Université de Rouen Haute Normandie
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Avenue de Broglie – B.P. 138 76821 Mont Saint Aignan Cédex
Tél. 02 35 14 61 41 – Fax : 02 35 14 00 49

JACQUES BERNOULLI

&

l'ars conjectandi

Documents pour l'étude
de
L'EMERGENCE D'UNE MATHEMATISATION
DE LA STOCHASTIQUE

Jacques BERNOULLI et L'ARS CONJECTANDI

NORBERT MEUSNIER

Université Paris VIII

1987

Photo de la couverture :

Jacques Bernoulli en 1687

peinture à l'huile de la main de son frère Nicolas (1662-1716) exposée dans la vieille Halle de l'Université, dans le Musée d'Histoire Naturelle de Bâle

I.S.B.N. 2-86239-001-1

Université de Rouen Haute Normandie
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Avenue de Broglie - B.P. 138 76821 Mont Saint Aignan Cédex
Tél. 02 35 14 61 41 - Fax : 02 35 14 00 49

JACQUES BERNOULLI

&

l'ars conjectandi

Documents pour l'étude
de
L'EMERGENCE D'UNE MATHEMATISATION
DE LA STOCHASTIQUE
Jacques BERNOULLI et L'ARS CONJECTANDI

NORBERT MEUSNIER
Université Paris VIII

1987

Mon désir de rendre lisible en français l'oeuvre de Jacques Bernoulli aux origines de la "Stochastique" a pris naissance dans la lecture du remarquable article d'Ernest Coumet: "La théorie du hasard est-elle née par hasard ?" paru dans la revue "Les Annales" en 1970

Sa réalisation n'aurait pu avoir lieu sans l'aide que m'ont apporté Bernard Lalande pour la traduction du texte latin de l'Ars Conjectandi et Jean Pierre Cléro qui s'est chargé de faire éditer cet essai par l'Irem de Rouen et qui a porté un soin attentif et ingrat à sa correction.

Norbert Meusnier

V.C.D.C.P. 1975-1985

"Tout ce qui sert à la logique lui appartient et c'est une chose entièrement ridicule que les gênes que se donnent certains Auteurs, comme Ramus et les Ramistes, quoique d'ailleurs fort habiles gens, qui prennent autant de peine pour borner les juridictions de chaque science, et faire qu'elles n'entreprennent pas les unes sur les autres, que l'on en prend pour marquer les limites des Royaumes, et régler les ressorts des Parlements".

Antoine Arnauld - Pierre Nicole
LA LOGIQUE OU L'ART DE PENSER
PARIS 1662-1683

"Quanto caeteris scientiis praestet, vel ex eo constat, quod cum reliquae de rebus in se certissimis ac constantissimis non nisi probabiliter, illa de rebus maxime fortuitis et casualibus, v. gr. sortitionibus apodictice et certissimo ratiocinio discurrit."

Jacques Bernoulli
PARALLELISMUS RATIOCINII LOGICI ET ALGEBRAICI
(Thèse 19)
Bâle - 1685

"Les gens de méditation ordinairement ne sauraient goûter cette multitude de vues légères et peu seures dont il se faut servir dans le train des affaires et dans les sciences pratiques comme sont la politique et la médecine ; mais ils ont grand tort. C'est de ces emplois comme du jeu, où il faut se résoudre et prendre party lors-même qu'il n'y a nulle asseurance ; il y a une science qui nous gouverne dans les incertitudes mêmes pour découvrir de quel costé la plus grande apparence se trouve. Mais il est étonnant qu'elle est presque inconnue et que les logiciens n'ont pas encore examiné les degrés de probabilité ou de vraisemblance <qu'il y a> dans les conjectures <ou preuves> qui ont <pourtant> leur estimation aussi asseurée que les nombres ; cette estimation nous peut et doit servir non pas pour venir à une (asseurance) <certitude>, ce qui est impossible, mais pour agir le plus raisonnablement qu'il se peut sur les faits ou connaissances qui nous sont données."...

G.W. LEIBNIZ Nouvelles ouvertures (?)
dans "Opuscules et Fragments Inédits de Leibniz" p.226-227. Edité par Louis Couturat.
Paris 1903

JACOBI BERNOULLI,
Profeff. Bafil. & utriufque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruff. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS

DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè fcripta

DE LUDO PILÆ RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenfis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

SUR LA PUBLICATION DE L'ARS CONJECTANDI

Quand l'"Ars Conjectandi" paraît à Bâle en août 1713, il y a 8 ans que Jacques Bernoulli est mort, et entre temps Pierre Rémond de Montmort a publié en 1708 son "Essai d'analyse sur les jeux de hasard" - 2° édition en 1713 -, son neveu - le fils de Jean Bernoulli - Nicolas a fait paraître en juin 1709 sa " Dissertatio Inauguralis Mathematico - Juridica De Usu Artis Conjectandi In Jure" et Abraham De Moivre son mémoire "De Mensura Sortis seu de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus" dans les Philosophical Transactions de Mars 1711. Aussi n'est-il pas étonnant de voir Montmort écrire à Nicolas Bernoulli le 25 décembre 1713 :

> "*Il est vray, ce que vous distes, qu'il y a peu de choses à apprendre pour nous, qui avons beaucoup pensé à ces matières. Le livre ne laisse pas d'estre excellent*". (1)

Il est certain qu'en 1713 le livre de Bernoulli arrive trop tard, en même temps qu'il manque son but, l'application de cet art à la "vie civile, économique et morale", objet d'un désir vain pendant vingt ans. Jacques Bernoulli, comme on peut le constater à la lecture de son "Journal Scientifique"(2), a commencé à travailler sur des problèmes concernant les jeux de hasard à partir du début de l'année 1685, en méditant l'ouvrage de Huygens de 1657 "De ratiociniis in ludo aleae". Il a alors 30 ans, est diplômé en théologie depuis 9 ans, vient d'accomplir entre 1679 et 1682 deux voyages d'étude, le premier en France, le deuxième aux Pays Bas et en Angleterre et travaille à l'Université de Bâle comme assistant de physique expérimentale. Il vient de publier, à Amsterdam, une "Théorie des Comètes" en 1682 - à propos du passage de la "future" comète de Halley qui agite alors les milieux savants où s'affrontent Coperniciens et anti-Coperniciens - puis en 1683 une "Théorie de la gravitation", publications qui lui permettent de se faire connaître. Il vient également de se marier en 1684, et entre 1684 et 1686 il publie 4 controverses de Logique défendues par des étudiants de la faculté de Bâle - dont l'un est son frère Jean - en vue de l'obtention de leur maîtrise ; on peut penser que ces publications ne sont pas sans rapport avec le but qu'il atteint en 1687: être nommé professeur de mathématiques de l'Université de Bâle. C'est l'époque où il se familiarise avec les nouvelles méthodes de l'algèbre et où il est conduit vers des problèmes de géométrie infinitésimale à partir des travaux de Wallis et Barrow sur l'optique et la mécanique. En ce qui nous concerne plus précisément ici, il passe très rapidement de l'étude des problèmes posés par Huygens portant sur les jeux de hasard à des problèmes de partage d'héritage et tout son programme de recherche se trouve déjà dans l'article 77 de son "Journal Scientifique" que l'on peut très vraisemblablement dater de l'hiver 1685-86 au plus tard. On trouve dans le Journal, immédiatement après cet article, la première version de la "Lettre à un amy sur le jeu de Paume" puis quelques articles dans lesquels il s'efforce de trouver des exemples d'application. Dans l'article 151 a, écrit entre 1686 et 1689, il développe la démonstration du théorème qui fera l'objet du 5ème chapitre de la 4ème partie de l'Ars Conjectandi. Dans les années qui suivent il revient parfois, mais rarement, sur ce sujet et il est évident que l'Ars Conjectandi aurait pu être publié dès 1689 ; rien n'y manquait, sinon ce qu'il va vainement rechercher pendant 15 ans jusqu'à la fin de sa vie, des applications :

> *"... j'ai déjà terminé la plus grande partie de mon livre - écrit-il à Leibniz le 3 octobre 1703 -, mais il me manque encore la partie essentielle dans laquelle je montre comment les bases de l'art de conjecturer peuvent s'appliquer à la vie civile, morale et politique".* (3)

Dans cette même lettre, il expose à Leibniz son principe fondamental de l'art de conjecturer qui repose sur la possibilité de déterminer le nombre de cas qui permettent de calculer les degrés de probabilité d'un événement "a posteriori", d'une façon aussi certaine que si nous la connaissions a"priori" ; puis il poursuit : ...

> *" Je ne sais pas si ces spéculations vous paraissent légitimes. S'il en est ainsi, vous me rendrez un grand service en me procurant des données d'ordre juridique pour lesquelles vous estimez qu'il est possible d'utiliser ces considérations. J'ai récemment trouvé dans les "Comptes rendus de Hanovre" la mention d'un Traité qui m'était inconnu du Pensionnaire de Witt "Sur des calculs subtils de la "valeur" des rentes viagères". Il se pourrait que cela me soit utile ; si tel est le cas, j'aimerais bien m'en procurer un exemplaire quelque part".*

Entre 1703 et 1705, l'échange de lettres dont nous gardons la trace, révèle l'incompréhension et même l'hostilité de Leibniz au projet de Bernoulli - c'est à ces objections qu'il répond à la fin du 4ème chapitre de la 4ème partie de l'Ars Conjectandi - de même que sa mauvaise volonté à lui procurer le traité de De Witt dont il possédait un exemplaire. Après la mort de Bernoulli, Leibniz semble changer d'avis, au point d'en arriver peu à peu à s'attribuer le mérite de l'initiative de ses recherches ! C'est ainsi, entre autres, qu'il écrit à Bourguet le 22 mars 1714 :

> *"L'art de conjecturer est fondé sur ce qui est plus ou moins facile, ou bien plus ou moins faisable mot à mot : par exemple avec deux dés, il est aussi faisable de jetter douze points que d'en jetter onze (sic), car l'un et l'autre ne se peut faire que d'une seule manière ; mais il est trois fois plus faisable d'en jetter sept parce que cela se peut faire en jettant 6 et 1, 5 et 2 et 4 et 3 ; et une combinaison icy est aussi faisable que l'autre. Le Chevalier de Méré (Auteur du livre des Agremens) fut le premier qui donna occasion à ces méditations, que Messieurs Pascal, Fermat et Hugens poursuivirent. Monsieur le Pensionnaire de Witt et Monsieur Hudde ont aussi travaillé là-dessus depuis. Feu Monsieur Bernoulli a cultivé cette matière sur mes exhortations. On estime encore les vraisemblances a posteriori, par l'expérience, et on y doit avoir recours au défaut des raisons a priori : par exemple il est également vraisemblable que l'enfant qui doit naître soit garçon ou fille, parce que le nombre des garçons et des filles se trouve à peu près égal dans ce monde. L'on peut dire que ce qui se fait le plus ou le moins est aussi le plus ou le moins faisable dans l'état*

présent des choses, mettant toutes les considérations ensemble qui doivent concourir à la production d'un fait". (4)

Venons-en aux péripéties de la publication de l'ouvrage, entre la mort de l'auteur et l'année 1713. C'est Hermann - un ancien élève, fidèle très proche - qui est chargé par la veuve de Jacques Bernoulli de rassembler les papiers qui pourraient être publiés. Il a donc accès au manuscrit de l'"Ars Conjectandi", et Varignon lui demande des détails qui vont permettre à Fontenelle de prononcer son éloge devant l'Académie des Sciences le 14 Novembre 1705 : où l'on peut constater d'ailleurs que celui-ci n'a strictement rien compris aux travaux concernant les probabilités. Ainsi il écrit :

"Toute la difficulté est qu'il nous échappe beaucoup de cas où l'événement peut arriver, ou ne pas arriver, et plus il y a des cas inconnus, plus la connaissance du parti qu'on doit prendre paraît incertaine. La suite de ces idées a conduit M. Bernoulli à cette question, si le nombre des cas inconnus diminuant toujours la probabilité du parti qu'on doit prendre en augmente nécessairement, de sorte qu'elle vienne à la fin à tel degré de certitude qu'on voudra." (5)

Dans le Journal des Savants de 1706, Saurin, par contre, donne une excellente description du contenu du manuscrit :

"... C'est dans la quatrième partie que l'Auteur étend sa Méthode, et ses raisonnements, ainsi qu'on l'a dit, aux choses qui regardent la vie civile, et les affaires domestiques. Le fondement de cette dernière partie, est un Problème important, qu'il résout d'abord, solution dont il faisait plus de cas, que de la Quadrature du Cercle. Il s'agit de déterminer si en augmentant le nombre des observations, par rapport à un événement, on augmente aussi en même temps à proportion le degré de probabilité ou d'apparence qu'il y a de trouver le véritable rapport entre le nombre de cas où l'événement peut arriver, et le nombre des cas où il peut n'arriver pas ; en sorte qu'on puisse enfin parvenir à un degré de probabilité ou d'apparence qui soit au-dessus de tout degré donné ; c'est-à-dire qui soit une véritable certitude." (6)

Pour sa part, Hermann écrit un éloge publié en 1706 dans les Acta Eruditorum, dont Leibniz, qui surveille la publication, supprime certains passages concernant les travaux sur les probabilités. Un certain nombre de savants estiment donc à ce moment là qu'il serait intéressant que l'ouvrage soit édité et c'est ainsi que Saurin termine son article en écrivant :

"Il y a lieu d'espérer que quelque main amie et habile ajoutera à un Traité si curieux ce qui peut y manquer : mais quand on le donnerait tel qu'il est, il fera toujours beaucoup de plaisir au Public... C'est ce qu'ils attendent (les

Sçavans) en particulier des soins de M. Bernoulli le jeune, qui a toujours fait paraître un grand zèle pour l'utilité publique, et pour l'avancement des Sciences, et à qui la mémoire d'un tel frère doit être chère"(7).

L'humour probablement involontaire de Saurin est savoureux lorsqu'on sait que les deux frères s'étaient irréversiblement fâchés depuis une dizaine d'années au moment de la mort de Jacques, et que ses héritiers - sa femme et son fils - s'efforcèrent avant tout d'empêcher Jean d'avoir accès à ses manuscrits. Aussi Jean Bernoulli écrit-il à Varignon le 26 Février 1707 :

"... j'aurais bien souhaité que Mr. Saurin se fût dispensé de laisser le public dans une espérance que les Héritiers de mon frère ne me mettront pas en état de jamais remplir, vu le grand soin qu'ils ont de bien cacher tous ses papiers et ses écrits, de peur que je n'en fasse quelque profit...Je n'ay que faire de me charger des affaires d'autruy, bien loin de m'y ingérer par force. Je voudrais que Mr. Saurin désabusât par occasion le public de son attente, de peur que la faute ne soit rejettée sur moy, quand on ne verra jamais rien de tout ce que mon frère a laissé ; mais si toutefois vous souhaitez que le public en jouisse, adressez-vous à mon Neveu, qui a à sa disposition tous les papiers de son Père"(8).

Puis tour à tour, on constate que Leibniz et Montmort s'intéressent à la publication. Le 15 Novembre 1709, Montmort écrit à Jean Bernoulli :

"Que je suis faché, Mr., que vous n'ayez point entre les mains l'ouvrage de M. votre frère(...) Si ceux qui l'ont entre les mains voulaient me le confier, je me chargerais de le faire imprimer à mes dépens, ainsi que j'en ai déjà fait imprimer plusieurs pour le bien du public et l'avancement des sciences. Si l'on voulait même en tirer du profit, je pourrais composer là-dessus ;(...) Si vous voulez bien vous charger, Monsieur, de faire cette proposition et qu'elle soit refusée, pourrais-je au moins espérer que vous voulussiez me faire le plaisir de faire faire un extrait de toutes les propositions de ce manuscrit, surtout de la quatrième partie. Je serais ravi de voir les vües qu'a eues M. votre frère, et adjoutant les siennes à celles que j'ay déjà, je tacherais de mettre en état d'en profiter pour une deuxième édition de mon livre."(9)

On voit que Montmort ne paraît pas mesurer exactement l'ampleur de l'obstacle. Par la suite, c'est Nicolas Bernoulli, le neveu de Jacques et de Jean,qui s'est amplement inspiré du manuscrit de son oncle pour sa thèse de 1709, manuscrit dont il dut avoir communication directe par Hermann, allant même jusqu'à reprendre des passages entiers à son propre compte sans le signaler, qui s'efforce de trouver une solution afin que tout le texte soit publié. Il écrit le 26 Février 1711 à Montmort :

"Pour ce qui regarde le traité de feu Mr. mon Oncle, j'ai proposé l'offre que vous avez faite de faire imprimer ce manuscrit à mon Cousin le fils du défunt, qui en est le maître, mais comme il se défie de moy aussi bien que de Mr. mon Oncle, et qu'il était alors sur le point de partir pour l'Italie, où il est arrivé depuis quelques semaines, il m'a répondu qu'en passant à Padoue, il parlerait là-dessus à Mr. Hermann, en qui Luy et tous ceux de sa maison mettent une plus grande confiance qu'en nous autres ; j'ai écrit là-dessus à Mr. Hermann même, et je l'ai prié de prendre soin, que ce manuscrit fût bientôt imprimé, mais je n'en ai point encore reçu de réponse.

Il est grand dommage que la quatrième partie de ce traité, qui devrait être la principale, ne soit point achevée, elle n'est guères commencée et ne contient que cinq chapitres, dans lesquels il n'y a que des choses générales ; ce qui en est le plus remarquable est le chapitre dernier, où il donne la solution d'un Problème fort curieux, qu'il a préféré même à la quadrature du Cercle, c'est de trouver combien il faut faire d'observations pour parvenir à un tel degré de probabilité que l'on voudra, et où il démontre en même temps, que par les observations souvent réitérées on peut trouver fort au juste la raison qu'il y a entre le nombre des cas, où arrivera un certain évènement, et le nombre des cas, où il n'arrivera pas. Il serait à souhaiter que quelqu'un voulût entreprendre d'achever cette dernière partie, et de traiter à fonds les choses de politique et de morale, et comme je ne çais personne qui soit plus capable d'y réussir, que vous, Monsieur, qui en avez donné des preuves si excellentes dans Votre bel Ouvrage, je vous prie de pousser les vues que vous avez sur cette matière. Vous en obligerez beaucoup le public et particulièrement moy."(10)

Quand le fils de Jacques donne son accord, c'est sa veuve qui maintenant s'y oppose ! Au début de l'année 1713, au retour d'un voyage aux Pays-Bas et en Angleterre, Nicolas Bernoulli séjourne chez Pierre Rémond de Montmort, mais finalement le fils de Jacques Bernoulli a fait faire la correction du manuscrit par un certain Bringolf et vend les droits aux éditeurs Thurneysen. On comprend que Jean Bernoulli écrive à Nicolas le 15 Juillet 1712 (?) :

"... Il va en résulter quelque chose de beau si ni l'éditeur, ni le correcteur, ni l'imprimeur ne comprennent rien à la matière..."(11)

Varignon, apprenant que le livre doit être imprimé sous peu dans ces conditions s'en émeut auprès de Jean Bernoulli et de Nicolas auquel il écrit:

"Je suis impatient de voir le livre "De Arte Conjectandi" de feu Mr. son illustre Père, lequel n'y ayant pas mis la dernière main, y aura laissé sans doute des lacunes et autres

négligences qui auraient eu besoin d'un aussi habile homme que Mr. Votre Oncle d'aujourd'hui, ou que vous ou que Mr. Hermann, pour présider à l'impression : Du moins avant que le livre paraisse, revoyez en l'impression pour en marquer les errata, y ajouter les éclaircissements nécessaires, et un avis sur ce que la mort trop prématurée de son illustre Auteur ne lui a pas permis de mettre cet ouvrage dans la dernière perfection qu'il était capable de lui donner. Vous le disculperez par là des négligences qu'on y pourra trouver, et vous rendrez ainsi service à la gloire dont je suis un des plus zélés défenseurs, et au public". (12)

Notes :

(1) Cité par K. Kohli dans "Die Werke von Jakob Bernoulli" tome III p. 401.

(2) Jacques Bernoulli a commencé à écrire son "Journal Scientifique ou "Meditationes" en 1677 alors qu'il était le précepteur à Genève d'une jeune aveugle. Le premier article traitant des problèmes de Jeux de hasard porte le numéro 63, se trouve à la page 80 et concerne la résolution du 3° problème posé par Huygens à la fin de son petit ouvrage de 1657. Il date probablement de la fin de l'année 1684 ou du début de l'année 1685, à une époque où Bernoulli est déjà définitivement installé à Bâle.

(3) C.I. Gerhardt "Leibnizens mathematische Schriften" tome III p. 77-78.

(4) C.I. Gerhardt "Leibnizens philosophische Schriften" tome III p.p 569-570.

(5) Histoire de l'Académie des Sciences 1705 - Cité par K. Kohli "Die Werke" tome III p. 393. Si Fontenelle n'a rien compris, ne lui en voulons pas trop ! On mesure la difficulté qu'il pouvait y avoir à interpréter la pensée de Bernoulli - de deuxième "main", qui plus est ! - lorsqu'on constate le superbe contresens que nous propose le traducteur du petit extrait de la IVème partie de l'Ars Conjectandi (texte latin p. 236) dans le livre "Introduction à l'Histoire des Sciences, I - Eléments et Instruments (Hachette, 1970, p. 64)- qui traduit : "Il faut donc montrer qu'il est possible de procéder à des épreuves en nombre tel que sur un certain nombre de répétitions, par exemple C, il apparaisse plus vraisemblable que le nombre des observations favorables doit tomber plutôt à l'intérieur de ces limites qu'à l'extérieur..."

Voir la traduction proposée ici p.64 (p 236 dans le texte latin)

(6) Journal des Sçavans 1706 - pp. 81-89 - Cité par K. Kohli "Die Werke" tome III p. 394.

(7) ibidem. p. 395.

(8) Cité par K. Kohli "Die Werke" tome III p. 395.

(9) ibidem. p. 397.

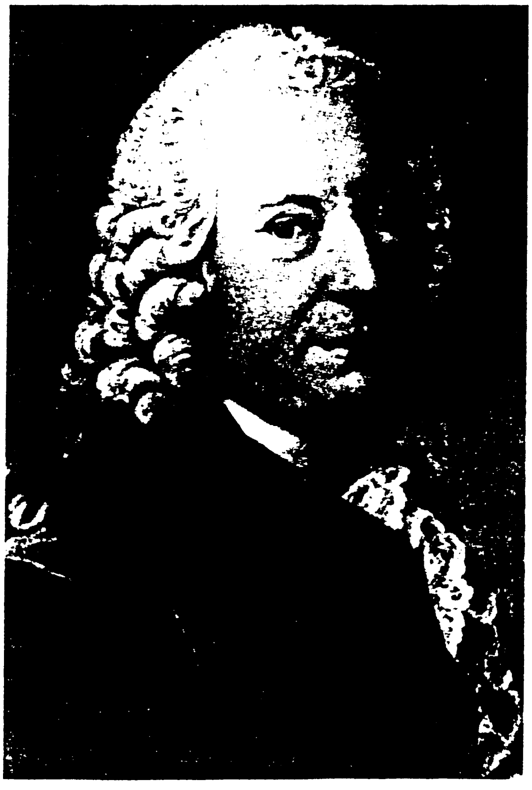
(10) ibidem. p. 398.

(11) ibidem. p. 399.

(12) ibidem. p. 400. La lettre date de mai ou juin 1713

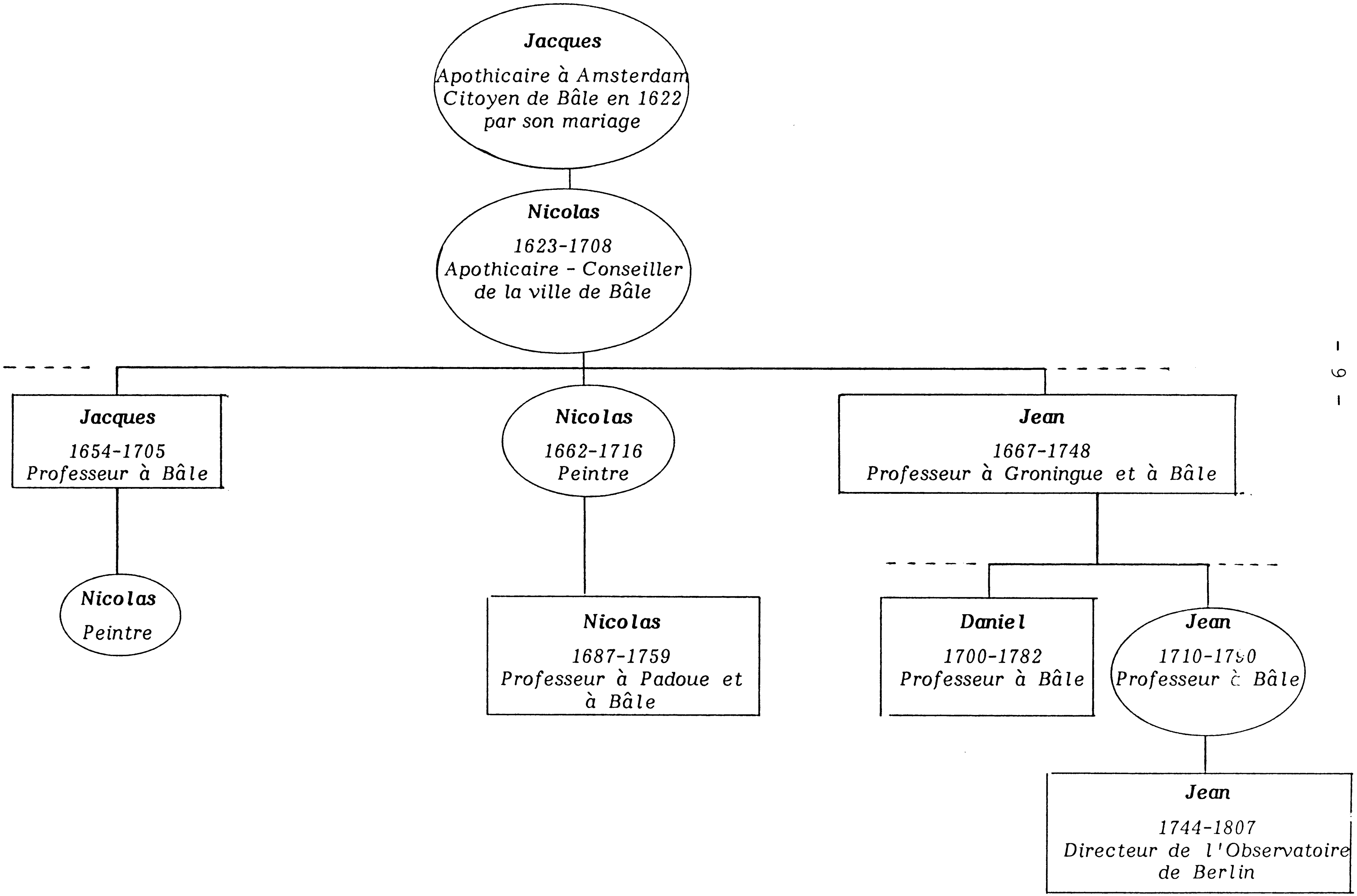
Jacob Bernouilli (1654-1705)

Johann Bernouilli (1667-1748)



Daniel Bernouilli (1700-1782)

"LES BERNOULLI"



NICOLAS BERNOULLI

AU LECTEUR

Aujourd'hui enfin, après une longue attente, paraît le Traité posthume de mon Oncle sur l'Art de Conjecturer, et cela grâce aux Frères Thurneysen. Ceux-ci, désireux de plaire au public, ont pris soin de faire imprimer à leurs frais le Manuscrit de l'Auteur qu'ils ont obtenu de ses héritiers. L'Auteur s'était proposé de montrer l'extraordinaire usage qu'a dans la vie civile cette partie de la connaissance dont peu de personnes ont jusqu'ici traité et qui concerne la mesure des probabilités. Comment et jusqu'à quel point l'auteur a-t-il exécuté son projet, on en trouvera l'examen dans les Mémoires de l'Académie Française Royale des Sciences de l'année 1705 et dans le Journal des Savants de Paris de l'année 1706. L'Auteur a divisé cette Oeuvre en quatre parties. La Ière contient le Traité de l'Illustre Huygens De Ratiociniis in Aleae Ludo, avec des notes, Traité que mon oncle a jugé devoir être mis en tête de son ouvrage, car on y trouve les premiers éléments de l'Art de Conjecturer. La IIème partie embrasse la Théorie des Permutations et des Combinaisons, théorie absolument nécessaire pour mesurer les probabilités ; dans la IIIème partie il en a développé les applications aux divers Tirages au sort et Jeux de Hasard. Quand à la IVème partie par laquelle il aurait voulu montrer l'application et le rapport des parties précédentes aux affaires civiles, morales et économiques, affligé depuis longtemps d'une mauvaise santé et enfin prévenu par la mort elle-même, il l'a laissée inachevée. Les Editeurs auraient désiré que le Frère du Défunt, qui eût été tout à fait capable d'achever cette oeuvre, comblât la lacune. Mais ils ne voulurent pas, en lui demandant ce travail, importuner un homme pris par de nombreuses autres tâches. Et moi-même qui, ils le savaient, avais jadis donné dans ma Dissertation Inaugurale des Exemples de cet Art appliqué au Droit, et à qui ils avaient pensé confier cette tâche, je ne pouvais l'entreprendre car j'étais absent, en séjour à l'étranger. Sollicité de nouveau à mon retour dans ma patrie, je refusai ce travail. Je suis jeune, je suis dépourvu de la longue pratique et de la longue expérience qui sont nécessaires pour traiter ce sujet ; je sentais donc que je ne serais pas à la hauteur de la tâche ; je jugeais aisément qu'il ne serait pas donné satisfaction au Lecteur et surtout que le reste perdrait de son prix si j'y ajoutais seulement des banalités vraiment rebattues. C'est pourquoi j'ai conseillé que ce Traité, qui était déjà imprimé en grande partie, fût communiqué au public dans l'état où l'Auteur l'avait laissé. Mais pour qu'une chose aussi utile que l'application du calcul des probabilités à l'économie et à la politique ne soit pas négligée, nous invitons l'Illustre Auteur du livre en Français Essai d'analyse sur les jeux de hasard , ainsi que le célèbre De Moivre, qui ont l'un et l'autre publié il y a peu d'excellents travaux sur cet art, à vouloir bien prendre eux-mêmes la responsabilité de cette tâche et le temps de communiquer au public leurs remarquables trouvailles. Nous espérons toutefois que les généralités que l'Auteur expose dans les cinq chapitres de la dernière Partie ne seront pas d'une médiocre utilité au Lecteur attentif pour l'éclaircissement de certaines questions. Voilà comment nous avons jugé bon de préfacer ce Traité. Les Editeurs ont ajouté les Propositions de l'Auteur sur les Séries Infinies, sujet qu'il avait traité autrefois à fond en cinq Mémoires mais comme de nombreux exemplaires en ont été recherchés jusqu'à présent en vain chez nos libraires, les éditeurs les ont réimprimés ensemble à la suite de ce Traité. S'y ajoute également, puisque le sujet en est voisin, la Lettre en Français de l'Auteur sous le titre Lettre à un amy , etc.... Il faut encore signaler que le tableau des variations du vers de Bauhusius Tot Tibi etc ..., trouvé au milieu des papiers de l'Auteur a été inséré par le Correcteur, par amitié envers les Curieux ; ainsi n'y a-t-il pas à tenir compte des derniers mots de la page 78. Les autres erreurs, peu nombreuses à la vérité, qui ont échappé au Correcteur, nous les avons notées à la fin du livre. Nous prions le Lecteur de vouloir bien les corriger.

QUATRIEME PARTIE
DE
L'ART DE CONJECTURER

traitant de

L'USAGE ET L'APPLICATION DE
LA DOCTRINE (1) PRECEDENTE AUX
AFFAIRES CIVILES (2) , MORALES ET
ECONOMIQUES

CHAPITRE I.

PRELIMINAIRES : LA CERTITUDE, LA PROBABILITE, LA NECESSITE, LA CONTINGENCE

On considère la *certitude* d'une chose quelconque ou bien *objectivement* en elle-même : le mot ne signifie alors rien d'autre que la vérité de l'existence présente ou future de cette chose ; ou bien on la considère *subjectivement* , dans son rapport à nous, et elle est la mesure de notre connaissance touchant cette vérité. (3)

Tout ce qui bénéficie sous le soleil de l'être ou du devenir, passé, présent ou futur, possède toujours en soi et objectivement une certitude totale. C'est évident du présent et du passé : ce qui est ou a été ne peut pas ne pas être ou avoir été. Sur le futur il n'y a pas à discuter ; cependant ce n'est pas par la nécessité de quelque destin qu'il ne peut pas ne pas advenir (4) , mais

ARTIS CONJECTANDI PARS QUARTA,

tradens

Usum & applicationem praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus & Oeconomicis.

CAPUT I.

Praeliminaria quaedam de Certitudine, Probabilitate, Necessitate & Contingentia Rerum.

Certitudo rei cujusvis spectatur vel *objectivè* & in se; nec aliud significat, quàm ipsam veritatem existentiae aut futuritionis illius rei: vel *subjective* & in ordine ad nos; & consistit in mensura cognitionis nostrae circa hanc veritatem.

Omnia, quae sub Sole sunt vel fiunt, praeterita, praesentia sive futura, in se & objectivè summam semper certitudinem habent. De praesentibus & praeteritis constat; quoniam eo ipso, quo sunt vel fuerunt, non possunt non esse vel fuisse: Nec de futuris ambigendum, quae pariter etsi non fati alicujus inevitabili necessien raison soit de la prescience soit de la prédétermination divine ; car si n'arrivait pas avec certitude tout ce qui est futur, on ne voit pas comment le Créateur suprême pourrait conserver entière la gloire de son omniscience et de son omnipotence. Quant à dire comment cette certitude de l'avenir peut subsister avec la contingence ou la liberté des causes secondes, que d'autres en disputent ; pour nous, nous ne voulons pas toucher aux points étrangers au but que nous visons.

La certitude, considérée par rapport à nous, n'est pas la même en tout, mais varie beaucoup en plus et en moins. Ce qui par révélation, raison, sensation, expérience, ἀυτοψία (5) ou autrement est tellement évident que nous ne pouvons aucunement douter de son existence présente ou future jouit d'une certitude totale et absolue. Tout le reste acquiert dans nos esprits une mesure moins parfaite, plus ou moins grande, selon que les probabilités sont plus ou moins nombreuses qui nous persuade qu'une chose est, sera ou a été.

La *probabilité* est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout. Evidemment, si la certitude intégrale et absolue, que nous désignons par la lettre a ou par l'unité I, est constituée de - supposons par exemple - cinq probabilités ou parties,(6) dont trois militent pour qu'un événement existe ou se produise, les autres s'y opposant : nous dirons que cet événement a $\frac{3}{5}$ a, ou $\frac{3}{5}$ de certitude.

Sera donc dit *plus probable* qu'autre chose ce qui a une plus grande part de certitude, bien qu'en fait, d'après le langage courant, soit dit *probable* , ce dont la probabilité dépasse notablement la moitié de la certitude. Je dis : *notablement* ; car ce qui équivaut à la moitié de la certitude environ est dit *douteux* ou ambigu. Ainsi ce qui a 1/5 de certitude est plus probable que ce qui n'en a qu'1/10; même si ni l'un ni l'autre n'est en fait probable.

Ce à quoi est attribué une part de certitude, si peu même que ce soit, cela est *possible* ; lorsque cette part est nulle ou infiniment petite cela est *impossible* . Ainsi est possible ce qui a $\frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{30}$ de certitude.

Est *Moralement certain* ce dont la probabilité égale presque la certitude intégrale, de telle sorte que le manque soit imperceptible ; au contraire est *Moralement impossible* ce qui n'a de probabilité que ce qui manque pour être moralement certain de la certitude entière (7) . Par exemple, si nous tenons pour moralement ceſſitate, tamen ratione tum præſcientiæ tum prædeterminationis divinæ non poſſunt non fore; niſi enim certò eveniant quæcunque futura ſunt, non apparet, quo pacto ſummo Creatori omniſcientiæ & omnipotentiæ laus illibata conſtare queat. Quomodo autem hæc futuritionis certitudo cum contingentia aut libertate cauſarum ſecundarum conſiſtere poſſit, de hoc diſputent alii; nos à ſcopo noſtro aliena nolumus tangere.

Certitudo rerum, ſpectata in ordine ad nos, non omnium eadem eſt, ſed multipliciter variat ſecundùm magis & minus. Illa de quibus revelatione, ratione, ſenſu, experientia, αὐτοψία aut aliter ita conſtat, ut de eorum exiſtentia vel futuritione nullo modo dubitare poſſimus, ſumma & abſoluta certitudine gaudent. Cætera omnia imperfectiorem ejus menſuram in mentibus noſtris obtinent, majorem minoremve, prout plures vel pauciores ſunt probabilitates, quæ ſuadent rem aliquam eſſe, fore aut fuiſſe.

Probabilitas enim eſt gradus certitudinis, & ab hac differt ut pars à toto. Nimirum ſi certitudo integra & abſoluta, quam litera *a* vel unitate 1 deſignamus, quinque verb. gr. probabilitatibus ceu partibus conſtare ſupponatur, quarum tres militent pro exiſtentia aut futuritione alicujus eventus, reliquæ contra: eventus ille dicetur habere $\frac{3}{5}a$, ſeu $\frac{3}{5}$ certitudinis.

Illud igitur altero *probabilius* vocatur, quod majorem certitudinis partem habet; etſi in poſitivo *probabile* ex uſu loquendi tantùm dicatur id, cujus probabilitas ſemiſſem certitudinis notabiliter ſuperat. Dico, *notabiliter*; nam quod ſemiſſem certitudinis circiter æquat, *dubium* vel anceps vocatur. Ita probabilius eſt, quod $\frac{1}{5}$ certitudinis habet, quàm quod $\frac{1}{15}$; etſi neutrum in poſitivo ſit probabile.

Poſſibile eſt, quod vel tantillam certitudinis partem obtinet: Impoſſibile, quod nullam aut infinitè exiguam. Ita poſſibile eſt, quod habet $\frac{1}{20}$ aut $\frac{1}{30}$ certitudinis.

Moraliter certum eſt, cujus probabilitas ferè æquatur integræ certitudini, ſic ut defectus ſentiri non poſſit: *Moraliter impoſſibile* contra, quod tantum duntaxat probabilitatis habet, quantum moraliter certo ad omnimodam certitudinem deeſt. Ita ſi pro moraliter certain ce qui possède $\frac{999}{1000}$ de certitude, sera moralement impossible ce qui n'a qu' $\frac{1}{1000}$ de certitude.

Est *nécessaire* ce qui ne peut pas ne pas être, advenir ou avoir été, soit par *nécessité physique* : ainsi il est nécessaire pour le feu de brûler, pour le triangle d'avoir ses trois angles équivalents à deux droits, pour la pleine lune d'être sujette aux éclipses, dans la mesure où la lune étant visible se rapproche des noeuds, soit par *nécessité hypothétique* , par laquelle chaque chose, pendant le temps qu'elle est ou qu'elle a été, ou que l'on suppose qu'elle est ou qu'elle a été, ne peut pas ne pas être ou avoir été ; en ce sens il est nécessaire que Pierre écrive, si je sais ou si je pose en principe qu'il écrit, soit enfin par *nécessité de convention* ou *d'usage établi* , en vertu de laquelle on dira que le joueur qui aura amené le six aux dès sera nécessairement le vainqueur, si auparavant les joueurs ont convenu que la victoire consiste à amener le six.

Le *contingent* (tant ce qui est *libre* - qui est soumis à l'arbitre (8) d'une créature raisonnable - que le *fortuit* ou *l'accidentel* - qui dépend du hasard ou de la chance) est ce qui pourrait ne pas être, ne pas advenir ou ne pas avoir été ; il relève d'une puissance lointaine, et non pas prochaine, car la contingence n'exclut pas toujours toute nécessité, ni même les causes secondes (9) ; je le montre par des exemples. Etant donné la position du dé, sa vitesse et la distance de la table, au moment où il quitte la main du joueur, le dé ne peut tomber autrement qu'il ne tombe en réalité : cela est tout à fait certain ; de même, étant donné la composition présente de l'air, et étant donné la masse des vents, des vapeurs et des nuages, leur position, mouvement, direction, vitesse et les lois du mécanisme selon lesquelles tous ces éléments réagissent les uns sur les autres, le temps du lendemain ne peut être autre que ce qu'il sera en réalité ; on peut dire que ces effets ne sont pas moins consécutifs à leurs causes prochaines que le phénomène de l'Eclipse par rapport au mouvement des astres ; cependant l'usage veut que l'on compte l'Eclipse seule au nombre des faits nécessaires, et que le hasard des dés et le futur du temps soient considérés comme contingents ; la seule raison de cet usage est que les données que l'on suppose déterminer les effets postérieurs, et qui dans la nature les déterminent, ne nous sont pas assez connues ; et si elles l'étaient, l'étude de la Géométrie et de la Physique n'est pas assez avancée pour que de ces données le calcul puisse supputer les effets, comme il est possible de calculer et de prédire les Eclipses en considérant les principes de l'Astronomie ; pour cette raison les Eclipses elles-mêmes, quand l'Astronomie n'avait pas été portée à ce point de perfection, n'avaient pas moins besoin que les deux autres exemples d'être rangées parmi les futurs contingents. Il s'ensuit que ce qui peut sembler contingent à quelqu'un en une circonstance, certo habeatur, quod $\frac{999}{1000}$ certitudinis possidet, erit moraliter impossibile, quod ejus tantùm habet $\frac{1}{1000}$.

Necessarium est, quod non potest non esse, fore aut fuisse; idque *necessitate* vel *physica*: quo pacto necessum est ignem urere, triangulum habere tres angulos æquales duobus rectis, plenilunium, quod Luna existente in nodis ingruit, esse eclipticum: vel *hypothetica*, qua unumquodq; dum est aut fuit, vel esse aut fuisse supponitur, non potest non esse aut fuisse; quo sensu necessum est Petrum scribere, quem scio ponoq; scribere: vel denique *necessitate pacti* seu *instituti*, quo pacto aleator, qui tessera senarium jecerit, necessario vincere dicitur, si prius inter lusores ita conventum fuerit, ut jactu senarii victoria constet.

Contingens (tam *liberum*, quod ab arbitrio creaturæ rationalis: quàm *fortuitum* & *casuale*, quod à casu vel fortuna dependet) est id, quod posset non esse, fore aut fuisse; intellige potentia remota, non proxima: nec enim contingentia semper omnem necessitatem, etiam quoad causas secundas, excludit; quod exemplis declaro. Certissimum est, quòd data tesseræ positione, velocitate & distantia ab alveo, eo momento quo manum projicientis deserit, tessera non potest aliter cadere, quàm uti revera cadit: item, quod data aëris constitutione præsente, datisque ventorum, vaporum, nubium mole, situ, motu, directione, velocitate & mechanismi legibus, quibus hæc omnia in se invicem agunt, tempestas crastinæ diei non possit alia fore, quàm qualis reapse futura est; adeo ut hi effectus ex suis causis proximis non minus necessario, atque Eclipsium phænomena ex luminarium motu sequantur: & tamen usus obtinuit, ut solæ Eclipses necessariis, casus vero tesseræ & tempestatis futuritio contingentibus annumerentur; cujus rei non alia ratio est, quàm quòd ea, quæ ad determinandos posteriores effectus ut data supponuntur, atque etiam in natura talia sunt, non satis tamen nobis sint cognita; nec si essent, satis excultum Geometriæ & Physicæ studium, ut ex datis effectus hi calculo subduci possint; quemadmodum ex perspectis Astronomiæ principiis supputari & prædici possunt Eclipses: quæ propterea & ipsæ, ante Astronomiam eo perfectionis promotam, non minus ac cætera duo inter futura contingentia referri opus habebant. Sequitur hinc, uni & uno tempore videri posse contingens, quod alii

(imo

pour un autre (ou plutôt pour le même) en un autre temps, une fois les causes connues, sera nécessaire ; si bien que la contingence est surtout (10) en rapport avec notre connaissance, dans la mesure où nous ne voyons dans ce qui se présente aucune opposition à ce que cela ne soit pas ou que cela n'advienne pas, même si ici et maintenant cela est ou sera nécessairement par la force d'une cause prochaine mais ignorée de nous.

Nous disons *Fortuna prospera* , *un Bonheur* , *ein Glück* et *Fortuna adversa* , un *malheur* , *ein Unglück* lorsqu'un bien ou un mal nous arrive, non pas n'importe lequel, mais celui qui pouvait avec plus de probabilité, ou au moins avec une probabilité égale, ne pas arriver ; notre chance est bonne ou mauvaise justement dans la mesure où il était moins probable que ce bien ou ce mal nous arrivât. Ainsi celui qui trouve un trésor en creusant la terre est remarquablement chanceux, puisqu'il peut creuser mille fois sans que cela arrive même une seule fois. Voici vingt déserteurs ; un seul doit périr par pendaison en exemple aux autres ; ils jouent leur vie aux dés ; à proprement parler on n'appelle pas chanceux les dix-neuf qui ont eu le sort le moins cruel, mais on appelle très malchanceux le vingtième à qui est échu le mauvais sort. De même il n'y a pas à proclamer que ton ami est chanceux s'il est sorti sain et sauf d'un combat dans lequel un petit nombre de combattants a succombé ; à moins peut-être que tu estimes qu'il faut appeler ainsi l'excellence du bien qu'est la conservation de la vie (11) .

CHAPITRE II.

SCIENCE ET CONJECTURE. L'ART DE CONJECTURER.

LES ARGUMENTS (12) DES CONJECTURES. AXIOMES (13) GENERAUX

TOUCHANT CES POINTS.

Ce qui est certain et indubitable, nous disons que nous le *savons* ou que nous le *comprenons* ; tout le reste nous le *conjecturons* ou le *présumons* .

Conjecturer quelque chose, c'est mesurer sa probabilité : ainsi *l'art de conjecturer* ou la *stochastique* (14) se définit pour nous comme l'art de mesurer aussi exactement que possible les probabilités des choses. Le but est que dans nos jugements et dans nos actions nous puissions toujours choisir ou suivre le parti que nous aurons découvert comme meilleur, préférable, plus sûr ou mieux réfléchi. C'est en cela seulement que réside toute la sagesse du Philosophe et toute la sagacité du Politique.

(imò & eidem) alio tempore post cognitas ejus causas sit necessarium; adeo ut contingentia præcipuè etiam respiciat cognitionem nostram, in quantum nos nullam videmus repugnantiam in objecto ad non esse vel fore, etiamsi hic & nunc vi causæ proximæ sed nobis ignotæ necessario sit vel fiat.

Fortuna prospera, un Bonheur, ein Glück/ & *Fortuna adversa, un Malheur*, ein Unglück dicitur, cùm nobis bonum vel malum obtingit non quodvis, sed quod probabilius, aut saltem æquè probabiliter, poterat non obtigisse; eoque proinde melior vel pejor fortuna, quo minus probabile erat, bonum vel malum hoc eventurum. Sic insigniter fortunatus est ille, qui terram fodiendo thesaurum invenit; quoniam millies fodiendo ne semel hoc accidit. Si viginti desertores, quorum unus cæteris in exemplum suspendio necandus, alea de vita contenderint: propriè non fortunati dicuntur illi novendecim, qui benigniore sorte sunt usi, sed infortunatissimus ille vicesimus, cui sors atra cecidit. Ita nec fortunatus prædicandus amicus tuus, qui è prælio salvus evasit, in quo exigua præliantium pars occubuit; nisi fortassis ob excellentiam boni, quod in vitæ conservatione consistit, ita vocandum existimes.

CAP. II.

De Scientia & Conjectura. De Arte Conjectandi. De Argumentis Conjecturarum. Axiomata quædam generalia huc pertinentia.

Ea quæ certa sunt & indubia, dicimur *scire* vel *intelligere*: cætera omnia *conjicere* tantùm vel *opinari*.

Conjicere rem aliquam est metiri illius probabilitatem: ideoque *Ars Conjectandi* sive *Stochastice* nobis definitur ars metiendi quàm fieri potest exactissimè probabilitates rerum, eo fine, ut in judiciis & actionibus nostris semper eligere vel sequi possimus id, quod melius, satius, tutius aut consultius fuerit deprehensum; in quo solo omnis Philosophi sapientia & Politici prudentia versatur.

Les probabilités sont estimées d'après le *nombre* et aussi le *poids des arguments* qui de quelque manière prouvent ou révèlent que quelque chose est, sera ou a été. En outre, par le *poids* j'entends la force de ce qui prouve. (15)

Les *arguments* eux-mêmes peuvent être *intrinsèques* (16) , c'est-à-dire artificiels et choisis parmi les lieux topiques de la cause, de l'effet, du sujet, de l'adjoint, de l'indice ou de toute autre circonstance qui semble avoir un lien quelconque avec ce qu'il faut prouver, ou bien *extrinsèques* et hors de l'art, c'est-à-dire issus de l'autorité et du témoignage des hommes. Voici un exemple : on trouve Titius tué sur la voie publique, on accuse Maevius d'avoir commis l'homicide ; les arguments de l'accusation sont : 1. que c'est un fait connu que Maevius haïssait Titius (c'est un argument par la *cause* , car cette haine a pu le pousser à tuer) .2. qu'interrogé, Maevius a pâli et a répondu avec crainte (c'est un argument par *l'effet* , car sa pâleur et sa crainte peuvent découler de la conscience d'avoir perpétré le crime) .3. que dans la maison de Maevius on a trouvé une épée teinte de sang (c'est un *indice*)(17)) .4. que le jour où Titius a été tué sur la voie publique, Maevius est passé par là (c'est une *circonstance* de lieu et de temps) .5. enfin que *Caius* dépose que la veille de l'homicide Titius et Maevius avaient eu un différend (c'est un *témoignage*).

Mais avant d'accéder de plus près à notre objet, où on montrera comment il convient d'utiliser ces arguments des conjectures pour mesurer les probabilités, je veux exposer d'abord quelques Règles ou Axiomes généraux, que la simple raison dicte à tout homme sain d'esprit, et que les plus sages observent constamment dans la vie civile.

1. Il ne doit pas y avoir place pour la conjecture dans les cas où il est permis de parvenir à une certitude entière.

Ainsi se tromperait l'Astronome qui, sachant que deux ou trois Eclipses se produisent tous les ans, voudrait augurer de ce fait qu'une Pleine Lune quelconque sera ou non sujette à éclipses ; il peut rechercher la vérité par un calcul certain. Autre exemple : interrogé, un voleur a répondu qu'il aurait vendu à Sempronius l'objet volé ; le juge agirait stupidement s'il voulait, d'après l'expression du visage ou le ton de son interlocuteur, ou d'après d'autres circonstances du vol, faire des conjectures sur la probabilité de l'affirmation, puisqu'il a sous la main Sempronius qui pourra témoigner de toute l'affaire certainement et facilement.

2. Il ne suffit pas de peser avec soin un ou deux arguments, Probabilitates æstimantur ex *numero* simul & *pondere argumentorum*, quæ quoquo modo probant vel indicant, rem aliquam esse, fore aut fuisse. Per *Pondus* autem intelligo vim probandi.

Argumenta ipsa sunt vel *intrinseca*, vulgò artificialia, desumta ex locis topicis causæ, effectus, subjecti, adjuncti, signi aut alterius cujusvis circumstantiæ, quæ qualemcunque nexum cum re probanda habere videtur: vel *extrinseca* & inartificialia, petita ab authoritate & testimonio hominum. Exemplum esto: Titius occisus reperitur in viâ, Mævius commissi homicidii accusatur; Argumenta accusationis sunt, 1. quòd constet illum odio habuisse Titium (en argumentum à *causa*, potuit enim odium hoc ipsum impulisse ad occidendum). 2. quòd examinatus palluerit timideque responderit (en argumentum ab *effectu*; potest enim pallor & metus iste ex conscientia patrati criminis profluxisse). 3. quòd in ædibus Mævii repertus mucro sanguine tinctus (en *signum*). 4. quòd quo die occisus in via Titius, eodem illac transierit Mævius (en *circumstantiam* loci & temporis). 5. quòd denique Cajus deponat, pridie commissi homicidii Titio cum Mævio lites intercessisse (en *testimonium*).

Priusquam autem propius ad institutum accedamus, ostendendo, quomodo his argumentis conjecturarum in probabilitatibus metiendis uti conveniat, præmittere lubet generales quasdam Regulas seu Axiomata, quæ unicuique sanæ mentis homini simplex ratio dictare solet, & quæ in vitæ civilis usu à prudentioribus etiam perpetuò observantur.

1. *Conjecturis locus non esse debet in rebus, in quibus omnimodam certitudinem assequi licet.* Frustra proin esset Astronomus, qui ex eo quòd quotannis duas vel tres contingere novit Eclipses, de Plenilunio quodam augurari vellet, num sit eclipticum, necne; cùm veritatem rei certo calculo consequi possit. Ita si fur interrogatus responderit, se rem ablatam vendidisse Sempronio, ineptè ageret Judex, qui ex vultu tonoque loquentis, aut ex qualitate rei furto ablatæ aliisve furti circumstantiis de probabilitate asserti conjicere vellet, quando præstò est Sempronius, è quo rem omnem certò & facilè experiri licebit.

2. *Non sufficit expendere unum alterumve argumentum, sed conquirenda*

mais tous ceux qui peuvent venir à notre connaissance et qui semblent contribuer à prouver doivent être recherchés.

Trois navires, par exemple, quittent le port. Après quelque temps on annonce que l'un d'eux a sombré dans un naufrage. Mais lequel? Si je ne considérais que le nombre des navires, je conclurais que le malheur a pu arriver également à chacun d'eux. Mais je me souviens que l'un était rongé, en comparaison des autres, par la pourriture et la vieillesse, que ses voiles et ses antennes étaient mal équipées, que son commandant était novice et inexpérimenté. Je juge donc que c'est plutôt celui-là qui a disparu, plus problablement que les autres.

3. *Il ne faut pas seulement tenir compte de ceux qui viennent appuyer ce qui est à prouver, mais aussi de tout ce qui peut-être invoqué en sens contraire* (18), *en sorte qu'après avoir été bien mise en balance l'une des deux alternatives l'emporte manifestement.*

On s'enquiert d'un ami depuis très longtemps absent de sa patrie : peut-on le considérer comme mort ? Pour l'affirmative militent les arguments suivants : malgré tout le soin qu'on y a mis, de vingt ans entiers, on n'a pas eu de nouvelles de lui ; la vie des voyageurs est exposée à beaucoup de dangers dont sont exempts ceux qui restent chez eux ; peut-être donc a-t-il fini noyé, peut-être tué sur la voie publique, peut-être est-il décédé d'une maladie ou d'un accident dans un endroit où il n'était connu de personne ; s'il était vivant, il devrait déjà avoir un âge que peu de gens atteignent, même sans quitter leur domicile ; il aurait écrit même s'il se trouvait aux frontières les plus lointaines de l'Inde, car il a su qu'il attend un héritage dans son pays ; et ainsi de suite. Cependant il ne faut pas se rendre à ces arguments, mais il faut aussi leur opposer ce qui suit, qui soutient la négative. On sait bien que l'homme était insouciant, qu'il prenait avec peine la plume, qu'il négligeait ses amis; il a peut-être été emmené en captivité par les Barbares, si bien qu'il ne peut pas écrire ; il a peut-être même écrit quelquefois d'Inde, mais ses lettres se sont perdues soit par la négligence des porteurs, soit dans un naufrage : il est bien connu enfin que beaucoup de gens ont été absents plus longtemps, et que cependant ils sont revenus sains et saufs à la fin.

4. *Pour juger des généralités, suffisent des arguments éloignés et d'ordre général ; mais pour former des conjectures sur les cas particuliers, il faut leur en adjoindre de plus proches et précis, si seulement cela se peut* (19) .

Ainsi lorsqu'on se demande dans l'abstrait combien il est plus probable qu'un jeune homme de vingt ans survive à un vieillard de soixante, plutôt que le contraire, en dehors de la différence d'âge il n'y a rien à prendre en considération, mais lorsque le propos porte spécialement sur les individus Pierre, le jeune homme, et Paul, le vieillard, il faut en outre faire attention à la complexion de chacun et au soin avec lequel l'un et l'autre *quirenda sunt omnia, quæ in cognitionem nostram venire possunt, atq; ullo modo ad probationem rei facere videntur.* Tres naves ex. gr. solvunt è portu, post aliquod tempus nunciatur, unam illarum naufragio periisse; conjicitur quænam? si solum numerum navium spectarem, infortunium singulis æquè accidere potuisse colligerem; sed quia memini, unam earum præ cæteris carie & vetustate fuisse exesam, velis & antennis malè armatam, nauclero quoque novitio & inexperto instructam, hanc utique probabilius quàm cæteras interiisse judico.

3. *Nec tantùm illa sunt attendenda, quæ rei probandæ conducunt; sed & omnia illa, quæ in contrarium adduci possunt, ut trutinatis probè utrisq; constet utra præponderent.* De amico diutissimè à patria absente quæritur, an pro mortuo declarari possit? Pro affirmativa militant hæc argumenta: Quòd omni licet adhibita cura toto vicennio nihil de illo innotuit: quòd peregrinantes plurimis vitæ periculis expositi sunt, quibus exempti hi qui domi manent; fortè igitur in undis finiit vitam, fortè occisus in via, fortè in prælio, fortè morbo aut casu aliquo obiit in loco, ubi nemini fuit notus: quòd si in vivis esset, ejus jam ætatis esse deberet, quam pauci vel domi attingunt: quòd scripturus fuisset, etiamsi in extremis Indiæ oris versaretur, quia scivit se hæreditatem expectare domi: & quæ sunt alia. Quibus tamen argumentis non est acquiescendum, sed opponenda quoque sequentia, quæ negativam tuentur. Constat, hominem fuisse socordem, ægrè arripuisse calamum, amicos contempsisse; fortè à Barbaris captivus ductus, ut scribere non potuerit; fortè etiam scripsit ex India aliquoties, sed literæ vel incuria latorum vel naufragio periêre; constat denique, multos diutius emansisse, & tamen tandem rediisse incolumes.

4. *Ad judicandum de universalibus sufficiunt argumenta remota & universalia; sed ad conjecturas formandas de individuis, propiora quoq; & specialia adjungenda sunt, si modo haberi possunt.* Ita cùm quæritur in abstracto, quantò sit probabilius, juvenem viginti annorum seni sexagenario fore superstitem, quàm verò hunc illi, præter discrimen ætatis & annorum nihil est, quod considerare possis; sed ubi specialiter sermo est de individuis Petri juvenis & Pauli senis, attendere insuper oportet ad specialem eorum complexionem & studium, quo uterque vale-

veille à sa santé ; car si Pierre est maladif, s'il abandonne à ce qui affecte son corps, s'il vit sans retenue, il peut arriver que Paul, plus avancé en âge, ait de très vonnes raisons de concevoir l'espoir d'une plus longue vie. (20)

5. *Dans les affaires incertaines ou douteuses il nous faut suspendre nos actions, en attendant que brille une plus grande lumière; mais si l'occasion d'agir ne souffre aucun retard, entre deux solutions il nous faut toujours choisir celle qui semble mieux adaptée, plus sûre, mieux réfléchie et plus probable* (21), *même si ni l'une ni l'autre ne mérite en fait ces adjectifs.*

C'est ainsi que dans un incendie qui se déclare, auquel on ne peut échapper qu'en se jetant soit du sommet du toit, soit d'un étage inférieur, il sera préférable de choisir la deuxième solution, parce qu'elle est la plus sûre ; et pourtant ni l'une ni l'autre n'est sûre isolément, ou ne peut-être mise en oeuvre sans danger de blessure.

6. *Ce qui peut être avantageux dans un cas et ne peut jamais nuire est préférable à ce qui en aucun cas n'est avantageux ou nuisible ;*
ce que nous disons dans notre langue nationale : Hilfft es nicht/so schadt es nicht (22). Cela découle du paragraphe précédent, car ce qui peut être avantageux est, toutes choses égales par ailleurs, préférable, plus sûr, plus souhaitable que ce qui ne peut être avantageux.

7. *La valeur des actions humaines ne doit pas être fixée d'après le résultat,*
puisque les actions les plus sottes jouissent parfois d'un excellent succès et que les plus sages au contraire aboutissent au pire. Le Poète s'en est inspiré : *puisse ne pas réussir, je le souhaite, quiconque estime que le succès fait la valeur des actes.* Ainsi, si quelqu'un entreprend d'amener trois six avec trois dés du premier coup, même s'il y arrive, on jugera qu'il a agi sottement. Il faut blâmer au contraire les jugements erronés du commun des hommes aux yeux de qui chacun est d'autant plus éminent qu'il est plus chanceux (23) ; bien plus, on appelle la plupart du temps vertu une scélératesse qui a bien tourné. A ce sujet Ovvenus (24) écrit avec élégance :

Epigrammes, livre unique, § 216.

Parce qu'un projet mal conçu obtint un heureux succès, Ancus
Est réputé sage, lui qui était seulement stupide ;
Si ce qui avait été sagement prévu tournait mal,
Caton en personne serait stupide au jugement du peuple.

8. *Dans nos jugements il faut prendre garde de ne pas attribuer aux choses plus que ce qui leur revient, et de ne pas tenir ce qui est plus probable que le reste pour absolument certain ou de ne pas imposer aux autres cette certitude.*

Il faut en effet que le crédit que nous attribuons aux choses valetudinem ſuam curat; nam ſi Petrus ſit valetudinarius, ſi affectibus indulgeat, ſi intemperanter vivat, fieri poteſt, ut Paulus, etsi ætate provectior, optima tamen ratione longioris ſpem vitæ concipere valeat.

5. *In rebus incertis & dubiis actiones noſtræ ſuſpendendæ ſunt, donec major lux affulſerit; ſed ſi occaſio agendi nullam patiatur moram, inter duo ſemper eligendum id, quod convenientius, tutius, conſultius aut probabilius videtur, etſi neutrum in poſitivo tale ſit.* Sic in oborto incendio, è quo aliter elabi non poſſis, niſi vel ex ſummo tecto vel ex inferiore quadam contignatione te præcipitem des, præſtabit poſterius eligere, quia tutius; etsi neutrum ſimpliciter tutum ſit, aut ſine læſionis periculo fieri poſſit.

6. *Quod aliquo caſu prodeſſe, nullo nocere poteſt, præferendum eſt illi, quod nullo vel prodeſt vel nocet;* quorſum collimat illud, quod vernaculè dicimus: Hilfft es nicht / ſo ſchadt es nicht. Fluit ex præcedenti; nam quod prodeſſe poteſt, cæteris paribus ſatius, tutius, optabilius eſt illo, quod non poteſt.

7. *De Actionum humanarum pretio non ſtatuendum ex eventu;* cùm ſtolidiſſimæ actiones quandoque optimo, prudentiſſimæ contra peſſimo ſucceſſu fruantur; hinc Poëta: *Careat ſucceſſibus, opto, quisquis ab eventu facta notanda putat.* Ita ſi quis tribus teſſeris prima vice tres ſenarios jacere ſuſcipit, etiamsi fortaſſe vincat, ſtolidè tamen egiſſe cenſetur. Notandum contra perverſa vulgi judicia, cui præſtantior habetur, quò quiſque eſt fortunatior; imò cui proſperum ac felix ſcelus plerunque virtus vocatur, de quo rurſum eleganter Ovvenus:

Epigr. lib. ſing. §. 216.

Quòd malè conſultum cecidit feliciter, Ancus
    Arguitur ſapiens, qui modo ſtultus erat;
Quod prudenter erat proviſum, ſi malè vortat,
    Ipſe Cato populo judice ſtultus erit.

8. *In judiciis noſtris cavendum, ne rebus plus tribuamus quàm par eſt, neque quod probabilius eſt cæteris, pro abſolutè certo habeamus ipſi aut obtrudamus aliis.* Oportet enim, ut fides, quam rebus tribuimus, proportionata

soit proportionné au degré de certitude que chacune posssède ; il faut aussi que ce crédit soit plus petit dans le rapport où est plus petite la probabilité de la chose elle-même ; ce que nous énonçons dans notre langue nationale : Man muss ein jedes in seinem Werth und Unwerth beruhen lassen (25).

9. *Cependant, parce qu'il est rarement permis d'atteindre une certitude entière, la nécessité et l'usage veulent que ce qui est seulement moralement certain soit tenu pour absolument certain* (26).

Il serait donc utile que l'autorité du Magistrat établît pour la certitude morale des limites déterminées ; par exemple que fût résolue la question de savoir si $\frac{99}{100}$ de certitude suffisent pour donner la certitude, ou s'il en est exigé $\frac{999}{1000}$. Ainsi le Juge ne pourrait rien laisser à la partialité, mais il aurait une règle qu'il observerait constamment en prononçant ses sentences.

Chacun, instruit par l'usage quotidien, pourra se forger par lui-même d'autres Axiomes de ce genre ; quant à nous, l'occasion n'en étant pas offerte, nous ne pouvons nous souvenir de tous qu'avec peine.

CHAPITRE III.

LES DIVERSES ESPECES D'ARGUMENTS, ET COMMENT ESTIMER LEUR POIDS POUR SUPPUTER LES PROBABILITES.

Celui qui examine les divers arguments sur lesquels prennent naissance l'opinion ou la conjecture remarquera une triple différence: en effet certains d'entre eux *existent nécessairement et ne révèlent pas nécessairement* ; d'autres *n'existent pas nécessairement et révèlent nécessairement* ; d'autres enfin *n'existent et en même temps ne révèlent pas nécessairement* (27). Je montre la différence par des exemples. Mon frère ne m'a pas envoyé de lettre depuis longtemps ; je ne sais s'il faut en accuser la paresse ou son manque de loisir ; je crains même qu'il n'ait achevé sa vie. Il y a alors trois arguments de l'interruption de sa correspondance : *la paresse*, *la mort* et *les affaires*. Le premier existe nécessairement, (nécessité hypothétique, parce que je sais et je conviens qu'il est paresseux), mais ne révèle pas nécessairement : cete paresse en effet aurait pu ne pas l'empêcher d'écrire. Le second n'existe pas nécessairement (car mon frère peut encore être au nombre des vivants), mais révèle nécessairement, puisqu'un mort tionata ſit gradui certitudinis, quam unaquæque res obtinet atque adeo in eadem ratione minor, qua minor eſt ipſa rei probabilitas; quod vernaculè ſic enunciamus; Man muß ein jedes in ſeinem Werth und Unwerth beruhen laſſen.

9. *Quia tamen rarò admodum omnimodam certitudinem aſſequi licet, neceſſitas & uſus volunt, ut quod moraliter tantùm certum eſt, pro abſolutè certo habeatur.* Utile proin eſſet ſi Magiſtratus auctoritate morali certitudini determinati limites conſtituerentur; putà si definiretur, num ad illam efficiendam ſufficiant $\frac{99}{100}$, an requirantur $\frac{999}{1000}$ certitudinis; ne partium ſtudio aliquid dare poſſit Judex, ſed cynoſuram habeat, quam in ferenda ſententia conſtanter obſervet.

Plura ejusmodi Axiomata alia unusquiſque quotidiano rerum uſu edoctus proprio marte ſibi cudere poterit, quorum omnium nos extra datam occaſionem difficulter meminiſſe poſſemus.

Caput III.

De variis argumentorum generibus, & quomodo eorum pondera æſtimentur ad ſupputandas rerum probabilitates.

Qui varia argumenta examinat, quibus opinio vel conjectura generatur, triplex in iis diſcrimen animadvertet: nam quædam eorum *neceſſariò exiſtunt & contingenter indicant*: alia *contingenter exiſtunt & neceſſariò indicant*: alia denique *contingenter exiſtunt ſimul & indicant*. Diſcrimen declaro exemplis: Frater meus diu nihil ad me literarum dedit; dubito, an ejus ſegnities aut negotia in culpa ſint; vereor etiam ne planè fato conceſſerit. Hic intermiſſæ ſcriptionis argumenta ſunt tria: *Segnities*, *Mors* & *Negotia*; quorum primum exiſtit neceſſariò, (neceſſitate hypothetica, quia fratrem ſcio ponoq; ſegnem eſſe) ſed indicat contingenter; potuiſſet enim ſegnities hæc ipſum non cohibere à ſcribendo: ſecundum contingenter exiſtit, (poteſt enim frater adhuc in vivis eſſe) at neceſſariò indicat, cùm mortuus

Ee ſcribere

ne peut écrire. Le troisième n'existe pas nécessairement d'une part, et d'autre part ne révèle pas nécessairement ; car il peut être pris ou non par les affaires, et s'il l'est, cela peut ne pas être au point de le retenir d'écrire (28). Autre exemple : Je suppose un joueur de dés à qui, d'après les conventions du jeu, une somme serait due s'il faisait sept points avec deux dés, et je veux conjecturer quel espoir il a de l'emporter dans de telles conditions. L'argument de la victoire est alors l'obtention de sept points, qui la révèle nécessairement (évidemment par la nécessité du principe convenu entre les joueurs), mais qui n'existe pas nécessairement, puisque, outre l'obtention de sept points, les autres nombres de points peuvent aussi sortir.

Outre cette distinction entre les arguments, il est aussi possible d'observer entre eux une autre différence, puisque certains sont *purs* , les autres *mixtes* . J'appelle *purs* ceux qui dans certains cas prouvent quelque chose, de telle manière qu'ils ne prouvent en fait rien dans les autres cas et *mixtes* ceux qui prouvent une chose dans quelques cas, mais qui dans tous les autres cas prouvent le contraire. Voici un exemple : si dans une foule en effervescence quelqu'un avait été transpercé par une épée, et s'il était établi par le témoignage d'hommes dignes de foi qui regardaient de loin que l'auteur du crime avait un manteau noir, si l'on trouvait que parmi les gens en effervescence Gracchus ainsi que trois autres étaient revêtus d'une tunique de cette couleur, cette tunique serait un argument pour dire que le meurtre a été commis par Gracchus, mais un argument mixte : dans un cas il prouve sa culpabilité, et dans trois cas il prouve son innocence, dans la mesure où il est indéniable que le meurtre a été perpétré par lui ou l'un des trois autres ; en effet il n'a pu être perpétré par ces derniers sans que par là même soit établie l'innocence de Gracchus. Mais si, au cours de l'enquête qui a suivi, Gracchus a pâli, cette pâleur du visage est un argument pur, car elle prouve la faute de Gracchus, si elle provenait d'une conscience troublée ; mais inversement elle ne prouve pas son innocence, si elle avait une autre origine ; il peut en effet arriver que Gracchus pâlisse pour une autre cause, et qu'il soit cependant lui-même l'auteur du meurtre.

De ce qui a été dit jusqu'à présent, il est clair que la force de ce qui prouve, qui donne son efficacité à l'argument, dépend d'une multitude de cas où il peut exister ou ne pas exister, révéler ou ne pas révéler, ou même révéler le contraire ; et il est maintenant clair que le degré de certitude, ou probabilité, qu'engendre cet argument, peut être tiré de ces cas grâce à la Doctrine de la première Partie (29), tout comme on cherche d'habitude les sorts des joueurs dans les jeux de hasard. Pour le montrer, posons que le nombre des cas, dans lesquels un argument scribere non possit: tertium & contingenter existit & contingenter indicat; posset enim ille habere & non habere negotia, & si quæ habet, possunt tanta non esse, quæ ipsum de scriptione detineant. Aliud exemplum: Pono aleatorem, cui ex ludi præscripto præmium debeatur, si tesseris duabus septem puncta jecerit, voloque conjicere, quam talis vincendi spem habeat. Hic argumentum victoriæ est jactus septenarii, qui illam indicat necessariò, (necessitate nimirum pacti inter collusores initi) sed tantùm existit contingenter; cùm præter septenarium & alii punctorum numeri cadere possint.

Præter hanc argumentorum distinctionem aliud quoque in iis discrimen observare licet, dum quædam eorum sunt *pura*, alia *mixta*. *Pura* voco, quæ in quibusdam casibus ita rem probant, ut in aliis nihil positivè probent: *Mixta*, quæ ita rem probant in casibus nonnullis, ut in cæteris probent contrarium rei. Exemplum esto: Si in turba tumultuantium quidam gladio fuerit confossus, & testimonio hominum fide dignorum eminus adspectantium constet, huic nigram fuisse chlamydem qui facinus commisit, reperiaturque inter tumultuantes Gracchus cum tribus aliis ejus coloris tunicâ indutus; erit hæc tunica argumentum aliquod commissæ à Graccho cædis, sed mixtum; quoniam uno casu ejus culpam, tribus casibus ejus innocentiam probat, prout videl. vel ab ipso vel ab uno reliquorum trium cædes patrata fuerit; nec enim ab istis patrari potuit, quin eo ipso Gracchus ponatur innocens. Quòd si verò in subsecuto examine Gracchus palluerit, pallor hic faciei est argumentum purum: probat enim Gracchi culpam, si à læsa conscientia proficiscatur; sed non vicissim probat ejus innocentiam, si aliunde proveniat; potest enim fieri, ut alia de causa pallescat Gracchus, & tamen ipse sit auctor cædis.

Ex iis, quæ hactenus dicta sunt, perspicuum est, vim probandi, qua pollet quodlibet argumentum, pendere à multitudine casuum, quibus illud existere vel non existere, indicare vel non indicare, aut etiam contrarium rei indicare potest; adeoque gradum certitudinis seu probabilitatem, quam generat hoc argumentum, ex casibus istis per Doctrinam primæ Partis non aliter elici posse, quàm sortes aleatorum in ludis aleæ investigari solent. Ad quod ostendendum sumamus numerum casuum, quibus contingere potest ut argumentum aliquod quelconque peut exister, est b ; le nombre de ceux dans lesquels il peut arriver qu'il n'existe pas, est c ; le nombre des deux $a = b + c$ (30) ; de même le nombre des cas dans lesquels il peut arriver qu'il révèle, β ; qu'il ne révèle pas, ou qu'il révèle le contraire, ; le nombre des deux $\alpha = \beta + \gamma$. Or je pose que tous les cas sont également possibles, ou qu'ils peuvent survenir avec une égale facilité (31) ; autrement il faut faire intervenir une mesure commune, et pour tous cas plus facile il faut compter autant d'autres cas que le nombre de fois où ce cas arrive plus facilement que tous les autres ; par exemple, pour un cas trois fois plus facile, je compte trois cas, qui peuvent arriver avec une facilité égale à celle de tous les autres.

I. C'est pourquoi prenons d'abord l'argument qui *n'existe pas nécessairement et qui révèle nécessairement* : il y aura, d'après ce qui vient d'être posé, b cas dans lesquels il peut exister et en outre révéler une chose (ou 1) ; et c cas dans lesquels il peut ne pas exister et en outre ne rien révéler ; ce qui d'après le Coroll. I. Prop. III de la première Part. vaut $\dfrac{b.1 + c.0}{a} = \dfrac{b}{a}$

en sorte qu'un tel argument prouve $\dfrac{b}{a}$ de la chose ou de la certitude de la chose.

2. Prenons ensuite un argument *existant nécessairement et ne révèlant pas nécessairement* : il y aura par hypothèse β cas dans lesquels il peut arriver qu'il révèle la chose, et γ cas qu'il ne la révèle pas, ou qu'il révèle le contraire ; d'où il résulte $\dfrac{\beta.1 + \gamma.0}{\alpha} = \dfrac{\beta}{\alpha}$

un argument de ce genre prouve donc $\dfrac{\beta}{\alpha}$ de la certitude, et en outre, s'il était mixte (ce qui se montre de la même façon) $\dfrac{\gamma.1 + \beta.0}{\alpha} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

de la certitude du contraire.

3. Si un argument *n'existe pas nécessairement et ne révèle pas nécessairement*, je pose aussitôt qu'il existe, cas dans lequel d'après ce qu'on vient de montrer, on estime qu'il prouve $\dfrac{\beta}{\alpha}$ de la chose, et en outre, s'il est mixte, $\dfrac{\gamma}{\alpha}$ du contraire : en conséquence, comme il y a b cas dans lesquels il peut exister, et c cas dans lesquels il peut ne pas exister et en outre ne rien prouver, cet argument vaudra pour prouver la chose $\dfrac{b.\frac{\beta}{\alpha} + c.0}{a} = \dfrac{b\beta}{a\alpha}$

et, s'il est mixte, pour prouver le contraire $\dfrac{b.\frac{\gamma}{\alpha} + c.0}{a} = \dfrac{b\gamma}{a\alpha}$.

(32)

liquod existat, esse b; eorum, quibus fieri potest ut non existat, c; amborum $a \infty b + c$; item numerum casuum, quibus contingere potest ut indicet, β; ut non indicet, aut contrarium rei indicet, γ; amborum $\alpha \infty \beta + \gamma$. Pono autem, omnes casus æquè possibiles esse, seu pari facilitate evenire posse; alias enim moderatio est adhibenda, & pro quovis casu faciliori tot alii casus numerandi sunt, quoties is cæteris facilius evenit: ex. gr. pro casu triplo faciliori numero tres casus, qui pari cum cæteris facilitate contingere possint.

1. Itaque sit primò argumentum *contingenter existens & necessariò indicans*: erunt ex modo positis b casus, quibus existere adeoque & indicare rem (seu 1) potest; & c casus, quibus potest non existere, adeoque nec quicquam indicare; id quod per Coroll. 1. Prop. III. primæ Part. valet $\frac{b \cdot 1 + c \cdot 0}{a} \infty \frac{b}{a}$, ita ut tale argumentum probet $\frac{b}{a}$ rei seu certitudinis rei.

2. Sit deinde argumentum *necessariò existens & contingenter indicans*: erunt ex hyp. β casus, quibus fieri potest ut indicet rem, & γ casus ut non indicet, seu ut contrarium indicet; quod vim argumenti ad rem probandam nunc efficit $\frac{\beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0}{\alpha} \infty \frac{\beta}{\alpha}$: probat ergò hujusmodi argumentum $\frac{\beta}{\alpha}$ certitudinis rei, atque insuper si sit mixtum (quod eodem modo patet) $\frac{\gamma \cdot 1 + \beta \cdot 0}{\alpha} \infty \frac{\gamma}{\alpha}$ certitudinis contrarii.

3. Si quod argumentum *contingenter existit & contingenter indicat*, pono statim existere, quo casu per modo ostensa probare censetur $\frac{\beta}{\alpha}$ rei, & insuper si sit mixtum, $\frac{\gamma}{\alpha}$ contrarii: unde cùm sint b casus, quibus existere; & c casus, quibus non existere, adeoque & nil probare possit; valebit hoc argumentum ad rem probandam $\frac{b \cdot \beta : \alpha + c \cdot 0}{a} \infty \frac{b\beta}{a\alpha}$: &, si sit mixtum, ad probandum contrarium $\frac{b \cdot \gamma : \alpha + c \cdot 0}{a} \infty \frac{b\gamma}{a\alpha}$.

4. Porrò

4. Allons plus loin. Si plus d'un argument concourt pour prouver la même chose, et qu'ils soient désignés par :

Nombre de cas, arguments	*pr.*	*sec.*	*troi.*	*quatr.*	*cinq.*	*etc*
Total	*a*	*d*	*g*	*p*	*s*	*etc*
Probants	*b*	*e*	*h*	*q*	*t*	*etc*
Non-probants .... *ou prouvant le contraire*	c	*f*	*i*	*r*	*u*	*etc*

on estime ainsi la force de ce qui prouve du concours de tous les arguments. Prenons d'abord tous les arguments *purs* . Comme nous l'avons vu, le poids du premier considéré séparément, sera $\frac{b}{a}$ (en appelant ainsi $\frac{\beta}{\alpha}$, s'il ne révèle pas nécessairement ; ou $\frac{b\beta}{a\alpha}$ si en même temps il n'existe pas nécessairement). Ajoutons maintenant un autre argument, qui prouve la chose dans e ou d-f cas, soit 1 , et qui ne prouve rien dans f cas, laissant efficace en outre le seul poids du premier argument, dont on a montré qu'il est $\frac{a-c}{a}$;

le poids des deux arguments réunis vaudra $\frac{(d-f)1+f.\frac{a-c}{a}}{a} = \frac{ad-cf}{ad} = 1-\frac{cf}{ad}$

de la chose. Joignons-en un troisième ; il y aura h ou g-i cas qui prouvent la chose, et i cas dans lesquels l'argument est sans valeur, et seuls les deux premiers arguments gardent leur force de preuve $\frac{ad-cf}{ad}$;

d'où on évalue la force de tous trois à : $\frac{(g-i).1+i.\frac{ad-cf}{ad}}{g} = \frac{adg-cfi}{adg} = 1-\frac{cfi}{adg}$.

Et ainsi de suite, si l'on dispose d'un plus grand nombre d'arguments. Cela rend évident que tous pris ensemble conduisent à une probabilité qui s'écarte de la certitude absolue, ou de l'unité, d'une partie de l'unité, partie constituée par la division du produit des cas non probants par le produit de tous les cas pour l'ensemble des arguments (33) .

5. Prenons ensuite tous les arguments *mixtes* : Puisque le nombre des cas probants du premier argument est b, du second e, du troisième h, etc., et puisque le nombre des cas prouvant le contraire est c, f, i, etc., la probabilité de la chose est à la probabilité du contraire, par la force du seul premier argument, comme b à c ; et par la force du seul deuxième argument comme e à f ; et par la force du seul troisième, comme h à i, etc. ; il est par conséquent assez clair (34) que la force totale de ce qui prouve, résultant du concours de tous les arguments, se compose des forces de tous les arguments

4. Porrò si plura concurrant argumenta ad ejusdem rei probationem, vocenturque

numeri casuum, argumenti	pr.	sec.	tert.	quart.	quint.	&c.
omnium . . .	a	d	g	p	s	&c.
probantium . . .	b	e	h	q	t	&c.
non-probantium aut probant. contr.	c	f	i	r	u	&c.

vis probandi ex omnium argumentorum concursu resultans sic æstimatur. Sint autem primò omnia argumenta *pura*; erit primi seorsim spectati pondus $\frac{b}{a} \infty \frac{a-c}{a}$ (vocando sic $\frac{\beta}{\alpha}$, si contingenter indicet; aut $\frac{b\beta}{a\alpha}$, si simul contingenter existat) ut vidimus. Accedat nunc alterum argumentum, quod e vel $d-f$ casibus probat rem seu 1, & f casibus nil probat, solumque adeò pondus primi argumenti, quod ostensum est esse $\frac{a-c}{a}$, efficax relinquit: valebit pondus ex utroq; argumento conflatum $\frac{\overline{d-f}.1+f.\overline{a-c}:a}{d} \infty \frac{ad-cf}{ad} \infty 1-\frac{cf}{ad}$ rei. Jungatur & tertium; erunt h seu $g-i$ casus, qui probant rem; & i casus, quibus nullum est argumentum, solaque duo priora vim suam probandi $\frac{ad-cf}{ad}$ retinent: unde vis omnium trium censetur $\frac{\overline{g-i}.1+i.\overline{ad-cf}:ad}{g} \infty \frac{adg-cfi}{adg} \infty 1-\frac{cfi}{adg}$. Et ita deinceps, si plura præstò sint argumenta. E quibus patet, quòd omnia junctim sumta probabilitatem inducunt, quæ ab absoluta rei certitudine seu unitate deficiat parte unitatis, orta ex divisione producti casuum non probantium per productum casuum omnium in universis argumentis.

5. Sint deinde omnia argumenta *mixta*: Quoniam numerus casuum probantium primi argumenti est b, secundi , tertii h, &c. & probantium contrarium c, f, i, &c. probabilitas rei ad probabilitatem contrarii, vi solius primi argumenti, se habet ut b ad c; & vi solius secundi, ut e ad f; & vi solius tertii, ut h ad i, &c unde fat evidens est, quòd vis probandi t talis ex omnium argumentorum concursu resultans componatur ex viribus omnium argumentorum parti-

particuliers, c'est-à-dire que la probabilité de la chose est à la probabilité du contraire dans le rapport beh etc. à cfi etc. si bien que la probabilité absolue de la chose est $\frac{beh}{beh + cfi}$, et la probabilité absolue du contraire $\frac{cfi}{beh + cfi}$.

6. Prenons à nouveau certains arguments *purs* (par exemple les trois premiers) et certains *mixtes* (par exemple les deux qui restent). Je considère d'abord les purs seuls : d'après le §4, ils prouvent $\frac{adg - cfi}{adg}$

de la certitude de la chose, par rapport à l'unité l'écart étant de $\frac{cfi}{adg}$

il y a donc dans notre exemple adg-cfi cas dans lesquels ces trois arguments réunis prouvent la chose ou 1; et cfi cas dans lesquels ils ne prouvent rien, et cèdent en conséquence la place, pour prouver, aux seuls arguments mixtes. Or, d'après le précédent §5, ces deux arguments prouvent $\frac{qt}{qt + ru}$ de la chose, et $\frac{ru}{qt + ru}$ du contraire. C'est pourquoi la probabilité de la chose résultant de tous les arguments est :

$$\frac{adg - cfi).1 + cfi.\frac{qt}{qt+ru}}{adg} = \frac{adgqt + adgru - cfiru}{adgqt + adgru} = 1 - \frac{cfiru}{adg(qt+ru)} \quad (35)$$

Cette probabilité s'écarte de la certitude entière, ou de l'unité, du produit de la partie $\frac{cfi}{adg}$ (qui est également l'écart entre cette même certitude et la probabilité de la chose résultant, d'après le §4, des seuls arguments purs) par $\frac{ru}{qt + ru}$, probabilité absolue du contraire, tirée des arguments mixtes selon le précédent §5.

7. Si outre les arguments qui conduisent à prouver la chose, s'offrent d'autres arguments purs sur lesquels le contraire s'appuie, il faut peser un par un les arguments de chacune des deux espèces d'après les règles précédentes, de sorte que par là puisse se manifester le rapport qui s'établit entre la probabilité de la chose et la probabilité du contraire. Il faut noter ici que, si les arguments qu'on apporte dans un sens et dans l'autre sont assez forts, il peut arriver que l'absolue probabilité de chacune des deux parties (36) dépasse notablement la moitié de la certitude, c'est-à-dire que l'un et l'autre des contraires deviennent probables, même si à parler relativement, l'un se trouve moins probable que l'autre. Ainsi il peut arriver que quelque chose ait $\frac{2}{3}$ de certitude, tandis que son contraire en possède $\frac{3}{4}$; par cette raison chacun des deux contraires sera probable, et cependant le premier sera moins probable que son contraire, et cela dans le rapport de $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4}$, soit de 8 à 9 (37).

Maintenant, je ne puis dissimuler que dans l'application particulière particularium, i. e. quòd probabilitas rei ad probabilitatem contrarii se habeat in ratione bch &c. ad cfi &c. adeò ut probabilitas absoluta rei sit $\frac{bch}{bch + cfi}$, & probabilitas absoluta contrarii $\frac{cfi}{bch + cfi}$.

6. Sint rursus quædam argumenta *pura* (velut tria priora) & quædam *mixta* (ut duo reliqua). Considero primò sola pura, quæ per §. 4. probant $\frac{adg - cfi}{adg}$ certitudinis rei, defectu ad unitatem existente $\frac{cfi}{adg}$; sunt ergò velut $adg - cfi$ casus, quibus tria hæc argumenta junctim sumta probant rem seu 1; & cfi casus, quibus nil probant, solisque proin argumentis mixtis locum probandi concedunt: probant autem hæc duo per præced. §. 5, $\frac{qt}{qt + ru}$ rei, & $\frac{ru}{qt + ru}$ contrarii. Quare probabilitas rei ex omnibus argumentis resultans est $\frac{\overline{adg - cfi}.1 + cfi.qt : \overline{qt + ru}}{adg} \infty \frac{adgqt + adgru - cfiru}{adgqt + adgru} \infty 1 - \frac{cfiru}{adg.\overline{qt + ru}}$, quæ ab omnimoda certitudine ceu unitate deficit producto partis $\frac{cfi}{adg}$ (qua ab eadem deficit probabilitas rei per §. 4. ex solis argumentis puris resultans) per $\frac{ru}{qt + ru}$ probabilitatem absolutam contrarii per præced. §. 5. ex argumentis mixtis elicitam.

7. Quòd si præter argumenta quæ rei probandæ conducunt, alia se offerunt argumenta pura, quibus contrarium suadetur, utriusque generis argumenta per præced. regulas seorsim ponderanda sunt, ut inde constare possit ratio, quæ inter probabilitatem rei & probabilitatem contrarii intercedit. Ubi notandum, si argumenta, quæ in utramque partem afferuntur sunt satis fortia, fieri posse, ut absoluta probabilitas utriusque partis semissem certitudinis notabiliter superet, h. e. ut utrumque contrariorum reddatur probabile, etsi relativè loquendo unum sit minus probabile altero; sic fieri potest, ut quidpiam habeat $\frac{2}{3}$ certitudinis, cum ejus contrarium possidet $\frac{3}{4}$; quo pacto utrumque contrariorum erit probabile, & tamen prius minus probabile suo contrario, idque in ratione $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, sive 8 ad 9.

Dissimulare hic non possum, quòd in speciali applicatione ha-de ces règles je prévois beaucoup d'obstacles qui peuvent être cause qu'on se trompe souvent désagréablement si l'on ne procède pas avec précaution dans la distinction des arguments. Parfois en effet peuvent sembler différents des arguments qui en réalité ne constituent qu'un seul et même argument ; ou inversement ceux qui sont différents paraissent n'en être qu'un ; parfois on porte au compte d'un argument des faits qui détruisent complètement l'argument du contraire ; etc. Pour illustrer cette idée je donne seulement un exemple ou deux. Je suppose que dans l'exemple de Gracchus cité plus haut, ces deux hommes dignes de foi, qui avaient vu la foule en effervescence, avaient vu à l'Auteur du meurtre par dessus le marché, une chevelure rousse ; que Gracchus se signale par de tels cheveux ainsi que deux autres, mais que ni l'un ni l'autre n'était vêtu d'une toge noire. Alors, si de ces indices, à savoir qu'outre Gracchus ils étaient trois vêtus de noir, et qu'outre le même Gracchus deux autres se faisaient remarquer par des cheveux roux, on voulait comparer la probabilité de la culpabilité à la probabilité de l'innocence en la personne de Gracchus selon le §5, et qu'on trouve qu'elles sont dans le rapport composite d'un sous-triple et d'un sous-double, c'est-à-dire dans un rapport sous-sextuple, et si l'on concluait donc que Gracchus est beaucoup plus vraisemblablement innocent que coupable du meurtre, on conclurait en tout cas stupidement. Dans ce cas particulier nous ne sommes pas en présence de deux arguments, mais d'un seul et même argument tiré de deux particularités simultanées de couleur pour le vêtement et la chevelure ; comme ces deux particularités se rencontrent conjointement en la seule personne de Gracchus, elles justifient avec certitude que nul autre que lui n'a pu être l'auteur du meurtre (38). Voici un autre exemple : au sujet d'un Contrat écrit surgit un doute pour savoir si le jour mentionné sur le document n'a pas été frauduleusement antidaté. Un argument en faveur de la négative peut être celui-ci, que le document a été signé de la main du Notaire, c'est-à-dire d'une personne publique et assermentée, dont il n'est pas vraissemblable de penser qu'elle ait commis quelque fraude, puisqu'elle n'aurait pu le faire sans mettre en danger son honneur et sa fortune, car même sur 50 on en trouverait à peine un pour oser commettre cette infamie. Mais les arguments en faveur de l' affirmative peuvent être que la réputation de ce Notaire n'est pas bonne ; que de cette fraude pouvait attendre un grand profit ; et surtout qu'il atteste des faits qui n'on aucune probabilité, par exemple s'il avait écrit que quelqu'un avait placé auprès d'un autre à titre de prêt 10 000 pièces d'or à un moment où de l'avis de tous il pouvait pour tout bien en avoir à peine cent (39) Si l'on considérait alors séparément l'argument tiré de la profession de celui qui a apposé sa signature on pourrait penser rum regularum multa occursura prævideo, quæ in causa esse queunt, ut turpiter sæpe quis hallucinetur, nisi in discernendis argumentis cautè procedat: quandoque enim distincta videri possunt argumenta, quæ reapse unum idemque argumentum constituunt; aut vice versa unum videntur, quæ distincta sunt; nonnunquam ponuntur in argumento talia, quæ argumentum contrarii planè evertunt; &c. In cujus rei illustrationem unum tantùm alterumve exemplum adduco: Pono in supra allato exemplo Gracchi, homines hos fide dignos, qui tumultuantes viderunt, in Auctore cædis rufos insuper capillos observasse, talique capillitio Gracchum cum duobus aliis notari, sed quorum neuter nigra toga sit vestitus. Hic, si quis ex istis indiciis, quòd præter Gracchum tres sint atro colore vestiti, & præter eundem duo rufis capillis insignes, colligere vellet probabilitatem culpæ ad probabilitatem innocentiæ in persona Gracchi per §. 5. se habere in ratione composita ex subtripla & subdupla, h.e. in ratione subsextupla, illumque adeo verisimilius multo innocentem esse, quàm reum facinoris, is utique ineptè colligeret; cùm hic propriè non adsint duo argumenta, sed unum tantùm idemque à duabus simul circumstantiis coloris vestium & capillorum petitum, quæ duæ circumstantiæ cùm in sola persona Gracchi junctim conveniant, arguunt certò non alium quàm ipsum auctorem cædis esse potuisse. Aliud exemplum esto: De Contractu quodam scripto dubium movetur, an dies instrumento appositus fraudulenter sit anticipatus? Argumentum pro negativa hoc esse potest, quòd instrumentum signatum sit manu Notarii, i.e. personæ publicæ & juratæ, quem non verisimile est quicquam commisisse fraudis, cùm id sine summo honoris ac fortunæ suæ periculo facere non potuisset, ac propterea etiam inter 50 vix unus reperiatur, qui isthuc nequitiæ procedere audeat. Argumenta vero pro affirmativa possunt esse, quòd Notarii hujus fama pessimè audiat, quòd ex fraude maximum expectare potuit lucrum, & præsertim quòd talia attestetur, quæ nihil probabilitatis habent, veluti si scripsisset, quendam alteri mutuò locasse 10000 aureos, eo tempore, quo ex omnium æstimatione vix centum in universis bonis habere poterat. Hic si argumentum à charactere ejus qui subscripsit petitum seorsim consideres, censere poteris probabique la probabilité d'authenticité du document vaut, pour ainsi dire, $\frac{49}{50}$ de certitude. Si en revanche on pesait les arguments du contraire, on serait contraint de reconnaître qu'il peut à peine arriver qu'il n'y ait pas un faux dans le document ; en conséquence il y a moralement une quasi certitude que la fraude a été commise, c'est-à-dire qu'il y a par exemple $\frac{999}{1000}$ de certitude. Mais on ne doit pas conclure de là que la probabilité de l'authenticité est à la probabilité de la fraude, d'après le §7, dans le rapport de $\frac{49}{50}$ à $\frac{999}{1000}$, c'est-à-dire dans un rapport presque d'égalité : en effet, du moment que ne suppose un Notaire dont la bonne foi est diffamée, Notaires intègres qui maudissent la fraude ; mais il est lui-même le cinquantième qui ne se fait pas scrupule de se conduire malhonnêtement dans l'exercice de sa charge : ce qui supprime et détruit complètement toute force de l'argument qui en d'autres circonstances pourrait prouvait l'authenticité du document (40).

CHAPITRE IV

LA DOUBLE MANIERE DE RECHERCHER LES NOMBRES DE CAS. CE QU'IL FAUT PENSER DE CELUI QUI EST ETABLI PAR DES EXPERIENCES. PROBLEME PARTICULIER PROPOSE A CE PROPOS. ETC.

On a montré dans le chapitre précédent comment, d'aprés les nombres de cas dans lesquels peuvent exister ou ne pas exister les arguments en faveur de n'importe quelle chose, dans lesquels ils peuvent révéler ou ne pas révéler, ou même révéler le contraire, les forces de ce qui prouve de ces arguments et les probabilités des choses qui leur sont proportionnelles peuvent être déduites et estimées par le calcul. On en est ainsi venu à ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres. Mais c'est ici enfin que surgit une difficulté, nous semble-t-il : cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard que leurs premiers inventeurs ont pris soin d'organiser en vue de se ménager l'équité, de telle sorte que fussent assurés et connus les nombres de cas qui doivent entraîner le gain ou la perte, et de telle sorte que tous ces cas puissent arriver avec une égale facilité. En effet lorsqu'il s'agit de tous les autres résultats, dépendant pour la plupart soit de l'oeuvre de la nature soit de l'arbitre des hommes, cela n'a pas du tout lieu. Ainsi, par exemple, babilitatem authentiæ instrumenti velut $\frac{49}{50}$ certitudinis valere. Sin argumenta in contrarium expendas, agnoscere teneris fieri vix posse, quin instrumento falsum insit, adeoque fraudem in illo commissam moralem planè certitudinem, h.e. velut $\frac{999}{1000}$ certitudinis habere. Inde verò concludi non debet, probabilitatem authentiæ ad probabilitatem fraudis per §. 7. esse in ratione $\frac{49}{50}$ ad $\frac{999}{1000}$, hoc est, in ratione penè æqualitatis: dum enim Notarium pono diffamatæ fidei, hoc ipso pono, eum non comprehendi in casu horum 49 proborum Notariorum, qui fraudes detestantur; sed esse ipsum illum quinquagesimum, qui sibi religioni non ducit, perfidè in officio suo versari: id quod vim omnem illius argumenti, quod alias authentiam instrumenti probare posset, prorsus tollit ac destruit.

CAPUT IV.

De duplici Modo investigandi numeros casuum. Quid sentiendum de illo, qui instituitur per experimenta. Problema singulare eam in rem propositum. &c.

Ostensum est in Capite præced. quomodo ex numeris casuum, quibus rerum quarumvis argumenta existere vel non existere, indicare vel non indicare, aut etiam contrarium indicare possunt, ipsorum vires probandi iisque proportionatæ rerum probabilitates calculo subduci & æstimari queant. Eò itaque deventum est, ut ad conjecturas de re quâlibet ritè formandas aliud nil requiratur, quàm ut tum numeri horum casuum accuratè determinentur, tum & definiatur, quanto facilius alii aliis accidere possint. At hîc tandem nobis aqua hærere videtur, cùm vix in paucissimis præstare hoc liceat, nec alibi ferè succedat, quàm in aleæ ludis, quos primi inventores ad æquitatem ipsis conciliandam data opera sic instituerunt, ut certi notique essent numeri casuum, ad quos sequi debet lucrum aut damnum, & ut casus hi omnes pari facilitate obtingere possent. In cæteris enim plerisque vel à naturæ operatione vel ab hominum arbitrio pendentibus effectis id neutiquam locum habet. Ita ex. gr.

noti

les nombres de cas sont connus lorsqu'il s'agit des dés, car pour chacun des dés les cas sont manifestement aussi nombreux que les bases, et ils sont tous également enclins à échoir ; car à cause de la similitude des bases et du poids uniforme des dés il n'y a point de raison pour qu'une des bases soit plus encline à échoir que l'autre, comme cela arriverait si les bases étaient de formes dissemblables, ou si le dé était constitué d'un côté d'une matière plus lourde que de l'autre. Ainsi sont connus de même les nombres de cas pour que sorte de l'urne un bulletin (41) blanc ou noir, et on sait que tous sont également possibles, puisque sont évidemment déterminés et connus les nombres de bulletins de chaque espèce, et qu'on ne voit aucune raison pour que celui-ci ou celui-là doive sortir plutôt que n'importe quel autre. Mais qui donc parmi les mortels définira par exemple le nombre de maladies , qui sont autant de cas , qui ont le pouvoir d'envahir les innombrables parties du corps humain à l'âge qu'on voudra, et qui ont le pouvoir de nous apporter la mort ? Qui définira combien est plus facile à celle-ci qu'à celle-là, la peste ou l'hydropisie, l'hydropisie ou la fièvre, d'anéantir un homme, en sorte qu'à partir de là puisse être formée une conjecture sur un état futur de vie ou de mort ? Qui encore recensera les cas innombrables des changements auxquels l'air est soumis chaque jour, en sorte qu'on puisse à partir de là conjecturer ce que sera son état après un mois, sans parler d'une année ? En outre qui aurait sur la nature de l'esprit humain, ou sur l'admirable fabrique de notre corps une vue suffisante pour oser déterminer dans les jeux, qui dépendent en totalité ou en partie de la finesse de celui-là ou de l'agilité de celui-ci, les cas qui peuvent donner la victoire ou l'échec à celui-ci ou à celui-là des concurrents? Car ces faits dépendent de causes tout à fait cachées, et destinées de plus par l'indénombrable variété des assemblages à se jouer éternellement de notre recherche : il serait donc absolument d'un insensé de vouloir connaître quelque chose de cette matière (42) .

Mais à la vérité ici s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins *a posteriori* (43), c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables ; car on doit présumer que, par la suite, chaque fait peut arriver et ne pas arriver dans le même nombre de cas qu'il avait été constaté auparavant, dans un état de choses semblables, qu'il arrivait ou n'arrivait pas. En effet si, par exemple, après avoir fait autrefois l'expérience sur trois cents hommes de l'âge et la complexion qu'a aujourd'hui Titius, on a observé que deux cents d'entre eux ont trouvé la mort avant la fin de la décennie, tandis que le reste a poursuivi noti ſunt numeri caſuum in teſſeris; in ſingulis enim tot manifeſtè ſunt quot hedræ, iique omnes æquè proclives; cùm propter ſimilitudinem hedrarum & conforme teſſeræ pondus nulla ſit ratio, cur una hedrarum pronior eſſet ad cadendum quàm altera, quemadmodum fieret, si hedræ diſſimilis forent figuræ, aut teſſera una in parte ex ponderoſiore materia conſtaret quàm in altera. Sic itidem noti ſunt numeri caſuum ad educendam ex urna ſchedulam albam nigramve, & notum eſt omnes æquè poſſibiles eſſe; quia nimirum determinati notique ſunt numeri ſchedarum utriusque generis, nullaque perſpicitur ratio, cur hæc vel illa potius exire debeat quàm quælibet alia. At quis cedo mortalium unquam definiet numerum ex. gr. morborum, veluti totidem caſuum, qui innumeras corporis humani partes quavis ætate invadere, mortemque nobis inferre valent; & quantò facilius hic quàm ille, peſtis quàm hydrops, hydrops quàm febris, hominem perimat, ut inde de futuro vitæ necisque ſtatu conjectura formari poſſit? Quis item recenſebit caſus innumeros mutationum, quibus aër quotidie obnoxius eſt, ut inde conjicere poſſit, quænam poſt menſem, nedum poſt annum, ejus futura ſit conſtitutio? Rurſus, quis mentis humanæ naturam, aut admirabilem corporis noſtri fabricam ſatis perſpectam habuerit, ut in ludis, qui ab illius acumine aut hujus agilitate in totum vel ex parte dependent, determinare audeat caſus, quibus hic vel ille ludentium victoria potiri vel excidere poſſit? Hæc enim & talia cùm dependeant à cauſis omnino latentibus, atque inſuper innumerabili complexionum varietate induſtriam noſtram æternum luſuris, inſanientis planè foret, quicquam hoc pacto cognoſcere velle.

Verum enimverò alia hic nobis via ſuppetit, quâ quæſitum obtineamus; & quod à priori elicere non datur, ſaltem *à poſteriori*, hoc eſt, ex eventu in ſimilibus exemplis multoties obſervato eruere licebit; quandoquidem præſumi debet, tot caſibus unumquodque poſthac contingere & non contingere poſſe, quoties id antehac in ſimili rerum ſtatu contigiſſe & non contigiſſe fuerit deprehenſum. Nam ſi ex. gr. facto olim experimento in tercentis hominibus ejusdem, cujus nunc Titius eſt, ætatis & complexionis, obſervaveris ducentos eorum ante exactum decennium mortem oppetiiſſe, reliquos ultra vi-

tam

sa vie au-delà, on pourrait conclure avec assez de sûreté qu'il y a deux fois plus de cas pour que Titius doive acquitter son tribut à la nature pendant la prochaine décennie plûtot que pour qu'il puisse franchir cette borne. De même si on a été attentif depuis de nombreuses années passées aux conditions atmosphériques et si on a noté combien de fois elles ont été bonnes ou pluvieuses ; ou si quelqu'un a assisté très souvent aux luttes de deux concurrents, s'il a vu combien de fois celui-ci ou celui-là est sorti vainqueur, par là même il aura découvert le rapport qu'ont probablement entre eux les nombres de cas qui permettent aux mêmes évènements, dans des circonstances semblables aux précédentes, d'arriver ou de ne pas arriver ultérieurement.

Cette manière empirique de déterminer par expérience les nombres de cas n'est ni neuve ni insolite. Ce n'en est point une autre que prescrit le célèbre auteur de l'Art de penser, homme d'une grande finesse et d'un grand talent, dans les chapitres 12 et suivants de la dernière partie et c'est la même que tous observent constamment dans la pratique quotidienne (44). Enfin, il ne peut échapper à personne que, pour juger par ce moyen de quelque événement, il ne suffirait pas d'avoir fait choix d'une ou de deux expériences, mais qu'il serait requis une grande quantité d'expériences : tout être des plus stupides, par je ne sais quel instinct naturel, par lui-même et sans le guide d'aucun enseignement (chose absolument admirable) tient pour évident que, plus on aura recueilli de nombreuses observations de ce genre, moins grand sera le danger de s'écarter du but (45). Or, bien que cela soit naturellement connu de tous, la démonstration qui permet de le tirer des principes de l'art n'est pas du tout répandue, et par suite il nous incombe d'en traiter en cet endroit, endroit où cependant j'estimerais que je ferais trop peu si je m'en tenais à démontrer seulement ce que personne n'ignore. Il reste alors à examiner par la suite quelque chose que peut-être personne n'a jusqu'à maintenant rencontré même en y pensant. Il reste assurément à chercher si, en augmentant ainsi le nombre des observations, nous augmentons continuellement la probabilité d'atteindre le rapport réel entre les nombres de cas qui font qu'un événement peut arriver et le nombre de ceux qui font qu'il ne peut arriver, de sorte que cette probabilité dépasse enfin un degré quelconque donné de certitude ; ou si le problème, pour ainsi dire, a son Asymptote, c'est-à-dire s'il existe un degré de certitude qu'il n'est jamais possible de dépasser, de quelque manière qu'on multiplie les observations, d'avoir découvert le vrai rapport des cas ; que, par exemple, nous ne pouvons jamais obtenir de certitude au-delà de la moitié, ou de $\frac{2}{3}$ ou de $\frac{3}{4}$ (46).

Un exemple rendra clair ce que je voudrais dire.

tam protraxisse, satis tuto colligere poteris, duplo plures casus esse, quibus & Titio intra decennium proximum naturæ debitum solvendum sit, quàm quibus terminum hunc transgredi possit. Ita si quis à plurimis retrò annis ad cœli tempestatem attenderit, notaveritque, quoties ea serena aut pluvia extiterit: aut si quis duobus ludentibus sæpissimè adstiterit, videritque quoties hic aut ille ludi victor evaserit, eo ipso rationem detexerit, quam probabiliter habent inter se numeri casuum, quibus iidem eventus præviis similibus circumstantiis & posthac contingere ac non contingere possunt.

Atque hic modus empiricus determinandi numeros casuum per experimenta neque novus est neque insolitus; nam & Celeb. Auctor Artis cogitandi magni acuminis & ingenii Vir Cap. 12. & seqq. postremæ Partis haud dissimilem præscribit, & omnes in quotidiana praxi eundem constanter observant. Deinde nec illud quenquam latere potest, quòd ad judicandum hoc modo de quopiam eventu non sufficiat sumsisse unum alterumque experimentum, sed quòd magna experimentorum requiratur copia; quando & stupidissimus quisque nescio quo naturæ instinctu per se & nulla prævia institutione (quod sanè mirabile est) compertum habet, quo plures ejusmodi captæ fuerint observationes, eò minus à scopo aberrandi periculum fore. Quanquam autem hoc naturaliter omnibus notum sit, demonstratio, qua id ex artis principiis evincitur, minimè vulgaris est, & proin nobis hic loci tradenda incumbit: ubi tamen parum me præstiturum existimarem, si in hoc uno, quod nemo ignorat, demonstrando subsisterem. Ulterius aliquid hic contemplandum superest, quod nemini fortassis vel cogitando adhucdum incidit. Inquirendum nimirum restat, an aucto sic observationum numero ita continuò augeatur probabilitas assequendæ genuinæ rationis inter numeros casuum, quibus eventus aliquis contingere & quibus non contingere potest, ut probabilitas hæc tandem datum quemvis certitudinis gradum superet: an verò Problema, ut sic dicam, suam habeat Asymptoton, h. e. an detur quidam certitudinis gradus quem nunquam excedere liceat, utcunque multiplicentur observationes, putà, ut nunquam ultra semissem, aut $\frac{2}{3}$, aut $\frac{3}{4}$ certitudinis partes certi fieri possimus, nos veram casuum rationem detexisse. Ut exemplo constet quid velim, po-

Je suppose que, dans une urne, à ton insu soient placées trois mille pierres blanches et deux mille pierres noires ; je suppose que pour connaître leurs nombres par expérience tu tires une pierre après l'autre (en replaçant cependant chaque fois la pierre que tu as tirée avant de choisir la suivante, pour que le nombre des pierres ne diminue pas dans l'urne) ; tu observe combien de fois sort une pierre blanche et combien de fois une noire. On demande si tu peux le faire tant de fois qu'il devienne dix fois, cent fois, mille fois etc. plus probable (c'est-à-dire qu'il devienne moralement certain) que le nombre de fois où tu choisis une pierre blanche et le nombre de fois où tu choisis une pierre noire soient dans ce même rapport sesquialtère où se complaisent (47) à être entre eux les nombres de pierres ou de cas, plutôt que dans tout autre rapport différent de celui-ci. Car si cela ne se produisait pas, j'avoue que c'en serait fait de notre effort pour rechercher expérimentalement le nombre de cas. Mais si nous l'obtenons et si nous acquérons enfin par ce moyen la certitude morale (et je montrerai dans le chapître suivant que cela aussi se produit réellement), nous aurons trouvé *a posteriori* les nombres de cas presque (48) comme s'ils nous étaient connus a priori ; assurément dans la pratique de la vie civile, où le moralement certain est tenu pour absolument certain, en vertu de l'Ax. 9 Ch. II. cela suffit largement pour régler nos conjectures dans n'importe quel domaine non moins scientifiquement (49) que dans les jeux de hasard : en effet, si à la place de l'urne nous mettions l'air, par exemple, ou le corps humain, qui contiennent en eux l'aliment des variations atmosphériques et des maladies, comme l'urne contient les pierres, nous pourrions en tout cas par le même procédé déterminer grâce à l'observation combien plus facilement peut arriver dans ces sujets tel ou tel événement.

Mais pour que cela ne soit pas compris autrement qu'il ne convient, il faut bien noter ce qui suit ; je voudrais que le rapport entre les nombres de cas, que nous entreprenons de déterminer expérimentalement, ne fût pas pris de façon nette et sans partage (car ainsi c'est tout le contraire qui arriverait et il deviendrait d'autant moins probable de découvrir le vrai rapport qu'on ferait de plus nombreuses observations), mais je voudrais que le rapport fût admis avec une certaine latitude, c'est-à-dire compris entre une paire de limites, pouvant être prises aussi approchées qu'on voudra (50). Assurément, si dans l'exemple des pierres proposé plus haut nous prenons les deux rapports $\frac{301}{200}$ et $\frac{299}{200}$, ou $\frac{3001}{2000}$ et $\frac{2999}{2000}$, etc. dont le sesquialtère est très près et du plus grand et du plus petit, on montrera que l'on peut arriver à ce que le rapport trouvé grâce à des expériences recommencées de nombreuses fois tombe no in urna quadam te inscio reconditos esse ter mille calculos albos & bis mille nigros, teque eorum numerum experimentis exploraturum educere calculum unum post alterum (reponendo tamen singulis vicibus illum quem eduxisti, priusquam sequentem eligas, ne numerus calculorum in urna minuatur) & observare, quoties albus & quoties ater exeat. Quæritur, utrum toties hoc facere possis, ut decuplo, centuplo, millecuplo &c. probabilius fiat (h. e. ut moraliter tandem certum evadat) numeros vicium, quibus album & quibus nigrum eligis, eandem rationem sesquialteram, qua ipsi calculorum ceu casuum numeri gaudent, inter se habituros, quàm aliam quamlibet rationem ab ista diversam? Nisi enim hoc fiat, fateor actum fore de nostro conatu explorandi numeros casuum per experimenta. At si id obtineat, acquiraturque tandem hoc pacto moralis certitudo (quemadmodum hoc etiam reapse fieri sequenti Capite ostendam) æquè propemodum exploratos habebimus *à posteriori* casuum numeros, acsi nobis à priori cogniti essent; quod sane in usu vitæ civilis, ubi moraliter certum pro absolute certo habetur, per Ax. 9. Cap. II. abunde sufficit ad conjecturas nostras in quavis materia contingente non minus scientificè dirigendas, atque in ludis aleæ: etenim si loco urnæ substituamus aërem, ex. gr. sive corpus humanum, quæ fomitem variarum mutationum atque morborum intra se, velut urna calculos, continent, poterimus utique eodem modo per observationes determinare, quanto facilius in istis subjectis hic vel ille eventus accidere possit.

Ne autem hæc secus intelligantur quàm oportet, probè notandum est, quòd rationem inter numeros casuum, quam experimentis determinare aggredimur, non præcisè & in indivisibili acceptam velim (sic enim contrarium prorsus eveniret, eoque minus probabile fieret, veram rationem inventam esse, quo plures caperentur observationes) verum rationem in aliqua latitudine sumtam, i. e. binis limitibus conclusam, sed qui tam arcti constitui possunt, quàm quis voluerit. Nimirum, si in exemplo calculorum modo allato duas rationes assumamus $\frac{301}{200}$ & $\frac{299}{200}$, vel $\frac{3001}{2000}$ & $\frac{2999}{2000}$, &c. quarum una proximè major, altera proximè minor est sesquialtera, ostendetur quòd data quavis probabilitate probabilius fieri possit, rationem per expe-

rimenta

entre ces limites du rapport sesquialtère plus probablement, de toute probabilité donnée, qu'en dehors.

Voici donc ce fameux problème dont j'ai proposé ici la publication, après l'avoir mis à jour il y a vingt ans déjà (51), et dont la nouveauté d'une part, la grande utilité d'autre part, jointes à une égale difficulté, peut ajouter du poids et du prix à tous les autres points de cette doctrine. Mais avant de livrer sa solution, je vais en peu de mots dissiper les objections que certains savants ont dressées contre ces préceptes (52).

I. Ils objectent d'abord, que le rapport des pierres est une chose et que le rapport des maladies ou des changements atmosphériques en est une autre : le nombre des premières est déterminé, le nombre des deux derniers est indéterminé et vague. A cela je réponds que l'un et l'autre cas, eu égard à notre connaissance, est également posé dans l'incertitude et dans l'indétermination ; mais que quelque chose soit incertain et indéterminé en soi et par sa nature ne peut pas plus être conçu par nous que peut être conçu que la même chose soit à la fois créée et non créée par l'Auteur de la nature : car tout ce que Dieu a fait, par là même dès qu'il l'a fait, il l'a aussi déterminé (53).

2. Ils objectent deuxièmement que le nombre des pierres est fini, celui des maladies, etc. infini. *Je réponds* : extasie-toi sur le fait qu'il est immense plutôt qu'infini ; mais accordons qu'il est infini en acte : on sait que même entre deux infinis déterminés peut intervenir un rapport et que ce rapport peut être exprimé par des nombres finis soit rigoureusement soit avec une approximation aussi grande que l'on voudra (54). Ainsi de toute façon le rapport de la circonférence d'un cercle au diamètre est déterminé ; il se peut qu'il ne soit exprimé avec rigueur que par les nombres cycliques de Ludolphus continués jusqu'à l'infini, mais Archimède, Metius et Ludolphus lui-même le définissent par des limites suffisamment resserrées pour la pratique : par suite rien n'empêche que le moindre rapport entre deux infinis, mais exprimé par des nombres finis avec la plus grande approximation possible, soit déterminé aussi par des expériences finies.

3. Ils disent troisièmement que le nombre des maladies ne reste pas constamment le même, mais qu'il en pullule tous les jours de nouvelles. *Je réponds* qu'avec le cours du temps, les maladies puissent se multiplier, nous ne pouvons le nier ; et il est certain que celui qui voudrait, d'après les observations d'aujourd'hui, tirer une conclusion pour les temps de nos Ancêtres antédiluviens s'écarterait excessivement de la vérité. Mais de cela il n'y a d'autre conséquence que celle-ci : il faut parfois faire de nouvelles

timenta crebro repetita inventam intra hos limites rationis ſesquialteræ, quàm extra caſuram eſſe.

Hoc igitur eſt illud Problema, quod evulgandum hoc loco propoſui, poſtquam jam per vicennium preſſi, & cujus tum novitas, tum ſumma utilitas cum pari conjuncta difficultate omnibus reliquis hujus doctrinæ capitibus pondus & pretium ſuperaddere poteſt. Ejus autem ſolutionem priuſquam tradam, paucis objectiones diluam, quas Viri quidam docti contra hæc placita moverunt.

1. Objiciunt primò, aliam eſſe rationem calculorum, aliam morborum aut mutationum aëris; illorum numerum determinatum eſſe, horum indeterminatum & vagum. Ad quod reſpondeo, utrumque reſpectu cognitionis noſtræ æquè poni incertum & indeterminatum; ſed quicquam in ſe & ſua natura tale eſſe, non magis à nobis poſſe concipi, quàm concipi poteſt, idem ſimul ab Auctore naturæ creatum eſſe & non creatum: quæcunque enim Deus fecit, eo ipſo dum fecit, etiam determinavit.

2. Objiciunt ſecundò, calculorum numerum finitum eſſe, morborum &c. infinitum. *Reſp.* ſtupendè vaſtum potius eſſe, quàm infinitum; ſed demus actu infinitum eſſe: notum eſt, quòd etiam inter duo infinita determinata poſſit intercedere ratio, eaque numeris finitis vel accuratè, vel ſaltem quàm proximè quis voluerit, explicabilis. Sic utique circumferentiæ circuli ad diametrum determinata eſt ratio, quæ licet accuratè non exprimatur niſi per numeros cyclicos Ludolphi in infinitum continuatos, ab Archimede tamen, Metio & ipſo Ludolpho limitibus ad uſum ſufficientiſſimè conſtrictis definitur: unde nil impedit, quo minus ratio inter duo infinita, ſed numeris finitis quàm proximè expreſſa, finitis quoque experimentis determinetur.

3. Ajunt tertiò, numerum morborum non manere conſtanter eundem, ſed quotidie novos pullulare. *Reſp.* quin tractu temporis morbi multiplicari queant, inficiari non poſſumus; & certum eſt, eum qui vellet ex obſervationibus hodiernis concludere ad tempora Patrum antediluvianorum, à veritate enormiter aberraturum eſſe. Inde verò nil aliud ſequitur, quàm quòd interdum novæ capiendæ ſunt

 obſer-

observations, tout comme il aurait fallu en faire avec les pierres, si leur nombre dans l'urne était supposé avoir changé (55).

CHAPITRE V

SOLUTION DU PROBLEME PRECEDENT

Pour expédier avec toute la brièveté et toute la clarté possibles une affaire dont la démonstration est longue, je vais m'efforcer de tout réduire à la mathématique abstraite. Celle-ci va me fournir les lemmes suivants. Une fois qu'ils auront été exposés, le reste en sera une pure et simple application.

Lemme I. Etant donné une série de nombres en aussi grande quantité qu'on voudra 0, 1, 2, 3, 4, etc..., nombres qui se suivent dans un ordre naturel à partir de rien, soit de zéro, et dont le plus grand et dernier est désigné par $r + s$, l'un des intermédiaires étant r, et ceux qui de par et d'autre entourent ce nombre au plus près étant $r + 1$ et $r - 1$; si la série est poussée plus loin, de sorte qu'à la fin on obtienne le terme extrême, de toute façon multiple du nombre $r + s$ par exemple de sorte que se soit $nr + ns$, si l'intermédiaire r est augmenté dans la même proportion, ainsi que les voisins $r + 1$ et $r - 1$ en sorte qu' à leur place apparaissent nr, $nr + n$ et $nr - n$, et que la série elle même qu'on avait posée au début :

$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots r - 1, \; r, \; r + 1, \ldots \; r + s$

devienne :

$0, \; 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots nr - n, \ldots nr, \ldots \; nr + n, \ldots nr + ns$

alors seront à la vérité multipliés de ce fait les termes de la série, aussi bien les nombres qui se placent entre le nombre central nr et chacune des deux limites $nr + n$ ou $nr - n$, que ceux qui s'étendent de proche en proche depuis les limites jusqu'aux extrêmes $nr + ns$ ou 0. Cependant jamais (si grand que soit pris le nombre n) le nombre des termes au-delà de la limite supérieure $nr + n$ ne l'emportera de plus de $s - 1$ fois, ni le nombre des termes au-delà de l'inférieure $nr - n$ ne l'emportera de plus de $r - 1$ fois sur le nombre de ceux qui sont compris entre l'intermédiaire nr et l'une ou l'autre des limites $nr + n$ ou $nr - n$. Car, lorsqu'on fait la soustraction, il apparaît qu'à partir de la limite supérieure jusqu'au terme extême $nr + ns$ il y a un intervalle de $ns - n$ termes et qu'à partir de la limite inférieure jusqu'à l'autre extrémité 0 il y a un intervalle de $nr - n$ termes ; enfin que du nombre intermédiaire jusqu'à l'une ou l'autre des limites il y a un intervalle de n termes. Or on a toujours $ns - n . n : : s - 1 . 1$; et $nr - n . n : : r-1 . 1$ (56) C'est pourquoi il est évident etc.

observationes; quemadmodum capiendæ forent cum calculis, si numerus eorum in urna mutari supponeretur.

CAPUT V.

Solutio Problematis præcedentis.

Ut prolixæ rem demonstrationis quâ licet brevitate & perspicuitate expediam, conabor omnia reducere ad abstractam Mathesin, depromendo ex illa sequentia Lemmata, quibus ostensis cætera in nuda applicatione consistent.

Lemma 1. Posita serie quotlibet numerorum 0, 1, 2, 3, 4, &c. à nulla seu cifra naturali se consequentium ordine, quorum extremus & maximus dicatur $r+s$, intermediorum quispiam r, & qui huic ex utraque parte proximè latus cingunt, $r+1$ & $r-1$: si continuetur porrò hæc series donec extimus terminus utcunque multiplex fiat numeri $r+s$, putà donec sit $nr+ns$, atque in eadem ratione augeantur intermedius r, & ejus laterales $r+1$ & $r-1$; sic ut eorum loco prodeant nr, $nr+n$ & $nr-n$, ipsaque series initio posita

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots r-1, r, r+1, \ldots\ldots\ldots r+s.$$

mutetur in hanc

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots nr-n \ldots nr \ldots\ldots nr+n \ldots\ldots\ldots nr+ns.$$

multiplicabuntur quidem hoc pacto termini seriei, tam illi qui medio nr & alterutri limitum $nr+n$ aut $nr-n$ interjacent, quàm illi qui inde à limitibus ad extimos usque $nr+ns$ aut 0 porrò protenduntur: nunquam tamen (quantumvis magnus assumatur numerus n) numerus terminorum ultra limitem majorem $nr+n$ plusquam $s-1$; nec numerus terminorum ultra minorem $nr-n$ plusquam $r-1$ vicibus superabit numerum horum, qui intermedio nr & alterutro limitum $nr+n$ vel $nr-n$ sunt conclusi. Nam facta subtractione patet, à limite majore ad terminum extremum $nr+ns$ esse intervallum terminorum $ns-n$; à limite minore ad alterum extremum 0 intervallum $nr-n$; & ab intermedio numero ad alterutrum limitem intervallum n terminorum. Est verò semper $ns-n.n::s-1.1$; & $nr-n.n::r-1.1$. Quare constat &c.

Lemm.

Lemme 2. Toute puissance entière d'un binôme quelconque $r+s$ est exprimée par un nombre de termes supérieur d'une unité à celui des unités dans l'indice de la puissance. Car il y a trois termes dans le Carré, 4 dans le Cube, 5 dans le Bicarré, et ainsi de suite, comme cela est bien connu.

Lemme 3 . Dans n'importe quelle puissance de ce binôme (au moins celle dont l'indice est égal au binôme $r + s = t$ ou à un multiple de celui-ci, soit $nr + ns = nt$) si quelques termes précèdent un terme quelconque M, si d'autres le suivent, et si le nombre de tous ceux qui le précèdent est par rapport au nombre de tous ceux qui le suivent, comme s à r, soit ce qui revient au même, si dans ce terme les nombres des dimensions des lettres r et s sont respectivement comme les quantités elles-mêmes r et s, ce terme sera le plus grand de tous, et ceux qui de part et d'autre sont plus proches de lui seront plus grands que d'autres plus éloignés du même côté : mais ce terme M sera dans un rapport plus petit avec un terme proche que ce terme avec un terme plus éloigné (pour des intervalles de termes égaux).

Dem . 1 . C'est une chose connue parmie les Géomètres, que la puissance nt du binôme $r + s$, c'est-à-dire $(r + s)^{nt}$ est exprimée par la série suivante :

$$r^{nt} + \frac{nt}{1} r^{nt-1} s + \frac{nt.nt-1}{1.2} r^{nt-2} s^2 + \frac{nt.nt-1.nt-2}{1.2.3} r^{nt-3} s^3 + etc...$$

jusqu'à $+ \frac{nt}{1} rs^{nt-1} + s^{nt}$; dans cette progression, le premier élément r du binôme diminue graduellement dans ses dimensions, le deuxième s augmente graduellement dans ses dimensions, le deuxième s augmente graduellement, cependant que les coeffi

du deuxième et du pénultième termes sont $\frac{nt}{t}$, du 3ème et de l'antépénultième $\frac{nt.nt-1}{1.2}$, du 4ème et du proantépénultième $\frac{nt.nt-1.nt-2}{1.2.3}$ et ainsi de suite.

Et parce que le nombre des termes hormis M est, d'après le *Lemm. 2* , $nt = nr + ns$, mais que par hypothèse le nombre de ceux qui le précèdent est au nombre de ceux qui le suivent comme s à r, le nombre de ceux qui précèdent le terme M est ns, et le nombre de ceux qui le suivent est nr. De là, d'après la loi de la progression, le terme M sera

$$\frac{nt.nt-1.nt-2.....nt-ns+1 \quad [nr+1]}{1.2.3.4........ns} r^{nr} s^{ns} \text{, ou (57)}$$

$$\frac{nt.nt-1.nt-2.....nt-nr+1 \quad [ns+1]}{1.2.3.4........nr} r^{nr} s^{ns} ,$$

et de même le terme voisin de celui-ci à

Lemm. 2. Omnis poteſtas integra alicujus binomii $r+s$ terminis exprimitur uno pluribus, quàm eſt unitatum numerus in poteſtatis indice. Nam Quadratum conſtat terminis tribus, Cubus 4, Biquadratum 5, & ita porrò, ut notum.

Lemm. 3. In qualibet poteſtate hujus binomii (ſaltem cujus index æqualis binomio $r+s \infty t$, aut ejus multiplex, putà $nr+ns \infty nt$) ſi terminum quempiam M nonnulli præcedant, alii ſequantur, & ſit numerus omnium præcedentium ad numerum omnium ſequentium reciprocè, ut s ad r, ſeu quod eodem redit, ſi in illo termino numeri dimenſionum literarum r & s directe ſint, ut ipſæ quantitates r & s, erit ille terminus omnium in eadem poteſtate maximus, illi verò propior ab utravis parte major remotiori ab eadem parte: ſed idem terminus M ad propiorem minorem habebit rationem, quàm (in pari terminorum intervallo) propior ad remotiorem.

Dem. 1. Nota res eſt inter Geometras, quòd poteſtas nt binomii $r+s$, hoc eſt, $\overline{r+s}^{nt}$ hâc ſerie exprimitur:

$$r^{nt}+\frac{nt}{1}r^{nt-1}s+\frac{nt.\overline{nt-1}}{1.2}r^{nt-2}ss+\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}}{1.2.3}r^{nt-3}s^3+\&c.$$

uſque ad $+\frac{nt}{1}rs^{nt-1}+s^{nt}$; in cujus progreſſu pars una binomii r dimenſionibus ſuis gradatim minuitur, pars altera s augetur, exiſtentibus interea coëfficientibus ſecundi & penultimi termini $\frac{nt}{1}$, 3^{ti} & antepenultimi $\frac{nt.\overline{nt-1}}{1.2}$, 4^{ti} & proantepenultimi $\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}}{1.2.3}$, & ſic deinceps. Et quia numerus omnium præter M terminorum per Lemm. 2. eſt $nt \infty nr+ns$, ex hypoth. autem numerus ipſum præcedentium ad numerum ſequentium ſe habet, ut s ad r, erit numerus eorum, qui terminum M præcedunt, ns; & qui ipſum ſequuntur, nr. Unde ex lege progreſſionis terminus M fiet

$$\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\overline{nt-ns+1}\,(nr+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots ns}r^{nr}s^{ns}, \text{ vel}$$

$$\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\overline{nt-nr+1}\,(ns+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots nr}r^{nr}s^{ns};$$

& ſimiliter terminus huic proximus ad

gauche | droite

$$\frac{nt.nt-1.nt-2\ldots nr+2}{1.2.3.4\ldots ns-1}\, r^{nr-1}\, s^{ns+1} \qquad \frac{nt.nt-1.nt-2\ldots\ldots ns+2}{1.2.3.4\ldots\ldots nr-1}\, r^{nr}\, s^{ns+1}$$

de même que le suivant vers la

gauche | droite

$$\frac{nt.nt-1.nt-2\ldots nr+3}{1.2.3.4\ldots\ldots ns-2}\, r^{nr+2}\, s^{ns-2} \qquad \frac{nt.nt-1.nt-2\ldots ns+3}{1.2.3.4\ldots\ldots nr-2}\, r^{nr-2}\, s^{ns+2}$$

d'où les simplifications convenables ayant été faites partout, tant des coefficients que des termes purs, par les diviseurs communs, il sera évident, que le terme M sera avec le terme le plus proche sur sa gauche comme $(nr + 1).s$ à $ns.r$, celui-ci avec le suivant comme $(nr + 2).s$ à $(ns - 1).r$ etc ; de même que le terme M sera avec le terme le plus proche sur sa droite comme $(ns + 1)r$ à $nr.s$ et celui-ci avec le suivant comme $(ns + 2)r$ à $(nr - 1).s$ etc . Or on a $(nr+1).s\ [nrs+s] > ns.r\,[nrs]$ (58) et $(nr+2).s\ [nrs+2s] > (ns-1).r\ [nrs-r]$ etc... et $(ns+1).r\ [nrs+r] > nr.s\,(nrs)$ et $(ns+2).r\ [nrs+2r] > (nr-1).s\ [nrs-s]$ etc... comme il est évident. Donc le terme M est plus grand que son voisin de part et d'autre ; ce dernier, de chaque côté, est plus grand que le suivant, etc...C.Q.F.D.

2. Le rapport $\frac{nr+1}{ns}$ est plus petit que le rapport $\frac{nr+2}{ns-1}$, comme il est évident : donc de même, après avoir multiplié de part et d'autre par $\frac{s}{r}$, on a le rapport $\frac{(nr+1).s}{ns.r} < \frac{(nr+2).s}{(ns-1).r}$ Egalement le rapport $\frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1}$, comme il est clair : donc après avoir multiplié de part et d'autre par $\frac{r}{s}$, on a de même le rapport $\frac{(ns+1).r}{nr.s} < \frac{(ns+2).r}{(nr-1).s}$.

Mais le rapport $\frac{(nr+1).s}{ns.r}$ est celui du terme M au terme qui en est le plus proche vers la gauche ; et $\frac{(nr+2).s}{(ns-1).r}$ le rapport de celui-ci au suivant : de même le rapport $\frac{(ns+1).r}{nr.s}$ est celui du terme M au terme que en est le plus proche vers la droite,et $\frac{(ns+2).r}{(nr-1).s}$ le rapport de celui-ci au suivant, comme on l'a montré plus haut, une conclusion équivalente pouvant être tirée pour tous les autres. C'est pourquoi M le plus grand des termes est avec un terme proche de part et d'autre dans un rapport plus petit que celui d'un terme proche à un plus éloigné (pour des intervalles de termes égaux). C.Q.F.D.

sinistram: | *dextram:*

$$\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\ldots\overline{nr+2}}{1.2.3.4\ldots\ldots\overline{ns-1}}\,r^{nr+1}s^{ns-1} \;\Big|\; \frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\ldots\overline{ns+2}}{1.2.3.4\ldots\ldots\overline{nr-1}}\,r^{nr-1}s^{ns+1};$$

necnon sequens versus *sinistram:* | *dextram:*

$$\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\overline{nr+3}}{1.2.3.4\ldots\overline{ns-2}}\,r^{nr+2}s^{ns-2} \;\Big|\; \frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\overline{ns+3}}{1.2.3.4\ldots\overline{nr-2}}\,r^{nr-2}s^{ns+2};$$

è quibus, præmissa ubique convenienti reductione tam coëfficientium quàm terminorum purorum per divisores communes, patebit, quòd terminus M ad proximum versus sinistram se habet, ut $\overline{nr+1}.s$ ad $ns.r$, hic ad sequentem, ut $\overline{nr+2}.s$ ad $\overline{ns-1}.r$ &c. nec non terminus M ad proximum versus dextram, ut $\overline{ns+1}.r$ ad $nr.s$; & hic ad sequentem, ut $\overline{ns+2}.r$ ad $\overline{nr-1}.s$. &c. Est verò $\overline{nr+1}.s$ $(nrs+s) > ns.r$ (nrs), & $\overline{nr+2}.s$ $(nrs+2s) > \overline{ns-1}.r$ $(nrs-r)$ &c. ut & $\overline{ns+1}.r$ $(nrs+r) > nr.s$ (nrs), & $\overline{ns+2}.r$ $(nrs+2r) > \overline{nr-1}.s$ $(nrs-s)$ &c. ut apparet. Ergò terminus M major proximo ab utravis parte, hic major remotiori ab eadem parte, &c. Q. E. D.

2. Ratio $\frac{nr+1}{ns}$ minor est ratione $\frac{nr+2}{ns-1}$, ut patet: ergò & addita communi ratione $\frac{s}{r}$, ratio $\frac{\overline{nr+1}.s}{ns.r} < \frac{\overline{nr+2}.s}{\overline{ns-1}.r}$. Similiter ratio $\frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1}$, ut liquet: igitur addita ratione communi $\frac{r}{s}$, ratio quoque $\frac{\overline{ns+1}.r}{nr.s} < \frac{\overline{ns+2}.r}{\overline{nr-1}.s}$. Sed ratio $\frac{\overline{nr+1}.s}{ns.r}$ est illa quam terminus M habet ad proximum versus sinistram; & $\frac{\overline{nr+2}.s}{\overline{ns-1}.r}$ illa, quam habet hic ad sequentem: item ratio $\frac{\overline{ns+1}.r}{nr.s}$ est ea, quam terminus M habet ad proximum versus dextram; & $\frac{\overline{ns+2}.r}{\overline{nr-1}.s}$, quam habet hic ad sequentem; uti modò ostensum est, & ad cæteros omnes ex æquo concludi potest. Quare maximus terminorum M ad propiorem ex utravis parte minorem rationem habet, quàm (in pari terminorum intervallo) propior ad remotiorem ex eadem parte. Q. E. D.

Lemm.

Lemm. 4 . Dans l'élévation à la puissance d'un binôme, dont l'indice est nt , on peut concevoir un nombre n si grand que M le plus grand des termes acquière en comparaison de deux autres L et Λ, distants de M d'un intervalle de n termes à gauche et à droite, un rapport supérieur à la donnée que l'on veut.

Dem. En effet, comme dans le Lemm. précéd. M a été trouvé tel que

$$\frac{nt.nt-1.nt-2\ldots\ldots nr+1}{1.2.3.4\ldots\ldots ns}\, r^{nr}\, s^{ns}\;,\quad \text{ou}\quad \frac{nt.nt-1.nt-2\ldots\ldots ns+1}{1.2.3.4\ldots\ldots nr}\, r^{nr}\, s^{ns}$$

d'après la loi de la progression (n ayant été ajouté au dernier facteur du coefficient au numérateur et retiré au dernier facteur au dénominateur ; la dimension d'une des lettres r et s ayant été augmentée de ce même n, la dimension de l'autre diminuée pareillement) on aura le terme :

L à gauche | *Λ à droite*

$$\frac{nt.nt-1.nt-2\ldots nr+n+1}{1.2.3.4\ldots ns-n}\, r^{nr+n}\, s^{ns-n} \qquad\qquad \frac{nt.nt-1.nt-2\ldots ns+n+1}{1.2.3.4\ldots nr-n}\, r^{nr-n}\, s^{ns+n}$$

d'où, après avoir effectué la réduction convenable par les diviseurs communs, il résulte :

$$\frac{M}{L} = \frac{nr+n.nr+n-1.nr+n-2\ldots nr+1.s^{n}}{ns-n+1.ns-n+2.ns-n+3\ldots ns.r^{n}} \qquad \frac{M}{\Lambda} = \frac{ns+n.ns+n-1.ns+n-2\ldots ns+1.r^{n}}{nr-n+1.nr-n+2.nr-n+3\ldots nr+s^{n}}$$

ou bien (les dimensions des quantités r^n et s^n ayant été distribuées également dans les facteurs pris un à un en raison du nombre égal de chacun des deux) :

$$\frac{M}{L} = \frac{nrs+ns.nrs+ns-s.nrs+ns-2s\ldots nrs+s}{nrs-nr+r.nrs-nr+2r.nrs-nr+3r\ldots nrs}$$

$$\frac{M}{\Lambda} = \frac{nrs+nr.nrs+nr-r.nrs+nr-2r\ldots nrs+r}{nrs-ns+s.nrs-ns+2s.nrs-ns+3s\ldots nrs} \;:$$

mais ces rapports sont infiniment grands, lorsque le nombre n est supposé infini ; car alors les nombres 1, 2, 3, etc. sont négligeables devant n , $nr \pm n \mp 1.2.3.$ [59] et $ns \mp n \pm 1.2.3.$ etc. eux-mêmes sont equivalents à $nr \pm n$ et $ns \mp n$ [60] et en effectuant la divison par n il s'ensuit que :

Lemm. 4. In poteſtate binomii, cujus index nt, tantus poteſt concipi numerus n, ut maximus terminorum M ad alios duos L & Λ, intervallo n terminorum ſiniſtrorſum & dextrorſum à ſe diſtantes, rationem acquirat qualibet data majorem.

Dem. Cùm enim in Lemm. præced. terminus M ſit inventus

$$\frac{nt\,.\,\overline{nt-1}\,.\,\overline{nt-2}\,.\,.\,.\,.\,.\,\overline{nr+1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,ns}\,r^{nr}\,s^{ns},\ \text{vel}$$

$$\frac{nt\,.\,\overline{nt-1}\,.\,\overline{nt-2}\,.\,.\,.\,.\,.\,\overline{ns+1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,.\,nr}\,r^{nr}\,s^{ns},$$

erit ex lege progreſſionis (addito n ad ultimum factorem coëfficientis in numeratore, & ablato ab ultimo in denominatore; nec non alterius literarum r & s dimenſionibus eodem n auctis, alterius diminutis) terminus

L *ad ſiniſtram:* Λ *ad dextram.*

$$\frac{nt\,.\,\overline{nt-1}\,.\,\overline{nt-2}\,.\,.\,.\,\overline{nr+n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,\overline{ns-n}}\,r^{nr+n}\,s^{ns-n}\ \Big|\ \frac{nt\,.\,\overline{nt-1}\,.\,\overline{nt-2}\,.\,.\,.\,.\,\overline{ns+n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,\overline{nr-n}}\,r^{nr-n}\,s^{ns+n};$$

unde facta convenienti reductione per diviſores communes, reſultat

$$\frac{M}{L}\infty\frac{\overline{nr+n}\,.\,\overline{nr+n-1}\,.\,\overline{nr+n-2}\,.\,.\,.\,\overline{nr+1}\times s^{n}}{\overline{ns-n+1}\,.\,\overline{ns-n+2}\,.\,\overline{ns-n+3}\,.\,.\,.\,ns\times r^{n}}$$

$$\Big|\ \frac{M}{\Lambda}\infty\frac{\overline{ns+n}\,.\,\overline{ns+n-1}\,.\,\overline{ns+n-2}\,.\,.\,.\,.\,\overline{ns+1}\times r^{n}}{\overline{nr-n+1}\,.\,\overline{nr-n+2}\,.\,\overline{nr-n+3}\,.\,.\,.\,.\,nr\times s^{n}},$$

ſive (dimenſionibus quantitatum r^n & s^n in ſingulos factores, ob æqualem amborum numerum, æqualiter diſtributis)

$$\frac{M}{L}\infty\frac{\overline{nrs+ns}\,.\,\overline{nrs+ns-s}\,.\,\overline{nrs+ns-2s}\,.\,.\,.\,.\,\overline{nrs+s}}{\overline{nrs-nr+r}\,.\,\overline{nrs-nr+2r}\,.\,\overline{nrs-nr+3r}\,.\,.\,.\,.\,nrs}$$

$$\Big|\ \frac{M}{\Lambda}\infty\frac{\overline{nrs+nr}\,.\,\overline{nrs+nr-r}\,.\,\overline{nrs+nr-2r}\,.\,.\,.\,.\,.\,\overline{nrs+r}}{\overline{nrs-ns+s}\,.\,\overline{nrs-ns+2s}\,.\,\overline{nrs-ns+3s}\,.\,.\,.\,.\,.\,nrs}:$$

ſed hæ rationes ſunt infinitè magnæ, cùm numerus n ponitur infinitus; tunc enim evaneſcunt numeri 1, 2, 3, &c. præ n, ipſæque $nr \pm n \pm$ 1, 2, 3, &c. & $ns \pm n \pm$ 1, 2, 3, &c. tantundem valent, ac $nr \pm n$ & $ns \pm n$, ſic ut diviſione inſtituta per n, prodeat

$$\frac{M}{L}\infty$$

$$\frac{M}{L} = \frac{rs+s.rs+s.rs+s.....rs}{rs-r.rs-r.rs-r.....rs} \quad (61) \quad \frac{M}{\Lambda} = \frac{rs+r.rs+r....rs+r.....rs}{rs-s.rs-s....rs-s.....rs}$$

quantités qui sont composées, comme on le voit, d'autant de rapports $\frac{rs+s}{rs-r}$ ou $\frac{rs+r}{rs-s}$ (62) qu'il y a de facteurs : or le nombre de ces facteurs est n , c'est-à-dire un nombre infini ; puisque , entre le premier $nr + n$ ou $ns + n$, et le dernier $nr + 1$ ou $ns + 1$, la différence est $n - 1$. Pour cette raison les rapports sont des multiples infinis des rapports $\frac{rs + s}{rs - r}$ et $\frac{rs + r}{rs - s}$, aussi , conséquence simple, sont-ils infinis : si tu doutais de cela, conçois une succession infinie de proportions selon les rapports $rs + s$ à $rs - r$, ou $rs + r$ à $rs - s$; le rapport du premier au troisième sera double , du premier au 4ème triple, au 5ème quadruple, etc. jusqu'au dernier pour lequel le rapport est un multiple infini du rapport $\frac{rs + s}{rs - r}$ ou $\frac{rs + r}{rs - s}$: or il est évident que le rapport du premier au dernier est infiniment grand, parce que le dernier = 0. (*voir le corollaire de notre 6ème Proposition sur les Séries Infinies*) (63). C'est pourquoi , il est clair qu'un multiple infini du rapport $\frac{rs + s}{rs - r}$ ou $\frac{rs + r}{rs - s}$ est infini. On a donc montré par là, que dans une puissance infiniment élevée du binôme, le plus grand terme M est envers L et Λ dans un rapport supérieur à tout rapport assignable. C.Q.F.D.(64).

Lemm . 5. Si l'on admet ce qui précède, on peut concevoir un nombre n si grand que la somme de tous les termes pris à partir du terme intermédiaire et maximum M jusq'aux deux termes L et Λ inclus soit envers la somme de tous les autre qui s'étendent de part et d'autre au-delà des limites L et dans un rapport supérieur à tout rapport donné.

Dem . Convenons d'appeler les termes entre le plus grand qui est M et la limite gauche L,F le deuxième à partir du plus grand , G le troisième, H le quatrième, etc. et au-delà de la limite L, P le deuxième à partir du même, Q le troisième, R le quatrième, etc. Donc puisque $\frac{M}{F} < \frac{L}{P}$ et $\frac{F}{G} < \frac{P}{Q}$ et $\frac{G}{H} < \frac{Q}{R}$ etc. d'après la 2ème partie du lemme 3, on aura ainsi la suite $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ etc. C'est pourquoi, lorsque le nombre n est infini, le rapport $\frac{M}{L}$ est infiniment grand, d'après

$$\frac{M}{L} \infty \frac{rs+s.\,rs+s.\,rs+s\ldots\ldots rs}{rs-r.\,rs-r.\,rs-r\ldots\ldots rs} \;\Big|\; \frac{M}{\Lambda} \infty \frac{rs+r.\,rs+r.\,rs+r\ldots\ldots rs}{rs-s.\,rs-s.\,rs-s\ldots\ldots rs};$$

quæ quantitates componuntur, ut patet, ex tot rationibus $\frac{rs+s}{rs-r}$ aut $\frac{rs+r}{rs-s}$, quot ſunt factores: at horum numerus eſt n, h. e. infinitus; cùm inter primum $nr+n$, aut $ns+n$, & ultimum $nr+1$ aut $ns+1$ differentia ſit $n-1$. Idcircò rationes iſtæ ſunt infinituplicatæ rationum $\frac{rs+s}{rs-r}$ & $\frac{rs+r}{rs-s}$, ac proinde ſimpliciter infinitæ: qua de ſequela si dubites, concipe infinitos continuè proportionales in ratione $rs+s$ ad $rs-r$, vel $rs+r$ ad $rs-s$; erit primi ad tertium ratio duplicata, primi ad 4^{tum} triplicata, ad 5^{tum} quadruplicata, &c. ad ultimum infinituplicata rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ vel $\frac{rs+r}{rs-s}$: conſtat autem, rationem primi ad ultimum infinitè magnam eſſe, ob ultimum ∞ o. (*Vid. Coroll. Poſit. noſtræ* $6^{tæ}$ *de Seriebus Infinitis.*) Quare etiam conſtat, infinituplicatam rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ vel $\frac{rs+r}{rs-s}$ infinitam eſſe. Oſtenſum itaque eſt, quòd in poteſtate infinitè alta binomii terminus maximus M ad duos L & Λ rationem habeat omni aſſignabili ratione majorem. Q. E. D.

Lemm. 5. Poſitis, quæ in præced. tantus intelligi poteſt numerus n, ut ſumma omnium terminorum ab intermedio & maximo M ad ambos uſque L & Λ incluſivè ſumtorum, ad ſummam omnium reliquorum extra hos limites L & Λ utrinque protenſorum rationem habeat omni data ratione majorem.

Dem. Vocentur termini intra maximum M & limitem ſiniſtrum L, ſecundus à maximo F, tertius G, quartus H, &c. & extra limitem L, ſecundus ab ipſo P, tertius Q, quartus R, &c. Quoniam igitur ratio $\frac{M}{F} < \frac{L}{P}$ & $\frac{F}{G} < \frac{P}{Q}$, & $\frac{G}{H} < \frac{Q}{R}$ &c. per part. 2. Lem. 3. erit quoque viciſſim $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ &c. Quare cùm poſitio n numero infinito, ratio $\frac{M}{L}$ ſit infinitè magna, per

Lem.

le Lemm. 4. et à plus forte raison tous les autres rapports $\frac{F}{P},\frac{G}{Q},\frac{H}{R}$ etc. seront infinis ; et à cause de cela $\frac{F+G+H+etc}{P+Q+R+etc}$ sera aussi infini , c'est-à-dire que tous les termes contenus entre le plus grand M et la limite L seront une infinité de fois plus grands que la somme des termes pris en nombre égal à partir de L lui-même et au-delà de L. Et puisqe le nombre de tous les termes situés au-delà de la limite L excède le nombre de tous ceux qui sont entre L et le plus grand M seulement d'une quantité $s - 1$ (65) (c'est-à-dire d'une quantité seulement finie), d'après le Lemm. I, et puisque les termes eux-mêmes, ci-dessus mentionnés, deviennent de plus en plus petits qu'ils sont plus éloignés de la limite, en vertu de la 1° partie du Lemm. 3, tous les termes entre M et L pris tous ensemble (même si M n'est pas compris) l'emporteront là encore un nombre infini de fois sur tous les termes au-delà de L pris tous ensemble. Semblablement on montrera de l'autre côté que tous les termes inclus entre M et Λ l'emportent un nombre infini de fois sur tous ceux qui s'étendent au-delà de Λ (leur nombre excède le nombre des premiers, en vertu du Lemm. I, seulement de $r - 1$ fois). C'est pourquoi, enfin, tous les termes compris entre l'une et l'autre des limites L et Λ (le plus grand M pouvant être retiré) l'emporteront de la même manière un nombre infini de fois sur absolument tous les termes situés en dehors. Donc bien d'avantage avec le plus grand. C.Q.F.D.

Scholie . Il peut être objecté aux 4ème et 5ème Lemmes par ceux qui ne sont pas habitués à faire des observations sur l'infini, que même si dans le cas du nombre n infini, les facteurs des quantités qui expriment les rapports $\frac{M}{L}$ et $\frac{M}{\Lambda}$, nr Ꭿ n ȣ 1.2.3. etc. et ns ȣ n Ꭿ 1.2.3. etc. valent autant que nr Ꭿ n et ns ȣ n, alors que les nombres 1,2,3 etc. des facteurs pris un à un s'évanouissent normalement, il peut cependant arriver que pris tous ensemble ou bien considérés en soi, ils croissent à l'infini (à cause du nombre infini de facteurs) et qu'ainsi ils diminuent infiniment le rapport infiniment multiple du rapport $\frac{rs+s}{rs-r}$ ou $\frac{rs+r}{rs-s}$, c'est-à-dire qu'ils le rendent fini. Je ne puis mieux apaiser ce scrupule, que si je montre maintenant un mode d'assignation, en fait un nombre n fini, soit une puissance finie du binôme, dans laquelle la somme des termes entre les limites L et Λ soit à la somme de ceux qui sont en dehors dans un rapport supérieur à un rapport donné, si grand soit-il, rapport que je désigne par la lettre c ; il va de soi qu'après avoir montré cela l'objection s"écroule nécessairement d'elle-même.

Lem. 4. fortius etiam cæteræ rationes $\frac{F}{P}$, $\frac{G}{Q}$, $\frac{H}{R}$, &c. erunt infinitæ; eaque propter & $\frac{F+G+H+\&c.}{P+Q+R+\&c.}$ infinita, h. e. omnes simul termini intra maximum M & limitem L contenti infinities majores erunt totidem simul terminis extra L porrectis ipsi L proximis. Et quoniam numerus omnium terminorum extra limitem L numerum omnium intra eundem & maximum M non nisi $s-1$ (h. e. non nisi finitis) vicibus superat, per 1. Lem. ipsique insuper termini eo minores evadunt, quo sunt à limite remotiores, per 1. part. 3. Lem. idcirco termini simul omnes intra M & L (etiam non computato M) omnes simul terminos extra L adhuc infinities superabunt. Similiter autem ostenditur ab altera parte, quòd omnes intra M & Λ conclusi termini omnes extra Λ porrectos (quorum numerus priorum numerum per Lem. 1. non nisi $r-1$ vicibus excedit) infinities superant. Quare denique omnes termini inter utrumque limitem L & Λ comprehensi (demto licet maximo M) omnes omninò terminos extra positos itidem infinities superabunt. Ergo multo magis unà cum maximo. Q. E. D.

Schol. Objici posset contra 4. & 5tum Lem̃a, ab his qui speculationibus infiniti non assueverunt, quòd etiamsi in casu numeri n infiniti factores quantitatum, quæ rationes $\frac{M}{L}$ & $\frac{M}{\Lambda}$ exprimunt, $nr \otimes n \otimes 1, 2, 3,$ &c. & $ns \otimes n \otimes 1, 2, 3,$ &c. tantundem valent ac $nr \otimes n$ & $ns \otimes n$, evanescentibus ratione singulorum factorum numeris 1, 2, 3, &c. fieri tamen possit, ut omnes collecti vel in se ducti (propter infinitum factorum numerum) in infinitum excrescant, adeoque rationem infinituplicatam rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ aut $\frac{rs+r}{rs-s}$ infinitè diminuant, h. e. finitam reddant. Cui scrupulo melius satisfacere non possum, quàm si nunc porro modum ostendam assignandi, reapse finitum numerum n, sive finitam potestatem binomii, in qua summa terminorum intra limites L & Λ ad summam terminorum extra, rationem habeat data ratione quantumvis magna, quam litera c designo, majorem; utpote quo ostenso objectionem ultro corruere necesse est.

A cette fin, je prends un rapport d'inégalité aussi grand qu'on veut, qui soit cependant plus petit que le rapport $\frac{rs+s}{rs-r}$ (pour les termes de la partie gauche) par exemple le rapport $\frac{rs+s}{rs}$ ou $\frac{r+1}{r}$, je le multiplie un nombre suffisant de fois (m fois) pour qu'il soit égal ou supérieur au rapport de $c.(s-1)$ à I, c'est-à-dire, pour qu'il soit tel que $\frac{(r+1)^m}{r^m}$ = ou > $c(s-1)$. Or combien de fois cela doit-il être fait, cela est rapidement résolu par les logarithmes ; car ayant pris le logarithme de ces quantités $mL(r+1) - mL$ = ou > $L(c[s-1])$ et effectué la division, on a aussitôt $m \geqslant \frac{L(c(s-1))}{L(r+1)-Lr}$; lorsque j'ai trouvé cela, je continue ainsi : dans cette série de fractions ou de facteurs $\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r} \cdot \frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r} \cdot \frac{nrs+ns-2s}{nrs-nr+3r} \cdots \frac{nrs+s}{nrs}$, par le traitement desquels on tire par le Lemm. 4. le rapport $\frac{M}{L}$, on peut observer, que les fractions prises une à une sont plus petites que $\frac{rs+s}{rs-r}$, mais cependant de telle manière qu'elles se rapprochent de cette dernière d'autant plus près que n est plus grand (66) : c'est pourquoi l'une d'entre elles finit par devenir égale à $\frac{rs+s}{rs} = \frac{r+1}{r}$ lui-même ; aussi il faut voir que l'on doit prendre la valeur de n de telle sorte que la fraction (dont le nombre selon l'ordre est m) soit égale à $\frac{r+1}{r}$ lui-même. Or (comme il est évident d'après la loi de la progression) la fraction d'ordre m est $\frac{nrs+ns-ms+s}{nrs-nr+mr}$ qui, égalée à la fraction $\frac{r+1}{r}$, donne $n = m + \frac{ms-s}{r+1}$, et de la $nt = mt + \frac{mst-st}{r+1}$

Je dis que c'est l'indice de la puissance ; si le binôme $r+s$ est élevé à cette puissance, je dis que le terme le plus grand, M, l'emporte sur la limite L un nombre de fois supérieur à $c(s-1)$. En effet, puisque par hypothèse la fraction d'ordre m devient grâce au choix qu'on a fait du nombre n, $\frac{r+1}{r}$, et que d'autre part la fraction $\frac{r+1}{r}$ multipliée par elle-même m fois, c'est-à-dire $\frac{(r+1)^m}{r^m}$ est par construction égale ou supérieur à $c(s-1)$, Hunc in finem assumo rationem quamlibet majoris inæqualitatis, quæ tamen sit minor ratione $\frac{rs+s}{rs-r}$ (pro terminis ad partem sinistram) puta rationem $\frac{rs+s}{rs}$ seu $\frac{r+1}{r}$, eamque toties (m vicibus) multiplico, quoad æquet vel superet rationem $c.\overline{s-1}$ ad 1, hoc est, ut sit $\frac{\overline{r+1}^m}{r^m} \infty$ vel $> c.\overline{s-1}$. Quoties autem id fieri debeat, compendiosè investigatur per logarithmos; nam sumtis quantitatum logarithmis fit $mL\overline{r+1} - mLr \infty$ vel $> L\overline{c.s-1}$, & divisione peracta statim habetur $m \underset{>}{\infty} \frac{L\overline{c.s-1}}{L\overline{r+1}-Lr}$; quo invento sic pergo: In serie illa fractionum sive factorum, $\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r}$. $\frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r}$. $\frac{nrs+ns-2s}{nrs-nr+3r}$ ..... $\frac{nrs+s}{nrs}$, è quorum ductu per Lem. 4. resultat ratio $\frac{M}{L}$, observare licet, quòd singulæ fractiones sint minores quàm $\frac{rs+s}{rs-r}$, ita tamen ut ad hanc continuè propius accedant, quo major sumitur n: itaque quælibet earum aliquando fiet æqualis ipsi $\frac{rs+s}{rs} \infty \frac{r+1}{r}$; Quare videndum, quantus sit accipiendus valor n, ut fractio (cujus numerus ordinis est m) æquetur ipsi $\frac{r+1}{r}$. Est verò (ut ex progressionis lege perspicuum fit) fractio ordine m hæc: $\frac{nrs+ns-ms+s}{nrs-nr+mr}$, quæ adæquata fractioni $\frac{r+1}{r}$, dat $n \infty m + \frac{ms-s}{r+1}$, & inde $nt \infty mt + \frac{mst-st}{r+1}$. Dico, hunc esse indicem potestatis, ad quam si elevetur binomium $r+s$, futurum ut terminus maximus M superet limitem L plus quàm $c.\overline{s-1}$ vicibus. Nam quia fractio ordine m per hanc assumtionem numeri n fit $\frac{r+1}{r}$, per hypoth. & verò $\frac{r+1}{r}$ fractio secum ipsa m vicibus multiplicata, h. e. $\frac{\overline{r+1}^m}{r^m}$, per constr. æquet vel superet $c.\overline{s-1}$,

fit ut

il s'ensuit qu'on dépasse bien plus $c(s - 1)$ que lorsqu'on met cette fraction à la place de celles qui la précèdent ; vu que chacune des préccédentes est supérieure à $\frac{r + 1}{r}$. On l'emportera donc encore plus sur $c(s - 1)$ que lorsque avec les précédentes on remplace toutes celles qui suivent par un, vu que chacune excède au moins le rapport d'égalité. Mais le produit de toutes ces fractions donne le rapport du terme M au terme L ; il est donc tout à fait évident que le terme M l'emporte sur la limite L de plus de $c(s - 1)$ fois. Or on a déjà démontré que $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ etc. De là, le deuxième terme à partir du plus grand M l'emportera sur le deuxième terme à partir de la limite L de plus de $c(s - 1)$ fois, et davantage encore le troisième sur le troisième,etc. C'est pourquoi enfin, tous les termes entre le plus grand M et la limite L l'emportent sur un nombre égal de termes pris à partir des plus grands au-delà de cette limite de $c(s - 1)$ fois ; et ainsi ils l'emportent sur un même nombre de ceux-ci pris $s - 1$ fois de plus de c fois. Donc, d'une façon beaucoup plus évidente, ils l'emportent sur tous ceux qui sont au-delà de la limite L, et qui sont seulement $s - 1$ fois plus nombreux, de plus de c fois.

Je procède de même pour les termes de la partie droite : je prends le rapport $\frac{s + 1}{s} < \frac{rs + r}{rs - s}$, et je fais $\frac{(s + 1)^m}{s^m} > c(r - 1)$; je trouve alors $m > \frac{L(c(r - 1))}{L(s + 1) - Ls}$. Enfin dans la série des fractions

$$\frac{nrs + nr}{nrs - ns + s} \cdot \frac{nrs + nr - r}{nrs - ns + 2s} \cdot \frac{nrs + nr - 2r}{nrs - ns + 3s} \cdots \frac{nrs + r}{nrs}$$

qui correspond au rapport $\frac{M}{\Lambda}$, je pose la fraction qui est d'ordre m, dont il est bien connu que $\frac{nrs + rs - mr + r}{nrs - ns + ms} = \frac{s + 1}{s}$, d'où je tire

$n = m + \frac{mr - r}{s + 1}$, et de là $nt = mt + \frac{mrt - rt}{s + 1}$.

Ayant fait cela, on montrera, comme précédemment, que le binôme $r + s$ élevé à cette puissance, son terme le plus grand M l'emportera sur la limite Λ plus de $c(r - 1)$ fois et par conséquent là aussi, que tous les termes compris entre le plus grand M et la limite Λ l'emporteront sur tous ceux qui sont au-delà de cette limite et qui sont seulement $r - 1$ fois plus nombreux, de plus de c fois. C'est pourquoi nous concluons finalement, que le binôme $r + s$ ayant été élevé à la puissance dont l'indice est égal à la plus grande de ces deux quantités fit ut hæc fractio in omnes præcedentes fractiones ducta multo magis excedat $c . \overline{s-1}$; cùm singulæ præcedentium majores sint quàm $\frac{r+1}{r}$. Ergo magis adhuc superabit $c . \overline{s-1}$, quando ducitur una cum præcedentibus in omnes etiam consequentes, utpote quarum singulæ saltem æqualitatis rationem excedunt. Sed productum omnium harum fractionum rationem exhibet termini M ad L; igitur omnino constat, terminum M superare limitem L plus quàm $c . \overline{s-1}$ vicibus. Jam autem $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ &c. ut ostensum. Hinc multo magis secundus à maximo M secundum à limite L plus quàm $c . \overline{s-1}$ vicibus superabit, & magis adhuc tertius tertium, &c. Itaque tandem omnes termini intra maximum M & limitem L superant totidem è maximis extra hunc limitem plus quàm $c . \overline{s-1}$ vicibus; adeoque superant totidem illorum $s-1$ vicibus sumtos plus quàm c vicibus. Ergo multo evidentius superant omnes extra limitem L, quorum non nisi $s-1$ vicibus plures sunt, plus quàm c vicibus.

Pro terminis dextimis pari modo procedo: Assumo rationem $\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs-s}$, & facio $\frac{\overline{s+1}^m}{s^m} \underset{>}{\infty} c . \overline{r-1}$, invenioq; $m \underset{>}{\infty} \frac{L c . \overline{r-1}}{L \overline{s+1} - L s}$. Deinde, in serie fractionum $\frac{nrs+nr}{nrs-ns+s}$. $\frac{nrs+nr-r}{nrs-ns+2s}$. $\frac{nrs+nr-2r}{nrs-ns+3s} \ldots\ldots \frac{nrs+r}{nrs}$, quæ rationem $\frac{M}{\Lambda}$ innuit, pono fractionem, quæ ordine est m, nempe $\frac{nrs+nr-mr+r}{nrs-ns+ms} \infty \frac{s+1}{s}$, indeque elicio $n \infty m + \frac{mr-r}{s+1}$, ac proin $nt \infty mt + \frac{mrt-rt}{s+1}$. Quo facto similiter ostendetur, ut antea, quòd binomio $r+s$ ad hanc potestatem sublato, terminus ejus maximus M superabit limitem Λ plus quàm $c . \overline{r-1}$ vicibus & per consequens etiam, quòd omnes maximo M & limite Λ conclusi superabunt omnes extra hunc limitem, quorum non nisi $r-1$ vicibus plures sunt, plus quam c vicibus. Itaque finaliter tandem concludimus, quòd elevato binomio $r+s$ ad potestatem, cujus index æquetur majori harum duarum quantitatum $mt + \frac{mst-st}{r+1}$

$mt + \frac{mst - st}{r + 1}$ et $mt + \frac{mrt - rt}{s + 1}$ tous les termes, pris ensemble, compris entre chacune des deux limites L et Λ, l'emporteront d'un nombre de fois bien plus grand que c sur tous les termes pris ensemble qui s'étendent de chaque côté au-delà des limites. On a donc trouvé une puissance finie, telle qu'elle ait la propriété désirée. C.Q.F.D.

Propos. Princip. Il s'ensuit enfin la proposition elle-même, pour laquelle tout cela a été formulé, mais dont la démonstration se fait maintenant par la seule application des lemmes préparatoires à l'objet présent. Pour éviter la fatigue d'une circonlocution, j'appelerai "*féconds*" ou "*fertiles*" les cas dans lesquels un évènement peut se produire, et "*stériles*" ceux dans lesquels le même événement ne peut se produire : de même, j'appellerai expériences "*fécondes*" ou "*fertiles*" celles pour lesquelles on constate qu'un des cas fertiles peut survenir, et "*inféconde*s" ou "*stériles*" celles pour lesquelles on observe qu'un des cas stériles se produit. Soit donc le nombre de cas fertiles au nombre de cas stériles précisément ou approximativement dans le rapport $\frac{r}{s}$ et qu'il soit en conséquence, au nombre de tous dans le rapport $\frac{r}{r+s}$ ou $\frac{r}{t}$, rapport qu'encadrent les limites $\frac{r+1}{t}$ et $\frac{r-1}{t}$. Il faut montrer que l'on peut concevoir des expériences en un nombre tel qu'il soit plus vraisemblable d'autant de fois que l'on veut (soit c) que le nombre des observations tombe à l'intérieur de ces limites plutôt qu'en dehors, c'est-à-dire que le nombre des observations fertiles soit au nombre de toutes les observations dans un rapport ni plus grand que $\frac{r+1}{t}$, ni plus petit que $\frac{r-1}{t}$.

Dem. Posons nt comme le nombre d'observations que l'on doit faire, et cherchons la grandeur de l'espérance ou la grandeur de la probabilité, lorsque toutes sont fécondes sauf d'abord aucune, ensuite une, deux, trois, quatre, etc. qui sont stériles. Or, puisque par hypothèse nous sommes en présence pour n'importe quelle observation de t cas et que parmi ceux-ci r sont féconds et s stériles et que les cas d'une observation pris un à un combinés avec les cas d'une autre pris un à un, et combiné de nouveau avec les cas d'une troisième pris un à un, d'une 4ème etc. peuvent être joints, on voit facilement que la Règle rattachée à la fin des notes de la

$\frac{mst - st}{r+1}$ & $mt + \frac{mrt - rt}{s+1}$, omnes ſimul termini inter utrumque limitem L & Λ comprehensi multo pluribus quàm c vicibus ſuperabunt omnes ſimul terminos extra limites ab utraque parte protenſos. Reperta igitur eſt finita poteſtas, quæ optatam habeat proprietatem. Q. E. F.

Propoſ. Princip. Sequitur tandem Propoſitio ipſa, cujus gratia hæc omnia dicta ſunt, ſed cujus nunc demonſtrationem ſola Lemmatum præmiſſorum applicatio ad præſens inſtitutum abſolvet. Ut circumlocutionis tædium vitem, vocabo caſus illos, quibus eventus quidam contingere poteſt, *fœcundos* ſeu *fertiles*; & *ſteriles* illos, quibus idem eventus poteſt non contingere: nec non experimenta *fœcunda* ſive *fertilia* illa, quibus aliquis caſuum fertilium evenire deprehenditur; & *infœcunda* ſive *ſterilia*, quibus ſterilium aliquis contingere obſervatur. Sit igitur numerus caſuum fertilium ad numerum ſterilium vel præcisè vel proximè in ratione $\frac{r}{s}$, adeoque ad numerum omnium in ratione $\frac{r}{r+s}$ ſeu $\frac{r}{t}$, quam rationem terminent limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$. Oſtendendum eſt, tot poſſe capi experimenta, ut datis quotlibet (puta c) vicibus veriſimilius evadat, numerum fertilium obſervationum intra hos limites quàm extra caſurum eſſe, h. e. numerum fertilium ad numerum omnium obſervationum rationem habiturum nec majorem quàm $\frac{r+1}{t}$, nec minorem quàm $\frac{r-1}{t}$.

Dem. Ponatur numerus capiendarum obſervationum nt, & quæratur, quanta ſit expectatio, ſeu quanta probabilitas, ut omnes exiſtant fœcundæ, exceptis primo nulla, dein una, duabus, 3, 4 &c. ſterilibus. Quandoquidem autem in qualibet obſervatione præſto ſunt ex hyp. t caſus, eorumque r fœcundi & s ſteriles, & ſinguli caſus unius obſervationis cum ſingulis alterius combinari, combinatique rurſus cum ſingulis tertiæ, 4^tæ &c. conjungi poſſunt, facile patet, huic negotio quadrare Regulam Annotationibus Prop. XIII.

Prop. XIII (67) de la première Part. et son deuxième Corollaire qui contient la formule générale grâce à laquelle on sait que l'espérance de n'avoir aucune observation stérile est $r^{nt} : t^{nt}$, d'en avoir une $\frac{nt}{1} r^{nt-1}s : t^{nt}$, deus stériles $\frac{nt.nt-1}{1.2} r^{nt-2} ss : t^{nt}$, trois $\frac{nt.nt-1.\ nt-2}{1.2.3} r^{nt-3}s^3 : t^{nt}$, et ainsi de suite, s'appliquent parfaitement à cette affaire ; et de là (après avoir éliminé le terme commun t^{nt}) on sait que les degrés de probabilité ou les nombres de cas pour lesquels il peut arriver que toutes les expériences soient fécondes, ou que toutes le soient sauf une qui est stérile, ou toutes sauf deux, 3, 4, etc. qui sont stériles s'expriment respectivement par r^{nt}, $\frac{nt}{1} r^{nt-1}s$, $\frac{nt.nt-1}{1.2} r^{nt-2}ss$, $\frac{nt.nt-1.nt-2}{1.2.3} r^{nt-3}s^3$ etc. c'est-à-dire par les termes eux-mêmes de la puissance nt du binôme $r + s$; et, d'après nos précédents lemmes, le reste est désormais évident. Il est clair en effet, d'aprés la nature de la progression, que le nombre de cas, qui conduisent à nr expériences fécondes et ns stériles, est justement le plus grand terme M, que, bien sûr, ns termes précédent et nr termes suivent, à nouveau d'après le Lemm. 3, et que le nombre des cas pour lesquels il arrive à $nr + n$ ou $nr - n$ expériences d'être fécondes et à toutes les autres d'être stériles est exprimé par les termes L et Λ, dont on sait qu'ils sont distants d'un intervalle de n termes de part et d'autre du plus grand M ; et par conséquent aussi, que la somme des cas pour lesquels il arrive que pas plus de $nr + n$ et pas moins de $nr - n$ expériences soient fécondes est exprimée par la somme des termes compris entre les limites L et Λ ; la somme des cas restants, pour lesquels il arrive à un plus grand ou un plus petit nombre d'expériences d'être fécondes, est exprimée par la somme de tous les autres termes situés à l'extérieur des limites L et Λ. C'est pourquoi, étant donné que l'on peut prendre une puissance du binôme si grande que la somme des termes compris entre chacune des limites L et Λ l'emporte de plus de c fois sur la somme de tous les autres situé à l'extérieur de ces limites, d'après les Lemm. 4 et 5., il s'ensuit alors que l'on peut prendre des observations en un nombre tel que la somme des cas pour lesquels il arrive que le nombre d'observations fertiles soit au nombre de toutes dans un rapport qui ne sort pas des limites $\frac{nr+n}{nt}$ et $\frac{nr-n}{nt}$, soit $\frac{r+1}{t}$ et $\frac{r-1}{t}$,

XIII. primæ Part. in fine ſubnexam, & ejus Corollarium ſecundum, quod univerſalem formulam continet, cujus ope cognoſcitur, quòd expectatio ad nullam obſervationem ſterilem ſit $r^{nt} : t^{nt}$, ad unam $\frac{nt}{1} r^{nt-1} s : t^{nt}$, ad duas ſteriles $\frac{nt \cdot nt-1}{1 \cdot 2} r^{nt-2} ss : t^{nt}$, ad tres $\frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{nt-3} s^3 : t^{nt}$, & ſic deinceps; adeoque (rejecto communi nomine t^{nt}) quod gradus probabilitatum ſeu numeri caſuum, quibus contingere poteſt, ut omnia experimenta ſint fœcunda, vel omnia præter unum ſterile, vel omnia præter duo, 3, 4 &c. ſterilia, ordine exprimantur per r^{nt}, $\frac{nt}{1} r^{nt-1} s$, $\frac{nt \cdot nt-1}{1 \cdot 2} r^{nt-2} ss$, $\frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{nt-3} s^3$, &c. ipſiſſimos nempe terminos poteſtatis nt binomii $r+s$, in Lemmatis modo noſtris excuſſæ: unde jam cætera omnia oppido manifeſta ſunt. Patet enim ex progreſſionis natura, quòd numerus caſuum, qui cum ns ſterilibus experimentis nr fœcunda adducunt, ſit ipſe terminus maximus poteſtatis M, utpote quem ns termini præcedunt, & nr ſequuntur, per Lem. 3. item, quòd numeri illorum caſuum, quibus aut $nr+n$ aut $nr-n$ experimentis fœcundis cæteriſque ſterilibus eſſe contingit, exhibeantur per terminos poteſtatis L & Λ, quippe intervallo n terminorum à maximo M utrinque diſtantes; & per conſequens etiam, quòd ſumma caſuum, quibus non pluribus experimentis quàm $nr+n$, nec paucioribus quàm $nr-n$ fœcundis eſſe contingit, exprimatur per ſummam terminorum poteſtatis intra limites L & Λ comprehenſorum; ſumma reliquorum caſuum, quibus aut plura aut pauciora experimenta fœcunda redduntur, per cæterorum terminorum limites hos L & Λ excedentium ſummam expreſſa. Quare cùm tanta ſumi poſſit poteſtas binomii, ut ſumma terminorum utroque limite L & Λ incluſorum pluribus quàm c vicibus ſuperet ſummam cæterorum limites hos excedentium, per Lem. 4. & 5. ſequitur etiam, capi poſſe tot obſervationes, ut ſumma caſuum, quibus numero fertilium obſervationum ad numerum omnium rationem habere contingit, non excedentem limites $\frac{nr+n}{nt}$ & $\frac{nr-n}{nt}$, et l'emporte sur la somme des cas restants d'un nombre de fois supérieur à c ; c'est-à-dire que le rapport du nombre d'observations fertiles au nombre total tombera à l'intérieur de ces limites $\frac{r+1}{t}$ et $\frac{r-1}{t}$ plutôt qu'à l'extérieur avec une probabilité qui est rendue plus de c fois supérieure. Ce qu'il fallait démontrer.

Mais dans les applications numériques, il va de soi que plus les nombres r, s, et t prennent des valeurs élevées en conservant les mêmes rapports, plus les limites $\frac{r+1}{t}$ et $\frac{r-1}{t}$ qui encadrent le rapport $\frac{r}{t}$ peuvent être étroitement resserrées. Ainsi, si le rapport $\frac{r}{s}$ entre les nombres de cas, à déterminer expérimentalement, était par exemple sesquialtère, pour r et s je ne pose pas 3 et 2, mais 30 et 20, ou 300 et 200 etc. et il suffirait d'avoir posé $r = 30$, $s = 20$, et $t = r + s = 50$, pour que les limites deviennent $\frac{r+1}{t} = \frac{31}{50}$ et $\frac{r-1}{t} = \frac{29}{50}$ et qu'on pose en outre $c = 1000$ on aura ainsi, d'après ce qui a été écrit dans le Scholie pour terme à

gauche :

$$m > \frac{L(c(s-1))}{L(r+1) - Lr} = \frac{4.2787536}{142405} < 301$$

$$nt = mt + \frac{mst - st}{r+1} < 24728$$

droite :

$$m > \frac{L(c(r-1))}{L(s+1) - Ls} = \frac{4.4623980}{211893} < 211$$

$$nt = mt + \frac{mrt - rt}{s+1} = 25550$$

De là on déduit, grâce à ce qui a été démontré ici, qu'ayant fait 25550 expériences, il est vraisemblable de bien plus de mille fois que le rapport du nombre des observations fertiles au nombre de toutes sera compris entre les limites $\frac{31}{50}$ et $\frac{29}{50}$ plutôt qu'en dehors. Et par le même raisonnement, on saura ainsi, lorsqu'on pose $c = 10000$, ou, $c = 100000$, que ce sera plus probable de plus de 10000 fois, si on fait 31258 expériences ; et de plus de 100000 fois

$\frac{nr-n}{nt}$, seu $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$, pluribus quàm c vicibus superet summam casuum reliquorum; h. e. ut pluribus quàm c vicibus probabilius reddatur, rationem numeri observationum fertilium ad numerum omnium intra hos limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$, quàm extra casuram esse. Quod demonstrandum erat.

In speciali autem horum applicatione ad numeros satis per se patet, quòd quo majores in eadem ratione assumuntur numeri r, s & t, eo arctius quoque constringi possunt limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$ rationis $\frac{r}{t}$. Idcirco si ratio inter numeros casuum $\frac{r}{s}$, per experimenta determinanda, sit ex. gr. sesquialtera, pro r & s non pono 3 & 2, sed 30 & 20, vel 300 & 200 &c. sufficiat posuisse $r \infty 30$, $s \infty 20$, & $t \infty r+s \infty 50$, ut limites fiant $\frac{r+1}{t} \infty \frac{31}{50}$, & $\frac{r-1}{t} \infty \frac{29}{50}$; & statuatur insuper $c \infty 1000$: sic fiet ex Scholii præscripto, pro terminis ad

sinistram:

$$m > \frac{Lc\,.\,\overline{s-1}}{L\,\overline{r+1}-Lr} \infty \frac{4.2787536}{142405} < 301$$

$$nt \infty mt + \frac{mst-st}{r+1} < 24728$$

dextram:

$$m > \frac{Lc\,.\,\overline{r-1}}{L\,\overline{s+1}-Ls} \infty \frac{4.4623980}{211893} < 211.$$

$$nt \infty mt + \frac{mrt-rt}{s+1} \infty 25550.$$

Unde per ibi demonstrata infertur, quòd institutis 25550 experimentis multo plus millies verisimilius sit, rationem quam numerus fertilium observationum obtinebit ad numerum omnium, intra hos limites $\frac{31}{50}$ & $\frac{29}{50}$ casuram, quàm extra. Atque eodem pacto, posita $c \infty 10000$, aut $c \infty 100000$ &c. cognoscetur, idem plus decies millies probabilius fore, si fiant experimenta 31258; & plus quàm centies millies, si on prend *36966* etc. et ainsi de suite à l'infini, sans cesser n'est-ce pas d'ajouter *5708* expériences nouvelles à partir de *25550* De là, enfin,semble découler cette chose extraordinaire que si les observations de tous les événements se poursuivaient à travers l'éternité entière, (la probabilité débouchant à la fin sur la certitude parfaite) nous saisirions que toute chose dans le monde arrive par des raisons certaines (68) et par une loi constante du retour des choses ; à tel point que même dans les choses les plus accidentelles et les plus fortuites nous sommes tenus de reconnaître une quasi nécessité et pour ainsi dire une fatalité ; je ne sais si Platon lui-même n'a pas voulu suggérer cette fatalité, dans son dogme du retour universel des choses, selon lequel il a prédit que toute chose reviendrait à son état antérieur après d'innombrables siècles

(69) .

millies, ſi capiantur 36966, &c. & ſic porrò in infinitum, additis nempe continuo ad 25550 aliis 5708 experimentis. Unde tandem hoc ſingulare ſequi videtur, quòd si eventuum omnium obſervationes per totam æternitatem continuarentur, (probabilitate ultimo in perfectam certitudinem abeunte) omnia in mundo certis rationibus & conſtanti viciſſitudinis lege contingere deprehenderentur; adeo ut etiam in maximè caſualibus atque fortuitis quandam quaſi neceſſitatem, &, ut ſic dicam, fatalitatem agnoſcere teneamur; quam neſcio annon ipſe jam Plato intendere voluerit, ſuo de univerſali rerum apocataſtaſi dogmate, ſecundum quod omnia poſt innumerabilium ſeculorum decurſum in priſtinum reverſura ſtatum prædixit.

NOTES

(1) J'ai traduit "Doctrina" par "Doctrine" plutôt que par "Art", "Science", "Théorie" ou "Méthode, malgré l'ambiguité actuelle de cette expression, par allusion au titre du livre d'Abraham de Moivre "Doctrine of Chances" paru en 1718. Par ailleurs Saurin, dans son article du "Journal des Savants" de 1706, écrit : "La troisième partie fait voir l'usage de la doctrine des permutations,... c'est dans la quatrième partie que l'auteur étend sa Méthode ...". Bernoulli, lui, n'utilise que le mot "Doctrina" dans les titres des 2ème, 3ème et 4ème chapitres.

(2) J'ai beaucoup hésité entre "Civiles" et "Politiques" ; l'expression même utilisée par Bernoulli "in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis" rappelle la classification des sciences d'Aristote que l'on peut résumer en disant que celui-ci distingue 3 catégories :

* Les sciences théorètiques qui étudient les vérités de la nature (Mathématiques et Physique) et de l'être en soi (Métaphysique et Théologie).

* Les sciences pratiques qui étudient l'action(Ethiquqe, Economie et Politique)

* Les sciences poétiques qui étudient la création (Peinture, Sculpture, Littérature).

L'éthique, l'économie, la politique étudient l'art de vivre en tant qu'individu, chef de famille et citoyen.

Vastel, dans sa traduction de la "Lettre au lecteur" de Nicolas Bernoulli, en 1801, traduit par " affaires civiles " ; Saurin dans l'article du "Journal des Savants" de 1706 écrit : "...ce qu'il'étend à la vie civile et aux affaires particulières... aux choses qui regardent la vie civile et les affaires domestiques" ; Fontenelle dans son Eloge à l'Académie des Sciences de 1705 écrit : "Il la portait même (cette matière) jusqu'aux choses Morales et Politiques ..." Varignon, dans une lettre à Jean Bernoulli du 8 Mai 1708, écrit : "... y ayant fait entrer jusqu'aux matières de Morale et de politique " ; Nicolas Bernoulli, le 26 février 1711, dans une lettre à Montmort, écrit : "Il serait à souhaiter que quelqu'un voulût entreprendre d'achever cette dernière partie, et de traitter (sic) à fonds les choses de politique et de morale ..."Arnauld et Nicole écrivent dans "La Logique ou l'Art de Penser" (1662) (notée maintenant LPR (Logique de Port-Royal) dans la pagination de l'édition Flammarion de 1970) : "... Cette fausseté d'esprit n'est pas seulement cause des erreurs que l'on mêle dans les sciences, mais aussi de la plupart des fautes que l'on commet dans la vie civile , des querelles injustes, des procès mal fondés, des avis téméraires, des entreprises mal concertées."(p37) - voir également p.323 et suivantes.

(3) Bernoulli suit ici une distinction classique de la scolastique entre la vérité des choses, "Veritas rei, veritas existentiae, veritas in essendo", la réalité et la vérité de la connaissance, "veritas intellectus, veritas in cognoscendo" - "L'analyse critique de la connaissance commencée par Descartes, poursuivie par Locke, Leibniz, Berkeley, Hume, Kant, a accentué cette distinction entre la vérité de la connaissance et le fait de saisir l'être en soi, distinction qui trouve son point culminant dans le criticisme kantien, et par suite, le mot vérité s'est de plus en plus appliqué à la connaissance seule" A. Lalande, Vocabulaire de la Philosophie, PUF, article "Vérité" p. 1198. Pour Bernoulli, la vérité est la vérité des choses, et c'est la certitude qui se dédouble en certitude ontique et certitude épistémique sans qu'il se prononce sur leurs rapports. Cette distinction s'exprime de manière plus complexe dans la Logique de Port Royal où la distinction est faite entre "vérité essentielle" et "vérité existentielle", vérités du monde divin et vérités du monde humain, mais toutes deux "vérités des choses", où la croyance certaine en la vérité de la chose se résorbe dans sa vérité : "la première réflexion est, qu'il faut mettre une extrême différence entre deux sortes de vérités : les unes qui regardent seulement la nature des choses et leur essence immuable indépendamment de leur existence ; et les autres qui regardent les choses existantes, et surtout les événements humains et contingents, qui peuvent être et n'être pas quand il s'agit de l'avenir, et qui pouvaient n'avoir pas été quand il s'agit du passé. J'entends tout ceci selon leurs causes prochaines, en faisant abstraction de leur ordre immuable dans la providence de Dieu, parce que d'une part il n'empêche point la contingence, et que de l'autre ne nous étant pas connu, il ne contribue rien à nous faire croire

les choses." (LPR, p 413-414.)
La connaissance qui juge alors de ces vérités selon l'ordre de la certitude détermine la croyance et, pour ce qui est du futur, la conduite de la vie. Mais il y a deux voies de la connaissance : celle de la raison ou de la Science, "toute connaissance d'un objet tirée de l'objet même" qui est certaine, et celle de l'autorité qui peut être divine et certaine ou humaine et soumise à l'erreur.

"Car il y a deux voies générales qui nous font croire qu'une chose est vraie. La première est la connaissance que nous en avons par nous-mêmes, pour en avoir reconnu et recherché la vérité, soit par nos sens, soit par notre raison ; ce qui se peut appeler généralement **raison**, parce que les sens mêmes dépendent du jugement de la raison ; ou **science**, prenant ici ce nom plus généralement qu'on ne le prend dans les écoles, pour toute connaissance d'un objet tirée de l'objet même.

L'autre voie est l'autorité des personnes dignes de créance, qui nous assurent qu'une telle chose est, quoique par nous-mêmes nous n'en sachions rien; ce qui s'appelle foi, ou créance, selon cette parole de S. Augustin : **Quod scimus, debemus rationi ; quod credimus, auctoritati**.

Mais comme cette autorité peut-être de deux sortes, de Dieu ou des hommes, il y a aussi deux sortes de foi, divine et humaine.

La foi divine ne peut être sujette à erreur, parce que Dieu ne peut ni nous tromper, ni être trompé.

La foi humaine est de soi-même sujette à erreur, parce que tout homme est menteur, selon l'Ecriture" (LRP p. 409)
"La créance des événements qui dépendent de la foi humaine" (LPR, p.413) concerne les événements humains et contingents ; ainsi l'incertitude liée à l'erreur du témoignage semble se confondre -ou se diluer- avec l'incertitude qui découle du fait que les événements sont contingents. En fait, les événements étant contingents, on ne peut détecter l'erreur au non de la nécessité (LPR, p 414)et on ne peut éliminer la diversité des témoignages qui manifestent la contingence (voir ici la note (12)).

(4) Sur ces problèmes voir les <u>Essais de Théodicée</u> de Leibniz (1710) et le <u>Court Traité</u> de Spinoza (1660-63).

(5) "témoignage de nos propres yeux" (voir note (3))

(6) "Il y a des jeux où dix personnes mettant chacun un écu, il n'y en a qu'un qui gagne le tout, et tous les autres perdent : ainsi chacun n'est au hasard que de perdre un écu, et en peut gagner neuf. Si l'on ne considérait que le gain et la perte en soi, il semblerait que tous y ont de l'avantage : mais il faut de plus considérer que si chacun peut gagner neuf écus, et n'est au hasard que d'en perdre un, il est aussi neuf fois plus probable à l'égard de chacun qu'il perdra son écu, et ne gagnera pas les neuf. Ainsi chacun a pour soi neuf écus à espérer, un écu à perdre, neuf degrés de probabilité de perdre un écu, et un seul de gagner les neuf écus : ce qui met la chose dans une parfaite égalité." (LPR, p.428)
J'ai traduit : "cinq probabilités ou parties dont trois <u>militent</u> ..." afin de conserver le sens d'effort "militant" qui existe dans le mot <u>"partibus"</u> ; l'idée d'action, positive ou négative, favorable ou défavorable, est nettement soulignée par Bernoulli.

(7) "... Et néanmoins, ainsi que nous avons déjà marqué ci-dessus, il y a des choses que nous ne connaissons que par une foi humaine, que nous devons tenir pour aussi certaines et aussi indubitables, que si nous en avions des démonstrations mathématiques : comme ce que l'on sait par une relation constante de tant de personnes, qu'il est moralement impossible qu'elles eussent pu conspirer ensemble pour assurer la même chose, si elle n'était vraie. ...
... Il est vrai qu'il est souvent assez difficile de marquer précisément quand la foi humaine est parvenue à cette certitude, et quand elle n'y est pas encore parvenue. Et c'est ce qui fait tomber les hommes en deux égarements opposés ; dont l'un est de ceux qui croient trop légèrement sur les moindres bruits, et l'autre, de ceux qui mettent ridiculement la force de l'esprit à ne pas croire les choses les mieux attestées, lorsqu'elles choquent les préventions de leur esprit. Mais on peut néanmoins marquer de certaines bornes qu'il faut avoir passées pour avoir cette certitude humaine, et d'autres au-delà desquelles on l'a certainement, en laissant un milieu entre ces deux sortes de bornes, qui approche plus de la certitude ou de l'incertitude, selon qu'il approche plus des unes ou des autres." (LPR, p.410)

"Cela étant fait, si toutes ces circonstances sont telles, qu'il n'arrive jamais ou fort rarement que de pareilles circonstances soient accompagnées de fausseté, notre esprit se porte naturellement à croire que cela est vrai, et il a raison de le faire, surtout dans la conduite de la vie, qui ne demande pas une plus grande certitude que cette certitude morale, et qui se doit même contenter

en plusieurs rencontres de la plus grande probabilité.
Que si au contraire ces circonstances ne sont pas telles qu'elles ne se trouvent fort souvent avec la fausseté, la raison veut ou que nous demeurions en suspens, ou que nous tenions pour faux ce qu'on nous dit quand nous ne voyons aucune apparence que cela soit vrai, encore que nous n'y voyons pas une entière impossibilité." (LPR, p.415).

(8) "l'arbitre", c'est-à-dire la volonté au sens le plus général, tel qu'il est utilisé dans les expressions "libre arbitre" et "serf arbitre" ; en un sens plus précis, la puissance de choisir.

(9) par opposition à la cause première, celle qui n'a pas elle-même de cause

(10) "La contingence n'exclut pas toujours toute nécessité, ni même les causes secondes" et Bernoulli a alors montré que la contingence des phénomènes naturels n'est qu'apparente et liée à notre ignorance (voir ici la note (36)). Pourquoi Bernoulli écrit-il alors "surtout" pour laisser la place à la possibilité de plénomènes contingents ? On peut supposer qu'il cherche à la fois à affirmer sa croyance en un déterminisme ontologique - ou théologique - et à préserver les thèses orthodoxes du libre arbitre..." que d'autres en disputent"... et ils sont nombreux !... Spinoza écrit dans les Pensées Métaphysiques :
"LA POSSIBILITE ET LA CONTINGENCE NE SONT RIEN QUE DES DEFAUTS DE NOTRE ENTENDEMENT. Si on voulait le nier, il ne serait pas difficile de réfuter cette erreur. Si l'on considère la nature, en effet, comme elle dépend de Dieu, on ne trouvera dans les choses rien de contingent, c'est-à-dire qui, du côté de l'être réel, puisse exister ou ne pas exister, ou, comme on dit, soit contingent réellement;" (Spinoza, La Pléiade, Gallimard, p.256)...
"LA CONCILIATION DE LA LIBERTE DE NOTRE LIBRE ARBITRE AVEC LA PREDESTINATION DE DIEU DEPASSE LA COMPREHENSION DE L'HOMME". (id p 257).

Leibniz, dans les Essais de Théodicée :

"Tout est donc certain et déterminé par avance dans l'homme, comme partout ailleurs, et l'âme humaine est une espèce d' automate spirituel , quoique les actions contingentes en général, et les actions libres en particulier, ne soient point nécessaires pour cela d'une nécessité absolue, laquelle serait véritablement incompatible avec la contingence. Ainsi ni la futurition en elle-même, toute certaine qu'elle est, ni la prévision infaillible de Dieu, ni la prédétermination des causes, ni celle des décrets de Dieu, ne détruisent point cette contingence et cette liberté" (p 132). (Bernoulli écrit : ...veritatem existentiae aut futuritionis illius rei" (p.210) : futurition ou existence future).

(11) Voir l'article 84 des "Meditationes" (Bernoulli T III p.70) écrit en français : "On n'appelle pas bonheur tout le bien qui nous arrive, ni malheur tout le mal ; mais seulement lorsqu'il y a plus ou autant de probabilité pour le contraire ; et le bonheur est d'autant plus grand, qu'il y a moins de probabilités pour le bien."

(12) J'ai traduit par "Argument" plutôt que par "Preuve" pour insister sur le rôle de ce qui est montré, ce qui est apporté afin d'appuyer ou réfuter une "chose". "Preuve" convient plutôt pour "Probatio", la preuve absolue convaincante.
Dictionnaire Universel de Furetière (1688-9) :
"Argument : Terme de philosophie. C'est un raisonnement qu'on fait en posant certains principes dont on tire des conséquences. Les logiciens divisent leurs Arguments en Syllogismes, Enthymèmes, Inductions, etc. Argument démonstratif ou convaincant. Argument sophistique ou captieux. Un Argument en forme est un syllogisme fait selon les règles de la logique. Aristote dit que l'enthymème est l' Argument de la Rhétorique, comme le syllogisme est celui de la Logique.
En une plus étroite signification, on le dit des indices, des conjectures, des présomptions. On a tiré de sa fuite un argument qu'il était coupable".

(13) Axiome est pris ici au sens utilisé au XVII ème siècle de principe qu'on juge vrai ou bon.

(14) στοχάζομαι: viser ; avoir comme but ; atteindre/rechercher/conjecturer.
στόχασμα : javeline
στοχαστικός: qui sait viser, ou conjecturer.
La "Stochastique", notion parfaitement appropriée au projet de Bernoulli, désigne donc l'art d'accorder la visée et le but - comme peut le pratiquer le lanceur de javelot -; "Il est bien dommage qu'on n'ait pas conservé dans son acception première le mot introduit par Bernoulli : la Stochastique , c'est à dire le savoir conjecturer, qui évoque par son origine grecque, non point d'abord

le hasard, mais la décision. Il s'agit avant tout de fonder des méthodes de conduite rationnelle ; et le calcul proprement dit des probabilités n'y est qu'auxiliaire de la motivation. C'est cela qui a été oublié lorsque, il y a environ cent ans, le calcul des probabilités a cru conquérir son autonomie en se détachant de l'étude des décisions humaines, pour ne plus s'occuper que de "philosophie naturelle", c'est-à-dire de physique". (G. Th. Guilbaud. "Les Théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation". Economie appliquée, Tome V, n°4, 1952).

Cet art de mesurer qui a un but : "la sagesse du philosophe, la sagacité du politique", ne se réduit pas à une technique d'évaluation des probabilités mais s'ouvre sur un art du choix des arguments (règles 1 à 4) et un art de l'utilisation des probabilités -le parti le plus sûr- (règles 5 à 9) ; mais en fait Bernoulli n'a pas développé cet aspect de sa recherche, le plus proche de la tradition des Topiques et de la Rhétorique d'Aristote.

(15) "Il faut joindre les circonstances, et non les séparer ; parce qu'il arrive souvent qu'un fait qui est peu probable selon une seule circonstance, qui est ordinairement une marque de fausseté, doit être estimé certain selon d'autres circonstances ; et qu'au contraire un fait qui nous paraîtrait vrai selon une certaine circonstance qui est d'ordinaire jointe avec la vérité, doit être jugé faux selon d'autres qui affaiblissent celle-là, comme on expliquera dans le chapitre suivant." (LPR, p.422)

..."Mais ou notre esprit demeure en suspens, si les circonstances particulières ne font qu'affaiblir le poids des circonstances communes, ou il se porte à croire que le fait est faux si elles sont telles qu'elles soient ordinairement des marques de fausseté." (LPR, p.424)

(16) "Pour juger de la vérité d'un événement, et me déterminer à le croire ou à ne le pas croire, il ne le faut pas considérer nuement et en lui-même ; comme on ferait une proposition de Géométrie ; mais il faut prendre garde à toutes les circonstances qui l'accompagnent, tant intérieures qu'extérieures. J'appelle circonstances intérieures celles qui appartiennent au fait même, et extérieures celles qui regardent les personnes par le témoignage desquelles nous sommes portés à le croire." (LPR, p.414-415).

"... Ainsi avant que nous pouvoir frayer le chemin à la recherche des preuves et arguments il faut savoir le lieu où il sont comme cachés. ... Or parce que les arguments ont tous leurs lieux propres, dont ils sont extraits, la division des lieux et des arguments est une mesme, savoir que <u>les uns sont artificiels et dépendent des préceptes de l'art : les autres hors de l'art.</u>

Scipion Dupleix <u>"La logique ou art de discourir et raisonner"</u> 1603. Liv.VII chap. II.

(17) "Le Philosophe dit que l'Euthymème est un syllogisme imparfait composé de choses vray-semblables, et de signes ou marques.... Mais d'ailleurs il faut remarquer que tout ce qui est vray-semblable, possible, probable ou croyable diffère du signe, indice, argument, note, ou marque : parce que nous appréhendons les choses vraisemblables par le jugement : et les marques par quelqu'un des cinq sens extérieurs, à savoir la veue, l'ouie, l'odorast, le gout, l'attouchement. Or des marques les unes sont nécessaires, les autres contingentes ou advenantes.... Les marques non naturelles sont celles qui surviennent par quelque perturbation, passion, ou affection, et de celles-là l'argument ne se peut tirer ni certain, ni nécessaire : comme dire Socrates est pâle, ou cette fille là a de pasles couleurs, par conséquent celle-ci est amoureuse, celui-là a peur. Car il n'y a rien d'asseuré en telle conséquence, la paleur pouvant venir d'ailleurs, comme de quelque indisposition ou relais de maladie. Toutefois quand on peut entasser plusieurs tels signes, marques ou indices ensemble tendans à une même preuve, ils servent beaucoup à persuader : comme pour convaincre un homme d'homicide, vérifier qu'il avait menacé le meurtri de le tuer, qu'il a été trouvé près du corps l'espée au poing nue et sanglante, qu'il s'en est fui, qu'estant appréhendé et interrogé sur ce fait, il a chancelé et changé de couleur, etc..." Scipion Dupleix op. cit., Livre V chap. 18.

L'exemple considéré ici par Bernoulli semble être "classique" : on le retrouve chez Ciceron dans le "De Inventione" et la "Rhetorica ad Herennium" ainsi que chez Quintilien dans l'"Institutio Oratoria". A ce sujet, consulter l'article de D. Garber et S. Zabell "On the emergence of probability" dans Archive for the History of exact sciences, Vol 21, 1979, p.33 à 53.

(18) "Il faut donc poser pour une maxime certaine et indubitable dans cette rencontre, que la seule possibilité d'un événement n'est pas une raison suffisante pour me le faire croire ; et que je puis aussi avoir raison de le croire, quoique je ne juge pas impossible que le contraire soit arrivé : de sorte que de deux événements je pourrai avoir raison de croire l'un et de ne pas croire l'autre, quoique je les

croie tous deux possibles.
Mais par où me déterminerai-je donc à croire l'un plutôt que l'autre, si je les juge tous deux possibles ? Ce sera par cette maxime." (LPR p. 414).... Cette maxime : voir la note (13).

(19) "Que si au contraire ces circonstances communes qui nous auraient porté à croire une chose, se trouvent jointes à d'autres circonstances particulières qui ruinent dans notre esprit, comme nous venons de dire, les motifs de créance qu'il tiroit de ces circonstances communes ; ou qui même soient telles qu'il soit fort rare que de semblables circonstances ne soient pas accompagnées de fausseté, nous n'avons plus alors la même raison de croire cet événement....
...Voici un exemple qui peut éclaircir cette remarque.
C'est une circonstance commune à beaucoup d'actes, d'être signés par deux Notaires, c'est-à-dire, par deux personnes publiques, qui ont d'ordinaire grand intérêt de ne point commettre de fausseté ; parce qu'il y va non seulement de leur conscience et de leur honneur, mais aussi de leur bien et de leur vie. Cette seule considération suffit, si nous ne savons point d'autres particularités d'un contrat, pour croire qu'il n'est point antidaté ; non qu'il n'y en puisse avoir d'antidatés, mais parce qu'il est certain que de mille contrats il y en a neuf cent quatre-vingt-dix-neuf qui ne le sont point : de sorte qu'il est incomparablement plus probable, que ce contrat que je vois est l'un des neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf que non pas qu'il soit cet unique qui entre mille se peut trouver antidaté. Que si la probité des Notaires qui l'ont signé m'est parfaitement connue, je tiendrai alors pour très-certain qu'ils n'y auront point commis de fausseté.
Mais si à cette circonstance commune d'être signé par deux Notaires, qui m'est une raison suffisante, quand elle n'est point combattue par d'autres, d'ajouter foi à la date d'un contrat, on y joint d'autres circonstances particulières, comme que ces Notaires soient diffamés pour être sans honneur et sans conscience, et qu'ils aient pu avoir un grand intérêt à cette falsification, cela ne me fera pas encore conclure que ce contrat est antidaté, mais diminuera le poids qu'auroit eu sans cela dans mon esprit la signature de deux Notaires pour me faire croire qu'il ne le seroit pas. Que si, de plus, je puis découvrir d'autres preuves positives de cette antidate, ou par témoins, ou par des arguments très-forts, comme seroit l'impuissance où un homme auroit été de prêter vingt mille écus en un temps où l'on montreroit qu'il n'auroit pas eu cent écus vaillant, je me déterminerai alors à croire qu'il y a de la fausseté dans ce contrat ; et ce seroit une prétention très-déraisonnable de vouloir m'obliger ou à ne pas croire ce contrat antidaté, ou à reconnoître que j'avois tort de supposer que les autres où je ne voyois pas les mêmes marques de fausseté ne l'étoient pas, puisqu'ils le pouvoient être comme celui-là." (LPR p. 423-425).

(20) Nous avons ici à la fois l'attention au problème du "conditionnement" -les circonstances doivent être "homogènes"-, et les conditions d'utilisation des données "statistiques" dans la détermination des probabilités (voir le problème traité dans l'article 77 des "Meditationes"). C'est également une partie que ne développe pas Bernoulli, mais pour laquelle il a cherché des matériaux jusqu'à sa mort (voir la correspondance avec Leibniz entre 1703 et 1705).

(21) "Il y a encore une autre remarque très-importante à faire sur la créance des événements. C'est qu'entre les circonstances qu'on doit considérer pour juger si on les doit croire, ou si on ne les doit pas croire, il y en a qu'on peut appeler des circonstances communes, parce qu'elles se rencontrent en beaucoup de faits, et qu'elles se trouvent imcomparablement plus souvent jointes à la vérité qu'à la fausseté : et alors si elles ne sont point contrebalancées par d'autres circonstances particulières qui affoiblissent ou qui ruinent dans notre esprit les motifs de créance qu'il tiroit de ces circonstances communes, nous avons raison de croire ces événements, sinon certainement, au moins très-probablement : ce qui nous suffit quand nous sommes obligés d'en juger ; car comme nous nous devons contenter d'une certitude morale dans les choses qui ne sont pas susceptibles d'une certitude métaphysique, lors aussi que nous ne pouvons pas avoir une entière certitude morale, le mieux que nous puissions faire quand nous sommes engagés à prendre parti, est d'embrasser le plus probable, puisque ce seroit un renversement de la raison d'embrasser le moins probable."(LPR p. 423).

La Logique de Port Royal consacre tout un chapitre (4ème partie, chapitre XVI : "Du jugement qu'on doit faire des accidents futurs") à la composition des grandeurs qui définit justement la sûreté. Bernoulli oublie complétement cet axiome fondamantal qu'il utilise par ailleurs implicitement au point 7. (C'est le point fondamental des chapitres de la Logique de Port Royal que cite Bernoulli p. 225 - voir note (39) - et la conséquence immédiate des travaux de Pascal et Huygens ; aussi jugera-t-on de la précipitation -ou de la fatigue ?- de

Bernoulli lorsqu'il rédigea ce chapitre, comme il l'indique d'ailleurs lui-même à la fin, p.217).

"Mais à l'égard des accidents où l'on a quelque part, et que l'on peut ou procurer, ou empêcher en quelque sorte par ses soins, en s'y exposant, ou en les évitant, il arrive à plusieurs personnes de tomber dans une illusion qui est d'autant plus trompeuse, qu'elle leur paroît plus raisonnable. C'est qu'ils ne regardent que la grandeur et la conséquence de l'avantage qu'ils souhaitent, ou de l'inconvénient qu'ils craignent, sans considérer en aucune sorte l'apparence et la probabilité qu'il y a que cet avantage ou cet inconvénient arrive ou n'arrive pas." (LPR, p. 425).

... "C'est ce qui attire tant de gens aux loteries. Gagner, disent-ils, vingt mille écus pour un écu, n'est-ce pas une chose bien avantageuse ? Chacun croit être cet heureux à qui le grand lot arrivera ; et personne ne fait réflexion que s'il est par exemple, de cingt mille écus, il sera peut-être trente mille fois plus probable pour chaque particulier qu'il ne l'obtiendra pas, que non pas qu'il l'obtiendra.

Le défaut de ce raisonnement est, que pour juger de ce que l'on doit faire pour obtenir un bien, ou pour éviter un mal, il ne faut pas seulement considérer le bien et le mal en soi, mais aussi la probabilité qu'il arrive ou n'arrive pas ; et regarder géométriquement la proportion que toutes ces choses ont ensemble : ce qui peut être éclairci par cet exemple." (LPR, p. 428).

(22) "Si ça ne fait pas de bien, au moins ça ne fait pas de mal".

(23) "Tous les jeux qui sont de cette sorte sont équitables, autant que les jeux le peuvent être, et ceux qui sont hors de cette proposition sont manifestement injustes. Et c'est par là qu'on peut faire voir qu'il y a une injustice évidente dans ces espèces de jeu, qu'on appelle Loteries, parce que le maître de Loterie prenant d'ordinaire sur le tout une dixième partie pour son préciput, tout le corps des joueurs est dupé en la même manière que si un homme jouoit à un jeu égal, c'est-à-dire, où il y a autant d'apparence de gain que de perte, dix pistoles contre neuf. Or si cela est désavantageux à tout le corps, cela l'est aussi à chacun de ceux qui le composent, puisqu'il arrive de là que la probabilité de la perte surpasse plus la probabilité du gain, que l'avantage qu'on espère ne surpasse le désavantage auquel on s'expose, qui est de perdre ce qu'on y met.

Il y a quelquefois si peu d'apparence dans le succès d'une chose, que quelque avantageuse qu'elle soit, et quelque petite que soit celle que l'on hasarde pour l'obtenir, il est utile de ne la pas hasarder. Ainsi ce seroit une sottise de jouer vingt sols contre dix millions de livres, ou contre un Royaume, à condition que l'on ne pourroit le gagner, qu'au cas qu'un enfant arrangeant au hasard les lettres d'une Imprimerie, composât tout d'un coup les vingt premiers vers de l'Eneïde de Virgile. Aussi, sans qu'on y pense, il n'y a point de moment dans la vie où l'on ne la hasarde plus, qu'un Prince ne hasardera son Royaume en le jouant à cette condition." (LPR, p. 428-429).

(24) John Owen (Ovenus ou Audoenus)(c1560-1622) poète gallois, dont la maîtrise de la langue latine lui valut le surnom de "Martial Britannique". Dans ses Epigrammes qui comportent 12 livres dont les 4 premiers furent publiés en 1606, il attaque avec virulence l'Eglise Romaine.

(25) "Il faut en chaque chose conserver la valeur selon ce qui vient d'elle du pour ou du contre".

(26) Contrairement à certains usages "modernes" de la "probabilité", Bernoulli, lui, attire l'attention sur la différence entre "certitude morale", "certitude absolue" et décision prise en vertu d'un critère (voir la note (7)). L'autorité du magistrat, c'est celle du statisticien qui décide du "niveau" d'un test.

(27) Les arguments qui "existent nécessairement" et "révèlent nécessairement" ne sont plus des arguments mais des preuves certaines, et d'après l'axiome 1 du chapitre II, il n'y a pas lieu dans ce cas d'estimer leur probabilité. Je remarque que Bernoulli ne dit pas : "cette probabilité est égale à 1"; est-ce l'impossibilité pour la "certitude épistémique" à rejoindre la "certitude ontique" ?
"Contingentement" n'existe pas en français, tout au moins en ce sens ! ; mais le contingent est très précisément comme le définit Bernoulli dans le chap. I, le non-nécessaire, c'est-à-dire ce qui peut ne pas être.

(28) Ce premier exemple de "divers arguments sur lesquels prennent naissance l'opinion ou la conjecture" est particulièrement délicat à interpréter, en même temps que fort révélateur de la généralité de la notion de probabilité dont Bernoulli tente ici d'élaborer la logique. Très clairement nous avons appris jusqu'ici que :

a) "Conjecturer quelque chose, c'est mesurer sa probabilité" (chap. II, p. 213).
b) "La probabilité est un degré de la certitude" (chap. I, p. 211).
c) "Si la certitude intégrale et absolue (...) est contituée de cinq probabilités ou parties (...), les autres s'y opposant : nous dirons que cet événement a (...) $\frac{3}{5}$ de certitude" (chap. I, p. 211).
d) "Les probabilités sont estimées d'après le nombre et aussi le poids des arguments" (chap. II, p. 214).
e) "Par le poids j'entends la force de ce qui prouve" (chap. II, p. 214).
Ainsi la probabilité d'une chose ou d'un événement ne peut-elle être mesurée qu'en fonction des arguments "qui de quelque manière prouvent ou révèlent que quelque chose est, sera, ou a été" (chap. II, p. 214) ; aussi parlera-t-on du :
f) "Degré de certitude, ou probabilité qu'engendre cet argument".
La probabilité, c'est bien la probabilité d'une chose ou d'un événement, mais c'est la probabilité de cette chose engendrée par un argument ou des arguments ; et la probabilité de la chose (e) par rapport à un argument (a) c'est aussi la "force probatoire" ou la "probation" de cet argument relativement à cette chose. Je noterai cette probabilité : p (e,a) et cette probation : p'(a,e) ; Bien sur, lorsqu'un seul argument est "disponible" relativement à une chose e : p (e,a) = p'(a,e), la probabilité est égale à la probation. Si un seul argument "concerne" une chose e, l'argument a est équivalent à l'ensemble de tous les arguments A : p'(a,e) = p'(A,e) = p(e,A) ; la probabilité de e par rapport à a devient donc dans ce cas la probabilité de e et p'(a,e) = p(e) ; l'impossibilité de "résorber" la probation dans la probabilité est manifeste et si l'on peut "oublier" que la probabilité de e n'a pas de signification que dans le rapport de e à a (et c'est le cas des problèmes les plus simples de dés, de jeux de hasard !) ceci est impossible pour la probation. Et Bernoulli pour mesurer des probabilités, élabore un calcul des probations.
On comprend alors comment il peut en toute cohérence calculer la probabilité d'un événement certain comme le fait que "mon frère ne m'a pas envoyé de lettre depuis longtemps". Par contre, il semblerait "naturel" de penser que le concours des arguments liés à un tel événement lui confère une probabilité égale à la certitude : mais Bernoulli n'en dit rien..., et s'il n'y a qu'un seul argument lié à cet événement certain, que cet argument existe nécessairement et révèle nécessairement (voir la note (27)).

(29) Il s'agit du "De Ratiociniis in Ludo Aleae" de Huygens, commenté par Bernoulli.
Voici l'énoncé de la troisième proposition de Huygens :
"Si le nombre des cas dans lesquels j'obtiens a est p ; si par ailleurs le nombre des cas dans lesquels j'obtiens b est q, et que nous supposons que tous les cas ont la même facilité (omnes casus aeque in proclivi esse), alors mon espérance vaudra :

$$(pa + qb) / (p + q)$$ (Ars Conjectandi p. 7)

(30) Au XVIIème siècle, les deux principaux symboles de l'égalité sont le signe =, qui apparait chez Recorde en 1557, mais ne se répand qu'à partir de 1631, et le signe ∝ utilisé par Descartes dans sa *Géométrie* de 1637. (cf. F. Cajori. A History of mathematical notations, The open court publishing Company. La Salle - Illinois , 1928-1974, Vol. I, p. 297 à 309).

(31) Cette notion fondamentale (voir note 29) n'est pas explicite dans la *Logique de Port Royal* ; la "quantification" n'y porte que sur "les jeux de dés" et les "lettres au hasard", c'est-à-dire des cas où, comme l'écrit Bernoulli, on s'est "ménagé l'équité" (p. 223).
"Ce à quoi est attribué une part de certitude, si peu même que ce soit, cela est possible " (p.211).
"Si je ne considérais que le nombre des navires, je conclurais que le malheur a pu arriver également à chacun d'eux" (p.215).
"... de telle sorte que tous ces cas puissent arriver avec une égale facilité " (p.223).
"... pour chacun des dés, les cas (...) sont tous également enclins à échoir " (p.224).
"... les (cas) pour que sorte de l'urne un bulletin blanc ou noir (...) sont également possibles , (...) puisqu'on ne voit aucune raison pour que celui-ci ou celui-là doive sortir plutôt que n'importe quel autre" (p.224).

(32)

Révélation \ Existence	L'Argument Existe nécessairement	L'Argument N'existe pas Nécessairement
L'Argument Révèle Nécessairement	Certitude absolue (Il n'y a pas lieu de conjecturer) $\boxed{\text{. éclipse de lune; . voleur qui avoue}}$	$\boxed{\text{. mort; . jeu de dés}}$ $\frac{b \times 1 + c \times 0}{a} = \frac{b}{a}$
(pur) L'Argument Ne révèle pas Nécessairement	$\boxed{\text{. pâleur; . paresse}}$ $\frac{\beta \times 1 + \gamma \times 0}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$	$\boxed{\text{. affaires}}$ $\frac{b \times \frac{\beta}{\alpha} + c \times 0}{a} = \frac{b\beta}{a\alpha}$
(mixte)	$\boxed{\text{. manteau noir; . chevelure}}$ $\frac{\beta}{\alpha}$; $\frac{\gamma \times 1 + \beta \times 0}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$	$\boxed{\text{. ?}}$ $\frac{b\beta}{a\alpha}$; $\frac{b\frac{\gamma}{\alpha} + c \times 0}{a\alpha} = \frac{b\gamma}{a\alpha}$

Avec les notations de Bernoulli : a = b + c et $\alpha = \beta + \gamma$, mais en fait α = b, b, car les cas qui révèlent ou non ne peuvent qu'être pris parmi les cas qui existent ; des cas qui "n'existeraient pas" et "révéleraient" ne peuvent exister. Si l'on considère l'argument contraire, que je note a, on a toujours a = b + c, $\bar{a}$ Mais les cas qui révèlent ou non doivent être pris parmi les c cas pour lesquels a existe (principe du tiers-exclu) et on pose $\delta = \varepsilon + \varphi$(ε cas qui révèlent e et φ $\bar{a}$ cas qui ne révèlent rien ou qui révèlent le contraire $\bar{e}$) avec δ = c ;

Avec les notations introduites dans la note (28), je peux considérer :

p'(a,e) ; p'(a,$\bar{e}$) ; p'($\bar{a}$,e) ; p'($\bar{a}$,$\bar{e}$)

J'obtiens alors le tableau suivant :

Révelation \ Existence	L'Argument Existe Nécessairement	L'Argument N'existe pas nécessairement
L'Argument Révèle Nécessairement		$p'(a,e) = \frac{b}{a}$; $p'(a,\bar{e}) = 0$ $p'(\bar{a},e) = 0$; $p'(\bar{a},\bar{e}) = \frac{c}{a}$ (jeu de dés) $p'(\bar{a},e) = 0$; $p(\bar{a},\bar{e}) = 0$ (mort) C
(pur) L'Argument Ne révèle pas Nécessairement	$p'(a,e) = \frac{\beta}{\alpha}$; $p'(a,\bar{e}) = 0$ $p'(\bar{a},e) = 0$; $p'(\bar{a},\bar{e}) = 0$ B	A $p'(a,e) = \frac{b\beta}{a\alpha}$; $p'(a,\bar{e}) = 0$ $p'(\bar{a},e) = 0$; $p'(\bar{a},\bar{e}) = \frac{\varphi c}{a\delta}$
(mixte)	$p'(a,e) = \frac{\beta}{\alpha}$; $p'(a,\bar{e}) = \frac{\gamma}{\alpha}$ $p'(\bar{a},e) = 0$; $p'(\bar{a},\bar{e}) = 0$	$p'(a,e) = \frac{b\beta}{a\alpha}$; $p'(a,\bar{e}) = \frac{b\gamma}{a\alpha}$?

avec la présentation suivante :

$$\underbrace{\underbrace{\overbrace{\qquad}^{\beta}\overbrace{\qquad}^{\gamma}}_{b=\alpha=\beta+\gamma}\underbrace{\overbrace{\qquad}^{\varphi}\overbrace{\qquad}^{\varepsilon}}_{c=\delta=\varepsilon+\varphi}}_{a=b+c}$$

. Dans le tableau C : γ = o ; dans le tableau B : c = o

. Les formules entourées d'un tiret ne sont valables que pour les exemples que donne Bernoulli, sauf dans le cas B où le contraire d'un argument qui existe nécessairement est un argument qui n'existe jamais et ne peut donc rien prouver.

. Par ailleurs l'analyse de l'argument contraire de "Mon frère est affairé" ou "Mon frère n'a pas de temps libre" qui est "Mon frère a du temps libre" montre que cet argument ne prouve jamais e (donc ε =o) mais qu'il peut prouver $\bar{e}$ ou ne rien prouver : φ doit donc être décomposé lui-même en deux : $\varphi = \eta + \theta$; dans le cas général un argument peut donc prouver une chose, ou son contraire, ou rien. C'est une objection que Lambert fera à Bernoulli à propos des formules du § 6 (voir la note (35)).

Mais ce dernier, par contre, a bien mis en évidence l'importance décisive qu'il y a à considérer les cas où l'argument n'existe pas . S'il ne dit pas - dans son exemple du jeu de dés - que lorsque l'argument des 7 points n'existe pas cela révèle la défaite, c'est parce que l'argument, le signe, ne révèle et donc n'existe pas par lui-même mais dans sa liaison avec la chose à révéler. S'exprime ici, je pense, cette caractéristique de l'"épistémé de l'âge classique"

que Michel Foucault décrit ainsi : "Qu'est-ce qu'un signe à l'âge classique ? Car ce qui a changé dans la première moitié du XVII ème siècle, et pour longtemps - peut-être jusqu'à nous -, c'est le régime entier des signes, les conditions sous lesquelles ils exercent leur étrange fonction ; c'est ce qui, parmi tant d'autres choses qu'on sait ou qu'on voit, les dresse soudain comme signes ; c'est leur être même. Au seuil de l'âge classique, le signe cesse d'être une figure du monde ; et il cesse d'être lié à ce qu'il marque par les liens solides et secrets de la ressemblance ou de l'affinité.....

Le signe, puisqu'il est toujours ou certain ou probable, doit trouver son espace à l'intérieur de la connaissance.... A partir du XVII ème siècle, tout le domaine du signe se distribue entre le certain et le probable..... Le signe n'attend pas silencieusement la venue de celui qui peut le reconnaître : il ne se constitue jamais que par un acte de connaissance ." (M. Foucault "Les Mots et les Choses" p. 72-73. Gallimard 1966).

C'est le calcul que permet la méthode de Pascal-Huygens qui fait entrer le pari dans la sphère de la connaissance, c'est-à-dire celle du certain et du probable, en l'arrachant au simple fortuit ou à l'accidentel.

(33) Bien entendu, cette "partie de l'unité" n'a strictement rien à voir avec la probabilité de la chose "contraire" !.

(34) "assez clair" ! peut-être ? Mais, si avec un seul argument mixte on ne peut prouver que la chose ou son contraire et pas les deux à la fois, avec deux arguments mixtes il y a des cas où les deux arguments pris ensemble prouvent la chose et son contraire. On doit donc supposer que pour Bernoulli il est évident que ces cas ne peuvent exister.

Si $a = b + c$ et $d = e + f$; $ad = be + bf + ce + cf$, mais si les deux arguments sont mixtes, à eux deux ils ne comprennent pas ad cas, car les $(bf + ce)$ cas qui débouchent sur une contradiction ne peuvent exister (principe de non-contradiction). Il faut donc également distinguer les cas qui n'existent pas des cas qui existent mais dans lesquels l'argument n'existe pas.

(35) La démarche de Bernoulli n'est pas acceptable ; en effet, si nous prenons, pour simplifier, 1 argument pur et 1 argument mixte avec $a = b + c$ et $p = q + r$, le raisonnement du § 4 n'est plus valable, pour la même raison que précédemment.

On ne peut pas écrire : $\dfrac{b \times 1 + c\frac{q}{p}}{a} = \dfrac{bp + cq}{ap} = 1 - \dfrac{cr}{ap}$

comme si les ap cas existaient ; en effet, d'après la ramarque de la note (30), il y a ici br cas qui ne peuvent exister ; par contre Bernoulli aurait pu écrire : "Considérons l'argument mixte ; dans q cas il prouve quel que soit le cas considéré de l'argument pur, donc il prouve 1, et dans r cas, il prouve le contraire pour $\frac{c}{a}$ cas de ces r cas, ou il ne peut exister pour $\frac{b}{a}$ cas de ces r cas puisqu'il est alors contradictoire avec l'argument pur ; il prouve donc 1 dans q cas et rien (de cette chose) dans $\frac{cr}{a}$ cas ; il prouve donc :

$$\frac{q \times 1}{q + \frac{cr}{a}} = \frac{qa}{qa + cr} \text{ de la chose.}$$

Ce qui est conforme au fait que si : $a = b + c$ et $p = q + r$ on a :

$ap = bq + br + cq + cr$ et que br cas n'existent pas.

Pour les deux arguments il n'y a donc que : $bq + cq + cr = aq + cr$ cas.

Parmi ceux-ci $aq = bq + cq$ prouvent la chose et cr prouvent la chose contraire. la probabilité de la chose résultant des deux arguments est donc :

$\dfrac{aq}{aq+cr}$ et celle de la chose contraire $\dfrac{cr}{aq+cr}$.

J.H Lambert a relevé cette "erreur" de Jacques Bernoulli en 1764 dans son "Neues Organon" - voir à ce sujet l'article de Shafer cité en bibliographie-.

On peut "généraliser", comme le fait Lambert, les considérations de Bernoulli en posant que tout argument prouve une chose dans b cas, prouve la chose contraire dans c cas, et ne prouve rien ni de la chose ni de son contraire dans de cas ; $a = b + c + d$.

Considérons 2 arguments : $a_1 = b_1 + c_1 + d_1$ avec $p'(a_1,e) = \dfrac{b_1}{a_1} = p'_1$. et $p'(a_1,\bar{e}) = \dfrac{c_1}{a_1} = q'_1$

$$a_2 = b_2 + c_2 + d_2$$

$b_1c_2 + b_2c_1$ sont les cas qui n'existent pas

$b_1b_2 + b_1d_2 + d_1b_2$ sont les cas qui prouvent la chose

$c_1c_2 + c_1d_2 + d_1c_2$ sont les cas qui prouvent la chose contraire

d_1d_2 sont les cas qui ne prouvent rien.

$$p'(a_1a_2,e) = \frac{b_1b_2 + b_1d_2 + d_1b_2}{a_1a_2 - (b_1c_2+c_1b_2)} = \frac{p'_1p'_2 + p'_1\ [1-p'_2-q'_2] + p'_2\ [1-p'_1-q'_1]}{1 - [p'_1q'_2 + p'_2q'_1]}$$

$$= \frac{p'_1p'_2 + p'_1 + p'_2 - p'_1p'_2 - p'_1q'_2 - p'_2p'_1 - p'_2q'_1}{1 - p'_1q'_2 - p'_2q'_1}$$

$$\boxed{p'(a_1a_2,e) = \frac{b_1b_2 + b_1d_2 + d_1b_2}{a_1a_2 - (b_1c_2 + c_1b_2)} = \frac{p'_1 + p'_2 - p'_1p'_2 - p'_1q'_2 - p'_2q'_1}{1 - p'_1q'_2 - p'_2q'_1}}$$

de même :

$$\boxed{p'(a_1a_2,\bar{e}) = \frac{c_1c_2 + c_1d_2 + d_1c_2}{a_1a_2 - (b_1c_2+c_1b_2)} = \frac{q'_1 + q'_2 - q'_1q'_2 - p'_1q'_2 - p'_2q'_1}{1 - p'_1q'_2 - p'_2q'_1}}$$

et

$$\boxed{p'(a_1a_2,e) + p'(a_1a_2,\bar{e}) = 1 - \frac{d_1d_2}{a_1a_2 - (b_1c_2 + c_1b_2)}}$$

Si $d_1 = 0$ ou/et $d_2 = 0$, c'est-à-dire si l'un au moins des arguments est mixte

$$p'(a_1a_2,e) + p'(a_1a_2,\bar{e}) = 1$$

Si les 2 arguments sont purs :

$$p'(a_1a_2,e) + p'(a_1a_2,\bar{e}) < 1$$

Si Boudot -article cité dans la bibliographie (1967)- peut écrire : "Nul doute ne doit donc subsister : les solutions que propose Bernoulli sont incorrectes, la conceptualisation qu'il utilise incertaine...(p.286)". "Il n'est nul besoin d'être savant probabiliste (sic!) pour remarquer que toutes les formules proposées sont fausses. (resic!)... L'incohérence des textes apparaît pleinement lorsque Bernoulli est contraint d'attribuer à deux propositions contradictoires des probabilités qui ne sont pas complémentaires.....On doit remarquer que cette conséquence était inévitable des l'instant où on distinguait les arguments purs des arguments mixtes. Sur le plan formel, les cas dans lesquels un argument ne prouve pas sont ceux-là mêmes dans lesquels il prouve le contraire, et il n'y a donc que des arguments mixtes. (!) (p.282-283)". La pertinence de la tentative d'élaboration par Bernoulli d'une théorie générale du probable dans laquelle les "probabilités additives" ne sont qu'un cas particulier a été mise en évidence par Ian Hacking ((1975), livre cité en bibliographie), Glenn Shafer ("A mathematical theory of evidence" Princeton University Press, 1976 et son article de 1978 cité en bibliographie) et Henri Prade qui écrit :

"Récemment, le professeur Zadeh a jeté les bases d'une théorie des possiblilités où un ensemble flou est vu comme l'ensemble des valeurs plus ou moins possibles que peut prendre une variable. Les possibilités se différencient complètement des probabilités car elles ne satisfont plus l'axiome d'additivité. Le concept dual de nécessité peut être introduit.

Les probabilités quantifient la fréquence des événements, les possibilités leur "faisabililité". L'incertitude n'est pas forcément due au hasard.

Vue l'apparente simplicité de l'idée de base, une question vient naturellement à l'esprit ; pourquoi a-t-il fallu attendre 1965 pour que naissent les ensembles flous ? En fait, l'idée existait sous diverses formes depuis longtemps, mais elle ne s'était pas suffisamment différenciée d'autres théories alors en cours d'élaboration pour paraître autonome. Ainsi, les ensembles flous ne sont pas sans rapport avec les logiques multivalentes apparues au début de ce siècle. En remontant plus loin, ce n'est qu'à la fin du dix-septième siècle que les concepts d'aléatoire et de probabilité se sont superposés : auparavant, était probable ce qui était plausible, ce qui ne surprenait pas, ce dont on pouvait avoir une certitude subjective. D'ailleurs, dans son **Ars Conjectandi**, Jacques Bernoulli réservait encore une place aux "probabilités non additives" à côté de ce qui allait être la théorie des probabilités au sens où on l'entend encore en général aujourd'hui. Ces "probabilités non additives", dont les possibilités sont un cas particulier, allaient attendre longtemps avant de réapparaître - c'était là sans doute une idée trop baroque pour une époque classique."

Voir également : Didier Dubois, Henri Prade "Fuzzy sets and Systems. Theory and applications" Academic Press 1980 - (chap. 5. Fuzzy measures. Probabilities/Possibilities).

Les résultats de Bernoulli sont des cas particuliers de ces formules générales :

a) <u>a_1 et a_2 sont deux arguments purs</u> :

$q'_1 = q'_2 = 0$

$$p'(a_1a_2,e) = p'_1 + p'_2 - p'_1p'_2 = p'_1(1-p'_2) + p'_2$$

$$= p'_1(1-p'_2) + p'_2 - 1 + 1$$

$$= (1-p'_2)(p'_1-1)+1 = 1 - (1-p'_1)(1-p'_2)$$

$$p'(a_1a_2,\bar{e}) = 0$$

$$p'(a_1a_2,e) + p'(a_1a_2,\bar{e}) < 1$$

Expressions qui donnent avec n arguments :

$$p'(a_1,a_2,\ldots a_n,e) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1-p'_i)$$

$$p'(a_1,a_2,\ldots.a_n,\bar{e}) = 0$$

b) <u>a_1 et a_2 sont deux arguments mixtes</u> :

$q'_1 = 1-p'_1$; $q'_2 = 1-p'_2$

$$p'(a_1a_2,e) = \frac{p'_1 + p'_2 - p'_1p'_2 - p'_1(1-p'_2) - p'_2(1-p'_1)}{1 - p'_1(1-p'_2) - p'_2(1-p'_1)} = \frac{p'_1p'_2}{p'_1p'_2+q'_1q'_2}$$

$$p'(a_1a_2,\bar{e}) = \frac{q'_1q'_2}{p'_1p'_2+q'_1q'_2}$$

$$p'(a_1a_2,e) + p'(a_1a_2,\bar{e}) = 1$$

Expressions qui se généralisent pour n arguments :

$$p'(a_1a_2.....a_n,e) = \frac{\prod_{i=1}^{n} p'_i}{\prod_{i=1}^{n} p'_i + \prod_{i=1}^{n} q'_i}$$

$$p'(a_1a_2.....a_n,\bar{e}) = \frac{\prod_{i=1}^{n} q'_i}{\prod_{i=1}^{n} p'_i + \prod_{i=1}^{n} q'_i}$$

$$p'(a_1a_2......a_n,e) + p'(a_1a_2.....a_n,\bar{e}) = 1$$

c) <u>a_1 argument pur et a_2 argument mixte</u> (ce cas n'est pas traité correctement par Bernoulli) :

$q'_1 = 0$; $q'_2 = 1-p'_2$

$$p'(a_1a_2,e) = \frac{p'_1 + p'_2 - p'_1p'_2 - p'_1(1-p'_2)}{1 - p'_1(1-p'_2)} = \frac{p'_2}{1-p'_1+p'_1p'_2}$$

$$p'(a_1a_2,\bar{e}) = \frac{(1-p'_2)(1-p'_1)}{1-p'_1(1-p'_2)}$$

$$p'(a_1a_2,e) + p'(a_1a_2,\bar{e}) = 1$$

(36) Au sens juridique du terme.

(37) Supposons un argument pur a_1 en faveur de e et un argument pur a_2 en faveur de $\bar{e}$; alors :

$$p'(a_1,e) = p'_1 \qquad p'(a_1,\bar{e}) = 0 \qquad \text{avec ici } p'_1 = \frac{2}{3}$$

$$p'(a_2,e) = 0 \qquad p'(a_2,\bar{e}) = p'_2 \qquad \text{et } p'_2 = \frac{3}{4}$$

Si j'utilise les formules générales de la note (31) je peux calculer :

$$p'(a_1a_2,e) = \frac{p'_1(1-p'_2)}{1 - p'_1p'_2} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

et

$$p'(a_1a_2,\bar{e}) = \frac{p'_2(1-p'_1)}{1 - p'_1p'_2} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

avec

$$p'(a_1a_2,e) + p'(a_1a_2,\bar{e}) = \frac{p'_1 + p'_2 - 2p'_1p'_2}{1 - p'_1p'_2} = \frac{5}{6} < 1$$

Ainsi pour Bernoulli $p'(a_1, e) = p(e, a_1) = p(e)$

c'est à dire $p'(a_1, e) = p'(a_1\ a_2, e)$! Pour lui la probation $p'(a_2, e)$ étant nulle, cette probation ne modifie pas la probabilité !

Un argument pur en faveur de la chose contraire, qui a bien une "force probatoire" nulle pour la chose si l'on ne tient compte que de lui, n'a plus une "force probatoire" nulle si l'on considère sa "conjonction" avec l'autre argument pur en faveur de la chose. On comprend facilement comment sa façon de raisonner sur les arguments purs qui l'a déjà égarée dans le § 6 -voir la note (35)- lui permet également ici de dire : l'argument a_1 prouve la chose dans b cas et dans c cas il ne prouve rien et laisse efficace l'autre argument qui ne prouve rien de la chose ; ainsi la force probatoire n'est pas modifiée ! ; "Peser un par un les arguments de chacune des deux espèces" permet de calculer des probations et non comme l'affirme Bernoulli des probabilités absolues.

Si ici par exemple : $p'(a_1, e) = \frac{2}{3}$ et $p'(a_2, \bar{e}) = \frac{3}{4}$

les probabilités sont : $p(e, a_1\ a_2) = p'(a_1\ a_2, e) = \frac{1}{3}$

et : $p(\bar{e}, a_1\ a_2) = p'(a_1\ a_2, \bar{e}) = \frac{1}{2}$

et leur rapport n'est pas de 8 à 9 mais de 6 à 9.

Pour pouvoir être "réunis" en vue de prouver, des arguments doivent être <u>compatibles</u> , sinon cette "réunion" n'existe dans aucun cas et alors la probabilité <u>qui en résulte</u> est nulle. C'est le cas pour deux arguments contraires : $p'(a_1\ \bar{a}_1, e) = 0$. Les formules générales de la note (35) ne s'appliquent que pour des cas qui existent !.

Il est alors possible d'envisager que les arguments purs pour un événement soient incompatibles avec les arguments purs pour le contraire : dans ce cas la situation que propose Bernoulli peut se produire. Sinon il faut "réunir" ces arguments pour obtenir l'"absolue probabilité", car un argument pur en faveur du contraire modifie la probabilité, ce que Bernoulli ne pouvait envisager avec sa méthode.

(38) Les 2 arguments qui existent nécessairement et ne prouvent pas nécessairement, reliés entre eux, forment un argument qui existe nécessairement et prouve nécessairement. D'après le principe n°1, c'est alors un cas où "il n'y a pas place pour la conjecture" -p.214- ; une analyse préalable des différents arguments et de leurs relations est donc nécessaire, mais il ne fait rien moins que cela !

(39) C'est le principe n°4 -p.215- (voir la note 19).

(40) Bernoulli veut dire ici que si l'on sait que le notaire n'est pas honnête, il ne faut pas faire comme si on ne le savait pas !

(41) Le modèle de l'urne joue pour Bernoulli un rôle fondamental. Il ne l'utilise pas dans les "Meditationes", mais dans la "Lettre à un amy" publiée avec l'Ars Conjectandi (voir ci-après), ce qui n'était pas le cas dans la première version de celle-ci (Article 77a des "Méditationes"). L'urne représente le dé généralisé à autant de faces (de cas) que l'on veut ; elle doit être toujours identique à elle-même -comme le dé- et c'est pourquoi (p. 226) : "tu tires une pierre après l'autre en replaçant cependant chaque fois la pierre que tu as tirée avant de choisir la suivante, pour que le nombre de pierres ne diminue pas dans l'urne" et cette urne devient alors le modèle des êtres aléatoires les plus complexes comme l'air ou le corps humain (p. 226). Comme on le voit (p. 226) ce modèle est rayonnant de clarté aux yeux de Bernoulli pour représenter un rapport de cas quelconque ignoré mais dont l'existence physique du substrat est tenue pour certaine. Bernoulli pédagogue est aussi physicien expérimentaliste. Dans la première ébauche de son grand théorème (article 133a et 151a des "Meditationes"), son modèle était un jeu de hasard où l'égalité des joueurs était supposée. Si l'on prend, par contre, un jeu d'intelligence ou d'adresse dans lequel les forces sont différentes, c'est le substrat clair qui manque-ce qui motive la recherche des cas "a posteriori" (Ars Conjectandi p.224, "Meditationes" Article 77, "Lettre à un amy" p. 2) -. Ainsi le modèle de l'urne est-il à la fois un dé généralisé qui garantit l'égalité des cas et un nombre de cas aussi grand que l'on veut -ce qui est indispensable pour la démonstration du théorème- et le modèle de toutes les situations imaginables. L'urne est donc à la fois un modèle de jeu de hazard extrêment simple (le dé) et un modèle de la réalité la plus complexe(l'air, le corps : "Le corps humain qui (contient en lui) les maladies comme l'urne contientles pierres" p.226).

(42) On rapprochera ces considérations sur les causes cachées et éternellement inconnaissables de celles du chapitre I p.212-213. Le déterminisme de Bernoulli s'accompagne de la reconnaissance de l'imprédicibilité, et on prendra la mesure de son "modernisme" à la lecture stimulante du livre de Ivar Ekeland "Le calcul, l'Imprévu", Seuil, 1984, et de l'article de David Ruelle "Déterminisme et prédicibilité" dans "Pour la science" Août 1984 (p.58-67). A propos du "déterminisme" de Bernoulli, on notera avec humour que Popper semble lui répondre mot pour mot dans son livre "L'univers Irrésolu" Hermann 1984, au paragraphe intitulé "Les horloges et les nuages" (p.16).

(43) LPR IVème Partie "De la Méthode" chap. I p. 367 : "... soit en prouvant les effets par les causes, ce qui s'appelle démontrer a priori , soit en démontrant au contraire les causes par les effets, ce qui s'appelle prouver a posteriori . (voir ici "Meditationes" Article 77). "Des observations a posteriori" on peut remonter aux "cas a priori", ce qu'explique Bernoulli au début de la "Lettre à un amy", mettant encore une fois en évidence l'importance du modèle de l'urne pour étayer la validité de cette pratique.

(44) Bernoulli fait ici directement allusion à la "Logique de Port Royal" et à Antoine Arnauld, mais cette "prescription" n'est pas du tout évidente, et si l'on peut remarquer -notes (6), (7), (15), (16), (17), (21), (23)- les convergences entre les deux textes, LPR ne fait allusion à cette manière "expérimentale" de déterminer les nombres de cas que de manière implicite -entre autres le passage sur les notaires p. 424- "et c'est la même que tous observent constamment dans la pratique quotidienne". Ce qui est original chez Bernoulli, c'est l'explicitation de cette "méthode naturelle". Par ailleurs, je pense que la référence à la LPR lui sert de caution dans un domaine qui porte à controverses: c'est, déjà ici, un élément de l'argumentation qui vise à répondre aux objections de Leibniz (voir note (52)). Néanmoins, on peut se demander dans quelle mesure la logique du probable que Bernoulli a tenté d'élaborer dans le chapitre III n'est pas en partie une réponse aux sollicitations de ces chapitres de la LPR et en particulier du chap. XV.

Antoine Arnauld et Pierre Nicole, "La Logique ou l'Art de penser", première édition de 1662, complétée au fil des éditions de 1662 à 1683. Les chapitres auxquels Bernoulli fait allusion ici sont les suivants : Quatrième Partie, De la Méthode :

Ch. 12 : De ce que nous connaissons par la foi soit humaine soit divine.

Ch. 13 : Quelques règles pour bien conduire sa raison dans la créance des événements qui dépendent de la foi humaine.

Ch . 14 : Application de la règle précédente à la créance des miracles.

Ch . 15 : Autre remarque sur le même sujet de la créance des événements.

Ch . 16 : Du jugement qu'on doit faire des accidents futurs.

(45) Voir la note en marge de l'article 77, p. 104, celle de l'article 77a sur le jeu de paume : "Il est préférable d'avoir observé plus que moins, parce que le danger est moindre de s'éloigner de la véritable proportion", p. 106 ; cette note devient l'intitulé des articles 133a (ébauche du théorème) : "Je peux d'autant moins m'éloigner de la vraie proportion que j'observe plus souvent plutôt que plus rarement" et 151a (démonstration du théorème) où elle prend alors la forme de l'énoncé du théorème : "Il est possible de faire tant d'observations qu'il soit plus probable de toute probabilité donnée que les nombres de jeux gagnants de chacun des deux (joueurs) tombent entre des limites données, aussi rapprochées soient-elles, plutôt qu'en dehors."

(46) C'est sur ce point que porte le théorème de Bernoulli. Sur les interprétations de Fontenelle et Saurin, voir ici : "Sur la publication de l'Ars Conjectandi".

(47) J'ai traduit ainsi, car je pense que Bernoulli veut souligner la réalité physique de ce rapport de cas. (voir la note (41)).

(48) C'est l'objet du chapitre V et du théorème que de définir ce "presque".

(49) J'ai "osé" traduire ici "scientifice" par scientifiquement car "scientifique" et "scientifiquement" sont utilisés à partir de la 2° moitié du XVIIème siècle dans le sens moderne de "conforme à la méthode et à la précision de la science, de la raison" -en particulier par Leibniz-. C'est ici tout le traité de Bernoulli et en fin de compte son théorème qui assurent cette conformité.

(50) Un "intervalle de confiance", dirions-nous !

(51) Je pense que Bernoulli a travaillé à la rédaction de ces derniers chapitres -toute la IVème partie- tout à fait à la fin de sa vie, entre 1703 et 1705, ce qui ressort de la lecture de sa correspondance avec Leibniz. Si l'on prend pour date extrême 1705, Bernoulli fait donc remonter la mise à jour du problème à 1685. Si l'on sait par la datation des "Meditationes" que la démonstration du théorème (article 151a) date probablement de 1689, cette date de 1685 est, elle, tout à fait en accord avec celle des premiers travaux sur la question ; voir ici "Quelques détails à propos de l'article 77 du Journal Scientifique". "20 ans" était une façon de parler en "chiffre rond"; ce qu'écrit Bernoulli dans son livre est en accord avec les informations que nous livre son "Journal". On peut également penser qu'il désire faire remarquer l'antériorité de ses découvertes dans un domaine dont nous savons qu'il préoccupait considérablement Leibniz ; méfiance justifiée, quand on sait qu'après avoir critiqué Bernoulli -voir la note 46-, Leibniz n'hésitera pas, plusieurs années après, à se vanter d'avoir inspiré ses travaux ! -voir "Sur la publication de l'Ars Conjectandi"-.

(52) En avril 1703, dans une lettre à Jacques Bernoulli, Leibniz signale qu'il a entendu dire que celui-ci travaillait à "la théorie de l'estimation des probabilités". Bernoulli répond le 3 octobre 1703 en expliquant succinctement comment il démontre qu'on peut déterminer a posteriori les nombres de cas lorsque cela n'est pas possible a priori. Le 3 décembre 1703, dans sa réponse, Leibniz fait part de ses remarques et objections :

a) Si en matière de droit et de "politique" l'estimation des probabilités est des plus utiles, nous n'avons cependant pas besoin, la plupart du temps de calculs aussi précis et l'énumération exacte de toutes les circonstances suffit.

b) Ce qui est contingent ou dépend d'une infinité de circonstances ne peut être déterminé par un nombre fini d'expériences.

c) La nature a ses habitudes qui naissent du retour des causes mais seulement "le plus souvent" ; les choses peuvent changer et par exemple de nouvelles maladies peuvent apparaître.

d) Si nous connaissons un certain nombre de positions observées d'une comète nous pouvons supposer que ces points appartiennent à une conique ou à une autre courbe plus simple. Mais par ces points il peut passer une infinité de courbes. Et on peut assimiler ces points aux cas observés et les courbes aux estimations qui s'en déduisent. Cependant bien qu'on ne puisse obtenir empiriquement une estimation parfaite, les estimations empiriques n'en sont pas moins utiles et suffisantes dans la pratique.

A cela, Bernoulli oppose dans sa lettre du 20 Avril 1704 :

a) En matière juridique il ne faut pas simplement connaître toutes les circonstances mais il faut raisonner et calculer comme dans les jeux de hasard, comme le lui ont appris différentes questions d'assurances, de rentes viagères, de contrats de dot, de prises anticipées et autres.

b) Il a montré sa démonstration à son frère il y a plus de 12 ans et celui-ci l'a approuvée. (Cette information se trouvait déjà dans sa lettre du 3 octobre 1703...; démonstration antérieure à 1691. (voir la note (51))). Pour plus de clarté il prend le modèle de l'urne (voir la note (41)). On peut d'ailleurs se demander si ce ne sont pas les objections de Leibniz qui ont poussé Bernoulli à utiliser ce modèle particulièrement "clair".

c) Même si le nombre des maladies est infini -ce qui n'est pas vrai en fait-, le rapport de deux infinis peut-être exprimé précisément ou autant qu'il suffit en pratique par des nombres finis.

d) Si le nombre des maladies augmente il faut faire de nouvelles observations et il est certain qu'on ne peut déduire des observations sur la durée de vie des Londoniens et des Parisiens contemporains que des conclusions absurdes pour des ancêtres antédiluviens.

e) L'exemple de la trajectoire des comètes parait mal venu. Si on a observé que 5 points étaient disposés sur une parabole on est plus porté à supposer que la trajectoire future sera une parabole que si l'on n'avait eu que 4 points. En effet une infinité de courbes qui passaient par les 4 premiers points sans passer par le 5ème sont exclues par la 5ème observation. Cependant toute conjecture de ce type est en effet peu sûre et périlleuse ; seule la supposition que la courbe est du genre le plus simple lui semble très vraisemblable, pour la raison que l'on peut constater que la nature suit toujours la voie la plus simple.

(53) Reprise des thèmes du déterminisme physique au nom du déterminisme théologique et des causes cachées (voir les notes (4), (41), (42)).

(54) Voir la note (52).

(55) Bernoulli reprend presque mot pour mot les termes de sa lettre à Leibniz du 20 Avril 1704, sauf l'argument de la trajectoire de la comète qui ne lui paraissait pas pertinent.

(56) Cette notation : ns-n.n :: r-1.1 pour ns-n est à n comme r - 1 est à 1, est introduite par Oughtred en 1631. (cf. F. Cajori, livre cité à la note 30, p.285).

(57) Là où nous mettons des parenthèses () Bernoulli utilise une barre qui surmonte les termes qui forment un tout. Lorsqu'il a besoin de montrer qu'une expression est équivalente à une autre il ne la réécrit pas sous cette nouvelle forme, mais l'écrit à l'intérieur de la première entre parenthèses ; ainsi veut-il signifier ici que nt-ns+1 est mis à la place de nr+1.

(58) Même procédé que précédemment pour exprimer que (nr+1)s peut être remplacé par nrs+s.

(59) Le symbole ℞ signifie ± quand le symbole ♉ signifie ∓ ; il faut donc lire l'expression écrite par Bernoulli nr ℞ n ♉ 1, 2, 3 etc... de la façon suivante :

nr+n-1, nr+n-2, nr+n-3 etc... ou nr-n+1, nr-n+2, nr-n+3 etc...
et ns ♉ n ℞ 1,2,3 etc... de la façon suivante :
ns-n+1, ns-n+2, ns-n+3 etc... ou ns+n-1, ns+n-2, ns+n-3 etc...
(voir à ce sujet F. Cajori, livre cité à la note (26), p.246).

(60) Les termes sont bien de la forme nr+n-i au numérateur et nr-n+i au dénominateur, mais i varie de 0 à n-1 au numérateur et de 1 à n au dénominateur ; aussi l'équivalence proposée par Bernoulli quand "n est infini" n'est pas acceptable.

(61) Si les premiers termes sont de la forme $rs+s - \frac{is}{n}$, équivalent à rs+s, si i est fini, les derniers sont de la forme $rs + \frac{n-i}{n}$, avec i qui peut être aussi grand que n, donc équivalents à rs. Le problème reste de savoir quand on passe d'une équivalence à l'autre !

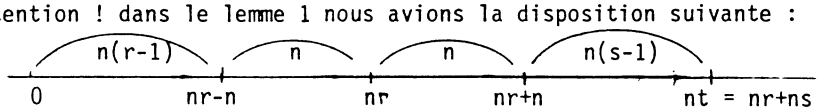
(62) Justement ce n'est pas du tout ce que l'on voit ! Car si les premiers termes sont de la forme $\frac{rs+s}{rs-r}$, les derniers sont de la forme $\frac{rs}{rs}$.

(63) "Tractatus de Seriebus infinitis" publié en 1713 avec l'Ars Conjectandi p.244. "Dans une progression géométrique décroissante infinie le terme ultime est 0".

On a bien rs+s>rs-r, donc un rapport plus grand que 1 et la progression géométrique du premier au dernier est bien décroissante si le rapport $\frac{rs+s}{rs-r}$ est le rapport d'un terme au suivant dans la suite.

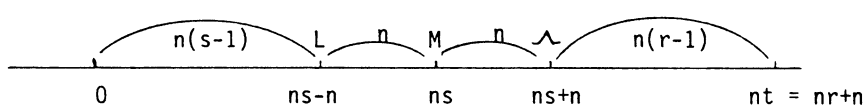
(64) ... Mais ce qui n'est pas clair (voir la note (57)), c'est que nous ayons ici un multiple infini du rapport $\frac{rs+s}{rs-r}$! (voir également pour les scrupules de Bernoulli le bas de la page 233).

(65) Attention ! dans le lemme 1 nous avions la disposition suivante :



alors que depuis le lemme 3, le terme M $\left(\frac{n(n-1)....(nt-ns+1)}{1.2.....ns} \right. r^{nr} s^{ns}$

se trouve à la place de "ns", c'est-à-dire la disposition suivante :



(66) Voir les notes (61) et (62).

(67) Il s'agit en fait de la proposition XII et de son deuxième corollaire, p.45 de l'**Ars Conjectandi**.

(68) Il a fait sa démonstration ici en supposant des causes certaines (les boules noires et blanches en nombre fini dans l'urne) et montre alors par le calcul que si l'on poursuivait indéfiniment les expériences on atteindrait une certitude parfaite. Il en déduit alors que tout arrive "par des raisons certaines" ! -preuve supplémentaire en faveur du déterminisme !- Mais derrière ce paralogisme se cache peut-être cette idée que si l'on faisait des observations assez souvent on observerait des régularités qui pourraient être interprétées comme révélatrices de causes cachées. C'est le problème de "l'inversion" du théorème de Bernoulli, le problème fondamental de la statistique probabiliste.

(69) Les cas, les causes, les raisons seraient en nombre fini -"très grand plutôt qu'infini"- comme dans le modèle de l'urne. Le monde est une urne : ne se pose plus que la question de savoir si les mêmes combinaisons reviennent toujours dans le même ordre ou non. On ne peut en tout cas qu'être frappé par cette conclusion "fataliste" et stoïcienne après les déclarations d'intention du chapitre I : Dieu semble bien ici se faire beaucoup plus discret! (Sur les problèmes que soulève la notion de contingence, voir le livre de Jules Vuillemin : "Nécessité ou Contingence: L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques", Editions de Minuit, 1984).

I N D E X

(le numéro des pages renvoie à l'édition latine)

JACQUES BERNOULLI.

LETTRE
à un Amy,
ſur
les Parties du Jeu de Paume.

VOus me marquez, Monſieur, que vous avez vû une de mes Theſes, où j'avance quelques Propoſitions nouvelles, touchant les Parties du Jeu de Paume ; & vous me demandez, si ces Propoſitions renferment quelque realité qui puiſſe être démontrée, ou ſi elles ne ſont fondées que ſur de pures conjectures faites en l'air, & qui n'ont rien de ſolide ; ne pouvant pas concevoir, à ce que vous dites, que l'on puiſſe meſurer les forces des joüeurs par nombres, & encore moins en tirer toutes les concluſions, que j'en ay tirées. Ce qui m'oblige de mettre par écrit tout ce que j'ay medité ſur cette matiere, & d'en faire le ſujet de cette Lettre, que je vous écris en François, pour ne vous pas rebuter dans ſa lecture par la traduction des termes qui ſont en uſage parmy les joüeurs, & qui deviendroient peu intelligibles, ſi on les mettoit en une autre Langue. Je ne m'arrête pas à vous y expliquer les Regles du Jeu, ni le principe de l'Art de conjecturer, qui doit ſervir de fondement à nôtre recherche, ſçachant que l'un & l'autre vous sont parfaitement connus. Mais au reste j'entre dans le détail de toutes les particularités de mon sujet, sans craindre le reproche, que l'on me pourroit faire de vous entretenir trop sur une bagatelle; car vous savez, que ce noble Jeu a toujours fait le divertissement des personnes de la premiere qualité, & bientôt vous verrez, que s'il est utile pour l'exercice du corps, il est tres-capable & tres-digne aussi de fixer les meditations de l'esprit.

Je vous feray remarquer avant toutes choses, que la raison, pour laquelle dans les jeux de hazard on peut supputer exactement les avantages & les desavantages des Joueürs, c'est parce que le plus souvant l'on connoit au juste le nombre des cas, qui leur sont favorables ou contraires: & je dois vous dire, qu'il n'en est pas de même des jeux, qui dépendent uniquement, ou en partie, du genie, de l'industrie ou de l'adresse des joueürs, tels que sont les jeux de la paume, des échecs, & la pluspart des jeux de cartes; étant bien visible, que l'on ne sauroit déterminer par les causes, ou *à priori*, comme l'on parle, de combien un homme est plus savant, plus adroit ou plus habile qu'un autre, sans avoir une parfaite connoissance de la nature de l'ame, & de la disposition des organes du corps humain, laquelle mille causes occultes, qui y concourent, rendent absolument impossible. Mais cela n'empêche pas, qu'on ne puisse le sçavoir presque aussi certainement, *à posteriori*, par l'observation de l'événement plusieurs fois reiterée, en faisant ce qui se peut pratiquer dans les jeux même de pur hazard, lors qu'on ne sçait pas le nombre des cas, qui peuvent arriver. Posons, qu'il y ait dans un sac quantité de billets en partie blancs & en partie noirs, & que je ne sache pas le nombre des uns ni des autres; que ferois-je pour le découvrir? je les tirerois l'un aprés l'autre, (en remettant chaque fois dans le sac le billet, que j'en aurois tiré, avant que de prendre le suivant, afin que le nombre des billets du sac ne diminüât point) & si j'observois cent fois que j'en tirâsse un noir, & deux cent fois, que j'en tirâsse un blanc, je ne hésiterois pas à conclure, que le nombre des blancs ne fût environ le double de celuy des noirs; car il est tres-sur, que plus je ferois de ces observations en tirant, plus je pourrois espérer d'approcher de la veritable raison, qui se trouve

entre

entre les nombres des ces deux ſortes de billets; étant même une choſe démontrée, qu'on en peut tant faire, qu'il ſera à la fin probable de toute probabilité donnée, & par conſéquent qu'il ſera moralement certain, que la raiſon d'entre ces nombres, que l'on aura ainſi trouvée par expérience, difére de la veritable d'auſſi peu que l'on voudra: qui eſt tout ce qu'on peut ſouhaiter, C'eſt auſſi de cette maniere, que dans les jeux d'art & d'adreſſe on peut connoître de combien un jouëur eſt plus fort que l'autre jouëur. Je vois par exemple deux hommes, qui jouënt à la paume: je les obſerve long temps, & je remarque, que l'un d'eux gagne 200 ou 300 coups, pendant que l'autre n'en gagne que cent: je juge par là, avec aſſez de certitude, que le premier eſt deux ou trois fois meilleur jouëur que l'autre, ayant pour ainſi dire deux ou trois parties d'adreſſe, comme autant de cas ou de cauſes qui luy font gagner la bale, là où l'autre n'en a qu'une.

I. Cecy étant compris, mettons, pour entrer en matiere, deux jouëurs égaux A & B (c'eſt à dire, à qui nous ayons vû gagner & perdre un pareil nombre de coups) qui ſoient prémiérement à deux, ou trentains, ou quinzains, ou à but. Il eſt évident, qu'ils ont tous deux une égale eſperance de faire les coups qui leur manquent, & de gagner ainſi le jeu; c'eſt pourquoy le ſort de chacun eſt eſtimé $\frac{1}{2}$ J ou $\frac{1}{2}$ Jeu. Mettons enſuite, qu'A ait 30 & B 45, ou (ce qui revient à un) que celuy-cy ait l'avantage: vous voyez, qu'il eſt bien autant probable, qu'A gagnera ou perdra le coup ſuivant; mais s'il le gagne, ils redeviendront à deux & chacun aura, comme j'ay dit, $\frac{1}{2}$ J; & s'il le perd, il perdra auſſi le jeu; c'eſt ce qui luy vaut, par la Doctrine que vous ſçavez, $\frac{1.^{1:2} + 1.^{0}}{2}$ ꝏ $\frac{1}{4}$J. Mettons encore, que A ait 15 à 45; il eſt clair auſſi, qu'il luy eſt également poſſible, de gagner 30 à 45, & d'avoir ainsi le ſort précédent $\frac{1}{4}$ J, ou de perdre le jeu (ſelon qu'il gagne ou perd le prémier coup) c'eſt-ce qui rend maintenant ſon ſort $\frac{1.^{1:4} + 1.^{0}}{2}$ ꝏ $\frac{1}{8}$ J. Que si A avoit 15 à 30, un cas le rendroit trentain & un autre 15 à 45, (dont celuy-là luy amene $\frac{1}{2}$ J, & celuy-cy $\frac{1}{8}$ J) ce qui luy vaudroit alors $\frac{1.^{1:2} + 1.^{1:8}}{2}$ ꝏ $\frac{5}{16}$

Table I.

Points de A	Points de B	Sort de A
45	45	$\frac{1}{2}$ J.
30	45	$\frac{1}{4}$ J.
15	45	$\frac{1}{8}$ J.
0	45	$\frac{1}{16}$ J.
30	30	$\frac{1}{2}$ J.
15	30	$\frac{5}{16}$ J.
0	30	$\frac{3}{16}$ J.
15	15	$\frac{1}{2}$ J.
0	15	$\frac{11}{32}$ J.
0	0	$\frac{1}{2}$ J.

Table II.

Jeux de A	Jeux de B	Sort de A
3	3	$\frac{1}{2}$ P.
2	3	$\frac{1}{4}$ P.
1	3	$\frac{1}{8}$ P.
0	3	$\frac{1}{16}$ P.
2	2	$\frac{1}{2}$ P.
1	2	$\frac{5}{16}$ P.
0	2	$\frac{3}{16}$ P.
1	1	$\frac{1}{2}$ P.
0	1	$\frac{11}{32}$ P.
0	0	$\frac{1}{2}$ P.

∞ $\frac{5}{16}$ J. L'on trouvera tout de même les ſorts d'A pour les autres hipotêſes, comme ils ſont marqués dans cette Table. Pour ceux de B, ils ſont aisés à ſuppléer, étant toûjours les reſtes de ceux d'A à l'unité.

II. De même ſi les deux joueürs ſont à deux de jeu, il eſt manifeſte, que chacun d'eux peut également eſpérer de gagner la Partie, en faiſant deux jeux de ſuite ; & que par conſéquent le ſort de chacun eſt $\frac{1}{2}$ P ou $\frac{1}{2}$ Partie. Mais ſi (la Partie ſe faiſant par exemple à quatre jeux) A en avoit gagné 2, & B 3, ou (ce qui eſt le même) si B avoit l'avantage du jeu, il y auroit autant d'apparence, que le prémier jeu les rendît à deux de jeu, ou qu'il fit perdre la Partie à A (ſelon que celuy-cy gagneroit ou perdroit ce jeu) ce qui luy feroit avoir $\frac{1 \cdot {}^{1:2} + 1 \cdot {}^{0}}{2}$ ∞ $\frac{1}{4}$ P. L'on conclud de même; que ſi A avoit un jeu, & B trois, le ſort d'A ſeroit $\frac{1}{8}$ P. Et ainsi du reſte, comme vous voyez dans cette autre Table, qui comprend les ſorts d'A par rapport à toute la Partie. Vous jugez, qu'elle doit étre la même que la prémiére; car ce que les 4 coups d'un jeu ſont à l'égard de ce jeu, les 4 jeux le ſont à l'égard de toute la Partie.

III. Conſidérons encore les deux joueürs, comme étant à deux de jeu, & donnons en outre à A 30 & à B 45 : vous voyez que le prémier coup doit les mettre à deux, & ainsi égaler leur ſort, si A gagne le

Table III.

Jeux d'A	III. ou II.	II.	I.	O.	I.	O.	I.	O.	O.
Jeux de B	III. II.	III.	III.	III.	II.	II.	I.	I.	O.
Points de A. B.				*Sorts de A:*					
45.45	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2
30.45	3: 8	1: 8	1: 16	1: 32	7: 32	1: 8	13: 32	17: 64	27: 64
15.45	5:16	1:16	1: 32	1: 64	11: 64	3: 32	23: 64	29:128	49:128
0.45	9:32	1:32	1: 64	1:128	19:128	5: 64	42:128	53:256	93:256
45.30	5: 8	3: 8	3: 16	3: 32	13: 32	1: 4	19: 32	27: 64	37: 64
30.30	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2
15.30	13:32	5:32	5: 64	5:128	31:128	9: 64	55:128	73:256	113:256
0.30	11:32	3:32	3: 64	3:128	25:128	7: 64	49:128	63:256	103:256
45.15	11:16	7:16	7: 32	7: 64	29: 64	9: 32	41: 64	59:128	79:128
30.15	19:32	11:32	11: 64	11:128	49:128	15: 64	73:128	103:256	143:256
15.15	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2
0.15	27:64	11:64	11:128	11:256	65:256	19:128	113:256	151:512	231:512
45. 0	23:32	15:32	15: 64	15:128	61:128	19: 64	85:128	123:256	163:256
30. 0	21:32	13:32	13: 64	13:128	55:128	17: 64	79:128	113:256	153:256
15. 0	37:64	21:64	21:128	21:256	95:256	29:128	143:256	201:512	281:512
0. 0	1: 2	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2

gne le coup; & s'il le perd, que B doit avoir l'avantage du jeu, auquel cas nous avons trouvé le ſort d'A $\frac{1}{4}$ P: c'eſt pourquoy l'eſpérance qu'il a de gagner la Partie eſt maintenant $\frac{1 \cdot 1:2 + 1 \cdot 1:4}{2} \infty \frac{3}{8}$ P. Suppoſons enſuite, que A ait deux jeux (ou un jeu) & B trois, & qu'ils ſoient à deux, ou trentains, ou quinzains; il eſt viſible, que chacun pouvant également gagner le jeu, c'eſt tout comme s'ils n'avoient rien au de là de leurs jeux, de ſorte que le ſort d'A eſt encore, comme il a eté trouvé dans l'article précédent, $\frac{1}{4}$ P (ou $\frac{1}{8}$ P). Mais si A avoit 2 jeux à 3, & 30 à 45, il pourroit également acquerir 45, ou perdre la Partie avec le jeu (ſuivant qu'il gagneroit ou perdroit le prémier coup) ce qui luy vaudroit $\frac{1 \cdot 1:4 + 1 \cdot 0}{2} \infty \frac{1}{8}$ P. Et si outre les 2 jeux à 3 il n'avoit que 15 à 45, le prémier coup luy pourroit également donner 30 à 45, ou luy faire perdre le jeu & la Partie; ce qui alors rendroit ſon ſort $\frac{1 \cdot 1:8 + 1 \cdot 0}{2} \infty \frac{1}{16}$ P. &c. C'eſt de cette maniére, que j'ay calculé la troiſiéme Table, qui comprend les ſorts d'A pour tous les états poſſibles des deux joüeurs, lors qu'outre les jeux entiers ils ont encore gagné quelques points. Elle eſt donc générale, & elle renferme auſſi dans les derniers chifres de ſes rangs perpendiculaires toute la deuxiéme Table. Si vous prenez la peine de l'examiner, vous y pourrez faire pluſieurs reflexions dignes de remarque. Vous verrez par ex. que 15 à 30, les joüeurs étant à deux de jeu, valent tout juſte autant, que 30 à rien avec deux jeux à trois, ou 45 à 30 avec un jeu à deux, ou enfin 30 à 45 avec un jeu à un: qu'un jeu à deux avec 45 à 15 vaut tant ſoit peu mieux pour A, que s'ils étoient encore au comencement de la Partie, & que A n'eût rien & B 15, n'y ayant que $\frac{1}{512}$ de diférence entre les ſorts de ces deux hipotéſes. &c.

IV. Tachons préſentement de découvrir les ſorts de joüeurs, quand ils ſont d'inégale force: Pour abreger le calcul, ſoit pris généralement *n* pour le nombre des coups, qu'on ait vû gagner au plus fort A, contre leſquels le plus foible B n'en ait gagné qu'un; de ſorte que te que n à 1 marque la raiſon des forces des deux joueürs; aprés quoy mettons, qu'ils ſoient à deux, & quil faille trouver leur ſort. Si un ſeul coup ſufiſoit à chacun d'eux pour gagner le jeu, la queſtion ſeroit déja decidée; puiſque la raiſon de n à 1, qui eſt celle de leurs forces, ſeroit auſſi celle de leurs eſpérances pour ce jeu-là; mais parce que les loix du jeu en ont ordonné autrement, & qu'elles demandent qu'on gagne deux coups de ſuite pour gagner le jeu, la raiſon qu'on cherche eſt différente de celle-là, & il faut un peu d'analyſe pour la trouver. Sachant donc, qu'aprés le prémier coup l'un doit avoir l'avantage, & qu'aprés le ſecond coup le jeu ſe peut remettre à deux, & qu'étant à deux il retourne le même ſort inconnu, que nous voulons chercher, apellons le ſort d'A en cet état x, & conſidérons ce qui arriveroit, ſi l'un ou l'autre gagnoit l'avantage. Or ſi A le gagne, qui eſt n fois plus habile joueür que l'autre, il y aura pour luy n aparences de gagner le jeu, & une aparence de ſe remettre à deux (ſuivant qu'il gagnera auſſi ou perdra l'autre coup) ce qui luy vaut $\frac{n.\overline{1}+1.\overline{x}}{n+1} \propto \frac{n+x}{n+1}$: & si c'eſt B qui gagne l'avantage, il y aura pour A n vrayſemblances de ſe remettre à deux, & une vrayſemblance de perdre le jeu; ce qui luy fait $\frac{n.\overline{x}+1.\overline{0}}{n+1} \propto \frac{nx}{n+1}$. D'où il s'enſuit, que les joueürs étant encore à deux, auquel cas il y a pour A par la même raiſon n fois plus de vrayſemblances de gagner l'avantage, que de le perdre, ſon ſort doit étre $\frac{n.\overline{n+x:n+1}+1.\overline{nx:n+1}}{n+1} \propto \frac{nn+2nx}{nn+2n+1}$, & parce que le même eſt apellé x, il y aura $x \propto \frac{nn+2nx}{nn+2n+1}$; ce qui nous donne $x \propto \frac{nn}{nn+1}$, & reſte pour le ſort de ſa Partie $\frac{1}{nn+1}$, tellement que leurs ſorts ſont entre eux en raiſon de nn à 1, doublée de celle de leurs forces n à 1. Cecy étant établi, l'on pourra continüer par ordre nôtre recherche pour toutes les autres hipotêſes, comme on a fait dans les articles precédens, pourvû qu'on ſe ſouvienne icy, qu'à chaque coup il eſt n fois plus probable, que A gagne ce coup, qu'il n'eſt probable, qu'il le perde: Posé donc par exemple, qu'A ait 30

Table IV.

Points de A	B	*Sorts de A.*
45	45	$\frac{nn}{nn+1}$
30	45	$\frac{n^3}{n^3+nn+n+n+1}$
15	45	$\frac{n^4}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$
0	45	$\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
45	30	$\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$
30	30	$\frac{nn}{nn+1}$
15	30	$\frac{n^5+3n^4+n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	30	$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
45	15	$\frac{n^4+2n^3+2nn+2n}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$
30	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+3nn}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
15	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	15	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
45	0	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
30	0	$\frac{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+6nn}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
15	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+10n^3}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
0	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$

& B 45; il y a n cas qui mettent le jeu à deux, & un cas qui le fait perdre à A; ce qui luy vaut $\frac{n.\overline{nn:nn+1}+1.0}{n+1} \infty \frac{n^3}{n^3+nn+n+1}$. Posé qu'A ait 15 à 45, il y a n cas, qui luy font gagner 30 à 45 & encore un cas qui luy fait perdre le jeu; ce qui luy fait naître le ſort $\frac{n.\overline{n^3:n^3+nn+n+1}+1.0}{n+1} \infty \frac{n^4}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$. On trouve de la même maniére le ſort d'A, quand il n'a rien & B 45. Lors qu'ils ſont trentains, ils ont le même ſort qu'étant à deux, parce qu'il leur faut auſſi gagner deux coups de ſuite, pour faire le jeu. On trouvera de même leur ſort, A ayant 15 ou 0, & B 30. Semblablement on cherche les ſorts, A ayant 45, & B 30, 15 ou 0; comme auſſi A ayant 30, & B 15 ou 0. Ainſi l'on ne peut ignorer les ſorts, quand ils ſont quinzains, ou A ayant 0 & B 15, ou au contraire A 15 & B 0, ou enfin quand ils ſont encore à but. C'eſt ce qui produit la quatriéme Table, où eſt contenüe la valeur des eſpérances de A (par raport à chaque jeu) généralement pour toute ſorte de raiſons, qu'on puiſſe imaginer entre les forces des joüeurs:

V. Vous jugez bien, que si vous y prenez n pour 1, il en doit reſulter la prémiére Table, faite pour des joüeurs d'égale force: & ſi vous faites valoir ſucceſſivement cette lettre pour 2, 3, 4. &c. la Table ſervira pour des joüeurs, dont l'un eſt deux, trois, ou quatre fois plus fort que l'autre. Si par exemple A eſt deux fois plus fort que B, vous trouverez ſon ſort, étant à deux, $\frac{4}{5}$ J; & ayant 30 à 45 vous le trouverez $\frac{8}{15}$ J; de ſorte qu'il reſtera pour celuy de B, $\frac{1}{5}$ J & $\frac{7}{15}$ J; & par conſéquent les ſorts des deux joüeurs en ces cas ſeront entre eux en raiſon de 4 à 1, & de 8 à 7, & ainſi de tout le reſte, comme il eſt repréſenté dans la cinquiéme Table.

Vous vous ſouviendrez pourtant de ce que j'ay dit, que ces Tables ne ſervent que pour chaque jeu ſéparément; car il en faudroit encore donner une ſemblable, qui comprit les ſorts des joüeurs par raport à toute la Partie, lors qu'ils joüent à pluſieurs jeux, dont ils ont déja gagné quelques uns, avec quelques points encore, ſi vous voulez; comme j'ay fait la troiſiéme Table pour des joüeurs égaux: mais parce que la continuation de cette recherche par lettres ſeroit

Table V.

Points de A	B	Raiſons de leurs forts, A étant plus fort que B, 2 fois		3 fois		4 fois.	
45	45	4 .	1	9 .	1	16 .	1
30	45	8 .	7	27 .	13	64 .	21
15	45	16 .	29	81 .	79	256 .	169
0	45	32 .	103	243 .	397	1024 .	1101
45	30	14 .	1	39 .	1	84 .	1
30	30	4 .	1	9 .	1	16 .	1
15	30	88 .	47	513 .	127	1856 .	269
0	30	208 .	197	891 .	389	8448 .	2177
45	15	44 .	1	159 .	1	424 .	1
30	15	124 .	11	621 .	19	2096 .	29
15	15	112 .	23	297 .	23	2048 .	77
0	15	176 .	67	891 .	133	49408 .	3717
45	0	134 .	1	639 .	1	2124 .	1
30	0	392 .	13	1269 .	11	10592 .	33
15	0	224 .	19	999 .	25	52608 .	517
0	0	208 .	35	243 .	13	51968 .	1157

tres-pénible, & demanderoit un calcul immenſe, je me contenteray de faire voir dans un exemple particulier, comment il s'y faudroit prendre, pour trouver en abregé ce qu'on cherche. Supoſons, que la Partie ſe face à 4 jeux: que A ait un jeu & outre cela 15, B deux jeux avec 45, & que A ſoit deux fois plus fort que B; on veut ſçavoir la valeur des eſpérances qu'ils ont de gagner la Partie. Remarquons avant toute choſe que les facilités, qu'ont ces joueurs à gagner chaque jeu étant encore à but, ſont entre elles par la cinquiéme Table en raiſon de 208 à 35, ou bien de $\frac{208}{35}$ à 1; & que par conſéquent celuy qui eſt deux fois plus fort qu'un autre, aura $\frac{208}{35}$ fois (c'eſt près de ſix fois) plus de facilité pour gagner ce jeu: enſuite de quoy conſidérons, que le jeux, dont ils ont déja fait une Partie, étant

étant achevé, ils auront ou deux jeux à deux, ou un jeu à trois (suivant que l'un ou l'autre l'aura gagné) en quelle situation il leur manquera encore ou deux jeux à chacun, ou trois jeux à A & un jeu à B. Or il est bien clair, que c est alors tout comme s'il leur manquoit seulement autant de coups, qu'il leur manque de jeux (c'est à dire comme s'ils estoient trentains, ou 15 à 45) suposé que la facilité, que le plus fort a de gagner un jeu entier, fût celle, qu'il a de gagner un simple coup, & que nous avons nommée n. Mais cette facilité, comme je viens de dire, est exprimée par $\frac{208}{35}$; si vous substituez donc cette fraction numerique à la place de n dans les quantités $\frac{nn}{nn+1}$ & $\frac{n4}{n4+2n3+2nn+2n+1}$, qui marquent, par la 4^{me} Table, le sort de A quand il est trentain ou 15 à 45, vous aurez les sorts, qui luy tombent quand il a deux jeux à deux, ou un jeu à trois, qui seront ainsi $\frac{43264}{44489}$ P & $\frac{1871773696}{2627030961}$ P. Et par ce que l'on supose, que ce joueur a 15 à 45 du jeu qu'on joue présentement, auquel état il a 16 cas de gagner ce jeu, & 29 cas de le perdre, par la cinquiéme Table ; il s'ensuit, qu'il y a 16 cas qui luy acquiérent deux jeux à deux, & 29 cas, qui luy font avoir un jeu à trois, ce qui rend la valeur de son espérance à gagner la Partie,

$$\frac{16 \cdot \frac{43264}{44489} + 29 \cdot \frac{1871773696}{2627030961}}{45} \infty \frac{19031314432}{236431278649} \text{ P} ;$$

& il reste pour celle de B, $\frac{4611964217}{236431278649}$ P; de sorte que ces espérances sont entre elles en raison de 19031314432 à 4611964217, qui est un peu plus que quadruple. Mais passons plus outre.

VI. Si le raport des forces de deux joueurs est connu, l'on peut sçavoir, combien l'un doit donner d'avantage à l'autre pour rendre le jeu égal. On n'a qu'à jetter les jeux sur la cinquiéme Table, pour voir où les nombres, qui marquent le raport de leurs espérances, s'aprochent le plus. C'est ainsi que nous observons, que lorsque A est deux fois plus fort que B, leurs sorts différent le moins, A n'ayant rien & B 30; de sorte que A peut donner à B 30, & même avec quelque petit avantage pour soy, son espérance à gagner le jeu étant tant soit peu plus grande que celle de B. Si A est trois fois plus fort que B, & qu'il luy donne 45, nous voyons, qu'il y a un avantage notable pour B, mais qu'il y a beaucoup plus d'avantage pout luy même, s'il ne luy donne que 30. Pour rendre donc la Partie égale autant qu'il se peut, il faudroit qu'il donnât à B 45. prenant pour luy 15. Si A est quatre fois plus fort, il peut donner à B 45, pourtant avec quelque petit avantage pour B; mais s'il étoit cinq fois plus fort que B, il pourroit luy donner 45, & auroit encore un avantage asés considérable pour soy-même, puisque leurs sorts se trouveroient être comme 3125 & 2491 &c.

VII. Si A donne à B 15, ou 30, ou 45, sçavoir au contraire, de combien A est plus fort que B? Pour resoudre cette question il faut considérer, que lors que pour égaler la Partie A donne à B un avantage de quelques points, le sort de chacun doit être $\frac{1}{2}$; c'est pourquoi l'on prendra dans la Table IV les quantités, qui marquent le sort de A, lors qu'il n'a rien, & B 45, ou 30, ou 15, & on les fera chacune $\infty \frac{1}{2}$; ce qui nous fournit trois égalités:

$$\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1} \infty \frac{1}{2},$$

$$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1} \infty \frac{1}{2},$$

$$\& \quad \frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1} \infty \frac{1}{2};$$

lesquelles étant reduites seront

$$n^5-3n^4-4n^3-4nn-3n-1 \infty 0,$$
$$n^6+4n^5-5n^4-8n^3-7nn-4n-1 \infty 0,$$
$$n^7+5n^6+11n^5-5n^4-15n^3-11nn-5n-1 \infty 0.$$

Et parce que les racines de ces équations, qui marquent la valeur de l'inconnuë n, sont sourdes, il s'ensuit que les forces des joueürs, dont l'un donne à l'autre un avantage de quelques coups, sont incommensurables entre elles. La racine de la prémiére est à peu prés 4.216 (ou environ $4\frac{1}{5}$), de la seconde 1.946 (ou $1\frac{9}{10}$), de la troisiéme 1.313 (ou $1\frac{3}{10}$); ce qui fait voir, que celuy qui peut donner à l'autre quarante-cinq, doit être $4\frac{1}{5}$ fois plus fort: que celuy qui peut donner trente, doit être $1\frac{9}{10}$ fois; & qui peut donner quinze, $1\frac{3}{10}$ fois plus fort que l'autre; c'est à dire, que le prémier

doit

doit gagner 42, le ſecond 19, & le troiſiéme 13 coups, lorsque leurs Parties en gagnent 10.

Or si A donne à B l'avantage, qui eſt neceſſaire pour rendre le jeu égal, ce ſera toute la même choſe, de jouër à un jeu, ou à deux jeux, ou à trois, ou à tant qu'il vous plaira: car s'il eſt également probable, que A gagne un jeu, ou qu'il le perde; il eſt auſſi également poſſible, qu'il face deux jeux de ſuite, ou qu'il les perde; quand la partie ſe fait à deux jeux; ou bien qu'il gagne ou perde trois jeux, quand elle ſe fait à trois jeux &c.

VIII. Si A donne à B demi-15, ou demi-30, ou demi-45, ſçavoir de combien A eſt plus fort que B? Mettons, qu'A donne à B demi-45, que la Partie ſe jouë à deux jeux; que B prenne au premier jeu 30, & à l'autre 45; puis derechef 30, si la Partie ſe remet à deux de jeu, puis 45, & ainsi alternativement; & que toutes les fois qu'il prend 30, ſon eſpérance de gagner le jeu ſoit à celle de A en raiſon de b à a, & toutes les fois qu'il prend 45, en raiſon de d à c. Cela posé, faiſons le ſort d'A au commencement de la Partie ∞ z, & conſidérons ce qui arriveroit, si B gagnoit le prémier jeu: Alors B prendroit 45, & par l'hipotéſe A auroit c vraiſemblances de gagner le jeu ſuivant, & d vraiſemblances de le perdre. Or si A le gagne, la Partie ſe remet à deux de jeu, & il faut que B reprenne 30, tout de même qu'au comencement de la Partie: mais si A le perd, il perd enſemble la Partie: d'où il ſuit, que le ſort de A ſeroit en ce cas $\frac{c\,z + d\,.\,0}{c+d} \infty \frac{cz}{c+d}$. Que si au contraire A avoit gagné le prémier jeu, B prendroit auſſi 45 & A auroit aprés cela c aparences de gagner enſemble le jeu & la Partie; & d aparences de remettre la Partie à deux de jeu, en perdant le jeu: ainsi ſon ſort ſeroit alors $\frac{c.\,p + d.\,z}{c+d} \infty \frac{cp + dz}{c+d}$ Enfin conſidérans les jouëurs comme au commencement de la Partie, où B prend 30, nous voyons qu'il y a pour A, a probabilités de gagner l'avantage du jeu, c'eſt a dire de parvenir au ſort précédent $\frac{cp+dz}{c+d}$, & b probabilités de perdre cet avantage & d'acquerir ainsi le ſort $\frac{cz}{c+d}$; ce qui luy vaut

$\frac{a.\overline{cP+dz:c+d}+b.\overline{cz:c+d}}{a+b} \infty \frac{acP+adz+bcz}{\overline{a+b}.\overline{c+d}}$. Mais nous ſupoſions le méme ſort, qu'obtient A au commancement de la Partie ∞ z; c'eſt pourquoi il y a égalité entre z & la dite quantité $\frac{acP+adz+bcz}{\overline{a+b}.\overline{c+d}}$, laquelle étant reduite on trouvera $z \infty \frac{ac}{ac+bd}$ P. Et parce que la Partie à demi-45 eſt ſuposée égale, dans laquelle avant le commencement du jeu le ſort de chacun ſoit $\frac{1}{2}$ P, il doit y avoir encore égalité entre $\frac{1}{2}$ P, & la valeur trouvée de z, d'où il reſulte celle-cy $ac \infty bd$, qui nous donne l'analogie $a.b::d.c$.

Cela fait voir, que la Partie ſera égale, quand ces quatre quantités a, b, d, c, ſont proportionnelles; c'eſt à dire, quand l'eſpérance du plus fort à gagner le jeu eſt à l'eſpérance du plus foible (ayant 30) comme reciproquement l'eſpérance du plus foible (ayant 45) eſt à celle du plus fort: ou bien, quand il y a 2, 3 ou 4 fois plus d'aparence, que le foible perde le jeu, ayant 30, & qu'il y ait au contraire autant d'aparence, qu'il le gagne, ayant 45, on luy peut donner demi-45.

Et il eſt à remarquer, qu'il n'importe, ſoit que B prenne au prémier jeu 30 & à l'autre 45; ou qu'au contraire il prenne d'abord 45, & puis 30: car ayant fait nôtre calcul, pour cette derniere hipotéſe, nous trouverons $z \infty \frac{c.\overline{aP+bz:a+b}+d.\overline{az:a+b}}{c+d} \infty \frac{acP+bcz+adz}{\overline{a+b}.\overline{c+d}}$, c'eſt à dire encore $z \infty \frac{ac}{ac+bd}$ P, comme auparavant. Par conſéquent ceux-là ſe trompent, qui s'imaginent, qu'il y a de l'avantage à prendre au prémier jeu le moins, & à l'autre le plus.

Or parce que le même raiſonnement ſubſiſte toujours, quelque raiſon que puiſſent marquer les lettres a, b & d, c; il s'enſuit, qu'il en ſera de même de la Partie, qui ſe jouë à demi-30, ou à demi-15; ſçavoir, qu'elle ſera égale toutes les fois, que l'eſpérance de A par raport à chaque jeu ſurpaſſe celle de B & en eſt ſurpaſſée alternativement en même raiſon.

Pour faire l'aplication de ce que nous venons d'établir, il faut déter-

déterminer pour chaque hipotése la valeur des lettres a, b, c, d; ce qui se fait sans peine. On n'a qu'à prendre dans la 4^me Table les sorts de A, quand B est suposé avoir 45, ou 30, ou 15, ou 0, à rien; lesquels étant par ordre $\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$,
$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$,
$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$,
$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$, ceux de B, comme les restes à l'unité, seront $\frac{3n^4+4n^3+4nn+3n+1}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$,
$\frac{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$,
$\frac{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$,
$\frac{15n^3+11nn+5n+1}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$;
& par conséquent les espérances d'A auront à celles de B les raisons

$\frac{n^5}{3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$, $\frac{n^6+4n^5+n^4}{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$,
$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$, $\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{15n^3+11nn+5n+1}$,
D'où il est clair, que quand la Partie se joue à demi-45, l'on doit faire $\frac{a}{b} \infty \frac{n^6+4n^5+n^4}{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$, & $\frac{c}{d} \infty$
$\frac{n^5}{3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$: quand elle se joue à demi-30,

$\frac{a}{b} \infty$

$\frac{a}{b} \infty \frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$, & $\frac{c}{d} \infty$
$\frac{n^6+4n^5+n^4}{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$: & enfin quand on la jouë à demi-15, $\frac{a}{b} \infty \frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{15n^3+11nn+5n+1}$, & $\frac{c}{d} \infty$
$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$. Subſtituans donc ces valeurs, nous aurons à la place de $ac \infty bd$, dans la prémiére hipotêſe, $\overline{n^6+4n^5+n^4}$ in $n^5 \infty \overline{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$ in $\overline{3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$: dans la ſéconde, $\overline{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}$ in $\overline{n^6+4n^5+n^4} \infty \overline{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$ in $\overline{6n^4+8n^3+7nn+4n+1}$: & dans la troiſiéme, $\overline{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}$ in $\overline{n^7+5n^6+11n^5+5n^4} \infty \overline{15n^3+11nn+5n+1}$ in $\overline{10n^4+15n^3+11nn+5n+1}$; c'eſt à dire, que la multiplication faite, nous aurons les trois égalités:

$n^{11}+4n^{10}+n^9 \infty 18n^8+48n^7+77n^6+90n^5+77n^4+49n^3+23nn+7n+1$,

$n^{13}+9n^{12}+32n^{11}+54n^{10}+31n^9+5n^8 \infty 60n^8+170n^7+256n^6+263n^5+193n^4+102n^3+38nn+9n+1$,

$n^{14}+10n^{13}+47n^{12}+130n^{11}+221n^{10}+220n^9+75n^8 \infty 150n^7+335n^6+380n^5+281n^4+140n^3+47nn+10n+1$;

Leſquelles enſuite ſe reduiſent à celles-cy:

$n^{11}+4n^{10}+n^9-18n^8-48n^7-77n^6-90n^5-77n^4-49n^3-23nn-7n-1 \infty 0$,

$n^{13}+9n^{12}+32n^{11}+54n^{10}+31n^9-55n^8-170n^7-256n^6-263n^5-193n^4-102n^3-38nn-9n-1 \infty 0$,

$n^{14}+10n^{13}+47n^{12}+130n^{11}+221n^{10}+220n^9+75n^8-150n^7-335n^6-380n^5-281n^4-140n^3-47nn-10n-1 \infty 0$;

où l'inconnuë n nous marque la raiſon d'entre les forces des deux joueürs. Celuy qui aura le loiſir, pourra chercher les racines de ces équa-

équations; je conjecture, qu'elles sont environ $2\frac{7}{10}$, $1\frac{6}{10}$, & $1\frac{1}{10}$, tellement que celuy qui peut donner demi-45, doit gagner 27: qui peut donner demi-30, doit gagner 16: & enfin qui peut donner demi-15, doit gagner 11 coups contre dix coups de sa Partie.

Avant que de finir cet article, je dois encore remarquer, que si l'avantage qu'on donne alternativement au jouëur B, est tel, comme je l'ai dit, c'est à dire que les deux jouëurs fassent par là à chaque jeu un échange continuel de leurs espérances, la Partie sera toujours égale, non seulement quand on la jouë à un ou plusieurs couples de jeux, comme l'on pourroit s'imaginer, mais aussi à quel nombre de jeux, qu'on voudra la jouër. Car posé qu'on jouë à 3, 4 ou 5 jeux, que A donne à B un avantage alternativement plus petit & plus grand: savoir le plus petit, quand la somme des jeux qui leur restent est un nombre pair, & le plus grand quand cette some est un nombre impair; & qu'au prémier cas il y ait deux fois plus d'aparence que A gagne le jeu, & qu'à l'autre il y ait au contraire deux fois plus d'aparence que B le gagne: on trouvera le sort de chacun à chaque jeu par ordre, come l'on voit ici. (Tab.VI.) Les petits ronds vous marquent les jeux qui leur restent à faire; & il paroit, que quand le nombre de ces jeux est égal de part & d'autre, le sort de chaque jouëur est toujours $\frac{1}{2}$ P.

IX. A donne à B demi-30, & à C 45; combien B peut-il donner à C? *Resp.* Parce que la force de B est à celle d'A, comme 10 à 16, par l'article précédent; & celle d'A à celle de C, comme 42 à 10, par l'art. 7. on doit conclure *ex æquo perturbatè*, que la force de B est à celle de C, comme 42 à 16, ou à peu prés comme 26 à 10; de sorte que B pourra donner à C demi-45, par l'art. précéd.

X. A donne à B demi-30, & B à C demi-45; que peut donc A donner à C? *Resp.* la force d'A étant à celle de B, comme 16 à 10: & celle de B à celle de C, comme 27 à 10, par l'article 8; il s'ensuit par la composition des raisons, que la force d'A est à celle de C, comme 432 à 100, c'est a dire que celui-là peut donner à celui-cy quarante-cinq, par l'art. 7.

XI. A est deux fois plus fort que B, & cinq fois plus fort que C. Donc B est $\frac{5}{2}$ fois plus fort que C, & lui peut donner par conséquent presque demi-45, par l'art. 8.

Table VI.

Jeux qui restent A	B	*Somme de ces jeux*	*Sort de A*
○ ○	○ ○	*Pair*	$\frac{1}{2}$
○ ○	○	*Impair*	$\frac{1.^{1:2} + 2.^{0}}{3} \infty \frac{1}{6}$
○ ○ ○	○	P	$\frac{2.^{1:6} + 1.^{0}}{3} \infty \frac{1}{9}$
○ ○ ○ ○	○	I	$\frac{1.^{1:9} + 2.^{0}}{3} \infty \frac{1}{27}$
○ ○ ○ ○ ○	○	P	$\frac{2.^{1:27} + 1.^{0}}{3} \infty \frac{2}{81}$
○	○ ○	I	$\frac{1.^{1} + 2.^{1:2}}{3} \infty \frac{2}{3}$
○	○ ○ ○	P	$\frac{2.^{1} + 1.^{2:3}}{3} \infty \frac{8}{9}$
○	○ ○ ○ ○	I	$\frac{1.^{1} + 2.^{8:9}}{3} \infty \frac{25}{27}$
○	○ ○ ○ ○ ○	P	$\frac{2.^{1} + 1.^{25:27}}{3} \infty \frac{79}{81}$
○ ○ ○	○ ○	I	$\frac{1.^{1:2} + 2.^{1:9}}{3} \infty \frac{13}{54}$
○ ○ ○ ○	○ ○	P	$\frac{2.^{13:54} + 1.^{1:27}}{3} \infty \frac{14}{81}$
○ ○ ○ ○ ○	○ ○	I	$\frac{1.^{14:81} + 2.^{2:81}}{3} \infty \frac{2}{27}$

Jeux

Jeux qui restent A	B	*Somme de ces jeux*	*Sort de A.*
○ ○	○ ○ ○	I	$\frac{1 \cdot 8:9 + 2 \cdot 1:2}{3} \infty \frac{17}{27}$
○ ○	○ ○ ○ ○	P	$\frac{2 \cdot 25:27 + 1 \cdot 17:27}{3} \infty \frac{67}{81}$
○ ○	○○○ ○ ○	I	$\frac{1 \cdot 79:81 + 2 \cdot 67:81}{3} \infty \frac{71}{81}$
○ ○ ○	○ ○ ○	P	$\frac{2 \cdot 17:27 + 1 \cdot 13:54}{3} \infty \frac{1}{2}$
○ ○ ○ ○	○ ○ ○	I	$\frac{1 \cdot 1:2 + 2 \cdot 14:81}{3} \infty \frac{137}{486}$
○○○ ○ ○	○ ○ ○	P	$\frac{2 \cdot 137:486 + 1 \cdot 2:27}{3} \infty \frac{155}{729}$
○ ○ ○	○ ○ ○ ○	I	$\frac{1 \cdot 67:81 + 2 \cdot 1:2}{3} \infty \frac{148}{243}$
○ ○ ○	○○○ ○ ○	P	$\frac{2 \cdot 71:81 + 1 \cdot 148:243}{3} \infty \frac{574}{729}$
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○	P	$\frac{2 \cdot 148:243 + 1 \cdot 137:486}{3} \infty \frac{1}{2}$
○○○ ○ ○	○ ○ ○ ○	I	$\frac{1 \cdot 1:2 + 2 \cdot 155:729}{3} \infty \frac{1349}{4374}$
○ ○ ○ ○	○○○ ○ ○	I	$\frac{1 \cdot 574:729 + 2 \cdot 1:2}{3} \infty \frac{1303}{2187}$
○○○ ○ ○	○○○ ○ ○	P	$\frac{2 \cdot 1303:2187 + 1 \cdot 1349:4374}{3} \infty \frac{1}{2}.$

XII. A eſt $\frac{3}{2}$ fois plus fort que B, & B $\frac{5}{2}$ fois plus fort que C. Donc A eſt $\frac{15}{4}$ fois plus fort que C, & ainsi lui pourra donner plus de demi-45, & moins de 45.

XIII. Connoiſſant les raiſons d'entre les forces de trois Joüeurs A, B, C, joüans un à un en tous ſens, on connoîtra auſſi le raport de leurs forces, quand deux de ces joüeurs joüent de compagnie contre le troiſiéme. Supoſons, que les forces abſoluës des trois joüeurs ſoient marquées par les lettres l, m, n; que A jouë contre les deux autres, & qu'il jouë indifféremment tantôt à B, tantôt à C: S'il jouë à B, il a l degrés de facilité de gagner le coup. & m degrés de le perdre; ce qui luy vaut $\frac{l}{l+m}$: & s'il jouë à C, il a encore l degrés d'aparence de gagner le coup, & n degrés de le perdre; ce qui fait $\frac{l}{l+n}$. Donc s'il eſt également poſſible, qu'il envoie la balle à B ou à C, comme nous ſupoſons, il y a un cas, qui luy fait avoir $\frac{l}{l+m}$, & un autre, qui luy fait acquerir $\frac{l}{l+n}$; ce qui luy donne par rapport à ce coup-là, $\frac{1 \cdot l : l+m + 1 \cdot l : l+n}{2} \infty \frac{l}{2l+2m} + \frac{l}{2l+2n} \infty \frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn}$, tellement qu'il reſte pour le ſort des autres B & C, $\frac{lm+ln+2mn}{2ll+2lm+2ln+2mn}$. Ainſi leurs forces étant par exemple en raiſon de 3, 2, 1, le ſort d'A eſt $\frac{27}{40}$, & celuy des B & C $\frac{13}{40}$, c'eſt à dire que A peut gagner 27 coups, lorſque les autres n'en peuvent gagner que 13; de ſorte qu'il leur peut donner trente avec quelque avantage pour ſoi, comme il paroit par la cinquiéme Table. Que ſi vous faites $\frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn} \infty \frac{lm+ln+2mn}{2ll+2lm+2ln+2mn}$, vous aurez $ll \infty mn$; ce qui vous marque, que quand la force abſoluë de celui, qui jouë contre les deux autres, eſt moienne proportionnelle entre les forces de ceux-cy, la Partie ſe peut jouër à but.

Quand nous avançons, comme également probable, que le joüeur A envoie la balle à B ou à C, ce n'eſt qu'une ſupoſition, & la verité eſt, que plus le joüeur eſt habile, plus ſouvent il envoiera

la balle

la balle au plus foible. Pour avoir égard à cela, ſupoſez que toutes les fois qu'il jouë p balles au plus fort B, il en jouë un plus grand nombre q au plus foible C: donc il y a p cas, qui luy font avoir $\frac{l}{l+m}$, & q cas qui luy font obtenir $\frac{l}{l+n}$; ce qui luy vaut $\frac{p\cdot\frac{l}{l+m}+q\cdot\frac{l}{l+n}}{p+q}$ ∞

$$\frac{pl}{\overline{p+q}\cdot\overline{l+m}}+\frac{ql}{\overline{p+q}\cdot\overline{l+n}}\ \infty\ \frac{pll+qll+qlm+pln}{pll+qll+plm+qlm+pln+qln+pmn+qmn}:$$

où si vous interpretez les lettres $l, m, n,$ par 3, 2, 1, comme auparavant, & outre cela p par 1, & q par 3, vous trouverez le ſort d'A à l'égard de chaque coup $\infty\ \frac{57}{80}$, plus grand que $\frac{27}{40}$ le ſort qu'il a, lors qu'il envoie les balles indiféremment à chacun des autres; en ſorte qu'il leur peut maintenant donner presque demi-45. Si vous faites $\frac{pll+qll+qlm+pln}{pll+qll+plm+qlm+pln+qln+pmn+qmn}\ \infty\ \frac{1}{2}$, vous aurez $plm-pln+pmn-pll\ \infty\ qlm-qln-qmn+qll$; ce qui marque, que la Partie à but ſera égale, quand p eſt à q, comme $lm-ln-mn+ll$ à $lm-ln+mn-ll$; & il faut pour cet effet, que mn ſoit toujours plus grande que ll.

Mais l'on doit encore ici conſidérer une choſe, qui contrebalance en quelque maniére l'avantage, que tire le jouëur A de ce qu'il jouë le plus ſouvant au plus foible. C'eſt qu'étant ſeul contre deux, il ſe fatigue auſſi plus que chacun des autres, & que cette fatigue ſemble diminuër conſidérablement ſa force & ſon ſort: car trois perſonnes d'une égale force joüans enſemble, un contre deux, on voit bien, que ſelon ce calcul, la Partie devroit étre égale, au lieu qu'il eſt plus probable, que les deux la gagneront contre le troiſiéme, vû qu'ils ne ſe laſſent pas tant, & qu'ils ne défendent chacun que la moitié du Jeu de Paume. Pour avoir donc égard à cette diférence, il faudroit juger des forces abſoluës de nos jouëurs par le nombre des coups, qu'ils gagnent ou qu'ils perdent, non quand ils joüent chacun ſeul contre A, mais quand ils joüent conjointement contre luy: car ayant obſervé par exemple, que de tous les coups, qui ſe joüent entre A & B, le nombre de ceux que A gagne eſt au nombre de ceux que gagne B, comme l à r; & que de tous les coups qui ſe joüent

 entre

entre A & C, le nombre de ceux que A gagne eſt au nombre de ceux que gagne C, comme l à s; il eſt clair, que les forces abſoluës des trois joüeurs A, B, C ſeront alors en raiſon de l, r, s; d'où leurs ſorts ſe déduiſent enſuite comme deſſus, en ſorte qu'on n'a qu'à ſubſtituër ſimplement les lettres r & s à la place de m & n.

XIV. Connoiſſant les raiſons des forces de quatre joueürs A, B, C, D, joüans un à un en tous ſens, on connoîtra le raport de leurs forces, quand ils joüent deux à deux, A & B contre C & D. Suposons que leurs forces abſoluës ſoient exprimées par k, l, m, n; il ſe peut faire, que A (de même que B) jouë à C ou à D. Si A joue à C, il a $\frac{k}{k+m}$; & s'il joue à D, il a $\frac{k}{k+n}$ vraiſemblances de gagner le coup; c'eſt-ce qui le fait parvenir au ſort

$$\frac{1.\,k:k+m + 1.\,k:k+n}{2} \infty \frac{2kk+km+kn}{2kk+2km+2kn+2mn}.$$

Par la même raiſon si c'eſt B qui jouë, ſon ſort eſt $\frac{1.\,l:l+m + 1.\,l:l+n}{2} \infty$ $\frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn}$. Or il eſt également poſſible, que A ou B joüe: donc il y a un cas, qui leur aporte $\frac{2kk+km+kn}{2kk+2km+2kn+2mn}$, & un autre, qni leur donne $\frac{2ll+lm+ln}{2ll+2lm+2ln+2mn}$; ce qui leur vaut $\frac{2kk+km+kn}{4kk+4km+4kn+4mn} + \frac{2ll+lm+ln}{4ll+4lm+4ln+4mn}$. Ainsi les forces abſoluës des quatre joueürs A, B, C, D, étant comme 1, 5, 2, 3, le ſort d'A & B par raport à chaque coup ſera $\frac{323}{672}$, & celuy de C & D $\frac{349}{672}$; ſi bien que ceux-cy peuvent donner à ceux-là presque demi-quinze. Si dans les dénominateurs de ces fractions literales vous mettez $4kl$ au lieu de $4mn$, vous aurez

$$\frac{2kk+km+kn}{4kk+4km+4kn+4kl} + \frac{2ll+lm+ln}{4ll+4lm+4ln+4kl} \infty \frac{2k+m+n}{4k+4m+4n+4l} + \frac{2l+m+n}{4l+4m+4n+4k} \infty \frac{2k+2l+2m+2n}{4k+4l+4m+4n} \infty \frac{1}{2};$$

ce qui montre, que si les forces des joüeurs d'un côté & d'autre ſe trouvent reciproquement proportionnelles, la Partie qu'ils joüent à but ſera égale. Toutes fois il faut ici repeter l'avertiſſement du précédent article, ſçavoir

ſçavoir que les habiles ioüeurs tâchent toujours d'envoier *les balles* au plus foible, à quoi il faut avoir égard, si l'on y veut aller bien juſte.

XV. Si de deux joueürs A & B l'un peut donner à l'autre un avantage de quelques coups, & qu'il aime mieux luy donner cet avantage en jeux entiers qu'en points; on veut ſçavoir, combien de jeux il luy doit donner? Par exemple, si A peut donner à B 45, & qu'il veüille joüer à but avec luy on demande, de combien de jeux il les luy peut donner tous à la reſerve d'un ſeul? Pour réſoudre cette queſtion, il faut conſidérer, que 1. A pouvant donner à B. 45, la valeur de ſa force, marquée par la lettre n, ſera $\frac{4216}{1000}$ par l'art. 7me. 2. Quand il eſt à but avec B, l'eſpérance qu'il a de gagner le jeu eſt par la 4me Table, $\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$; par conſéquent celle de B eſt $\frac{15n^3+11nn+5n+1}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$; & la raiſon de leurs eſpérances $\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{15n^3+11nn+5n+1}$. 3. Pour expliquer cette raiſon par nombres, en y ſubſtituant $\frac{4216}{1000}$ à la place de n, on peut ſe ſervir des Logaritmes, par le moien desquels on la détermine ſans peine à $\frac{111529}{134167}$. Nommons cette raiſon m, & cherchons ſucceſſivement, quel eſt le ſort de A par raport à la Partie, quand il luy manque 1, 2, 3, 4 &c. jeux, pendant qu'à B il n'en manque toujours qu'un; juſqu'à ce que nous voïons par la progreſſion, quel doit étre ce ſort, lors qu'il luy manque x jeux. Or s'il luy manque un jeu, de même qu'à B, c'eſt à dire si les deux joüeurs ſont à deux de jeux, il eſt aisé de juger par ce que j'ay démontré dans l'art. 4, que le ſort de A eſt $\frac{mm}{mm+1}$. S'il luy manque deux jeux, il eſt clair qu'il y a m cas, qui le pourront mettre à deux de jeu avec B en luy faiſant gagner le jeu, & un cas qui luy fait perdre le jeu & la Partie; ce qui luy vaut $\frac{m\, mm : mm+1 + 1 \cdot 0}{m+1} \infty \frac{m^3}{mm+1 \cdot m+1}$. S'il luy manque trois jeux, il n'eſt pas moins clair, que m cas luy en feront reſter deux en luy faiſant gagner le jeu, & qu'un cas luy fera encore

perdre

perdre la Partie; ce qui luy produit $\frac{m \cdot m^3 : mm+1 \cdot m+1 + 1 \cdot 0}{m+1} \infty \frac{m^4}{mm+1 \cdot \overline{m+1}^2}$. Et s'il luy en manque quatre, il y a m cas qui luy en feront reſter trois, & un cas qui luy fera perdre la Partie; ce qui luy aporte $\frac{m \cdot m^4 : mm+1 \cdot \overline{m+1}^2 + 1 \cdot 0}{m+1} \infty \frac{m^5}{mm+1 \cdot \overline{m+1}^3}$ En un mot, quel nombre de jeux qu'il luy manque, ſon ſort ſe trouve toujours exprimé par une fraction, dans laquelle l'expoſant de m eſt plus grand, & celuy de $m+1$ plus petit d'une unité, que le nombre de ces jeux. D'où l'on infére, que s'il manque x jeux à A & un jeu à B, c'eſt à dire s'ils joüent à x jeux, dont A donne $x-1$ d'avance à B, le ſort de A ſera $\frac{m^{x+1}}{mm+1 \cdot \overline{m+1}^{x-1}}$; & parce qu'en cet état la Partie eſt ſupoſée égale, il y aura $\frac{m^{x+1}}{mm+1 \cdot \overline{m+1}^{x-1}} \infty \frac{1}{2}$, c'eſt à dire $2 \cdot m^{x+1} \infty mm+1 \cdot \overline{m+1}^{x-1}$; & en prenant les logaritmes, $L2 + \overline{x+1}\, Lm \infty L\overline{mm+1} + \overline{x-1}\, L\overline{m+1}$ ou par la tranſpoſition $x L\overline{m+1} - x Lm \infty L\overline{m+1} + Lm + L2 - L\overline{mm+1}$; & enfin par la diviſion $x \infty \frac{L\overline{m+1} + Lm + L2 - L\overline{mm+1}}{L\overline{m+1} - Lm}$. Pour achever maintenant la ſolution on n'a qu'à y mettre $\frac{7114529}{134167}$ au lieu de m, & ſon logaritme au lieu de Lm &c. moiennant quoi l'on trouve que x eſt tant ſoit peu plus grand que 38; de ſorte que celuy qui peut donner à l'autre 45 pourra luy donner juſques à 37 jeux entiers de 38; s'ils veulent joüer à but enſemble. D'où il paroit, qu'il y a bien de la diférence entre donner de 4 coups trois, & donner de 4 jeux trois; vû que nous venons de voir, que celuy qui peut donner à l'autre 45, c'eſt à dire trois coups de quatre, peut bien luy donner d'avantage que trois jeux de quatre. En voici le calcul:

$m \infty \frac{7114529}{134167}$, $m+1 \infty \frac{7248696}{134167}$,

$L7114529 \infty 6.8521462$,	$L7248696 \infty 6.8602599$,
$L134167 \infty 5.1276457$,	. . . . 5.1276457,
	$Lm \infty$

$Lm \infty L\frac{7114519}{134167} \infty 1.7245005$; $L\overline{m+1} \infty L\frac{7248696}{134167} \infty 1.7326142$,

2 ,

$Lmm \infty 2Lm$ . . ∞ 3.4490010 $\qquad L\overline{mm+1} \infty 3.4491555$.

$L\overline{m+1}$	∞ 1.7326142	
Lm	∞ 1.7245005	81137) 3089892 (38 ∞x.
$L2$	∞ 0.3010300	243411
$L\overline{m+1} + Lm + L2$.	∞ 3.7581447	655782
$L\overline{mm+1}$	∞ 3.4491555	649096
$L\overline{m+1} + Lm + L2 - L\overline{mm+1}$	∞ 0.3089892	6686
$L\overline{m+1} - Lm$ . . .	∞ 0.0081137	

XVI. Le Joüeur A pouvant donner à B 45, l'on demande de combien de jeux il les luy peut donner tous à la reserve d'un seul, si outre les jeux entiers qu'il luy donne, il luy veut encore donner 15 ou 30 à chaque jeu? Pour satisfaire à la question, vous n'avez qu'à mettre $\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{15n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$ & puis $\frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{6n^4 + 5n^3 + 7nn + 4n + 1}$ (raisons des espérances, qu'on leur trouve par la 4^{me} Table, lorsque B a 15 ou 30 à rien) à la place de $\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{15n^3 + 11nn + 5n + 1}$ (raison des espérances qu'ils obtiennent quand ils joüent à but), en y interprétant encore n par $\frac{1215}{1000}$: ce qui vous fera trouver $m \infty \frac{6798599}{4501355}$, & puis $m \infty \frac{1125963}{263741}$; d'où le reste se déduit comme dessus, & il proviendra à peu prés $x \infty 12$, & ensuite $x \infty 4$; de sorte que A peut donner à B 11 jeux de 12, & encore 15 points en chaque jeu; ou bien 3 jeux de 4 & encore 30 points en chacun.

XVII. Si A peut donner à B 30, & qu'on demande combien de jeux entiers il luy peut donner; il faut seulement changer la valeur de n, qui marque sa force, en $\frac{1246}{1000}$ par l'art. 7^{me}, & faire ensuite comme dessus, pour trouver celle de x. Le calcul nous aprend, qu'il peut luy donner environ de cinq jeux quatre, & joüer à but; ou deux jeux de trois, & encore 15 points en chaque jeu. Si A ne peut donner à B que 15, la valeur de n sera censée $\frac{1113}{1000}$ par l'art. 7. & l'on

d $\qquad$ trouvera

trouvera qu'il ne ſauroit luy donner qu'un jeu de deux, s'il prétend de joüer à but avec luy.

XVIII. On peut former pluſieurs queſtions ſur les Biſques, qui ſont des coups d'avance donnés par l'une des parties à l'autre, qui en profite quand bon luy ſemble; & demander par exemple: si dans un cas donné il eſt plus avantageux de prendre ſa biſque, ou de ne la pas prendre? si deux biſques en quatre jeux valent mieux que demi-quinze: ou quinze & deux biſques mieux que demi-trente? & autres ſemblables. Mais comme ces queſtions nous meneroient trop loin, je ne veux pas les toutes entreprendre: je me contenterai ſeulement de m'arréter un peu ſur la prémiére. Supoſons, que les joueürs ne jouēnt qu'à un jeu: que la force de A ſoit à celle de B en raiſon d'égalité ou d'inégalité quelconque, n à 1: & que B donne à A biſque (car bien que cela ne ſe pratique pas, quand on ſçait que les joüeurs ſont égaux: il arrive ſouvant, que B ne connoit pas les forces d'A, celuy-cy ayant diſſimulé auparavant ſon jeu; ou que A la demande par opiniâtreté, ou parce qu'il a perdu le jeu précédent qu'il jouoit à but, quoy qu'on ſache d'ailleurs qu'ils ſont égaux) puis ſupoſons, qu'ils ſoient à deux & que A n'ait pas encore pris ſa biſque; l'on demande, quelle eſt ſon eſpérance de gagner le jeu? & s'il fait mieux de prendre ſa biſque, ou de la garder plus long temps? Sur quoi je fais ce raiſonnement: S'il prend ſa biſque, il gagne l'avantage, mais il n'aura plus de biſque: par conſéquent ſon ſort ſera par la Table IV $\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$; s'il ne prend pas ſa biſque, il ſe peut faire qu'il gagne ou perde le coup prochain: s'il le gagne, il a gagné le jeu; car ayant l'avantage il ne manquera pas de prendre aprés ſa biſque: mais s'il perd le coup, il aura bien encore ſa biſque, mais B aura l'avantage; & puisque le ſort d'A en cette rencontre à cauſe de la biſque m'eſt encore inconnu, je l'apelle y. Y ayant donc par l'hipotêſe n cas qui luy font gagner le coup, & un cas qui le luy fait perdre le ſort qu'il obtient quand il ne prend pas la biſque ſera $\frac{n.1+1.y}{n+1} \infty \frac{n+y}{n+1}$. Or, par le privilége des biſques, A eſt également en pouvoir de prendre ſa biſque ou de ne

la pas

la pas prendre; c'est à dire, il peut également acquerir $\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$ ou $\frac{n+y}{n+1}$: c'est pourquoi si le sort, qui luy convient pendant cette indifférence, est apellé x, il y aura $x \infty \frac{n^3+nn+n}{2n^3+2nn+2n+2} + \frac{n+y}{2n+2}$. Pour chercher le sort y, il faut faire un semblable raisonnement: *Si* A prend sa bisque, il remet le jeu à deux, & n'aura plus de bisque; c'est-ce qui luy donne par la Table IV $\frac{nn}{nn+1}$. S'il ne prend pas la bisque, & qu'il gagne le coup, il gagne le sort x (parce qu'il sera à deux, & aura encore sa bisque); mais s'il le perd il perd ensemble le jeu; c'est ce qui luy vaut alors $\frac{n.x+1.0}{n+1} \infty \frac{nx}{n+1}$. Or A est également en droit de prendre sa bisque ou de ne la pas prendre, c'est à dire d'acquerir $\frac{nn}{nn+1}$ ou $\frac{nx}{n+1}$; c'est pourquoi son sort pendant cette indiférence, que nous apellons y, sera $\frac{nn}{2nn+2} + \frac{nx}{2n+2}$. Mettant donc cette valeur de y dans l'équation $x \infty \frac{n^3+nn+n}{2n^3+2nn+2n+2} + \frac{n+y}{2n+2}$, nous trouverons $x \infty \frac{4n^4+7n^3+7nn+4n}{4n^4+7n^3+8nn+7n+4} \infty \frac{n+1.4n^3+3nn+4n}{nn+1.4nn+7n+4}$; & puis substituant reciproquement celle-cy nous aurons $y \left(\frac{nn}{2nn+2} + \frac{nx}{2n+2}\right) \infty \frac{nn.4nn+5n+4}{nn+1.4nn+7n+4}$. Ainsi le jeu étant à deux, il se présentent trois quantitez,

$$\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1} \left(\frac{n^3+nn+n}{nn+1.n+1}\right), \frac{n+y}{n+1} \;\&\; \frac{n+1.4n^3+3nn+4n}{nn+1.4nn+7n+4},$$

qui marquent le sort de A dans trois differentes hipotéses: l'une, quand il prend sa bisque: l'autre, quand il ne la prend pas: & la troisiéme (qui doit étre moienne entre les deux autres), quand il est encore dans l'indiférence de la prendre ou de ne la prendre pas. Et parce que la prémiére aprés la reduction à un méme dénominateur se trouve plus grande que la troisiéme, il s'ensuit qu'à plus forte raiſon elle ſera plus grande que la ſeconde, & que par conſequent A fait mieux de prendre ſa biſque, que de la garder pour une autre fois.

Si l'on examine ces trois autres quantitez $\frac{nn}{nn+1}$, $\frac{nx}{n+1}$, & $\frac{nn \cdot 4nn+5n+4}{nn+1 \cdot 4nn+7n+4}$, que nous avons trouvées par la même opération, & qui marquent le ſort de A dans les dites hipotêſes, quand B a l'avantage, ou (ce qui eſt autant) quand il a 45 à 30, l'on peut remarquer, que la prémiére eſt auſſi plus grande que les deux autres; de ſorte qu'en cet état A fait encore mieux de prendre ſa biſque.

Vous trouverez enfin avec ces raiſonnemens les ſorts du joüeur A, pour toutes les autres conſtitutions du jeu, lorsque B a 45 à 15, ou 45 à rien, ou 30 à 15 &c. & même avec moins de peine, ſi vous y allez par ordre; car vous ne rencontrerez plus dans vôtre opération que des ſorts déja trouvés & connus. Je me contente de vous les donner pour des joüeurs égaux dans les trois colonnes marquées I. II. III. de la Table ſeptiéme: la prémiére conſidére le joueur A, comme prenant ſa biſque; la troiſiéme, comme ne la prenant pas; & celle du milieu, comme ne s'étant pas encore déterminé s'il la prendra ou non: & l'on remarque par tout, que les fractions de la prémiére colonne ſont un peu plus grandes que celles des autres; d'où l'on peut généralement conclure, qu'il eſt toujours plut avantageux pour A de prendre d'abord ſa biſque, que de la garder plus long temps.

XIX. Le calcul du précédent article ſupoſe le joüeur A dans une parfaite indiférence au regard de ſa biſque, qui luy donne toujours un panchant égal de la prendre ou de ne la prendre pas: cepenpendant il faut remarquer, que quoi qu'il ſoit également en pouvoir de la prendre à chaque coup, il n'eſt pas toujours également probable qu'il la prenne; y ayant des endroits, où il peut la faire mieux valoir qu'en d'autres; ſi ce n'eſt peut-étre quand on joüe ſans faire des chaſſes, auquel cas je ne vois aucune raiſon, pourquoi il faudroit diférer la biſque d'un ſeul coup: mais faiſant des chaſſes, il y a des rencontres, où on la peut emploier si utilement, qu'elle ſert

preſque

Table VII.

NB. A & B *sont des joüeurs égaux:* A a *une bisque à prendre.*

Points de A	Points de B	Sorts de A I.	Sorts de A II.	Sorts de A III.	col. de chass.	Points de A	Points de B	Sorts de A I.	Sorts de A II.	Sorts de A III.	col. des chass.
45	45	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{43}{60}$	$\frac{12}{15}$	30	15	$\frac{7}{8}$	$\frac{209}{240}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{17}{15}$
30	45	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{15}{7}$	15	15	$\frac{11}{16}$	$\frac{219}{320}$	$\frac{109}{160}$	$\frac{47}{44}$
15	45	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{15}{11}$	0	15	$\frac{1}{2}$	$\frac{319}{640}$	$\frac{159}{320}$	$\frac{61}{59}$
0	45	$\frac{1}{8}$	$\frac{29}{240}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{15}{13}$	30	0	$\frac{15}{16}$	$\frac{899}{960}$	$\frac{449}{480}$	$\frac{16}{15}$
30	30	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{43}{60}$	$\frac{12}{15}$	15	0	$\frac{13}{16}$	$\frac{779}{960}$	$\frac{389}{480}$	$\frac{121}{119}$
15	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{59}{120}$	$\frac{29}{60}$	$\frac{8}{7}$	0	0	$\frac{21}{32}$	$\frac{1007}{1536}$	$\frac{503}{768}$	$\frac{303}{298}$
0	30	$\frac{5}{16}$	$\frac{99}{320}$	$\frac{49}{160}$	$\frac{45}{43}$						

presque de trente; car y ayant une chasse dificile à gagner pour A, elle est autant que perduë pour luy; prenant donc sa bisque, il empêche non seulement sa Partie de gagner 15, mais il les gagne luy-même, ce qui luy vaut 30. Comme donc la détermination du sort des joüeurs, qui demande la considération des bisques, dépend de la constitution particuliére du jeu, de la diversité des chasses, & même du caprice des joüeurs, qui n'observent point de regles, il est dificile d'en former des conjectures bien sûres. Voici pourtant la maniére, dont je voudrois m'y prendre, s'il falloit encore avoir égard aux chasses: Posé que les joüeurs soient trentains ou à deux, & qu'il y ait une chasse plus dificile à gagner à l'un qu'à l'autre (le nombre des fois, qu'on en a vû gagner une semblable au joüeur A, étant au nombre des fois, qu'on en a vû gagner à B, en raison d'inégalité quelconque de m à 1) bien que les deux joüeurs soient d'ailleurs égaux; je considére, que si le joüeur A gagne la chasse sans prendre sa bisque, il gagne le jeu, car il ne manquera pas de la prendre aprés: & s'il perd la chasse, B aura l'avantage, mais A retiendra sa bisque, qui luy vaut, par la II[me] colonne de la VII[me] Table, $\frac{13}{30}$. Parce donc que par l'hipotése ce joüeur a m degrez de facilité de gagner la chasse contre un degré de la perdre, le sort, qu'il posséde quand il ne prend pas ſa biſque, ſera $\frac{m.1+1.13:30}{m+1} \infty \frac{30m+13}{30m+30}$. Mais si au contraire il prend cette biſque, la chaſſe eſt morte, & ſon ſort ſe trouve, par la I. colonne de la dite Table, $\frac{3}{4}$. Je n'ay donc qu'à chercher, laquelle des deux fractions, ou de $\frac{30m+13}{30m+30}$ où de $\frac{3}{4}$, ſurpaſſe l'autre; en faiſant ſur elles les mêmes opérations, que s'il y avoit égalité entre elles, juſqu'a ce que m demeure ſeule d'un côté: moiennant quoi je trouve, que le joüeur A fait mieux tantôt de garder, tantôt de prendre ſa biſque, ſuivant que m eſt plus grande ou plus petite que $\frac{19}{15}$; & qu'il luy doit étre indiférent de la prendre ou de la garder, si m eſt au juſte $\infty\ \frac{19}{15}$. Posé de nouveau, que A ait 30 à 45, ou que B ait l'avantage, & qu'il y ait la même chaſſe; il eſt clair, que si A la gagne ſans prendre ſa biſque, il ſera à deux, par conséquent par la II. col. de la VII^{me} Table il aura $\frac{11}{15}$: mais que s'il perd la chaſſe, il perdra le jeu. Ayant donc m cas de la gagner & un cas de la perdre, il aura (quand il ne prend pas ſa biſque) $\frac{m.11:15+1.0}{m+1} \infty \frac{11m}{15m+15}$. Si A veut au contraire prendre la biſque, le jeu ſe met à deux, & la chaſſe étant morte le ſort de chacun ſera $\frac{1}{2}$. Faiſant donc comparaiſon entre $\frac{11m}{15m+15}$ & $\frac{1}{2}$, nous trouvons, qu'il vaut mieux pour A de garder ou de prendre la biſque, ſelon que m eſt plus grande ou plus petite que $\frac{15}{7}$. & que l'un vaut autant que l'autre, si $m \infty \frac{15}{7}$. De ce que je viens de faire voir, nous pouvons encore conclure, que la facilité, qu'a le joüeur A de gagner une chaſſe, étant exprimée par un nombre compris entre $\frac{19}{15}$ & $\frac{15}{7}$, il fera mieux de garder ſa biſque, si le jeu eſt à deux; mais que si B a l'avantage, il feroit mieux de la prendre. Enfin c'eſt de cette maniére, que j'ay determiné tous les autres nombres de la colonne des chaſſes de la VII^{me} Table, qui nous peuvent marquer, quand le joüeur A doit prendre ou garder ſa biſque: car s'il a plus de facilité de gagner quelque chaſſe, qu'il n'eſt porté par ces nombres, il fait mieux de garder la biſque; s'il en a moins, il fait mieux de la prendre; & s'il en a tout juſte autant, il peut faire ſans préjudice ce qu'il veut.

XX.

XX. Il me reſte encore à parler des *ſervices*, & de l'avantage qu' il y a de les donner. Vous ſçavez, que le prémier coup de chaque bale, qu'on donne ſur le toit, s'apelle *ſervice*. Celuy qui le donne ſemble avoir quelque avantage par deſſus celuy qui le reçoit, pour deux raiſons: l'une, parce que le coup de ſervice eſt un coup ſeur, qui ſe donne la bale à la main; au lieu que les coups qui ſe joüent enſuite la bale en l'air ſont ſujets d'étre manqués: l'autre, parce que quand celuy qui ſert manque quelque bale, c'eſt une *chaſſe*, au lieu que quand l'autre la manque, il perd toujours quinze (du moins si la bale entre dans le jeu; car pour les *chaſſes de vers le jeu*, je n'en veux pas parler, de peur de me trop étendre, & il me ſufit de vous marquer en gros la route, qu'il faut tenir dans cette recherche.) Poſons qu'il y ait deux joüeurs A & B, que A donne le ſervice, que contre un coup qu'il a manqué, on ait obſervé qu'il ait fait p bons coups; & que contre un coup qu'a manqué B, on luy en ait vû faire q de bons: poſons encore que dans le temps que c'eſt à A de joüer, ſon eſpérance de gagner la bale ſoit y, mais que cette eſpérance devienne z, quand l'autre B doit joüer; & conſidérons prémiérement ce qui ſeroit de ces eſpérances, ſi l'on joüoit ſans faire des chaſſes, c'eſt à dire ſi la bale qu'on manque étoit toujours perduë pour celuy qui la devroit joüer. Or par ce que nous venons d'établir il eſt aisé de voir, que ſi A doit joüer, il y a un cas, qui luy fera perdre la bale, & p cas qui luy faiſant reüſſir ſon coup mettront B dans la neceſſité de joüer, & changeront ainsi le ſort y du joüeur A en celuy de z. Si c'eſt au contraire B qui joüe à ſon tour, il y a un cas qui fera gagner la bale à A (en la faiſant perdre à B) & q cas qui remettront le joüeur A dans la neceſſité de joüer, & luy rameneront le ſort y. Donc nous aurons d'un côté $y \infty \frac{1.0 + p.z}{1+p} \infty \frac{pz}{1+p}$; de l'autre $z \infty \frac{1.1 + q.y}{1+q} \infty \frac{1+qy}{1+q}$, c'eſt à dire, mettant à la place de y ſa valeur trouvée $\frac{pz}{1+p}$, $z \infty \frac{1+p+pqz}{1+p \,.\, 1+q} \infty \frac{1+p+pqz}{1+p+q+pq}$; d'où l'on tire $z \infty \frac{1+p}{1+p+q}$. Or parce que le joüeur A ne ſauroit manquer

ſon

ſon coup de ſervice, il s'enſuit qu'il ne faut pas conter ce coup, & s'imaginer quand il le jouë, comme si c'étoit à B de jouër : donc l'éſpérance qu'il a de gagner la bale ſera censée alors $\frac{1+p}{1+p+q}$ par conſéquent celle de B $\frac{q}{1+p+q}$, & la raiſon de ces eſpérances $1+p$ à q. D'où il paroit, que ſi les deux jouëurs ſont égaux, & que chacun puiſſe fraper par ex. dix bons coups contre un qui ne vaut rien, les lettres p & q valant chacune 10, l'avantage de celuy qui donne le ſervice ſur celuy qui le reçoit eſt comme de 11 ſur 10; mais que cet avantage augmente à meſure que les joüeurs ſont plus foibles, & qu'il diminuë juſques à s'anéantir entiérement, à meſure qu'ils ſe trouvent plus habiles.

XXI. Joignons y maintenant la conſidération des chaſſes, mais ſans nous embaraſſer de leur inégalité, en nous imaginant, comme si elles étoient toutes deſſous la corde; c'eſt à dire, come si toutes les bales qui paſſent la corde, pouvoient les gagner. Vous ſçavez que quand il y a chaſſe, les joüeurs font un échange de leurs places, & paſſant chacun de l'autre côté du jeu, celuy qui a donné les ſervices, eſt obligé de les prendre aprés. Que ces quatre lettres v, x, y, z, marquent donc l'eſpérance d'A en quatre diférens états; ſçavoir, les deux prémiéres v & x, avant qu'il y ait chaſſe; les autres y & z aprés la chaſſe, quand les joüeurs ont paſsé: la prémiére v & troiſiéme y, quand c'eſt à A de joüer; & la ſeconde x & 4^{me} z, quand l'autre B doit joüer. Cela posé, & le raiſonnement du précédent article compris, vous comprendrez auſſi ſans peine la raiſon des quatre égalitez ſuivantes, ſans qu'il ſoit beſoin d'alonger d'avantage ce diſcours: $v \propto \frac{1.y+p.x}{1+p} \propto \frac{y+px}{1+p}$, $x \propto \frac{1.v+q.v}{1+q} \propto \frac{1+qv}{1+q}$, $y \propto \frac{1.0+p.z}{1+p} \propto \frac{pz}{1+p}$, $z \propto \frac{1.1+q.y}{1+q} \propto \frac{1+qy}{1+q}$. Chaſsez de l'égalité x la lettre v, & de l'égalité y la lettre z, vous aurez $x \propto \frac{1+p+qy+pqx}{1+p.1+q}$, c'eſt à dire $x \propto \frac{1+p+qy}{1+p+q}$; & $y \propto$

$\frac{p+pqy}{1+p.1+q}$,

$\frac{p+pqy}{1+p.1+q}$, c'est à dire $y \infty \frac{p}{1+p+q}$. Chassés encore y de la nouvelle égalité x, vous trouverés enfin $x \infty \frac{1+2p+q+pp+2pq}{1+p+q^2}$, & son reste à l'unité $1-x \infty \frac{q+qq}{1+p+q^2}$. D'où il faut conclurre, que l'espérance d'A, dans le temps que B doit recevoir de luy le coup de service, est à celle de B en raison de $1+2p+q+pp+2pq$ à $q+qq$; où vous pouvés remarquer, que p & q étant égales plus on augmente leur valeur, plus cette raison approche de la triple, de sorte que de deux jouëurs, qui jouënt également & parfaitement bien, celuy qui sert a environ trois fois plus d'espérance de gagner la bale, que l'autre: mais souvenés vous, que c'est dans la supposition, qu'on ne fasse point de distinction entre les chasses, & qu'on n'admette pas celles, qu'on apelle *de vers le jeu*; car autrement ce double regard diminûroit son avantage de beaucoup.

XXII. Je ne dois pas finir ma Lettre, Monsieur, sans avoir prévenu certains faux raisonnemens, qui pourroient tomber dans l'esprit sur cette matière, de peur qu'ils n'éblouïssent par leur éclat trompeur, & ne fassent douter de la solidité des principes cy-dessus établis. Dans l'article septiéme on a demandé, combien de fois le jouëur A devoit étre plus fort que B, pour luy pouvoir donner 45? Quelqu'un auroit pû raisonner là-dessus ainsi: Si B joüoit contre un troisiéme jouëur C de pareille force que luy, & qu'ils fussent 45 à 0, leurs sorts seroient par la I Table en raison de 15 à 1, c'est à dire que B pourroit gagner le jeu 15 fois, lorsque C ne le feroit qu'une fois. Or A donnant 45 à B la Partie est supposée égale, c'est à dire telle, que quand B gagne 15 fois le jeu A le peut aussi 15 fois. Donc A & C joüans ensemble à but, A le peut gagner 15 fois, là où C ne le peut gagner qu'une fois; & par conséquent A doit étre 15 fois plus fort que C, ou (ce qui est autant) que B, qui est d'une même force: au lieu que par nôtre analyse nous avons trouvé, qu'il ne devroit étre que $4\frac{1}{5}$ fois plus fort que luy. A quoi je répond, que quand ce raisonnement seroit aussi evident qu'il qu'il ne l'eſt pas, il tire mal de la concluſion ce conſectaire qui eſt faux: *Par conſéquent* A *doit être* &c. A, qui peut donner 45 à B, peut gagner 15 jeux contre un, s'il jouë à but avec luy, je l'accorde, car il en peut bien gagner $\frac{7114529}{134176}$ c'eſt à dire plus de 50, par le 15^me art. mais il ne s'en ſuit pas de là, qu'il ſoit 15 fois plus fort, ſe pouvant faire qu'il gagne 15 jeux, ou même 50 jeux, si vous voulés, contre un, ſans qu'il ait gagné plus que 4 ou 5 fois plus de coups; à cauſe que tous les coups, que gagne B durant chaque jeu qu'il perd, ne ſont contés pour rien, lesquels pourtant aſſemblés feroient peut-être la quatriéme Partie des coups d'A. Remarquéz donc, qu'il vaut mieux, meſurer les forces des jouëurs par le nombre des coups que chacun gagne, que par celuy des jeux ou des Parties qu'ils font, quand ils jouënt à but.

Dans l'article treiziéme l'on à recherché, de combien A devoit être censé plus fort, s'il jouoit contre deux autres B & C, posé que leurs forces abſoluës fuſſent en raiſon de 3.2.1? Il y auroit bien des gens, qui pour répondre à cette queſtion ſe ſerviroient de l'analogie tirée du mélange des choſes: S'il y avoit par ex. trois ſortes de vin, dont le prix fuſſent en raiſon de 3.2.1, il eſt certain, qu'ayant mélé les deux plus petits enſemble en égale quantité, le prix du mélé ſera de $1\frac{1}{2}$, & par conſéquent le prix du meilleur à celuy de l'autre, comme 3 à $1\frac{1}{2}$, ou comme 2 à 1. Tout de même, dis-je, pourroient ils penſer, que les deux jouëurs B & C qui jouënt de compagnie contre le troiſiéme A, ne paſſant que pour un jouëur, leur jeu ſe mélant quasi, & qu'ainsi la force de A doit auſſi être double de celle des deux autres prix enſemble. D'autres raiſonneroient peut-être comme cela: Puis que par l'hipotêſe A gagne trois coups, là où B n'en gagne que deux, & qu'il en gagne encore trois, là où C n'en fait qu'un; il s'enſuit, qu'il doit gagner ſix coups, lorsque les deux autres enſemble n'en font que $3 + 1 \infty 3$; & que par conſéquent ſa force doit encore ſurpaſſer au double celle des autres, comme nous avons conclu par le prémier diſcours: Or cela eſt contraire au calcul du 13^me article, qui nous a fait trouver le ſort de A plus que le double de celuy des autres. Je

puis

puis répondre en peu de mots à ce deux raiſonnemens: Pour le prémier, vous ſçavés, que les analogies ne prouvent rien; & pour l'autre, ſon paralogiſme paroit, en ce qu'on doit raiſonnablement ſuppoſer, que A jouë autant de fois ou plus ſouvent au plus foible C qu'à B. & que ſuivant ce raiſonnement il s'en fait tout le contraire; parce que A jouëroit à B cinq coups, dont il gagneroit trois; & à C il ne jouëroit que quatre coups, dont il gagneroit encore trois: au lieu que nôtre calcul remplit parfaitement cette condition; car mettéz que A jouë 20 coups à B, il en doit gagner 12: s'il en jouë donc autant à C, il en doit gagner 15; ce qui fait en tout 27, & B & C gagnent les autres 13: mais s'il jouë trois fois autant, c'eſt à dire 60 coups, à C, il en doit gagner 45, leſquels joints au 12, qu'il gagne ſur B, font 57, & il reſte pour B & C les autres 23; ce qui eſt tout à fait conforme à ce que porte le calcul du 13me article.

Je finis, Monſieur, par cette reflexion: c'eſt qu'il eſt extrémement facile de ſe méprendre dans toutes ſes connoiſſances, si l'on n'y fait pas toujours une ſerieuſe attention: car les raiſonnemens, qu'on fait communément dans le monde, ne ſont pas meilleurs, que ceux que je viens de rapporter, mais ſouvant beaucoup pires: l'on voit tous le jours, que le plus ſçavans raiſonnent ſur de pures analogies; où s'ils s'imaginent de voir clair dans les choſes, ils prennent pour trés-évident ce qui ne l'eſt pas, & dont il n'y a que ceux, à qui l'uſage des Mathematiques a éclairé l'eſprit, qui ſoient capables d'en découvrir l'impoſture. Je ſuis &c.

ERRATA.

Pag. 41. lin. 12. 13. 14. dele c^n, *quibus contingere possit, ut in nulla* n *tesserarum prodeat quod susceptum est ; & simili modo colligitur casus esse*

Pag. 70. lin. 24. in fin. pro in l. $2n$.

Pag. 71. lin. 9. pro bnc^m l. $b^n c^m$

Pag. 84. lin. pen. pro erit $2^n 1$ l. erit $2^n - 1$.

Pag. 92. lin. 2. post *constat* adde *Lemma propositum.*

Pag. 93. lin. 14. ab initio pro $\frac{b+a}{}$ l. $\frac{b+a}{r}$

& in fin. pro $nq - - \frac{p}{r} - - l - - \frac{i}{r} - - h - - g$ lege $\frac{nq}{r} \frac{-p-l-i-h-g}{r}$.

Pag. 95. in fin. lin. 4. & init. lin. 5. lege $\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}$, sic etiam in fine lin. 11. & init. lin. 12.

lege $\frac{n-1.n-2.n-3.n-4\ldots n-c+1}{1.2.3.4\ldots c-1}$

Pag. 106. lin. 28. pro $\frac{n.2.n-3.n-4\ldots n-c}{1.2.3.4\ldots c-1}$

lege $\frac{n-2.n-3.n-4\ldots n-c}{1.2.3.4\ldots c-1}$

Pag. 142. lin. 27. pro $\frac{1.2.4}{1.3.5}$ l. $\frac{1.2.4}{3.3.5}$

Pag. 143. lin. 6. pro $\frac{1.2.4.4.16}{2.3.5.9.17}$ l. $\frac{1.2.4.8.16}{2.3.5.9.17}$.

Pag. 150. lin. 21. pro extra hanc l. extrahant.

Pag. 178. lin. 1. pro $\frac{2}{969}$ l. $\frac{20}{969}$.

Pag. 198. in medio pro $2n-3 : 18$. l. $2n-\overline{3 : 18}$.

Pag. 203. lin. 5. pro $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} - n\frac{c^n}{a^n}$ l. $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} - n\frac{c^n}{a^n}$.

Ead. pag. lin. ult. pro $\frac{b.^{m.1} + c.^{-1}}{a}$ l. $\frac{b.^{m-1} + c.^{-1}}{a}$.

Lettre sur les Parties du Jeu de Paume.

Pag. 8. lin. 4. pro $\frac{n3}{n3+nn+n+n+1}$ l. $\frac{n3}{n3+nn+n+1}$.

Pag. 24. lin. pen. pro $m+1 \infty \frac{7348696}{124167}$ l. $m+1 \infty \frac{7248696}{134167}$

PARALLELISMUS
RATIOCINII LOGICI ET ALGEBRAICI,

Quem

Unà cum Thesibus miscellaneis,

Sub

DIVINO AUSPICIO AC SAP. PHILOS. ORDINIS UMBONE,

Publici speciminis loco

Ad diem 9. Septembris Anni M. DC. LXXXV.
Horis locoq; solitis,

Defendendum suscipit

PAR FRATRUM

JACOBUS & JOHANNES BERNOULLI,

Ille Præsidis, hic Respondentis vices acturus.

BASILEÆ, Typis JOHAN. CONRADI à MECHEL.

Quelques détails à propos de l'article 77 du Journal Scientifique.

(Meditationes)

Le 9 septembre 1685 Jean Bernoulli soutient devant la faculté des arts de Bâle, en vue de l'obtention de la maîtrise esarts, un ensemble de 44 thèses de son frère Jacques, publiées sous le titre : "Parallelismus ratiocinii ligici et algebraici, quem una cum thesibus miscellaneis" et comprenant 17 thèses de Logique et 27 "autres" thèses - La 19ème thèse de ce groupe de 27 attire l'attention sur la capacité des mathématiques à parler des choses "*les plus fortuites et les plus accidentelles*" et les deux suivantes se proposent d'illustrer cela par des exemples ; la thèse 20 énonce un problème portant sur l'équité du partage d'une mise dans un jeu à trois dés joué par deux joueurs - il s'agit en fait du Problème 5 proposé par Huygens à la fin de son traité de 1657 "De ratiociniis in ludo aleae"- et la thèse 21 est très exactement le problème posé au début de l'article 77 de son journal scientifique :

"21. *Titius prend pour épouse Caja, le père de chacun des deux époux est encore vivant et riche. Titius prépare ainsi le contrat de mariage que si naît des enfants du couple et que la femme cesse de vivre avant le mari, le mari reçoive deux-tiers des biens communs, aussi bien ceux apportés de part et d'autre par le mariage que ceux acquis par héritage sachant que chacun des deux parents est alors vivant ou bien mort ; ou bien qu'il emporte la moitié si le père de Caja a achevé sa destinée, l'autre étant encore vivant ; ou enfin qu'il reçoive trois-quarts des parts, les enfants le reste si son père est mort et qu'en revanche le père de Caja est vivant. Mais comme ce dernier article semble plus injuste au père de Caja, le futur gendre propose que sans distinction tous les cas soient inclus dans un article d'un seul tenant, tel que le veuf reçoive deux-tiers quoiqu'il en soit du sort des parents des deux époux. Le père de Caja approuve. On se demande si ce dernier mode de contrat de mariage est plus favorable aux enfants de Caja ?*

Dans cette thèse, Jacques Bernoulli ne fait que donner la réponse - dont le détail se trouve par contre dans la première partie de l'article 77 p. 101 - 102 - sans autre commentaire :

"*Je réponds non. En effet, si les parts du futur héritage de Titius et de Caja sont estimées être à peu près égales et qu'on appelle "a" chacune d'entre elles, et "b" la somme des biens apportés de part et d'autre dans le mariage, l'espérance de Titius sera selon la première proposition* $\frac{47a + 47b}{72}$ *et selon le contrat effectif* $\frac{48a + 48b}{72}$ *ce qui est supérieur de* $\frac{a + b}{72}$ *; et les deux espérances ne pourront être égales, sauf si l'on admet que la part d'héritage de Titius est plus du double de la part de Caja*".

Le 12 février 1686 c'est Louis Christian Miegio qui dans les mêmes conditions soutient un ensemble de 46 thèses de Jacques Bernoulli, publiées sous le titre "Theses logicae de conversione et oppositione enunciationum cum adnexis miscellaneis" et comprenant 14 thèses de Logique et 32 "autres" thèses. Dans la 31ème thèse de ce groupe de 32, Jacques Bernoulli reprend le problème de la thèse 21 dont nous venons de parler, et écrit :

"*La solution du problème concernant les contrats de dot, insérée en annexe de mon récent "Parallélisme", supposait qu'il pouvait arriver aussi facilement que les vieillards survivent à Caja, que Caja aux vieillards. Mais parce qu'il est plus probable que Caja, vu sa jeunesse, survivra aux vieillards, il s'en suit que sa mort est de façon certaine diminuée et que l'espérance de Titius selon le premier article proposé est dépassée par son espérance selon l'article corrigé;*

Cependant, cette dernière surpasse toujours la première quelque grande que soit supposée la probabilité d'une vie plus longue de Caja, ce qu'il serait facile de montrer par une comparaison à caractère général. Je fais seulement observer que s'il est deux fois plus probable que Caja survivra à un vieillard qu'un vieillard à Caja, la première espérance de Titius sera $\frac{79a + 59b}{90}$; *la dernière* $\frac{80a + 60b}{90}$, *et leur différence* $\frac{a + b}{90}$;

Il résulte clairement de cela que pour obtenir les vraies espérances de Titius, on a besoin de déterminer avec précaution de combien il est plus probable que Caja survivra à l'un ou l'autre vieillard. Cependant quoiqu'on puisse penser qu'il est complètement impossible de déterminer cela, contre toute attente il est possible de le faire à partir d'observations faites sur les Tables de mortalité des Parisiens et des Londoniens qui sont habituellement dressées mensuellement ou hebdomadairement. On a observé à partir de la réunion d'un grand nombre de ces tables (comme le rapporte le Journal des Savants de l'année 1666, numéro XXXI) que de cent enfants nés à la même époque, passé six ans, il en reste 64 qui survivent ; passé 16 ans, 40 ; 26 ans, 25 ; 36 ans, 16 ; 46 ans, 10 ; 56 ans, 6 ; 66 ans, 3 ; 76 ans, 1 ;86 ans, 0. Ceci posé, et le calcul effectué, Je découvre que contre 59 cas où une jeune femme âgée de 16 ans révolus meurt avant un vieillard de 56 ans, il y a seulement 101 cas où le contraire arrive ; de là, je conlus qu'il est presque deux fois plus probable que la jeune femme survive au vieillard plutôt que lui à elle ; c'est pourquoi l'espérance de Titius selon le contrat signé surpasse celle qu'il aurait eue selon le premier article proposé d'une quantité au total supérieur de $\frac{a + b}{90}$ "

L'énoncé de cette thèse correspond à la deuxième partie de l'article 77 (jusqu'au début de la p 103 , le calcul étant ici justifié par les données de la table de Graunt, publiées en 1666 dans le Journal des savants, dont il n'est fait mention dans l'article 77 que par un ajout en marge p 104).

Cet article 77 a donc certainement été écrit avant le 12 février 1686. A t-il été composé en deux fois , la première correspondant à la thèse 21 avant le 9 septembre 1685, la deuxième entre le 9 septembre 1685 et le 12 février 1686, ou bien tout l'article 77 a-t-il été écrit avant le 9 septembre 1685 et Bernoulli n'a-t-il pensé pouvoir proposer ce qui était développé dans la deuxième partie qu'après avoir eu connaissance de la table de mortalité de Graunt, ce qui serait advenu entre ces deux dates, expliquant le rajout en marge, à la hauteur du passage où il paraît se désespérer de ne jamais pouvoir estimer les probabilités de vie et de mort " *a priori , ou par la cause ?*" Au fond, cela n'a guère d'importance: par contre, il paraît fort intéressant de pouvoir situer au sein même de cet article 77 - et par le fait même de l'automne 1685 ou de l'hiver 1685-86 - la mise en évidence par Jacques Bernoulli de la nécessité de pouvoir déterminer des probabilités " *a posteriori, ou par l'évênement observé fréquemment dans des exemples semblables* , jusqu'au "Nota Bene" de la page 104, il traite le problème le plus généralement possible, en le ramenant à une sorte de jeu de ha ard dans lequel les maladies mortelles sont assimilées à des cas équiprobables, mais "*aucune solution générale du problème ne peut être donnée avec des lettres* " (p 104) ; cependant, dans le deuxième "Nota Bene", après avoir amèrement constaté qu'on ne peut pas résoudre le problème directement, c'est-à-dire en dénombrant les maladies mortelles de chacun et qui plus est en estimant leurs "*probabilités d'agir*" respectives, il en vient à affirmer que l'on peut déduire ces données de l'observation très souvent répétée de cas semblables et"*que les probabilités sont autant de cas pour chaque qu'il y a d'observation qui en sont faites*". Puis il présente plus ou moins succinctement huit autres exemples d'une telle méthode et c'est cette partie de sa recherche qu'il s'efforcera vainement de développer jusqu'à la fin de sa vie en 1705, ceci étant probablement la cause majeure de la non-publication de l'"Ars Conjectandi" de son vivant.

En bas de la page 104, en marge, Bernoulli a rajouté à propos de l'exemple portant sur les maladies mortelles : "*En effet, je peux me tromper dans une moinare proportion si j'observe plus souvent que moins souvent. Je démontre ceci NB*". Ceci est une allusion au théorème qu'il démontre dans le chapitre V de la quatrième partie de l'"Ars Conjectandi", mais on en trouve l'ébauche dans l'article "133 a" (p. 171) et la démonstration complète dans l'article "151 a" (p. 185 à 191), articles qui ont été écrits entre 1686 et 1689 ; cet ajout doit donc dater de l'époque où ont été écrits les deux articles - il reprend les termes mêmes par lesquels débute l'article "133 a"- On peut constater que le suivant (p. 105) est postérieur à octobre 1696, et date probablement des années 1703-1705 où Bernoulli a cherché à rassembler tous ses travaux en vue de la publication de l'"Ars Conjectandi". Si l'on se souvient que l'ajout portant sur "*le journal des savants de l'année 1666*" doit être de l'hiver 1685-86, on constate que les notes marginales de l'article 77 ne sont pas contemporaines et que Bernoulli a du revenir sur cet article au moins à trois reprises : en vue de la soutenance de thèse de février 1686, au moment de la démonstration du théorème entre 1686 et 1689, et au moment de la préparation de la publication de l'Ars Conjectandi pendant les deux ou trois dernières années avant sa mort. La dernière des thèses du 12 février 1686 porte sur le jeu de Paume, de même que l'article 77 a (p. 106 à 116) ; c'est la première version de la "Lettre à un amy".

XXXI.

LE IOVRNAL DES SÇAVANS.

Du Lundy 2. Aoust M. DC. LXVI.

Par le S^R^. G. P.

NATVRAL AND POLITICAL OBSERVAtions made vpon the Bills of Mortality, by Iohn Graunt. London. In 4.

C'est vne chose particuliere aux Anglois de faire des *Billets de mortalité*, c'est à dire des listes qui contiennent combien il naist de personnes chaque semaine, combien il en meurt, & quelle est la cause de leur mort. Les maladies contagieuses qui ont fait de grands rauages en Angleterre ont donné lieu à ces Billets. Car la curiosité qu'on a euë de sçauoir si la peste diminuoit ou augmentoit, a fait qu'on a d'abord tenu registre de tous ceux qui mouroient de cette maladie : En suitte apres que la contagion a cessé, on a continué à marquer le nombre de ceux qui mouroient, & à specifier leurs maladies : Enfin pour voir la quantité de ceux qui naissent, aussi bien que de ceux qui meurent, on y a adiousté le nombre des Baptesmes. On s'est seruy de plusieurs moyens pour faire ces Billets : mais celuy qu'on a trouué le

THESES LOGICÆ

De

CONVERSIONE
ET OPPOSITIONE
ENUNCIATIONUM,

Cum

ADNEXIS MISCELLANEIS,

Quas

Divinâ adjuvante gratiâ

Ex

Permissu Sapient. Ordinis

Ad diem XII. Februarij Ann. M. DC. LXXXVI.

Tertii Speciminis publ. loco

Cl. Competitoribus ventilandas sistit

JACOBUS BERNOULLI,
L. A. M.

RESPONDENTE

Præstantissimo & Pereximio Domino

LUDOVICO CHRISTIANO MIEGIO,
J.F.F. Heidelbergâ-Palatino, Ph. & Th. Stud.

BASILEÆ, Typis BERTSCHIANIS.

MEDITATIONES

Article 77. p.101- 106

101. Titius prend pour épouse Caja : le père de chacun des deux époux est encore vivant et riche : Titius prépare ainsi "die Ehabred" (une convention de dot) que s'il nait des enfants du couple, les biens de chaque époux, apportés lors du mariage ou acquis par héritage,étant mis en commun, si la femme cesse de vivre avant le mari, alors il est bien clair que le mari reçoit 2 tiers des biens communs que leurs parents soient encore vivants ou qu'ils soient morts ; si le père de Caja a terminé sa vie, l'autre étant vivant il enlève la moitié ; enfin si son père est mort, le père de Caja étant vivant, il reçoit les trois-quarts des parts, les enfants se partageant le reste. Le père de Caja, qui trouve cette dernière proposition plus injuste, souhaite remplacer 3/4 par la moitié. Titius cependant montre au futur beau père que cela est absurde et contraire à la raison : s'il obtient moins, maintenant qu'il a hérité des biens de son père, que les 2/3 qu'il obtient lorsque son père est encore en vie selon le premier article. Le beau père est d'accord avec lui et Titius propose que tous les cas sans distinction soient compris dans le même article : qu'il est clair qu'il reçoit 2/3 quoiqu'il en soit des parents ; et le père de Caja approuve. On se demande si ce dernier mode de *"Ehabred"* envisagé est plus favorable aux enfants de Caja que le premier que Titius a d'abord proposé et que le père de Caja a refusé.

(les lignes qui suivent sont incomplètes)

> *Il est évident d'abord que plus par le sort commun... <le veuf>... sans distinction de cas emporte les 2/3 des biens ; par ailleurs, par l'équité naturelle (à savoir l'équité qui dans les contrats de ce genre peut exister et... ces contrats, c'est-à-dire ces dispositions municipales dans lesquelles les cas et les évènements particuliers ne pourront pas être prévus à cause... du hasard) qu'il soit plus convenable qu'il emporte... qu'il s'agisse de biens provenant de son père ou bien du père de Caja.*

Soient a les biens apportés dans le mariage par les deux parties, b les biens du père de Titius (ou du moins la part de l'héritage futur de Titius ou de Caja), c ceux du père de Caja, et on désigne Caja par A, le père de Titius par B, le père de Caja par C, parce que de la même façon qu'il peut arriver que meure l'une ou l'autre de ces trois personnes, ces trois lettres peuvent être ordonnées différemment comme les suites ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Il y a ainsi deux cas dans lesquels Caja meurt en premier, deux où elle meurt en second, deux en troisième lieu. Et si Caja meurt en premier, les biens partagés seront a, si c'est en troisième lieu, a+b+c ; si c'est en second ou a+b ou a+c ; alors selon la première

"Ehabred" proposée on doit à Titius dans le premier cas 2/3 a, dans le
troisième 2/3 (a+b+c), dans le deuxième 3/4 (a+b) ou 1/2 (a+c).
Cependant, selon l *"Ehabred"* corrigée, c'est dans le premier cas 2/3 a,
dans le troisième 2/3 (a+b+c), dans le deuxième 2/3 (a+b) ou 2/3
(a+c) ; alors si ces 6 cas peuvent arriver aussi facilement, si l'on
peut dire, si aucune conjecture ne laisse penser que Caja survivra aux
vieillards plutôt que l'un et l'autre, ou bien l'un ou l'autre des
vieillards à Caja (ce qui est le cas si Caja quoique moins agée est
102. cependant maladive) ; il y aura 2 cas qui apportent à Titius 2/3 a,
deux qui lui donnent 2/3 (a+b+c), un qui lui donne 3/4 (a+b), un enfin
qui lui apporte 1/2 (a+c) ce qui vaut selon la règle générale :

$$\frac{2.\ \frac{2}{3}\ a + 2.\ \frac{2}{3}\ (a+b+c) + 1.\ \frac{3}{4}\ (a+b) + 1.\ \frac{1}{2}\ (a+c)}{6} = \frac{47a + 25b + 22c}{72}$$

qui sera l'espérance (*expectatio*) (1) de Titius selon la première *"Ehabred"* proposée ; par contre, selon l'"Ehabred" corrigée, comme en fait il y a à nouveau deux cas qui donnent à Titius 2/3 a, deux qui lui donnent 2/3 (a+b+c) mais un qui lui donne 2/3 (a+b) et un qui lui donne 2/3 (a+c), son espérance sera :

$$\frac{2.\ \frac{2}{3}\ a + 2.\ \frac{2}{3}\ (a+b+c) + 1.\ \frac{2}{3}\ (a+b) + 1.\ \frac{2}{3}\ (a+c)}{6} = \frac{2a + b + c}{3}$$

qui est plus grande que la première si l'on estime a peu près égales les fortunes de chaque vieillard, c'est-à-dire si b = c ; en effet la première espérance sera $\frac{47a + 47b}{72}$, la seconde $\frac{2a + 2b}{3}$ ou $\frac{48a + 48b}{72}$

qui est supérieure à la première de $\frac{1}{72}$ a + $\frac{1}{72}$ b ou c.

Et les deux espérances ne pourront pas être égales, à moins que l'on admette que le père de Titius est plus que deux fois plus riche que le père de Caja ; en effet les espèrances étant ramenées au même dénominateur nous aurons : $\frac{47a + 25b + 22c}{72} = \frac{48a + 24b + 24c}{72}$ ou b = a+2c

Mais Caja est encore une jeune femme, d'une santé robuste, aussi suppose-t-on sa survie aux vieillards et les six ordres de mort ne peuvent pas arriver aussi facilement ; cependant nous allons chercher combien l'un et plus prédisposé que l'autre : posons qu'il y a deux cas, supposons deux maladies, deux symptômes ou accidents, qui peuvent causer la mort de l'un ou l'autre des vieillards, cependant qu'une maladie seulement menace Caja de mort, de telle sorte qu'il y a 5 cas de maladie qui peuvent aussi facilement l'un que l'autre attaquer en premier leur sujet ; ainsi puisque Caja n'est exposée qu'une fois il y aura 1 cas dans lequel elle meurt avant l'un ou l'autre des vieillards et 4 autres dans lesquels elle n'est pas morte ce qui vaut 1/5 de la certitude de mourir en premier ou une probabilité (*unam probabilitatem*), dont 5 font toute la certitude (2). Par ailleurs si l'un des deux vieillards est déjà disparu, il y a un cas dans lequel Caja meurt avant l'autre et deux dans lesquels elle survit au vieillards, ce qui vaut 1/3 de la certitude de mourir en second et 2/3 c de mourir en troisième ; mais puisqu'elle vit encore, (il y aura 4) cas, dans lesquels l'un des deux vieillards disparait en premier lieu, et Caja acquiert 1/3 de la certitude de mourir en second ou 2/3 de la c de mourir en troisième, et un cas, dans lequel elle acquiert..., à savoir lorsqu'elle meurt en premier, ce qui vaut :

$$\frac{4 \cdot \frac{1}{3}c + 1.0}{5} = \frac{4}{15}c$$

de la certitude de mourir en 2nd, et

$$\frac{4 \cdot \frac{2}{3}c + 1 \cdot 0}{5} = \frac{8}{15}c$$

de la certitude de mourir en 3°, et donc on a 2 probabilités (*probabilitates*) (dont 15 font la certitude) par lesquelles elle meurt après B et avant C, et tout autant par lesquelles elle disparait après C et avant B. C'est pourquoi, puisqu'il y a une probabilité (dont 5, ou ce qui est identique : puisqu'il y a) trois probabilités (dont 15 font la certitude) par lesquelles A meurt avant B et C (c'est-à-dire par lesquelles Titius obtient 2/3 a) ; 2 par lesquelles elle meurt aprés B et avant C (par lesquelles Titius obtient selon la première "*Ehabred*" (3/4) (a+b) et selon la dernière (2/3) (a+b)) ; 2 autres par lesquelles elle meurt avant B mais après C. (et Titius obtient selon la première (1/2) (a+c), selon la dernière (2/3) (a+c) ; 8 enfin par lesquelles A meurt après B et C (et Titius obtient dans les deux cas(2/3) (a+b+c)) : L'espérance de Titius sera selon la première :

$$\frac{3 \cdot \frac{2}{3}a + 2 \cdot \frac{3}{4}(a+b) + 2 \cdot \frac{1}{2}(a+c) + 8 \cdot \frac{2}{3}(a+b+c)}{15} = \frac{59a + 41b + 38c}{90}$$

(on considère qu'il doit faire valoir celle-là parmi tant d'autres), selon la dernière

$$\frac{3 \cdot \frac{2}{3}a + 2 \cdot \frac{2}{3}(a+b) + 2 \cdot \frac{2}{3}(a+c) + 8 \cdot \frac{2}{3}(a+b+c)}{15} = \frac{60a + 40b + 40c}{90}$$

qui est supérieure à la première si $b = c$, car en effet la première
103. espérance sera $\frac{59a + 79b}{90}$, la dernière $\frac{60a + 80b}{90}$ qui est supérieure à la première de $(1/90)a + (1/90)b$.

Si les deux espérances devaient être effectivement égales, on devrait avoir $b = a + 2c$ comme avant. Soit à présent, dans les faits, le nombre de cas ou de maladies qui peuvent apporter la mort à l'un ou l'autre des vieillards, (appelons-le) m aussi grand soit-il, (le nombre des cas) qui causent la mort de la jeune Caja, (appelons-le) n aussi petit soit-il ; Caja aura $n/(n+2m)$ de la certitude de mourir en premier : $mn/(2mm + 3mn + nn)$ de la certitude de mourir en 2nd après B et avant C et de même $mn/(2mm + 3mn + nn)$ de la certitude de mourir en 2nd après C et avant B et $2mm/(2mm + 3mn + nn)$ de la certitude de mourir en 3ème. C'est pourquoi puisqu'il y a n probabilités, dont $n+2m$ font toute la certitude, (ou bien $mn + nn$ probabilités) dont $2mm + 3mn + nn$ font la certitude) par lesquelles Caja meurt en premier (c'est-à-dire par lesquelles Titius obtient $(2/3)a$) etc. : le sort (*sort*) (3) de Titius sera selon la première "*Ehabred*" :

$$\frac{(mn + nn).\frac{2}{3}a + mn.\frac{3}{4}(a + b) + mn.\frac{1}{2}(a + c) + 2mm.\frac{2}{3}(a + b + c)}{2mm + 3mn + nn}$$

$$= \frac{(16\,mm + 23\,mn + 8\,nn)a + (16mm + 9mn)b + (16\,mm + 6\,mn)c}{24\,mm + 36\,mn + 12\,nn}$$

selon la dernière :

$$\frac{(mn + nn).\frac{2}{3}a + mn.\frac{2}{3}(a + b) + mn.\frac{2}{3}(a + c) + 2\,mm.\frac{2}{3}(a + b + c)}{2\,mm + 3\,mn + nn}$$

$$= \frac{16\,mm + 24\,mn + 8nn)a + (16\,mm + 8\,mn)b + (16\,mm + 8\,mn)c}{24\,mm + 36\,mn + 12\,nn}$$

qui est supérieure à la première, si b=c, cae en effet la première espérance sera alors :

$$\frac{(16mm + 23\ mn + 8nn)a + (32mm + 15\ mn)b}{24\ mm + 36\ mn + 12\ nn},$$

la dernière

$$\frac{(16mm + 24\ mn + 8nn)a + (32mm + 16mn)b}{24\ mm + 36\ mn + 12\ nn},$$

qui est supérieure à la première de

$$\frac{mna + mnb}{24mm + 36mn + 12nn}$$

quantité qui ne peut devenir nulle si ce n'est en posant un rapport infiniment grand entre m et n, c'est-à-dire si ce n'est lorsqu'on prend n = 0, ce qui signifie donc que Caja jouit d'une santé si solide qu'elle ne puisse pas ne pas survivre aux vieillards ; ce qui est évident, puisque dans ce cas, que ce soit selon la première "Ehabred" ou la dernière il attend 2/3 (a+b+c).

Or nous estimons ainsi les probabilités de la mort de Caja et des vieillards, en posant que pour une maladie mortelle qui attend Caja il y en a deux qui menacent l'un ou l'autre vieillard. Mais nous pouvons nous engager sur une autre voie d'estimation, en posant par contre que le nombre de maladies auxquelles ils sont exposés est le même pour tous ; mais en raison de son âge et de sa santé plus robuste deux maladies sont exigées pour apporter la mort à Caja, quand une seule suffit pour les veillards. Parce qu'on suppose que Caja et l'un ou l'autre des vieillards peuvent être aussi facilement malades, il y aura un cas (si on sait que Caja est malade en premier) où elle acquiert 1/3 de la certitude de mourir(dans ce cas en effet il manque une maladie qui doit être mortelle, comme pour les vieillards) et deux autres où elle perd l'espérance de mourir en premier (si on sait que l'un ou l'autre vieillard est malade, car on a supposé que cette maladie du vieillard est mortelle), ce qui vaut :

$$\frac{1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0}{3} = \frac{1}{9} \text{ ou } \frac{2}{18}$$

cert(itude) de mourir en premier. Par ailleurs si l'un ou l'autre vieillard est déjà mort de sa maladie et que Caja n'est pas encore malade, il y aura un cas où Caja (si on voit qu'elle est malade avant l'autre vieillard) acquiert 1/2 cert(itude) de mourir en 2nd (de même en troisième) et un cas (si en effet l'autre vieillard est malade le premier et meurt) où elle perd l'espoir (*spem*) de mourir en 2nd (4) et acquiert toute la certitude de mourir en troisième : ce qui vaut

$$\frac{1.\ \frac{1}{2} + 1.\ 0}{2} = \frac{1}{4}\ c \text{ de mourir en 2nd et } \frac{1.\ \frac{1}{2} + 1.\ 1}{2} = \frac{3}{4}\ c \text{ de mourir en}$$

troisième.

Alors lorsque le premier vieillard vit encore, il y aura deux cas (si l'un ou l'autre vieillard meurt) où Caja acquiert 1/4 c de mourir en 2nd (ou 3/4c de mourir en troisième) et un cas (si on sait qu'elle même sera malade en premier) où elle acquiert 1/3 c de mourir en 2nd (de même en troisième), ce qui vaut

104. $$\frac{2\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{3}}{3} = \frac{5}{18}\ c \text{ de mourir en 2nd et } \frac{2\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{3}}{3} = \frac{11}{18}\ c$$

de mourir en troisième.

Puisqu'il y a 2 probabilités (dont 18 font la certitude), par lesquelles A meurt avant B et C (et par lesquelles Titius reçoit 2/3 a),5 par lesquelles elle meurt au milieu, ou 2 1/2 par lesquelles elle meurt après B et avant C (par lesquelles Titius obtient selon la première "Ehabred" (3/4) (a+b) et selon la dernière (2/3) (a+b)) et 2 1/2 autres, par lesquelles elle meurt avant B mais après C (on doit à Titius selon la première (1/2) (a+c), selon la denière (2/3) (a+c)) et enfin 11 par lesquelles elle meurt après B et C (et Titius obtient selon les deux (2/3) (a+b+c)), le sort (*sors*) de Titius sera selon la première:

$$\frac{2\cdot\frac{2}{3}\,a + 2\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,(a+b) + 2\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,(a+c) + 11\cdot\frac{2}{3}\,(a+b+c)}{18} = \frac{283a + 221b + 206c}{432}$$

selon la dernière

$$\frac{2 \cdot \frac{2}{3} a + 2 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (a+b) + 2 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (a+c) + 11 \cdot \frac{2}{3} (a+b+c)}{18} = \frac{288a + 216b + 216c}{432}$$

ce qui est supérieur au premier, si b=c, car en effet la première espérance sera alors

$\frac{283a + 427b}{432}$, la dernière $\frac{288a + 432b}{432}$, qui est supérieure à la première de $\frac{5a + 5b}{432}$.

Si les 2 espérances devaient être effectivement égales, on devrait avoir b = a+2c comme précédemment. Qu'en fait ces deux nouvelles espérances ne soient pas les mêmes qu'avant, la raison en est qu'il n'est pas identique de dire qu'il y a une maladie mortelle pour Caja et deux pour les vieillards ou de dire que pour provoquer la mort de Caja il faut deux maladies quand une seule suffit pour un vieillard et qu'ainsi Caja est plus proche de la mort dans ce cas-là, plus éloigné dans celui-ci. (NB. Si Titius avait des frères dont il puissent attendre un bon héritage).

NB. Si ABCD désignent 4 maladies, C et D représentant les maladies de Caja ; parce que toutes peuvent être mises dans un ordes différent en 24 alternatives, il s'ensuit qu'il y a 4 cas qui donnent la mort à Caja en premier, 8 en 2nd, 12 en troisième (NB. raison de la diversité) et l'espérance de Titius sera (47a + 63b)/72 et (48a + 64b)/72 laquelle esp plus grande que la première de (a + b)/72 comme il a été dit auparavant.

NB. Aucune solution générale du problème ne peut être donnée avec des lettres.

Du reste, il faut observer qu'il y a autant de suppositions telles que deux maladies soient mortelles pour les vieillards quand il n'en faut qu'une pour Caja etc... : de telle sorte que le sort de Titius n'a pas été déterminé avec soin. En effet, lorsq'il s'agit de prédictions et de jeux , que seul gouverne le hazard, l'espérance précise et scientifique peut être déterminée, et cela parce que nous saisissons exactement et clairement le nombre de cas d'où découlent infailliblement le gain ou la perte et que ces cas sont ici indifférents et peuvent arriver avec une égale facilité, ou bien du

$\underline{104}$. Quare cum sint 2. probabilit: (quarum 18. faciunt certitudinem) qb. A. moritur ante B.C. (qb. Titius accipit $\frac{2}{3}a$) & 4. qb. moritur medio loco, seu $2\frac{1}{2}$ qb. moritur post B. & ante C. (qbus Titius aufert juxta priorem hypothesin $\frac{3}{4}\overline{a+b}$. & juxta posteriorem $\frac{2}{3}\overline{a+b}$) $2\frac{1}{2}$ alia, qb. moritur ante B. & post C. (debentur Titio juxta priorem $\frac{1}{2}\overline{a+c}$. juxta [illegible] post: $\frac{2}{3}\overline{a+c}$) 11. denique, qb. A moritur post B. & C. (Titius aufert juxta utramque $\frac{2}{3}\overline{a+b+c}$) erit Titii sors juxta priorem:

$$\frac{2.\frac{2}{3}a + 2\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\overline{a+b} + 2\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\overline{a+c} + 11.\frac{2}{3}\overline{a+b+c}}{18.} = \frac{283a + 221b + 206c}{432}$$

juxta posteriorem

$$\frac{2.\frac{2}{3}a + 2\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\overline{a+b} + 2\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\overline{a+c} + 11.\frac{2}{3}\overline{a+b+c}}{18.} = \frac{288a + 216b + 216c}{432}$$

quae priore major [illegible]

Si $b = c$. tum n. prior expectatio erit $\frac{283a + 427b}{432}$, posterior $\frac{288a + 432b}{432}$: quae priore major est $\frac{5a + 5b}{432}$. si v. utraque expectatio aequalis esse dat. stabit esse $b = a + 2c$ [illegible] antea. Quod v. hic duae istae expectationes non sint eaedem cum nuperis, ratio [illegible] quia perinde est dicere, unum morbum Lysim lethalem esse & ~~[illegible]~~ senibus [illegible], & ad Lysis mortem promovendam requiri duos morbos, ad senem morbum sufficere [illegible] cum illo modo Lysi sit ~~[illegible] hoc propior~~ propior, hoc remotior à morte. [illegible] Titius habeat fratres, quibus [illegible] bona hereditate possit consequi.

Caeterum observandum, suppositiones hic esse, quod senibus duo morbi, Lysis unus tantum sit lethalis etc. [illegible] sortem Titii accurate determinatam esse. Quod n. in sortilegiis & ludis, quos sola gubernat sors, ~~[illegible]~~ precise & scientifice determinari possit, causa est, quia accurate & clare perspicimus numerum casuum, ad quos infallibiliter sequitur lucrum aut damnum, & quod hi casus indifferenter se habent & aeque facile evenire possint, aut saltem unus altero sit probabilior, scientifice definire possumus quanto sit facilior. At quis mortalium, obsecro, numerum casuum morborum & aliorum accidentium tam senes tam juvenes, ~~[illegible]~~ [illegible] sciatque illos infallibiliter eripi à morte [illegible], determinetque quanto quilibet [illegible] facilius grassari possit cum haec omnia dependeant à causis omnino occultis [illegible] à cognitione nostra. Quod & in genere de civilibus & moralibus [illegible] intelligendum, ubi plerumque [illegible] probabilius, [illegible] aut consultius sit [illegible] ad quot gradibus probabilitatis [illegible] [illegible] antecellat, ~~[illegible]~~ probabilitas [illegible] accurate determinari [illegible] tutissima probabilitates aestimandi via [illegible] à priori [illegible] [illegible] seu ab eventu in similibus exemplis multoties observato. [illegible] Quemadmodum in nostro exemplo, si plurimorum annorum decursu observatum fuisset duplo [illegible] [illegible] senes, quam juvenes, ejusdem [illegible] temperamenti cum nostris [illegible] [illegible] [illegible] senibus, morbos et [illegible] [illegible] [illegible] casum, quo juvenis [illegible] seni mortem [illegible]. vel si observatum fuisset in plurimis senum [illegible] [illegible] duplo pluribus vicibus juvenem [illegible] respective seni supervixisse, quam contra [illegible] juvenem ante senem obiisse [illegible] [illegible] [illegible] vel etiam in plurimis [illegible] determinasset [illegible] [illegible] [illegible] B. [illegible]

G. Tit. A. B. C. D. fratres, C. & D. [illegible] [illegible] [illegible] posse [illegible] [illegible] primam, & quartam [illegible] erit expectatio Titii $\frac{47a + 67b}{72}$ & $\frac{48a + 64b}{72}$. quae illa major est $\frac{a+b}{72}$ [illegible]

NB. nulla [illegible] solutio [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

NB

Billet de morts [illegible] [illegible] 1661. [illegible]

[illegible] [illegible] possum, [illegible] [illegible] observen- [illegible]

NB

105.

successu temporis deprehendissem, quoties ~~...~~ solo A. supervenit ipsis B. & C. toties contigisse, ut bis [illegible] post B & ante C. & ter ante B. & post C. & [illegible] ut supervenit neutri; concluderem, tot singulorum casuum esse probabilitates, quot illorum feci observationes: unde more consueto reliquus instituetur calculus.

1. Exemplo alio: Quaeritur, quot homines in quadam civitate hoc anno probabilissime ~~morituri~~ nascituri, aut morituri sint? Rx. Collige in unam summam, quotquot a multorum annorum serie ibi nati vel denati sunt, summamque divide per annorum numerum, quotiens indicabit, quot singulis sequentibus annis probabilissime nascentur vel morientur, abstrahendo a conjecturis, super ~~...~~ Astrologorum aliave principia fundatis.

An Londinum major Lutetia? vid. Nouv. Rep. des lettres, mois d'octob. 1686. p. 1149.

2. Quaeritur quae sit altitudo media in barometro? Collige omnes observatas altitudines, sive diversas sive easdem, in unam summam, quam divide per numerum observationum. vel compendiosius: si plures eaedem altitudines observatae fuerint; multiplicetur ~~sing~~ quaelibet altitudo diversa per numerum observationum quibus singulae observatae fuerint; summa omnium productorum divisa per numerum omnium observationum exhibet altitudinem Mercurii mediam, quam Germani vocant [illegible] ander gegenseit, Galli l'une portant l'autre: ut si bis deprehensus fuerit mercurius in altitudine 28. pollicum, ter in altit. 29. & quater in altit. 30. erit altitudo media $\frac{2 \cdot 28 + 3 \cdot 29 + 4 \cdot 30}{9} = 29\frac{2}{9}$. Patet ergo falli illos, qui mediam quantitatem quaerentes sumunt mediam Arithmeticam inter extrema, cum hoc pacto media Mercurii altitudo foret 29. non $29\frac{2}{9}$ pollicum.

vid. Extract. von Ondersoeck der Cometen [illegible] Bekker.

3. Quando reditura sit contagio ~~...~~ conjecturare? Rx: Divide numerum annorum elapsorum inter duas contagiones quarum una ante plurima saecula altera novissime grassata est per numerum contagionum interceptarum, quotiens indicabit [illegible] numerum annorum a novissima contagione sequentem, abstrahendo a conjecturis Theologicis, ~~...~~ Physicis & Astrologicis.

4. ~~Quot gradus ... probabilitati~~ Quanta sit probabilitas, grassaturam alicubi pestem quolibet sequentium annorum? Rx. Divide numerum ~~...~~ ~~...~~ ~~... saeculi elapsorum ...~~ ~~...~~ annorum, quibus aliquot saeculis pestis grassata est per numerum omnium annorum, quotiens indicabit gradum certitudinis, quo quolibet sequentium annorum pestis futura, abstrahendo ab intervallo, quod effluxit a novissima peste.

5. Metiri gradum fidei ~~...~~ cuidam: Divide numerum vicium quibus verax deprehensus fuit, per summam illorum vicium quibus ~~...~~ [illegible] fuit observatus. Aut si noscere probare fidei hominis [illegible] testimonia [illegible] alii minus probatae fidei ipsi contradicit in simultaneo divide numerum illorum per summam ambarum. NB. [illegible]

[illegible] de historia [illegible] credendum. v. la Logique [illegible] 522 [illegible] moins si l'un est plus probable que l'autre parce que nous pouvont définir scientifiquement de combien il est plus probable. Mais je prie le ciel que quelqu'un dénombre complètement les cas mortels, à savoir des maladies ou d'autres accidents quxquels sont exposés tant els vieux que les jeunes, qu'il sache ceux qui infailliblement entrainent al mort et qu'il détermine également combien il est plus probable que l'un agisse plutôt que l'autre étant donné que tous dépendent de causes totalement cachées et éloignées de notre connaissance.

llet de
-talité
ırnal
: 1666
(XXI

Pour ce qui est de l'appréciation des affaires civiles et morales où la plupart du temps nous savons certes qu'une chose est plus probable (*probabilius*), plus répandue ou plus prudente qu'une autre, nous ne déterminons pas exactement, mais seulement probablement, par combien de degrés de probabilité (*gradibus probabilitatis*) ou de bonne qualité (*bonitatis*) elle l'emporte sur une autre (5). Pour ces choses la voie la plus sûre pour estimer les probabilités(*probabilitates aestimandi*)n'est pas a priori, ou par la cause, mais a posteriori, ou par l'événement observé fréquemment dans des exemples sembalbles.

En effet,
peux me
ɔmper dans
moindre
ɔportion
j'observe
ıs souvent
moins
ıvent. Je
ıontre
:i N.B.

105.

Ainsi dans notre exemple * , si on a observé au cours de très nombreuses années que sont morts deux fois plus de vieillards que de jeunes filles du même âge et de la même complexion que nos jeunes et nos vieillards nous conclurons qu'il y a un cas qui menace de mort la jeune femme pour deux cas qui menacent les vieillards. Ou bien si on a observé de nombreux "couples" de vieux et jeune et que le jeune a survécu deux fois plus souvent à son vieillard, que le vieillard au jeune, nous conclurons que pour un cas qui prive de vie le jeune avant le vieillard, il y en a deux qui ont l'effet contraire; ou encore si j'avais déterminé de nombreux "triplés", que j'ai appelé A le jeune, B l'un ou l'autre des vieillards, C l'autre, que je les ai observés à l'improviste au cours du temps, et qu'il est arrivé que A a survécu à la fois à B et C deux fois plus souvent que de fois où il est mort après B et avant C, et trois fois plus souvent que de fois où il ne survit à aucun des deux, Je conclurais que les probabilités sont autant de cas pour chaque qu'il y a d'observations qui en sont faites ; et qu'ainsi d'après le fait habituel on établisse un calcul.

-ce plus
ıd à Lon-
s qu'à
is ? Voir
ı. Rép.
Lettres,
s d'octo-
1696
149

1 . <u>Autres exemples :</u> On demande combien d'hommes dans une certaine ville naitrons cette année le plus probablement (*probabilissime*), ou bien mourront ? Réponse : Rassemble en une somme tous ceux qui sont nés ici ou qui y sont morts pendant de nombreuses années et divise la somme par le nombre d'années ; cela te fera connaitre pour chaque année qui va suivre combien naitront ou mourront le plus probablement, abstraction faite des conjectures ou d'autres principes bien assis des Astrologues.

'. Extrait
ondersoeck
Cometen
Bekker

2 . On demande quelle est la hauteur moyenne dans une baromètre ?

Rassemble toutes les hauteurs que tu as observées, qu'elles soient différentes ou identiques, en une somme que tu divises par le nombre d'observations, ou, ce qui est plus avantageux, si les mêmes hauteurs ont été observées plusieurs fois, les différentes hauteurs sont multipliées par le nombre d'observations qui ont été faites de chacune d'entre elles, la somme de tous ces produits divisée par le nombre de toutes les observations donne la hauteur "moyenne" (*mediam*) (6) que les Allemands appellent "eine in die andere gerechnet", les Français "l'une portant l'autre" ; si le mercure a été surpris deux fois à la hauteur de 28 pouces, trois fois à la hauteur de 29 et quatre fois à la hauteur de 30, la hauteur moyenne sera :

$$\frac{2 \,.\, 28 + 3 \,.\, 29 + 4 \,.\, 30}{9} = 29\,\frac{2}{9}\,.$$

Aussi est-il évident qu'ils se trompent ceux qui pour rechercher la quantité moyenne de mercure font la moyenne arithmétique entre les extrêmes, et qui avec ce procédé obtiennent une hauteur moyenne de 29 et non de 29 2/9 pouces.

3 . Quand conjecturer qu'une épidémie va revenir ? Réponse : Divise le nombre d'années qui se sont écoulées entre deux épidémies dont l'une a eu lieu plusieurs siècles auparavant et l'autre beaucoup plus récemment, par le nombre des épidémies moins une ; cela révèlera ce qui est cherché, c'est-à-dire le nombre des années depuis l'épidémie la plus récente jusqu'à la suivante, abstraction faite des conjectures d'ordre Théologique, Physique et Astrologique.

4 . Quelle est la probabilité (*probabilitas*) que la peste survienne quelque part au cours de n'importe laquelle des années à venir ? Réponse : Divise le nombre des années où la peste est survenue depuis quelques siècles par le nombre de toutes les années ; cela révèle le degré de certitude avec lequel la peste va arriver en chacune des années à venir, abstraction faite de l'intervalle qui s'est écoulé depuis la peste la plus récente.

5 . Estimer le degré d'honnêteté de quelqu'un : Divise le nombre de fois où on a perçu des propos sincères par la somme de ceux-ci et du nombre de fois où on les a observés mensongers. Ou si plusieurs hommes dont l'honnêteté est prouvée fournissent des témoignages de sa sincérité, d'autres dont l'honnêteté n'est pas moindre l'accusant de perfidie, divise le nombre de ceux-là par la somme des deux.

NB. Si à propos de problèmes pratiques ou théoriques s'offrent des témoignages, la chose se présente de différente manière s'il s'agit de faits ou de récits ; du moins les poids des raisons devraient être

examinés ; or moi, si je ne suis pas capable de comprendre les raisons, il me faut croire celui qui est maitre dans son art ; ainsi si jamais un astronome dit que la terre se meut, il mérite plus de
"La confiance que cent théologiens ignorants qui prétendraient le
jue" contraire, si je sais que pendant toute sa vie il s'est employé à
etc..(7) mesurer les astres et à observer leurs phénomènes. Si l'on juge de
106. récits un témoin oculaire est plus crédible.

6 . Faut-il craindre la foudre ?

7 . Faut-il fuir un tremblement de Terre prolongé ? Réponse : Surtout.

8 . Von dem SchieBet zu Safran auf der Schützenmatten (8) .

Notes
-----

(1) "Expectatio" ; Bernouilli utilise la règle générale élaborée par Huygens pour calculer l'espérance, ou la valeur de la chance de gagner d'un joueur dans un jeu de hasard.

(2) "id quod valet 1/5 certitudinis mortis primae seu unam probabilitatem quarum 5 faciunt omnimodam certitudinem".

(3) "Sors".

(4) "perdit spem mortis 2dae"

(5) "Quod et in genere de civilibus et moralibus intelligendum, ubi plerunque unum altero probabilius, satius aut consultius quidem esse novimus, at quot gradibus probabilitatis aut bonitatis antecellet, probabiliter tantum, non accurate determinamus."

(6) "altitudinem mercurii "mediam"

(7) Il s'agit de la "Logique ou l'Art de Penser" d'Antoine Arnaud et Pierre Nicole publiée à Paris en 1662 et à laquelle Bernoulli fait également allusion dans l'Ars Conjectandi, IVème partie, chapître IV. P. 225 : *"Cette manière empirique de déterminer par expérience le nombre des cas n'est ni neuve ni insolite. Ce n'en est point une autre que prescrit le Célèbre Auteur de l'Art de Penser, Homme d'une grande finesse et d'un grand talent, dans les chapîtres 12 et suivants de la dernière partie ..."*

(8) Un problème de tir sur une cible.

BIBLIOGRAPHIE

BERNOULLI Jacques . "Die Werke von Jakob Bernoulli" Band I (1969), Band III (1975) Bakhaüser Verlag - Bâle.
en particulier dans le Tome I : . Logik und Methodenlehre pp 235-301
dans le Tome III : . Aus den "Meditationes" pp 21-89
. Ars Conjectandi" und " Lettre à à un Amy sur les parties du Jeu de Paume" pp 107-289

BOUDOT Maurice . "Probabilité et Logique de l'argumentation selon Jacques Bernoulli" dans "Les Etudes Philosophiques" - 1967 - pp 265-288.

HACKING Ian . "The Emergence of Probability - A Philosophical Study of early ideas about probability, induction and statistical inference" Cambridge University Press - 1975 -

HOFMANN J.E . Article "Bernoulli, Jacob (Jacques)" du Dictionary of Scientific Biography Ch.Scribner's Sons N.Y - 1973 - Tome II pp 46-51.

KOHLI Karl . "Zur Publikationsgeschichte der Ars Conjectandi" dans "Die Werke von Jacob Bernoulli" Tome III (1975) pp 391-401.
. "Aus dem Briefwechsel Zwischen Leibniz und Jacob Bernoulli" ibidem pp 509-513

SHAFER Glenn . "Non additive Probabilities in the work of Bernoulli and Lambert" dans "Archive for history of exact sciences" Vol. 19 n°4 - 1978 pp 309.370.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES ILLUSTRATIONS

R.47 – Titre : Jacques Bernoulli et l'Ars Conjectandi
Documents pour l'étude de l'émergence d'une mathématisation de la stochastique

Auteurs : Norbert MEUNIER

Public concerné : Enseignants de second cycle

Résumé :

En retraduisant de fond en comble la IVe partie de l'Ars Conjectandi de Jacques Bernoulli et en l'accompagnant d'un index, de notes riches et multiples qui permettent à l'honnête homme d'en avoir une parfaite intelligence, Norbert Meusnier n'a pas seulement fait oeuvre d'historien scrupuleux des mathématiques dans le domaine particulier des probabilités. Il a souligné, pour le philosophe, surtout s'il est soucieux du type de rationalité à l'oeuvre dans les sciences humaines, l'intérêt d'un ouvrage qu'on aurait tort de limiter au seul établissement de la célèbre "loi des grands nombres". La logique du probable intermédiaire entre les catégories du calcul et celles de l'expérience de l'économiste, du démographe, du politique, du médecin, passionneront tous ceux qui voient dans les mathématiques un mode fondamental d'organisation de la pratique humaine. Cette édition bilingue est suivie de la présentation de fragments des "Meditationes" et d'une longue et importante "Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume".

Mots clefs : Probabilités
Histoire des probabilités
Bernoulli

Date : 1987
Nombre de pages : 156
Prix : 100 frs

Publication : ISBN : 2-86239-001-1
Dépôt légal : 3e trimestre 1987

I.R.E.M. Université de Haute Normandie
Avenue de Broglie – BP 138
76821 Mt St Aignan Cédex

****

Bon de commande

M. , Mme, Mlle : ....
Adresse : ....

	Prix	Quantité	Total
[R.47] JACQUES BERNOULLI ET L'ARS CONJECTANDI :	15.24 EUROS	....	....
Frais d'envoi : 2.29 Euros pour le 1er livre et 0.76 Euros par livre supplémentaire (France)			....
Frais réels pour l'étranger			....
	SOMME DUE :		....

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :

L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN

et adressés directement à : I.R.E.M. - B.P. 138 - 76821 MONT SAINT AIGNAN CEDEX
Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 02 35.14.61.41 ou Fax 02 35 14 00 49.

RIB : TP ROUEN TG 10071 76000 00044004056 81

****

DATE : SIGNATURE :