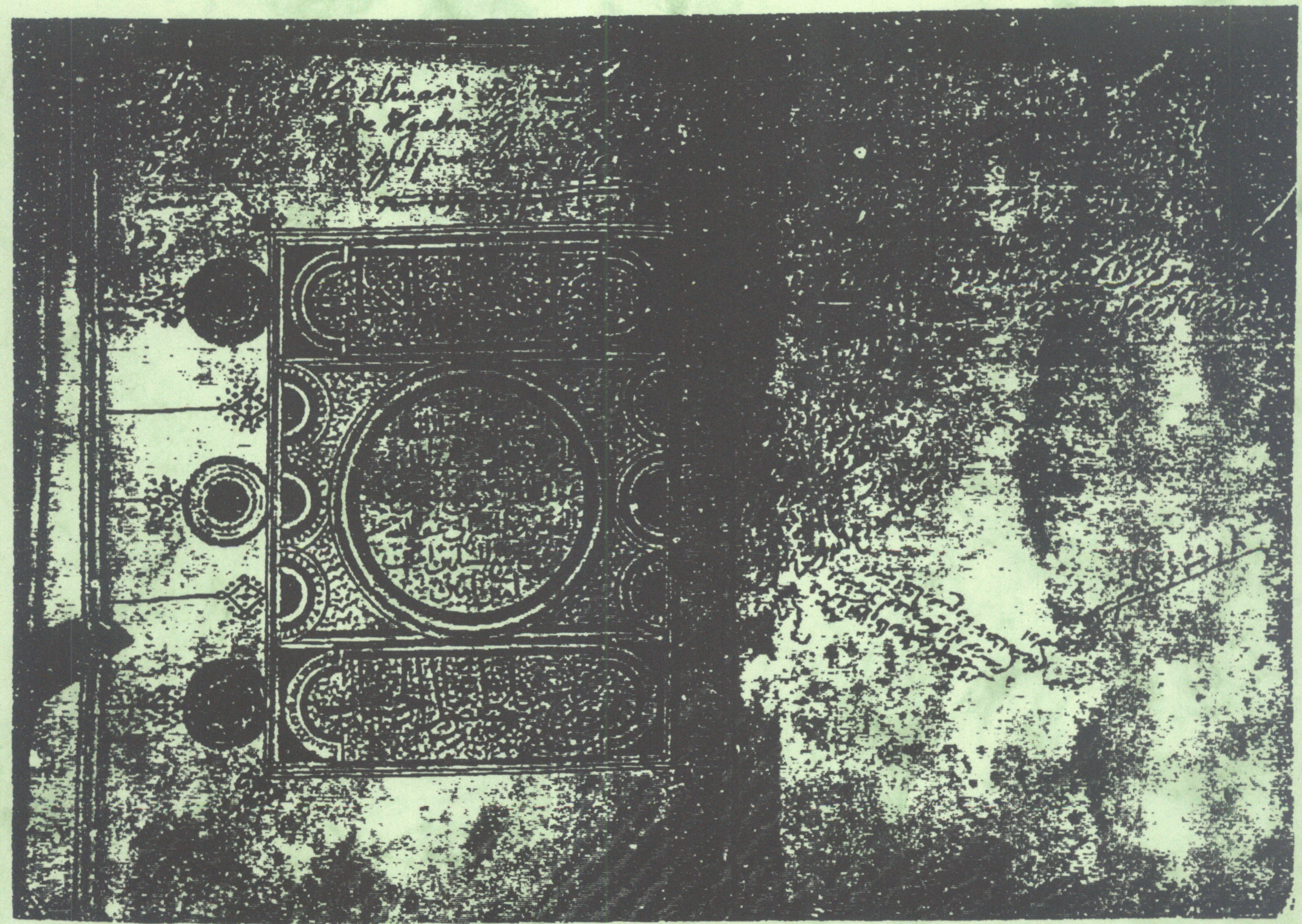
IREM de ROUEN

Quelques aspects des mathématiques d'Ibn al-Banna' de Marrakech (1256-1321)

L'équation du second degré - Les extractions et approximations de racines
Les nombres figurés - Le concept de nombre.



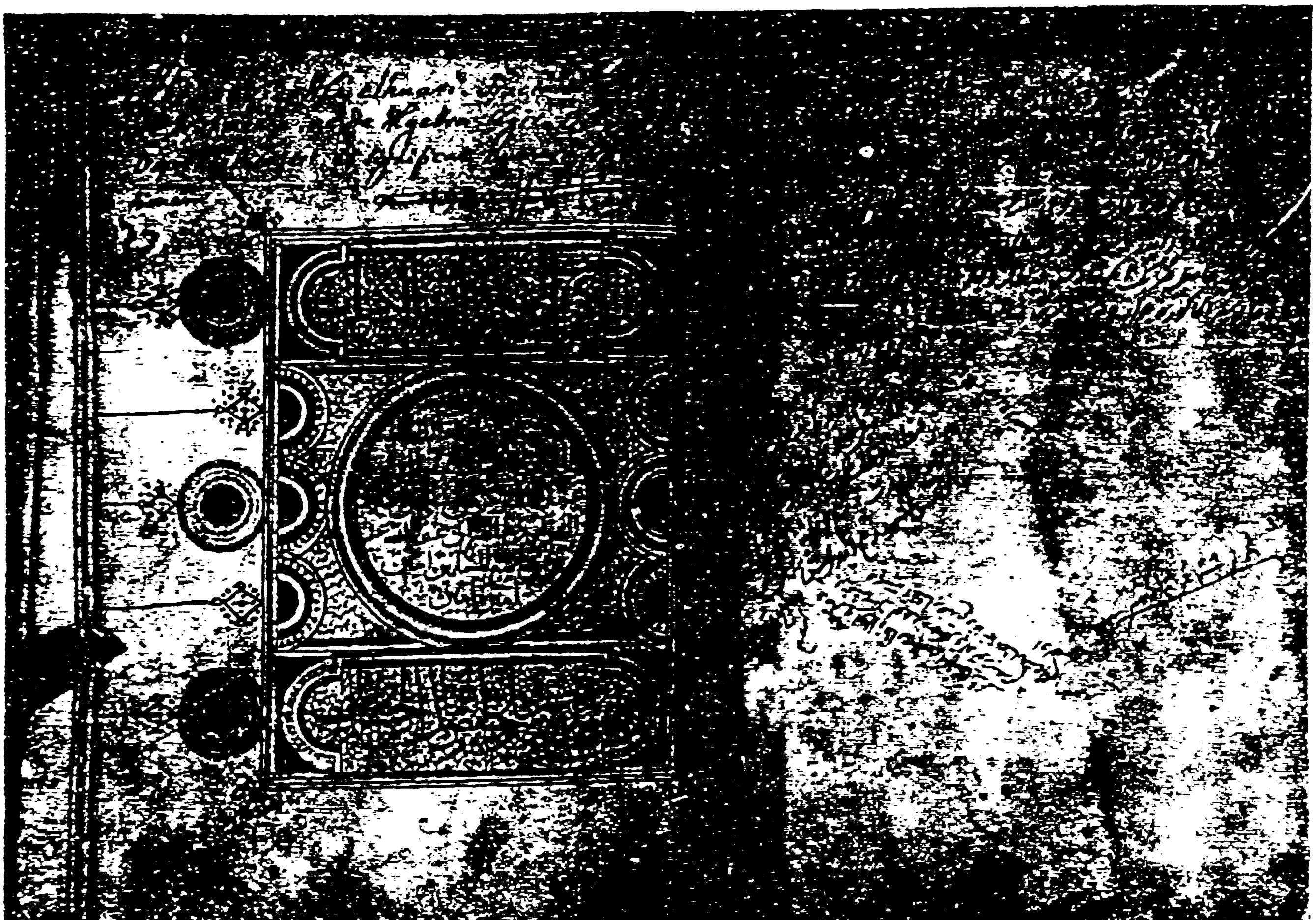
Dossier établi par le groupe de travail franco-maghrébin de l'IREM de Rouen.
Coordination : Elisabeth Hébert.

Pour le MAROC : Youssef Bensmina, Abdelaziz Boufrioua
Pour l'ALGERIE : Djamel Aïssani
Pour la FRANCE : Said Bouaris, Jacqueline Borréani, Elisabeth Hébert, Nicole Nordon, Didier Trotoux.

IREM de ROUEN

Quelques aspects des mathématiques d'Ibn al-Banna' de Marrakech (1256-1321)

L'équation du second degré - Les extractions et approximations de racines
Les nombres figurés - Le concept de nombre.



Dossier établi par le groupe de travail franco-maghrébin de l'IREM de Rouen.
Coordination : Elisabeth Hébert.

Pour le MAROC : Youssef Bensmina, Abdelaziz Boufrioua
Pour l'ALGERIE : Djamel Aïssani
Pour la FRANCE : Said Bouaris, Jacqueline Borréani, Elisabeth Hébert, Nicole Nordon, Didier Trotoux.

Invitation à un voyage dans le temps.

Le document que nous offrons à votre lecture est, dans sa forme, un pur produit du traitement de texte, nous y gagnons en lisibilité ce que nous perdons hélas en émotion. Aussi avant de partir à la découverte du savoir d'Ibn al-Banna', nous vous invitons à vous laisser émouvoir par les multiples relais qui nous mènent à ce savoir....

Vous pouvez admirer en couverture la reproduction de la page de présentation d'un manuscrit datant de 1444, commentaire du *Talkhis* d'Ibn al-Banna', rédigé par al-Misrati (m 1345). Un autre manuscrit du même commentateur porte la mention: "*Voici ce qu'a dit notre maître .....que Dieu lui accorde la Grâce!* ". Ce commentateur serait donc un disciple direct d'Ibn al-Banna' [4]. Cette reproduction est donnée par M.Souissi dans son édition critique du *Talkhis* de 1969.

Vous pouvez encore imaginer ce même manuscrit, décrit par A.Marre en 1865, dans la préface de la première traduction française du *Talkhis* [3] :

*"La Bibliothèque Bodléyenne d'Oxford possède, entre autres richesses, un manuscrit arabe très précieux, coté "Marsh 378", n° **CCXVII** de la première partie du catalogue latin dressé par Jean Uri. Ce manuscrit sur soie est relié à la façon orientale en forme de portefeuille, en carton couvert de papier bigarré avec dos et devant de cuir d'un brun noirâtre. Sur le dos se trouve imprimé en lettres dorées, en haut : "**AL MUFI**", en bas "**MARSH**" et en dessous le nombre 378. Sur le devant en haut se trouve en chiffres blancs peints à l'huile le même nombre 378. Contrairement à ce qui se voit chaque jour dans le monde, mais conformément à ce qui se rencontre parfois dans les manuscrits arabes conservés dans nos bibliothèques publiques, l'étiquette annonce moins que la réalité, et le précieux volume donne plus qu'il ne promet."*

Table des matières.

Petite histoire d'une brochure.

La présente brochure est le fruit d'un travail collectif international réalisé par le groupe franco-maghrébin sur les mathématiques arabes. Ce groupe est rattaché à l'IREM de Rouen et fait suite à la formation de professeurs marocains de mathématiques assurée par cet IREM durant les années scolaires 85/86, 86/87 et 87/88. Il est composé, d'enseignants ayant suivi cette formation, qu'ils soient en poste actuellement en France ou au Maroc, d'enseignants ayant assuré cette formation, et de quelques animateurs IREM intéressés par un travail sur l'histoire des mathématiques arabes. Ce groupe a bénéficié pour 1992-1993 de la présence à l'université de Rouen, d'un collègue algérien Djamel Aissani, président de l'association GEHIMAB, Groupe d'Etudes sur l'Histoire des Mathématiques à Béjaia (Bougie) au Moyen-Age

L'objectif de ce groupe est de poursuivre le travail de diffusion des connaissances portant sur les mathématiques arabes, travail entrepris avec la brochure "Découvrir les mathématiques arabes" et publié à l'issue de la formation initiale des étudiants marocains. Ce travail de vulgarisation s'appuie sur les recherches faites par les spécialistes de l'histoire des mathématiques arabes, l'accès aux différents textes et commentaires nous étant possible grâce à la présence d'une documentalists efficace à l'IREM de Rouen.

Le travail pour 1992-1993 s'est centré sur les mathématiques **d'Ibn al-Banna',** thème qui nous a semblé intéressant pour plusieurs raisons:

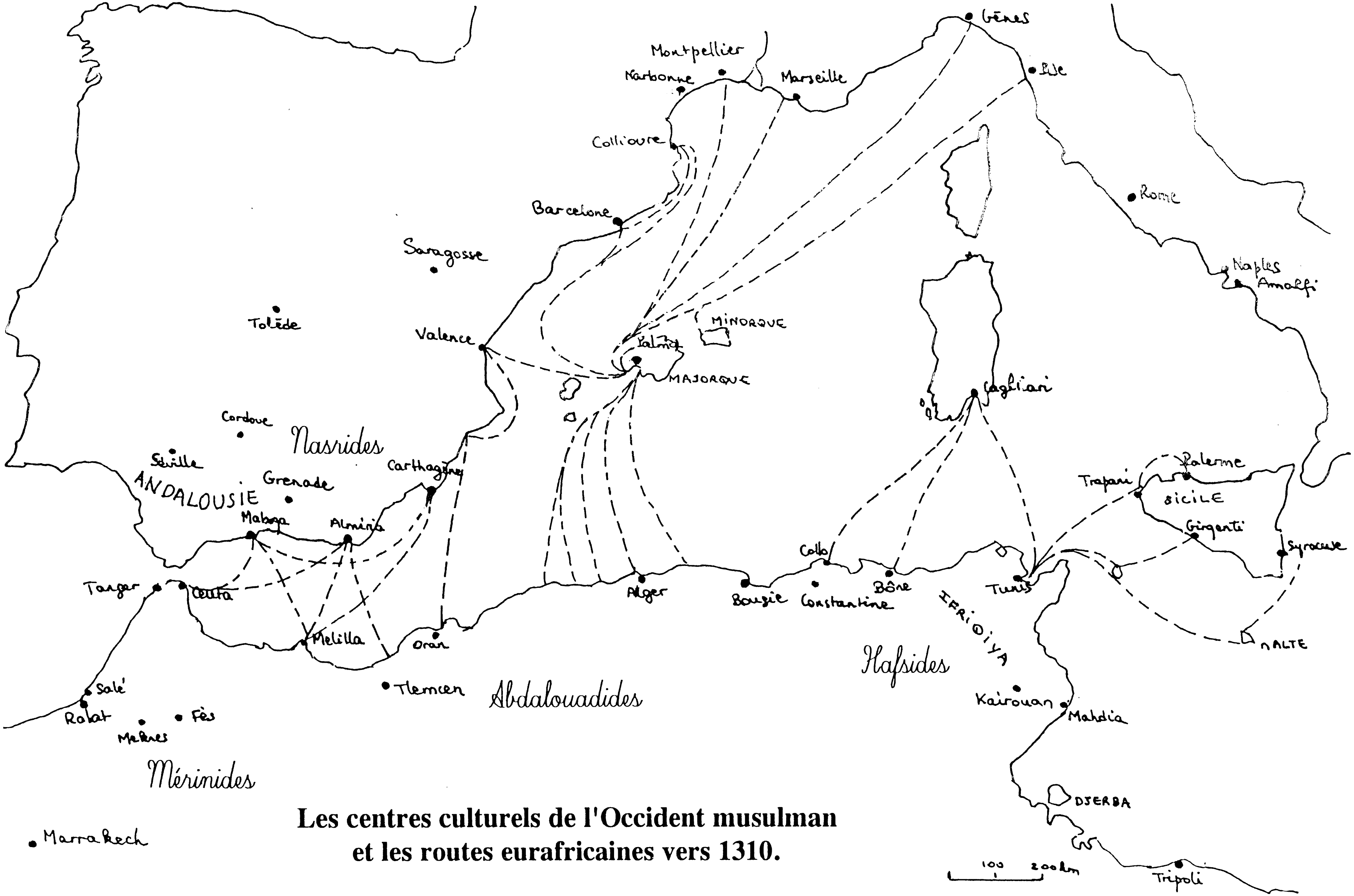
- La connaissance précise d'un des mathématiciens du Maghreb permet d'ancrer progressivement les divers savoirs rencontrés dans le domaine des mathématiques arabes à un savoir stabilisé.
- La thèse de M.Aballagh intitulée "Raf^{c} al-Hijab d'Ibn al-Banna'" est un document permettant d'accéder à un texte d'origine, avec simultanément à notre disposition l'édition critique (en arabe), sa traduction en français, quelques commentaires, de multiples notes. Il permet donc à la fois un travail de formation sur les méthodes et se prête à un travail d'approfondissement sur les contenus.
- L'environnement mathématique d'Ibn al-Banna' nous est rendu accessible par les travaux de recherche d'A.Djebbar.
- Ibn al-Banna' est un mathématicien de Marrakech. Des manuscrits encore inconnus sont donc à portée de main d'un certain nombre d'entre nous....élément de fascination non négligeable pour un travail qui ne rentre dans le cadre d'aucune obligation.

Le travail s'est organisé à la fois à Rouen et à Agadir, dans la perspective d'une participation commune à l'université d'été de Montpellier et l'animation d'un atelier. La brochure ici produite rassemble le travail du groupe franco-magrébin réalisé à l'occasion de cet atelier et est donc conçue dans certains de ses aspects pour laisser place à une implication du lecteur.

Que les organisateurs de cette université d'été trouvent ici l'expression de notre reconnaissance pour nous avoir offert cet espace d'expression. Enfin que Josette, notre documentaliste unique et préférée, soit chaleureusement remerciée pour son aide discrète et efficace.

1ère partie:

Ibn al-Banna' et son époque



Les centres culturels de l'Occident musulman et les routes eurafricaines vers 1310.

D'aprés une carte relevée par D.Aissani dans [6],
issue de Dufourcq C.E, L'Espagne catalane et le Maghreb aux XIIIe et XIVe siècles, P.U.F, Paris, 1966

Bref aperçu des mathématiques en Occident musulman.

par Abdelaziz Boufrioua.

Grâce aux recherches menées par d'éminents chercheurs, personne n'ignore aujourd'hui la contribution des pays de l'Islam au développement des mathématiques. Nous voudrions évoquer ici les mathématiques en Occident musulman surtout à l'époque d'Ibn al-Banna. Nous préciserons nos propos, par quelques exemples situés dans le champ des préoccupations de notre groupe de travail.

L'empire Islamique est constitué de deux pôles, l'Orient et l'Occident. Nous nous intéresserons ici particulièrement à l'Occident musulman. Comme l'indique la carte ci-contre, celui-ci englobe d'est en ouest: Tripoli, Tunis, Alger, le Maghreb extrême, l'Andalousie.

Depuis l'époque des Omeyyades[1] (756-1015), la **vie culturelle** en Occident et surtout en Andalousie, a connu une grande poussée avec la naissance de plusieurs centres de culture :

- Cordoue, Tolède, Séville, Grenade, Alméria en Andalousie;
- Kairouan, Tlemcen, Bougie, Fès, Marrakech, Tripoli pour le Maghreb.

Les encouragements des khalifs y étaient d'une grande importance, bien qu'à certains moments[2], en Andalousie, pour des raisons plus personnelles que religieuses, les fuqahas[3] aient persécuté les philosophes et détruit des livres. Néanmoins, les sultans ont généralement porté encouragement et intérêt aux sciences et hommes de science, à tel point que l'Andalousie et le Maghreb furent considérés comme une **terre de refuge** pour les sciences rationnelles et la philosophie.

Le développement des mathématiques en Occident prend sa **source** dans les écrits des savants de l'Orient comme al-Khwarizmi et Abu Kamil. Citons, comme témoin de cette longue chaîne de transmissions, Ibn Kaldun (m 1406). Ce mathématicien, commentateur d'Ibn al-Banna', nous fournit de multiples informations sur les relais de la connaissance mathématique jusqu'à son époque [11] et [6 p 51]:

"Abu Abdellah Al Khwarizimi fut le premier à écrire sur l'algèbre, après lui vint Abu Kamil, son ouvrage sur les six problèmes d'Algèbre est un des meilleurs traitant ce sujet. De nombreux auteurs andalous en ont donné de bons commentaires dont un des meilleurs est celui d'Al Qurashi (de Bougie)"

---

[1] Voir la chronologie en page 12.

[2] Sous le règne d'Ibn Abi' Amir (976-1002)

[3] Personnes enseignant les sciences religieuses: Coran et Hadith (ensemble de textes prophétiques expliquant le Coran).

Toutefois, les savants de l'Occident ont eu leurs **propres contributions** au développement des mathématiques, voire leur **propre école** mathématique. Ainsi, les oeuvres occidentales se sont trouvées à leur tour, étudiées et commentées en Orient. Ce changement est clairement mis en évidence par M.Souissi [4] :
"Les savants occidentaux qui, auparavant, profitaient du pèlerinage pour étendre leur savoir, en assistant aux cours des maîtres éminents de l'Orient, servent dorénavant d'agents de propagande de la science de l'Occident".

A cette époque, **l'Occident musulman** est très actif, **sans frontière**. Les oeuvres et les savants passent de Bougie à Marrakech, en Andalousie. Les savants se déplacent d'un centre à l'autre. Les commentateurs d'Ibn al-Banna' en sont un exemple, comme les trois mathématiciens suivants qui vont s'installer au Maroc : al-Masrati (m 1344) originaire de Lybie, Ibn Qunfudh (m 1407) d'Algérie [13] et [6 p 35], Ibn Haydur de Bougie (m 1413). Les ouvrages, écrits dans un centre, sont étudiés et commentés dans plusieurs autres centres. Ainsi, le livre d'algèbre de l'andalou Ibn Badr (XII^{e} siècle) est enseigné à Fès et Ceuta, le *Talkhis* d'Ibn Al-Banna' est commenté à travers tout l'Occident musulman, on connaitrait 28 commentaires de celui-ci !

Cette liberté d'échanges favorise la mise en place d'une **terminologie commune**, une concurrence des critiques et des commentaires, et explique sans doute l'élaboration d'un **symbolisme propre** au Maghreb (voir page 22).

L'activité mathématique du Maghreb est d'une grande importance pour le développement des mathématiques en Occident chrétien. La **circulation des connaissances entre l'Occident chrétien et l'Occident musulman** est manifeste. Donnons en exemple, le célèbre mathématicien italien Léonard de Pise (1175-1250) connu sous le nom de **Fibonacci.** Il séjourne au Maghreb à Bougie où il étudie les mathématiques sous la direction d'un maître arabe, puis voyage en Syrie, en Egypte, en Grèce et en Sicile, pays sous domination arabe. Ses connaissances sont consignées dans cinq ouvrages ; le premier, écrit en 1202 est intitulé, le *Liber Abaci*, le *livre de l'Abaque* [14] et [6 p 53]. Citons encore l'oeuvre d'**al-Hassar**, mathématicien du Maroc du XII^{e} siècle, traduite en hébreu par un mathématicien français Moïse Ben Tibbon à Montpellier en 1271 [4 p 35]. Mentionnons encore, le mathématicien français de Provence, Lévi Ben Gerson, qui en 1321, année de la mort d'Ibn al-Banna' rédige en hébreu, un livre dont les résultats en combinatoire laissent à penser, comme le suggère A.Djebbar, qu'il a une connaissance directe des propriétés établies par les mathématiciens du Maghreb [8 p 42].

Il est donc légitime de se demander jusqu'à quel point les ouvrages d'Ibn al-Banna' ont contribué au développement des mathématiques dans l'Occident chrétien. Cette question demeure un terrain d'investigation pour l'histoire des sciences.

	ESPAGNE	MAGHREB		
660	Umayyaddes (660-750)			660
700				700
		Rustamides (777-909)		
800	*Cordoue* Umayyades d'Espagne (756-1031)	Idrissides (809-974)	Aglabides (800-909) *Kairouan*	800
900		*Fès*	Fatimides	900
1000	Reyes de Tayfas (1031-1100)	Almoravides	Zirides (972-1152) Hammamides (1015-1052)	1000
1100	Almoravides (1039-1147)			1100
1200	*Marrakech* Almohades (1130-1267)			1200
1300		*Fès* Mérinides (1213-1465)	*Tunis* Hafsides (1228-1574)	1300
1400	Nasrides (1230-1492) *Grenade*	*Tlemcen*		1400
1500		Abdalwadides (1235-1557)		1500
1600		*Marrakech* Cherifs sa'adiens (1554-1659)		1600
1700		*Fès* Cherifs alawites (1666 jusqu'à nos jours)		1700

La contribution d'Ibn al-Banna'.

par Djamel Aissani.

Ibn al-Banna' al-Murrakushi (1256 -.1321) est le mathématicien maghrébin le plus connu des XIII^{e} - XIV^{e} siècles[4]. Il est entré dans la légende, immédiatement après sa mort, en raison notamment de ses connaissances dans le domaine des sciences occultes. Ibn al-Banna' était également versé en jurisprudence, en linguistique et en soufisme[5]. Sa production, d'une centaine d'ouvrages, englobe tous ces domaines.

Trois aspects de sa contribution mathématique ont attiré l'attention des spécialistes de l'histoire des sciences :

- l'algèbre,
- la théorie des nombres en liaison avec l'analyse combinatoire,
- les applications des mathématiques (astronomie, arpentage, héritages).

Les travaux d'Ibn al-Banna' vont avoir un impact considérable dans le Monde musulman. Ils vont notamment revitaliser les études mathématiques dans les principaux centres maghrébins. [6]

Avant de nous attarder sur les principaux éléments de sa contribution mathématique, il nous semble essentiel de situer le milieu culturel et scientifique de la région dans laquelle va intervenir d'Ibn al-Banna'.

Le contexte culturel des XIIè - XIIIè siècles.

Quelques décennies auparavant, **Marrakech** est la capitale d'un vaste empire qui englobe tout l'Occident musulman. Il s'agit de l'empire almohade (voir ci-contre) qui s'étend de l'Espagne jusqu'à l'Ifrikiya. Après sa dislocation, c'est **Fès** qui devient le siège du pouvoir mérinide. Ces deux villes dans lesquelles Ibn al-Banna'[7] va former la plupart de ses élèves sont alors parmi les centres culturels et scientifiques les plus importants de la planète, comme l'illustrent les faits suivants :

---

[4] Voir une biographie succincte en page 16.

[5] Soufisme: ascétisme religieux de l'Islam. L'Islam orthodoxe se montre hostile à ce mouvement qui s'épanouit surtout du IX ème au XII ème siècle.

[6] Marrakech, Fès, Tlemcen, Bougie, Constantine, Tunis, notamment par le biais de ses élèves (al Ludja`i, Ibn Safwan, al Abili, Abu l'Abbas Ahmed,...), et de ses commentateurs (Abu Zakariya al Gharnati, Ibn Qunfudh, al Qalasadi, Ibn Marzuk,...). En particulier ses travaux vont être à l'origine d'une importante école de mathématique à Tlemcen, grâce à son disciple al Abili qui initiera Ibn Khaldun aux mathématiques.

[7] Il est souvent invité à Fès par les rois mérinides avec lesquels il entretient des liens privilégiés (en raison notamment de ses connaissances dans le domaine des sciences occultes).

- En 1153 le grand philosophe **Ibn Rushd, dit Averroès,** arrive à **Marrakech**. Ses discussions philosophiques avec le sultan almohade sont célèbres et il semble que ce soit sous l'impulsion du vizir de ce dernier qu'il entreprend son fameux commentaire d'Aristote.
- En 1262, meurt à **Marrakech**, le célèbre astronome **Abu l'Hassan Ali**. L.A.M. Sédillot affirme, dans l'introduction de la première traduction de *Collection des commencements et des fins*, que ce traité d'Abu l'Hassan Ali est le plus complet qui ait été composé sur ce sujet dans le monde musulman.
- Le savant juif **Maïmonide** (1135 - 1204) est notamment connu pour avoir évoqué au cours de sa polémique contre le *kalam*[8], la propriété asymptotique de l'hyperbole [9][10]. Il semble que ce soit durant sa période maghrébine de **Fès**, qu'il ait acquis l'essentiel de sa formation mathématique.

Le lien direct entre ce milieu scientifique exceptionnel et la période d'Ibn al-Banna' est illustré par le mathématicien **Ibn Mun^{c}im** (m 1228). En effet, l'un des disciples d'Ibn Mun^{c}im sera le professeur d'Ibn al-Banna', ce qui influencera la contribution d'Ibn al-Banna', dans le domaine de l'analyse combinatoire et des nombres figurés [8].

Les principaux ouvrages d'Ibn al-Banna'.[10]

Parmi la nombreuse production d'Ibn al-Banna', trois ouvrages fondamentaux retiennent l'attention des historiens des mathématiques. Ce sont dans l'ordre chronologique de rédaction :

- Le ***Kitab** al-Usul wa l-Muqqadima fi l-Jabr wa l-Muqqabala* [2]. Cet ouvrage[11] reprend, avec une présentation différente, les thèmes essentiels de l'algèbre d'Abu Kamil[12] (m 930).

- Le ***Talkhis** A'mal al-Hisab* [3],[4] , qui est un cours dicté à ses élèves. Il s'agit d'un précis relatif aux opérations de calcul. Cet ouvrage a joué un rôle fondamental dans l'enseignement, comme le prouve le nombre très important de ses commentaires. Son principal commentaire, le *Raf^{c} al-Hijab,* a été rédigé par Ibn al-Banna' lui même.

- Le ***Raf^{c} al-Hijab*** [1], rédigé vers 1302. Ce commentaire ne doit pas être rangé parmi les commentaires classiques. En effet, Ibn al-Banna' n'a pas voulu le composer pour expliquer le contenu mathématique du *Talkhis*, mais plutôt pour "*défendre son projet mathématique,*

8 *'ilm al kalam*: "science à laquelle il appartient d'établir solidement les croyances religieuses en apportant des preuves et écarter les doutes".
9 Pour opposer les limites de l'imagination aux pouvoirs de l'intelligence démonstrative.
10 Pour plus de détails, voir page 16 et suivantes.
11 Ce pourrait être un commentaire autorisé du cours d'algèbre d'un mathématicien de Bougie, al Qurashi (m 1183), mais la question d'un éventuel plagiat est encore l'objet de débats [13 p 89].
12 *The algebra of Abu Kamil*, Martin Levey, The University of Winconsin Press, Madison, Milwaukee, and London; 1966.

donner les raisons de son choix de la matière mathématique contenu dans le Talkhis et expliquer certaines de ses formulations ayant fait l'objet de critiques". Il faut donc le considérer comme un complément théorique du *Talkhis*.

Etat des recherches sur Ibn al-Banna'.

La lecture d'un passage sur les mathématiques dans la *Muqqadima* du célèbre sociologue maghrébin Ibn Khaldun [9] va être le point de départ des premières recherches sur les sources mathématiques et l'oeuvre d'Ibn al-Banna'. Dès le milieu du XIXè siècle, ces recherches vont concerner:

- La recherche des sources bio-bibliographiques et mathématiques,
- La détermination de l'apport personnel,
- Les éditions et les traductions de textes.

Trois périodes nous paraissent importantes:

• La deuxième moitié du XIXè siècle:

Après F. Woepcke en 1854, Aristide Marre va publier en 1865 la première traduction du *Talkhis* [3], puis une traduction de la principale biographie d'Ibn al-Banna' [7]. Le *Talkhis* va être ensuite au centre des études mathématiques, notamment lorsque H. Suter va publier ses travaux sur le mathématicien maghrébin du XIIè siècle al Hassar[13]; en effet, le *Talkhis* serait un abrégé du *Kitab al Bayan* d'al Hassar[13].

Au début du XXè siècle, Sanchez-Peres [12] va essayer de mettre en évidence l'originalité des travaux d'Ibn al-Banna' dans le domaine de l'approximation des racines, notamment:

$$\sqrt{a^2+r} \cong a+\frac{r}{2a} \text{ pour } r < a \qquad \sqrt{a^2+r} \cong a+\frac{r}{2a+1} \text{ pour } r > a.$$

• Les années d'avant la deuxième guerre mondiale:

C'est en 1938 que H.P.J. Renaud va apporter des éléments nouveaux grâce aux sources bio-bibliographiques marocaines qui lui sont accessibles. En particulier, l'analyse d'un commentaire du *Talkhis*, rédigé par un savant constantinois Ibn Kunfudh, le *Hatt an-Niqab*, va lui permettre de clarifier les rapports d'Ibn al-Banna' avec les rois mérinides et donner d'importantes informations sur ses maîtres, ses élèves et ses commentateurs [11].

[13] C'est le point de vue d'Ibn Khaldun et de plusieurs autres historiens. Cependant M. Aballagh dans [1] propose une autre interprétation.

• **Les années 60 - 90:**

C'est à la fin des années soixante que le tunisien M. Souissi publie une nouvelle traduction du *Talkhis* [4]. Cette dernière est bien sûr plus complète que celle d'A. Marre, car basée sur l'analyse de plusieurs manuscrits et commentaires aujourd'hui disponibles.

Dans les années quatre-vingt,

- al Khattibi publie à Rabat une édition de l'ouvrage d'Ibn al-Banna' sur le calcul des aires,
- A.Saïdan publie à Amman le *Kitab al Maqalat fi l-Hisab*,
- L'édition critique du *Raf^{c} ` al Hijab* viendra en 1988 par le biais de M. Aballagh,
- celle du *Kitab al Usul* sera faite par A. Djebbar en 1990.

Biographie d'Ibn al Banna.[14]

Né à Marrakech en 1254 ou 1256, Abu L-^{c}Abbas Ahmed ben Mohamed ben U^{c}tman Al Azdi Al Murrakuchi est connu sous le nom d'Ibn al-Banna, nom signifiant fils d'architecte. Issu d'une famille bourgeoise de Marrakech, il bénéficie d'une éducation très complète auprès des Sheikhs et des U^{c}lama, savants trés connus à l'époque, d'abord à Marrakech puis à Fès.

Parmi ses **professeurs**, on cite:

• Ibn Abdellah Alhazwiri (m 1279) et son frère Abn Zayd (m 1306) qui l'ont initié à la vie mystique.

• Ibn Hajala (non connu) fut son professeur de mathématiques.

• Al -Qadi ash- Sharif, un des élèves d'**Ibn Mun'im** (m 1227) fut son professeur d'arabe et sans doute un lien entre les deux mathématiciens de Marrakech.

Ibn al-Banna **enseigna** ensuite à Marrakech, où il a formé de nombreux mathématiciens. Citons:

• Abd ar- Rahman al-Luja'i (m 1371) qui eu lui-même pour élèves: **Ibn Qunfudh** (m 1407) et **Ibn Haydur** (m 1413), commentateurs du *Talkhis* d'Ibn Al-Banna

• Al-Abili (m 1356) professeur d'**Ibn Khaldun** (m 1406).

• Abdelaziz Al Hawari **Al Misrati** (m vers 1344 ou 1345) le seul des élèves directs d'Ibn Al-Banna à avoir écrit un commentaire du Talkhis.

En raison de ses connaissances en astrologie, Ibn al-Banna fit plusieurs séjours à Fes sur la demande des rois mérinides. Il mourut en 1321 à Marrakech.

[14] Informations données par Aballagh [1 p 54] d'après deux commentaires du *Talkhis* d'Ibn Al-Banna: celui d'**Ibn Haydur** (m 1413), *Attamhis fi sharh a Thalkis*, et celui d'**Ibn Qunfudh** (m 1407) *At Talkhis fi sharh At Talkis*.

Plan des principaux écrits d'Ibn al-Banna'.

Ibn Al-Banna' a laissé 120 écrits dans divers domaines, parmi ceux-ci, 82 oeuvres dans les différentes branches du savoir scientifique : algèbre, arithmétique, géométrie, science des héritages ... etc[15]. Toutes les oeuvres d'Ibn al-Banna' sont caractérisées par la concision, choix qu'Ibn al-Banna' lui-même justifiera[16]:

"J'ai cherché la concision dans mes exposés.
Sachant que l'exactitude réside dans la concision."

Nous retenons pour cette étude centrée sur l'équation du second degré - les approximations de racines - les nombres figurés - le concept de nombre, les trois écrits essentiels: le ***Kitab al Jabr***, le ***Talkhis***, le ***Raf^c al-Hijab***. Pour que l'importance du thème considéré soit considéré à sa juste valeur et resitué dans son contexte mathématique, nous donnons ci après le plan de chacun de ces écrits.

---

[15] D.Lamrabet donne une liste compléte des titres de ces écrits et mentionne, pour certains, la localisation des manuscrits [13 p 83].

[16] Extrait du poème cité par M.Souissi [4 p 18].

Kitab al Usul wal-Muqaddimat Fil-Jabr.

Livre des fondements et des préliminaires de l'art de l'algèbre et la muqabala.

Le *Kitab al Jabr* s'inscrit dans la tradition d'al-Khwarizmi et d'Abu Kamil et porte les marques de l'influence des prédécesseurs. L'apport propre d'Ibn al-Banna' au sein du *Kitab al Jabr* n'est pas encore clairement dérerminé. Ibn al-Banna' en précise lui-même le contenu [2 p 661]:
« Ceci étant, j'ai composé ce livre sur le Jabr et la Muqabala et je l'ai établi en deux parties, une partie sur les fondements et les préliminaires sur lesquels reposent les opérations de l'algèbre et une partie sur des problèmes <d'algèbre> sur lesquels s'exercera l'étudiant et par lesquels il deviendra attentif à la manière de procéder dans tout problème posé. »

Plan[17] du Kitab al Jabr. *(Edition critique de A.Djebbar)*

Première partie.
- *1ère section: Sur les fondements numériques.*
  - Chapitre I: Sur les définitions et rappels.
  - Chapitre II: Sur le produit.
  - Chapitre III: Sur la division.
  - Chapitre IV: Sur l'extraction de racine.
  - Chapitre V: Sur l'addition.
  - Chapitre VI: Sur la soustraction.
- *2ème section: Sur les inconnues.*
  - Chapitre I: Sur le produit.
  - Chapitre II: Sur l'extraction de racine.
  - Chapitre III: Sur la division.
- *3ème section: Sur les équations.*
  - Chapitre I: Sur la résolution des types simples.
  - Chapitre II: Sur la résolution du quatrième type d'équation.
  - Chapitre III: Sur la résolution du cinquième type d'équation.
  - Chapitre IV: Sur la résolution du sixième type d'équation.

Deuxième partie.
- *1ère section: Sur les problèmes rationnels.*
  - Chapitre I: Sur les problèmes de dizaines.
  - Chapitre II: Sur les problèmes des hommes.
  - Chapitre III: Sur les problèmes de biens.
- *2ème section: Sur les problèmes irrationnels.*
  - Chapitre I: Sur les problèmes de dizaines.
  - Chapitre II: Sur les problèmes de biens.

17 Détail intéressant : dans le manuscrit d'Istanbul [1] figure une introduction aus *Eléments* d'Euclide, qui permet de justifier les résultats ou les opérations exposés dans le *Kitab al Jabr*.

Talkhis a'mal al-hisab.

Brève exposition des opérations du calcul.

C'est l'oeuvre la plus connue d'Ibn al-Banna'. Elle fut largement commentée au Maghreb comme en Andalousie et en Orient et très utilisée dans l'enseignement par ses successeurs.

Dans le *Talkhis*, Ibn Al-Banna' énonce une suite de résultat en l'absence totale de toute justification. Ibn Al-Banna' sera amener à se justifier. Il rédigera a cet effet le *Raf^c al-Hijab*, ensemble de démonstrations et justifications des résulats énoncés dans le *Talkhis*.

Plan du Talkhis *(Edition critique de Souissi)*

LIVRE PREMIER
1ère partie: Opérations relatives aux nombres entiers.
Chapitre I : Dififférentes catégories de nombres; ordres.
II : Addition.
III : Soustraction.
IV : Multiplication.
V : Division.
VI : Rétablissement et réduction.
2ème partie: Des fractions.
Chapitre I: Nomenclature des fractions et recherche de leurs dénominateurs.
II : Addition et soustraction des fractions.
III Multiplication.
IV : Multiplication.
IV : Division et dénomination.
V : Rétablissement et réduction.
VI : Conversion.
3ème partie : Des radicaux.
Chapitre I : Extraction de la racine carrée d'un nombre entier on fractionnaire.
II : Addition et soustraction de radicaux.
III : Multiplication des radicaux.
IV : Division et dénomination.
LIVRE II : Lois qui permettent d'obtenir l'inconnue recherchée à partir des connues supposées.
1ère partie :
Chapitre : I : Opérations par rapports.
II : Double fausse position ou méthode des plateaux de la balance.
2ème partie : al-gabr wal muqabalah.
Chapitre I : Définitions - Les six modèles d'équations.
II : Résolution des six modéles.
III : Addition et soustraction.
IV : Multiplication - Exponienciation.
V : Division.
Section complémentaire : exercices traités.

Le Raf^c al-Hijab An Wujuh A mal al-hisab

Le lever du voile sur les différents procédés de calcul.

Le *Raf^c'al-Hijab* est une oeuvre d'un niveau mathématique assez élevé qui reprend les divers résultats énoncés dans le Talkhis, mais Ibn al-Banna' démontre ici tous les résultats avancés. Ce livre atteste d'une sérieuse culture philosophique et de connaissances mathématiques extrêmement approfondies pour l'époque.

Plan du Raf^c al-Hijab. *(Etude critique d'Aballagh)*

Introduction.

LIVRE I

Première partie : Sur les entiers.

Premier chapitre : De la description du nombre et de ses ordres[18].

Deuxième chapitre : L'addition[19].

Troisième chapitre: La soustraction.

Quatrième chapitre : Le produit[20].

Cinquième chapitre : La division.

Seconde partie : Sur les fractions.

Troisième partie : Sur les racines[21].

LIVRE II

Première partie : Sur les rapports.

Deuxième partie : Sur L'algèbre.

Premier chapitre : Sur les procédés algébriques[22].

Second chapitre : Sur l'addition et la soustraction en algèbre.

Troisième chapitre : Sur le produit en algèbre.

Quatrième chapitre : Sur la division en algèbre.

---

18 On trouve ici la réflexion autour du concept de nombre. Voir en 5ème partie de ce document.

19 On trouve ici l'étude des nombres figurés. Voir en 4ème partie de ce document.

20 On trouve ici les identités utilisées dans la résolution des équations du second degré. Voir en 2ème partie de ce document.

21 On trouve ici les extractions et approximations de racines carrées. Voir en 3ème partie de ce document.

22 On trouve ici la résolution des équations du second degré. Voir en 2ème partie de ce document.

Le *Raf^{c} al-Hijab* était reconnu par ses commentateurs comme une oeuvre de haut niveau et particulièrement difficile. Citons à ce propos Ibn Khaldun [4 p7]

"Ibn al-Banna' al Marrakusi a, dans la science du calcul, un Talhis (Traité résumé) où il précise les lois relatives aux opérations. Il en a fait, ensuite, un commentaire dans un ouvrage qu'il a intitulé Kasf al-Higab (Lever du Voile), ouvrage ésotérique pour les débutants, en raison des démonstrations rigoureuses qu'il expose. C'est un livre de grande valeur ; nous avons été témoin que les cheikhs de notre époque en faisaient grand cas, et il est bien digne de cette considération. Les difficultés qu'on y rencontre proviennent des démonstrations, basées sur les fondements des mathématiques ; quant aux problèmes énoncés et aux solutions proposées, tout est clair ; mais lorsqu'il s'agit d'en donner l'explication logique, ce qui revient à établir le pourquoi de ces opérations, on a de la peine à être suivi et compris, difficulté qu'on ne rencontre pas au moment où l'on donne la solution pratique des problèmes."

Peine que nous avons partagée avec tous nos prédécesseurs accrochés à cet écrit....., l'absence de tout symbolisme rendant bien évidemment opaques les écrits d'Ibn al-Banna'.
Est-ce à dire qu'aucun symbolisme n'existait ? Nous nous interrogerons sur cette question avant d'analyser de plus près quelques aspects de ces écrits.

Ibn al-Banna' et le symbolisme[23].

par Abdelaziz Boufrioua.

Aucun des textes d'Ibn al-Banna' que nous étudions ici, et plus largement que nous avons en notre possession, ne comporte de symbolisme arithmétique ou algébrique[24]. En l'absence de notations, l'accès au sens demande de notre part un effort intellectuel extrêmement intense. En particulier, la dilution de l'information nous amène rapidement à retranscrire les textes en usant de l'écriture symbolique contemporaine : l'information est ainsi plus concise et il devient plus aisé de mener un raisonnement déductif à partir de celle-ci. Nous nous éloignons ainsi de la pratique des mathématiciens de l'époque. Mais comment procédaient ces mathématiciens en l'absence de symbolisme ? Tout symbolisme était-il d'ailleurs absent ?
En réponse à ces questions nous souhaiterions faire deux types de remarques.

La première remarque est liée à notre propre expérience d'enseignement. En effet, nous n'avons pas en mémoire "vive" tous les savoirs mémorisés par les mathématiciens de cette époque ; les diverses formulations des identités remarquables en sont un exemple particulièrement parlant (voir page 38). Un bachelier scientifique d'aujourd'hui donne immédiatement sens à l'information « Au carré du premier terme, j'ajoute le carré du deuxième et enfin le double produit ». Ceci correspond à un savoir-faire mémorisé et les imprécisions dans la formulation ne portent pas à conséquence pour la compréhension. Une telle information n'est par contre pas mémorisée au stade réflexe pour le lycéen en difficulté et tout un effort d'analyse de l'information, avec retour au symbolisme, devient nécessaire pour lui donner sens. Un manque de familiarité de même nature se retrouve lorsque nous rencontrons l'une des multiples formulations qu'utilise Ibn al-Banna' et ses contemporains pour les identités.

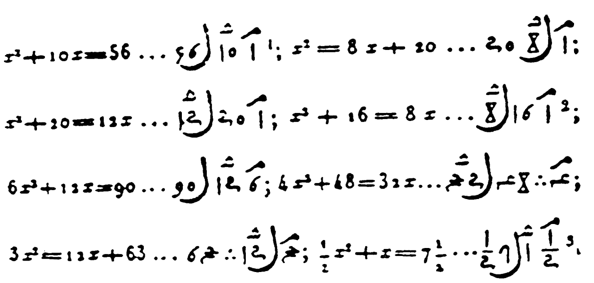
Le deuxième aspect concerne l'emploi du symbolisme dans les mathématiques arabes. Le mode d'expression des mathématiques à l'époque d'Ibn al-Banna' ne nous est connu qu'à travers quelques uns des manuscrits qui nous sont parvenus. Sans doute, avec encore plus de force qu'aujourd'hui, les contraintes imposées dans la rédaction d'ouvrages scientifiques mènent à exclure l'usage du symbolisme. Aballagh propose d'expliquer ces exigences « par l'importance acquise par la langue arabe, au sein de la civilisation arabo-musulmane, comme langue de la révélation; ce qui la fait considérer comme le moyen d'expression le plus clair ».[1 p 34].

Par ailleurs, l'existence et le type de symbolisme utilisé par Ibn al-Banna' et ses contemporains dans la pratique ordinaire, est encore l'objet de nombreux débats et recherches.

---

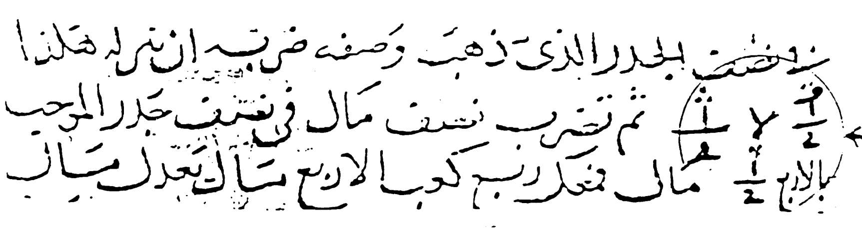
23 Prenant appui sur les travaux de A.Djebbar [24] nous avons antérieurement abordé la question du symbolisme en algèbre dans notre première brochure [10 p 40-43]

24 Hormis le tableau des nombres figurés.



Quelques exemples de la symbolique d'Al Qalasadi (m 1486) pour les équations du second degré, donnés par Youschkevitch [20 p 199].

Il semble certain que le symbolisme utilisé par Al Qalasadi (m 1486) -voir l'encadré ci-dessus- dans ses ouvrages mathématiques à visée pédagogique [25 p 9],ne soit pas sa propre création et renvoie à une pratique largement antérieure. Si nous nous en référons à A.Djebbar [24, 2ème chapitre], qui a analysé les quelques traces de ce symbolisme dans les divers écrits du Maghreb, des écrits de faible importance, d'auteurs anonymes, probablement destinés à l'enseignement, comportent un symbolisme et accréditent l'idée de l'emploi d'un symbolisme au XIII^{e} siècle dans la pratique des mathématiques; l'usage de la table à poussière ne fournissant hélas pas les traces nécessaires à vérifier son emploi. Ci-dessous, la reproduction d'un manuscrit d'Ibn al-Yasimin (m 1204) accrédite ce propos.



Exemple d'usage impromptu de symbolisme algébrique dans un écrit d'Ibn al-Yasimin (m 1204), donné par D.Lamrabet [13 p 69]

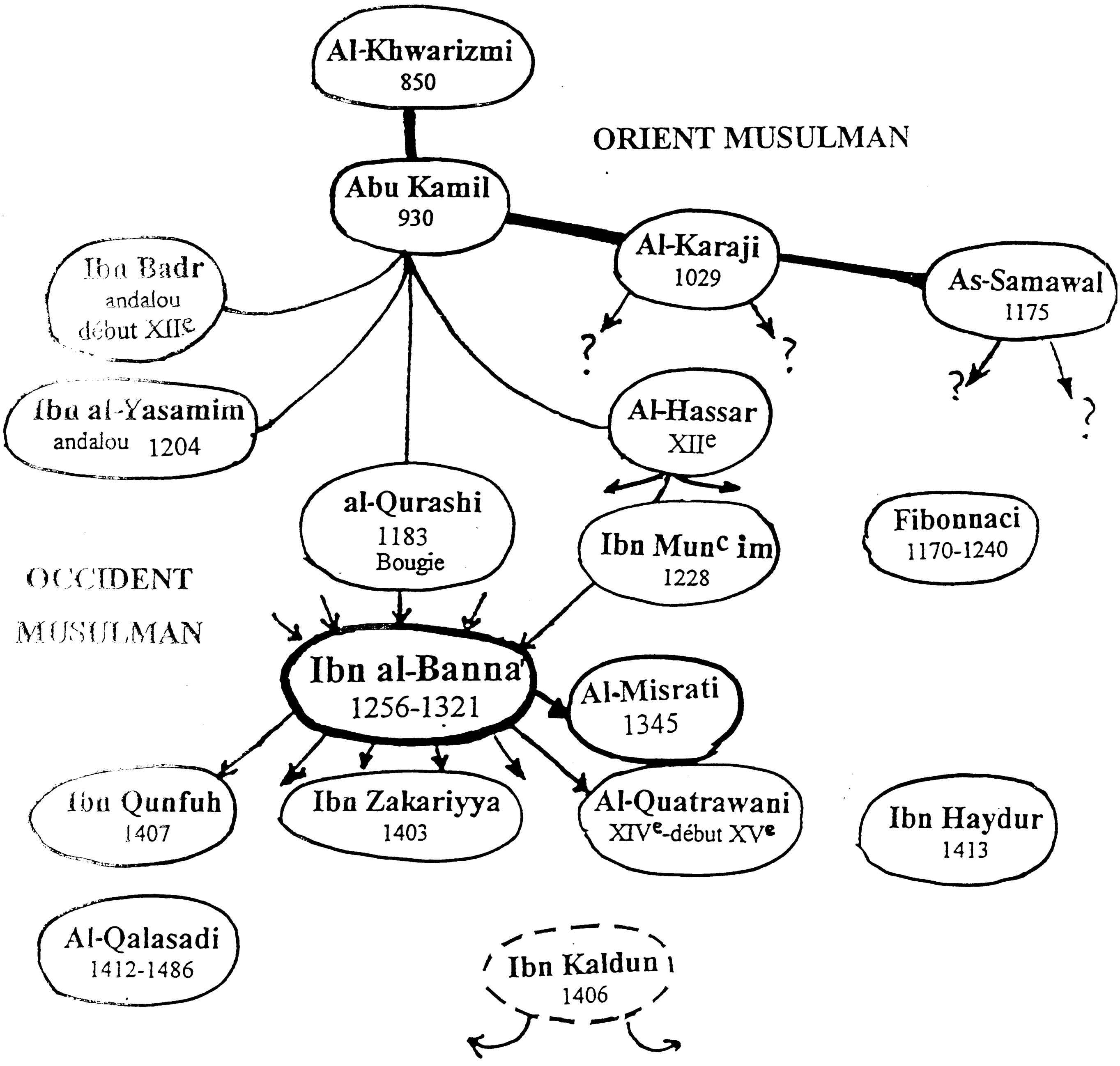
Ces points de vue ne peuvent que trouver confirmation dans ce propos d'Ibn Kaldun (m 1406), cité par Aballagh, à propos de la démarche d'Ibn al-Banna' dans le Raf^{c} al-Hijab: « *il y a exposé avec concision les preuves des calculs en substituant aux* ***symboles conventionnels*** *des justifications théoriques explicites* ». **Quels étaient donc les symboles conventionnels à l'époque d'Ibn al-Banna'?**

L'usage d'un symbolisme chez Ibn al-Banna' comporte encore une large part de mystère. En attendant que la démonstration d'Ibn al-Banna' comportant une écriture symbolique et mentionnée par Ibn Kaldun (m 1406) ne soit retrouvée [20 p 104], il nous faut nous contenter des rares indices et des nombreuses hypothèses formulées par les spécialistes, pour concevoir la pratique mathématique d'Ibn al-Banna'.

2ème partie: Ibn al-Banna' et les équations du second degré.

par Youssef Bensmina et Elisabeth Hébert.

Ibn al-Banna' et l'algèbre: ses prédécesseurs et ses successeurs.



Ibn al-Banna' et la transmission de l'algèbre[1].

Sans ignorer l'existence de germes d'une démarche algébrique chez les babyloniens, grecs et indiens, on s'accorde à dire que l'algèbre nait véritablement avec la civilisation arabo-islamique, et plus précisément avec l'école d'al-Khwarizmi (m 850). Se succèdent alors, entre les IX^{e} et XIV^{e} siècles, plusieurs écoles: l'école d'Abu Kamil (m 930), celle d'al-Karaji (m 1029) et enfin celle d'as-Samawal (m 1175). La relation de ces écoles de l'Orient musulman avec l'Occident musulman est manifeste pour les écoles d'al-Khwarizmi et Abu Kamil, mais semble beaucoup plus parcellaire et n'est pas clairement établie, pour les écoles d'al-Karaji et as-Samawal.

Sur l'implantation de l'algèbre en Occident musulman, peu d'informations sont à ce jour à notre disposition, mais celle-ci semble avoir été précoce -dès le début du IX^{e} siècle- comme l'attestent certains documents andalous. Des différentes contributions au développement de l'algèbre dans cette région, nous retiendrons quatre noms de mathématiciens du XII^{e} siècle, certains ayant nourri le démarche algébrique d'Ibn al-Banna', pour d'autres une éventuelle filiation reste encore à établir.

- **Ibn Badr** est un mathématicien andalou dont on connait peu de choses, si ce n'est qu'il a écrit un traité d'algèbre[2] intitulé *le Kitab Ikhtisar al-Jabr wa l-Muqabala,* qui résume les procédés algébriques et s'inscrit dans la tradition d'al-Khwarizmi et d'Abu Kamil. Il est établi que cet ouvrage a circulé au Maghreb, mais pour sa part Ibn al-Banna' n'y fait jamais référence.

- **Ibn al-Yasamin** d'origine andalouse et mort assassiné en 1204 à Marrakech, est passé à la postérité de par son poème algébrique énonçant les algorithmes de résolution des six équations canoniques et son poème sur les irrationnels[3]. Ces poèmes remplissaient la fonction d'aide-mémoire et ont été largement diffusés et commentés au Maghreb, néanmoins le niveau mathématique de ceux-ci était moindre que les traités de cette période.

- Abu-Bakr **al -Hassar** mathématicien marocain, probablement originaire de Salé, est très connu par son livre *Al Hassar A-Shagir,* dit " le petit livre d'al Hassar ", livre qui sera traduit par un mathématicien français de Montpellier en 1271, Moïse Ibn Tibbon. Ce livre,

[1] La plupart des informations données dans cette partie et et dans le schéma ci-contre sont issues d'un article d'A.Djebbar [9] qui donne de multiples compléments. Plusieurs de celles-ci ont pour source le témoignage d'Ibn Khaldun dans *La Muqaddima (les Prolégomènes).*

[2] Une étude critique et une traduction en espagnol de ce traité ont été publié en 1916 par Sanchez Perez.

[3] Il existe une traduction françaiese et une édition critique du seul poème sur les irrationnels, mentionnée par T.Zemouli dans [26 p195]

caractérisé par l'absence de recours au langage géométrique et une conception purement algébrique des concepts de nombre et d'opérations, était destiné aux débutants. Il semble avoir connu un large succès et influencé les mathématiciens postérieurs, en particulier Ibn al-Banna' puisque le *Talkhis* serait inspiré de ce petit livre d'Al Hassar [3 p35] et que le *Raf^c al-Hijab* y opère plusieurs emprunts [30 p5] .

• Un autre mathématicien du XII^e siècle semble avoir eu une influence directe sur la production algébrique d'Ibn al-Banna', il s'agit **d'Al Qurashi**, mathématicien d'origine andalouse et ayant vécu à Bougie. Celui-ci a fait un commentaire du classique traité d'algèbre d'Abu Kamil. Cet ouvrage, encore non retrouvé, aurait été largement repris dans le *Kitab al-Jabr* d'Ibn al-Banna'.

Prenant appui sur cette tradition, la plus grande contribution à l'école maghrébine dans le domaine de l'algèbre fut sûrement l'école d'Ibn al-Banna'. Celle-ci se caractérise par **l'affranchissement total de toute représentation géométrique en algèbre, l'extension des opérations de l'algèbre au zéro, de nouvelles démonstrations pour des problèmes classiques, enfin, une intervention de l'algèbre en géométrie par le biais des équations.**

De nombreux mathématiciens commenteront les ouvrages d'Ibn al-Banna', soit en faisant leurs les propos du maître, soit en les enrichissant d'autres apports antérieurs ou encore d'apports inédits. Ibn Kaldun (m 1406) nous livre de multiples informations bio-bibiographiques sur cet “ art de l'algèbre ” dans sa *Muqaddima.*

Caractéristiques de la résolution des équations du second degré chez al-Khwarizmi et Abu-Kamil.[4]

Le livre d'**al-Khwarizmi** (780-850) intitulé " *Bref ouvrage du calcul d'al- jabr et d'al muqabala* " marque la naissance de l'algèbre. Du terme al-jabr est d'ailleurs né le terme algèbre, terme qui fait son apparition au XIV^e siècle. Ce livre servira dans les transactions commerciales, les problèmes d'arpentage et les partages d'héritage. Il sera largement diffusé et peut être considéré comme la référence de la première école mathématique arabo-islamique. Certains de ses problèmes caractériseront toute la tradition mathématique arabo-islamique, comme les problèmes des dizaines, des hommes et des biens (voir page 46). Ce livre constituera la source, par excellence, pour tous les successeurs d'al-Khwarizmi. Il sera traduit en latin dès 1145, mais nous ne disposons pas aujourd'hui d'une traduction française intégrale de ce livre fondamental.[5]

Comme il apparait dans la traduction d'un extrait de cet ouvrage (voir page 32), al-Khwarizmi considère deux opérations algébriques **al-jabr** et **al-muqabala**.

- al-jabr correspond à l'opération de transposition des termes retranchés d'un membre d'une équation dans l'autre, de telle sorte qu'il n'existe plus de part et d'autre que des termes ajoutés.
- al-muqabala est la "simplification" des termes semblables dans les deux membres d'une équation. [13 p221]

Le sens précis de ces deux termes a évolué au cours de l'histoire des mathématiques arabes. Leurs traductions n'est donc pas stabilisée. Aujourd'hui al-jabr se traduit littéralement par réparation, il correspond à l'action de souder, coller et est particulièrement utilisé pour les os. On réduit ainsi deux objets de même nature en un seul. Au moyen âge, le mot algèbre signifiait l'art de réduire les membres luxés, et dans les langues espagnoles et portugaises, algébriste signifie encore chirurgien.[6]

Al-Khwarizmi utilise trois sortes de nombres: les nombres simples (adad ou dirham), l'inconnue (a shay' - la chose ou le gidhr - la racine) et enfin le carré (mal). Il partage les équations en deux espèces et en six types, de sorte que n'apparaissent que des grandeurs positives:

---

[4] La plupart des informations de cette partie sont issues du livre de Youskevitch, en particulier des pages 34 à 60.

[5] La dernière édition à notre disposition est en arabe: édition du Caire 1934, M. Musharrafa et M. Mursi. A notre disposition aussi, la traduction de Rosen qui est en anglais et date de 1831, ou celle de Gérard de Crémone en latin dans l'édition critique de Barnabas Hughes (1986).

[6] D'après le dictionnaire synoptique d'éthymologie française, H.Stappers, Librairie Larousse, Paris, 1926.

Les équations simples:	Les équations composées:
Type I : $ax^2 = bx$	Type IV: $ax^2 + bx = c$
Type II: $ax^2 = c$	Type V: $ax^2 + c = bx$
Type III: $ax = c$	Type VI: $bx + c = ax^2$

Les méthodes calculatoires utilisées sont probablement héritées des babyloniens, mais on y trouve également des manipulations géométriques analogues aux procédés des grecs, la résolution prenant cependant la forme d'un algorithme[7] général pour chaque type d'équation. L'extraction de toute racine est suivie de la donnée de son carré représentant l'aire de la surface cherchée. Les coefficients sont des nombres rationnels, les solutions sont des entiers, même si l'auteur fait allusion aux solutions qu'il qualifie de '"muettes" (nombres irrationnels). Tout symbolisme est absent.

On trouvera ci après, en page 32 et 33, trois extraits du *Bref ouvrage du calcul d'al-jabr et d'al muqabal a* d'al-Khwarizmi. Dans le premier passage, il opère un calcul algébrique par les opérations al-jabr et al-muqabala pour parvenir à l'équation $21 + x^2 = 10x$, équation de type V. Dans le deuxième extrait, il précise l'algorithme de résolution de cette même équation. Enfin, nous donnons la démarche utilisée par al-Khwarizmi pour résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$, équation de type IV, reprise par Ibn al-Banna' dans son *Kitabal Jabr,* et étudiée page 36.

Le livre d'algèbre d'**Abu Kamil** [21] diffère peu dans sa structure du livre d'al-Khwarizmi, mais marque de multiples progrès par rapport à celui-ci .

Avec Abu Kamil, on voit apparaître en plus des trois grandeurs classiques (nombre, racine, carré) d'autres grandeurs comme le “ k'ab ” ou cube, le “ mal-mal ” ou carré-carré, jusqu'à la huitième puissance “ mal-mal-mal-mal ”. Il utilise plusieurs inconnues et leur attribue des noms différents mais n'utilise aucun symbole. Abu Kamil utilise systématiquement des coefficients et racines pouvant être irrationnels (positifs) et applique aux inconnues et aux monômes de degré quelconque toutes les opérations effectuées auparavant avec des nombres rationnels .

Pour les équations canoniques du second degré, Abu Kamil conserve les preuves géométriques de son prédécesseur. Il explicite la résolution lorsqu'il y a deux racines positives et étudie le cas d'une racine double pour une équation de type V. Abu Kamil énonce des règles

[7] Le mot **algorithme** trouve d'ailleurs son origine dans le nom d'Al Khawarizmi, devenu **Algorithmus** nom propre latinisé et pris comme nom commun sous la forme **algorismus**.

des racines directement à partir des coefficients[8]. Avec Abu Kamil, la notion de nombre prend un sens plus large : pour la première fois des segments peuvent désigner des carrés et des nombres, ce qui signifie un renoncement aux exigences classiques des démonstrations géométriques.

Avec la traduction des *Arithmétiques* de Diophante et les travaux entrepris sur le *Livre* X *des Eléments* d'Euclide, l'algèbre abandonne progressivement ses références géométriques et subit une arithmétisation. L'école maghrébine abandonnera définivement l'utilisation de la géométrie dans la résolution des équations du second degré.

---

[8] On retouve ceci dans le *Kitab al jabr* d'Ibn al Banna. Voir page 37.

Les algorithmes de l'algébre chez al-Khwarizmi.

Problème se ramenant à l'équation $21 + x^2 = 10x$.

J'ai partagé dix en deux parties, puis multiplié chacune des deux par elle-même ;<par leur addition>, j'ai obtenu cinquante-huit.
Prends l'une des deux parties comme racine, et l'autre dix moins la racine ; puis multiplie dix moins la racine par lui-même, ce qui fait cent nombres, un carré moins vingt racines; multiplie la racine par elle-même, ce qui produit un carr é; fais ensuite la somme ; il en résulte cent et deux carrés moins vingt racines égaux à cinquante-huit. Par al-jabr, restaure à cent et deux carrés les vingt racines en moins, et ajoute-les aux cinquante-huit nombres ; il vient cent et deux carrés égaux à cinquante-huit nombres et vingt racines ; ramène ceci à un seul carré en prenant la moitié de ce que tu as. Il vient cinquante et un carré égaux à vingt-neuf et dix racines ; opère par al-muqabala en retranchant vingt-neuf de cinquante. Il en résulte vingt-et-un et un carré égaux à dix racines...
....Ce problème t'a conduit à l'un des six cas qui est : carrés et nombres égaux à des racines.

Traduction établie par D.Lamrabet [13] p 222
d'après l'édition arabe de Mashrafa et Mursi.

$\mathbf{(10 - x)^2 + x^2 = 58}$

$100 + x^2 - 20x + x^2 = 58$

$100 + 2x^2 - 20x = 58$

$100 + 2x^2 = 58 + 20x$

par **al-jabr**

$50 + x^2 = 29 + 10x$

$21 + x^2 = 10x$

par **al-muqabala**

Problème de type V :
$ax^2 + c = bx$

Formule de résolution de l'équation $21 + x^2 = 10x$.

Divise en deux les racines ; ce qui donne cinq; multiplie cinq par lui-même, tu obtiens vingt cinq ; retire les vingt et un qui sont ajoutés au carré ; il reste quatre ; extrais la racine - cela donne deux - et retire-la de la moitié de la racine, c'est-à-dire de cinq; il reste trois ; c'est la racine du carré que tu cherches et le carré est neuf. Si tu le désires, ajoute cela à la moitié de la racine, ce qui donne sept, qui est la racine du carré que tu cherches et dont le carré est quarante neuf.
Si tu rencontres un problème qui se ramène à ce cas, examine alors sa justesse à l'aide de l'addition; si tu ne le peux, tu obtiendras certainement <la solution> à l'aide de la soustraction. Parmi les trois cas dans lesquels on doit diviser en deux les racines, c'est le seul où l'on se serve de l'addition et de la soustraction. Sache en outre que si dans ce cas, tu divises en deux la racine, que tu la multiplies par elle-même et que le produit soit plus petit que les dirhams qui sont ajoutés au carré, alors le problème est impossible. Mais s'il est égal aux dirhams, la racine du carré est égale à la moitié de la racine, sans qu'on ajoute ou retire quoi que ce soit.

Traduction établie par Youschkevitch [20 p 38]
d'après la traduction anglaise de Rosen.

$\mathbf{21 + x^2 = 10x}$

$$x_1 = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21}$$

$= 5 - 2 = 3$

et $x_1^{\,2} = 9$

$$x_2 = \frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21}$$

$= 5 + 2 = 7$

et $x_2^{\,2} = 49$

Remarques

Seules les équations de type V $x^2 + c = bx$ admettent deux racines positives.

- Si $\frac{b^2}{4} < c$, alors le problème est impossible.
- Si $\frac{b^2}{4} = c$, alors $x = \frac{b}{2}$

Résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$.[9]

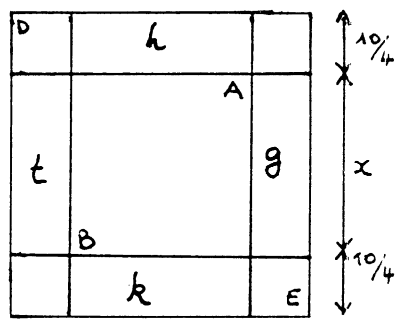
La chose est telle que ceci : le carré et dix de ses racines sont égales à trente-neuf drachmes. On obtient donc ceci : une surface carrée de côtés inconnus qui est le carré que nous voulons connaître, ainsi que ses racines. <voir la figure ci-contre>

*Soit une surface AB. Chacun de ses cotés est racine de celle-ci. Et chacun des cotés, quand il est multiplié par un nombre quelconque, donne un nombre qui est le nombre de racines ajouté au carré. Chaque coté du carré est, comme pour ainsi dire, la racine de cette surface ; donc, sachant qu'avec le carré de l'inconnu il y a dix racines, je prendrai un quart de dix qui est deux et demi. Et je ferai une surface avec chacun des cotés de la surface <carrée>. On obtient donc à partir de la première surface, qui est la surface AB, quatre surfaces égales. Pour chacune, la longueur est égale aux racines de AB et la largeur est deux et demi. Ce sont les surfaces **g, h, t, k.** Ainsi, à la surface engendrée par les racines, de côtés égaux mais inconnus , il manque à chacun des quatre angles quelque chose, et ce qui manque est la multiplication de deux et demi par deux et demi. Donc, le nombre nécessaire pour compléter la surface carrée, est deux et demi par lui-même, quatre fois. Et la somme de tout ceci est 25.*
Or, nous savons déjà, que la première surface qui est le carré et les quatre surfaces qui l'entourent, qui sont dix racines, donnent le nombre 39. Quand nous lui aurons ajouté 25, qui est l'aire des quatre carrés placés aux angles de la surface AB, alors sera complétée la plus grande surface carrée qui est la surface DE. Or nous avons déjà trouvé que tout ceci est 64. Par suite, un coté est sa racine, c'est 8. C'est pourquoi je diminuerai ceci, deux fois, du quart de dix, ce qui provient des deux extrémités du coté de la plus grande surface qui est la surface DE. Il restera son côté, 3, qui est égal au côté de la première surface, qui est AB, et est lui-même la racine de ce "carré".

Traduction établie par J Gaudier
d'après la traduction latine de G de Crémone
publiée par Barnabas Hughes. [25 p 236]

x est tel que $\mathbf{x^2 + 10x = 39}$

On cherche x^2 aire du carré et x côté de ce carré.



Soit x le côté du carré intérieur (AB) d'aire x^2.
On s'intéresse à bx dans l'expression $x^2 + bx$.
On veut $x^2 + 10x$. On considère donc les rectangles latéraux de longueur x et de largeur $\frac{10}{4} = 2.5$.
(L'aire de ces 4 rectangles est

$$4 \times \left(\frac{10}{4}\right) \times x = 10x\ )$$

L'aire de chacun des 4 coins nécessaires pour obtenir le carré extérieur est $4 \times 2.5^2 = 25$.

Or, $x^2 + 10x = 39$
Donc l'aire du carré extérieur (DE) est égale à $39 + 25 = 64$

D'où le côté du carré extérieur (DE): $\sqrt{64} = 8$.

Par suite le côté du carré intérieur (AB) est $8 - 2 \times \frac{10}{4} = 8 - 5 = 3$.

La solution est donc 3.

[9] Nous avons préféré présenter ici, la démarche adoptée par al-Khwarizmi sur l'équation de type IV, $x^2 + 10x = 39$, plutôt que sur l'équation de type V, $21 + x^2 = 10x$. En effet, d'une part la nature de la démarche d'al Khwarizmi nous semble beaucoup plus aisée à découvrir sur cet exemple, et d'autre part, c'est précisément l'équation $x^2 + 10x = 39$ que reprendra Ibn al-Banna' dans son Kitab al Jabr et que nous étudions page 36. Le lecteur qui le souhaite, trouvera une traduction faite par A.Djebbar de la démarche adoptée par al-Khwarizmi pour résoudre l'équation $21 + x^2 = 10x$ dans le document de l'IREM de Paris VII: M.A.T.H, tome 2 page 77.

Introduction aux formules de résolution du Talkhis.

deuxième section

AL ĜABR WAL-MUQĀBALAH

Les opérations qui se rapportent à cette question forment cinq chapitres.

CHAPITRE I

Signification de "al ǧabr" et de la "muqābala"
Exposition de ses différents modèles

Al ǧabr signifie réparation, comme nous l'avons indiqué dans le livre premier de cet ouvrage.

La "muqābala" consiste à retrancher chaque espèce de son semblable, de sorte qu'il n'y ait pas dans les deux membres deux quantités de même espèce .

L'équation consiste à réparer le terme négatif pour le rendre positif, à ôter, parmi les inconnues homogènes, le positif du positif, et le négatif du négatif.
L'algèbre tourne autour de trois espèces: le nombre (connu), les inconnues et les carrés.
Les inconnues sont les racines.
Le carré est le nombre obtenu en multipliant la racine par elle même. (Le nombre connu est celui qui n'est rapporté ni à une racine, ni à un carré). Ces trois espèces (de nombres) (peuvent)s'équivaloir les uns les autres, soit sous forme simple, soit sous forme composée. Il en résulte six modèles : trois simples et trois composés.

Le premier modèle des équations ***simples,*** *d'après l'usage courant, est constitué par des carrés qui équivalent à des racines.*
Dans le second des carrés sont équivalents à un nombre. Dans le troisième des racines sont équivalentes à un nombre. Parmi les trois modèles ***composés****, le premier, qui est le quatrième (dans le classement général), est tel que le nombre y soit isolé ; dans le cinquième, c'est la racine qui est isolée. Dans le sixième, c'est le carré qui est isolé.*

Traduction Souissi [4 p 91]

Voir la place de cette question dans le plan d'ensemble du *Talkhis* page 19.

Voir commentaires page 29.

Les mathématiques arabes ne disposent pas des nombres positifs et négatifs. Il faut entendre ici, retranché et ajouté pour positif et négatif. Ces expressions prenaient sens dans le cadre des opérations de l'algèbre.

Les 3 espèces de l'algèbre sont ici nommées :
ax^2 : les carrés
bx : les racines
c : le nombre

Classification.
Equations simples:
Type I : $ax^2 = bx$
Type II : $ax^2 = b$
Type III : $ax = b$

Equations composées
Type IV : $ax^2 + bx = c$
Type V : $ax^2 + c = bx$
Type VI : $bx + c = ax^2$

La classification dite courante est celle adoptée par al-Khwarizmi.

Les formules de résolution de l'équation du second degré du Talkhis.

Dans le *Talkhis*, Ibn al-Banna' expose, sans donner de procédé de résolution, les formules permettant le calcul des racines dans le cas de chaque type d'équation .

CHAPITRE II
Résolution des six modèles

Pour les trois modèles d'équations simples, tu divises par (le coefficient) des carrés (celui) de la quantité qui lui est égale, et en cas d'absence de carrés, tu divises par les racines.
Le quotient, dans le premier et le troisième modèles, est la racine ; dans le second, c'est le carré.
Lorsqu'on connaît la racine, on a le carré par multiplication de la racine par elle -même.
Lorsqu'on connaît le carré, on en déduit la racine.

Pour le quatrième modèle, la méthode consiste à prendre la moitié du coefficient des racines, à l'élever au carré, à ajouter le résultat au nombre (connu), à prendre la racine carrée de la somme ; tu retranches de cette racine la moitié du coefficient (calculée au début). Le reste est la racine .
Le sixième modèle est analogue au quatrième, en ce qui concerne la résolution ; mais, dans la dernière opération, on ajoute la moitié (du coefficient des racines) à la racine carrée de la somme ; on obtient la racine .
Pour le cinquième modèle, tu retranches le nombre (connu) du carré de la moitié du coefficient des racines ; tu prends la racine carrée du reste. Si tu ajoutes cette racine carrée à la moitié <du coefficient > tu obtiens la plus grande racine ; si tu la retranches, tu obtiens la plus petite racine. Lorsque le carré de la moitié (du coefficient des racines) est égale au nombre (connu), cette moitié est la racine ; son carré est le nombre (connu).

Traduction Souissi [4 p 92]

Pour les équations simples:

- **Type I :** $ax^2 = bx$

On a $x = \frac{b}{a}$

- **Type II :** $ax^2 = b$

On a $x^2 = \frac{b}{a}$ d'où $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$

- **Type III :** $ax = b$

On a $x = \frac{b}{a}$

La recherche des racines <u>et</u> des carrés appartient à la tradition des mathématiques arabes.

Pour les équations composées:

- **Type IV :** $x^2 + bx = c$

La racine est:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

- **Type VI :** $x^2 = bx + c$

La racine est:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}.$$

- **Type V :** $x^2 + c = bx$

Ibn al-Banna' donne deux racines:

$$x' = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x'' = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Si $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$, on a une racine double $x = \frac{b}{2}$

Remarque : a = 1

Dans les formules qu'il énonce, Ibn al-Banna' considère a = 1. Le cas a ≠ 1 est étudié dans le *Raf^c al-Hijab*, il suffit de diviser par "a" tous les coefficients.

Résolution d'une équation du second degré dans le Kitab al Jabr.

Ce chapitre du *Kitabal Jabr* s'inscrit dans la tradition des équations du second degré.

Chapitre sur la résolution <de l'équation > du quatrième type qui est la première des <équations> composées.

Sache que le procédé <permettant> de connaître la valeur de la racine, pour ce type, lorsqu'il ne contient qu'un seul carré, <consiste> à multiplier toujours la moitié du nombre des racines par lui-même puis à ajouter au résultat le nombre supposé, puis à retrancher, de la racine de la somme, la moitié du nombre de racines supposées. Le reste est la racine du carré demandée.

EXEMPLE :

*Si on dit : **un carré plus dix choses égale trente neuf**, le procédé <consiste> à multiplier la moitié du nombre des racines par lui-même, puis à ajouter le résultat au trente neuf, puis à retrancher de la racine de la somme, la moitié du nombre des racines. Ce qui reste est la valeur de la racine du carré demandée, et c'est trois.*

Le procédé pour ce type <d'équation> est le résumé d'une méthode qui lui supprime <son caractère> composé pour la ramener au troisième des types évoqués précédemment car, si l'on ajoute au carré plus dix de ses racines le carré de la moitié du nombre de racines, qui est vingt cinq, la racine du résultat sera égale à la racine du carré plus la moitié du nombre des racines. Cela est clair, d'après ce que nous avons dit dans le chapitre du produit dans la première partie <du livre> : "le carré d'un nombre est égal aux carrés de ses deux parties plus deux fois le produit de l'une par l'autre."

On considère alors vingt cinq, qui est le carré de la moitié du nombre des racines, <comme élément> commun aux deux membres. L'équation devient : un carré plus dix de ses racines plus vingt cinq égale le nombre supposé, qui est trente neuf dans cet exemple, plus également le carré de la moitié des racines qui a été considéré comme <élément> commun, le tout étant soixante quatre. La racine de l'un des

Formule générale pour le type IV
$x^2 + bx = c$.

La solution de l'équation est

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Exemple d'application

La solution de l'équation **$x^2 + 10x = 39$**

est $x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = 3$

Ibn al-Banna' reprend ici un exemple classique que l'on trouve chez Al Kawarizmi comme chez Abu Kamil.

Procédé de résolution

1° • Se ramener à une équation du 1er degré de type III : $Ax = B$.

$$\sqrt{x^2 + 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2} = \sqrt{(x + \frac{10}{2})^2}$$
$$= x + \frac{10}{2}$$

puisque $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2° • Effectuer le calcul.

$$x^2 + 10x = 39$$
$$x^2 + 10x + \mathbf{25} = 39 + \mathbf{25}$$
$$(x+5)^2 = 64$$

deux membres est égale à la racine de l'autre ; car, lorsque deux carrés sont égaux, leurs racines le sont également. Or, la racine de l'un des deux membres est, selon ce que nous avons montré, la racine du carré plus cinq ; et la racine de l'autre est huit. L'équation a donc abouti à : une racine de carré plus cinq égal huit. La racine est, selon ce que nous avons montré, trois.

Ainsi s'est révélé le procédé pour ce type d'équation, sache-le.

Quant au procédé pour déterminer, dans ce type d'équation, d'abord le carré, avant la connaissance de la valeur de la racine, il consiste à ajouter, au nombre supposé, la moitié du carré du nombre des racines, à conserver d'abord le résultat puis à retrancher, du carré de ce premier <résultat> conservé, le carré du nombre supposé, à prendre la racine du reste et à la retrancher du premier <résultat > conservé. Ce qui reste est le carré demandé.

Il y a une autre méthode pour aboutir à la racine ou au carré : on ajoute toujours au carré du nombre des racines le produit du nombre supposé par quatre, on prend la racine du résultat et on lui retranche le nombre de racines. La moitié du reste est la racine demandée et le quart du carré du reste en question est le carré. Comprends-le.

Traduction Djebbar [2 p 52]

D'où, par extraction des racines on aura

$$\sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{64}$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

Formule pour trouver le carré.

Si on veut calculer le carré avant de connaître la racine, on applique la formule:

$$x^2 = c + \frac{b^2}{2} - \sqrt{\left(c + \frac{b^2}{2}\right)^2 - c^2}$$

Ce résultat est donné dans la tradition d'Abu Kamil. Rappelons qu'initialement le nombre et son carré ne sont pas de même nature.

Autres formules générales.

$$x = \frac{\sqrt{b^2 + 4c} - b}{2}$$

$$x^2 = \frac{(\sqrt{b^2 + 4c} - b)^2}{4}$$

Observons que, dans cette "oeuvre de jeunesse" d'Ibn al-Banna', la formule proposée est énoncée sur le cas général puis démontrée sur un cas particulier; néanmoins, celui-ci est traité de manière à être reproductible sur tout exemple. Ibn al-Banna' ne vise pas dans le *Kitab* à faire ressortir les similitudes entre les divers types d'équation du second degré. Remarquons cependant, qu'il ne s'appuie sur aucun élément géométrique. Pour mieux saisir cette évolution, il est possible de comparer la résolution de l'équation $\mathbf{x^2 + 10x = 39}$ par Ibn al-Banna' avec la résolution de cette même équation par al-Khwarizmi (voir en page 33).

Les identités du Raf^c al-Hijab nécessaires à la résolution des équations du second degré.

Il découle, de la première des deux espèces de produits connus sous le nom de quadrature, que :
- Le produit de deux nombres plus le carré de la moitié de leur différence est égal au carré de la moitié de leur somme.
- Si on les multiplie l'un par l'autre et qu'on retranche le<produit>, du carré de la moitié de leur somme, il reste le carré de la moitié de leur différence.
- Le carré de la moitié de leur différence est exactement <égale au> carré de la différence entre l'un des deux et leur demi-somme.
.../....
Il en découle également que: <pour> tout nombre divisé en deux moitiés, et en deux parties inégales, le produit de l'une des deux parties inégales par l'autre, plus le carré de la différence entre l'une des deux et la moitié du nombre, est égal au produit de la moitié du nombre par elle-même ; car tu considères les deux parties inégales comme étant les deux facteurs <du produit>.
Il en découle aussi que <pour> tout nombre divisé en deux moitiés et auquel on ajoute un autre nombre, le produit du nombre plus l'excèdent par l'excèdent plus le carré de la moitié du nombre est égal au produit de la moitié du nombre plus l'excèdent par lui même ; car tu considères le nombre plus l'excédent comme l'un des facteurs <du produit>, et tu considères l'excèdent comme le second facteur. Leur différence sera alors le nombre divisé en deux moitiés.
Il en découle aussi que le produit de la somme de deux nombres par l'un d'eux plus le carré de la moitié de l'autre est égal au produit du multiplicateur plus la moitié de l'autre facteur par lui-même; car tu considères la somme et l'un des deux nombres comme étant les deux facteurs. Le second nombre sera alors leur différence.
Dans chacune de ces trois <propositions> nécessaires, il y a <tous> les cas considérés. Comprends et procède de manière identique pour d'autres <problèmes>.
Cette espèce est la justification de la résolution des trois équations composées parmi les six équations de l'algèbre, selon ce que nous indiquerons en son lieu.

Traduction Aballagh page 579

Le produit par quadrature s'énonce:

1) $pq = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2$

On en déduit:

2) $pq + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2$

3)
$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq = \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \left(p - \frac{p+q}{2}\right)^2$$

et ces trois identités sont équivalentes.

Conséquences
Ibn al-Banna' en déduit 3 corollaires:

- Si k est partagé en deux parties inégales et en deux moitiés, on a en écrivant $k = \frac{k}{2} + \frac{k}{2}$ et $k = u + v$ avec $u > v$,
$$uv + \left(u - \frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$
- Si k est partagé en deux moitiés et augmenté d'une quantité d dite excédent, alors on a:
$$(k+d)d + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{k}{2} + d\right)^2$$
- Ce 3ème corollaire énoncé par Ibn al-Banna' est identique au précédent; seul le contexte d'utilisation varie.

Suivant la forme de chacun des types d'équations, on sera amené à considérer l'une ou l'autre des identités.

Voir Djebbar [24] p 25 et Aballagh [1] p 184.

Résolution des équations composées dans la Raf^c al-Hijab.

Toutes les résolutions que propose Ibn al-Banna' dans la Rafc al Hijab reposent sur les identités équivalentes au produit par quadrature énoncées précédemment. Ibn al-Banna' donne pour chaque type d'équation deux procédés de résolution, ces procédés diffèrent par "l'angle d'attaque" de l'équation:

- dans la **premier procédé**, il privilégie les informations portant sur c et x^2:
  - $c - x^2$ dans le type IV puisque $c - x^2 = bx$
  - $x^2 - c$ dans le type VI puisque $x^2 - c = bx$
  - $x^2 + c$ dans le type V puisque $x^2 + c = bx$

- dans le **2ème procédé**, il s'appuie sur les informations complémentaires à la décomposition de bx en deux moitiés:
  - dans le type IV, l'excédent est x^2 puisqu'intervient $x^2 + bx$
  - dans le type VI, l'excédent est c puisqu'intervient $bx + c$
  - dans le type V, bx se décompose en deux parties inégales puisque $bx = x^2 + c$

Dans le Rafc al Hijab, Ibn al-Banna' procède à la résolution des équations jusqu'à obtenir une équation de type I ou de type III. Il donne seulement les algorithmes de résolution des équations et ne donne pas une écriture de la racine. Ceci peut surprendre. Certes, pour chaque cas les racines ont été données dans le Talkhis, mais il n'est pas immédiat que la solution de ces équations de type I et III soient celles énoncées dans la Thalkis. En effet, on obtient:

- soit une expression simple lorsqu'on se ramène au type I : $Ax^2 = Bx$. Le coefficient A est alors rationnel et l'on a directement la solution $x = \frac{B}{A}$.

- soit une expression plus complexe lorsqu'on se ramène au type III: $Bx = C$. Le coefficient est alors issu d'une extraction de racine carrée, il est irrationnel et même biquadratique, il faut faire appel alors aux quantités conjuguées pour modifier l'écriture $x = \frac{C}{B}$ de la solution.

Mais, peut-être y a-t-il derrière cette conclusion expéditive à nos yeux, un savoir mémorisé immédiatement mobilisable.

Résolution de l'équation de type IV dans la Rafc al-Hijab: 1er procédé.

La justification du procédé dans les types <d'équations> composées, se déduit du produit par quadrature, et nous avons attiré l'attention sur cela à cet endroit là : tu prends toujours, pour le nombre et le carré les deux nombres multipliés. Leur différence sera <égale aux> choses dans le quatrième type.

Tu multiplies l'un des deux par l'autre, <et ce sera> des carrés, auxquels tu ajoutes le carré de la moitié de leur différence, cela < donne> le carré de la moitié de leur somme. Tu prends sa racine et ce sera la moitié de leur somme, et ce sont des choses, que tu conserves.

Puis, tu considères la moitié de leur somme : ce sera un carré plus la moitié des choses qui sont avec lui, parce que le nombre est égal au carré plus les choses ; si on l' ajoute au carré ce sera deux carrés plus les choses, et la moitié de cela est un carré plus la moitié des choses. Tu le compares au <résultat> conservé, il reste des choses égales à un carré, qui est le premier type. Si tu veux, tu ajoutes au < résultat> conservé la moitié des choses ce qui donnera : des choses égalent le nombre et c'est le troisième type.

Traduction Aballagh
page 678 ligne 12 à page 679 ligne 9

Ibn al-Banna' annonce une règle générale pour résoudre tous les types d'équations.
On utilise l'une des identités déduite du produit par quadrature

$$pq + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2$$

en prenant pour p et q les nombres c et x^2.

1er procédé Type IV : $x^2 + bx = c$

Dans ce cas, on utilise la différence
$p - q = c - x^2 = bx$ et l'identité sous la forme

$$pq + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2.$$

$$c.x^2 + \left(\frac{c-x^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+x^2}{2}\right)^2$$

$$cx^2 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+x^2}{2}\right)^2$$

$$\left(c + \frac{b^2}{4}\right) \cdot x^2 = \left(\frac{c+x^2}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{c + \frac{b^2}{4}} \cdot x = \frac{c+x^2}{2}$$

Or, on a:

$$\frac{c+x^2}{2} = \frac{x^2+bx+x^2}{2} = x^2 + \frac{bx}{2}$$

On compare les résultats :

$$\sqrt{c + \frac{b^2}{4}} \cdot x = x^2 + \frac{bx}{2}$$

- Par al-muqabala, on obtient :

$$\left(\sqrt{c + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}\right) \cdot x = x^2$$

qui est une équation de type I.

- On peut ajouter $\frac{bx}{2}$ au deux membres :

$$\left(\sqrt{c + \frac{b^2}{4}} + \frac{b}{2}\right) \cdot x = x^2 + bx = c$$

qui est une équation de type III.

Le procédé <de résolution> du sixième type est identique à cela sauf que la moitié de leur somme est <égale> à la somme du nombre, et de la moitié des choses qui sont avec lui. Elle est donc égale aux choses de la racine conservée. Si tu ajoutes la moitié des choses à ce que tu as conservé comme choses, tu aboutis au premier type ; et si tu retranches la moitié des choses du <résultat> conservé, tu aboutis au troisième type.

Traduction Aballagh
page 679 ligne 10 à page 679 ligne 19

1er procédé Type VI : $x^2 = bx + c$

On utilise la même identité que pour le 1er procédé du type IV, mais on a dans ce cas, la différence p - q = $\mathbf{x^2 - c = bx}$

$$cx^2 + \left(\frac{x^2 - c}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + c}{2}\right)^2$$

$$cx^2 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + c}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{c + \frac{b}{2}} \cdot x = \frac{x^2 + c}{2}$$

- Si on ajoute $\frac{bx}{2}$, on obtient :

$\left(\sqrt{c + \frac{b}{2}} + \frac{b}{2}\right) \cdot x = \frac{x^2 + c + bx}{2} = x^2$ qui est de type I.

- Si on retranche $\frac{bx}{2}$, on aboutit à une équation de type III.

$$\left(\sqrt{c + \frac{b}{2}} - \frac{b}{2}\right) \cdot x = \frac{x^2 + c - bx}{2} = c$$

Résolution de l'équation de type V dans la Raf^c al-Hijab: 1er procédé.

Dans le cinquième type, le carré de la moitié des choses est <égale au > carré de la moitié de la somme des deux nombres. Tu en retranches le produit de l'un des deux par le second, il reste le carré de la différence entre l'un des deux, et la moitié de leur somme.

Si tu prends sa racine -qui sera des choses-, et que tu l'ajoutes à la moitié de leur somme -qui est la moitié des choses qui sont dans l'équation- et que tu égales à cela le carré, tu aboutis au premier type. Si tu l'égales au nombre, tu aboutis au troisième type.

Si tu retranches la racine de la moitié de leur somme indiquée, et que tu l'égales au carré, tu aboutis également au premier type, et si tu l'égales au nombre, tu aboutis au troisième type.

Traduction Aballagh
page 679 ligne 20 à page 680 ligne 10

1er procédé Type V: $x^2 + c = bx$

Il convient dans ce cas de s'appuyer sur **$x^2 + c = bx$** et d'utiliser l'identité

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq = \left(p - \frac{p+q}{2}\right)^2$$

avec $p = x^2$ et $q = c$. Ce qui donne

$$\left(\frac{bx}{2}\right)^2 - cx^2 = \left(x^2 - \frac{bx}{2}\right)^2$$

Par extraction de la racine, on obtient:

$$\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right)\cdot x = x^2 - \frac{bx}{2}$$

ou bien $\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right)\cdot x = c - \frac{bx}{2}$

car $x^2 - \frac{bx}{2} = -\left(c - \frac{bx}{2}\right)$.

- Si on ajoute $\frac{bx}{2}$, aux deux membres de chacune des deux égalites, on obtient une équation de type I :

$$\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} + \frac{b}{2}\right)\cdot x = x^2$$

ou bien une équation de type III :

$$\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} + \frac{b}{2}\right)\cdot x = c.$$

- Si on retranche la racine de $\frac{bx}{2}$, on obtient une équation de type III :

$$\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right)\cdot x = c$$

ou bien une équation de type I :

$$\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right)\cdot x = x^2$$

Résolution de l'équation de type IV dans la Raf^c al-Hijab: 2ème procédé.

Si tu veux, dans le quatrième type, tu divises les choses en deux moitiés, et tu considères le carré comme ajouté à eux deux. Ceci sera alors à un nombre qui est divisé en deux moitiés et auquel on a ajouté un excédent.
Le produit de l'ensemble qui est le nombre égal à eux deux, par le carré ajouté avec le carré de la moitié des choses, est égal au produit de la moitié des choses plus le carré, par lui même, comme on l'a montré précédemment dans le chapitre du produit. La racine de cela, qui sera des choses est égale à la moitié des choses plus le carré. <Tu retranches de la racine la moitié des choses> et tu compares : tu aboutis au premier type. Ou bien tu ajoutes à la racine la moitié des choses, tu compares cela au nombre et tu aboutis au troisième type.

Traduction Aballagh
page 680 ligne 11 à page 681 ligne 3

2ème procédé Type IV: $x^2 + bx = c$

On considère que bx peut être divisé en deux moitiés et augmenté de l'excédent x^2.
On applique l'identité:

$$\left(\frac{k}{2}+d\right)^2 = (k+d)d + \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

où l'excédent est $d = x^2$ et $k = bx$.

$$\left(\frac{bx}{2}+x^2\right)^2 = \left(bx+x^2\right)\cdot x^2 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2$$
$$= cx^2 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2$$

d'où $\sqrt{c+\frac{b}{2}}\cdot x = \frac{bx}{2}+x^2$

- Si on retranche $\frac{bx}{2}$ des deux membres de l'égalité, on obtient une équation de type I :

$$\left(\sqrt{c+\frac{b}{2}}-\frac{b}{2}\right)\cdot x = x^2$$

- Si on ajoute $\frac{bx}{2}$ au deux membres, on obtient une équation de type III :

$$\left(\sqrt{c+\frac{b}{2}}+\frac{b}{2}\right)\cdot x = bx + x^2 = c.$$

Résolution de l'équation de type V dans la Raf^c al-Hijab: 2ème procédé.

Dans le cinquième type, tu divises les choses en deux moitiés, le carré et le nombre étant deux parties différentes du nombre de choses qui est égale<à leur somme>. On est donc dans la situation d'un nombre qui a été divisé en deux moitiés et en deux parties différentes : <si> on multiplie l'une des deux parties différentes par l'autre, et qu'on soustrait cela du carré de la moitié des choses, il en restera le carré de la différence entre l'une des deux parties et la moitié des choses.

Tu prends sa racine et ce sera des choses. Si tu l'ajoutes à la moitié des choses, ce sera la partie la plus grande ; et si tu la retranches de la moitié des choses, ce sera la plus petite, chacun des deux <résultats> étant des choses.

Tu égales alors chacun des deux au carré, si tu veux, et tu aboutis au premier type ou, si tu veux, <tu les égales> au nombre, et tu aboutis au troisième type.

Traduction Aballagh
page 681 ligne 4 à page 681 ligne 23

2 ème procédé Type V : $x^2 + c = bx$

On considère que bx peut être divisé en deux moitiés et deux quantités inégales x^2 et c.

On applique l'identité:

$\left(\frac{k}{2}\right)^2 - uv = \left(u - \frac{k}{2}\right)^2$, où u désigne la plus grande des quantités inégales x^2 et c.

On peut donc obtenir l'une des deux égalités:

$$\left(\frac{bx}{2}\right)^2 - cx^2 = \left(x^2 - \frac{bx}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{bx}{2}\right)^2 - cx^2 = \left(c - \frac{bx}{2}\right)^2$$

On aboutit comme avec le premier procédé à:

$$\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right) \cdot x = x^2 - \frac{bx}{2} \quad (1)$$

ou bien: $$\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right) \cdot x = c - \frac{bx}{2} \quad (2)$$

Ibn Al-Banna' précise de quelle racine il s'agit.

- Si tu ajoutes $\frac{bx}{2}$ dans l'équation (1) tu obtiendras la plus grande racine par une équation de type I : $\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} + \frac{b}{2}\right)x = x^2$
- Si tu retranches la racine extraite dans (2) de $\frac{bx}{2}$, tu obtiens la plus petite racine par une équation de type I : $\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right) \cdot x = x^2$
- De même si on ajoute $\frac{bx}{2}$ dans (2), on obtient la plus petit racine.
- Si on retranche la racine extraite dans (1) de $\frac{bx}{2}$ on obtient la plus grande racine.

Dans le sixième type, tu divises les choses en deux moitiés et tu considères le nombre comme un <nombre> ajouté. Le produit de l'ensemble, qui est le carré égale à eux deux, par le nombre ajouté, plus le carré de la moitié des choses, est égale au produit <de la somme> de la moitié des choses, et du nombre par elle-même, come précédemment. La racine de cela - qui est des choses - est égale à la moitié des choses plus le nombre. Tu compares <les termes>, et tu aboutis au troisième type ; ou bien tu ajoutes la moitié des choses à la racine <carrée>, et tu égales cela au carré, tu aboutis au premier type.

Traduction Aballagh
page 681 ligne 24 à page 682 ligne 11

2éme procédé Type VI: $x^2 = bx + c$

On considère que bx peut être divisé en deux moitiés et augmenté de l'excédent c.
On applique l'identité:

$$(k+d)d + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{k}{2}+d\right)^2$$

où l'excédent est $d = c$ et $k = bx$.

$$(bx+c)\cdot c + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 = \left(\frac{bx}{2}+c\right)^2$$

$$c\cdot x^2 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 = \left(\frac{bx}{2}+c\right)^2$$

Par extraction de la racine, on obtient :

$$\left(\sqrt{c+\frac{b}{2}}\right)\cdot x = \frac{bx}{2}+c$$

• Par al-muqabala, on obtient une équation de type III .

$$\left(\sqrt{c+\frac{b}{2}}-\frac{b}{2}\right)\cdot x = c$$

• Si on ajoute $\frac{bx}{2}$, au deux membres, on obtient une équation de type I :

$$\left(\sqrt{c+\frac{b}{2}}+\frac{b}{2}\right)\cdot x = bx + c = x^2$$

Exemple d'utilisation des équations du second degré dans le Kitab al jabr.

Selon la tradition, Ibn al-Banna' pose et résout dans son *Kitab al Jabr wal muqabala* des problèmes faisant appel aux diverses techniques algébriques connues, certains de ces problèmes nécessitant la résolution d'équations du second degré. Il s'agit des traditionnels **problèmes des biens, des dizaines et des hommes**, pouvant être, à solutions rationnelles ou irrationnelles. Reprenant la traduction et l'analyse mathématique du *Kitab Al Jabr* d'Ibn al-Banna' établies par A.Djebbar [2], nous considérons ici un exemple de chaque type de problèmes. A noter que le problème des hommes, ici donné, est le seul problème de cette catégorie menant à une équation du second degré, les autres menant plutot à des problèmes indéterminés. Ce problème est d'ailleurs d'une formulation extrêmement lourde et pose, plus que tout autre, la question d'un éventuel langage symbolique en parallèle au texte rédigé. (voir page 22)

<Problème des biens.>
<Problème 4 >

<Si> tu ajoutes dix dirhams à un bien et que tu multiplies la somme par racine de cinq dirhams, <le résultat> sera égal au produit du bien par lui-même.

Si tu poses le bien <égal à> une chose, que tu lui ajoutes dix, que tu multiplies cela par racine de cinq et que tu l'égales à un carré, il <en> résultera un carré égal à racine de cinq carrés plus racine de cinq cents, c'est le sixième type. La chose sera <égale> à un plus un quart plus racine de cinq cents, sa racine étant prise, plus racine de un et un quart ; et c'est le bien cherché.

Traduction du Kitab al Jabr établie par Djebbar[2 p 95]

Problème appartenant au chapitre des problèmes irrationnels.

Problème 4.

Déterminer un bien [a] vérifiant

$$(\mathbf{a}+\mathbf{10})\sqrt{\mathbf{5}} = \mathbf{a}^2$$

En posant $a = x$, on a :

$$\mathbf{x^2 = \sqrt{5}\,x + \sqrt{500}}$$

qui est une équation de type VI.

D'où $x = \sqrt{\left(1+\frac{1}{4}\right)+\sqrt{500}} + \sqrt{1+\frac{1}{4}} = a$

Voir aussi Djebbar [2 p 658]

<Problème des dizaines.>
<Problème 7>

Partage dix en deux parties de telle sorte que le carré de la plus grande soit neuf fois la partie la plus petite.

Tu poses la partie la plus grande <égale> à une chose et la plus petite à dix moins une chose. <Puis> tu égales neuf fois la partie la plus petite au carré de la plus grande et tu aboutis au quatrième type. Tu détermines la chose qui est six et c'est la partie la plus grande.

Si tu poses la partie la plus petite <égale> à une chose et que tu égales le carré de la partie la plus grande à neuf fois <la chose>, tu aboutis au cinquième type. Tu détermines la racine par défaut, car <celle obtenue> par excès n'est pas valable ici. Ce sera quatre et c'est la partie la plus petite. Sache-le.

Traduction du Kitab al Jabr établie par Djebbar [2 p 68]

Problème appartenant au chapitre des problèmes rationnels.

Problème 7.

Diviser 10 en deux parties vérifiant:
$\mathbf{b > a}$ **et** $\mathbf{b^2 = 9a}$.

1ère méthode.
En posant $b= x$ et $a = 10 - x$, on a :
$\mathbf{x^2 = 9(10 - x)}$
On aboutit à une équation de **typeIV.**
La résolution donne $x = 6$.
Les parties cherchées sont 6 et 4.

2ème méthode.
En posant $a= x$ et $b= 10 - x$, on a
$\mathbf{(10 - x)^2 = 9x}$
On aboutit à une équation de **type V.**
La résolution donne $x = 25$ qui ne convient pas et $x = 4$.
Les parties cherchées sont 6 et 4.

Voir aussi Djebbar [2 p 627]

<Problème des hommes.>
<Problème 2>

On partage dix dirhams entre des hommes. Il revient à chaque homme parmi eux un <certain> nombre. Puis, on augmente le nombre des hommes de quatre et on partage entre eux trente dirhams. Il revient alors à chaque homme parmi eux un <nombre> inférieur de quatre dirhams à ce qu'il avait eu en premier.

Sache, ici, que si on multiplie, ce qui revient à <chaque> homme en premier, par le nombre des hommes entre lesquels on a partagé les trente et qui sont les premiers hommes plus quatre, le résultat excédera les trente d'une <quantité> égale au produit de ce qui manque à chaque homme, en dernier, <par rapport> à sa première part - et c'est quatre dirhams -, par le nombre des hommes entre lesquels ont été partagés les trente dirhams.
.../...

Problème appartenant au chapitre des problèmes rationnels.

Problème 2.

Si on partage 10 dirhams entre n hommes, chacun aura p dirhams. Si on partage 30 dirhams entre (n+4) hommes, chacun aura (p-4) dirhams.

Ce que nous écrivons : $\frac{10}{n} = p$ et $\frac{30}{n+4} = p - 4$.

Ibn al-Banna' donne une indication pour résoudre ce problème : il reformule cette deuxième information sous la forme :
$p(n + 4) = 30 + 4(n + 4)$.
Cette forme, semble-t-il, n'intervient pas dans la suite.

.../...

Le procédé de résolution de ce problème est donc apparu : il consiste à supposer le résultat de la division de dix par <le nombre> des premiers hommes <égal> à une chose. Le résultat de la division de trente par <le nombre> des derniers hommes, qui sont les premiers hommes plus quatre, est <égal> à une chose moins quatre dirhams.

Lorsqu'on multiplie, ici, la chose moins quatre dirhams par le nombre des premiers hommes plus quatre, il <en> résulte trente ; et lorsqu'on multiplie la chose par le nombre des premiers hommes, il <en> résulte dix d'après ce que nous avons dit. Tu multiplies donc une chose moins quatre dirhams par le nombre des premiers hommes plus quatre, il <en> résulte quatre choses moins six dirhams et moins quatre fois le nombre des premiers hommes. Ceci est égal au trente <qui ont été> divisés. Tu restaures et tu simplifies et il <en> reste quatre choses égalent trente-six plus quatre fois le nombre des premiers hommes. Donc la chose est égale à neuf plus le nombre des premiers hommes.

Si tu multiplies toute l'équation par une chose, tu es ramené à : un carré égal à dix plus neuf choses. Tu aboutis donc au sixième type. Pour chercher la racine, tu procèdes comme <cela a été indiqué> précédemment. La chose sera égale à dix. <Mais> on avait supposé qu'elle était le résultat de la division de dix par le <nombre> des premiers hommes. Le nombre des premiers hommes était donc égal à un.

Traduction du Kitab al-Jabr établie par Djebbar [2 p 76]

1ère méthode.

En posant $\frac{10}{n} = x$,

la deuxième information s'écrit :

$$\frac{30}{n+4} = x - 4.$$

D'où :

$$\begin{cases}(x-4)(n+4) = 30 \\ xn = 10\end{cases}$$

Par suite : $(x-4)(n+4) = 4x - 6 - 4n = 30$

D'où: $4x = 36 + 4n$

Et par suite: $x = 9 + n$

Puisque $nx = 10$, on a en multipliant chaque membre par x:

$$\mathbf{x^2 = 9x + 10}$$

Cette équation est de type VI et a pour solution $x = 10$.

Et par suite, puisque $x = \frac{10}{n}$, $\mathbf{n = 1}$.

Voir aussi Djebbar [2 p 637]

On retrouve nettement dans tous ces problèmes, la tradition développée par al-Khwarizmi et reprise par Abu Kamil. La stabilité de ces problèmes est remarquable. En effet on trouve chez al-Khwarizmi des problèmes d'une formulation extrêmement voisine.

Problèmes formulés par al-Khwarizmi.[1]

Problème des dizaines.
"<Si> tu divises dix en deux parties et <que> tu multiplies l'une des deux parties par elle-même, <le résultat> est égal à quatre-vingt une fois l'autre partie".

Problème des biens.
"<Etant donné> un bien, <si> tu lui ôtes son tiers et trois dirhams et que tu multiplies le reste par lui-même, tu retrouve le bien".

Problème des hommes.
"<Si> tu partages un dirham entre des hommes, chacun reçoit une chose; puis, <si>tu leur ajoutes un homme et que tu partages entre eux un dirham, chacun reçoit alors <une part> inférieure à la première part d'un sixième de dirham."

On remarquera combien ces problèmes d'application sont coupés de toute réalité. On peut d'ailleurs s'interroger sur **la fonction de tels problèmes**.

On a souvent reproché aux mathématiques arabes leur aspect pratique. En fait, la théorie des partages successoraux n'était souvent qu'un cadre comme un autre, source de problèmes mathématiques que le mathématicien se pose et résout sans attendre qu'un problème ne soit réellement posé. A l'inverse de cette accusation, Ibn Khaldun (m 1406) dénonce, dans son discours sur l'histoire universelle, certains excès théoriques des mathématiques, mais néanmoins, il convient que ceux-ci "*contribuent à entraîner l'esprit et à l'habituer à règler les problèmes habituels*" [11 p 946]. Les mathématiciens du Maghreb du XIV^{e} siècle considéraient d'ailleurs les mathématiques comme une distraction permettant d'entraîner l'esprit pour mieux comprendre l'univers, et le mot "mathématiques" se disait alors, RIYADIYYAT, ce qui signifie exercices de l'esprit [13 p 11].

Ainsi, si à l'origine, les problèmes d'héritage, de transactions commerciales, ont aidé au développement d'une mathématique appelée "**pratique**", la traduction de livre grecs et l'héritage des civilisations babyloniennes et indiennes ont, à l'inverse, favorisé le développement des mathématiques vers un aspect plus "**théorique**". Les deux livres d'Ibn al-Banna', le *Talkhis* et le *Raf^{c} al-Hijab* sont un exemple de la double préoccupation des mathématiciens arabes.

[1] Problèmes issus du livre d'Al Khwarizmi intitulé *de l'algèbre et de la muqabala*, cités par A.Djebbar en note de l'article *Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématiques arabes* in actes de l'Université d'été sur l'histoire des mathématiques. IREM de Toulouse.

3ème partie
Extractions et approximations de racines.

par Jacqueline Borréani et Didier Trotoux

Les irrationnels et les approximations de racines carrées.

Au cours des siècles, deux approches du nombre ont évolué, l'une calculatoire et l'autre théorique. Comme souvent, les irrationnels ont été utilisés avant d'être reconnus comme des nombres. Le développement des calculs trigonométriques, planimétriques et astronomiques impose l'utilisation d'approximations de racines carrées. Si les méthodes utilisées font appel à des calculs indépendants de la nature du nombre, une évolution du statut des irrationnels manifeste de la réflexion des mathématiciens arabes dès le Xème siècle. En effet, les applications de l'algèbre permettent une étude des quantités irrationnelles et des opérations sur de telles quantités.

1) Evolution des connaissances sur les irrationnels.

Si les mathématiciens arabes n'ont évoqué que des écrits grecs, il semble qu'ils ont eu accès aux sources indiennes et babyloniennes. Au travers des problèmes d'arpentage, les babyloniens se sont trouvés amenés à élaborer des méthodes d'approximation de racines carrées.

A l'époque d'al-Khwarizmi (m. 850) les quantités irrationnelles apparaissent peu et sont traitées de façon élémentaire. Abu Kamil (m. 930) utilise les irrationnels quadratiques comme coefficients et racines d'équations du premier et second degré.

De nombreux mathématiciens ont traduit et commenté *les Eléments* d'Euclide dans les pays islamiques. Les sources principales[1] des mathématiciens arabes sur les irrationnels s'appuient sur le livre X *des Eléments* et sur le commentaire de Pappus. En particulier, Ibn Muhammad al-Farabi (870-950) a commenté "les difficultés rencontrées dans les introductions aux livres I et V d'Euclide". Ce philosophe a joué un rôle important dans l'analyse des concepts de géométrie et d'arithmétique.

Ibn Sina (Avicenne, 980 - 1037) résume dans le *Shifa* les 112 propositions du livre X sur les irrationnels. Déjà Thabit Ibn Qurra (m.901), auteur d'une traduction *des Eléments*, commente plus spécialement et critique les livres V et X. Dans le livre V, Euclide donne un statut aux grandeurs incommensurables et construit la théorie des proportions, mais les nombres irrationnels n'ont alors pas de statut. Le livre X est consacré à l'étude d'une théorie des quantités irrationnelles quadratiques et biquadratiques. Ces grandeurs auxquelles nous associons les nombres $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$,... n'ont pas le statut de nombres et sont représentées par des figures géométriques, droites, rectangles. Euclide introduit une classification de ces

[1] Histoire des mathématiques arabes - 1er colloque d'Alger p.196.

grandeurs qui servira dans le livre XIII à déterminer et construire les arêtes des polyèdres réguliers.

Al-Mahani (m.880) est l'un des premiers mathématiciens arabes à avoir fait une analyse critique et laissé des travaux sur *les Eléments* et les grandeurs irrationnelles[2]. Dans son épître intitulée "Explicitations du livre X *des Eléments* d'Euclide", il aborde un contexte plus large que celui d'Euclide, les grandeurs irrationnelles deviennent des cas particuliers de nombres irrationnels combinaisons de racines carrées et de racines cubiques.

C'est à partir de cette nouvelle lecture algébrique et critique du livre X que les grandeurs incommensurables deviennent des nombres, objets d'étude arithmétique et algébrique. En particulier al-Khayyam (m.1129) critique puis dépasse la théorie euclidienne des livres V et X. Il donne une définition des proportions des grandeurs incommensurables à l'aide de fractions continues infinies en utilisant l'algorithme de "l'antypharèse"[3]. Il démontre que cette définition et celle d'Euclide sont équivalentes. Il assure les bases théoriques et les opérations sur les nombres irrationnels, sans que les questions entre les concepts de rapport et de nombre soient pour autant résolues.

Ce concept de nombre sera repris de façon philosophique par Ibn al-Banna' (m.1321). Dans la partie arithmétique des irrationnels, ce qui est nouveau dans le *Kitab al Jabr* d'Ibn al-Banna' par rapport à Abu Kamil, c'est l'extension de la division à l'aide des quantités irrationnelles de la forme $n+\sqrt{m}+\sqrt{p}$. Le contenu plus spécifique sur les racines carrées sera exposé plus loin.

Un ouvrage particulier *"le poème sur les irrationnels quadratiques"* d'Ibn al-Yasamin (m.1204) est à mentionner, même si son contenu reste en dessous des recherches antérieures sur le sujet. Dans cet écrit, il est fait, pour la première fois, allusion au symbolisme de la racine carrée utilisant le lettre Jim (ج)[4]. Ce texte qui a connu un grand succès, en son temps, permet de voir ce qui s'est introduit dans l'enseignement des mathématiques par rapport au contenu du livre X, comme certaines opérations, en particulier le produit et la division.

2) Evolution des procédés d'approximation des racines carrées [5].

Suivant les lieux et les époques, plusieurs méthodes d'extraction des racines carrées ont été affinées . Vingt siècles avant J.C., les babyloniens ont une règle d'approximation :

$$\sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

[2] ibidem

[3] A.P.Youschkevitch - Mathématiques arabes p.84 - 85

[4] Histoire des mathématiques arabes - 1er colloque international d'Alger p.200.

[5] Boulahia - Algorithmes et approximations p. 23 et suivantes.

Dans un ouvrage indien (4ème siècle av.J.C.) on trouve l'approximation :

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 34}.$$

Chez les mathématiciens grecs, les procédés sont difficiles à élaborer, car il n'existe pas de fraction décimale, seuls des encadrements permettent de mieux comprendre la nature des irrationnels. En particulier Théètète (~375 av J.C.) va donner des critères pour reconnaître les racines carrées irrationnelles.

Les mathématiciens arabes vont améliorer ces méthodes d'approximation, ce qui va avoir une influence sur les notions de limites, de fractions continues et le calcul numérique.
Si al-Khwarizmi (m.830) utilise la règle des babyloniens, il utilise également une transformation des nombres non carrés :

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k}\sqrt{N x 10^{2k}}$$

puis la partie fractionnaire est transformée en fraction sexagésimale. Par exemple :

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2000000}}{1000} \approx \frac{1414}{1000} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{50}{60^2} + \frac{24}{60^3}$$

Les successeurs vont tenter de perfectionner la méthode d'approximation pour l'étendre à l'extraction des racines cubiques et d'ordre supérieur. Ainsi al-Uqlisidi (~952) précise que $a + \frac{r}{2a}$ est une approximation par excès de $\sqrt{a^2 + r}$ alors que $a + \frac{r}{2a + 1}$ en est une approximation par défaut et il propose l'approximation $a + \frac{1}{2}(\frac{r}{2a} + \frac{r}{2a + 1})$.

C'est al-Khayyam qui va donner une démonstration arithmétique du procédé indien pour les racines carrées et cubiques.

Al-Kasi expose dans "*la clé de l'arithmétique*"[6] un procédé d'extraction des racines de nombres entiers, utilisant les coefficients du binôme. Ce procédé a peut-être été découvert en Chine et était connu également d'As-Samawal (*traité d'Arithmétique* 1172). Al-Kasi donne $a + \frac{r}{(a + 1)^n - a^n}$ comme approximation de $\sqrt[n]{a^n + r}$.

Cette formule donne en particulier $a + \frac{r}{2a + 1}$ comme approximation de $\sqrt{a^2 + r}$ et peut être interprétée comme une application de l'interpolation linéaire entre a^2 et $(a + 1)^2$ de $\sqrt{a^2 + r}$.
En effet :

$$\frac{y - a}{(a^2 + r) - a^2} = \frac{(a + 1) - a}{(a + 1)^2 - a^2} \quad \text{donne} \quad y = a + \frac{r}{2a + 1}.$$

6 A.P.Youschkevitch - Mathématiques arabes p.76

Ibn al-Banna', dans la troisième partie du *Talkhis* expose une règle d'extraction de la racine carrée exacte ou approchée. Il précise notamment :

$$\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a} \qquad \text{si } r \leq a$$

$$\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r+1}{2a+2} \qquad \text{si } r > a$$

Il propose d'affiner l'approximation et le procédé permet d'écrire :

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a} - \frac{(\frac{r}{2a})^2}{2(a + \frac{r}{2a})}$$

3) Le texte d'Ibn al-Banna' sur les racines.

La troisième partie du livre I du *Raf^{c} al-Hijab* est consacrée aux racines carrées et aux calculs sur les radicaux. Ibn al-Banna' définit les nombres exprimables et non exprimables.

Puis il indique que les irrationnels sont de deux sortes, ceux qui s'expriment avec une seule racine et ceux qui s'expriment avec plus d'une racine. Ensuite, il s'intéresse aux nombres carrés parfaits et donne un procédé d'extraction de racine carrée sur les exemples $\sqrt{729}$ et $\sqrt{625}$.

Il expose alors des méthodes pour l'extraction d'une racine d'un nombre entier par approximation.

Il énonce des critères de congruence pour déterminer si des nombres sont ou non des carrés parfaits.

Puis il donne des procédés permettant d'obtenir des valeurs approchées de racines carrées d'entiers et compare ces valeurs. Ibn al-Banna' détermine deux approximations par excès de la racine carrée d'un nombre à partir des deux nombres consécutifs dont les carrés encadrent le nombre. Il détermine ensuite laquelle de ces deux approximations est la meilleure suivant la distance du nombre aux deux carrés.

Ensuite, il développe un autre procédé d'approximation par la méthode du produit par un carré, méthode nécessaire en notation sexagésimale et pour les racines carrées de fractions.

La fin du texte est consacrée à l'étude des binômes et apotomes, en commençant par trois procédés d'extractions des racines des binômes. Ibn al-Banna' définit les binômes ($a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, ...) et les apotomes ($a - \sqrt{b}, \sqrt{a} - \sqrt{b}$, ...) qu'il classe en six catégories. Puis il expose des propriétés des trois premiers binômes et apotomes, de ces propriétés découlent alors les déterminations des binômes et des apotomes. Il définit et nomme les racines des binômes et des apotomes.

"L'ensemble des irrationnels est alors constitué de 24 nombres"[7]. Il obtient ainsi les procédés de calculs pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des racines des nombres ainsi que celles des binômes et des apotomes.

Cette troisième partie du Raf^c al-Hijab reprend et commente la troisième section du livre I du *Talkhis*. Dans cette section, consacrée aux radicaux, Ibn al-Banna' énonce les règles qu'il suffit d'appliquer pour l'extraction de la racine d'un nombre entier ou fractionnaire, l'addition et la soustraction des radicaux, la multiplication des radicaux, la division des radicaux et leur dénomination. Une précision est à apporter pour le terme de dénomination que l'on trouve à différentes reprises dans le texte. Pour Ibn al-Banna', il existe deux sortes de division: "la division du petit nombre par le grand, et la division du grand nombre par le petit. La première sorte s'appelle spécialement dénomination".

Dans la partie correspondante du *Raf^c al-Hijab*, Ibn al-Banna' illustre d'exemples les procédés de calculs d'extraction et d'approximation. Il développe et justifie les algorithmes d'approximation de la racine carrée.

Il subsiste également une différence sensible entre la fin des deux textes du *Talkhis* et du *Raf^c al-Hijab*. Si dans le premier texte, Ibn al-Banna' donne les règles des calculs sur les radicaux, dans le deuxième texte, elles ne figurent plus d'une manière explicite. Ces règles peuvent être retrouvées à partir de la classification des binômes et des apotomes et des procédés à leur appliquer pour les calculs concernant les quatre opérations.

A part les critères de congruence[8] et les procédés d'approximation par la méthode du produit[9], le texte qui suit, est la quasi totalité de la troisième partie du livre I du *Raf^c al-Hijab* d'Ibn al-Banna'.

[7] M. Aballagh. Thèse Raf^c al Hijab d'Ibn al-Banna'. p.640 ligne 15.
[8] ibidem p.629 ligne 11 à p 630 ligne 25.
[9] ibidem p.634 ligne 16 à p 635 ligne 20.

Extraction de racines carrées.

L'exprimable est tout ce qui, fraction, ou entier plus fraction, a son rapport à un, connu. Le non exprimable est celui dont on ne connaît pas son rapport à un, comme racine de dix, racine de un demi ou racine de dix plus un demi. Le non exprimable est de deux sortes :
Une sorte dans laquelle on prononce une seule fois le <mot> racine, comme ce que nous <venons> d'indiquer ; cette sorte est dite exprimable en puissance ; et une <autre> sorte dans laquelle on prononce le <mot> racine plus d'une seule fois, comme racine de racine de dix : cette sorte est dite le moyen.
<Le fait> qu'une position soit <celle d'un> carré parfait et qu'une <autre> position ne le soit pas, a été établi par induction pour les unités et pour les dizaines. <Quant aux> centaines, elles sont carrés parfaits, parce qu'elles sont le produit des dizaines par elles-mêmes. Les milliers ne sont pas carrés parfaits parce qu'ils sont par rapport aux centaines, comme la position des dizaines, par rapport, aux unités, et il en est ainsi après cela.
On dit d'une position qu'elle est carré parfait parce qu'elle contient un nombre qui est carré parfait.

Si on a exigé que ce qui n'est pas possible dans les entiers, soit inférieur à lui, c'est parce que, si on opère avec les fractions, selon un <procédé>, autre que le procédé célèbre, le reste serait inférieur à ce qui reste dans <le cas> des entiers.
Exemple de cela : si on dit quelle est la racine <carrée> de sept cent vingt-neuf, et que tu opères selon <le procédé> des entiers, il restera trois dans la position de sept, qui est sept cent. Et si tu avais opéré avec les fractions, il <en> serait resté moins.

Un nombre a est "exprimable", c'est-à-dire rationnel, s'il s'écrit $\frac{n}{m}$ ou $p+\frac{n}{m}$ avec m, n, p entiers.
Un nombre est non rationnel s'il ne peut s'écrire sous cette forme comme $\sqrt{10}$ ou $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{10+\frac{1}{2}}$.
Il existe deux sortes de nombres non rationnels :
- les rationnels en puissance, ceux qui s'écrivent $\sqrt{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}^+$.
- les nombres moyens, ceux qui comportent plusieurs fois $\sqrt{\ }$ dans leur écriture, comme $\sqrt{\sqrt{10}}$.

On considère le développement $\Sigma a_i \times 10^i$ décimal d'un nombre N.
Le caractère d'être carré parfait ou non pour une position a_i a été établi par induction pour les unités et les dizaines, c'est-à-dire que tous les cas ont été étudiés.
La position des centaines est carré parfait car $10^2 = 100$.
La position des milliers, non car $10^3 = 10 \times 10^2$

L'algorithme d'extraction de la racine carrée d'un nombre N donne une précision plus grande en utilisant des fractions au lieu d'entiers. La méthode consiste à :
-partager les chiffres de N par groupe de deux
-chercher le plus grand carré n^2 contenu dans le dernier groupe
-calculer $N - n^2$, puis déterminer le 2ème chiffre m de $\sqrt{N}$ tel que $N - n^2 - m(m + 2n)$ soit minimal et ainsi de suite.

Exemple pour 729 :
Pour le chiffre des centaines 7, le plus grand carré inférieur est 4, et la différence $7 - 2^2 = 3$.
Si on prend $2+\frac{1}{2}$ au lieu de 2, on obtient :

Si tu mettais au-dessous de <sept> deux et demi, il resterait trois quart de un dans cette position, et trois quart de cent vaut soixante quinze, que tu ajoutes aux vingt-neuf que tu <gardais> avec toi, cela fais cent quatre, puis tu rétrogrades les deux et demi <après l'avoir> doublé ce qui fait cinq, et tu cherches un nombre, que tu multiplie par cinq, et par lui-même ; tu obtiens deux, et il ne reste rien de ton nombre.

Tu prends alors la moitié de ce que tu as doublé, qui est cinquante : sa moitié est vingt-cinq. La racine complète est donc vingt-sept. Ou bien tu doubles deux, cela donne cinquante-quatre dont tu prends la moitié.

Si on dit quelle est la racine de six cent vingt-cinq, tu mets sous le six deux et demi. Son carré est six plus un quart qui excède <six>. Le six est annulé par six cent, et le quart par vingt-cinq qui sont le quart de cent.

Le nombre tout entier est donc épuisé, et il reste deux zéros avant le dernier <chiffre>.

Tu en prends un et les deux et demi deviennent des dizaines soit vingt-cinq ; ou bien tu doubles deux et demi, soit cinq, et tu le déplaces sous les dizaines ; puis tu cherches ce qui doit multiplier le <nombre> doublé. Tu ne trouves rien car, au dessus de lui il y a des zéros. Tu poses donc zéro et tu prends la moitié de ce que tu as doublé : ce sera la moitié de cinquante.

Traduction Aballagh
page 626 ligne 1 à page 628 ligne 21

$$7-\left(2+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

Pour N = 729 = 700 + 29

$$n^2=\left(2+\frac{1}{2}\right)^2\times 100$$

$N - n^2 = 104$

$$n=\left(2+\frac{1}{2}\right)\times 10$$

$2\,n = 5 \times 10$

Puis on cherche m tel que :

104 - m (5 × 10 + m) soit minimal.

On obtient m = 2 et le reste est nul.

La racine est alors $\frac{2n}{2}+m$

$$\sqrt{729}=\frac{5\times 10}{2}+2=25+2=27$$

$$\text{ou}\quad \sqrt{729}=\frac{(50+2\times 2)}{2}=\frac{54}{2}=27$$

Autre exemple $\sqrt{625}$.

Pour N = 625 = 600 + 25

$$n^2=\left(2+\frac{1}{2}\right)^2\times 100$$

$$n^2=\left(6+\frac{1}{4}\right)\times 100 \text{ avec } 6+\frac{1}{4}>6$$

$n^2 = 600 + 25$

$N - n^2 = 0$

$$n=\left(2+\frac{1}{2}\right)\times 10=25$$

on cherche m tel que :

$$m\left[2\times\left(2+\frac{1}{2}\right)\times 10+m\right]$$

soit minimal.

La valeur de m qui convient est 0.

D'où $\sqrt{625}=\frac{5\times 10}{2}=25$.

Approximation des racines carrées.

Quant au procédé <de calcul> de la racine approchée, tout nombre dont on veut <chercher> la racine et qui n'est pas un carré parfait, est situé entre deux carrés successifs dont l'un est plus petit que lui et le second plus grand.

Entre les racines de deux carrés successifs, il y a toujours un, et la différence entre les deux carrés est égal à deux fois la racine du plus petit des deux, plus un. Il est aussi égal à deux fois la racine du plus grand moins un. Il est aussi égal à la somme des deux racines. Ceci est évident d'après le produit de la racine du plus grand par elle-même après sa partition en la racine du plus petit , plus un. Sache le.

... ...

On prendra la racine approchée d'un nombre toujours à partir du carré le plus proche de lui, que ce soit le plus petit ou le plus grand. La manière de procéder à partir du plus petit <carré> consiste à dénommer la différence entre lui et le plus petit <carré> par le double de la racine du plus petit, et à ajouter la dénomination à la racine du plus petit.

La raison en est que la racine du nombre est décomposée en deux parties : la racine du plus petit <carré>et une fraction : et le produit de cela par lui-même est égal au produit de chacun d'eux par lui-même plus <celui de>l'un d'eux par le double du second.

La différence entre le nombre et le carré du plus petit est donc égale au carré de la fraction plus le produit de la fraction par le double de la racine du plus petit. On se tolère la suppression du carré de la fraction, et on considère la différence égale au produit de la fraction par deux fois la racine du plus petit.
De la division de la différence par le double de la racine du plus petit, il résulte la fraction par approximation.

Soit a le nombre dont on cherche à approcher la racine carrée.
Il existe deux entiers n et m tels que :

$$n < a < m$$

$$\text{avec } n = k^2 \text{ et } m = (k+1)^2.$$

On a : $\sqrt{m} - \sqrt{n} = 1$

$m - n = 2\sqrt{m} - 1 = 2\sqrt{n} + 1$ car

$m = \sqrt{m}.\sqrt{m} = (\sqrt{n} + 1)^2 = n + 2\sqrt{n} + 1.$

Si le carré le plus proche de a est n ($n < a$) alors :

$$\sqrt{a} \approx \sqrt{n} + \frac{a - n}{2\sqrt{n}}$$

En effet, en posant $\sqrt{a} = \sqrt{n} + \frac{p}{q}$,

$a = (\sqrt{n} + \frac{p}{q})^2 = n + (\frac{p}{q})^2 + 2\sqrt{n}\,.\frac{p}{q}.$

On en déduit :

$a - n = (\frac{p}{q})^2 + 2\sqrt{n}\,.\frac{p}{q}$ et en négligeant $(\frac{p}{q})^2$, on obtient :

$$a - n \approx 2\sqrt{n}\,.\frac{p}{q}$$

d'où : $$\frac{p}{q} \approx \frac{a - n}{2\sqrt{n}}.$$

Il est clair et évident, que cette fraction, qui <en> résulte est supérieure à la fraction réelle. L'approximation ne peut donc être, toujours, que par excès, par rapport, au nombre dont on cherche la racine.

On a minoré (a - n) donc $\frac{a - n}{2\sqrt{n}}$ est un majorant de $(\sqrt{a} - \sqrt{n})$ et $\sqrt{n} + \frac{a - n}{2\sqrt{n}}$ est une approximation par excès de $\sqrt{a}$.

La manière de procéder à partir du plus grand carré consiste à dénommer la différence entre ton nombre et le plus grand carré par le double de la racine du plus grand et à retrancher la dénomination de la racine du plus grand, comme nous avons indiqué ce procédé dans l'affinement de l'approximation; regarde-le à cet endroit.

Si le carré le plus proche de a est m (m>a) alors :

$$\sqrt{a} \approx \sqrt{m} - \frac{m-a}{2\sqrt{m}} .$$

La cause de cela est que, la racine du plus grand carré est décomposée en la racine du nombre et en une fraction et son produit par lui-même est égal au produit de châcune des deux parties par elle-même plus <celui>de l'un d'eux par le double de l'autre.

En effet, en posant : $\sqrt{m} = \sqrt{a} + \frac{p}{q}$,

$m = (\sqrt{a} + \frac{p}{q})^2 = a + (\frac{p}{q})^2 + 2\sqrt{a}.\frac{p}{q}$.

La différence sera donc égale au carré de la fraction plus le produit de la fraction par le double de la racine du nombre. On se tolère d'ajouter un carré de la fraction. La somme sera égale au produit de la fraction par le double du <plus grand>carré d'après ce que tu as appris dans la dernière des espèces de produit sans translation, lorsque l'un des facteurs <du produit> est la fraction et le facteur restant la racine du plus grand <carré>.

$m - a = (\frac{p}{q})^2 + 2\sqrt{a}.\frac{p}{q}$. On ajoute $(\frac{p}{q})^2$ au second membre et on obtient :

$m - a \approx 2\,(\frac{p}{q})^2 + 2\sqrt{a}.\frac{p}{q} = \frac{p}{q} . 2\,(\frac{p}{q} + \sqrt{a}\,)$

c'est-à- dire $m - a \approx \frac{p}{q} . 2\sqrt{m}$

Considère alors la différence égale au produit de la fraction par le double de la racine du <plus grand> carré. Divise la différence par le double de la racine du <plus grand> carré et il en résulte la fraction par approximation.

On en déduit : $\frac{p}{q} \approx \frac{m - a}{2\sqrt{m}}$.

<Comme> elle est inférieure à la fraction réelle, si on la retranche de la racine du plus grand <carré>, il reste la racine approchée du nombre par excès.

On a majoré (m - a) donc $\frac{m - a}{2\sqrt{m}}$ est un minorant de$(\sqrt{m} - \sqrt{a})$

Mais, comme la déficience de la fraction par rapport à la racine du plus grand <carré>est égale à celle (la déficience) de la différence <entre le plus grand carré et le nombre donné>par rapport au double de la racine du plus grand <carré>, le reste étant dénommé par le double de la racine du plus grand <carré> et la dénomination étant ajoutée à la racine du plus petit carré, ce qui est clair d'après la soustraction des fractions.

Mais le reste, aprés la soustraction de la différence <entre le plus grand carré et le nombre donné>du double de la racine du plus grand, est égal à la différence entre ton nombre et le plus petit carré, plus un, parce qu'entre deux carrés, il y a, d'après ce qui a précédé, le double de la racine du plus grand des deux, moins un.

Pour cela, si le reste de ton nombre est plus grand que la racine <du plus petit carré>, le <nombre>est plus proche du plus grand carré.

Tu ajoutes <alors> deux au double de la racine <du plus petit carré> pour qu'elle soit le double de la racine du plus grand carré, et tu ajoutes un à la différence <entre le nombre et le plus petit carré> pour qu'elle soit la différence qui reste-après la soustraction de la différence entre le carré du plus grand et ton nombre-, du double de sa racine; et tu ajoutes la dénomination à la racine du plus petit carré comme nous l'avons

et $\sqrt{m} - \dfrac{m - a}{2\sqrt{m}}$ est une approximation par excès de $\sqrt{a}$.

On a :

$$\sqrt{m} - \frac{m - a}{2\sqrt{m}} = \sqrt{n} + \frac{2\sqrt{m} - (m - a)}{2\sqrt{m}} \quad (1)$$

car $\sqrt{m} = \sqrt{n} + 1$.

$$2\sqrt{m} - (m - a) = (a-n) + 1 \quad (2)$$

car $m - n = 2\sqrt{m} - 1$.

• **Si** $\quad \mathbf{a - n > \sqrt{n}}$

alors a est plus proche de m que de n.

En effet : $\quad (a - n) + 1 > \sqrt{n} + 1$

ce qui équivaut, d'après (2), à :

$$2\sqrt{m} - (m - a) > \sqrt{n} + 1$$
$$2(\sqrt{n} + 1) - (m - a) > \sqrt{n} + 1$$

d'où $\quad m - a < \sqrt{n} + 1$.

Dans ce cas, la meilleure approximation de $\sqrt{a}$ est :

$$\sqrt{m} - \frac{m - a}{2\sqrt{m}} = \sqrt{n} + \frac{2\sqrt{m} - (m - a)}{2\sqrt{m}} \quad \text{cf (1)}$$

$$= \sqrt{n} + \frac{(a - n) + 1}{2\sqrt{n} + 2} \quad \text{cf (2)}$$

cette dernière quantité étant inférieure à :

$$\sqrt{n} + \frac{a - n}{2\sqrt{n}} \quad \text{car} \quad a - n > \sqrt{n}.$$

montré.

Il en découle aussi que, si le reste du plus grand carré <par rapport au nombre> est plus grand que sa racine, tu en retranches un et , du double de la plus grande racine, deux toujours; et, à ce moment-là, tu dénommes,et tu retranches <le résultat de> la dénomination de la plus grande racine.

Il est également clair et évident, que si le <premier> reste est égal à la racine, l'autre reste est aussi égal à l'autre racine, et le nombre est une moyenne entre les deux carrés <parfaits> et c'est une moyenne proportionnelle, le rapport du plus petit <carré parfait> à lui étant égal à son rapport au plus grand, d'après ce que tu sais sur l'obtention des nombres proportionnels,.dans le chapitre de l'addition.

Traduction Aballagh
page 628 ligne 22 à page 629 ligne 10
page 630 ligne 26 à page 634 ligne 14

- **Si $(m\text{-}a) > \sqrt{m}$** alors la meilleure approximation de $\sqrt{a}$ est :

$$\sqrt{n} + \frac{a - n}{2\sqrt{n}} = \sqrt{m} - \frac{(m - a) - 1}{2\sqrt{m} - 2}$$

cette dernière quantité étant inférieure à :

$$\sqrt{m} - \frac{m - a}{2\sqrt{m}} \quad \text{car } (m - a) > \sqrt{m}.$$

- **Si $a - n = \sqrt{n}$** alors **$m - a = \sqrt{m}$**.

en effet : $m - a = m - (n + \sqrt{n})$

$$= (\sqrt{n} + 1)^2 - (n + \sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n} + 1 = \sqrt{m}.$$

Dans ce cas, a est une moyenne proportionnelle entre n et m:

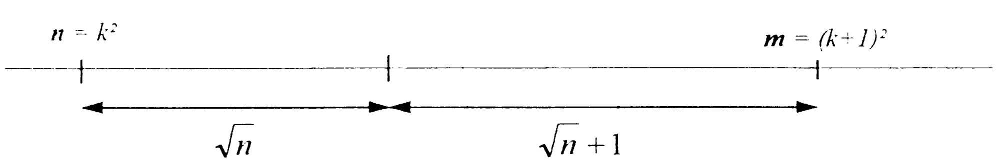
$$\frac{n}{a} = \frac{a}{m}$$

car $\frac{n}{a} = \frac{k^2}{k(k+1)} = \frac{k(k+1)}{(k+1)^2} = \frac{a}{m}$.

Les deux formules d'approximation donnent :

$$\sqrt{a} = \sqrt{n} + \frac{1}{2} = \frac{k+(k+1)}{2}.$$

On peut résumer les résultats du texte précédent à l'aide du schéma suivant :



Règle :

Si a est plus proche de n que de m, on prendra pour valeur approchée de $\sqrt{a}$:

$$\sqrt{n} + \frac{(a - n)}{2\sqrt{n}}$$

Si a est plus proche de m que de n, on prendra pour valeur approchée de $\sqrt{a}$:

$$\sqrt{n} + \frac{(a - n) + 1}{2\sqrt{n} + 2}$$

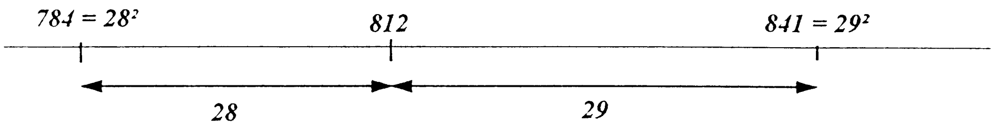
ce qui peut aussi s'écrire :

$$\sqrt{a^2+r} \approx a+\frac{r}{2a} \qquad \text{si } r<a$$

$$\sqrt{a^2+r} \approx a+\frac{r+1}{2a+2} \qquad \text{si } r>a$$

$$\sqrt{a^2+a} \approx a+\frac{1}{2}$$

<u>Exemple d'approximations de</u> $\sqrt{798}$, $\sqrt{831}$ et $\sqrt{812}$.



Racine carrée	$a+\frac{r}{2a}$	$a+\frac{r+1}{2a+2}$	valeur donnée par la calculatrice
$\sqrt{798}$	**$28+\frac{1}{4}=28{,}25$**	$28+\frac{15}{58}\approx 28{,}258$	28,249
$\sqrt{831}$	$28+\frac{47}{56}\approx 28{,}839$	**$28+\frac{24}{29}\approx 28{,}8276$**	28,8271
$\sqrt{812}$	**$28+\frac{1}{2}=28{,}5$**	**$28+\frac{1}{2}=28{,}5$**	28,495

On voit donc que Ibn al-Banna' a prouvé dans le Raf^c al-Hijab, les deux approximations de racines énoncées dans le Talkhis (trad.Souissi, p.78-79) *"S'il y a un reste, dénomme-le par le double de la racine entière, au cas où le reste est égal ou inférieur à la racine ; s'il est supérieur à la racine, ajoute un au reste et deux au double de la racine quelle qu'elle soit, puis fais la dénomination ; ajoute le rapport trouvé à la racine entière. Le résultat est la racine qui multipliée par elle-même, donne d'une manière approchée, le nombre dont on cherche la racine."*

Par contre, il ne démontre pas la troisième, à savoir : $\sqrt{a^2+r} \approx a+\frac{r}{2a}-\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}$

qui est la transcription mathématique de la suite du passage précédent :
"Si tu veux avoir une approximation plus serrée, dénomme le reste par le double de la racine et ôte le résultat de cette racine ; il en résulte un nombre dont le carré est plus proche du nombre dont on cherche la racine que le premier carré."*

Ici, on part de l'approximation $a_1 = a + \frac{r}{2a}$ et le reste* auquel il est fait référence est la différence $(a+\frac{r}{2a})^2 - (a^2+r)$ évoquée dans la phrase précédente. On divise cette différence qui vaut $(\frac{r}{2a})^2$ par $2a_1$ et l'on obtient une nouvelle approximation a_2 en retranchant ce quotient de a_1. On peut y voir une formule obtenue par itération. En effet, si l'on pose $A = a^2 + r$, alors a_1 et a_2 sont les deuxième et troisième termes de la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{A-a_n^2}{2a_n} \end{cases}$$

Extraction de la racine d'un binôme.

Un binôme est <constitué d'> un nombre et de la racine d'un nombre, ou bien de la racine d'un nombre et de la racine d'un nombre qui ne s'ajoutent qu'à l'aide de la conjonction de coordination, comme par exemple : cinq et racine de trois, ou racine de trois et racine de cinq.
L'apotome est le binôme dont on a séparé le plus petit monôme du plus grand à l'aide de la conjonction de privation <moins>, comme par exemple : cinq moins racine de trois, ou bien racine de cinq moins racine de trois.
.../...
<Quant à> ce qui a été dit à propos de l'extraction de la racine carrée des binômes, sache que la racine de la différence entre les quarts des deux carrés est égale à la racine du quart de la différence entre les deux carrés, et c'est également la moitié de la racine de la différence entre les deux carrés. Il y aura donc trois formes dans l'extraction des racines des binômes.
La cause du procédé dans ce <problème> se comprend de ce qui a précédé dans le chapitre du produit : tu considères le plus grand monôme divisé en deux moitiés, et tu le supposes également divisé en deux parties différentes. Puis, tu considères le produit, de l'une des deux parties différentes par l'autre, égal au quart du carré du plus petit monôme. Si tu le retranches du carré de la moitié du plus grand monôme qui est le quart de son carré, il reste le carré de la différence entre l'une des deux parties et la moitié du plus grand monôme. Tu prends sa racine et ce sera la différence indiquée. Tu l'ajoutes à la moitié du plus grand des deux monômes et tu le retranches également de la moitié du plus grand des deux monômes, il en résulte les deux parties du plus grand monôme.

Les binômes sont les nombres de la forme :

$$n + \sqrt{m} \text{ ou } \sqrt{n} + \sqrt{m}$$

avec n et m rationnels et, $\sqrt{n}$ et $\sqrt{m}$ non rationnels.

Les apotomes sont les nombres de la forme :

$$n - \sqrt{m} \text{ ou } \sqrt{n} - \sqrt{m}$$

avec n et m rationnels, $\sqrt{n}$ et $\sqrt{m}$ non rationnels et le premier monôme supérieur au second.

On utilisera par la suite les égalités suivantes :

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$$

Soit à calculer la racine carrée d'un binôme de la forme : $a + b$ avec $a > b$
a est donc le grand monôme et b le petit.

Posons $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ et $a = c + d$ avec $c > d$.

On en déduit : $\frac{c - d}{2} = c - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - d$

Posons aussi : $c \times d = \frac{b^2}{4}$ et calculons :

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c \times d =$$

$$\frac{(c+d)^2}{4} - c \times d = \frac{(c-d)^2}{4} = \left(c - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - d\right)^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c \times d} = c - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - d$$

ce qui donne :

$$c = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}} \text{ et } d = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}}$$

Puis, tu appliques à chacun d'eux la racine et ce sera la racine <carrée> demandée. Si on multiplie cette<somme> par elle-même, alors qu'elle est divisée en deux parties, il résulte du produit de chacune des deux par elle-même, le plus grand monôme, car leurs carrés sont les deux parties du plus grand monôme. Le plus petit monôme résulte de la duplication du produit de l'une des deux <parties> par l'autre, parce que le produit de l'une des deux par la seconde équivaut au produit de leurs carrés - qui sont les deux parties du plus grand monôme - l'un par l'autre, et qui est le quart du carré du plus petit monôme, comme on l'a supposé, puis de l'extraction de la racine du résultat ; et c'est la moitié du plus petit monôme. Son double est donc le plus petit monôme. Comprends-le.

Traduction Aballagh
page 637 ligne 10 à ligne 21
page 635 ligne 22 à page 637 ligne 21

et l'on obtient la racine du binôme $a+b$ en sommant les racines carrées de ces quantités :

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$$
$$= \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}}} + \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}}}$$
$$= \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}}$$

En effet :

$$\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right)^2 = \underbrace{c+d}_{a} + \underbrace{2\sqrt{c}\sqrt{d}}_{b}$$

car $2\sqrt{c}\sqrt{d} = 2\sqrt{cd} = 2\sqrt{\frac{b^2}{4}} = b.$

Classification et détermination des binômes.

Les binômes sont six, et leurs apotomes six.
[...]
Les trois premiers binômes ou apotomes ont leurs racines carrées plus proches en position du <nombre> rationnel, que les racines carrées des trois derniers <de chacune des deux espèces>.
Les trois premiers <de chaque espèce> se distinguent des <trois> derniers <ainsi>. Tu multiplies la différence entre les carrés des deux monômes par le plus grand carré des deux, s'il <en> résulte un carré, il s'agit de l'un des trois premiers, et si ce n'est pas un carré, il s'agit de l'un des trois derniers. D'autre part, le plus grand monôme est rationnel dans le premier <binôme> et dans le quatrième, le plus petit est rationnel dans le second et dans le cinquième et aucun des deux n'est rationnel dans le troisième et dans le sixième.

I <u>Classification des binômes.</u>

L'énoncé ci-contre sera éclairci par la lecture du paragraphe III ci-dessous.

Soit b un binôme de la forme $p + q$ avec $p > q$.
Si $(p^2 - q^2).p^2 = \square$ ($\square$ désignant le carré d'un nombre rationnel), alors b est l'un des trois premiers binômes.
Si $(p^2 - q^2).p^2 \neq \square$, alors b est l'un des trois derniers binômes.
En notant $b_1, b_2, \ldots, b_6$ les six binômes on a :
$b_1 = n + \sqrt{m}$ avec $n^2.(n^2 - m) = \square$.
$b_4 = n + \sqrt{m}$ avec $n^2.(n^2 - m) \neq \square$.
$b_2 = \sqrt{n} + m$ avec $n.(n - m^2) = \square$.
$b_5 = \sqrt{n} + m$ avec $n.(n - m^2) \neq \square$.
$b_3 = \sqrt{n} + \sqrt{m}$ avec $n.(n - m) = \square$.
$b_6 = \sqrt{n} + \sqrt{m}$ avec $n.(n - m) \neq \square$.

Il découle nécessairement de ce qui a été dit de leurs propriétés que, si nous voulons les déterminer, nous retranchons un carré d'un <autre> carré de telle sorte que le reste ne soit pas un carré, puis nous ajoutons la racine du reste à la racine du plus grand carré, nous aurons le premier binôme.
<Si> nous retranchons un nombre non carré d'un carré de telle sorte que le reste ne soit pas un carré, et nous ajoutons la racine du reste à la racine du carré nous aurons le quatrième binôme.
<Si> nous multiplions deux carrés par leur différence qui ne doit pas être un carré, et <si> nous ajoutons la racine du plus grand des deux résultats à la racine de leur différence, nous aurons le second binôme.
<Si> nous multiplions deux carrés par autre chose que leur différence, et qui ne soit pas un carré et nous ajoutons la racine du plus grand des deux résultats à la racine de leur différence nous aurons le troisième binôme.
<Si>, lorsque nous ajoutons un carré à un autre carré, leur somme n'est pas un carré, et <si> nous ajoutons la racine de la somme à la racine de l'un des deux carrés, nous aurons le cinquième binôme.
<Si> lorsque nous ajoutons un nombre non carré à un carré, leur somme n'est pas un carré, et <si> nous ajoutons la racine de la somme à la racine du nombre ajouté, nous aurons le sixième binôme.

Si nous utilisons la soustraction à l'aide de la conjonction de privation <moins> au lieu de l'addition à l'aide de la conjonction de coordination <et>, nous aurons les apotomes.

II <u>Détermination des binômes.</u>

Soient n et m deux rationnels vérifiant $n > m$.

❶ si $n = \square$, $m = \square$ et $n\text{-}m \neq \square$, alors :

$$\sqrt{n} + \sqrt{n-m} = b_1.$$

exemple :

pour $n = 4$ et $m = 1$, $b_1 = 2 + \sqrt{3}$.

❷ si $n = \square$, $m \neq \square$ et $n\text{-}m \neq \square$, alors :

$$\sqrt{n} + \sqrt{n-m} = b_4.$$

exemple :

pour $n = 36$ et $m = 12$, $b_4 = 6 + \sqrt{24}$.

❸ si $n = \square$, $m = \square$ et $n\text{-}m \neq \square$, alors :

$$\sqrt{n(n-m)} + \sqrt{n(n-m)-m(n-m)} = \sqrt{n(n-m)} + n-m = b_2.$$

exemple :

pour $n = 4$ et $m = 1$, $b_2 = \sqrt{12} + 3$.

❹ si $n = \square$, $m = \square$, $p \neq n\text{-}m$ et $p \neq \square$, alors :

$$\sqrt{pn} + \sqrt{pn-pm} = b_3.$$

exemple :

pour $n = 4$, $m = 1$ et $p = 2$, $b_3 = \sqrt{8} + \sqrt{6}$.

❺ si $n = \square$, $m = \square$ et $n+m \neq \square$, alors :

$$\sqrt{n+m} + \sqrt{n} = b_5.$$

exemple :

pour $n = 4$ et $m = 1$, $b_5.= \sqrt{5} + 2$.

❻ si $n = \square$, $m \neq \square$ et $n+m \neq \square$, alors :

$$\sqrt{n+m} + \sqrt{m} = b_6.$$

exemple :

pour $n = 1$ et $m = 2$, $b_5.= \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Les six procédés précédents permettent d'obtenir les différents types de binômes mais ils ne permettent pas d'obtenir tous les binômes. Par exemple, on ne peut pas obtenir $b_5 = \sqrt{6} + 2$, à l'aide du procédé ❺.

Pour obtenir les six apotomes, il suffit de remplacer le signe <u>plus</u> situé entre les deux monômes par un signe <u>moins</u> dans les six procédés précédents.

III Classification des racines des binômes.

La racine du premier binôme est un des six binômes.

❶ Soit $b_1 = n + \sqrt{m}$ avec $n^2.(n^2 - m) = k^2$.

Alors $\sqrt{b_1} = \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{k}{2n}} + \sqrt{\frac{n}{2} - \frac{k}{2n}}$ (d'après la méthode d'extraction d'un binôme vue précédemment) est l'un des six binômes.

Exemple :

$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3/2} + \sqrt{1/2}$.

La racine du second est appelé le premier bimédial.

❷ Soit $b_2 = \sqrt{n} + m$ avec $n.(n - m^2) = k^2$.

$$\sqrt{b_2} = \sqrt{\sqrt{n\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2n}\right)^2}} + \sqrt{\sqrt{n\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2n}\right)^2}},$$

c'est le <u>premier bimédial</u>, un nombre médial étant un nombre affecté du terme racine plus d'une fois.

Exemple :

$\sqrt{\sqrt{12}+3} = \sqrt{\sqrt{27/4}} + \sqrt{\sqrt{3/4}}$.

La racine du troisième est appelé le second bimédial.

❸ Soit $b_3 = \sqrt{n} + \sqrt{m}$ avec $n.(n - m) = k^2$.

$$\sqrt{b_3} = \sqrt{\sqrt{n\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2n}\right)^2}} + \sqrt{\sqrt{n\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2n}\right)^2}},$$

c'est le <u>second bimédial</u>.

Exemple :

$\sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{9/2}} + \sqrt{\sqrt{1/2}}$.

La racine du quatrième est appelée le majeur. La racine du cinquième est appelée le <nombre> en puissance d'un rationnel et d'un médial. La racine du sixième est appelée le <nombre> en puissance de deux médials.

❹ Soit $b_4 = n + \sqrt{m}$ avec $n^2.(n^2 - m) \neq \square$.

$$\sqrt{b_4} = \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2 - m}}{2}} + \sqrt{\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n^2 - m}}{2}}$$

Exemple : $\sqrt{6+\sqrt{24}} = \sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{3}}$.

❺ Soit $b_5 = \sqrt{n} + m$ avec $n.(n - m^2) \neq \square$.

$$\sqrt{b_5} = \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{\sqrt{n - m^2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{\sqrt{n - m^2}}{2}}$$

Exemple :

$\sqrt{\sqrt{6}+2} = \sqrt{\sqrt{3/2} + \sqrt{1/2}} + \sqrt{\sqrt{3/2} - \sqrt{1/2}}$

❻ Soit $b_6 = \sqrt{n} + \sqrt{m}$ avec $n.(n - m) \neq \square$.

$$\sqrt{b_6} = \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{\sqrt{n - m}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{\sqrt{n - m}}{2}}$$

Exemple :

$\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{1/2 + \sqrt{3/4}} + \sqrt{\sqrt{3/4} - 1/2}$.

La racine du premier apotome est l'un des six apotomes. La racine du second apotome est dite apotome du premier médial. La racine du troisième apotome est dite apotome du second médial. La racine du quatrième apotome est dite le mineur. La racine du cinquième apotome est dite <nombre> qui, ajouté à un rationnel, rend le tout médial. La racine du sixième apotome est dite <nombre> qui ajouté à un médial, rend le tout médial.
Chacune des racines des apotomes est l'apotome de la racine de son homologue parmi les binômes. L'ensemble des irrationnels est <constitué> de vingt quatre nombres. Ce sont le rationnel en puissance, le médial, les six binômes et leurs six apotomes ainsi que leurs dix racines <seulement> à cause de la répétition de la racine du premier des binômes et du <premier> des apotomes.
Nous avons construit les procédés relatifs aux irrationnels sur <ceux> du rationnel en puissance ; et le médial s'y rattache.
Ce qui a été dit dans l'ouvrage au sujet de la preuve dans l'addition des racines irrationnelles est particulier aux rationnels en puissance. Le procédé est général, pour eux et pour les médials mais, ce sont les rationnels en puissance qui étaient <seuls> concernés <dans l'ouvrage> parce que les médials sont de peu d'utilité dans les sciences.

Traduction Aballagh
page 637 ligne 10
page 637 ligne 22 à page 641 ligne 11

Les racines des trois derniers binômes sont des nombres de la forme : $\sqrt{p+\sqrt{q}}+\sqrt{p-\sqrt{q}}$, p étant rationnel dans le cas du quatrième binôme. Ils sont appelés majeur, nombre en puissance d'un rationnel et d'un médial et nombre en puissance de deux médials (le nombre en puissance d'un nombre désigne sa racine).

On a des résultats analogues pour les apotomes et on arrive, ainsi, à une classification des nombres irrationnels en vingt-quatre catégories.

4ème partie :
Ibn al-Banna' et les nombres figurés.

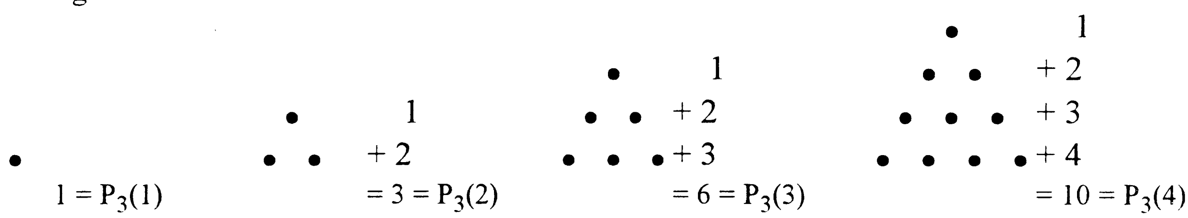
par Elisabeth Hébert.

Pour découvrir les nombres figurés.

Les nombres figurés s'inscrivent dans une longue tradition, mais sont peu connus du public. Avant de découvrir les écrits d'Ibn al Banna', nous nous proposons de donner quelques informations élémentaires concernant ceux-ci. Suite à l'étude de ce chapitre du *Raf^c al-Hijab* sur les nombres figurés, nous essayerons, de resituer la démarche d'Ibn al-Banna' par rapport à ses prédécesseurs et évoquerons quelques questions que se sont posés les mathématiciens des siècles suivants à ce sujet.

On peut comme dans la tradition pythagoricienne définir les nombres figurés à partir des figures géométriques. Considérons quelques uns de ceux-ci.

Les trigones.

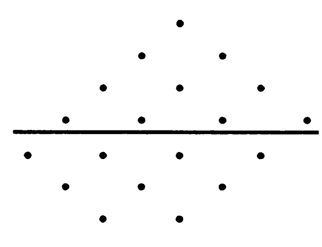


Un trigone est parfois appelé nombre triangulaire.

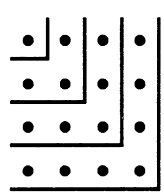
Le $n^{ème}$ trigone est noté $P_3(n)$, chacun des côtés de sa représentation est constitué de n points.

Il s'obtient en faisant la somme des n premiers entiers: $P_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i$.

En considérant la composition de deux mêmes trigones, on établit aisément que : $\boxed{P_3(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$.



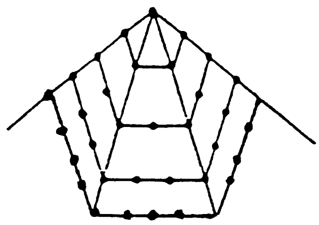
Les tétragones.



Un tétragone est parfois appelé nombre carré. Le $n^{ème}$ tétragone est noté $P_4(n)$ et vérifie $P_4(n) = n^2$.

Les figures successives s'obtiennent en rajoutant à chaque étape une figure appelée **gnomon.** Dans le cas des tétragones, les gnomons successifs sont la suite des nombres impairs. Ainsi, les tétragones révèlent directement la propriété : $\boxed{P_4(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i+1) = n^2}$.

Les pentagones.



En ajoutant à chaque étape un gnomon :

$P_5(1) = 1$

$P_5(2) = 1+4 = 5$

$P_5(3) = 5+7 = 12$

$P_5(4) = 12+10 = 22$

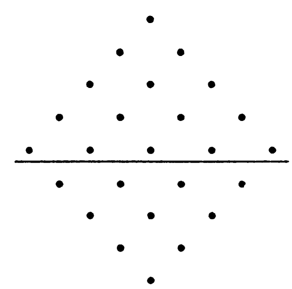
$P_5(5) = 22+13 = 35$

D'une manière générale, nous noterons $P_k(n)$ le nombre figuré ayant k côtés, de rang n. Le rang peut être décrit par le nombre de points constituant chacun des côtés.

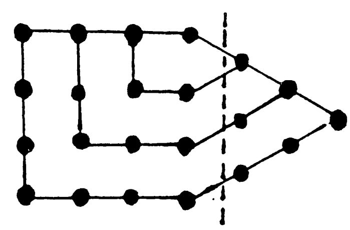
En considérant la composition de trigones de rangs n et n + 1, on établit que :

$$P_3(n) + P_3(n+1) = P_4(n+1) = (n+1)^2.$$

Les nombres trigones peuvent donc être considérés comme les nombres générateurs des nombres tétragones.



Un nombre pentagone peut aussi (avec un peu de souplesse !), être considéré comme la somme d'un tétragone et d'un trigone. Ainsi: $P_5(4) = P_4(4) + P_3(3)$



En généralisant ces observations, on comprend que les nombres figurés $P_k(n)$ puissent être construits par l'un ou l'autre de principes suivants :

- soit par **ajout d'un gnomon** à un nombre figuré $P_k(n-1)$ de rang inférieur et ayant même nombre de côtés.
- soit par **ajout d'un trigone** à un nombre figuré $P_{k-1}(n)$ de même rang mais un ayant un côté de moins.

En fait, Ibn al-Banna' ne se place à aucun moment en référence à une quelconque représentation géométrique, il considère les nombres figurés comme définis par une pure relation numérique de récurrence, correspondant à ce deuxième principe de construction, à savoir : $\boxed{P_k(n) = P_{k-1}(n) + P_3(n-1)}$.

A la fin de cette étude (voir page 100), nous proposons l'étude mathématique de diverses suites dont les termes sont construits avec les $P_k(n)$ définis par cette relation de récurrence. L'usage du symbolisme algébrique actuel nous semblant beaucoup trop éloigné du point d'appui qui sous-tend le raisonnement d'Ibn al-Banna', nous avons volontairement associé l'usage de tableaux à nos commentaires du texte d'Ibn al-Banna'.

Afin de permettre au lecteur de s'approprier les diverses propriétés des nombres figurés, nous proposons pour chacun des résultats essentiels un tableau à compléter. Nous encourageons vivement le lecteur, pour chacun des cas, **à entamer** le travail calculatoire indiqué et à comparer ses résultats au tableau-correction qui lui est donné.

Le petit formulaire du Talkhis.

Chapitre II
De l'addition.

Si les nombres présentent entre eux une différence connue, obtenue autrement que par la multiplication, multiplie alors la différence par le nombre des termes moins un ; à ce produit ajoute le premier terme. La somme obtenue est égale au dernier terme. Ajoute ce terme au premier ; multiplie le résultat par la moitié du nombre des termes ; tu obtiens la réponse.
Pour l'addition de la suite <naturelle> des nombres <entiers>, tu effectues le demi-produit du dernier terme par ce terme augmenté de un.

La somme des carrés <des n premiers nombres entiers> s'obtient en multipliant la somme <de la suite des entiers>, par les deux tiers du dernier terme augmenté du tiers de l'unité.
La sommation des cubes <de la suite naturelle des nombres entiers> s'obtient en élevant au carré la somme <des termes de la suite>.

Pour la somme de la suite des nombres impairs, tu élèves au carré la demi-somme du dernier terme et de l'unité.
La <somme des> carrés de cette suite s'obtient en multipliant le sixième du dernier terme par le produit des deux termes consécutifs qui le suivent immédiatement.
La <somme> des cubes des termes de cette suite s'obtient en multipliant la somme par son double diminué d'une unité.

Dans la sommation de la suite des nombres pairs, tu ajoutes toujours deux au dernier terme de la suite, et tu multiplies la moitié du total obtenu par la moitié du dernier terme.
La somme des carrés <des termes de cette suite> s'obtient en multipliant les deux tiers du dernier terme augmentés de deux tiers d'unité, par la somme, ou bien en multipliant le sixième du dernier terme par le produit des deux nombres entiers qui le suivent immédiatement.
La somme des cubes <des termes de cette suite> s'obtient en multipliant la somme par son double.

Talkhis traduit par Souissi, de la page 46 à la page 49.

Comme nous l'avons déjà vu, le *Thalkis* regroupe les énoncés de propositions établies dans le *Raf^c al-Hijab*. L'extrait présenté ci-contre, est un condensé des résultats qu' Ibn al-Banna' démontre à partir des nombres polygonaux. Pour ce faire, Ibn al-Banna' prend appui sur les diverses expressions des suites arithmétiques, et de leurs sommes partielles.

Suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r.

$u_n = (n-1)r + u_1$ et $S_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2}$

Sommations des nombres entiers.

$$S = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)}{2} \times \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = S^2 \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Sommations des nombres entiers impairs (jusqu'à N impair).

$$I = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{N} i = \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{N} i^2 = \frac{N}{6}(N+1)(N+2) \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{i=0}^{n}(2i+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{N} i^3 = I \times (2I-1)$$

Sommations des nombres entiers pairs (jusqu'à N pair).

$$P = \sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ pair}}}^{N} p = \frac{N+2}{2} \times \frac{N}{2} \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$$

$$\sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ pair}}}^{N} p^2 = \left(\frac{2N}{3}+\frac{2}{3}\right) \times P = \frac{2N}{6} \times (N+1) \times (N+2) \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{i=1}^{n}(2i)^2 = \frac{n(2n+1)(2n+2)}{3}$$

$$\sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ pair}}}^{N} p^3 = P \times 2P$$

Complément :

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Détermination des nombres polygonaux $P_k(n)$ de k côtés au rang n.

<L'étude> des tétragones repose sur les trigones. <Il en est de même> pour les pentagones et pour toutes les <autres> figures <numériques>. Montrons-le, et montrons la manière de les déterminer, la manière d'y procéder, et la manière de les sommer, tout cela étant inclus dans le procédé indiqué dans l'ouvrage.

Je dis : les arithméticiens ont disposé la suite des nombres <entiers> sur une ligne, et les ont appelés côtés par analogie avec les lignes, et ils ont inclus dans le Un toutes les figures en puissance. Il est <à la fois> côté, trigone, tétragone, et les autres figures, en puissance. Puis, ils ont ajouté le un trigone au côté-deux, et ce fut le second trigone, qu'ils ont ajouté au côtés-trois, et ce fut le troisième trigone. Ils l'ont ajouté au côtés-quatre, et ce fut le quatrième trigone; et <ainsi> selon ce procédé, ils eurent la suite des trigones qu'ils ont disposés selon une seconde ligne.

Puis ils ont ajouté le premier trigone au second, et ce fut le second tétragone, car le un qui le précède est un tétragone en puissance. Puis ils ont ajouté le second trigone au troisième, et ce fut le troisième tétragone, et ainsi fut engendré, la suite des tétragones.

Puis, ils ont ajouté également les tétragones aux trigones, et ils ont eu les pentagones. Puis ils ont ajouté également les pentagones aux trigones, et ils eurent les hexagones. Et ils procédèrent ainsi pour toutes les figures <numériques>.

En voici le tableau :

côtés	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
trigones	*1*	*3*	*6*	*10*	*15*
tétragones	*1*	*4*	*9*	*16*	*25*
pentagones	*1*	*5*	*12*	*22*	*35*
hexagones	*1*	*6*	*15*	*28*	*45*

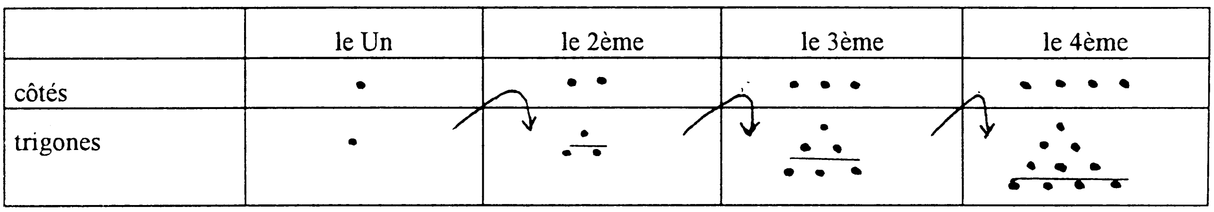
La première ligne horizontale est <celle> des côtés, la seconde <celle> des trigones, la troisième <celle> des tétragones, la quatrième <celle> des pentagones, la cinquième <celle> des hexagones, et il en est ainsi après cela, selon la suite des figures numériques.

Raf^{c} al-Hijab traduit par Aballagh
de la page 20 ligne 4 à la page 522 ligne 6

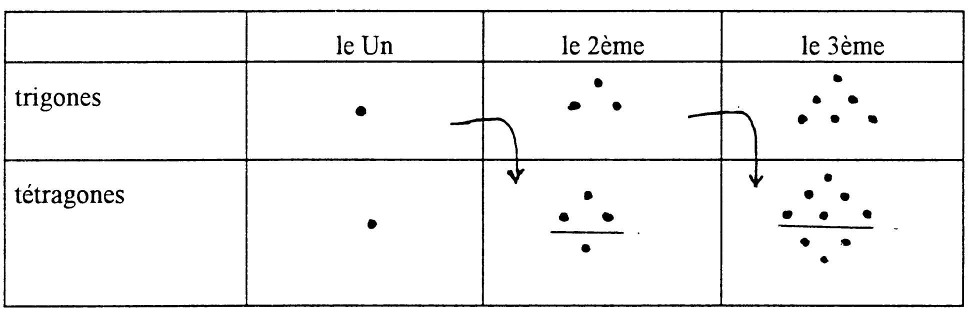
Ibn al-Banna' explique, en référence aux démarches traditionnelles, comment générer les premiers nombres polygonaux. Il définit le nombre polygonal $P_k(n)$ de k côtés au rang n par une relation de récurrence qu'il établit par induction :

$$\mathbf{P_k(n) = P_{k-1}(n) + P_3(n-1) \text{ pour } k > 3, \text{ avec } P_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i.}$$

Ibn al-Banna' explique en premier lieu comment générer les quatre premiers trigones :



Puis comment générer les trois premiers tétragones à partir des trigones:



La relation de récurrence permet au lecteur, d'établir le tableau donné dans le *Raf^c al-Hijab*.

côtés	$P_2(n)$	1	2	3	4	5	6
trigones	**$P_3(n)$**	**1**	**3**	**6**	**10**		
tétragones	$P_4(n)$	1	4	9			
pentagones	$P_5(n)$						....
hexagones	$P_6(n)$						

En considérant les nombres polygonaux obtenus par additions successives d'un même trigone, il se trouve établit que:

Pour n donné, $(P_k(n))_{k\geq 2}$ est une suite arithmétique de raison $P_3(n-1)$ et de premier terme n.

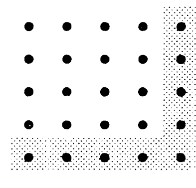
Les suites arithmétiques définies par les gnomons $G_k(n)$.

La première colonne n'a pas d'accroissement, l'accroissement de la seconde est le premier trigone qui est un. L'accroissement de la troisième colonne est le second trigone, celle de la quatrième colonne est le troisième trigone, et ainsi de suite, l'accroissement de chaque colonne étant le trigone de la colonne précédente, et toutes <les colonnes> sont des suites arithmétiques.
La première ligne horizontale qui est celle des côtés s'accroît selon des nombres égaux puisqu'elle s'accroît de un. La ligne des trigones s'accroît selon des nombres qui s'accroissent de un qui est le côté. La ligne des tétragones s'accroît selon des nombres qui s'accroissent du côté deux. La ligne des pentagones s'accroît selon des nombres qui s'accroissent du côté trois ; et ainsi de suite, chaque ligne parmi les lignes horizontales des figures s'accroît selon des nombres qui sont tous dans un rapport arithmétique et dont le premier est un et ces nombres s'accroissent d'un nombre égal au nombre de coté de cette figure moins deux.
De cela, il apparaît clairement que :
- La sommation de la suite des nombres <entiers> engendre la suite des trigones.
- La sommation de la suite des impairs engendre les tétragones, qui sont également engendrés par le produit des côtés par eux mêmes.
- La sommation des nombres qui s'accroissent de trois à partir de un engendrent les pentagones.
- La sommation des nombres qui s'accroissent de quatre, à partir de un engendrent l'hexagone et le procédé est analogue pour toutes les figures.

Raf^{c} al-Hijab traduit par Aballagh
de la page 522 ligne 7 à la page 523 ligne 14.

En considérant le tableau des nombres polygonaux suivant les lignes ou suivant les colonnes, on voit apparaître de multiples suites. Ibn al-Banna' s'intéresse à la suite des accroissements obtenus entre deux nombres polygonaux consécutifs pour une ligne donnée. En fait, il étudie, sans l'expliciter, la suite des gnomons propres aux côtés, aux trigones, aux tétragones, ... Posons : $\boxed{G_k(n) = P_k(n) - P_k(n-1) \quad \text{pour } n > 1 \text{ et } G_k(1) = 1.}$

La représentation des tétragones, par exemple, justifie le calcul de $G_4(5) = 25 - 16 = 9$



Dans certaines des cases du tableau ci-dessous, on a rappelé, en bas à droite le $P_k(n)$ précédemment calculé. On indiquera dans chacune, en haut à gauche, la valeur de la différence $G_k(n)$. On pourra alors repérer que les suites définies par les gnomons selon les colonnes ou selon les lignes, sont des suites arithmétiques dont les raisons sont les entiers consécutifs.

	1er gnomon	2ème gnomon	3ème gnomon	4ème gnomon	5ème gnomon	6ème gnomon	raison de l'accroissement
côtés (2)	1	2	3	4	5	6	
trigones (3)	1	3	6	10	15	21	
tétragones (4)	1	4	9	16	9 25	36	
pentagones (5)	1	5	12	22	35	51	
raison							/////////////

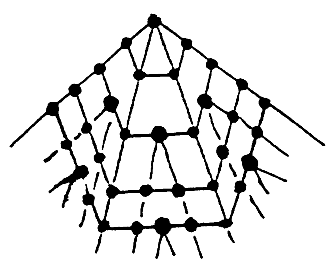
On aboutit ainsi au tableau suivant :

	1er gnomon	2ème gnomon	3ème gnomon	4ème gnomon	5ème gnomon	6ème gnomon	**raison de l'accroissement k-2**
côtés (2)	1	1	1	1	1	1	**0**
trigones (3)	1	2	3	4	5	6	**1**
tétragones (4)	1	3	5	7	9	11	**2**
pentagones (5)	1	4	7	10	13	16	**3**
raison n-1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	/////////////

On remarquera que:

Pour k fixé, $(G_k(n))_{n\geq 1}$ est une suite arihmétique de raison k - 2 et de premier terme 1.
Pour n fixé, $(G_k(n))_{k\geq 2}$ est une suite arihmétique de raison n - 1 et de premier terme 1.

On comprendra aisément à partir des pentagones, que les gnomons d'un nombre polygonal à k côtés ont k -2 côtés, et que chacun des côtés augmente entre deux étapes d'un seul élément.



Tout nombre polygonal peut donc être considéré comme la somme partielle d'une suite arithmétique: $\boxed{P_k(n) = \sum_{i=1}^{n} G_k(i)}$ avec $P_k(n) = \sum_{i=1}^{n}[(k-2)(i-1)+1] = \sum_{i=0}^{n-1}[(k-2)i+1]$.

En particulier, Ibn al-Banna' énonce: $P_2(n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$ $\quad P_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ $\quad \boxed{P_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2}$

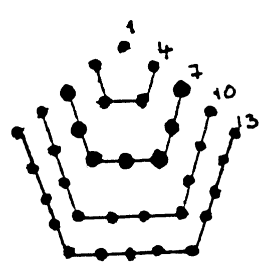
$P_5(n) = \sum_{i=0}^{n-1}(3i+1) \qquad P_6(n) = \sum_{i=0}^{n-1}(4i+1) \quad .....$

Les suites de termes $\frac{P_k(n)}{n}$.

Il apparaît également de cela que, si on divise chaque figure par son côté, les résultats s'accroîtront horizontalement selon des demis <en nombre> correspondant à la suite des nombres <entiers>, les résultats des trigones s'accroissant d'un demi, ceux des tétragones de deux demis, et ainsi de suite, les résultats de chaque figure s'accroissant selon des demis en nombre égal au nombre des côtés de la figure moins deux.
Elles s'accroissent aussi verticalement selon des demis <en nombre> égal à la valeur du côté, qui précède le dernier.
<Dans> tous les cas, le premier <terme de la suite> est égal à un.

Raf^{c} al-Hijab traduit par Aballagh,
de la page 53 ligne 15 à la page 54 ligne 9

Il n'y a dans le texte d'Ibn al-Banna' aucune indication pouvant permettre une éventuelle représentation géométrique des termes $\frac{P_k(n)}{n}$. Nous nous risquerons à justifier ces termes, en disant que l'on étudie ici "la taille du gnomon moyen" constituant un nombre polygonal. Justifions ceci en considérant les pentagones.



$$
\begin{aligned}
P_5(n) &= G_5(1) + G_5(2) + G_5(3) + G_5(4) + G_5(5) \\
&= [G_5(1) + G_5(5)] + [G_5(2) + G_5(4)] + [G_5(3)] \\
&= (1 + 13) + (4 + 10) + 7 \\
&= 5 \times 7
\end{aligned}
$$

Et par suite $\frac{P_5(5)}{5} = \frac{5 \times 7}{5} = 7 = G_5(3)$.

Cette interprétation, stricto sensu, n'est bien évidemment valide que pour n impair.

L'intérêt numérique de telles suites apparaît en remplissant le tableau ci-dessous :

	$\frac{P_k(1)}{1}$	$\frac{P_k(2)}{2}$	$\frac{P_k(3)}{3}$	$\frac{P_k(4)}{4}$	$\frac{P_k(5)}{5}$	$\frac{P_k(6)}{6}$	**raison**
côtés (2)	1	2	3	4	5	6	
trigones (3)	1	3	6	10	15	21	
tétragones (4)	1	4	9	16	25	36	
pentagones (5)	1	5	12	22	7 35	51	
raison							//////////////

On aboutit ainsi au tableau suivant :

	$\frac{P_k(1)}{1}$	$\frac{P_k(2)}{2}$	$\frac{P_k(3)}{3}$	$\frac{P_k(4)}{4}$	$\frac{P_k(5)}{5}$	$\frac{P_k(6)}{6}$	**raison (k-2)/2**
côtés (2)	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
trigones (3)	**1**	**3/2**	**2**	**5/2**	**3**	**7/2**	**1/2**
tétragones (4)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**1**
pentagones (5)	**1**	**5/2**	**4**	**11/2**	7	**17/2**	**3/2**
raison (n-1)/2	**0**	**1/2**	**1**	**3/2**	**2**	**5/2**	//////////////

On obtient donc des suites arithmétiques dont les raisons constituent elles-mêmes des suites arithmétiques de raison 1/2.

La justification des résultats obtenus n'est pas explicitée. Il est vraisemblable qu'ils découlent du résultat bien connu et rappelé dans le *Thalkis* concernant les sommes partielles des suites arithmétiques. En effet :

$$P_k(n) = \sum_{i=1}^{n} G_k(i) = \frac{n\left[G_k(1) + G_k(n)\right]}{2} \qquad \text{avec } G_k(i) = (k-2)i + 1$$

d'où : $P_k(n) = \dfrac{n\left[1 + (k-2)n + 1\right]}{2} = n\left(\dfrac{(k-2)n}{2} + 1\right)$

Et par suite : $\dfrac{P_k(n)}{n} = \dfrac{k-2}{2}n + 1$ et $\dfrac{P_k(n)}{n} = \dfrac{n}{2}(k-2) + 1.$

Pour k fixé, $\left(\dfrac{P_k(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ est une suite arihmétique de raison $\dfrac{k-2}{2}$ de premier terme 1.

Pour n fixé, $\left(\dfrac{P_k(n)}{n}\right)_{k\geq 2}$ est une suite arihmétique de raison $\dfrac{n-1}{2}$ de premier terme 1.

Les suites de termes $\dfrac{P_k(1)+P_k(2)+\ldots+P_k(n)}{1+2+\ldots+n}$

> *Il apparaît également de cela que, si on divise la somme <des éléments> de chaque ligne par la somme des côtés <correspondants>, les résultats s'accroissent horizontalement selon des tiers (en nombre) correspondant à la suite des nombres <entiers>: la ligne des trigones s'accroissera d'un tiers ; celle des tétragones de deux tiers, celle des pentagones de un, celle des hexagones de un plus un tiers ; et il en est ainsi pour les suivantes.*
> *Elles s'accroissent aussi verticalement selon des tiers <en nombre> égal à la valeur du côté qui précède le dernier, le premier <terme de la suite verticale> étant toujours un.*
>
> *Raf^c al-Hijab traduit par Aballagh,*
> *de la page 54 ligne 10 à la page 54 ligne 22*

Ibn an Banna considère dans cet extrait les suites $\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_k(i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} i}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_k(i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} i}\right)_{k\geq 2}$.

Nous verrons ultérieurement (page 91) qu'Ibn al-Banna' étudie les nombres pyramidaux que nous définissons aujourd'hui par : $S_k(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_k(i)$. De telles suites, dans une logique des représentations, donneraient "la taille des gnomons moyens" constituant chacune des pyramides. Ibn al-Banna' ne mentionne nullement une telle représentation. L'intérêt de telles suites réside dans ses propriétés. En effet, Ibn al-Banna' applique ici un résultat particulier des suites arithmétiques que nous ne trouvons nulle part dans le *Talkhis* et le *Raf^c al-Hijab*, à savoir :

> Si $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in N^*}$ est une suite arithmétique de raison K, de premier terme 1, alors la suite $\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} u_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} i}\right)_{n\in N^*}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{2K}{3}$, de premier terme 1.

En effet, si $\dfrac{u_i}{i} = 1 + (i-1)K$, alors $u_i = i + i\,(i-1)K$, et par suite :

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i + K\sum\limits_{i=1}^{n} i(i-1)}{\sum\limits_{i=1}^{n} i} = 1 + K \times \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \times \frac{2}{n(n+1)} = 1 + \frac{2K}{3}(n-1).$$

Dans le cas présent $\left(\dfrac{P_k(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ est une suite arihmétique de raison $\dfrac{k-2}{2}$,de premier terme 1.

De ce fait : $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_k(i)}{\sum_{i=1}^{n} i} \right)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{k-2}{3}$, de premier terme 1.

Et de plus : $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_{k+1}(i)}{\sum_{i=1}^{n} i} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_k(i)}{\sum_{i=1}^{n} i} = [1 + \dfrac{(k+1)-2}{3}(n-1)] - [1 + \dfrac{k-2}{3}(n-1)] = \dfrac{n-1}{3}$

Et donc $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_k(i)}{\sum_{i=1}^{n} i} \right)_{k\geq 2}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{n-1}{3}$, de premier terme 1.

Etudions ces propriétés sur les premiers termes.

	$\dfrac{S_k(1)}{1}$	$\dfrac{S_k(2)}{1+2}$	$\dfrac{S_k(3)}{1+2+3}$	$\dfrac{S_k(4)}{1+2+3+4}$	$\dfrac{S_k(5)}{1+2+3+4+5}$	**raison**
pyramides côtés (2)	1	3	6	10	15	
pyramides trigones (3)	1	4	10	20	35	
pyramides tétragones (4)	1	5	14	35	55	
raison						/////////////

Ce qui aboutit au tableau suivant :

	$\dfrac{S_k(1)}{1}$	$\dfrac{S_k(2)}{1+2}$	$\dfrac{S_k(3)}{1+2+3}$	$\dfrac{S_k(4)}{1+2+3+4}$	$\dfrac{S_k(5)}{1+2+3+4+5}$	**raison (k-2)/3**
pyramides côtés (2)	1	1	1	1	1	**0**
pyramides trigones (3)	1	4/3	5/3	2	7/3	**1/3**
pyramides tétragones (4)	1	5/3	7/3	3	11/3	**2/3**
raison (n-1)/3	**0**	**1/3**	**2/3**	**1**	**4/3**	/////////////

Résumons les résultats ici apparus:

Pour k fixé, $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_k(i)}{\sum_{i=1}^{n} i} \right)_{n\geq 1}$ **est une suite arthmétique de raison** $\dfrac{k-2}{3}$**, de premier terme 1.**

Pour n fixé, $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_k(i)}{\sum_{i=1}^{n} i} \right)_{k\geq 2}$ **est une suite arthmétique de raison** $\dfrac{n-1}{3}$**, de premier terme 1.**

Différentes manières de déterminer un nombre polygonal.

Le procédé pour obtenir n'importe quelle figure, comme par exemple l'octogone de <côté> cinq, <consiste à> sommer à l'aide du procédé de l'ouvrage, une suite de cinq nombres de raison six, et de premier <terme> un; cela donnera soixante cinq qui est l'octogone de <côté> cinq.

Si nous voulons, nous disons, <étant donnée> une suite de nombres de raison dix, qui est le nombre <égal au> trigone précèdent la colonne de cinq, et de plus petite extrémité cinq, quelle est sa plus grande extrémité? Tu la trouves, à l'aide du procédé de l'ouvrage, égale à soixante cinq ; et c'est l'octogone de <côté> cinq.

Si nous voulons, nous disons : si chaque octogone est divisé par son côté, les résultats formeront une suite horizontale de raison six demis, comme il a été indiqué précédemment, et c'est <égale à> trois, quel est <alors> le résultat <de la division de > l'octogone de <côté> cinq ? Nous avons cinq nombres de premier <terme> un, de raison trois, et dont le dernier terme est le résultat <de la division de> l'octogone de côté cinq. Tu le détermines, et ce sera treize, que tu multiplieras par cinq ; ce <qui> donnera l'octogone ; car si on multiplie le résultat de la division par le diviseur, on retrouve le divisé, comme cela sera montré.

Si nous voulons, nous disons : si on divise par cinq chaque nombre de la colonne de cinq, les résultats formant une suite de raison quatre demis c'est-à-dire deux, <correspondant au> côté quatre qui précède le dernier terme cinq. Nous avons donc une suite de sept nombres, de raison deux, et de premier terme un. Que vaut son dernier terme ? on le trouve égal à treize, et on le multiplie par cinq, comme précédemment.

Et l'on procédera ainsi pour trouver n'importe quelle figure <numérique>, ou bien, à l'aide d'une suite arithmétique horizontale, en calculant le plus grand terme et la somme, ou bien à l'aide d'une suite verticale de raison le trigone qui la précède, en calculant son plus grand terme, ou bien à l'aide des résultats de la division des suites verticales, et horizontale <par les entiers successifs>, puis la multiplication par le diviseur.

Raf^{c} al-Hijab traduit par Aballagh,
de la page 54 ligne 22 à la page 56 ligne 17

Ibn al-Banna' donne diverses applications des résultats démontrés auparavant. Pour chacune des applications, nous rappelons le résultat utilisé.

♦ $(P_k(n))_{n\geq 1}$ est formée des sommes partielles de la suite des gnomons :

$P_k(n) = \sum_{i=1}^{n} G_k(i)$ où $(G_k(n))_{n\geq 1}$ est une suite aritmétique de raison k - 2 et de premier terme 1.

Par suite : $P_8(5) = \sum_{i=1}^{5}[6(i-1)i+1] = 6 \times \frac{5 \times 4}{2} + 5 = 65$

♦ $(P_k(n))_{k\geq 2}$ est une suite arihmétique de raison $P_3(k-1)$, de premier terme n.

Par suite : $P_3(4) = 10$ et $P_8(5) = 5 + (8 - 2) \times 10 = 65$.

♦ $\left(\frac{P_k(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{k-2}{2}$, de premier terme 1.

Par suite : $\frac{P_8(5)}{5} = 1 + (5-1) \times \frac{8-2}{2} = 13$. D'où $P_8(5) = 13 \times 5 = 65$.

♦ $\left(\frac{P_k(n)}{n}\right)_{k\geq 2}$ est une suite arihmétique de raison $\frac{n-1}{2}$, de premier terme 1.

Par suite : $\frac{P_8(5)}{5} = 1 + (8-2) \times \frac{5-1}{2} = 13$. D'où $P_8(5) = 13 \times 5 = 65$.

Bilan:

Pour déterminer un nombre polygonal, on peut utiliser:

-la suite horizontale définie comme la somme des termes de la suite arithmétique des gnomons.

- la suite arithmétique verticale des nombres polygonaux.

- la suite arithmétique verticale des quotients.

- la suite arithmétique horizontale des quotients.

Calcul des sommes des carrés des pairs ou impairs.

Il apparaît clairement aussi, de ce qui précède, qu'étant donné deux nombres successifs quelconques, le produit de l'un par la moitié de l'autre donne le trigone du plus petit des deux ; dans le double de ce trigone, il y a un nombre de fois le plus grand <des deux nombres> égal au plus petit, qui est le plus grand moins un.

Tout trigone est constitué de <la somme de> son côté et du trigone qui le précède.

Quant à la somme des trigones successifs, si le côté de leur dernier terme est impair, elle est <égale> à la somme des carrés impairs successifs, et si le côté de leur dernier terme est pair, elle est <égale> à la somme des carrés de pairs successifs, car chaque carré est la somme de deux trigones, celui de son côté, et celui du côté qui le précède.

Il découle de cela que, si chaque nombre est multiplié par la moitié de la somme de ses deux extrémités qui sont les deux nombres qui sont à égale distance de lui, le résultat est le carré de ce nombre ; cela découle également des propriétés des suites arithmétiques.

Si nous voulons sommer à partir du premier trigone, jusqu'au cinquième, nous sommes à partir du carré de un, jusqu'au carré de cinq selon la suite des impairs ; et si nous voulons sommer à partir du trigone de un jusqu'au trigone de quatre, nous sommons du carré de deux jusqu'au carré de quatre selon la suite des pairs.

Si nous voulons, nous multiplions le dernier terme moins un, par le tiers de un, qui est selon ce qui a précédé, la raison des résultats <de la division> des trigones <par leurs côtés>, et nous lui ajoutons un. Et ceci est égal au tiers du troisième nombre en partant du dernier, après lui. Il en résultera le plus grand terme <de la suite des quotients>, que nous multiplions par le trigone du dernier <côté>.

C'était là, la règle pour sommer les suites des carrés des <entiers> impairs ou pairs.

Raf^{c} al-Hijab traduit par Aballagh,
de la page 56 ligne 18 à la page 58 ligne 12

De par leur définition les **trigones** vérifient :

$$\frac{n(n+1)}{2} = P_3(n) \text{ et } 2\,P_3(n) = n(n+1) \qquad P_3(n) = n + P_3(n-1)$$

De par leur définition les **tétragones** vérifient :

$$P_4(n) = P_3(n) + P_3(n-1) \quad \text{ce qui s'exprime par } n^2 = n\frac{(n-1)+(n+1)}{2}$$

Il y a deux situations possibles lorsqu'on somme deux à deux des trigones consécutifs.

• Le dernier terme est impair :

côtés		1	2	3	4	5
trigones	$P_3(n)$	1	3	6	10	15
tétragones	$P_4(n)$	1		9		25

$P_3(1) + P_3(2) +.P_3(3) + P_3(4) + P_3(5) = 1^2 + 3^2 + 5^2$

• Le dernier terme est pair :

côtés		1	2	3	4
trigones	$P_3(n)$	1	3	6	10
tétragones	$P_4(n)$		4		16

$P_3(1) + P_3(2) +.P_3(3) + P_3(4) = 2^2 + 4^2$

$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_3(i)}{\sum_{i=1}^{n} i}\right)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{3-2}{3}$, de premier terme 1.

Par suite, pour sommer les carrés des entiers pairs ou impairs , on calcule :

$$\sum_{i=1}^{n} P_3(i) = \left[(n-1)\frac{1}{3}+1\right] \times P_3(n) = \frac{n+2}{3} \times P_3(n)$$

Et puisque $P_3(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, nous énonçons :

Pour n pair, $\quad 2^2 + 4^2 + ...+ n^2 = \dfrac{n}{6} \times (n+1)(n+2)$

Pour n impair, $\quad 1^2 + 3^2 + ...+ n^2 = \dfrac{n}{6} \times (n+1)(n+2)$

Les nombres pyramidaux $S_k(n) = P_k(1)+P_k(2)+...+P_k(n)$

Il est également clair, et évident, que la ligne des tétragones est constituée de la ligne des trigones, et des trigones qui sont inférieurs <en nombre> à ces premiers trigones d'un seul trigone, <celui> qui est le dernier <de la ligne>.

- La ligne des pentagones est constituée de la ligne des tétragones, et de cette seconde <catégorie de> trigones mêmes.

- De même, chaque ligne d'une figure excède celui qui la précède de ces mêmes trigones.

- Les sommes des lignes horizontales sont donc selon un rapport arithmétique.

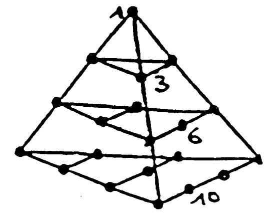
Il découle de ce qui a été fait là que, si nous voulons sommer une suite horizontale quelconque de figures <numériques>, nous sommons la suite des trigones jusqu'au nombre supposé, ce sera le plus petit terme, puis nous sommons les trigones qui sont <en nombre> inférieur aux premiers de leur derniers <termes>, et ce sera la raison, nous multiplions cette raison par la différence <de termes> entre le trigone, et cette dernière figure, et ce sera le nombre d'éléments <de la suite>, c'est-à-dire le nombre de figures <comptées> verticalement moins un. Nous ajoutons le résultat au plus petit terme, et on aura le plus grand terme, qui est la somme demandée de ces figures <comptées> horizontalement.

Si nous voulons, par exemple, sommer la suite des heptagones à partir de l'heptagone de un jusqu'à l'heptagone de cinq, nous sommons du trigone de un jusqu'au trigone de cinq, et c'est la somme des carrés des <entiers> impairs de un jusqu'à cinq ; ce sera trente cinq, qui est la plus petite extrémité. Puis, nous sommons du trigone de un jusqu'au trigone de quatre; c'est la somme des carrés des <entiers> pairs de deux jusqu'à quatre : ce sera vingt. Nous la multiplions par quatre qui est la différence <de termes> entre le trigone, et l'heptagone, et c'est le nombre de <ces> éléments moins un car, du trigone à l'heptagone, il y a verticalement cinq figures. Le résultat sera quatre vingt, que nous ajouterons à la plus petite extrémité, et l'on aura la plus grande extrémité, qui est cent quinze, et c'est la somme des heptagones de un, jusqu'à l'heptagone de <côté> cinq.

Raf^{c} al-Hijab traduit par Aballagh,
de la page 58 ligne 13 à la page 60 ligne 5

Ibn al-Banna' considère ici, comme dans la tradition, les nombres pyramidaux que nous définissons aujourd'hui par $S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} P_k(i)$.

On a représenté ci-contre une pyramide à base triangulaire de rang 4, constituée de 1 + 3 + 6 + 10 = 20 points, soit $S_3(4) = 20$.



Considérons donc les tableaux donnant les premiers termes $S_k(n)$.

	$S_k(1)$	$S_k(2)$	$S_k(3)$	$S_k(4)$	$S_k(5)$	$S_k(6)$
côtés (2)	1	2	3	4	5	6
trigones (3)	1	3	6	**20** 10	15	21
tétragones (4)	1	4	9	16	25	36
pentagones (5)	1	5	12	22	35	51
raison						

On aboutit ainsi au tableau suivant:

	$S_k(1)$	$S_k(2)$	$S_k(3)$	$S_k(4)$	$S_k(5)$	$S_k(6)$
côtés (2)	1	3	6	10	15	21
trigones (3)	1	4	10	20	35	56
tétragones (4)	1	5	14	30	55	81
pentagones (5)	1	6	18	40	75	126
raison $S_3(n-1)$	**0**	**1**	**4**	**10**	**20**	**35**

Il apparaît que la suite $(S_k(n))_{k\geq 2}$ est une suite arithmétique de raison $S_3(n-1)$, de premier terme $S_2(n)$. Ibn al-Banna' justifie ce résultat dans le *Rafᶜ al-Hijab* comme suit :

Les tétragones vérifient : $P_4(n) = P_3(n) + P_3(n-1)$.

Les pentagones vérifient : $P_5(n) = P_4(n) + P_3(n-1)$.

Et plus généralement : $P_k(n) = P_{k-1}(n) + P_3(n-1)$ pour $k \geq 3$.

Par suite : $\sum_{i=2}^{n} P_k(i) = \sum_{i=2}^{n} P_{k-1}(i) + \sum_{i=2}^{n} P_3(i-1)$ ou encore $S_k(n) = S_{k-1}(n) + S_3(n-1)$ pour $k \geq 3$.

D'où les résultats $S_k(n) = P_3(n) + (k - 3)\, S_3(n-1)$ pour $k \geq 3$.

Pour n fixé, $(S_k(n))_{k\geq 2}$ est une suite arithmétique de raison $S_3(n-1)$, de premier terme $P_3(n)$.

Exemple : $S_7(5) = \sum_{i=2}^{5} P_7(i) = S_3(5) + (7-3)\, S_3(4)$

$= (1^2 + 3^2 + 5^2) + 4 \times (2^2 + 4^2) = 35 + 4 \times 20 = 35 + 80 = 115.$

Diverses utilisations des résultats.

Si nous voulons, nous calculons la raison des résultat <du quotient> des sommes <successives> des heptagones, qui est cinq tiers à l'aide de laquelle nous calculons la plus grande extrémité <de la suite> horizontale, et c'est sept plus deux tiers, et nous la multiplions par le trigone du dernier <côté> qui est quinze.

Si nous voulons faire la somme <des éléments> d'une colonne verticale comme par exemple, la somme de trois, de son trigone, de son tétragone, de son pentagone, et ainsi de suite, jusqu'à son décagone, tu sais que le nombre de ces termes sommés est neuf, qui est égal au nombre de côté du décagone moins un, sa plus petite extrémité est trois, sa raison est trois, et les inconnues sont la plus grande extrémité, et la somme.

Si nous voulons faire la somme de toutes les lignes, comme par exemple, la somme des cotés de un à quatre, de leurs trigones, de leurs tétragones, de leurs pentagones, et de leurs hexagones : nous calculons la raison des résultats <des quotients>, des sommes des hexagones <par la somme des côtés>, puis leur plus grande extrémité <en tant que suite> horizontale, qui est aussi la plus grande extrémité <de la suite> verticale <des quotients> des sommes horizontales par la somme des côtés, et qui est cinq, puis la plus petite extrémité qui est un, et le nombre de lignes qui est cinq, on obtient alors quinze <par la formule du Talkhis>,que tu multiplies par dix <qui est la somme des côtés>.

Si tu veux, tu calcules la somme des raisons <de la suite> verticale, et ce sera quinze, que tu multiplies par le trigone de <côté> quatre, et ce sera cent cinquante ; ou bien tu procèdes pour <cette question> à l'aide d'autres méthodes dont tu as appris les règles ; comprends-le, et tu sauras résoudre tout cela à l'aide <des procédés> de l'ouvrage. <Ainsi>, comme tu l'as vu, ce chapitre <de l'ouvrage> permet de déterminer, et de sommer toutes les figures <numériques> de l'Arithmétique.

Raf^{c} al-Hijab traduit par Aballagh,
de la page 60 ligne 6 à la page 61 ligne 22

Ibn al-Banna' donne diverses applications des résultats démontrés auparavant. Pour chacune des applications, nous rappelons le résultat utilisé.

♦ $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_7(i)}{\sum_{i=1}^{n} i}\right)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{7-2}{3}$, de premier terme 1.

Par suite : $S_7(5) = P_3(5) \times [\,(5\text{-}1) \times \dfrac{5}{3} + 1\,] = 15 \times \dfrac{23}{3} = 115.$

♦ $(P_k(3))_{k\geq 2}$ est une suite arihmétique de raison $P_3(2) = 3$, de premier terme 3.

Par suite : $\sum_{k=2}^{10} P_k(3) = \dfrac{9}{2}[\,P_3(2) + P_3(10)]$

$= \dfrac{9}{2} \times[\,3 + ((10 - 2) \times 3 + 3)] = \dfrac{9}{2} \times 30 = 135$

♦ $(S_k(n))_{k\geq 2}$ est une suite arithmétique et donc : $\sum_{k=2}^{6} S_k(4) = \dfrac{5}{2} \times[\,S_2(4) + S_6(4)]$

On sait aussi que $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_k(i)}{\sum_{i=1}^{n} i}\right)_{n\geq 1}$ est une suite arthmétique de raison $\dfrac{k-2}{3}$, de premier terme 1.

Et par suite: $\dfrac{S_6(4)}{\sum_{i=1}^{4} i} = [\,(4 - 1) \times \dfrac{4}{3} + 1\,] = 5$ et . $\dfrac{S_2(4)}{\sum_{i=1}^{4} i} = 1$

D'où : $\sum_{k=2}^{6} S_k(4) = 10 \times [\dfrac{5}{2} \times (5 + 1)] = 10 \times 15 = 150.$

♦ $\left(\dfrac{S_k(n)}{\sum_{i=1}^{n} i}\right)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{k-2}{3}$, de premier terme 1.

Par suite : $\dfrac{S_k(4)}{P_3(4)} = 1 + 3 \times \dfrac{k-2}{3}.$

D'où : $\sum_{k=2}^{6} S_k(4) = 10 \times (5 + 3 \sum_{k=2}^{6} \dfrac{k-2}{3}) = 10 \times 15 = 150$

La somme des cubes.

Quant à la justification de la sommation de la suite des cubes, qui s'obtient par le produit de la somme des côtés par elle-même qui est le carré du trigone' de <côté> le dernier élément de la suite, elle provient du produit du trigone <par lui-même> décomposé en somme de son côté, et du trigone qui le précède, et ce d'après ce qui a été montré dans <le paragraphe> du produit sans translation, du chapitre du produit, comme elle provient du fait, que <la différence> entre le cube d'un nombre, et son carré est un nombre de fois son carré égal à ce nombre moins un ; car le cube de un est égal à son carré, le cube de deux contient deux carrés <de deux>, le cube de trois contient trois carrés <de trois>, le cube de quatre contient quatre carrés <de quatre>,et ainsi de suite pour les <nombres> suivants, et cela est clair.

Raf^c al-Hijab traduit par Aballagh,
de la page 61 ligne 23 à la page 62 ligne 9

Ibn al-Banna' établit la formule énoncée dans le *Talkhis* : $\boxed{\sum^n i^3 = \left[\sum^n i\right]^2}$

La formule est établie par récurrence descendante. Notons d'ailleurs qu' Ibn al-Banna' explicite fort peu ce passage délicat.

$$\left[\sum^n i\right]^2 = [P_3(n)]^2 = [n + P_3(n-1)]^2 = n^2 + 2n\, P_3(n-1) + [P_3(n-1)]^2) = n^3 + [P_3(n-1)]^2$$

car $P_3(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $n^3 = n^2 + n^2\,(n-1)$,

(du fait que $1^3 = 1 \times 1^2$ $\quad 2^3 = 2 \times 2^2$ $\quad 3^3 = 3 \times 3^2$ $\quad 4^3 = 4 \times 4^2$ et $n^3 = n \times n^2$).

Ce passage peut-être rapproché des quelques premières lignes qui introduisent le chapitre sur les nombres polygonaux que nous étudions ici. En effet, il y est dit, suite à une recherche de racines cubiques :

"Il découle de la sommation des cubes successifs, que les accroissements des carrés des trigones successifs sont les cubes successifs, comme nous le verrons après." (Raf^c al-Hijab, page 49 ligne 23)

Ce qui peut être exprimé par:

$[P_3(n)]^2) - [P_3(n-1)]^2 = [P_3(n) - P_3(n-1)]\ [P_3(n) + P_3(n-1)] = n^3$, éventuellement considéré comme le produit d'un gnomon égal à n et d'un carré égal à n^2.

La somme des cubes des entiers pairs

Quant à la somme des cubes des <entiers> pairs <commençant> par deux, nous mettons deux à la place de un ; les <entiers> pairs seront alors à la place de la suite des entiers <naturels>, quatre à la place de deux, six à la place de trois, et ainsi de suite, chaque pair à la place de sa moitié. Le nombre des éléments de la suite <des pairs> sera donc égal à la moitié du dernier <élément>. On fait la somme de un jusqu'à la moitié du dernier élément de la suite, puis on la multiplie par elle-même, puis chacune <de ces sommes par> huit, qui est le cube de deux qui a pris la place de un.
Ce qui donnera la somme des cubes des pairs.
Il faut multiplier par huit car le cube de chaque pair est égal au produit du cube de sa moitié par le cube de deux. Mais le produit de la somme <des entiers> par elle-même puis par huit, est égal au produit du double de la somme par lui-même, puis par deux, mais le double de la somme est égal à la somme des pairs donnés. Donc le produit de la somme des pairs par elle-même, puis par deux, ce qui est égal au produit de la somme des pairs par son double, donne la somme des cubes des pairs, comme <cela> a été indiqué.

Raf^{c} al-Hijab traduit par Aballagh,
de la page 62 ligne 10 à la page 63 ligne 12

Ibn al-Banna' démontre ici le résultat énoncé dans la *Talkhis* à propos de la somme des cubes de nombres pairs:

Pour n pair, $2^3 + 4^3 + ...+ n^3 = P \times (2P)$ avec $P = 2 + 4 + ...+ n = \frac{n}{2} \times \frac{n+2}{2}$

Ce qui se justifie par :

$$\sum_{\substack{K=2\\ K \text{ pair}}}^{2n} K^3 = \sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2^3 \times \sum_{k=1}^{n} k^3 = 8 \times \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2$$

$$\sum_{\substack{K=2\\ K \text{ pair}}}^{2n} K^3 = 8 \times \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2 = 2\left(2\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} 2k\right)^2 = 2\left(\sum_{\substack{K=2\\ K \text{ pair}}}^{2n} K\right)^2 = 2P^2 = P \times (2P)$$

La somme des cubes des entiers impairs.

Quant à la sommation des cubes des impairs successifs <commençant> par un, il est clair, que si on retranche la somme des cubes des pairs successifs de la somme des cubes des entiers successifs, il reste la somme des cubes des impairs successifs. Mais comme la somme des entiers successifs est, comme nous l'avons indiqué, composé de <la somme de> deux ensembles <les pairs et les impairs>, son carré s'obtient en multipliant chacune des deux sommes par <toute> leur somme. Donc si le dernier terme <de la suite des entiers> est pair, le produit de la somme des pairs par son double est égal à son produit par la somme des deux ensembles indiqués plus son produit par la différence de leur <somme> ; mais son produit par leur différence est égal au produit de la somme des impairs, qui est la plus petite des deux <sommes> par leur différence, plus le carré de la différence, comme nous le savons d'après la dernière espèce de produit sans translation. Mais, comme on l'a montré précédemment, le carré de la différence est égal à la somme des impairs par elles-mêmes ; et le produit de la somme des impairs par la somme des deux ensembles <pairs et impairs> est égal à son produit par son double plus <son produit> par la différence entre les <sommes des > deux ensembles.

Si on retranche la somme des cubes des pairs de la somme des cubes des entiers successifs, il reste le produit de la somme des impairs par son double moins la somme des impairs, qui est la somme des cubes des impairs, et elle est égale au produit de la somme des impairs par son double moins un.

Si le dernier terme est impair, le produit de la somme des pairs par son double est égal à son produit par la somme des deux ensembles <des pairs et impairs> moins son produit par la différence de leurs <sommes>.

Si on retranche la somme des cubes des pairs de la somme des cubes des entiers successifs, il reste le produit de la somme des impairs par la somme des deux ensembles plus le produit du plus petit <ensemble>, qui est la somme des pairs, par leur différence, et ceci est déficient, par rapport, au produit de la somme des impairs par son double, qui est la somme des deux ensembles plus la différence <de leurs sommes respectives>, du carré de la différence entre les deux sommes <partielles> qui est la somme des impairs elle-même ; ce qui est égal au produit de la somme des impairs par son double moins un, comme cela a été indiqué.

FIN DE LA SECTION

Raf^{c} al-Hijab traduit par Aballagh,
de la page 63 ligne 12 à la page 65 ligne 15

Ibn al-Banna' démontre ici le résultat énoncé dans la *Talkhis* à propos de la somme des cubes de nombres pairs:

Pour n impair, $1^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = I \times (2I - 1)$ avec $I = 1 + 3 + \ldots + n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

Ce dernier passage sur la somme des cubes des impairs est à première lecture particulièrement obscur. Plus que tout autre, il interroge en termes de communication sur le rôle que pouvaient jouer de tels écrits dans l'élaboration et la transmission du savoir.

La démarche adoptée par Ibn al-Banna' ne s'appuie nullement sur les nombres polygonaux. Ibn al-Banna' joue de multiples "ruses" de calcul et utilise les sommations classiques énoncées dans le *Talkhis* (voir page 76) et démontrées préalablement . Sa démarche peut être explicitée comme suit.

$$\sum_{\substack{K=1\\ K\text{impair}}}^{N} K^3 = \sum_{K=1}^{N} K^3 - \sum_{\substack{K=2\\ K\text{ pair}}}^{N} K^3$$

On notera par la suite $I = \sum_{\substack{K=1\\ K\text{ impair}}}^{N} K$ et $P = \sum_{\substack{K=2\\ K\text{ pair}}}^{N} K$.

On a, d'après les résultats précédemment démontrés :

$$\sum_{K=1}^{N} K^3 = \left[\sum_{K=1}^{N} K\right]^2 = P(P+I) + I(P+I)$$

$$\sum_{\substack{K=2\\ K\text{ pair}}}^{N} K^3 = P(2P)$$

♦ **Si N est pair**, le calcul repose sur la propriété suivante : $P > I$ et $(P - I)^2 = I$

En effet, rappelons que :

$[(8+6+4+2)-(7+5+3+1)]^2 = [(8-7)+(6-5)+(4-3)+(2-1)]^2 = 4^2$

$7+5+3+1 = (3+1)^2$.

Et plus généralement : $(P - I)^2 = \left(\frac{N}{2} \times 1\right)^2 = \left(\frac{N}{2}\right)^2$

$$I = \left(\frac{N-2}{2} + 1\right)^2 = \left(\frac{N}{2}\right)^2$$

Ibn al-Banna' propose le raisonnement suivant :

(Les calculs explicités par Ibn al-Banna' sont indiqués en caractères gras, les égalités notées d'un astérisque ont été ajoutées par nos soins, pour plus de clarté.)

$$\sum_{\substack{K=1\\ K\text{impair}}}^{N} K^3 = P(P + I) + I(P + I) - \mathbf{P(2P)}$$

$$=^* P(P + I) + I(P + I) - P[\mathbf{(P + I) + (P - I)}]$$
$$= P(P + I) + I(P + I) -[\mathbf{P(P + I) + P(P - I)}]$$
$$=^* P(P + I) + I(P + I) - P(P + I) - \mathbf{(I + P - I)}(P - I)$$
$$= P(P + I) + I(P + I) - P(P + I) - \mathbf{[I(P - I) + (P - I)^2]}$$
$$= P(P + I) + \mathbf{I(P + I)} - P(P + I) - [I(P - I) + \mathbf{I}] \qquad \text{car} \quad \mathbf{(P - I)^2 = I}$$
$$=^* P(P + I) + \mathbf{I(2I + P - I)} - P(P + I) - I(P - I) - I$$
$$= P(P + I) + \mathbf{I(2I) + I(P - I)} - P(P + I) - I(P - I) - I$$
$$= \mathbf{I(2I) - I}$$
$$= \mathbf{I(2I - 1)}$$

♦ **Si N est impair**, le calcul repose sur la propriété suivante : $I > P$ et $(I - P)^2 = I$

En effet, rappelons que :

$[(7+5+3+1)- (6+4+2)]^2 = [(7-6)+(5-4)+(3-2)+1)]^2 = 4^2$ et $7+5+3+1 = (3+1)^2$.

Et plus généralement : $$(I - P)^2 = \left(\frac{N-1}{2} \times 1 + 1\right)^2 = \left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$

$$I = \left(\frac{N-1}{2} + 1\right)^2 = \left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$

$$\sum_{\substack{K=1\\ K\text{impair}}}^{N} K^3 = P(P + I) + I(P + I) - \mathbf{P(2P)}$$

$$=^* P(P + I) + I(P + I) - P[\mathbf{(P + I) - (I - P)}]$$
$$= P(P + I) + I(P + I) -[\mathbf{P(P + I) - P(I - P)}]$$
$$= \mathbf{I(P + I) + P(I - P)}$$
$$=^* I(P + I) + [\mathbf{I - (I - P)}](I - P)$$
$$= I(P + I) + \mathbf{I\,(I - P) - (I - P)^2}$$
$$= I(P + I) + I(I - P) - \mathbf{I} \qquad \text{car } (I - P)^2 = I$$
$$=^* I(P + I + I - P) - I$$
$$=^* I(2I) - I$$
$$= I(2I - 1)$$

Quelques compléments sur les nombres figurés.

Présentation contemporaine des nombres figurés.

Préalable: $P_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

♦ **Définition :**

Les nombres polygonaux $P_k(n)$ sont définis par :

$(P_k(n))_k$ est une suite arithmétique de raison $P_3(n\text{-}1) = \frac{n(n-1)}{2}$, de premier terme $P_2(n) = n$

♦ **Formule générale:**

Pour $k \geq 2$ $\quad P_k(n) = n + (k-2)\frac{n(n-1)}{2}$

♦ **Propriété 1 :**

Soit $\quad u_n = P_k(n) - P_k(n-1)$ pour $k \geq 2$ et $n > 1$

$\quad\quad u_1 = P_k(1) = 1$

$(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $k - 2$, de premier terme $u_1 = 1$.

<u>Démonstration :</u>

$$P_k(n) - P_k(n-1)$$
$$= \left[n + \frac{(k-2)n(n-1)}{2}\right] - \left[(n-1) + \frac{(k-2)(n-1)(n-2)}{2}\right]$$
$$= 1 + \frac{(k-2)(n-1)}{2}[n-(n-2)]$$
$$= 1 + (k-2)(n-1)$$

Remarque :

Puisque $u_n = P_k(n) - P_k(n\text{-}1)$ et $u_1 = 1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} u_i &= P_k(n) - P_k(n-1) \\ &+ P_k(n-1) - P_k(n-2) \\ &+ \dots\dots\dots \\ &+ P_k(2) - P_k(1) \\ &+ P_k(1) \\ &= P_k(n)\end{aligned}$$

On a donc $\sum_{i=1}^{n} u_i = P_k(n)$, somme de tous les termes d'une suite arihmétique.

♦ **Propriété 2 :**

$\left(\frac{P_k(n)}{n}\right)_k$ est une suite arithmétique de raison $\frac{n-1}{2}$, de premier terme $\frac{P_2(n)}{n} = 1$.

<u>Démonstration :</u>

D'aprés la formule générale, $\frac{P_k(n)}{n} = 1 + (k-2)\frac{n-1}{2}$

◆ **Propriété 3 :**

$\left(\dfrac{P_k(n)}{n}\right)_n$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{k}{2}-1$, de premier terme $\dfrac{P_k(1)}{1}=1$.

Démonstration :

D'aprés la formule générale, $\dfrac{P_k(n)}{n} = 1 + (n - 1)\left(\dfrac{k}{2}-1\right)$

◆ **Propriété 4 :**

Soit $S_k(n)=\sum_{i=1}^{n}P_k(i)$.

$(S_k(n))_k$ est une suite arithmétique de raison $S_3(n-1)$, de premier terme $P_3(n)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
S_k(n) &= \sum_{i=1}^{n}P_k(i)\\
&= 1+\sum_{i=2}^{n}\left[i+(k-2)\frac{i(i-1)}{2}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}i+(k-2)\sum_{i=2}^{n}\frac{i(i-1)}{2}\\
&= P_3(n)+(k-2)\sum_{i=2}^{n}P_3(i-1)\\
&= P_3(n)+(k-2)S_3(n-1)
\end{aligned}$$

Formule générale :

$$S_k(n)=\sum_{i=1}^{n}i+(k-2)\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i-1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+(k-2)\frac{n(n+1)(n-1)}{6} \quad \text{(voir formulaire)}$$

$$\boxed{S_k(n)=\frac{n(n+1)}{2}\left[1+\frac{(k-2)(n-1)}{3}\right]}$$

◆ **Propriété 5 :**

$\left(\dfrac{S_k(n)}{1+2+..+n}\right)_n$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{k-2}{3}$, de premier terme $\dfrac{S_k(1)}{1}=1$.

Démonstration :

Puisque $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, d'aprés la formule générale: $\dfrac{S_k(n)}{1+2+..+n}=1+(n-1)\dfrac{k-2}{3}$.

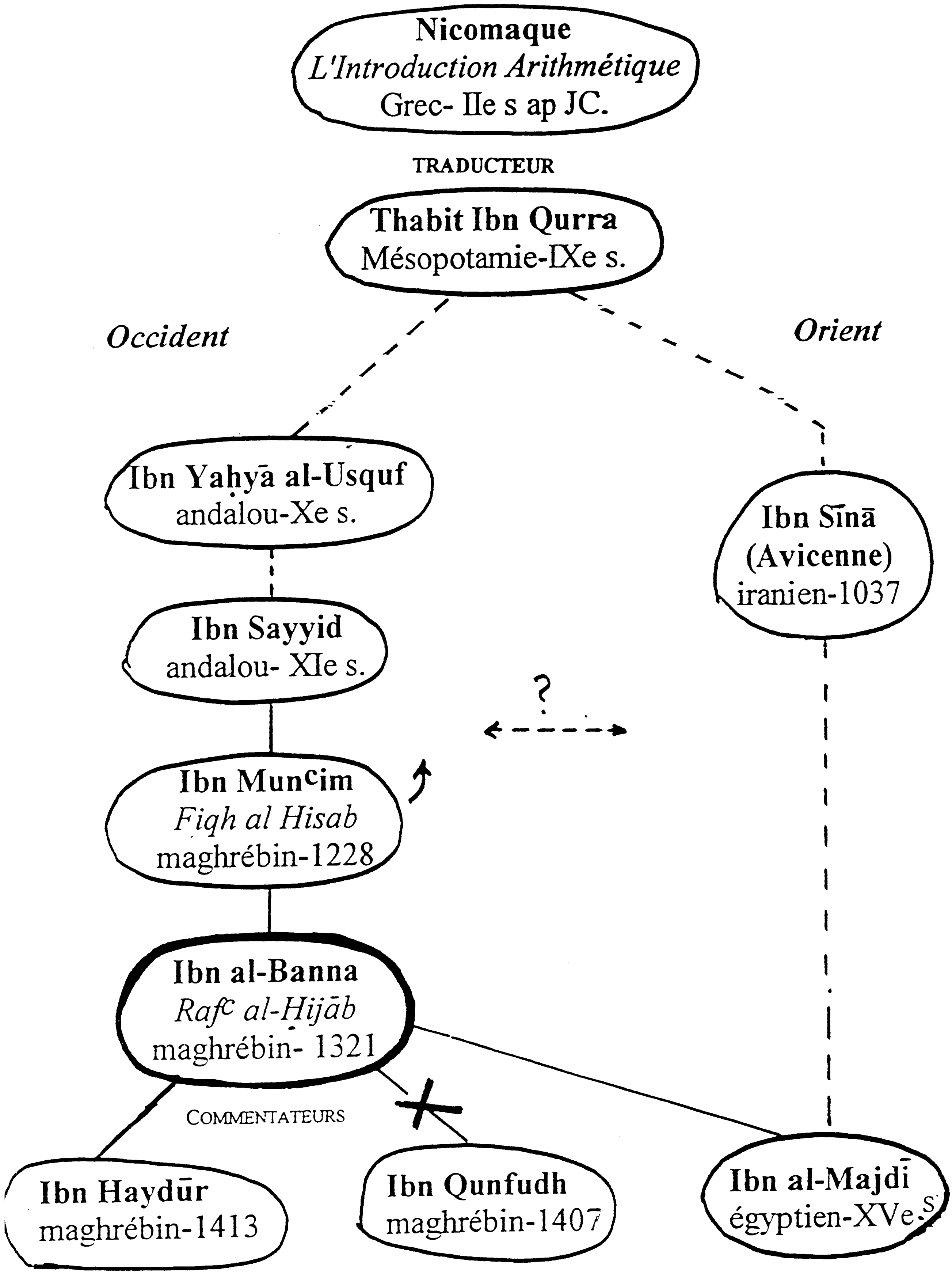
◆ **Propriété 6 :**

$\left(\dfrac{S_k(n)}{1+2+...+n}\right)_k$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{n-1}{3}$, de premier terme $\dfrac{S_2(n)}{1+2+...+n}=1$.

Démonstration :

Puisque $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, d'aprés la formule générale: $\dfrac{S_k(n)}{1+2+...+n}=1+(k-2)\dfrac{n-1}{3}$.

Les nombres figurés dans la tradition mathématique de l'Andalousie et du Maghreb.



Les nombres figurés dans la tradition mathématique de l'Andalousie et du Maghreb[1]

Le chapitre sur les nombres figurés du *Raf^c al-Hijab* s'inscrit dans une longue tradition. Les nombres figurés tiennent un rôle important dans l'arithmétique grecque [30], en particulier chez les pythagoriciens [28], mais c'est la traduction au IX^e siécle de l'*Introduction Arithmétique* de **Nicomaque de Gérase** [29] par Thabit Ibn Qurra, qui influence particulièrement le développement de ce domaine chez les mathématiciens arabes. On retrouve ce thème dans plusieurs ouvrages orientaux, dans l'encyclopédie d'al -Khawarizmi et dans le *Shifa* d'Ibn Sina[2], ou encore dans divers ouvrages d'enseignement.

Ibn al-Banna' reprend la tradition de Nicomaque présente chez les mathématiciens magrébins et andalous dès le Xe siécle. Ibn Mun^cim (m 1228) s'exprime clairement sur cette tradition[3] :

> *"Lorsque j'ai eu l'idée de rédiger, pour mon livre, cette partie sur les figures numériques, j'ai étudié les propos des Arithméticiens et j'ai vu que leurs livres traitaient longuement de ce sujet."*
>
> .../.....
>
> *" Lorsque j'eus achevé l'étude de l'opuscule [d'Ibn Sayyid], je constatai qu'il y avait inséré un problème à propos duquel il s'était trompé. Il avait en effet indiqué une méthode pour calculer les sommes des figures numériques de côtés pairs et de valeur paire ou impaire, ou de côtés impairs et de valeur paire ou impaire, alors que cette méthode permet de calculer uniquement les sommes des carrés des [entiers] pairs successifs ou impairs successifs.(...). Après avoir réfléchi à cela il m'apparut des méthodes excellentes pour déterminer à l'aide de preuves géométriques, les sommes des figures numériques selon leurs divisions naturelles."*

Le *Fiqh al-Hisab* d'Ibn Mun^cim comporte une section sur les figures numériques Quelques différences significatives avec le *Raf^c al-Hijab* peuvent être relevées :

• Ibn Mun^cim utilise un vocabulaire géométrique : nombre-ligne, nombre-plan, nombre-solide, figure équilatérale, figure tronquée, gnomon,..., vocabulaire abandonné par Ibn al-Banna'.

• Ibn Mun^cim détermine n tel que $P_8(n) = 40$ Il aboutit ainsi à une équation du second degré, qu'il résout successivement dans le cadre algébrique puis dans le cadre géométrique par une

---

[1] La plupart des informations donées ici sont issues de l'article de A Djebbar [32].

[2] Références données par A.Djebbar :
Abu^c Abdallah al-Khwarizmi, *Kitab Mafatih al-^cUlum*, édition G. Van Vloten, 1895, réédition E. J. Brill, 1968, pp. 188-91
Ibn Sina, *Kitab ash-Shifa, al-Arithmatiqi*, édition A. L. Muzhir, Le Caire 1975, pp. 53-61

[3] Cités par A Djabbar dans [32] , notes (8) et (11).

démarche euclidienne. Ce problème n'existe pas chez Ibn al-Banna' et la démarche euclidienne est totalement absente des écrits d' Ibn al-Banna'.

• Ibn Mun^{c}im cherche à limiter l'usage de démonstrations par induction. En particulier, il démontre les propriétés des suites de termes $\sum P_k(i) / \sum i$ en se référant aux propriétés générales des suites arithmétiques définies par les diverses lignes et colonnes. Rappelons qu'Ibn al-Banna' énonce ce résultat sans le démontrer. (voir page 84)

• Ibn Mun^{c}im fait usage de tableaux pour écrire des expressions polynomiales en n, à la manière des algébristes du XII^e siècle.

Ainsi, la série des carrés $P_4(1)+........+P_4(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ est notée dans le *Fiqh al-Hisab* comme suit:

les figures	le rapport au cube	le rapport au carré	la rapport au plus grand côté.
Tétragones	1/3	1/2	1/6

Cette notation est totalement absente des écrits d' Ibn al-Banna'.

• Ibn Mun^{c}im étudie la sommation de multiples sous-suites suivant la parité du nombre de côtés et des nombres polygonaux. Il obtient ainsi des suites dont les raisons sont des polynômes en n. Cette partie est absente du *Raf^c al-Hijab*, probablement considérée comme"peu utile" par Ibn al-Banna'.

Ibn al-Banna' ne développe donc pas tous les aspects traités par Ibn Mun^{c}im sur les nombres figurés, mais il propose dans la section suivante du *Raf^c al-Hijab,* un développement particulièrement riche des nombres figurés en introduisant la **combinatoire** à partir de ceux-ci. En établissant une correspondance entre certaines valeurs des combinaisons C_n^p et certains nombres figurés, Ibn al-Banna' donne à la combinatoire son caractére arithmétique[4]. Cette nouvelle branche des mathématiques que constitue la combinatoire, trouvera des développements après Ibn al-Banna'. Le tableau des "nombres solides" ci-dessous [30] utilise la terminologie de Wallis (1656). Il donne en diagonales les coefficients C_n^p et atteste de la correspondance entre des tableaux appartenant à des traditions différentes.

1	(côtés)	1	2	3	4	5	6
2	triangular number (trigone)	1	3	6	10	15	21
3	pyramidal number with triangular base	1	4	10	20	35	56
4	trianguli-pyramidal number	1	5	15	35	70	126
5	pyramidi-pyramidal number	1	6	21	56	126	252

4 Pour un développement sur l'aspect combinatoire des nombres figurés, on pourra se référer utilement au chapitre III "théorie des nombres et combinatoire " dans [31].

Les nombres figurés après Ibn al-Banna'.

Les nombres figurés ont tenu une place non négligeable chez les mathématiciens grecs et arabes. Ibn al-Banna' et ses prédécesseurs n'épuisèrent cependant pas les multiples propriétés arithmétiques de ces nombres. Des siècles durant, les nombres figurés furent encore, source de nombreux problèmes en Occident.

Au début du XVII^{e} siècle, Bachet traduit en latin le livre des *Nombres polygones* de **Diophante d'Alexandrie** et l'accompagne d'un important commentaire. **Fermat** étudie cet ouvrage et enrichit son exemplaire personnel de nombreuses notes ; en particulier, à propos de la proposition empirique de Bachet "*Tout nombre est soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés entiers.*", il fait le commentaire suivant :

> *"Bien plus, il y a une proposition très belle et tout à fait générale que j'ai été le premier à découvrir :*
> *Tout nombre est : soit triangle, soit somme de 2 ou 3 triangles;*
> *Soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés ;*
> *Soit pentagone, soit somme de 2, 3, 4 ou 5 pentagones ;*
> *et ainsi de suite indéfiniment, qu'il s'agisse d'hexagones, d'heptagones ou de polygones quelconques ; cette merveilleuse proposition pouvant s'énoncer en général en raison du nombre d'angles.*
> *Je ne puis en donner ici la démonstration, qui dépend de nombreux et abstrus mystères de la Science des nombres ; j'ai l'intention de consacrer à ce sujet un Livre entier et de faire accomplir ainsi à cette partie de l'Arithmétique des progrés étonnants au delà des bornes anciennement connues."*
>
> Traduction des Oeuvres de Fermat, III, 252.

La démonstration de cette proposition va être l'objet de recherches de nombreux mathématiciens au XVIIIème siècle. En particulier, **Lagrange** prouve[5] en 1770 la proposition empirique de Bachet : *tout entier est somme de quatre carrés.* **Euler** reconnait en 1773 qu'il a échoué dans sa tentative à prouver que *tout entier est somme d'un, deux ou trois nombres triangulaires* mais il simplifie, en 1777, la démonstration de Lagrange pour le cas n = 4. **Gauss** trouve[6] une démonstration de la proposition de Fermat pour les cas n = 3 et n = 4 en 1796 mais n'arrive pas à généraliser le résultat. Il faudra attendre **Cauchy** qui donne en 1815 une preuve complète de la proposition de Fermat, le cas n = 3 étant supposé acquis. Une année

[5] Mémoires de l'Académie de Berlin
[6] Disquis. Arith., 1801, art. 293

plus tard, **Legendre** simplifie cette preuve dans le premier supplément de la deuxième édition de la Théorie des Nombres (1816).

La lecture du premier chapitre du livre de L.E. Dickson, *History of the Theory of Numbers* (vol. 2) [30] montre que jusqu'au début du XXème siècle des résultats concernant les nombres polygonaux ont été prouvés par de nombreux mathématiciens.

5 ème partie:
Le concept de nombre chez Ibn al-Banna'

par Nicole Nordon.

Le cadre philosophique.

La science arabe s'inscrit dans la tradition grecque dont elle est un prolongement et un approfondissement. Comme chez leurs prédécesseurs, philosophes et mathématiciens entretiennent des rapports étroits ; cette collaboration est active entre le IXè et le XIIIè siécle, puis elle sera perturbée par les problèmes politiques. La plupart des philosophes de cette époque ont une culture scientifique sérieuse et rédigent des résumés, des commentaires d'ouvrages classiques ou même des traités originaux de mathématiques. C'est le cas d'Ibn Sina, dit Avicenne, philosophe persan du XIè siècle qui eût une grande influence sur Ibn al Banna' ; il fit entre autre un commentaire des ***Eléments d'Euclide***, en développa certains livres concernant la théorie des nombres, et l'inclut dans son enseignement philosophique[1].

Philosophes et mathématiciens de cette époque participent à une réflexion sur les fondements des mathématiques. Les échanges portent sur plusieurs points. D'une part, sur le fondement métaphysique des mathématiques. Deux positions sont alors dominantes. L'une, d'origine pythagoricienne et platonicienne où le "***logos***"[2] est le principe des choses, et où les mathématiques et surtout les nombres occupent une place dominante dans l'ensemble des sciences et prépondérante dans l'explication du monde, sa genèse ou son ordre caché. L'autre est d'origine aristotélicienne ; chaque science a ses propres principes et les objets mathématiques sont des productions de l'esprit extraites de la nature par abstraction, c'est-à-dire par simplification. En plus de ces positions philosophiques traditionnelles, deux courants existent dans le monde arabe ; celui d'Occident à tendance rationaliste et celui d'Orient à tendance mystique, proche du néoplatonisme. Avicenne, au carrefour de ces deux formes de pensée, développe une philosophie originale qui influença la pensée occidentale pendant deux siècles, et perdura fort longtemps en Iran.

Un deuxième sujet de discussion concerne la classification des sciences. Celles-ci sont séparées en deux grandes catégories ; les sciences pratiques, attachées à la matière, et les sciences théoriques ne dépendant que de la raison. On retrouve cette séparation à

---

[1] A. Djebbar. Revue tunisienne des études philosophiques. 1984-2.

[2] Le logos est un terme polysémique grec voulant dire parole, raison (d'essence divine), raison (mathématique) ou proportion ...

l'intérieur des mathématiques, mais ce n'est pas la même pour tout le monde. Par exemple pour Ibn Haydur, le ***Talkhis***, bien que sans démonstration, fait partie des sciences théoriques, car il y a manipulation de nombres sans but pratique immédiat. Cette classification implique des exigences différentes. En effet, si les mathématiques sont pratiques, elles ont besoin d'être "justes", si elles sont théoriques elles ont besoin d'être "vraies", et pour être considérées comme "vraies", elles nécessitent des fondements. Ceux-ci sont à deux niveaux ; les résultats doivent être démontrés mais aussi les notions premières doivent être justifiées par la physique, la philosophie, la théologie ou même la mystique. Les objets mathématiques sur lesquels porte cette interrogation sont, pour l'essentiel, les concepts communs à la philosophie et aux mathématiques comme le nombre, l'unité, l'infini, le continu.

Il est à remarquer que certains de ces débats sont toujours d'actualité : l'affrontement des deux positions parmi les chercheurs entre platoniciens et matérialistes ou constructivistes (voir à ce propos le livre d'A. Connes et de J.P. Changeux , ***Matière à pensée***), les débats sur l'enseignement des mathématiques théoriques ou utilitaires, ou le questionnement sur certaines notions de base (un colloque a été organisé par le Collège International de Philosophie en Juin 93 sur le thème ***Qu'est-ce que le nombre ?***).

Ibn al-Banna' n'est pas un philosophe ; il est même souvent assez critique vis-à-vis de la pensée philosophique toutes tendances confondues[3].C'est un expert en mathématiques qui, lorsqu'il doit prendre position sur telle ou telle question relative au fondement d'une notion, adopte l'une ou l'autre des conceptions philosophiques dominantes, et le plus souvent s'aligne, à quelques modifications près, sur les positions d'Avicenne. C'est ce qui se passe dans le passage que nous allons étudier concernant le concept de nombre. L'intérêt de ces quelques pages n'est donc pas son originalité de pensée, mais la marque d'un questionnement qui parcourt les mathématiques depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours. Pour ne pas alourdir excessivement le texte, nous ne citerons qu'à de rares moments les passages pris quasi intégralement dans la ***Métaphysique du Shifa***[4] d'Avicenne, nous contentant de donner les références de l'édition Vrin.

---

[3]M. Aballagh ; Les fondements des mathématiques à travers le Raf-Al-Hijab d'Ibn Al-Banna.
[4]La traduction de shifa est guérison.

Ce premier chapitre peut être subdivisé en quatre parties :

1. Description du nombre. Il ne s'agit ici que du nombre entier positif ou nul.
2. Statut de l'unité ; est-ce un nombre ? Est-elle une substance ou un accident ?
3. Synthèse.
4. La numération décimale.

Définition et description du nombre.

<De la description du nombre et de ses ordres>

*Sache que **la description du nombre** qui y est donnée n'est qu'un rappel de ce qui est dans l'âme, qui est <fait d'> accident et de différence.*

Traduction d'Aballagh page 477 ligne 1 à 5.

La description à laquelle Ibn Al-Banna' fait allusion est celle donnée dans le ***Talkhis*** ; "***Le nombre est ce qui est composé avec les unités..*** " Pourquoi une description là où on attend une définition ? Ce qui est noble, ce qui est à rechercher, c'est bien entendu la définition. Avicenne à la suite d'Aristote, insiste longuement, dans un ouvrage ***Le Livre des Définitions*** sur ce que doit être une définition et les pièges à éviter.

"Selon ce que dit le Sage (Aristote), dans le Livre des Topiques, c'est l'énoncé indiquant la quiddité (l'essence) de la chose, c'est-à-dire la perfection de son être essentiel. Cet énoncé s'obtient du genre prochain et de la différence spécifique."[5]

Le genre est une idée très générale qui se subdivise en espèces, chaque espèce se subdivisant en sous-espèces et ainsi de suite jusqu'aux espèces dernières qui sont les individus. La différence est un attribut essentiel qui distingue une espèce d'une autre. L'exemple classique est celui de l'homme défini comme un animal raisonnable ; "animal" est le genre, "raisonnable" est la différence. Une bonne définition doit ***"imprimer dans l'âme une forme intelligible équivalente à la forme existante"***, elle doit ***"contenir tous les attributs essentiels en puissance ou en acte."***[6] C'est, nous dit Avicenne, une tâche si délicate que les définitions parfaites sont très rares.

Quant à la description, Avicenne est discret ; c'est ***"un énoncé qui fait connaitre la chose d'une connaissance non essentielle, et qui est cependant propre ; ou bien un énoncé distinguant la chose de ce qui n'est pas elle, mais non pas par l'essence."***[7] On doit pouvoir distinguer la chose de ce qu'elle n'est pas, identifier le genre le plus proche de l'essence, et donner l'ensemble de ses attributs, accidents et différences.

Ibn al-Banna' va nous montrer la difficulté de donner une définition du nombre et justifier le fait de n'en donner qu'une description.

[5]Avicenne ; Livre des définitions n°18.
[6]Ibid n° 6.
[7]Ibid n° 19.

Première pseudo-définition.

Ibn al-Banna' fait maintenant une étude critique de deux définitions du nombre.

En premier lieu, une définition qui fait sans doute référence à celle donnée par Euclide dans le Livre VII des ***Eléments : "Le nombre est un assemblage composé d'unités."***

Certains ont cru qu'il était définissable et que sa définition <est> ***"une multiplicité composée d'uns ou d'unités".*** *<Mais> leur croyance n'est pas exacte, parce que la multiplicité est le nombre lui-même et elle n'est pas comme le genre pour le nombre. La réalité de la multiplicité c'est qu'elle est composée d'unités.*

Lorsque quelqu'un dit "< le nombre est> une multiplicité composée d'unités ", c'est comme s'il disait : "<c'est> une multiplicité de multiplicités" car la multiplicité est un nom pour ce qui est composé d'unités, et en disant < composée > d'uns ou d'unités, il s'est exprimé au pluriel et on ne peut comprendre le sens de ce terme, ni le connaître, que par la multiplicité.

Traduction d'Aballagh page 477 ligne 6 à19.

Cette définition : ***"une multiplicité composée d'uns ou d'unités",*** ne satisfait pas Ibn al-Banna'. Ni Avicenne, et ceci pour les mêmes raisons. En effet la multiplicité, la pluralité et le nombre sont considérés comme des synonymes[8] ; on n'a donc pas affaire à une vraie définition. Ce n'est même pas une description, c'est une tautologie.

C'est une enfreinte aux ***"règles communes"*** que ***"de définir la chose par ce qui lui est équivalent dans la connaissance, ou postérieur dans la connaissance. Voici un exemple de l'équivalent : " le nombre est une pluralité composée d'unités", alors que le nombre et la pluralité sont même chose; le défini lui-même a été employé dans sa définition."***[9]

[8]Métaphysique du Shifa n° 105.
[9]Avicenne. Livre des Définitions, n° 14.

Deuxième pseudo-définition.

Dans ***Catégories 6***[10], Aristote donne le nombre comme exemple de quantité discrète ayant un ordre. Il est possible que cet exemple ait servi de modèle à une définition du nombre.

> *Celui qui définit le nombre comme étant* ***une quantité discrète ayant un ordre,*** *<donne> une vraie définition sauf que la représentation de* ***la quantité dans l'âme a besoin d'être définie par la partie, ou par la division, ou par l'égalité.*** *Mais on ne peut se représenter la partie et la division que par la multiplicité. Quant à l'égalité, la quantité est plus connue qu'elle pour l'intellect, parce que l'égalité est un des accidents propres à la quantité qui doit être incluse dans sa définition.*
>
> *On dira ainsi l'égalité est une union de ce qui est dans la quantité. Quant à l'ordre qui a été pris < en considération > dans la définition du nombre, il ne peut non plus être compris qu'une fois que l'on a compris le nombre.*
>
> *Traduction Aballagh page 477 ligne 20 à page 478 ligne 6.*

Ibn al-Banna' accepte cette définition, mais émet des réserves. Sa critique porte sur l'usage circulaire des notions de nombre, de quantité et d'ordre. En effet, le nombre est défini par la quantité et l'ordre qui sont logiquement postérieurs au nombre. Et, dans une définition, une vraie, on ne peut faire appel qu'à des notions déjà connues.

"Employer dans la définition d'une chose ce qui lui est postérieur dans l'ordre de la connaissance, c'est parler comme ceux qui disent : "Le soleil est une étoile qui se lève le jour". Puis le jour ne pourra être défini que par le soleil, car il est le temps du lever du soleil. "[11]

Voyons le déroulement de cette circularité ;

-Si ***la quantité ...est définie par la partie ou par la division.*** Aristote dans ***Métaphysique Δ, 13*** définit ainsi la quantité ; ***"Quantité se dit de ce qui est divisible en de²ux ou plusieurs éléments intégrants, dont chacun est, par nature, une chose une et individuelle"***. La définition de la quantité nécessite la notion de pluralité (plusieurs éléments intégrants ou parties), donc celle de nombre. On a la circularité nombre, quantité, nombre.

-Si ***la quantité... est... définie par l'égalité***, ça ne marche pas non plus, car l'égalité est, dans l'ordre logique, ultérieure à la quantité ; c'est l'attribut éventuel de deux

[10] Aristote ; Organon I.
[11] Livre des Définitions, n° 17.

quantités. L'ordre de connaissance des trois notions concernées est : le nombre, puis la quantité et enfin l'égalité.

-Quant à ***l'ordre,*** c'est aussi une notion ultérieure à celle de nombre. En effet le seul modèle d'ordre connu est le dénombrable, c'est à dire, la suite des nombres entiers.

Ce passage existe presque mot pour mot chez Avicenne[12] mais, contrairement à Ibn al-Banna', Avicenne rejette cette définition.

[12]Métaphysique du Shifa n° 106.

Le nombre est une notion première.

Bref, on ne s'en sort pas ! Et c'est bien ce que dit Ibn al-Banna' qui reprend les dires d'Avicenne[13]; le nombre est une notion première, présente à l'âme de tout un chacun.

> *Il faut que tu saches que ces <descriptions> ne sont que* ***des rappels de ce qui est dans l'âme,*** *semblables aux rappels par les exemples et par les synonymes, et que le nombre est une des notions qui se conçoivent par elles-mêmes, et si on les évoque par ces choses c'est uniquement pour les signaler ou pour les distinguer.*
>
> *On ne peut donc s'opposer à rien de ce qui a été donné pour définir le nombre, si ce n'est pour dire que certaines définitions sont plus claires, plus proches, ou plus adéquates que d'autres, comme lorsqu'on dit* **"ce qui est composé par des uns"** *est plus adéquat que* **"les uns composés",** *car les uns ne constituent pas un genre pour le composé ou le décomposé, parce que la composition est un accident général pour les "uns" et autres choses que les "uns" et non pas une différence. <Dans ce cas> on aurait pris ce qui doit être genre à la place de la différence et ce qui doit être différence à la place du genre.*
>
> *Traduction d'Aballagh page 478 ligne 7 à ligne 25.*

Ibn al-Banna' précise sa position face aux différentes définitions du nombre ; tout est bon à prendre, mais il y a des expressions plus heureuses que d'autres. Ainsi l'expression ***les uns composés*** est mal construite. En effet, comme nous l'avons vu plus haut, une définition bien faite doit donner d'abord le genre puis la différence, ou qualité essentielle, ou accident général. Un exemple de définition déficiente est donnée par Avicenne: *"**"La passion est l'excès de l'amour" alors qu'elle est seulement l'amour excessif.**"*[14] Ici "l'amour" est le genre, "l'excessif" est la différence. Pour en revenir au nombre; il est d'abord du genre ***composé*** et ***les uns*** sont la différence (par rapport à d'autres composés eventuels). C'est pourquoi **"ce qui est composé par des uns"** est plus adéquat.

---

[13]Ibid n°104 et 105. On y trouve une curieuse affirmation d'Avicenne ; "***Il semble que l'unité et la multiplicité sont des choses que nous nous représentons en premier lieu. Mais la multiplicité, nous nous l'imaginons d'abord tandis que l'unité nous l'intelligeons d'abord.*** " Veut-il dire que le multiple est immédiat aux sens et l'unité à la raison ?

[14]Livre des Définitions n°10.

L'unité.

Tout projet de définition du nombre est abandonné. On doit se contenter d'une description. Ibn al-Banna' va s'interroger sur la nature de l'unité, laquelle conditionne celle du nombre.

La première question posée date de L'Antiquité Grecque : **Un est-il un nombre ?** Si pour les Grecs, la réponse est non, les Arabes, eux, nuançent leur réponse depuis déjà un certain temps. Pour dire les choses rapidement, ***un*** s'emploie en plusieurs sens ; il y a le ***un*** empirique, fortement dévalorisé par les Grecs et surtout par Platon, le ***un*** arithmétique, le ***un*** métaphysique, le ***un*** théologique, et les ***uns*** à cheval sur deux domaines. La plupart du temps on ne sait pas à quel ***un*** on a affaire ! Et pour tout cela nous disposons de deux termes, l'un et l'unité. ***Un*** est plutôt utilisé empiriquement, ***l'unité*** est plus de l'ordre de la théorie.

Le nombre étant composé d'unités, sa caractéristique première est d'être divisible. Pour savoir si ***un*** est un nombre ou non, un critère portera sur sa divisibilité ou son indivisibilité.

"Nous définissons l'unité par l'absence de division ou l'absence de parties en acte. Et nous prenons la division et la partition dans la définition de la multiplicité[1], c'est-à-dire du nombre.

Un est un nombre

*Le **un**, s'il est considéré en tant qu'il est composé d'unités comme lorsqu'on dit de quinze qu'il résulte du produit de cinq par trois, <alors> chaque unité de trois est cinq et chaque unité de cinq est trois. Et, comme chaque nombre est un nombre unique, le un est donc composé d'unités et, de ce point de vue, **c'est un nombre.** Avec cela, l'ordre des unités est constitué de neuf nombres et non de huit, et les noms simples des nombres sont au nombre de douze et non de onze.*

Traduction d'Aballagh page 479 ligne 1 à ligne 11.

Voici deux cas où ***un*** est un nombre.

Lorsqu'il est mis à la place d'un nombre ; c'est alors un nombre puisqu'il est divisible. Husserl, dans ***Philosophie de l'arithmétique***, jouant sur la possibilité qu'a l'allemand de substantiver les adjectifs, explicite la multiplication 3x5 comme étant trois "Cinqs" ; trois est pris comme un adjectif et cinq comme un substantif. Dans le texte ci-dessus, Ibn al-Banna' fait de même, considère cinq comme un substantif, comme un objet à part entière ; cinq est alors un ***un*** composé d'unités, c'est un ***un*** qui est un nombre. Et de façon symétrique, trois est un ***un*** qui est un nombre.

[1]Avicenne Métaphysique du Shifa n° 129.

Mais ***un*** est aussi un nombre lorsqu'on considère la suite des nombres ; il y a alors neuf unités, de 1 à 9, et douze noms simples de nombres ; 1,...,9, 10, 100, 1000, les nombres au-delà étant nommés par des arrangements de ces noms.

Un n'est pas un nombre

Il s'agit du ***un*** abstrait, ou nombrant, considéré dans son isolement et sa singularité, en dehors de tout usage empirique ou manipulatoire. Indivisible, intègre, il est le principe du nombre, celui qui engendre par addition la totalité des nombres. Cette idée, née en Grèce cinq siècles avant J.C., se retrouve tout au long de l'Antiquité tardive et du Moyen-Age sous des vocables variés : origine, source, germe, cause, fondement, mesure. Le ***un*** est alors investi d'un pouvoir générateur quasi métaphysique et ce phénomène perdurera jusqu'à la fin du XVIè siècle.[2]

> *Et, s'il est considéré du point de vue de son unicité et de sa singularité, sans qu'il y ait, là considération d'une autre nature, il est alors l'unité même qui est le* ***principe du nombre,*** *c'est-à-dire celle qui est telle que, si on lui ajoute une autre <unité>, leur somme devient un nombre et, dans ce cas, le un n'est pas un nombre. < Ainsi>,* ***tout nombre est un mais un n'est pas toujours un nombre.***
>
> *Et le un numérique est, sans aucun doute, non divisible par le nombre en tant qu'il est un. Bien plus, rien d'autre de ce qui est un , n'est absolument divisible du fait qu'il est un.*
>
> *Traduction Aballagh page 479 ligne 12 à ligne 24*

Le raisonnement est le suivant ; puisque ***un*** engendre additivement les nombres, c'est un principe. Mais un principe est par définition indivisible ; donc ***un*** est indivisible. Or tout nombre est divisible puisqu'il est composé d'unités. Donc, dans ce cas, ***un*** n'est pas un nombre.

Dans le second paragraphe, Ibn al-Banna' partant du fait que ***un*** n'est pas divisible (les fractions ne sont pas des nombres), pose ***un*** comme étant la marque de l'indivisibilité. Il y a assimilation du ***un*** numérique et du ***Un*** métaphysique.

"Telle chose sera une, si elle est indivisible quantitativement, et telle autre, si elle est indivisible qualitativement. C'est pourquoi l'Un est indivisible soit absolument, soit en tant qu'un."[3].

[2]Pour plus de détails, voir l'article à paraître dans les actes du colloque d'épistémologie de Cherbourg. IREM de Caen.

[3]Aristote. Métaphysique. 1053 b. 6.

Le *un* et la divisibilité.

Mais, on doit le ***considérer du point de vue de ce qu'il représente.*** *Il y a ainsi parmi les uns numériques ceux qui, par la nature de leur représentation, ne sont pas susceptibles de se multiplier comme* ***un homme,*** *et ceux qui, par leur nature, ont cette <faculté>, comme* ***une eau*** *car elle peut devenir de nombreuses eaux.*

Celui qui par sa nature, n'est pas ainsi, ou bien il peut se multiplier d'un autre point de vue, ou bien non.

Exemple du premier : le un numérique pour les hommes. Il ne se multiplie pas en tant qu'il est homme si on le divise mais il se multiplie d'un autre point de vue et ce lorsqu'il est divisé en âme et corps ; et aucun des deux n'est homme.

Quant à celui qui n'est pas ainsi, il est de deux sortes : ou bien il a une autre nature et ce malgré qu'il soit indivisible, ou bien il n'en a pas. Exemple de la première sorte : le ***point,*** *il n'est pas divisible en tant que point ni d'un autre point de vue, <alors> qu'y existe une autre nature que <celle de> l'unité et c'est la position ou ce qui se rapporte à la position. Il en est de même* ***de l'intellect et de l'âme*** *: chacun des deux a une existence autre que celle qui s'entend comme ne se divisant pas dans sa nature ni d'un autre point de vue, et cette existence n'est pas une position.*

Quant à celui qui n'a pas une autre nature, c'est ***l'unité*** *elle-même, qui est le* ***principe du nombre.*** *Cette unité, si elle est appelée un n'est absolument pas considérée comme <faisant partie du> nombre ; mais elle est* ***la cause du nombre.***

Traduction Aballagh page 479 ligne 24 à page 481 ligne 7.

Ibn al-Banna' considère maintenant le ***un*** concret, nombré, c'est-à-dire appliqué à la réalité empirique, le "nombre de"[4], opposé au nombre tout court. Ce ***un*** là est parfois divisible. Dans le texte, "multiplier" doit être compris comme démultiplier ou diviser, car lorsqu'on divise une chose on fait du multiple. Il distingue, parmi les ***uns***, différents cas ;

1-ceux qui sont divisibles ; il y a deux possibilités.

- **a**-ceux qui se divisent en êtres de natures différentes du tout, comme un ***homme***.
- **b**-ceux qui se divisent en êtres de même nature, comme une ***eau*** ou une ligne[5].

2-ceux qui ne se divisent pas ; là aussi il y a deux possibilités .

- **a**-ceux qui ont d'autres déterminations que leur indivisibilité, comme le ***point*** car il a une position dans l'espace.[6] Autre exemple ; ***l'intellect ou l'âme,*** qui sont un, indivisible, sans situation dans l'espace, mais dont la nature ne se réduit pas à être un ***un***.
- **b**-ce qui est réduit à l'indivisibilité, ***l'unité*** elle-même, dont Ibn Al-Banna' a parlé précédemment ; principe, cause du nombre, elle n'est absolument pas un nombre.

[4]Stella Baruck; dictionnaire de mathématiques élémentaires.
[5]Métaphysique du Shifa n°100.
[6]Aristote. Métaphysique 1016 b 27 ; ***"ce qui est absolument indivisible avec position, c'est le point."***

L'unité est affirmative et extrinsèque aux quiddités.

Les choses se compliquent ! Nous allons naviguer pendant quelques temps dans la scolastique, et retrouver l'identification, pour le moins abusive, faite par les Grecs, entre le ***Un*** métaphysique et le ***un*** numérique.

Dans ce passage, comme pour la seconde pseudo-définition du nombre, Avicenne et Ibn al-Banna' vont user des mêmes arguments et en tirer des conclusions contraires.

Voici l'argumentation d'Avicenne[1]; les Anciens rangeaient certains concepts selon l'opposition de contrariété. L'un des pôles de cette opposition était considéré comme positif ou affirmatif ; c'est la forme, l'habitus, c'est-à-dire ce qui est ***"intelligible et stable par lui-même."***. On y trouve : ***"le bien, l'impair, l'un, la fin, la droite, la lumière, le quiescent, le droit, le carré, la science et le masculin."*** L'autre pôle, le négatif, la privation, contient leurs opposés : ***"le mal, le pair, le multiple, l'infinitude, le gauche, l'obscurité, le mobile, le courbe, le rectangle, l'opinion, le féminin."***[2] Suit une argumentation équivalente à celle d'Ibn Al-Banna'. Négation et privation doivent ici être pris comme des synonymes en tant que jugement de valeur intrinsèque, mais aussi dans le sens "d'opposé à" lorsqu'ils sont mis en relation avec un autre terme.

Et sache que ***l'unité est une chose extrinsèque à la quiddité et elle est affirmative.*** *Car, sans doute, si l'un par l'unité était une négation, il ne serait pas une négation de n'importe quoi, mais la négation de la multiplicité.*

Si la multiplicité était privation, l'unité serait privation de la privation et elle serait affirmative, et si la multiplicité était affirmative alors qu'elle est l'ensemble des unités, l'ensemble des privations serait <donc> affirmative, ce qui est une absurdité.

De plus, l'unité s'oppose à la multiplicité, <tandis que> le noir ou quelque chose d'autre ne s'oppose pas à la multiplicité ; l'un des deux n'est pas l'autre. L'unité est <donc> une chose affirmative, extrinsèque aux quiddités.

Traduction Aballagh page 481 ligne 8 à ligne 23.

"L'unité est une chose extrinsèque à la quiddité".

Tout ce qui existe a une essence, nature ou quiddité (la quiddité est la réponse à la question "qu'est-ce ?", en latin "quid est ?") par laquelle il est ce qu'il est. La substance est

[1]Métaphysique du Shifa n° 128.

[2]On peut penser sans prendre beaucoup de risques, que les Anciens dont parle Avicenne sont les philosophes grecs à partir de Pythagore. En effet cette série d'oppositions est une des clefs de la philosophie grecque. On peut la retrouver chez Aristote dans Métaphysique A, 5.

l'essence réalisée dans un être réellement existant. Toute quiddité a pour propriété fondamentale d'être "une", c'est-à-dire, indivisible et distincte de ce qui a une autre quiddité. La définition est l'expression orale ou écrite de la quiddité, comprenant, rappelons-le, genre et différence. La doctrine essentialiste d'Avicenne, tout à fait originale, considère comme accidentelle tout ce qui n'est pas immédiatement et nécessairement inclus dans la définition d'une chose.[3] Or lorsqu'on donne la définition d'un objet réel ou de pensée, l'unité de cet objet n'est donnée, ni dans le genre, ni dans la différence. L'unité est ***"un concomitant nécessaire général"***[4] de toute substance ou accident mais qui n'entre pas dans leur définition.

L'unité est extrinsèque à la quiddité, c'est-à-dire qu'une chose est une par quelque chose, l'unité, qui lui est comme surajoutée.

Cette position d'Avicenne fut très critiquée au Moyen-Age, principalement par Saint Thomas d'Aquin.

"L'unité est affirmative."

Si l'unité est une négation, elle est négation de la multiplicité et non du noir ou de n'importe quoi d'autre. La multiplicité, elle, est soit négative soit positive (tiers-exclu oblige !).

-Si la multiplicité est négative, alors l'unité est négation de la négation donc affirmative, ce qui est contraire à l'hypoyhèse.

-Si la multiplicité est affirmative, puisqu'elle est un assemblage d'unités, elle est un assemblage de négations. Ceci est une absurdité, puisqu'un assemblage de négations est forcément une négation !

Ibn al-Banna' en conclut que, l'unité ne pouvant être une négation, elle est ***une chose affirmative***.

Avicenne en conclut ***"qu'on ne peut donc pas faire de l'opposition entre elles (l'unité et la multiplicité) une opposition de la privation et de l'habitus."*** En cela il rompt avec une longue tradition philosophique qui avait fait de l'opposition du un et du multiple le prototype de l'opposition conceptuelle.[5]

---

[3]Les rapports de l'essence, de l'un et de l'être chez Avicenne sont développés par E. Gilson dans l'Etre et l'essence,p.124-131.
[4]Avicenne n°109-19.1
[5]Aristote, Métaphysique 1005 a,3 ;***"Tous les êtres sont, en effet, ou bien des contraires, ou bien des composés de contraires, et les principes des contraires sont l'Un et le Multiple."***

Nature de l'unité

La difficulté de ce passage tient à la nature spécifique du nombre ; ce n'est pas une propriété des choses comme, par exemple la couleur, mais il n'est pas, non plus, subjectif[6]. Par ailleurs les options métaphysiques d'Avicenne concernant l'essence, l'existence et l'unité, sont complexes et ont manifestement influencé Ibn al-Banna'.

Et si l'on dit que ***les unités se ressemblent*** *en ce qu'elles sont unités, et se* ***distinguent*** *par la spécificité de chacune d'elles, qui fait d'elle une unité déterminée. Ce qui les fait se ressembler n'étant pas ce qui les distingue , la spécificité de chacune d'elle qui est une unité est extrinsèque à sa quiddité qui est aussi une unité. L'unité aura donc une autre unité, ce qui débouchera sur un* ***cercle vicieux.*** *La réponse à cela est qu'il n'y a pas, pour l'unité, une autre unité, mais qu'elle a une individuation ; or nous,* ***nous n'affirmons pas l'individuation*** *; il n'y aura donc pas de cercle vicieux.*

Traduction Aballagh page 481 ligne 24 à page 482 ligne 8.

L'unité empirique fait corps avec l'objet auquel elle s'applique, et ceci génére la distinction des unités. Mais dans "un soleil" et dans "un homme", on retrouve le même mot ; ces deux unités se ressemblent. Comment résoudre ce problème de ressemblance et de distinction ? On peut répondre que l'unité a une existence en-dehors (séparée) des objets auxquels elle s'applique. Cette unité, comme toute substance, aurait, d'après le passage précédent, une unité concomitante et extrinsèque à sa quiddité. On a alors un ***cercle vicieux***[7].

L'individuation est une réponse classique à cette difficulté[8] ; elle permet d'expliquer le passage de l'idée générale (la nature commune, la quiddité, l'essence) à l'individu, du Un au "un" appliqué à une chose.

Ibn al-Banna' n'adopte pas le principe d'individuation. L'unité est un accident d'un type particulier.

---

[6]Frege ; Les fondements de l'arithmétique n°45.

[7]Pour plus de précision on peut consulter Avicenne ; Métaphysique n°107.

[8]Lalande ; ***"Ce principe*** (l'individuation) ***est la matière, pour les choses sensibles, selon saint Thomas d'Aquin ; une détermination ou "forme" spéciale appelée Ecceité selon Duns Scot."***

L'unité est un accident.

Toute chose existante est, soit substance, soit accident. La substance est ce qui existe par soi-même. L'accident s'oppose à la substance en ce sens qu'il ne peut exister en dehors d'un objet et qu'il peut être ajouté ou enlevé de cet objet sans en changer la substance. Un homme habillé a la même substance que le même homme nu. "Habillé" n'existe que comme attribut d'une substance ; c'est un accident.

"Toute chose est ou substance ou accident...Il n'y a donc pas une chose qui soit accident et substance."[9]

> ***L'unité n'est pas une substance,*** *car l'unité de la substance est équivalente à l'unité de l'accident, à travers le concept qui fait d'elle une unité. Si ce concept était substance il serait impossible qu'il rentre dans l'accident, car la substance ne se trouve pas dans l'accident, et s'il était accident, il est possible qu'il rentre dans la substance, car l'accident peut exister dans la substance, alors* ***on doit affirmer que l'unité est un accident,*** *et si l'unité est un accident, le nombre qui en est constitué est donc nécessairement un accident.*
>
> *Traduction Aballagh page 482 ligne 9 à ligne 19.*

Comme nous l'avons vu plus haut, l'unité est extrinsèque aux quiddités et concomitante de la substance ; elle est aussi concomitante de l'accident. Dans l'expression "un homme habillé", ***un*** s'adresse à "homme" et à "habillé". Si l'unité était une substance, elle ne pourrait s'appliquer à un accident (on attribue un adjectif à un substantif mais pas l'inverse). Donc l'unité est un accident.

"Il est clair que la quiddité de l'unité est une intention accidentelle et qu'elle appartient à l'ensemble des concomitants des choses."[10]

L'unité ne peut exister en dehors de quelque chose ; ce n'est pas une substance, c'est un accident inséparable de tout ce qui est. Et il en est de même pour le nombre.

"Les choses qui sont par accident ne sont pas définissables" dit Avicenne[11]. Nous avons ainsi confirmation de l'impossibilité de définir l'unité et le nombre.

Quelle déchéance ! Pour Pythagore et aussi pour Platon[12], non seulement le nombre était substance, mais il était même substance de tous les êtres.

---

[9] Avicenne; Le livre de la science, Logique.
[10] Avicenne ; Métaphysique du Shifa n°109-10.
[11] Ibid n° 57.
[12] Théorie des "nombres idéaux" de Platon. Le livre de référence sur ce sujet est ***"La théorie platonicienne des Idées et des Nombres d'après Aristote"*** de L.Robin.

Le nombre a une existence réelle.

Bien que le nombre n'existe pas en dehors des êtres qu'il nombre, bien qu'il n'ait pas d'existence autonome, il a, malgré tout, une existence réelle.

Certains ont prétendu que le nombre n'est pas un accident existant à l'extérieur de l'esprit, mais qu'il faisait partie de l'ensemble des considérations <mentales>. Ceci est le propos d'un non-initié car la considération par l'esprit, ou bien elle correspond à ce qui est extérieur à l'esprit, ou bien elle ne lui correspond pas. Si elle lui correspond, cela atteste qu'il y a quelque chose à l'extérieur de l'esprit. Et s'il n'y a pas à l'extérieur ce qui lui correspond, décider <d'une chose> qu'elle est cinq alors qu'elle n'est pas cinq, est de l'ignorance pure et simple. Avec cela ***le doute <concernant l'existence réelle> du nombre disparait.***

Et sache que les quiddités des nombres ne <se réduisent> pas au seul fait qu'elles sont des nombres ; leurs quiddités sont les plantes, les minéraux et d'autres choses. Le fait qu'ils soient des nombres est extrinsèque à leurs quiddités et ne signifie pas une absence d'unité car le nombre est composé d'unités et l'ensemble des choses existantes ne peut être une chose inexistante.

Le nombre se différencie par ses propriétés, *comme la parité, l'imparité, la rationalité, l'irrationalité, et autres. Et ces propriétés sont impossibles à supprimer : si elles sont des différences, ce sont alors les espèces du nombre, sinon la différence des concomitants signifie la divergence des différences et ceci contient la solution à ce qui est demandé.*

Quant aux ***dernières espèces du nombre*** *ce sont : le un, le deux, le trois qui sont les nombres entiers successifs.*

Traduction Aballagh page 482 ligne 20 à page 483 ligne 21.

Ibn al-Banna' affirme la réalité objective du nombre contre ceux qui prétendent que celui-ci n'est qu'une pure création de l'esprit humain. Il reprend les positions d'Avicenne ; ***"L'affirmation de celui qui a dit que le nombre n'a d'existence que dans l'âme n'est pas digne d'être considérée."***[13]

[13] Ibid n° 119.

La lecture d'Avicenne aide à la compréhension de ce passage un peu obscur. Les idées sont les suivantes ;

-le nombre abstrait, ***"séparé des réalités concrètes"***[33] n'existe que dans l'esprit, contrairement à l'opinion des pythagoriciens et des platoniciens. C'est dans les choses mêmes, les plantes, les minéraux, que le nombre existe véritablement.

-le nombre est composé d'unités, mais n'est pas un agrégat sans forme d'unités. Il a une unité, c'est-à-dire une identité.

-le nombre a des propriétés spécifiques. Pour Avicenne c'est une preuve qu'il a une existence réelle ;***"La chose qui n'a pas de réalité, il est impossible qu'elle ait des propriétés d'antériorité ou de composition ou d'achévement, d'augmentation ou de diminution, d'être élevé au carré ou au cube, d'être un nombre irrationnel (samm) et d'avoir les autres figures qu'ils ont.*** "[33] L'irrationalité des entiers nous pose un problème non encore résolu.[14]

-certaines propriétés permettent une partition, au sens actuel du terme, des nombres entiers. On a alors affaire à une différence, qui définit des espèces comme par exemple l'espèce "pair" et l'espèce "impair", les espèces dernières étant les individus : 1, 2, 3... On peut remarquer que zéro ne fait pas partie de la liste.

-la différence des concomitants et la divergence des différences nous est obscur. S'agit-il de propriétés ne permettant pas de partition ?

On aboutit non pas à une définition du nombre, mais à une description au plus près de sa nature.

[14]Un entier irrationnel est peut-être un nombre dont la racine carrée est irrationnelle.

La numération décimale.

Il semble que l'origine de la base dix de la numération ait été un sujet de débat important dans le monde arabe.[1] Puisque tout nombre, un exclu, peut servir de base, pourquoi dix ? La plupart d'entre nous répondrions prosaïquement que c'est à cause des dix doigts de la main, que, de plus, c'est une base commode, ni trop grande ni trop petite ! Voici les arguments d'Ibn al-Banna' :

Si on a mis dans chaque ordre ***neuf nombres,*** *c'est parce que le monde est composé de substance et d'accident, il y a neuf genres d'accidents et deux sortes de substances : le limitant et le limité. Le limitant est de neuf <sortes> qui sont : les sept cieux, le siégé sublime et le trône. Le limité est de neuf <sortes.> : les quatre éléments - le feu, l'air, l'eau, la terre - et ceux qui en sont composés comme genres - les minéraux, les plantes, les animaux - ce qui fait trois, ainsi que les démons et les anges.*

On a mis ***trois ordres pour le nombre,*** *car la substance est un lieu pour les neuf accidents, et la terre est un lieu pour ce qui est en elle et sur elle comme constituants.*

Et en tant qu'elle est limitante, elle est le centre du tout, et le centre fait office de lieu. Ainsi, le monde tout entier est constitué de trois <ensembles de> neuf dans trois lieux ; ils ont ainsi réparti les nombres en trois <ensembles de> neuf selon trois ordres. L'ensemble de l'univers est <constitué> de dix <éléments> : la substance et les neuf genres d'accidents.

Et si la terre est considérée avec chacun du limitant et du limité, on obtient dix. Dix est devenu, ainsi le noeud du cycle numérique, et il a été posé un dans la deuxième position qui est la position de l'unité de l'ensemble.

On a également mis trois ordres pour le nombre, selon un autre point de vue : c'est que les existants sont considérés de trois manières : l'existence des choses en tant que telles, leur existence dans l'esprit, et leur existence dans les termes dits ou écrits. Alors ***on a mis en concordance les choses conventionnelles avec les choses existantes.***

Ils ont été appelés ordres parce qu'ils se succèdent les uns aux autres, les unités de chaque ordre étant plus grandes que les unités de celui qui le précède, et plus petites que les unités de celui qui lui succède. Ils sont appelés aussi position, compte tenu du fait que le nombre y occupe <une place>.

Ce qui est dit pour trouver l'indice et le nom est clair, car après les trois premiers ordres, se répétent trois autres ordres qui sont : les milliers et leurs dizaines et leurs centaines ; et après eux, se répéte le troisième <groupe> de trois ordres qui sont :les mille de mille, leurs dizaines et leurs centaines, et ainsi de suite après chaque trois ordres se répétent trois autres ordres, sauf les trois premiers ordres qui ne sont pas répétés.

Traduction Aballagh page 484 ligne 1 à page 485 ligne 20.

[1] A. Djebbar ; Revue tunisienne des études philosophiques 1984-2.

Ibn al-Banna' cherche à fonder l'existence des ***neuf*** chiffres (de un à neuf) ainsi que les ordres, à savoir unité, dizaine, centaine, par des considérations pour le moins étonnantes, prises dans des domaines tout à fait hétéroclites[2] .

Il fait appel aux dix catégories d'Aristote qui sont une classification de tous les objets de la pensée ; la substance et les ***neuf*** accidents.possibles.[3]La substance est elle-même de deux sortes, le limitant ou l'enveloppant, monde supralunaire des astres et des divinités et le limité ou l'enveloppé, monde sublunaire, autrment dit, la terre.

La substance limitante est de ***neuf*** sortes ; les septs cieux correspondant aux trajectoires du soleil, de la lune et des cinq planètes (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne), puis le siégé sublime et le trône. Toutes ces entités appartiennent à la cosmologie angélologique d'Avicenne, et plus généralement à la mystique perse, où Intelligences, Sphères célestes, Ames, Chérubins, sont organisés dans une hiérarchie complexe, censée expliquer, et le monde, et les différentes formes de connaissance, depuis la vision mystique jusqu'à la connaissance sensible.

La substance limitée est, elle aussi, composée de ***neuf*** éléments ; quatre éléments constituants, le feu, l'air, l'eau, la terre,[4] trois éléments matériels constitués, minéraux, plantes et animaux, et deux éléments spirituels, les démons et les anges.

Autre domaine pris en compte ; celui de l'Etre et de ses modes ; substance, quiddité et définition sont ***trois*** formes de l'existence récupérées par Ibn al-Banna' pour justifier les ***trois*** ordres.

L'intention d'Ibn al-Banna' est de montrer qu'il y a adéquation entre les mathématiques et le tout du monde, bien entendu le monde de son époque, avec ses présupposés métaphysiques, théologiques et mythiques. ***Alors on a mis en concordance les choses conventionnelles avec les choses existantes.*** Cette phrase résume la philosophie personnelle d'Ibn al-Banna'. Elle n'est pas sans rapeller la proposition VII du livre I de ***l'Ethique*** de Spinoza : ***"L'ordre et la connexion des idées sont les mêmes que l'ordre et la connexion des choses."***

[2]Dans la tradition pythogorico-platonicienne, dix est un nombre parfait et cette perfection est justifiée par des considérations mystiques et mathématiques d'une grande diversité. Voir à ce sujet Les écoles présocratiques de J.P. Dumont p. 252 inc.

[3]Aristote ; Organon I. Les neufs sortes d'accident sont ; la quantité, la qualité, la relation, le lieu, le temps, l'état, la possession, l'action, la passion.

[4]Platon, Timée 31 d ; ***"Chacun des quatres éléments est entré tout entier dans la composition du monde, car son auteur l'a composé de tout le feu, de toute l'eau, de tout l'air et de toute la terre..."***

Conclusion

Si certains des problèmes posés par Ibn al-Banna' dans ce premier chapitre nous paraissent d'une grande naïveté et ne parlent guère à notre esprit d'homme du XX$^{\text{è}}$ siècle, d'autres peuvent engendrer une reflexion fructueuse. J'en vois deux; celui de la définition du nombre et celui de l'unité.

Le premier est récurrent dans l'histoire de la pensée. Dans ***De l'esprit géométrique,*** Pascal aborde le problème de la définition et en dit ceci ; la géométrie ***"ne définit aucune de ces choses, espace, temps, mouvement, nombre, égalité, ni les semblables qui sont en grand nombre, parce que ces termes-là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui entendent la langue, que l'éclaircissement qu'on en voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction."***

Pour définir, il faut des mots nécessitant eux-mêmes d'autres mots pour être définis. Cette régression *ad infinitum* doit s'arrêter quelque part ; ce sont les notions primitives. Reste le problème délicat de trouver lesquelles choisir !

Quant à l'unité le questionnement sur son statut ambigu fut résolu à la fin du XVI$^{\text{è}}$ siècle par un flamand, Stévin, qui décréta que ***un*** était un nombre, zéro, lui, restant dans les limbes du non-nombre. Et si plus personne aujourd'hui ne conteste au ***un*** sa place parmi les nombres, il n'empêche que ce n'est pas un nombre comme les autres. Le ***un*** est, dans certains contextes, quelque chose qui, ne s'écrivant pas, peut être abusivement tenu pour un rien, un quasi non-être, que l'élève négligent oubliera effectivement de compter. C'est le cas de la multiplication, de la division ou de la mise en puissance, où 1 n'est ni écrit ni dit. De plus ***un*** est une frontière; lorsqu'un nombre réel positif est multiplié par lui-même, s'il est avant 1, il diminue, s'il est situé après 1, il augmente.

Rappelons pour finir que ***un***, bien que n'étant "divisible que par un et par lui-même", n'est toujours pas considéré comme un nombre premier !

Bibliographie

IBN AL-BANNA

[1] IBN AL-BANNA, Le *raf^c al-Hija*b, Edition critique, traduction, étude philosophique et analyse mathématique de **Aballagh M.**, Thèse, Université de la Sorbonne, Paris, 1988.

[2] IBN AL-BANNA, *.Le Kitab al Jabr* , Edition critique, traduction, analyse mathématique de **Djebbar A**., Thèse, Université de Nantes, 1989.

[3] IBN AL-BANNA, *Le Talkhys,* Edition critique, traduction de **Marre A**., Imprimerie des sciences mathématiques et physique, Rome 1865.

[4] IBN AL-BANNA, *Talkhys A^c mal al Hisab*, Edition critique, traduction, commentaires de **Souissi M.**, Publication de l'Université de Tunis, 1969.

GENERALITES

[5] ABALLAGH M., et DJEBBAR A., *Découverte d'un écrit mathématique d'al Hassar*, Historia mathematica, n°14,1987.

[6] AISSANI D., *Bougie à l'époque médiévale.Les mathématiques au sein du mouvement intellectuel.* IREM de Rouen, 1993.

[7] BABA Ahmed., *Nayl al Ibtihaj* , Ed. Dar al Maahid, Le Caire, 1932.

[8] DJEBBAR A., *Les mathématiques au Maghreb à l'époque d'Ibn al Banna* , Actes du congrés mathématiques et philosophie de Rabat, 1982, Editions Okad, Rabat, 1987.

[9] DJEBBAR A., *Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman.* Actes du colloque sur l'histoire des mathématiques arabes, Alger, 1986, p.101 - 123.

[10] HEBERT E. et al, *Découvrir les mathématiques arabes*, IREM de Rouen, 1989.

[11] IBN KHALDUN A., *al Muqqadima*, Ed. Dar al Kitab, Beyrouth, 1967.

[12] LAMRABET D., *La mathématique maghrébine au moyen-âge,* mémoire de post-graduat en didactique des mathématiques, Université libre de Bruxelles, 1981

[13] LAMRABET D., *Introduction à l'histoire des mathématiques maghrébines,* Edité à compte d'auteur, Rabat 1994.

[14] LEONARD DE PISE, *Le livre des nombres carrés*, traduction de Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1952, introduction.

[15] MUNK S., Le guide des égarés, Paris, 1856.

[16] RASHED R., *Entre mathématiques et algèbre, Recherches sur les mathématiques arabes,* Paris, Les Belles lettres, 1984.

[17] RENAUD H.P.J., Notes critiques sur l'histoire des sciences chez les musulmans, Hesperis, T. XXXI, 1938, pp. 13 - 42.

[18] SANCHEZ PEREZ J. A., La ciencia arabe en la Edad Media, Instituto de estudios africanos, Madrid, 1954.

[19] SUTER H., Das Rechenbuch des Abu Zakariya al Hassar, Bibliotheca mathematica, 1901.

[20] YOUSCHKEVITCH A.P., *Les mathématiques arabes,* Paris, Vrin, 1976.

ALGEBRE ET EQUATION DU SECOND DEGRE.

[21] ABU KAMIL, *Kitab al Jabr wa l-Muqqabala*, Ed. Facsimilé de F. Sezgin, Frankfurt, série C, vol. 24, 1986 .

[22] AL KHWARIZMI, *kitab al jabr wa l-muqabala, E*dition Mashrafa A.M. et Mursi A.M., Le Caire, Dar al kitab al arabi, 1968.

[23] CASSINET et al., *Equations du second degré*, IREM de Toulouse, 1979.

[24] DJEBBAR A., *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIIIème - XIVème siècles*, Publications mathématiques d'Orsay, 1981, pp 6 à 45.

[25] AL KHWARZMI, *Gerard of Cremona's translation of al-Khwarizmi al-Jabr : a critical édition*, Barnabas Hughes, inMedieval studies 48 (1986) 211-63

LES APPROXIMATIONS DE RACINES

[26] BOULAHIA N., *Algorithmes et approximations*, à la mémoire d'al Qalasadi, Maghreb éditions, Tunis, 1987

[27] ZEMOULI T., *Le poème d'Ibn al-Yasamin sur les nombres irrationnels quadratiques,* Actes du colloque d'histoire des mathématiques arabes, Alger, 1986, pp.191 - 203.

NOMBRES FIGURES

[28] HEATH Sir Thomas L. *A manual of Greek Mathematics.* New York, Dover, 1963.

[29] NICOMAQUE DE GERASE, Inroduction arithmétique , traduction française de Bertier.J, Vrin, Paris, 1978.

[30] DICKSON.L.E, History of the theory of numbers, vol.II, Diophantine analysis, première publication 1919, Chelsa publishing company, New york, 1971, pp 1 à 39.

[31] DJEBBAR.A, Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIIIème - XIVème siècles, Publications mathématiques d'Orsay, 1981, pp76 à 89.

[32] DJEBBAR.A, Les nombres figurés dans la tradition de l'Andalousie et du Maghreb, Prépublication université d'Orsay n°85 T 44, Paris ,1985.

[33] LUCAS.E, Théorie des nombres, tome 1, première publication 1891, A.Blanchard, Paris, 1961, pp 52 à 62.

[34] ABALLAGH Mohamed ; *Les fondements des mathématiques à travers le Rafc al-Hijab d'Ibn al-Banna'* ; Actes du colloque sur l'histoire des mathématiques arabes, Alger, 1986, p.101-123.

[35] ARISTOTE ; *Métaphysique*, tome 1 et 2. Edition Vrin 1986.

[36] ARISTOTE ; *Organon* I. Edition Vrin 1989.

[37] AVICENNE ; *Le livre de la science* ; Logique. Les belles lettres / Unesco 1986.

[38] AVICENNE ; *Livre des définitions*. Publications de l'Institut français d'archéologie orientale du Caire. 1963.

[39] AVICENNE ; *Métaphysique du Shifa*. Tome 1. Edition Vrin 1978.

[40] BARUK Stella ; *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, le Seuil 1992.

[41] CONNES Alain et CHANGEUX Jean-Pierre ; *Matière à pensée*, Odile Jacob 1989.

[42] DJEBBAR Ahmed ; *Quelques remarques entre philosophie et mathématiques arabes*, Revue tunisienne des études philosophiques 1984-2.

[43] DUMONT Jean-Paul ; *Les écoles présocratiques*, Folio essais 1991.

[44] FREGE Gottlob ; *Les fondements de l'arithmétique*. Editions du Seuil,Paris 1970.

[45] GILSON Etienne ; *L'être et l'essence* ; édition Vrin 1987

[46] HUSSERL Edmund ; *Philosophie de l'arithmétique*. P.U.F. 1972.

[47] LALANDE André ; *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. P.U.F.1988.

Ref : 105

QUELQUES ASPECTS DES MATHEMATIQUES D'IBN AL-BANNA' DE MARRAKECH (1256-1321)

Dossier établi par le groupe de travail franco-maghrébin de l'IREM de Rouen.

Public concerné : Etudiants et enseignants de mathématiques.

Résumé : Prenant appui sur les récents travaux de recherche d'Ahmed Djebbar et Mohamed Aballagh, ce document de 150 pages, propose à des non-spécialistes de découvrir quelques chapitres des oeuvres d'Ibn al-Banna'. La mise en parallèle des textes intégraux (donnés dans leurs traductions françaises) et de multiples commentaires mathématiques et culturels, permet de se familiariser avec quelques aspects du savoir mathématique de ce XIII[e] siècle. Un fascicule regroupant les textes arabes d'origine peut être demandé auprès de Said Bouaris à l'IREM de Rouen.

Mots clés : Mathématiques arabes.
Equation du second degré.
Extractions et approximations de racines.
Nombres figurés.
Concept de nombre.

Date : juin 1995

Nb de pages : 130 pages.

N° d'ISBN : 2-86239-063-1

Publication : IREM de Rouen, BP 153, 76135 Mont-Saint-Aignan, France.

****

Bon de commande

M. , Mme, Mlle : ______________________________

Adresse : ______________________________

Libellé	Prix	Quantité	Total
[R.105] *Quelques aspects des mathématiques d'Ibn al-Banna' de Marrakech (1256-1321)*	60 F	....	....
Frais d'envoi : 15 F pour le 1[er] livre et 10 F par livre supplémentaire (France)			....
Frais réels pour l'étranger			....
SOMME DUE :			....

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :
L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN
Et adressés directement à l'I.R.E.M. - B.P. 153 - 76135 MONT SAINT AIGNAN
Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 35.14.61.41.

RIB : TP ROUEN TG 10071 76000 00044004056 81

****

DATE :

SIGNATURE :