaines - 4 - dizaines - 3 - myriades - 7 - milliers - 5 - centaines.

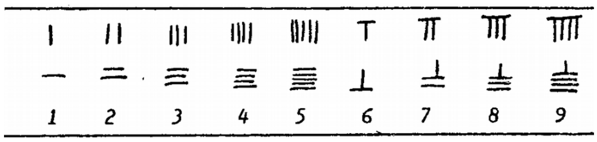
En caractères chinois : 一万六千四百四十八亿六千六百四十三万七千五百

2. 3 Menées à la baguette…

Parallèlement à ces écritures, une autre est née : celles des baguettes. Les calculateurs chinois s'en servent, à l'époque des Printemps et Automnes (de –722 à –481), le plus souvent en bambou (ce que l'on peut penser, à travers les trois caractères chinois les désignant). Même si elles sont utilisées comme instrument de calcul sur la période commençant à la dynastie des Han et finissant à celle des Yuan (de 1279 à 1368), et seront alors remplacées par le boulier, elles servent à représenter des nombres jusqu'au début du… 20$^{\text{ème}}$ siècle. Une description (dans les *Chapitres sur les tubes musicaux et l'astronomie* du *Livre des Han*) explique que leur diamètre est un sixième de pouce, qu'elles sont longues de 6 pouces et que 271 baguettes placées côte à côte forment un hexagone et tiennent dans une main.

Ces calculateurs créent un système spécifiquement adapté au maniement scientifique des nombres. Cette notation n'utilise plus que neuf symboles - pour les chiffres de 1 à 9 - et représente le 0 par l'absence ou la place vide. Les chiffres sont représentés par des baguettes posées horizontalement ou verticalement, déplacées pendant les calculs.

Il y a deux manières (graphiquement distinctes) d'écrire les chiffres de 1 à 9 :



Cette disposition est expliquée dans deux livres (de référence), le *Classique mathématique de Sunzi* 孫子算經 (rédigé autour du V$^{\text{e}}$ siècle) et le *Classique mathématique de Xiahou Yang* 夏侯陽算經.

On peut lire dans le premier : « Dans la méthode de calcul, sachez d'abord le rang. Un est vertical, dix est horizontal, cent est debout, mille est gisant. Mille et dix se regardent, dix mille et cent se regardent. »

C'est très proche de ce qui est écrit dans le second :

« Un est vertical, dix est horizontal, cent est debout, mille est gisant. Mille et dix se regardent, dix mille et cent se correspondent. »

一從十橫，百立千僵，千十相望，萬百相當

Mais il est dit de plus :

« À partir de six, cinq est placé au-dessus, perpendiculairement. Six ne s'accumule pas dans les calculs, cinq ne se dispose pas seul. »

六不積，五不隻

Ce système de numération est basé sur deux principes : (1) la position et le rang des chiffres et (2) l'alternance.

Les symboles de la première série sont utilisés pour noter les unités, les centaines et, de façon plus générale, les puissances paires de 10, tandis que les symboles de la seconde le sont pour les dizaines, les milliers et, plus généralement, les puissances impaires de 10.

L'alternance des orientations a été mise au point probablement pour éviter la confusion lorsque plusieurs chiffres sont accolés.

Pour écrire le nombre 6 572, on écrit, en commençant par la droite, 2 (chiffre des unités) vertical, 7 horizontal (dizaines), 5 vertical (centaine) et 6 horizontal (millier).

Dans l'écriture de 203, on notera la place « vide » du chiffre des dizaines ; celle-ci est rapidement repérée par le fait que les baguettes des centaines et des unités sont toutes les deux verticales.

Rien ne laisse supposer qu'à l'époque existait une marque spéciale pour un « zéro » qu'une place vide. L'alternance des positions des baguettes (verticales ou horizontales) permet de lever dans certains cas cette équivoque (et de marquer sans ambiguïté possible un « zéro ») : il suffit en effet de trouver deux chiffres successifs avec la même position pour en déduire qu'il y a une place vide entre les deux. De même, lorsque le dernier chiffre du nombre a une position verticale montre que le nombre n'a pas de chiffre pour les unités. Du coup, cette absence de zéro à la fin du nombre ne permet pas de distinguer 1, 100 ou 10 000 dans l'écriture « | » . Le lecteur, en fonction du contexte, détermine la valeur. Ce qui est sûr, c'est que les mathématiciens chinois commenceront à utiliser le zéro (sous forme d'un petit cercle) entre les XII^e^ et XIII^e^ siècles ; il n'y aura plus d'ambiguïté possible quant aux nombres. Dès lors, cette notation avec des baguettes deviendra positionnelle.

2. 4 Le zéro

L'origine du zéro, faute de documents, doit être traitée avec beaucoup de précautions. En Chine comme dans tout autre pays. De plus, il peut y avoir plusieurs thèmes derrière lui :

- un nombre qui a exactement le même statut que n'importe quel autre nombre ;
- un symbole positionnel spécifique qui montre l'absence de certains ordres d'unités ;
- un symbole opérationnel écrit après la dernière unité d'un nombre pour le multiplier par la base (usuellement… 10).

Si toutefois le zéro avait été connu en Chine ancienne, il n'aurait pas le premier sens. Aucun des textes mathématiques n'admet zéro comme solution et aucun n'utilise un nombre « zéro » dans ses calculs (comme les autres nombres). Peut-être en raison de la nature des problèmes posés.

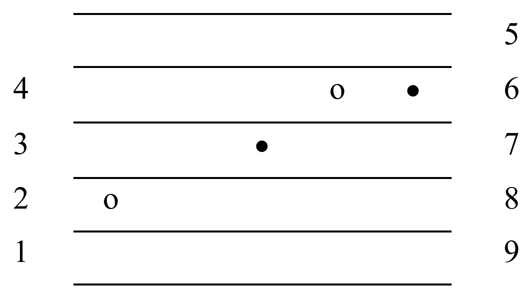
Jusqu'au 8^ème^ siècle, il n'est connu aucun graphisme pouvant être interprété en tant que symbole. À moins de considérer comme tels des termes de langage comme *kong*, le vide. Jusqu'à cette période, la prudence est donc de rigueur. Certains pensent que ce zéro circulaire est d'influence indienne. D'autres pensent que c'est une invention chinoise née d'une déformation d'un autre symbole pour le zéro, le zéro carré (comme l'employait Liu Qin au XIIIe siècle). Le problème est ouvert... Après l'époque mongole, les Chinois emploient progressivement le zéro comme un chiffre ordinaire. C'est seulement à partir des Ming que le zéro se voit attribué d'un caractère (encore d'actualité) 零, que l'on lit *ling*, dont le sens usuel est « goutte de rosée ».

2. 5 Ne pas perdre la boule…

Les quatre opérations usuelles ainsi que l'extraction d'une racine cubique, la résolution d'un système carré ou d'une équation polynomiale se faisaient donc avec ces baguettes. Liu Hui, au III^e siècle, les a employées pour approcher « π » avec 6 décimales exactes…

Ceci dit, leur usage n'était pas des plus pratiques. On peut imaginer, par exemple, les militaires s'arrêter en manœuvres pour étaler leurs baguettes à terre et faire leurs calculs. C'est pourquoi d'autres moyens ont été cherchés pour les remplacer : ainsi naissent les systèmes de boules. En voici un, cité dans le *Shushu jiyi* 數術記遺 (*Mémoire sur l'art des nombres*), commenté par Zhen Luan, probablement vers 550.

Le plateau est composé de cinq rainures horizontales sur laquelle on place les boules ; verticalement, on trouve la position du chiffre dans l'écriture du nombre. On utilise des boules de deux couleurs différentes (jaune et rouge). Les perles jaunes prennent les valeurs 1, 2, 3 et 4 en partant du bas vers le haut et les perles rouges prennent les valeurs 5, 6, 7, 8 et 9 en partant du haut vers le bas. o et • représentant respectivement une boule jaune et une boule rouge, voici l'écriture du nombre 20 746 :



2. 6 Les nombres négatifs

Dès le début du premier millénaire, on trouve (dans le *JZSS*) des nombres négatifs. Les mathématiciens d'alors les manipulaient sans erreur. Toutefois, on ne les rencontre ni dans les énoncés des problèmes, ni dans leurs réponses. C'est-à-dire qu'ils n'existent qu'à travers des procédés opératoires. On ne trouve aucun ouvrage spécifique traitant d'une théorie sur ces nombres (mais seulement de règles de calcul). Une raison possible est qu'un nombre représente toujours une entité concrète (longueur, volume, …) et donc n'est pas une valeur négative. L'idée d'introduire la notion de « négatif » dans les calculs a eu un courant favorable : rappelons-nous le dualisme des Chinois de l'antiquité en termes de couples, à travers, par exemple, le *yin* - - et le *yang* —. On les rencontre donc, avec les nombres positifs, seulement dans les exécutions d'algorithmes, comme les résolutions d'équations quadratiques ou les méthodes de fausse position double. Dans les calculs, les baguettes étaient différenciées ; l'un des procédés consiste à utiliser deux couleurs : rouge (pour les nombres positifs) et noir (pour les nombres négatifs). Dans les écrits, un nombre négatif était noté en barrant d'un trait de pinceau le dernier chiffre non nul. On utilisait aussi des caractères particuliers : *fu* 負 (pour les négatifs) qui évoque une dette et *zheng* 正 (pour les positifs) que l'on pourrait traduire par « droit » ou « correct ». Dans tous les cas, les règles d'utilisation ressemblent beaucoup à nos « règles des signes ». Dans le *JZSS*, elles ne s'appliquent qu'à l'addition et à la soustraction. D'ailleurs, il y a un lien très étroit entre nombre positif et gain (*de*) et nombre négatif et perte (*shi*). Plus tard, en 1299, dans le *Suanxue qimeng*, les règles s'appliquent aussi à la multiplication.

Voici les règles de soustraction (ci-dessous à gauche) et d'addition (ci-dessous à droite) pour lesquelles leur traduction qui suit est donnée ligne par ligne.

同名相除	*tong ming xiang shu*	異名相除	*yi ming xiang chu*
異名相除	*yi ming xiang yi*	同名相益	*tong ming xiang yi*
正無入負之	*zheng wu ru fu zhi*	正無入正之	*zheng wu ru zheng zhi*
負無入正之	*fu wu ru zheng zhi*	負無入負之	*fu wu ru fu zhi*

(identiques) (noms) (se) (diminuent) ; (différents) (noms) (s') (augmentent).

(différents) (noms) (se) (diminuent) ; (identiques) (noms) (s') (augmentent).

(positif) (n'a pas) (à entrer) (négatif) (le) ; (le) (négatif) (n'a pas) (à entrer) (positif) (le).

(positif) (n'a pas) (à entrer) (positif) (le) ; (le) (négatif) (n'a pas) (à entrer) (négatif) (le).

Autrement dit… La différence de deux nombres de même signe est égale en valeur absolue à la différence des deux, la différence de deux nombres de signes contraires est égale en valeur absolue à la somme des deux. Enfin, ôter de zéro un nombre quelconque revient à le changer de signe.

2. 7 Les nombres décimaux et la métrologie.

Les systèmes de numérations évoqués plus haut se prolongent pour les nombres décimaux. Tout comme ont été inventés des noms pour décomposer les nombres (nous l'avons vu au premier paragraphe), d'autres noms (de nouveaux indicateurs de position) vont être inventés pour 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, etc. qui sont *fen*, *li*, *hao*, *si*, etc. À noter que pour le second système, on écrit *bu* (pas) sous le chiffre des unités. Toutefois les mathématiciens ont longtemps préféré utiliser une description comme (exemple de notre vie courante) 1 m 7 dm 4 cm à 1,74 m. Liu Hui, dans l'un de ses calculs du rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle, ne conçoit pas 0, 866 025 4 *chi* mais 8 *cun* 6 *fen* 6 *li* 2 *miao* 5 *hu* + 2/5 *hu*. Yang Hui, en 1275, écrit 24 *bu* 3 *chi* pour 123 *chi* (1 *bu* = 5 *chi*).

Les nombres décimaux, ou plutôt l'écriture décimale, est venue tardivement. À cela, il y a deux (au moins) explications. La première est l'utilisation de tables de conversion (comme on vient de la voir). La seconde vient de la manipulation des baguettes de calculs : multiplier (resp. diviser) un nombre par 10^n revient à déplacer à droite (resp. à gauche) les bâtons de n rangs.

3. Gougu

3. 1 Une histoire de *gou*...

Le chapitre 9 du *JZSS*, comportant 24 problèmes, est appelé « *gougu* » 勾股, littéralement « base – hauteur ». La technique du *gougu* met en scène des triangles rectangles. Du moins, pour être plus exact, dans les mathématiques chinoises, lorsque l'on parle du triangle rectangle, il s'agit de résolutions de triangle rectangle. Il est à noter que jamais, dans ce chapitre 9, le terme « triangle » est utilisé : le triangle rectangle est une configuration dont les côtés sont liés par une relation, la « procédure du *gou* et du *gu* » : le *gou* 勾 est la base, le « petit » côté du triangle rectangle, et le *gu* 股 est la hauteur, le « grand » côté ; l'hypoténuse est appelée *xian* 弦. À noter qu'un triangle rectangle est donc explicitement défini par la seule donnée des *gou* et *gu* ; l'hypoténuse a une importance moindre que celle des deux autres côtés ; c'est plutôt une ligne géométrique. À partir d'un triangle rectangle (présenté sous des habillages variés), il s'agit en fait de déterminer les côtés inconnus à partir d'éléments connus.

Les unités de longueur utilisées sont telles que 1 *zhang* 丈 = 10 *chi* 尺 = 100 *cun* 寸.

3. 2 La « procédure du *gougu* ».

Dans toute la suite de ce chapitre, a désigne la longueur du *gou*, b, celle du *gu* et c, celle de l'hypoténuse. Il est à rappeler que toute formulation algébrique est anachronique vis-à-vis des mathématiciens chinois : cette liberté prise ici a pour but de faciliter la compréhension de la technique du *gougu*. De même, sauf mention contraire, la plupart des figures sont des reconstitutions actuelles fondées sur les textes de certains commentaires.

3. 2. 1 *Divers cas d'énoncé.*

On possède 2 des données suivantes, a, b, c, a + b, b + c, a + c, b - a, c - a, c - b et l'on demande de trouver les inconnues parmi a, b ou c. Il y a donc 36 possibilités ; les redondantes sont toutefois éliminées pour faire apparaître 9 cas.

Six sont référencées dans le tableau suivant :

Type	Données	Inconnue (s)	Problème n°
1	a, b	c	1, 5
2	b, c	a	2, 3, 4
3	a, c - b b, c - a	b, c a, c	6, 7, 8, 9, 10
4	c, b - a	a, b	11
5	c - a, c - b	a, b, c	12
6	a, b + c b, a + c	b a	13

Nous reviendrons sur la symétrie des données du type 3 dans le problème 7, symétrie que l'on retrouve aussi dans les données du type 6.

On rencontrera aussi dans ce chapitre 9 d'autres résolutions, comme les suivantes :

[L désigne la longueur du carré inscrit dans le triangle rectangle et D le diamètre du cercle inscrit dans ce même triangle.]

Type	Données	Inconnue(s)	Problème n°
7	a, a + c = (7/3) b	b, c	14
8	a, b	L	15
9	a, b	D	16

Plus tard, reprenant cette liste, les mathématiciens l'ont enrichie : tous les problèmes du *Ceyuan haijing* [*Miroir reflétant l'océan*] de Li Zhi (en 1248) tournent autour d'un triangle rectangle particulier, par exemple.

3. 2. 2 *Le problème 3.*

Ce problème énonce le théorème « de Pythagore » : c'est une des figures clés de la technique du *gougu*.

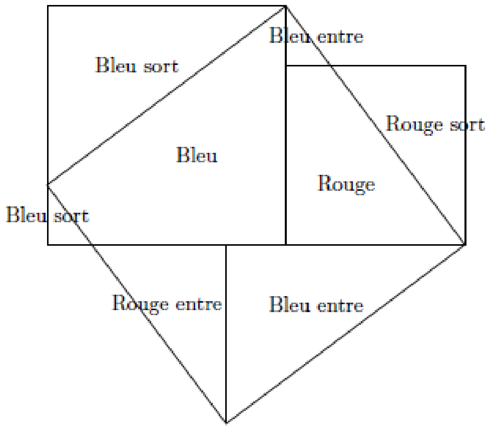
Suppose que le *gu* mesure 4 *chi* et l'hypoténuse, 5, combien mesure le *gou* ?

L'auteur explique ici la **procédure du gougu** : « Ajoute les carrés du *gou* et du *gu*, prends la racine carrée [de la somme], donnant l'hypoténuse. Ou le carré du *gu* est soustrait du carré de l'hypoténuse. La racine carrée du reste est le *gou*. De plus, le carré du *gou* est soustrait du carré de l'hypoténuse. La racine carrée du reste est le *gu*. »

On donne b = 4 chi et c = 5 chi : on calcule $a=\sqrt{5^2-4^2}=3\,chi$.

Liu Hui justifiait probablement cet énoncé par une figure en couleurs. Il n'a été conservé que le texte seul et, donc, la figure qui l'accompagnait est inconnue. Il n'en est pas moins clair que la démonstration de Liu Hui consiste à reconstituer matériellement le carré de l'hypoténuse en recouvrant celui-ci avec des pièces issues des deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Cette démonstration repose sur le principe de « ce qui rentre vaut ce qui sort » (une sorte de « couper coller » de la figure). Dans son commentaire, Liu Hui explique comment prouver l'égalité des aires du carré de l'hypoténuse et de la somme de celles des carrés de la base et du côté.

Il existe de nombreuses façons de procéder conformes à cette idée, la figure ci-dessous en montre une (d'après Gu Guanguang, *Jiushu cungu* 九數存古 [*Les 9 Chapitres, gardiens de la tradition*] en 1892). Elle montre un triangle rectangle et, construits sur les côtés de l'angle droit, les deux carrés. Ils sont appelés bleu et rouge sur la figure car ils correspondent aux pièces du puzzle qui ont ces couleurs (seules les pièces qui vont être déplacées sont coloriées).



Dans un premier temps, le carré de l'hypoténuse est partiellement recouvert par les carrés bleu et rouge. Pour montrer que ces deux surfaces carrées recouvrent complètement et exactement le carré de l'hypoténuse (d'après le théorème de Pythagore), il suffit de bouger les pièces comme indiqué sur la figure ci-dessus.

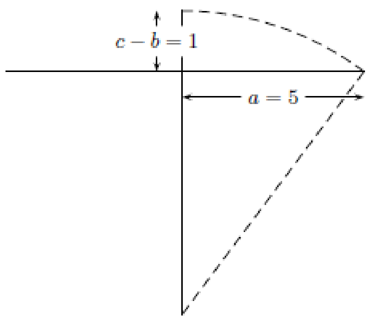
Ainsi, depuis l'époque des Han, les scientifiques chinois connaissaient-ils ce théorème « de Pythagore », d'abord constaté sur une équerre particulière (ou triangle rectangle particulier) (3-4-5) et ensuite appliqué sur une équerre (ou triangle rectangle) quelconque.

3. 2. 3 *D'autres problèmes du chapitre 9 du JZSS*

Dans chacun des problèmes présentés ci-dessous, une figure (qui n'est pas à l'échelle) illustre l'énoncé et, en particulier, met en évidence la donnée de la combinaison de a, b ou c.

Le problème 6.

Au centre d'une mare carrée de côté 1 *zhang* pousse un roseau qui dépasse l'eau de 1 *chi*. On tire sur l'extrémité du roseau en direction de la berge, elle arrive exactement au niveau de l'eau. On demande quelles sont la profondeur de l'eau et la longueur du roseau.



L'énoncé donne a = 10 : 2 = 5 *chi* et c – b = 1 *chi*. On demanderait à nos élèves une résolution semblable à la suivante : « De c – b = 1, on tire c = b + 1. Avec $a^2 + b^2 = c^2$, il suffit de remplacer les valeurs de $a = 5$ et $c = b + 1$ pour obtenir l'équation du second degré $25 + b^2 = (b + 1)^2$, qui donne rapidement b (et donc c) ». Il y a, dans ce qui vient d'être écrit, tout un passage algébrique que les mathématiciens ne connaissaient pas. La méthode de résolution pour ce problème est la suivante (les lettres entre parenthèses appellent des commentaires que Liu Hui a écrits, ils sont placés après les résultats) :

Procédure : Élève au carré la moitié du côté de la mare (i). De cela soustrais le carré de 1 *chi* (ii), la hauteur au-dessus de l'eau. Divise le reste par deux fois la hauteur au-dessus de l'eau pour obtenir la profondeur de l'eau (iii). La somme du résultat et de la hauteur au-dessus de l'eau est la longueur du roseau (iv).

(i) Ici prends la moitié du côté de la mare, 5 *chi*, comme *gou*, la profondeur de l'eau comme le *gu* et la longueur du roseau comme hypoténuse. Obtiens le *gu* et l'hypoténuse à partir du *gou* et de la différence entre le *gu* et l'hypoténuse. Par conséquent, élève au carré le *gou* pour l'aire du gnomon. (Liu Hui utilise le fait que le gnomon (c'est-à-dire le carré de côté c privé du carré de côté b) d'aire $c^2 - b^2$ (= a^2 d'après le théorème de Pythagore) a la même aire que le rectangle dont les côtés mesurent $c + b$ et $c - b$.)

(ii) La hauteur au-dessus de l'eau est la différence entre le *gu* et l'hypoténuse. Soustrais le carré de cette différence de celle de l'aire du gnomon : prends le reste.

(iii) Considère comme *gu* la différence entre la largeur du gnomon et la profondeur de l'eau. Par conséquent, construis [un rectangle] avec une largeur de 2 *chi*, le double de la hauteur au-dessus de l'eau.

(iv) Le roseau dépasse l'eau de 1 *chi*, alors connaissant la profondeur de l'eau, on les additionne pour avoir la longueur du roseau.

Nous pouvons donc reformuler et ainsi résoudre le problème comme tel :

Profondeur : $$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}=\frac{5^2-1^2}{2\times 1}=12\,chi$$

Longueur du roseau : $c = b + (c - b) = 12\ chi + 1\ chi = 13\ chi.$

Dans ce problème, il a été trouvé le triplet (5, 12, 13) : c'est un triplet dit « pythagoricien » ; on appelle ainsi la donnée de trois nombres entiers u, v et w vérifiant la relation $u^2 + v^2 = w^2$. On rencontre les huit triplets ci-dessous dans le chapitre 9, quitte à utiliser une subdivision métrique ou un coefficient multiplicateur commun sur un résultat fractionnaire pour les obtenir :

Triplet	Problème		Triplet	Problème
3, 4, 5	1, 2, 3, 12		20, 21, 29	5, 14
5, 12, 13	6, 9, 15		20, 99, 101	8, 10
7, 24, 25	4, 11		48, 55, 73	7
8, 15, 17	16, 21		60, 91, 109	13

Toutefois, il n'est mentionné nulle part dans le *JZSS* une étude générale des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire la recherche explicite de leur génération.

Le problème 8.

L'énoncé suivant donne a et c – b, tout comme celui du problème 6, et l'on cherche c. C'est-à-dire que l'on attendrait la même démarche. Sa résolution montre qu'il en est tout autrement : la méthode de résolution de tel problème n'est pas utilisée dans la résolution de tel autre.

Suppose un mur haut de 1 *zhang*. Un arbre (ou une perche en bois) s'appuie contre ce mur de telle sorte que son extrémité coïncide avec le haut du mur. Si l'on recule de 1 *chi* en tirant l'arbre, celui-ci touche le sol. Combien mesure l'arbre ?

Procédure : Multiplie 10 *chi* par eux-mêmes, divise par le pas en retrait, ajoute le pas en retrait à ce qui a été obtenu et divise le résultat par 2, ce qui est la hauteur de l'arbre.

Des données c – b = 1 *chi* et a = 1 *zhang*, on peut calculer la hauteur cherchée :

Hauteur :

$$c=\frac{\frac{a^2}{c-b}+c-b}{2}=50+\frac{1}{2}\,chi=5\,zhang\,5\,cun$$

Le problème 7.

Une corde qui est attachée au sommet d'un arbre vertical dépasse de 3 chi la longueur de cet arbre. En tirant la corde à son maximum pour que son extrémité touche juste le sol, on s'écarte exactement de 8 chi du pied de l'arbre. Quelle est la longueur de la corde ?

L'énoncé donne c – a = 3 *chi* et b = 8 *chi*. A priori, si le calculateur sait résoudre le problème correspondant à a et c – b, il n'a pas besoin de refaire de nouveaux calculs pour le problème dont les données sont b et c – a, puisqu'elles sont symétriques, c'est-à-dire que les deux côtés de l'angle droit jouent le même rôle. Mais, à cette époque chinoise, les choses ne se déroulaient pas de cette façon : en effet, pour un contemporain, les deux côtés de l'angle droit portent, d'un point de vue littéral, des noms différents, et (donc) l'un et l'autre ne sont pas interchangeables. D'où une nouvelle technique pour la résolution : « Élève au carré la distance depuis le pied (de l'arbre). Divise par la longueur de l'extrémité reposant à terre. Ajoute le résultat à la longueur de l'extrémité. Divise par 2 : c'est la longueur de la corde. » On trouve alors c = 12 + 1/6 *chi*.

Le problème 11.

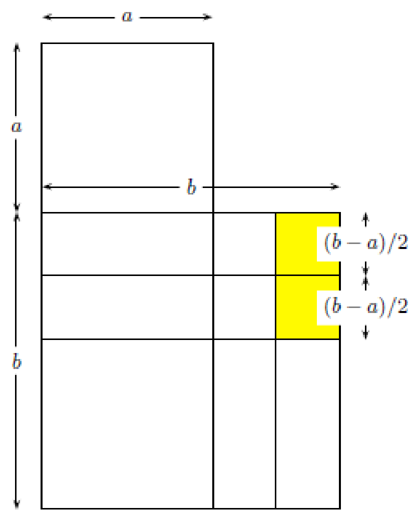
Suppose que la hauteur d'une porte soit 6 *chi* 8 *cun* plus grande que sa largeur et que les coins opposés soient distants de 1 *zhang*. Détermine la hauteur et la largeur de la porte.

Les données sont c = 100 *cun* et b – a = 68 *cun*.

La procédure accompagnant le texte est la suivante : « Multiplie 1 *zhang* par lui-même, ce qui donne le dividende. Prends la moitié de ce dont l'un dépasse l'autre, multiplie-la par elle-même, double le résultat et soustrais au dividende. Prends la moitié de ce reste et prends-en la racine carrée. Soustrais de ce résultat la moitié du dépassement : cela donne la largeur de la porte. Ajoute la moitié du dépassement : cela donne la longueur de la porte. »

Ce problème se résout en « posant une figure » plutôt qu'en « posant des équations ». Yang Hui commente (vers 1261) la résolution de la façon suivante :

La figure consiste en 2 carrés construits sur les côtés de l'angle droit de la porte posés (physiquement) l'un sur l'autre (voir figure ci-dessous). Sa surface totale est $a^2 + b^2$, soit c^2 (d'après le théorème de Pythagore).



On observe ensuite que le carré de côté b est découpé en : (1) 4 rectangles de côtés a et $\frac{b-a}{2}$, (2) un carré de côté a et (3) 4 petits carrés ayant chacun pour côté $\frac{b-a}{2}$ la demi différence des côtés des carrés (et dont deux sont appelés jaunes).

Chaque morceau du carré [1] de côté $b-\frac{b-a}{2}$ admet son double dans la figure entière et il y a en plus les deux carrés jaunes. Ceci nous permet de comprendre le raisonnement que fait le mathématicien chinois.

Si l'on ôte du grand carré le gnomon (c'est-à-dire l'équerre) qui le borde sur le dessus et la droite, il reste un petit carré dont, d'une part, les dimensions valent à la fois $a+\frac{b-a}{2}$ et $b-\frac{b-a}{2}$ et dont, d'autre part, l'aire vaut la moitié de l'aire totale des deux carrés a^2 et b^2 diminuée de l'aire des 2 carrés jaunes, soit $2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$. Par conséquent, $\frac{1}{2}\left[c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]$ est égal à $\left(a+\frac{b-a}{2}\right)^2$ et à $\left(b-\frac{b-a}{2}\right)^2$.

On obtient donc ainsi directement la solution du texte original (où sont connus c et $b-a$) sans effectuer la moindre résolution d'équation :

Largeur : $$a=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}-\frac{b-a}{2}=\sqrt{\frac{100^2-2\left(\frac{68}{2}\right)^2}{2}}-\frac{68}{2}=28\,cun$$

1 Une espèce de carré « médian », en bas à gauche de la figure, composé de deux carrés et de deux rectangles.

Hauteur : $$b=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}+\frac{b-a}{2}=\sqrt{\frac{100^2-2\left(\frac{68}{2}\right)^2}{2}}+\frac{68}{2}=96\,cun$$

3. 2. 4 *Une figure inscrite : le problème 15*

La résolution du problème repose sur le principe *chu ru xiang bu* (« principe de rapiéçage ») dont l'énoncé est le suivant :

- si l'on déplace une figure plane, son aire ne varie pas ;
- si l'on coupe une figure en un certain nombre de figures composantes, la somme des aires de ces parties est égale à l'aire de la figure initiale.

Supposons que la base (gou) soit égale à 5 *bu* et la hauteur (gu), à 12 *bu*. On demande combien mesure le côté du carré inscrit à l'intérieur de la base.

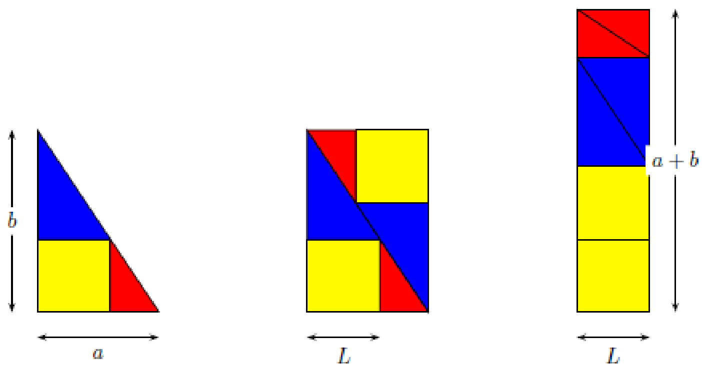
Réponse : Le côté mesure 3 + 9/17 *bu*.

Procédure : Le produit du *gou* et du *gu* est le dividende, la somme du *gou* et du *gu* est le diviseur. Divise, c'est le côté du carré.

Commentaire de Lui Hui : Le produit de la base (gou) par la hauteur (gu) contient 3 paires de figures, rouges, azur et jaunes. Place les figures jaunes au pied et arrange les figures rouges et azur pour en faire des rectangles au sommet, avec le côté du carré jaune central comme largeur et la somme de la base et de la hauteur comme la longueur. C'est pourquoi pour diviseur on additionne la base et la hauteur.

Comme l'indique Liu Hui, la méthode de la solution implique un rectangle dont l'aire peut être décrite de deux façons différentes. Pour cela, il réarrange les pièces résultant d'un découpage de deux exemplaires identiques du triangle donné (comme indiqué sur la figure). Il crée ainsi un rectangle dont l'aire est égale, d'une part, à ab, puisque ses dimensions sont les longueurs des côtés de l'angle droit, et, d'autre part, à $(a + b)$ L, puisque ce rectangle a pour largeur L (la longueur du côté du carré) et pour longueur $a + b$.

D'où $L=\frac{ab}{a+b}$.



4. Fraction

4.1 Notion de fraction

Le mot « fraction » porte avec lui de nombreux sens comme la division, le quotient, la proportionnalité. Dans les mathématiques chinoises, le plus commun est celui qui consiste à diviser une entité en un nombre de parts égales.

Le *JZSS* est un ouvrage dans lequel un certain savoir-faire est prérequis : l'utilisateur doit déjà savoir manier l'addition, la soustraction et la multiplication de nombres entiers. Mais, comme très souvent, les quantités utilisées ne sont pas entières, d'où leur expression en parts de la quantité : c'est pourquoi la quatrième opération usuelle (la division d'entiers) est placée dans le premier chapitre.

Ainsi « 3/5 [du volume] » sera mentionné comme « 3 des 5 parts [du volume] ». La fraction A/B, de façon plus générale, sera écrite « A *fen zhi* B », soit « A de B parts » puisque l'on prend A parts d'une entité divisée en B parts égales : aussi trouve-t-on l'expression *si fen qian zhi san* 四分錢之三, « 3 de 4 parts d'un *qian* » [2].

De plus, il existe des termes particuliers utilisés uniquement pour certaines fractions simples : 1/4 est représenté par le terme que l'on lit *ruo ban* (la faible moitié), 1/3 par *shao ban* (moins que la moitié), 1/2 par *zhong ban* (la moyenne moitié) et 2/3 par *tai ban* (plus que la moitié). Il semble que ces expressions, qui apparaissent pour parler plus de quantités approximatives que de fractions précises, notaient à l'origine les graduations de la clepsydre (ses utilisateurs savaient que les mesures du temps obtenues étaient approximatives).

Les fractions sont aussi associées à la division. En fait, quand une division ne tombe pas juste, le résultat est exprimé sous la forme $a + b/c$, où a est un entier et b/c est la fraction qui reste, avec $b < c$ car b/c représente une fraction de l'unité.

Dans une fraction, le numérateur est appelé « le fils » et le dénominateur, « la mère ». Probablement parce que l'auteur de ces expressions pensait à une mère enceinte et son enfant, soulignant à la fois la différence en taille et le lien intime entre les deux termes. Les numérateurs représentent un certain nombre de parts produites par le dénominateur…

4.2 Quelques procédures de calcul fractionnaire

4.2.1 *Sept procédures*

Dans le *JZSS*, il y a les sept suivantes (citées par ordre d'apparition) :

- la procédure de simplification des parts, *yuefen shu* 約分術 ;
- la procédure de réunion des parts, *hefen shu* 合分術 (addition) ;
- la procédure de diminution des parts, *jianfen shu* 減分術 (soustraction) ;
- la procédure de comparaison des parts, *kefen shu* 課分術 ;
- la procédure d'équilibrage des parts, *pingfen shu* 平分術 ;

2 Un *qian* est une mesure monétaire.

- la procédure de calcul direct des parts, *jingfen shu* 經分術 (division) ;
- la procédure de multiplication des parts, *chenfen shu* 乘分術.

4.2.2 *Procédure de simplification des parts (yuefen shu)*

La procédure se trouve après les exercices 1-5 et 1-6 (et leur réponse).

Cette procédure porte sur la simplification d'une fraction en une fraction irréductible.

Simplifier les parts. Procédure : Quand elles sont divisibles par 2, divise-les par 2. Quand elles ne le sont pas, pose séparément les nombres de la mère et du fils du partage, par le [plus] faible, diminue (*kien*) [3] le [plus] fort. De nouveau qu'ils se diminuent et cherche leur égalité (*deng*). Par les nombres égaux, simplifie-les.

Autrement dit, la technique consiste à essayer de simplifier par 2 le numérateur et le dénominateur puis à effectuer ensuite la série de soustractions alternées caractéristique du très classique algorithme d'Euclide [4] .

Prenons pour exemple la simplification de la fraction 49/91 (problème 1-6).

Par soustractions successives, on obtient :

91 – 49 = 42

49 – 42 = **7**

42 – 7 = 35

35 – 7 = 28

28 – 7 = 21

21 – 7 = 14

14 – 7 = **7**

Étant donné qu'on obtient ainsi deux nombres égaux (le « 7 » de 49 – 42 et celui de 14 – 7), on simplifie la fraction en divisant chacun de ses termes par 7 pour obtenir 7/13. Ce nombre 7 que l'auteur appelle l'égal (*deng* 等) est le PGCD de 91 et 49.

4.2.3 *Procédure d'addition des fractions* (*hefen shu*)

C'est après les exercices 1-7, 1-8 et 1-9 que se trouve la procédure.

Unir les parts. La procédure dit : les mères en croix les fils. Additionne [les produits] pour faire le dividende. Les mères multipliées entre elles font le diviseur. Le dividende est rapporté au diviseur [5] . Ce qui ne remplit pas le diviseur, par le diviseur, commande-le. Lorsque les mères sont identiques, que les dividendes se suivent directement.

---

3 « Soustrais le plus petit au plus grand. »

4 Voir les *Éléments* VII-1 et VII-2.

5 En d'autres termes, « multiplie les dénominateurs : cela te donnera le dénominateur final puis simplifie la fraction trouvée ».

« Ce qui ne remplit pas le dénominateur » est le reste de la division du dividende par le diviseur. Le « commander » (*ming*) par le diviseur signifie qu'on l'exprime sous la forme d'une fraction ayant ce reste pour numérateur et le diviseur pour dénominateur. Avoir des « mères identiques » signifie que les dénominateurs sont égaux. Dans ce cas, on additionne directement les numérateurs.

Si nous considérons les deux fractions a/b et c/d, la procédure donnée donne le résultat $(a\,d + b\,c)/(b\,d)$, sans passer par le calcul du plus petit commun des dénominateurs.

Par exemple, dans le problème 1-7, on veut sommer les deux fractions 1/3 et 2/5. Le dividende est égal à $5 \times 1 + 3 \times 2 = 11$ et le diviseur est $3 \times 5 = 15$. $11 < 15$ donc 11 ne remplit pas 15. Le résultat est donné sous la forme 11/15.

Dans le problème 1-8, on veut sommer les trois fractions 2/3, 4/7 et 5/9. Le dividende est égal à $2 \times 3 \times 7 + 4 \times 9 + 5 \times 7 = 42 + 36 + 35 = 113$ et le diviseur, $7 \times 9 = 63$. $113 > 63$ donc 113 remplit 63. Il reste $113 - 63 = 50$. On donne le résultat sous la forme $1 + 50/63$.

4.2.4 *La procédure shao guang*

Cette procédure permet de calculer la largeur d'un champ rectangulaire (*fangtian* 方田) lorsque l'on connaît sa longueur et sa surface. Le chapitre 4 du *Jiu Zhang Suan Shu* contient ce genre de problèmes.

Tous les champs ont une surface valant 1 *mu*, soit 240 *bu* [carrés] et une largeur valant successivement 1, 1 + 1/2, 1 + 1/2 + 1/3, …, 1 + 1/2 + 1/3 + … + 1/12 *bu*.

Au-delà du simple exercice de calcul fractionnaire (qui se rapporterait au chapitre 1), on peut y voir deux intentions du rédacteur. La première est de montrer qu'une aire peut être réalisée de plusieurs façons. La seconde est d'introduire le cas où largeur et longueur sont égales, c'est-à-dire d'amener l'extraction d'une racine carrée [6]; cette opération est littéralement traduite par « ouvrir le carré ». La méthode proposée par le rédacteur explique comment on divise l'unité par une somme de fractions.

Notons au passage que *guang* et *zong* sont très souvent respectivement traduits par « largeur » et « longueur » ; en fait, ces deux termes désignent des longueurs se rapportant à leur orientation : *guang* désigne la direction (horizontale) est-ouest et *zong*, la direction (verticale) nord-sud. Et, de façon assez générale, *zong* est supérieur à *guang*. Cette utilisation des cardinaux est typique de la culture chinoise.

6 En effet, la longueur associée à une largeur croissante va être décroissante, l'aire étant constante. À terme, longueurs et largeurs se rapprochent d'une même valeur, la longueur du côté d'un carré dont on connaît l'aire.

Bibliographie et sitographie

(Sont cités pour le lecteur les textes et ouvrages en langues occidentales)

- Gazagnes, A., *Promenades mathématiques en Chine Ancienne*, IREM de Reims, 2005
- Granet, M., *La civilisation chinoise*, Coll. « L'évolution de l'humanité », Albin Michel, 1968
- Libbrecht, U., *The Chinese Ta-yen Rule : a Comparative Study*, Orientalia Lovaniensa (Louvain), 1972
- Liu, D., *Nombres et outils de calcul et expressions mathématiques en Chine ancienne*, *in* « L'Océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes », Actes du Colloque, 3-7 novembre 1997, I.U.F.M. de La Réunion, pp 161-177, 1998
- Martzloff, J.-Cl., *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, 1983
- Martzloff, J.-Cl., *A History of Chinese Mathematics*, Springer, 1997
- Mikami, Y., *The developpment of mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishry Compagny New York, 1913
- Needham, J., *La science chinoise et l'Occident*, Ed. du Seuil, 1973
- Schrimpf, R., *La collection mathématique Souan King Che Chou, Contribution à l'histoire des mathématiques chinoises des origines au VIIe siècle de notre ère*, Thèse, Rennes, 1963
- Yabuuti, K., *Une histoire des mathématiques chinoises*, Belin Sciences, 2000
- Yamasaki, Y., *History of instrumental Multiplication and Division in China – from the Reckoning-blocks to the Abacus*
- http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?article738