

Aimer Saire des Maths  
au Lycée 5



I.R.E.M. de ROUEN

ât de maths Av. de Broglie BP 138 76821 Mt St Aignan ☎ - Fax. : 02-35-14-61-41



**A**imer **F**aire des **M**aths

au **L**ycée 5



*I.R.E.M. de ROUEN*

*Bât de maths Av. de Broglie BP 138 76821 Mt St Aignan ☎ - Fax. : 02-35-14-61-41*



# SOMMAIRE

page

- 1            *Points visibles ou invisibles.*  
**Daniel Lecouturier (Rouen).**
- 7            *Quelques remarques et prolongements autour  
de l'exercice du Bac S 1997 (spécialité).*  
**Luc Sinègre (Rouen).**
- 13           *La transformation de Joukovski.*  
**Frédéric Vivien (Rouen).**
- 26           *Autour du théorème de Morley.*  
**Gildas le Hir (Pont-Audemer).**
- 36           *Isogonale Driehoekens.*  
**Thierry Hamel (Evreux).**
- 44           *Les fractions continues. Cas  $\sqrt{N}$ .*  
**Eliane Andrieux (Rouen-APM).**
- 54           *Etudes d'équations :  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .*  
**Yves Suprin (Rouen-APM).**
- 67           *Polynômes de Bernstein et Courbes de Bezier.*  
**Bertrand Fort (Dieppe).**
- 75           *Comment les physiciens traitent (et maltraitent)  
quelques équations différentielles.*  
**Thomas Chénel (Rouen).**



## POINTS VISIBLES OU INVISIBLES

Dans l'espace de dimension  $n$ , parmi les points à coordonnées entières, nous distinguerons, en dehors de l'origine  $O$  :

- les points **visibles** (depuis l'origine) qui sont les points  $M$  distincts de  $O$  tels que le segment  $[OM]$  ne contient pas de point à coordonnées entières autre que les extrémités.
- les points invisibles, ou cachés par un point à préciser.

### Caractérisation :

Un point  $M$  de coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est visible si et seulement si ses coordonnées sont premières entre elles.

Preuve de la négation :

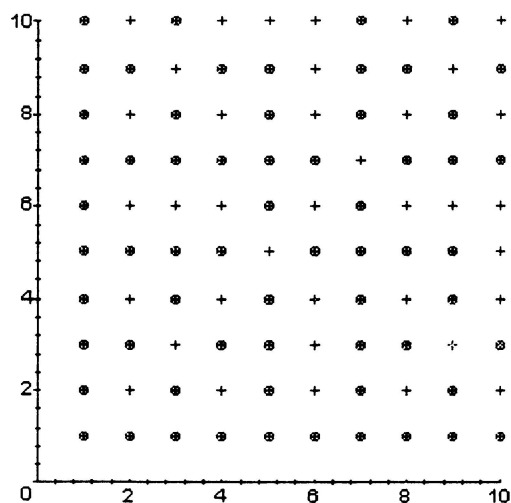
• Si  $d$  est le pgcd des coordonnées de  $M$ , alors  $M$  est caché par le point  $\frac{M}{d}$ .

• Si  $M$  est caché par un point  $N$  de coordonnées  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , alors il existe un réel  $t$  tel que  $N = t.M$ , et  $t$  est un rationnel s'écrivant sous forme irréductible :  $t = \frac{p}{q}$ , avec  $q > |p| > 0$ , d'où  $q \geq 2$ .

Entre nombres entiers : pour chaque indice  $i$  :  $q.y_i = p.x_i$ , et d'après le théorème de Gauss :  $q$  divise chacune des coordonnées de  $M$ , qui ne sont donc pas premières entre elles.

### Visualisation sous MAPLE :

```
> N:=10;
> reseau:=[seq(seq([i,j],i=1..N),j=1..N)];
> visible:=NULL;
> for couple in reseau do if igcd(couple[1],couple[2])=1 then visible:=visible,couple fi od;
> nops([visible]); # nombre de points visibles
63
> with(plots):
> trame:=plot(reseau,style=point,symbol=cross,color=red):
> points_visibles:=plot([visible],style=point,symbol=circle,color=blue):
#les points visibles sont figurés par un cercle.
> display(trame,points_visibles,scaling=constrained,view=[0..N,0..N]);
```



Après des formules de dénombrement exact, on établira que la proportion de points visibles à coordonnées comprises entre 1 et N **converge**, et on indiquera le calcul de la limite.

### Dénombrement dans le plan :

Dans le carré  $[1, N]^2$ , outre le point (1,1), d'après la symétrie par rapport à la droite d'équation  $y = x$ , il suffit de dénombrer les points (x,y) avec  $x > y$  : à  $x > 1$  fixé, il y en a autant que de nombres naturels y inférieurs à x et premiers avec x. Ce dénombrement est donné par l'indicatrice d'Euler  $\varphi$  où  $\varphi(x) = x \times [\text{produit pour } p \text{ premier divisant } x \text{ de } (1-1/p)]$ .

$$V(N) = 1 + \sum_{x=2}^N \varphi(x)$$

```
> with(numtheory):
Warning, new definition for order
> 1+2*add(phi(i),i=2..N);
63
> debut:=time():
> 1+2*add(phi(i),i=2..10^4);
> time()-debut; # long
60794971
48.080
```

### Dénombrement en dimension n :

En classant les points invisibles du cube  $[1, N]^n$  selon les diviseurs de leurs composantes, notons  $A(m)$  l'ensemble des points dont les composantes sont divisibles par m. La réunion de ces ensembles, qui ne sont pas disjoints, pour m premier variant de 2 à N donne l'ensemble des points invisibles  $I(N)$ . La **formule de Poincaré**<sup>1</sup>, aussi appelée '**principe d'inclusion-exclusion**' exprime le cardinal de cette réunion :

$$\sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} S_k$$

où  $S_k$  est la somme sur tous les k-uplets de nombres premiers  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  des cardinaux des intersections entre  $A(p_1)$ ,  $A(p_2)$ , ...,  $A(p_k)$ , et r est le nombre de nombres premiers jusqu'à N.

Les facteurs étant premiers, cette intersection est :  $A(p_1.p_2...p_k)$  de cardinal  $[N/p_1.p_2...p_k]^n$ . (Entre crochets, la partie entière). En effet, les éléments de  $A(m)$  sont les points  $(m.y_1, m.y_2, \dots, m.y_n)$ , avec  $y_1, y_2, \dots, y_n$  entiers compris entre 1 et  $N/m$ .

Pour le complémentaire, le nombre de points visibles est :

$$V(N) = N^n + \sum_{k=2}^r (-1)^k . S_k$$

Cette somme peut être réécrite avec la fonction de Möbius  $\mu$  qui, en m, prend la valeur :

<sup>1</sup> Aimer faire des maths au lycée - recueil n°3-exposé de B.Fort : des racines d'un polynôme à la fonction de Möbius.



- 0 si m est divisible par un facteur carré
- 1 si m est égal à 1
- $(-1)^l$  sinon, où l est le nombre de facteurs premiers distincts de m :

$$V(N) = \sum_{m=1}^N \mu(m) \cdot [N/m]^n$$

```
> N:=10:add(mobius(i)*iquo(N,i)^2,i=1..N);
```

```
63
```

```
> N:=10^4:debut:=time();
```

```
> s[2]:=add(mobius(i)*iquo(N,i)^2,i=1..N);
```

```
> time()-debut; # long
```

```
s[2] := 60794971
```

```
31.986
```

```
> for d from 3 to 4 do s[d]:=add(mobius(i)*iquo(N,i)^d,i=1..N) od;
```

```
s[3] := 831916552903
```

```
s[4] := 9239427676877311
```

Testez votre attention : combien vaut la somme  $\sum_{m=1}^N \mu(m) \cdot [N/m]^n$  ?

### Comportement asymptotique :

A partir de  $[N/m] = N/m - a_m$  où  $a_m$  est compris entre 0 et 1, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$[N/m]^n = (N/m)^n - b_m \text{ où } b_m \text{ est compris entre } 0 \text{ et } n \cdot (N/m)^{n-1}.$$

La proportion de points visibles rapportée au nombre de points dans le cube est donc donnée par la différence entre :

$$\sum_{m=1}^N \mu(m)/m^n \text{ et } \sum_{m=1}^N \mu(m) \cdot b_m/N^n$$

La première somme est absolument convergente, d'après majoration par la série de Riemann.

La deuxième somme (terme complémentaire) est majorée en valeur absolue par :

$$\frac{n}{N} \sum_{m=1}^N \frac{1}{m^{n-1}}$$

A partir de la dimension 3, la série de Riemann d'exposant  $n-1$  est convergente. En dimension 2, la somme des  $1/m$  est équivalente à  $\ln(N)$ . Dans tous les cas, le terme complémentaire converge donc vers 0 quand  $N$  tend vers  $+\infty$ .

La proportion de points visibles converge donc vers la somme de la série de terme général:  $\mu(m)/m^n$ , qui est aussi l'inverse de  $\zeta(n)$ , où  $\zeta$  est la fonction de Riemann.

En effet, le produit de deux séries (de Dirichlet) absolument convergentes  $\sum \frac{a_m}{m^s}$  et  $\sum \frac{b_m}{m^s}$

peut être développé en  $\sum \sum \frac{a_i \cdot b_j}{(i \cdot j)^s}$  puis réorganisé en  $\sum \frac{c_m}{m^s}$ , série absolument

convergente, où  $c_m$  est le produit de convolution multiplicative : somme pour tous les couples  $(i, j)$  de produit égal à  $m$  des produits  $a_i \cdot b_j$ . Il suffit alors d'établir que le produit de convolution entre la fonction constante égale à 1 et la fonction de Möbius est égal à la fonction de Dirac, valant 1 si son argument est égal à 1, et 0 sinon<sup>2</sup>.

```

> Zeta(2);
      1/6 Pi^2
> evalf(6/Pi^2);
      .6079271016
> Zeta(4);
      1/90 Pi^4
evalf(1/");
      .9239384016
> evalf(1/Zeta(3));
      .8319073727
    
```

Dans le plan, la proportion de points visibles converge vers  $6/\pi^2$ <sup>3</sup>, environ 0,6079.  
 En dimension 3 : 0,8319. En dimension 4 : 0,9239.

Ces résultats peuvent être formulés de manière probabiliste : si on tire au hasard 2 nombres entre 1 et  $N$ , avec  $N$  grand, la probabilité d'obtenir 2 nombres premiers entre eux est voisine de 60%. Pour trois nombres : 83% ,etc.<sup>4</sup>

### Problème de la forêt.<sup>5</sup>

**Énoncé :** Dans une forêt circulaire de rayon  $R$ , une source lumineuse est placée au centre  $O$  et des arbres de même rayon  $r$  sont plantés aux points de coordonnées entières. Quel est le rayon  $\rho$  à partir duquel toute la lumière est absorbée avant d'atteindre la périphérie ?

Si on se limite à la première allée, le segment joignant l'origine à  $(R, 1)$  n'est pas intercepté si  $r$  est strictement inférieur à  $\sqrt{R^2+1}$ , d'où la **minoration** de  $\rho$  par  $\sqrt{R^2+1}$ .

<sup>2</sup> Idem.

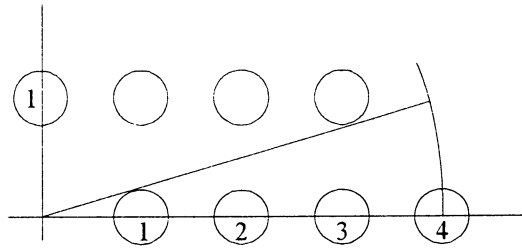
<sup>3</sup> Résultat attribué à E.Cesaro (vers 1881) dans le livre de J.P.Delahaye : le fascinant nombre Pi (bibliothèque pour la science-Belin. 1997)

<sup>4</sup> La proportion de nombres sans facteur carré compris entre 1 et  $N$  peut être évaluée de la même façon à partir des ensembles  $B(m)$  des multiples de  $m^2$  compris entre 1 et  $N$  : la réunion de ces ensembles pour  $m$  premier compris entre 2 et  $\sqrt{N}$  donne le complémentaire de l'ensemble étudié, dont le cardinal est alors :

$\sum_{m=1}^{\sqrt{N}} \mu(m) \lfloor N/m^2 \rfloor$ , et la proportion rapportée à  $N$  converge vers  $\frac{1}{\zeta(2)}$ . Même démarche pour les nombres se

factorisant sans puissance  $k$ -ième.

<sup>5</sup> Polya/Szegö : problems and theorems in analysis ,tome 2-Springer Verlag-1976 (ch 8 : exercice n°239 page 151, solution page 354).



Pour le problème posé, seuls les points visibles importent.

Pour prouver que  $\rho$  est égal à  $\sqrt{r^2+1}$ , il suffit de définir le **voisin de gauche** d'un point visible  $(a,b)$  :

- parmi tous les points  $(u,v)$  satisfaisant la relation  $a.v-b.u=1$ , il en existe au moins un qui est situé dans la forêt (par exemple, l'algorithme d'Euclide étendu, par divisions successives puis 'remontée', donne un couple  $(u,v)$  avec  $|u| \leq |a|$  et  $|v| \leq |b|$ ). Tous sont obtenus à partir d'une solution particulière  $(u_0,v_0)$  par :  $u=u_0+k.a$ ,  $v=v_0+k.b$  : ils sont alignés et délimitent avec l'origine, le point  $(a,b)$  et la solution qui les suit un parallélogramme d'aire 1.

- en progressant de  $(a,b)$  à partir d'une solution située à l'intérieur de la forêt, le dernier point que l'on rencontre avant de sortir de la forêt sera appelé voisin de gauche de  $(a,b)$ .

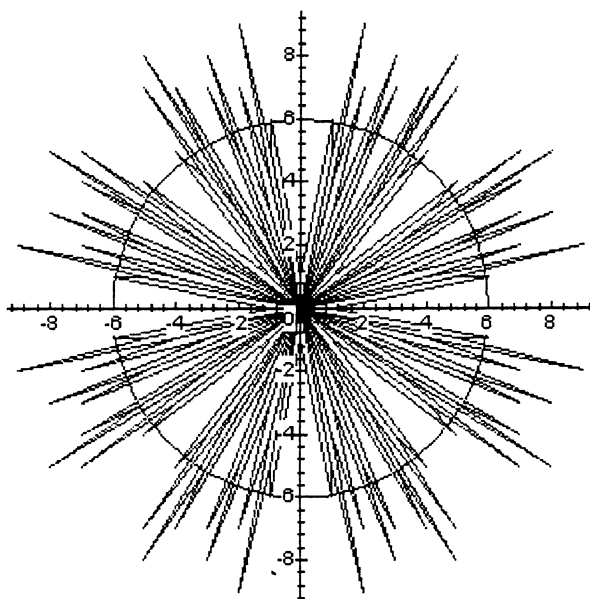
On parcourt ainsi l'ensemble fini des points visibles de la forêt à partir du point  $(1,0)$ , en passant d'un point à son voisin de gauche.

```

> R:=6:a:=[1,0]:
> for i from 1 while(a[1]<>1 or a[2]<>1) do
>   igcdex(a[1],a[2],'p','q'):
>   u:=-q:v:=p:
>   while u^2+v^2<=R^2 do u:=u+a[1]:v:=v+a[2] od:
>   olda[1]:=a[1]:olda[2]:=a[2]:
>   a[1]:=u-a[1]:
>   a[2]:=v-a[2]:
>   c[i]:=plot([[0,0],[olda[1],olda[2]],u,v],[a[1],a[2]],[0,0]]):
> od: # fin du tracé dans la partie du plan 0<=y<=x.

> with(plots):
> with(plottools): # début de l'extension à tout le plan par symétries et rotations.
> p_1:=display(seq(c[j],j=1..i-1)):
> sym_1:=transform((x,y)->[y,x]):
> p_2:=display(p_1,sym_1(p_1)):
> p_3:=display(p_2,rotate(p_2,Pi/2)):
> p_4:=rotate(p_3,Pi):
> cercle:=plot([6,theta,theta=0..2*Pi],coords=polar,color=blue,scaling=constrained):
> display(cercle,p_3,p_4):

```



Chaque rayon issu de l'origine est contenu au voisinage de O dans un parallélogramme d'aire 1 dont les sommets sont : O, (a,b), (a+u,b+v), (u,v), où (u,v) est le voisin de gauche de (a,b), et le troisième sommet est extérieur à la forêt. La diagonale correspondante est donc de longueur D supérieure ou égale à  $\sqrt{R^2+1}$ . La distance d des deux sommets visibles à la diagonale étant liée à l'aire par la relation  $d.D = 1$ , d est donc inférieure ou égale à  $\frac{1}{\sqrt{R^2+1}}$ . Ceci assure que si

$r > \frac{1}{\sqrt{R^2+1}}$ , alors toute la lumière émise est absorbée avant d'atteindre la périphérie,  $\rho = \frac{1}{\sqrt{R^2+1}}$

On peut formuler le résultat comme un résultat d'approximation diophantienne :

R étant un nombre entier, et a un nombre réel, il existe un couple (p,q) d'entiers vérifiant

$$p^2 + q^2 \leq R^2 \text{ et } \frac{|q - a.p|}{\sqrt{a^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{R^2+1}}$$

D'autre part, la reconnaissance du voisin de gauche peut être faite plus simplement si on range les points visibles du premier quadrant selon les pentes croissantes des segments qui les joignent à l'origine.

Exercice : démontrer que l'énumération des points visibles (a,b) du premier quadrant selon l'ordre croissant de b/a fait succéder à tout point son voisin de gauche. Ecrire les instructions Maple à partir de la commande *sort* pour réaliser le graphique précédent

*Si vous connaissez une estimation de  $\rho$  pour le problème analogue avec un réseau cubique en dimension trois, je suis bien sûr intéressé.*

#### Bibliographie :

- Hardy/Wright : an introduction to the theory of numbers. Oxford. 5<sup>e</sup> édition\_1979 (suites de Farey :ch 3, indicatrice d'Euler :ch5, comportement asymptotique de sommes :ch 16,17,18)
- Feller : an introduction to probability theory, volume 1-Wiley-1970 (ch 4 : dénombrement d'une réunion, application à des problèmes de répartition aléatoire)
- Hlawka/Schoiβengeier/Taschner : geometric and analytic number theory. Springer 1991 (ch 4 : number theoretic functions page 86-90)

### Introduction

On appelle  $T$  l'application qui à  $M$  d'affixe  $z$  associe  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$ .

Le texte demande de déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de ce complexe en fonction du module et de l'argument de  $z$ .

En remarquant que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}^*$  de module  $\rho$  et d'argument  $\theta$  on a

$$z' = \frac{1}{2}(z - \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}) = \frac{1}{2}(z - \frac{\bar{z}}{\rho^2})$$

et donc

$$\operatorname{Re}(z') = \frac{1}{2}(z' + \bar{z}') = \frac{1}{4}(z + \bar{z} - \frac{\bar{z} + z}{\rho^2}) = \frac{z + \bar{z}}{4}(1 - \frac{1}{\rho^2}) = \frac{\cos\theta}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})$$

$$\operatorname{Im}(z') = \frac{1}{2i}(z' - \bar{z}') = \frac{1}{4i}(z - \bar{z} - \frac{\bar{z} - z}{\rho^2}) = \frac{z - \bar{z}}{4i}(1 + \frac{1}{\rho^2}) = \frac{\sin\theta}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$$

Le problème va consister à d'abord fixer le module de  $z$  en faisant varier  $M$  sur un cercle d'origine  $O$ , puis ensuite de fixer l'argument  $\theta$  en faisant varier  $M$  sur une demi-droite de sommet  $O$  et à chercher dans chaque cas comment varie le point image  $M'$ .

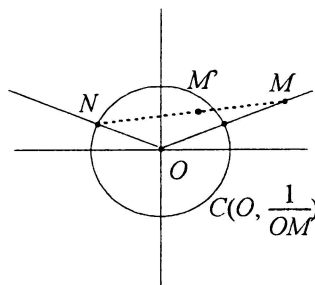
### Interprétation géométrique

On introduit le point  $N$  d'affixe  $-\frac{1}{z}$  afin d'interpréter  $M'$  comme le milieu de  $[MN]$ .

L'application  $M(z) \rightarrow N(-\frac{1}{z})$  est la composée de l'application  $f: M(z) \rightarrow m(\frac{1}{z})$  et de l'application  $m(\zeta) \rightarrow N(-\bar{\zeta})$ . Cette dernière application est la composée de la réflexion par rapport à l'axe des abscisses et de la symétrie centrale de centre  $O$ , il s'agit donc de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Le point  $O$ , le point  $M$  et son image par la première application appartiennent à la même demi-droite alors que les modules de  $m$  et de  $M$  sont inverses. On reconnaît une inversion de pôle  $O$  et de puissance 1.

L'application  $f$  est la composée de cette inversion et de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, il s'agit de ce qu'on appelle une *anti-inversion*. Il est presque immédiat de constater que l'image par ces applications d'un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $\frac{1}{r}$ , et celle d'une

demi droite de sommet  $O$  est sa symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Le problème posé possède donc l'interprétation géométrique suivante :



On associe au point  $M$  le point  $N$  obtenu en prenant l'intersection de la symétrique de  $[OM]$  par rapport à l'axe des ordonnées et du cercle  $C(O, \frac{1}{OM})$ .

Quel est le lieu du milieu  $M'$  de  $[MN]$  lorsque  $M$  décrit un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  ou encore lorsque  $M$  décrit une demi-droite fixée de sommet  $O$  ?

Remarque : Ce type de question apparaît dans de nombreux exercices classiques: si un point  $M$  par exemple décrit une figure  $\mathcal{F}$ , quel est le lieu décrit par le milieu  $M'$  de  $[MN]$  avec  $N$  l'image de  $M$  par une similitude  $s$  donnée.

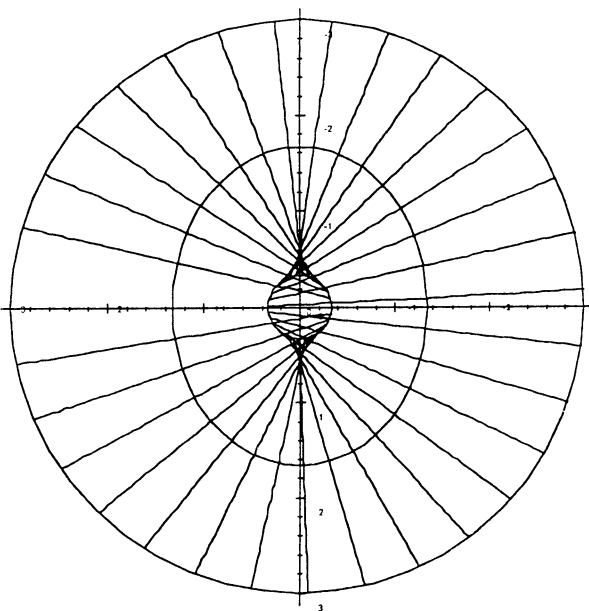
En se plaçant dans le plan complexe, on a  $M(z)$ ,  $N(az+b)$ , et donc  $M'(\frac{1}{2}[(a+1)z+b])$  est si  $a$  est différent de  $-1$  (cas des symétries) l'image de  $M$  par une nouvelle similitude...

### Le cas de l'ellipse.

Mais revenons à notre exercice de Bac. Si  $M$  décrit le cercle de centre  $O$  et de rayon 3, le point  $N$  décrit le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\frac{1}{3}$  et le lieu de  $M'$  est déterminé par

$$\text{l'équation paramétrique } \begin{cases} X = \frac{4}{3} \cos \theta \\ Y = \frac{5}{3} \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in [0, 2\pi[)$$

En faisant varier (avec le secours de *Maple*) le segment  $[MN]$  on s'aperçoit d'un détail supplémentaire: le vecteur  $\vec{M'N}$  dirige la normale à l'ellipse.



Cette situation n'est qu'un cas particulier d'une configuration qu'on appelle les cercles de *Chasles*. Deux points  $M$  et  $N$  se déplacent en sens contraire (à la même vitesse) sur deux cercles concentriques de rayons  $r$  et  $r'$ . Trouver la trajectoire du milieu  $M'$  de  $[MN]$ ?

On trouve que les coordonnées  $(X, Y)$  de  $M'$  sont dans ce cas

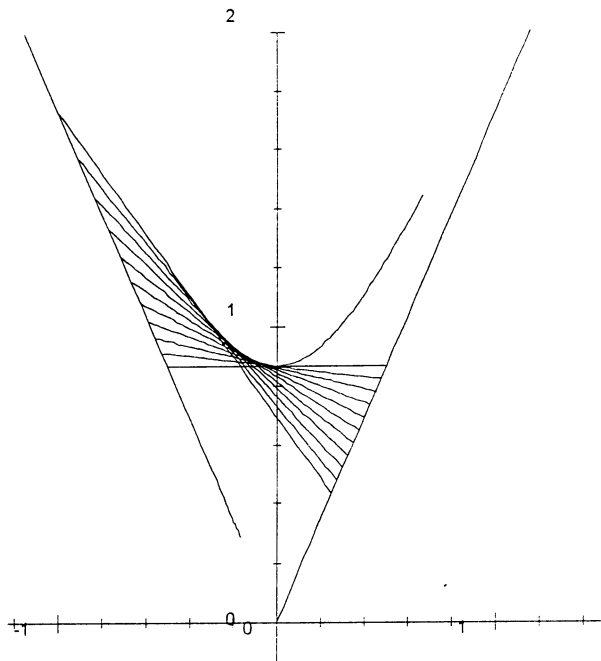
$$\begin{cases} X = \frac{r-r'}{2} \cos \theta \\ Y = \frac{r+r'}{2} \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in [0, 2\pi[)$$

### Le cas de l'hyperbole.

Si l'on fixe maintenant  $\theta$ , c'est-à-dire si  $M$  décrit une demi-droite comme dans la dernière question du problème, le point  $N$  décrit la demi droite symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et l'on invite l'étudiant à reconnaître ou étudier l'ensemble défini par l'équation cartésienne :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{4} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \end{cases} \quad (\rho \in [0, +\infty[)$$

On peut éliminer  $\rho$  comme semble nous le proposer le texte. Mais il est plus simple d'utiliser un changement de repère. Le point  $M$  a pour coordonnées  $(\rho, 0)$  dans le repère normé défini par les deux demi-droites d'équations  $\theta = \frac{\pi}{3}$  et  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ . Le point  $N$  lui a pour coordonnées  $(0, \frac{1}{\rho})$ . Finalement le point  $M'$  a pour coordonnées  $(\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2\rho})$  et on voit facilement que  $M'$  décrit la branche d'hyperbole d'équation  $XY = \frac{1}{4}$  et  $X > 0$  dans ce repère. Le segment  $[MN]$  reste d'ailleurs dans ce cas tangent à l'hyperbole. C'est facile à voir puisque le coefficient directeur de la tangente en  $M'$  (qui vaut  $\frac{-1}{\rho^2}$ ) est le même que celui de la droite<sup>1</sup>  $(MN)$ .



Ainsi dans le cas des ellipses la droite  $(MN)$  restait une normale alors qu'ici il s'agit d'envelopper la branche d'hyperbole.

Une autre démonstration consisterait à poser  $t = \ln \rho$  afin que système de définition de la courbe devienne :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{4} (e^t - e^{-t}) \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{4} (e^t + e^{-t}) \end{cases} \quad (t \in ]-\infty, +\infty[)$$

si bien qu'on retrouve la paramétrisation connue d'une branche d'hyperbole

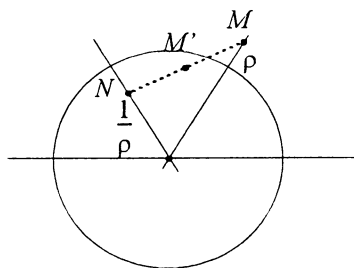
$$\begin{cases} X = \frac{1}{2} \operatorname{sh}(t) \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch}(t) \end{cases}$$

### Une remarque supplémentaire

Soit  $\Gamma$  un cercle non centré à l'origine.

Alors le point  $M$  est d'affixe

$$x_0 + R \cos \theta + i(y_0 + R \sin \theta) = z_0 + R \exp(i\theta)$$

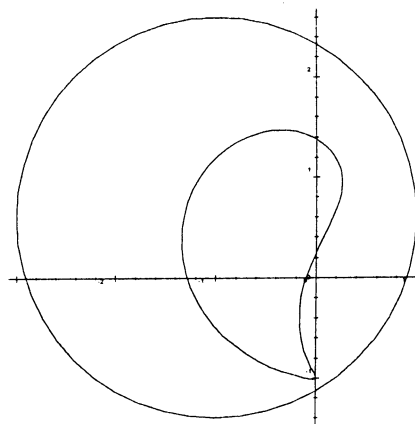


<sup>1</sup> C'est d'ailleurs un cas particulier d'une propriété plus générale vue lors du stage 96-97. Voir Une définition d'Apollonius des coniques, dans Aimer faire des maths au Lycée t.3, 1997 Irem Rouen.

Son image par notre transformation sera donc le point  $M'$  d'affixe

$$z' = \frac{1}{2} \left( z_0 + R \exp(i\theta) - \frac{1}{z_0 + R \exp(i\theta)} \right).$$

Il ne paraît pas raisonnable en terminale de rechercher la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression afin de se ramener à une courbe paramétrée. Toutefois avec l'aide de *Maple*, on trace facilement le cercle et sa transformée après avoir fixé les constantes ( $R=2, z_0=1+0,6i$ )



On retrouvera un peu plus loin cette formule en goutte d'eau (cf p13 avec la transformation de Joukowski).

### Une généralisation grâce au sinus complexe.

On aurait pu effectuer cette transformation tout de suite et donc étudier l'application  $F$  qui à  $(\theta, t) \rightarrow (\cos\theta \operatorname{sh}(t); \sin\theta \operatorname{ch}(t))$  ce qui n'est pas sans évoquer à certains leurs cours de trigonométrie complexe.

En effet la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$  a un rayon de convergence infini et l'on note  $\exp(z)$  sa somme. L'on

démontre de plus que pour tout couple  $(z, z')$  de complexes on a  $\exp(z) \exp(z') = \exp(z+z')$ .

Les fonctions trigonométriques sont définies *par extension* des formules d'Euler:

$$\cos z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}, \quad \cos(z) = \operatorname{ch}(iz), \quad i \sin(z) = \operatorname{sh}(iz).$$

Pour tout couple de réels  $(t, \theta)$  on a donc

$$F(z) = i \cos\theta \sin(-it) + i \sin\theta \cos(-it) = i \sin(\theta - it) = i \sin(\bar{z}).$$

Ainsi à condition de poser  $-t = \ln \rho$  et de diviser par  $i$  nous étions en train d'étudier l'application sinus complexe!

Il nous reste à comprendre pourquoi il peut être intéressant d'introduire de telles *déformations* de courbes simples.

### Représentation conforme.

Soit  $f$  une application de classe  $C^1$  d'un disque  $D$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$(x, y) \rightarrow (P(x, y); Q(x, y))$$

Soit  $\gamma$  un chemin différentiable de  $[0, a]$  dans  $D$  et tel que  $\gamma(0) = (x_0, y_0)$  un point fixé de  $D$  et  $\gamma'(0) \neq (0, 0)$

Alors le chemin composé  $f \circ \gamma : t \rightarrow (P(u(t), v(t)); Q(u(t), v(t)))$  est différentiable à l'origine et les coordonnées de la tangente à l'origine sont

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x}(u(0), v(0)) u'(0) + \frac{\partial P}{\partial y}(u(0), v(0)) v'(0); \frac{\partial Q}{\partial x}(u(0), v(0)) u'(0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(u(0), v(0)) v'(0) \right)$$

On obtient ce vecteur en multipliant le vecteur  $(u'(0), v'(0))$  par la matrice



$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(u(0),v(0)) & \frac{\partial P}{\partial y}(u(0),v(0)) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(u(0),v(0)) & \frac{\partial Q}{\partial y}(u(0),v(0)) \end{pmatrix}$$

qu'on appelle matrice *Jacobienne* de l'application  $f$ .

On la notera dans la suite pour simplifier  $\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$ .

On dit que l'application de classe  $C^0$  est conforme au point  $(x_0, y_0)$  notée  $z_0$  si et seulement si sa matrice Jacobienne en ce point est celle d'une similitude directe, c'est-à-dire une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  avec  $a^2+b^2 \neq 0$ . Dans notre exemple :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{1}{\partial \rho} \left[ \frac{\cos \theta}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \right] = \frac{x}{\rho} \left[ \frac{\cos \theta}{2} \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{1}{\partial \theta} \left[ \frac{\sin \theta}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \right] = \frac{x}{\rho^2} \left[ \frac{\cos \theta}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \right]$$

$$\text{donc } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{1}{\partial \rho} \left[ \frac{\sin \theta}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \right] = \frac{x}{\rho} \left[ \frac{\sin \theta}{2} \left( 1 - \frac{1}{\rho^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{1}{\partial \theta} \left[ \frac{\cos \theta}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \right] = \frac{x}{\rho^2} \left[ -\frac{\sin \theta}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \right]$$

$$\text{donc } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ainsi notre application est une application conforme qui conserve les angles. Comme les demi-droites de sommet l'origine sont orthogonales aux cercles centrés à l'origine. En effet une demi-droite d'origine  $O$  est toujours sécante à un cercle centré en  $O$ , en un point  $T$ . De plus la demi-droite  $[OT)$  est perpendiculaire en  $T$  au cercle.

Il est donc naturel d'avoir retrouvé les images des demi-droites, à savoir les branches d'hyperboles orthogonales aux images des cercles, les ellipses.

Dans le cas des ellipses on a  $c^2 = \frac{25-16}{9} = 1$  et dans celui des hyperboles  $c^2 = \frac{3+1}{4} = 1$ . Les coniques étaient donc homofocales. Si l'on se souvient que les tangentes des coniques à centre sont les bissectrices (intérieures dans le cas des hyperboles et extérieures dans le cas des ellipses) des angles focaux, on retrouve encore l'orthogonalité des deux courbes, mais on peut obtenir le résultat directement.

Proposition :

Une ellipse et une hyperbole de mêmes axes sont homofocales si et seulement si elles sont sécantes et leurs tangentes aux points d'intersections sont orthogonales.

Si les paramètres de l'ellipse sont  $a$  et  $b$ , tandis que ceux de l'hyperbole sont  $a'$  et  $b'$  les foyers des coniques coïncident si et seulement si  $c^2 = a^2 - b^2 = a'^2 + b'^2$

Les points d'intersection des coniques sont définis par le système  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1 \end{array} \right.$ . Ces points

existent donc toujours car le déterminant de ce système ne s'annule pas. Appelons  $x_0$  et  $y_0$  les coordonnées de l'un des points d'intersection des deux courbes. Les équations des tangentes en ce point sont alors  $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$  et  $\frac{xx_0}{a'^2} - \frac{yy_0}{b'^2} = 1$ , et la condition d'orthogonalité des tangentes est donc  $\frac{x_0^2}{a'^2 a^2} - \frac{y_0^2}{b'^2 b^2} = 0$ .

On écrit donc la condition d'existence et d'orthogonalité des tangentes au point d'intersection en adjoignant cette équation au système de définition de  $x_0$  et  $y_0$ . Ces trois équations sont alors compatibles si et seulement si le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} & 1 \\ \frac{1}{a'^2} & -\frac{1}{b'^2} & 1 \\ \frac{1}{a'^2 a^2} & -\frac{1}{b'^2 b^2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} & 1 \\ \frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b'^2} - \frac{1}{b^2} & 0 \\ \frac{1}{a'^2 a^2} & -\frac{1}{b'^2 b^2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b'^2} - \frac{1}{b^2} \\ \frac{1}{a'^2 a^2} & -\frac{1}{b'^2 b^2} \end{vmatrix}$$

Or ce dernier déterminant est nul si et seulement si  $a^2 - b^2 = a'^2 + b'^2$  c'est-à-dire si et seulement si les coniques sont homofocales.

## I. Les écoulements :

Le mouvement d'un fluide peut être repérable :

- par l'étude des trajectoires des particules du fluide au cours du temps, c'est la méthode de Lagrange.
- par l'étude, plus complète, des vitesses des particules passant en un point déterminé de l'espace, c'est la méthode d'Euler et celle qui sera utilisée.

Dans l'écoulement d'un fluide incompressible (ce qui reste valable dans le cas d'un mouvement atmosphérique, pour une vitesse inférieure à 360 km/h), la conservation de la masse se traduit par  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  et  $\mathbf{v}$  dérive d'un potentiel  $\Phi$  soit  $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$

On a dans ce cas  $\text{div}(\text{grad } \Phi) = 0$  ou  $\Delta\Phi = 0$  et le potentiel des vitesses  $\Phi$  est harmonique.

Avec un écoulement plan  $\mathbf{v} = (v_x(x,y), v_y(x,y), 0)$

Les lignes de courant sont des courbes de l'écoulement plan telles qu'en chacun de leurs points, la vitesse soit colinéaire à la tangente à un instant donné.

$$\text{Ainsi } \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \text{ soit } v_x dy - v_y dx = 0$$

Supposons qu'il existe une fonction  $\Psi$ , appelée fonction de courant, de façon à avoir en chaque

$$\text{point : } v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ et } v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\text{On obtient alors } \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0$$

ou  $d\Psi = 0$  et  $\Psi = c^{\text{ste}}$  le long d'une ligne de courant de l'écoulement.

Soit  $M$  un point d'une équipotentielle du plan où se coupent une ligne de courant et une ligne équipotentielle :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0 \text{ car } M \text{ se trouve sur une équipotentielle.}$$

On obtient ainsi :  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$  et  $\mathbf{v}$  est orthogonale en  $M$  à tout déplacement sur la ligne équipotentielle.

Les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

Ainsi,  $\Delta\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = 0$  et  $\Psi$  est également harmonique (rot  $\mathbf{v} = 0$  ce qui correspond à l'écoulement irrotationnel d'un fluide, ou de vorticité du champ des vitesses nulle).

Dans le cas de l'écoulement plan, incompressible et irrotationnel d'un fluide, on a vu que les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  vérifient l'équation de Laplace ( $\Delta\Phi = 0$  et  $\Delta\Psi = 0$ ) et les conditions de

$$\text{Cauchy-Riemann : } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Les potentiels conjugués  $\Phi$  et  $\Psi$  peuvent définir dans le plan complexe une fonction potentiel complexe (ou holomorphe)  $f(z)$  telle que

$$f(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$$

qui est une fonction analytique ne dépendant que de la variable complexe  $z = x + iy$

Considérons la fonction dérivée, appelée vitesse complexe :  $w(z) = \frac{df}{dz}$

Si  $dz = dx$  (l'affixe  $z$  se déplace le long de l'axe des réels)

$$w(z) = \frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} = v_x - iv_y$$

Si  $dz = idy$  (l'affixe  $z$  se déplace le long de l'axe imaginaire)

$$\frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{i\partial y} = -i\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} = -iv_y + v_x$$

Plus généralement, quelle que soit la direction de l'accroissement de l'affixe  $z$ , on a toujours :

$$\frac{df(z)}{dz} = v_x - iv_y = w(z)$$

Détermination de la fonction de courant  $\Psi$ , du potentiel de vitesse et de la vitesse complexe dans le cas d'écoulements potentiels élémentaires bidimensionnels :

### (1) Écoulements parallèles et homogènes

Considérons un écoulement parallèle et homogène de vitesse  $U$  selon l'axe ( $Ox$ ).

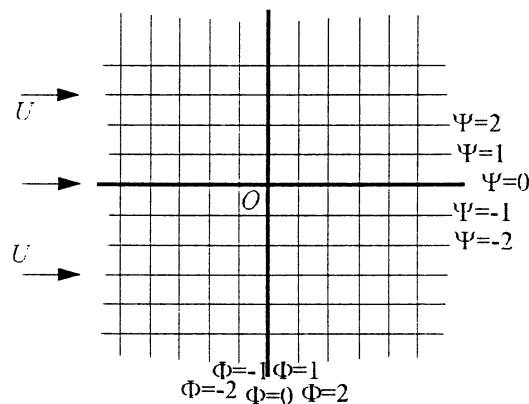
On a  $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = v_x = U = \frac{\partial\Psi}{\partial y}$  ce qui donne  $\Phi(x,y) = Ux + c_1$

$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = v_y = 0 = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$   $\Psi(x,y) = Uy + c_2$

Prenons, par exemple  $c_1 = c_2 = 0$

D'où  $\Phi(x,y) = Ux$  et  $\Psi(x,y) = Uy$

Les lignes de courant et équipotentielles  $\Phi(x,y) = c^{ste}$  et  $\Psi(x,y) = c^{ste}$  sont alors données par les mailles orthogonales suivantes :



Le potentiel complexe de cet écoulement est

$$f(z) = Ux + iUy = Uz$$

et la vitesse complexe

$$w(z) = U = c^{ste}$$

### (2) Source ou puits bidimensionnel

En un point du plan ( $x,y$ ), un écoulement radial, soit sortant, soit entrant, correspond à un écoulement engendré soit par une source, soit par un puits.

Dans le cas de l'utilisation de coordonnées polaires ( $r,\theta$ ) dans le plan de l'écoulement :

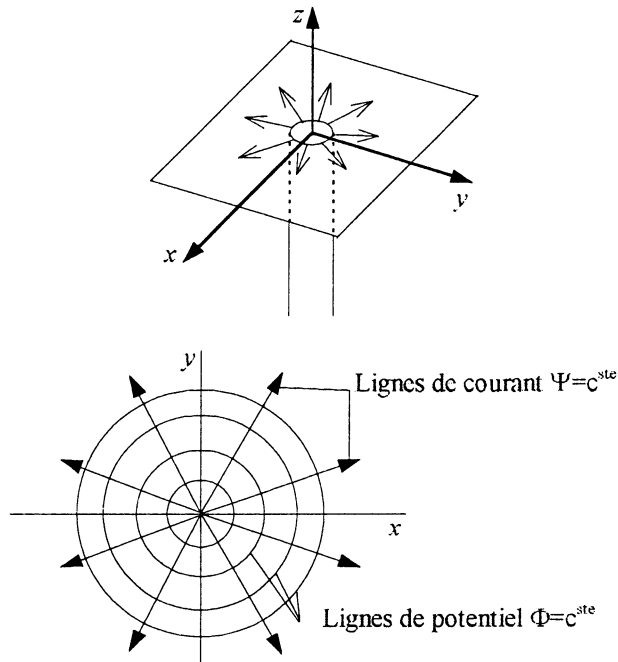
$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{cases}$$

La nature radiale de cet écoulement implique  $v_\theta = 0$  d'où  $\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$  soit, par exemple :

$\Psi = C\theta = \frac{Q}{2\pi}\theta$  où  $Q$  est la fonction de débit de la source ou du puits.

( $Q > 0$  pour la source et  $Q < 0$  pour le puits)

Comme  $\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ , on obtient finalement :  $\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$



Le potentiel complexe est

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln r + i \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{Q}{2\pi} \ln e^{i\theta} = \frac{Q}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = \frac{Q}{2\pi} \ln z$$

Et la vitesse complexe de cet écoulement est

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi z} \quad (\text{ou } \frac{Q}{2\pi r} e^{-i\theta}).$$

### (3) Tourbillon

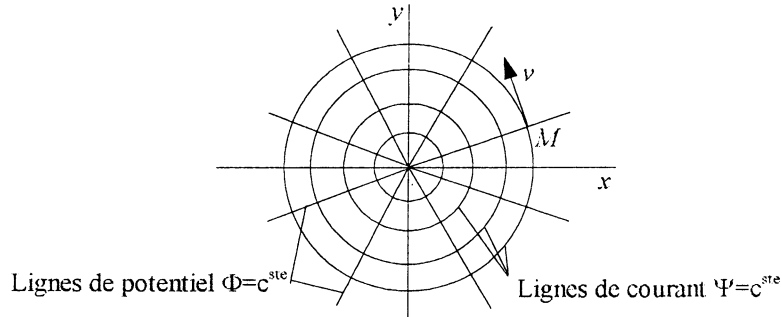
L'écoulement plan tourbillonnaire est un écoulement autour d'un axe perpendiculaire en  $O$  au plan  $(x,y)$ .

Le champ de vitesse est orthoradial. Les composantes  $v_r$  et  $v_\theta$  vérifient alors :

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{cases} \quad \text{et } v_r = 0$$

On a alors  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \Rightarrow \Phi(r, \theta) = C\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$  où  $\Gamma$  est la circulation de la vitesse tourbillonnaire (le signe de  $\Gamma$  indiquant l'orientation du tourbillon).

De plus,  $-\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$  d'où  $-\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\Gamma}{2\pi}$  soit  $\Psi(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$



Notons la correspondance entre l'écoulement tourbillonnaire et l'écoulement précédent. Comme les équipotentiels et les lignes de courant sont orthogonales en tout point d'intersection, les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  sont échangées lorsque l'on passe d'un problème à un autre.

Le potentiel complexe de cet écoulement est

$$f(z) = \Phi + i\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + i\left(-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r\right) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}(\ln r + \theta)$$

soit

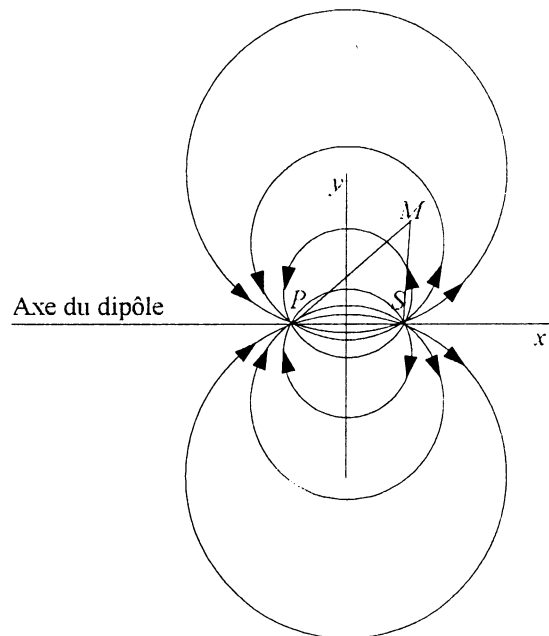
$$f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

La vitesse complexe est

$$w(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi z} \quad (\text{ou } -i\frac{\Gamma}{2\pi r} e^{-i\theta}).$$

#### (4) Dipôle plan ou doublet

Il provient d'une superposition entre une source d'intensité  $+Q$  (en  $S$ ) et un puits d'intensité  $-Q$  (en  $P$ ).



Le potentiel  $\Phi_1$  par rapport au point  $M(x,y) = M(r,\theta)$  devient alors  $\Phi_1(r,\theta) = \frac{Q}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2)$

car  $\frac{Q}{2\pi} > 0$  pour la source et  $r_1$  représente la distance du point  $M$  à la source.

$\frac{Q}{2\pi} < 0$  pour le puits et  $r_2$  représente la distance du point  $M$  au puits.

Le dipôle se définit par un passage à la limite lorsque  $PS \rightarrow 0$ ,  $Q \rightarrow \infty$  en notant  $\mu = \lim_{\substack{PS \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} (Q \cdot PS)$  l'intensité du dipôle.

$$\Phi = \lim_{PS \rightarrow 0} \frac{Q \cdot PS}{2\pi} \left( \frac{\ln r_1 - \ln r_2}{PS} \right) = - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r}$$

car, en posant  $r_1^2 = (x - s)^2 + y^2$  et  $r_2^2 = (x + s)^2 + y^2$  où  $S(s,0)$  et  $P(-s,0)$

$$\frac{\ln r_1 - \ln r_2}{PS} = \frac{1}{2PS} \ln \frac{(x - s)^2 + y^2}{(x + s)^2 + y^2} = \frac{1}{2PS} \ln \frac{(x + s)^2 + y^2 - 4xs}{(x + s)^2 + y^2} = \frac{1}{2PS} \ln \left( 1 - \frac{4xs}{(x + s)^2 + y^2} \right)$$

Ce qui est équivalent à  $-\frac{1}{2PS} \frac{4xs}{(x + s)^2 + y^2} = -\frac{x}{(x + s)^2 + y^2}$  qui tend, lorsque  $s$  tend vers 0, vers

$$-\frac{x}{x^2 + y^2} = -\frac{x}{r^2} = -\frac{r \cos\theta}{r^2} = -\frac{\cos\theta}{r}$$

Puis, en utilisant les composantes du vecteur vitesse,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r} \text{ d'où } \Psi(r,\theta) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r}$$

Le potentiel complexe est

$$f(z) = \Phi + i\Psi = \frac{\mu}{2\pi} \left( -\frac{\cos\theta}{r} + i \frac{\sin\theta}{r} \right) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{r} (-e^{-i\theta}) = \frac{-\mu}{2\pi z}$$

Et la vitesse complexe est donnée par

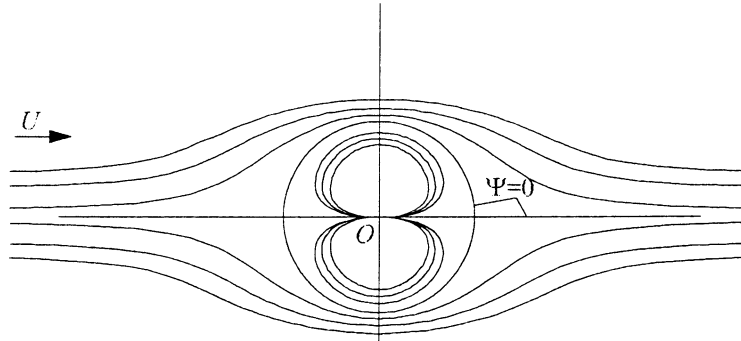
$$w(z) = \frac{\mu}{2\pi z^2}$$

### (5) Écoulement autour d'un cylindre de section circulaire

L'écoulement autour d'un cylindre de section circulaire est obtenu par la superposition d'un dipôle plan et d'un écoulement homogène parallèle.

Il est possible d'ajouter les fonctions potentielles et de courants car si elles vérifient l'équation de Laplace qui est linéaire, la somme la vérifiera également.

$$\text{On obtient alors } \Psi = U r \sin\theta - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r} \text{ et } \Phi = U r \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r}$$



Les lignes de courant provenant du doublet restent à l'intérieur du cercle. Les lignes de l'écoulement uniforme se répartissent autour du cercle.

Ainsi, un tel écoulement peut être considéré comme l'écoulement autour d'un cylindre circulaire.

Le rayon du cylindre est obtenu en posant  $\Psi = 0$ , condition qui détermine la ligne de courant singulière. Elle est constituée des deux demi-droites issues des points d'arrêts  $r = a$ ,  $\theta = 0$  ou  $\pi$  (points de vitesse nulle situés sur la circonférence du cylindre ainsi que la circonférence elle-même).

$$\Psi = 0 = U r \sin \theta - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} = \frac{U r^2 \sin \theta}{r} - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} = \frac{U \sin \theta}{r} \left( r^2 - \frac{\mu}{2\pi U} \right)$$

et le rayon du cylindre devient  $a = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U}}$

On peut alors écrire

$$\Psi = U \sin \theta \left( r - \frac{a^2}{r} \right)$$

Ainsi

$$\Phi = U r \cos \theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} = \frac{U \cos \theta}{r} \left( r^2 - \frac{\mu}{2\pi U} \right) = \frac{U \cos \theta}{r} (r^2 + a^2) = U \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right)$$

Le potentiel complexe est

$$\begin{aligned} f(z) = \Phi + i\Psi &= U \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) + i U \sin \theta \left( r - \frac{a^2}{r} \right) = U (r \cos \theta + i r \sin \theta) + U a^2 \left( \frac{\cos \theta}{r} - i \frac{\sin \theta}{r} \right) \\ &= U z + U a^2 \frac{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)}{r} = U z + \frac{U a^2}{z} \end{aligned}$$

et ainsi une vitesse complexe

$$w(z) = U - \frac{U a^2}{z^2}$$

### (6) Cylindre circulaire avec circulation

Dans ce cas, on ajoute au potentiel précédent un tourbillon de circulation  $\Gamma$ . En effet, le champ de vitesse du tourbillon est tangent aux cercles  $r = c^{\text{ste}}$  et s'annule à l'infini.

$$\Psi = U \sin \theta \left( r - \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$$

(en prenant  $\Gamma < 0$  pour un sens contraire de celui des aiguilles d'une montre)

(définition à une constante additive près)

$$\Phi = U \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$



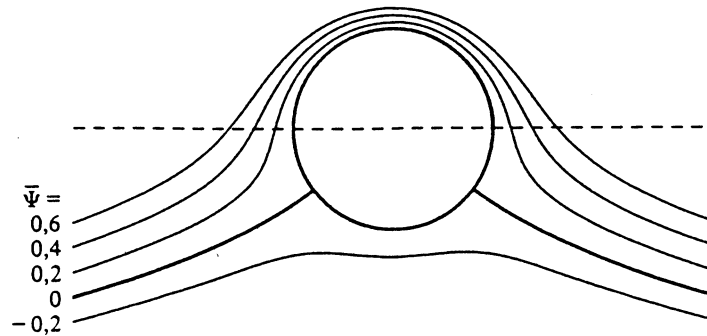
Cherchons s'il existe des points d'arrêts sur la surface du cylindre :

$$v_r = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

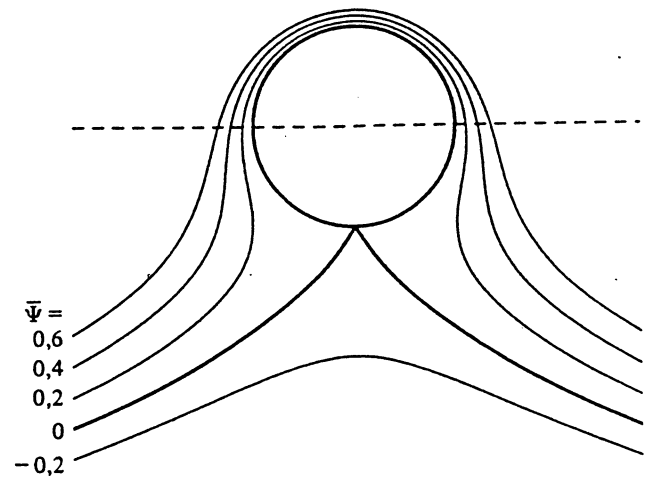
$$v_\theta = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Soit, si  $r = a$ ,  $v_\theta = -2U\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0$  donne  $\sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi Ua}$

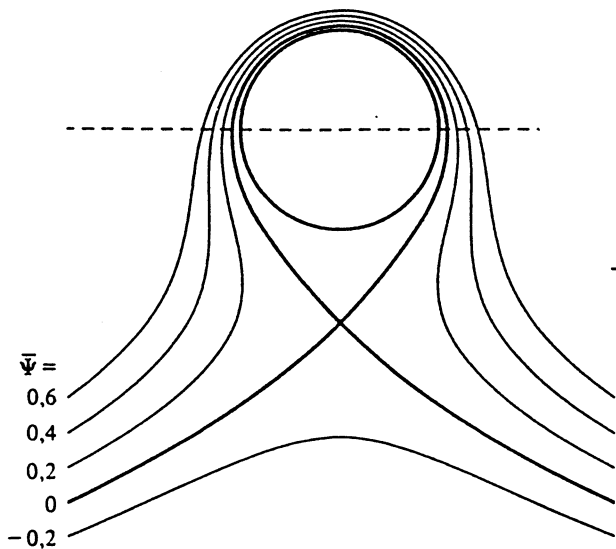
ce qui donne les cas suivants, suivant la position de  $\left|\frac{\Gamma}{4\pi Ua}\right|$  par rapport à 1 :



$$\Gamma/aU_\infty = 2,4\pi.$$



$$\Gamma/aU_\infty = 4\pi.$$



$$\Gamma = k4\pi aU_\infty \text{ avec } k = 1,225$$

Dans ce cas, le potentiel complexe est

$$f(z) = Uz + \frac{Ua^2}{z} - \left(\frac{\Gamma}{2\pi}\theta - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r\right) = Uz + \frac{Ua^2}{z} + i\frac{\Gamma}{2\pi}(\ln r + i\theta) = Uz + \frac{Ua^2}{z} + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$$

et la vitesse complexe est donnée par

$$w(z) = U - \frac{Ua^2}{z^2} + i\frac{\Gamma}{2\pi z}$$

### Portance et traînée

La pression à la surface du cylindre est calculée selon la formule de Bernoulli :

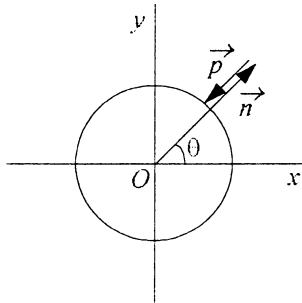
$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = c^{ste} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} \text{ (par l'utilisation de la formule au contact du cylindre)}$$

où  $p$  est la pression en un point à la surface du cylindre

$p_\infty$  la pression à l'infini (soit pour  $U$ )

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(U^2 - v_\theta)^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi Ua}\right)^2\right)$$

On obtient la force totale  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$  qui agit sur le cylindre par intégration de la pression sur la surface  $S$  du cylindre.



La force  $d\vec{F}$  qu'exerce un fluide en équilibre sur un élément de surface  $dS$  est  $d\vec{F} = p dS \vec{n}$  où  $p$  est la pression et  $\vec{n}$  est le vecteur normal à l'élément de surface  $dS$ .

Pour les fluides en mouvement, il existe en général des composantes tangentielles. Dans le cas d'un fluide parfait (ou non visqueux) en mouvement (et donc sans frottement) cette relation reste valable.

$$F_x = -\iint_S p \cos(\vec{n}, \vec{i}) dS = -\int_0^{2\pi} p \cos\theta a d\theta \text{ appelée traînée}$$

$$F_y = -\iint_S p \cos(\vec{n}, \vec{j}) dS = -\int_0^{2\pi} p \sin\theta a d\theta \text{ appelée portée}$$

Or  $F_x = 0$  car le champ des vitesses est parfaitement symétrique par rapport à  $(Oy)$  et

$$\begin{aligned} F_y &= -\int_0^{2\pi} \left(p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi Ua}\right)^2\right)\right) \sin\theta a d\theta \\ &= -p_\infty a \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta - \frac{1}{2} a \rho U^2 \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta + \frac{1}{2} a \rho U^2 4 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \sin\theta d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} a \rho U^2 \frac{\Gamma^2}{(2\pi Ua)^2} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta + \frac{1}{2} a \rho U^2 4 \frac{\Gamma}{2\pi Ua} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \rho U \Gamma \sin^2\theta d\theta \\ &= \rho U \Gamma \end{aligned}$$

(Ce dernier résultat est appelé formule de Kutta-Joukowski ou force de Magnus)

Si  $\Gamma = 0$ , c'est-à-dire en l'absence de circulation, le champ de vitesse est parfaitement symétrique par rapport à  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . Il n'y a pas de force agissant sur le cylindre.

Si  $\Gamma \neq 0$ , il y a une force verticale, la portance, qui agit sur le cylindre.

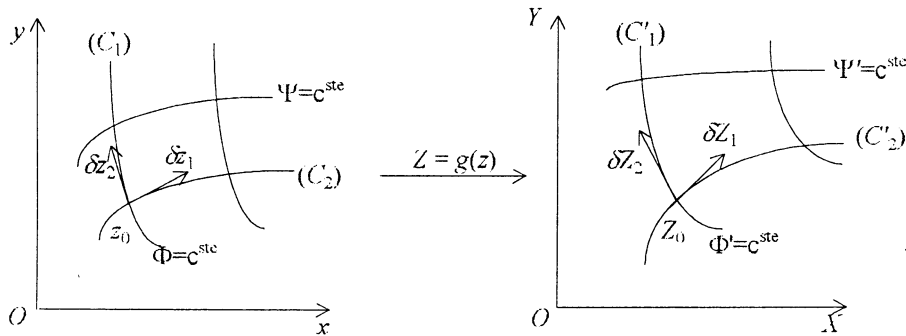
Une autre méthode serait de reprendre la formule donnant la pression en un point du cylindre et de rechercher les lieu de pression minimale ou maximale

## II. La transformation de Joukowski

### 1) La transformation conforme

Considérons les variables complexes  $z = x + iy$  et  $Z = X + iY$  et que  $Z$  soit une fonction analytique de  $z$ ,  $Z = g(z)$ .

Alors on peut faire correspondre au réseau des lignes de courant et équipotentiels  $\Psi(x,y) = c^{ste}$  et  $\Phi(x,y) = c^{ste}$  dans le plan  $(x,y)$ . un réseau correspondant de lignes dans le plan  $(X,Y)$ .



La propriété fondamentale de la transformation conforme ainsi définie est qu'elle conserve les angles.

2) La transformation de Joukowski est une transformation conforme permettant de passer de l'écoulement autour d'une cylindre circulaire à l'écoulement autour d'un profil d'aile d'avion.

#### Définition

La transformation de Joukowski est définie par la relation  $Z = g(z) = z + \frac{\lambda^2}{z}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

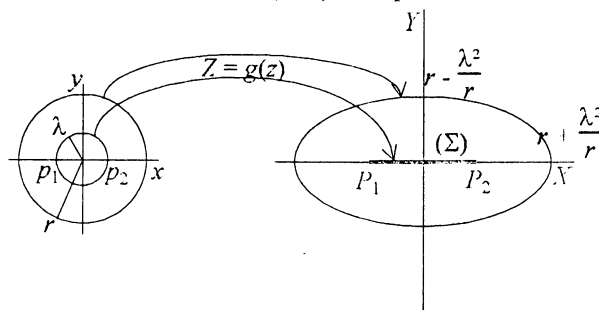
Propriété 1 : elle transforme un cercle centré en l'origine de rayon  $r$  dans le plan  $(x,y)$  en une ellipse dans le plan  $(X,Y)$

Démonstration :

- Soit  $z = re^{i\theta}$  alors  $Z = X + iY = re^{i\theta} + \frac{\lambda^2}{r}e^{-i\theta} = (r + \frac{\lambda^2}{r})\cos\theta + i(r - \frac{\lambda^2}{r})\sin\theta$

$X$  et  $Y$  vérifient alors  $\frac{X^2}{(r + \frac{\lambda^2}{r})^2} + \frac{Y^2}{(r - \frac{\lambda^2}{r})^2} = 1$  qui est l'équation de l'ellipse dont les deux

foyers  $P_1$  et  $P_2$  sont situés sur l'axe  $(OX)$  aux points d'abscisses  $X = \pm 2\lambda$ .



• Lorsque  $r = \lambda$ , le rayon du cercle est ainsi égal au paramètre de la transformation de Joukovski, on a  $Z = \lambda e^{i\theta} + \lambda e^{-i\theta} = 2\lambda \cos\theta$  et l'ellipse devient le segment  $(\Sigma)$  (ensemble de points de coordonnées  $Y = 0$  et  $-2\lambda \leq X \leq 2\lambda$ )

Dans ce cas, lorsqu'un point objet décrit une fois le cercle, son image dans la transformation décrit deux fois le segment  $(\Sigma)$  ; elle parcourt une fois la partie "supérieure" ( $\theta \in [0; \pi]$ ) et une fois la partie "inférieure" ( $\theta \in [\pi; 2\pi]$ ).

De plus, les points  $p_1$  et  $p_2$  sont des points singuliers ( $g'(z) = 1 - \frac{\lambda^2}{z^2}$  s'annule en  $z = \pm\lambda$ ). Il n'y a pas dans ce cas conservation des angles aux points  $P_1$  et  $P_2$ , transformés des points  $p_1$  et  $p_2$ . Ainsi, la transformation du cercle engendre un point de rebroussement en ces points.

Remarque : l'écoulement à grande distance de l'origine dans les deux plans est identique dans les deux plans :

$$\text{Comme } Z = z + \frac{\lambda^2}{z} \text{ ou, si } z = re^{i\theta}, Z = re^{i\theta} + \frac{\lambda^2}{r} e^{-i\theta}$$

$$\text{Donc si " } z \rightarrow \infty \text{ ", } \frac{\lambda^2}{z} \rightarrow 0 \text{ et } Z \rightarrow re^{i\theta}$$

Détermination inverse d'un écoulement parallèle à un élément de plaque plane.

Considérons à présent dans le plan image  $(X, Y)$  un écoulement uniforme à un plan  $(\Pi)$  dont la trace par le plan de figure est le segment  $(\Sigma)$  considéré précédemment.

Le potentiel complexe de cet écoulement est, dans  $(X, Y)$ ,  $F(Z) = UZ$ .

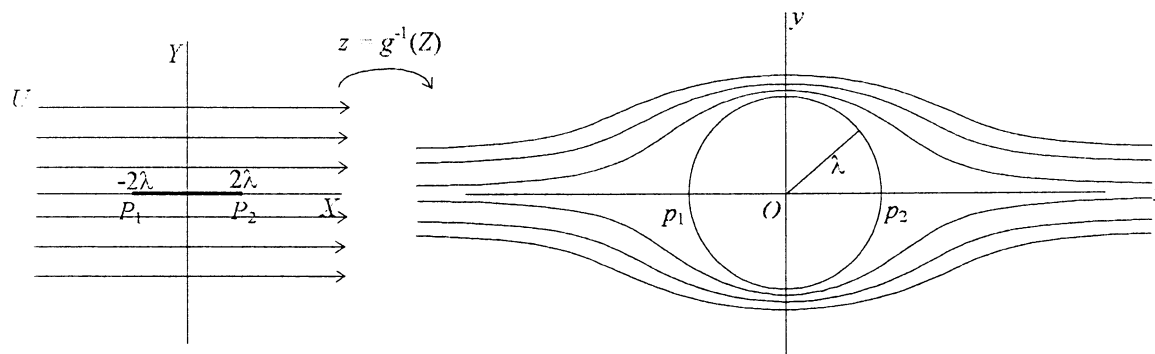
$$\text{Si } \vec{U} \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} \text{ alors } \frac{\partial \Phi}{\partial X} = U \text{ et } \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0 \text{ alors } \Phi(X, Y) = UX + c \text{ or } \Phi(0, 0) = 0 \text{ donc } c = 0$$

$$\text{De même, } \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \text{ et } \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = U \text{ alors } \Psi(X, Y) = UY + c \text{ or } \Psi(0, 0) = 0 \text{ donc } c = 0$$

$$\text{Donc } F(Z) = UX + iUY = UZ$$

Dans le plan objet  $(x, y)$ , il lui correspond l'écoulement autour d'un cercle de rayon  $\lambda$  centré à l'origine, avec une vitesse uniforme  $U$  loin du cercle, c'est-à-dire

Le potentiel correspondant s'écrit directement  $f(z) = F(g(z)) = U(z + \frac{\lambda^2}{z})$ .



Détermination d'un écoulement arrivant obliquement sur un élément de plaque plane avec circulation

Etudions à présent l'écoulement autour de l'élément plan ( $\Sigma$ ) dans  $(X,Y)$  lorsque la direction de ( $\Sigma$ ) fait un angle d'incidence  $\alpha$  avec la direction de la vitesse  $U$  et s'il existe, de plus, une circulation  $\Gamma$  de la vitesse autour de ( $\Sigma$ ).

Ce problème simule de façon simplifiée l'écoulement autour d'une aile d'avion.

Le potentiel complexe, dans  $(X,Y)$ , de cet écoulement si l'élément de plaque ( $\Sigma$ ) était parallèle à  $(Ox)$  est, puisqu'étant l'image de l'écoulement autour du cylindre de section circulaire avec circulation :

$$f_1(Z) = Uz' + \frac{U\lambda^2}{z'} + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{z'}{\lambda}\right)$$

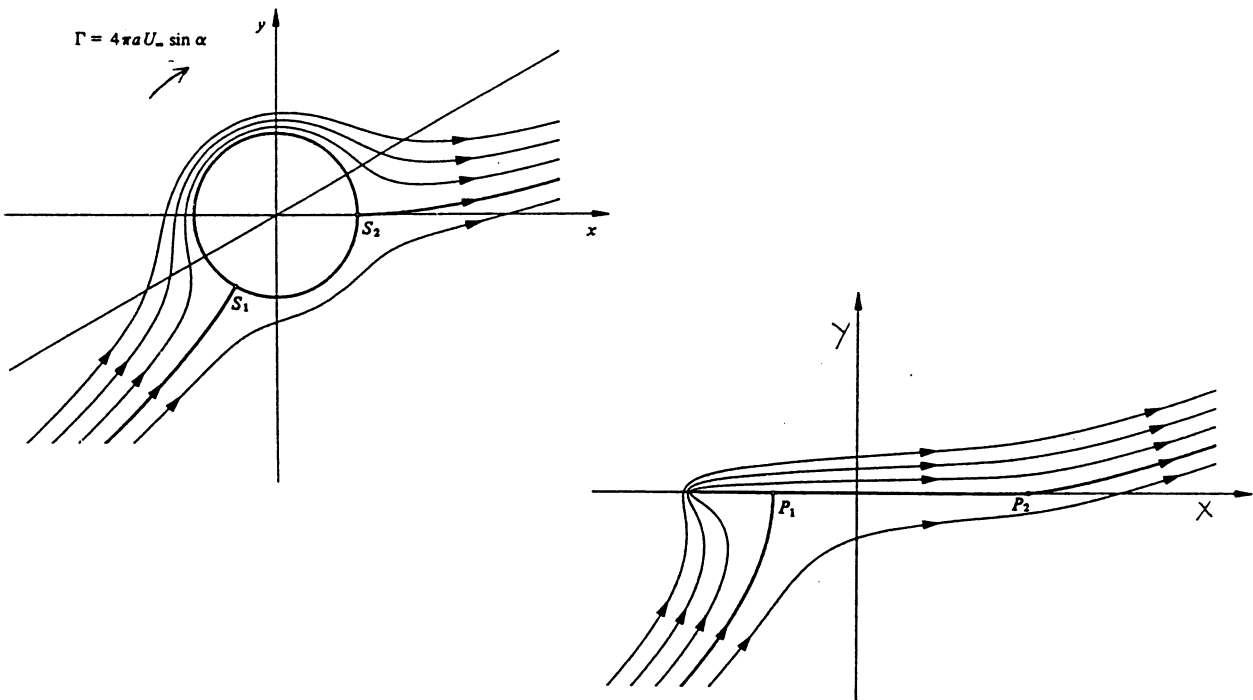
Ce qui devient, suite à la transformation  $z = z'e^{i\alpha}$ ,

$$f(z) = Uze^{-i\alpha} + \frac{U\lambda^2}{ze^{-i\alpha}} + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{ze^{-i\alpha}}{\lambda}\right)$$

Puis, en utilisant la conservation des angles par une transformation conforme, l'angle d'attaque sera également de  $\alpha$  dans  $(X,Y)$  et en supposant qu'elle conserve également la circulation :

$$F(Z) = f(g^{-1}(z))$$

Mais comme  $g^{-1}$  n'est pas analytique, nous nous contenterons de déterminer la vitesse complexe.



La vitesse complexe devient alors :

$$W(Z) = \frac{dF}{dZ} \Rightarrow w(z) = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{1}{g'(z)} = \frac{z^2}{z^2 - \lambda^2} \left( U(e^{-i\alpha} - \frac{\lambda^2}{z^2 e^{-i\alpha}}) + i\frac{\Gamma}{2\pi z} \right)$$

Déterminons cette vitesse complexe sur la surface de l'élément ( $\Sigma$ ). Comme celui-ci est l'image du cercle  $(C)$ , il suffit de prendre  $z = \lambda e^{i\theta}$  et  $w(z)$  devient :

$$w(z) = \frac{1}{1 - e^{-2i\theta}} \left( U(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha - 2\theta)}) \right) + i\frac{\Gamma}{2\pi\lambda} e^{-i\theta}$$

$w$  est donc dans le plan image exprimée en fonction du rayon  $\lambda$  du cercle et dans le plan objet de l'angle polaire  $\theta$ .

Or  $Z = X + iY$  donc si  $r = \lambda$ ,  $X = 2R\cos\theta$  et  $Y = 0$

On obtient alors

$$w(\theta) = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} (U(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\theta)}) + i \frac{\Gamma}{2\pi\lambda} e^{-i\theta}) = \frac{1}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} (U(e^{-i(\alpha-\theta)} - e^{i(\alpha-\theta)}) + i \frac{\Gamma}{2\pi\lambda})$$

$$= \frac{U \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{4\pi\lambda}}{\sin\theta}$$

On retrouve une vitesse complexe réelle puisque la composante de vitesse perpendiculaire au plan doit être nulle.

On remarque également deux points d'arrêt  $P_1$  et  $P_2$  sur la plaque ( $\Sigma$ ). Ils correspondent à des valeurs  $\theta$  telles que  $\sin(\theta - \alpha) = -\frac{\Gamma}{4\pi\lambda U}$

• Si  $\Gamma = 0$ , les points d'arrêt correspondent à  $\sin(\theta - \alpha) = 0$  soit  $\theta = \alpha$  ou  $\theta = \pi + \alpha$  et sont nommés *intrados* ( $P_1$ ) et *extrados* ( $P_2$ )

De plus,  $w \rightarrow \pm\infty$  pour  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$

• Déterminons la valeur de  $\Gamma$  correspondant au point d'arrêt  $p_2$  ( $\theta = 0$ ) sur le cylindre circulaire :

Comme  $\theta = 0$ ,  $U \sin(-\alpha) + \frac{\Gamma}{4\pi\lambda}$  Soit  $\Gamma = 4\pi U \lambda \sin\alpha$

Cette dernière relation constitue la relation de Kutta.

On note qu'au point  $P_2$ , image du point  $p_2$ , la vitesse n'est pas nulle (le dénominateur s'annule également) :

$$w(\theta) = \frac{U \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{4\pi\lambda}}{\sin\theta} = \frac{U \sin\theta \cos\alpha - U \cos\theta \sin\alpha + \frac{\Gamma}{4\pi\lambda}}{\sin\theta} = U \cos\alpha - \frac{U \cos\theta \sin\alpha}{\sin\theta} + \frac{\frac{\Gamma}{4\pi\lambda}}{\sin\theta}$$

$$= U \cos\alpha - \frac{U \cos\theta \sin\alpha}{\sin\theta} + \frac{U \sin\alpha}{\sin\theta}$$

Ainsi,  $w(\theta)$  tend vers  $U \cos\alpha$  lorsque  $\theta$  tend vers 0 (la somme des deux derniers termes de l'expression tend vers 0)

Reprenons la portance ou force verticale obtenue  $F = \rho U \Gamma$ .

On obtient, avec la condition de Kutta :  $F = \rho U 4\pi U \lambda \sin\alpha$

Si l'on note  $l = 4\lambda$ , la largeur de l'aile, appelée corde,  $F$  devient  $F = \rho U l \pi U \sin\alpha$

C'est-à-dire encore, pour la portance sur la totalité de l'aile :  $F = \rho U (lL) \pi U \sin\alpha$

où  $lL$  représente une valeur approchée de la totalité de l'aile

Voici des ordres de grandeur pour trois types d'avion :

	Vitesse $U$ au décollage	Corde $l$	Envergure	Angle de Cabrage	Portance $F$	Masse de l'appareil
Avion de type Boeing 747	300 km/h	9 m	60 m	10°	$3 \cdot 10^7$ N	300 t
Avion de tourisme de type Cessna	100 km/h	1,70 m	9 m	13°	$10^4$ N	900 kg
Avion de chasse de type Mirage F1	350 km/h	5 m	9 m	20°	$6 \cdot 10^5$ N	16 t

On remarque que l'avion de ligne décolle grâce à une surface de voilure importante, mais avec des angles de cabrage modérés pour des impératifs de confort.

L'avion de tourisme peut se contenter d'une plus faible portance de par sa masse plus faible. L'avion de chasse décolle avec des angles de cabrage très élevés et une vitesse assez importante pour compenser une surface de voilure plus réduite.

Ce n'est qu'une approximation grossière du profil d'une aile réelle mais en décentrant progressivement le cercle auquel on applique la transformation de Joukowski, on obtient des images qui se rapprochent des profils des ailes réelles :

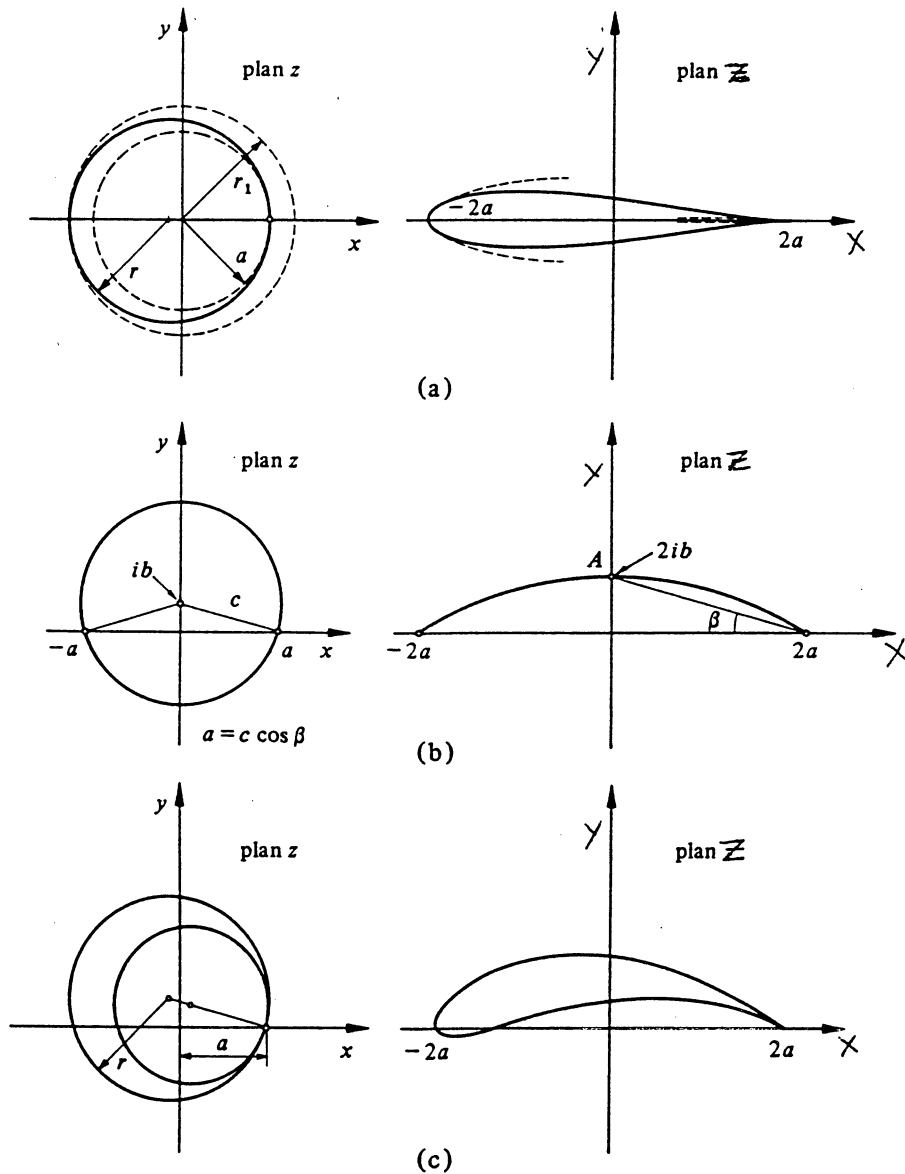


Image d'un cercle dans le plan  $Z$  selon la transformation de Joukowski suivant son emplacement et rayon  $r$  dans le plan  $z$ ; (a) profil symétrique, (b) arc de cercle, (c) profil plus général.

Bibliographie :

"Dynamique des Fluides" de Inge P. Ryhming

Presses polytechniques et universitaires Romandes

"Hydrodynamique Physique" Etienne Guyon / Jean-Pierre Hulin / Luc Petit

InterEditions / Editions du CNRS

Cette petite recherche a été suscitée par la participation au congrès national de l'APMEP 97 à Marseille, à un atelier animé par M. Jacques Borowczyk et intitulé "les neveux de Frank Morley".

En 1899 Franck Morley découvre un théorème de géométrie élémentaire et lance un défi à la communauté mathématique mondiale pour en obtenir des preuves aussi simples que possible, sa démonstration, non publiée dans un premier temps, étant jugée par lui même comme difficile:

"les trisectrices des trois angles adjacentes aux côtés d'un triangle forment, par extraordinaire, un triangle équilatéral dans le triangle précité"

Pourquoi un tel théorème n'a-t-il pas été découvert plus tôt, alors que la géométrie du triangle semblait depuis longtemps épuisée? Le problème de la trisection de l'angle non résolu pendant des siècles a-t-il été un interdit suffisamment fort pour que l'on ne s'autorise pas à réfléchir sur un problème nécessitant une construction de trisectrices? On peut peut-être le penser.

Voici quelques propositions de recherche et de démonstrations de ce théorème:

### **I. Le théorème de MORLEY illustré à l'aide de cabri-géomètre II**

#### **Objectif:**

Utiliser les outils de construction du géomètre pour illustrer le théorème de MORLEY.

On rappelle que ce théorème s'intéresse aux trois points d'intersection des trisectrices des angles d'un triangle les plus proches de chaque côté de ce triangle.

#### **Démarche commentée:**

Ouvrir une nouvelle session de géométrie: entrer dans fichier, puis nouveau. L'écran de construction s'affiche, vierge de tout tracé, avec le pointeur apparent sous la forme d'une croix. La souris permet de déplacer à volonté ce pointeur.

**1<sup>ère</sup> étape :** création du triangle ABC.

Ouvrir l'outil "triangle", sélectionner avec le pointeur un point sur l'écran (avec le bouton gauche de la souris) et taper "A" pour avoir immédiatement le nom du sommet affiché à l'écran, agir de même avec deux autres points nommés B et C. L'opération est terminée, chaque étape peut s'achever par la frappe de la touche "esc" qui permet de sortir du menu et revenir à l'état initial pointeur.

**2<sup>ème</sup> étape :** mesure des angles du triangle ABC.

Ouvrir l'outil "mesure des angles", sélectionner à l'aide de la souris, dans l'ordre B, A et C, l'ordinateur affiche la mesure de  $\widehat{BAC}$  en degrés à l'écran; étant sur le point C, sans bouger, sélectionner ce point, puis B et A (dans cet ordre) la mesure de  $\widehat{CBA}$  s'affiche, puis avec A, C et B, on obtient la mesure de  $\widehat{ACB}$ . Sortir du menu.

Il peut être utile de déplacer les valeurs inscrites à l'écran (qui viennent probablement se superposer à la figure); pour cela, retourner au pointeur et sélectionner le nombre à déplacer (sur l'écran est affiché: "ce nombre") et le saisir avec la main (maintenir le bouton gauche de la souris enfoncé), le déplacer avec la souris à l'endroit souhaité. On peut ainsi amener les trois valeurs successivement dans un coin de l'écran (il est possible d'utiliser du texte (menu "texte") pour nommer ces valeurs a, b et c).



**3<sup>ème</sup> étape** : création des trisectrices du triangle ABC.

Principe: on utilise l'outil calculatrice pour diviser les mesures d'angles en trois, puis des rotations pour créer les trisectrices.

Attention ! Le triangle ABC, créé au départ, forme un objet compact, pour faire tourner les côtés seulement, il faut créer trois objets indépendants portant les côtés, par exemple les demi-droites [AB], [BC) et [CA), on utilise pour cela le menu "demi-droite" et l'on désigne A en premier puis B pour tracer [AB), puis B à nouveau et C pour [BC) .....

Appel de la calculatrice : un bandeau s'affiche en bas d'écran, avec la souris sélectionner la mesure de  $\widehat{BAC}$  précédemment obtenue, elle s'affiche sous la forme "a" dans le bandeau, et taper " $\div 3$ ", demander alors le résultat en pointant "=" dans le bandeau, la mesure sélectionnée divisée par trois est alors obtenue et peut être affichée à l'écran en la déplaçant à partir du bandeau avec la souris (bouton gauche enfoncé) à l'endroit souhaité, sous la forme "résultat =....."! Recommencer l'opération avec les mesures des angles  $\widehat{CBA}$  et  $\widehat{ACB}$  (bien organiser l'inscription à l'écran, par exemple de haut en bas). Sortir du menu.

Sélectionner l'outil "rotation" : pour créer les trisectrices de  $\widehat{BAC}$ , utiliser la rotation  $r(A, \frac{\widehat{BAC}}{3})$  sur la demi-droite [AB), puis sur  $r[AB)$  (attention au sens de rotation, ici ABC est construit direct); faire de même pour  $\widehat{CBA}$  et  $\widehat{ACB}$ .

Sélectionner la demi-droite [AB), (si l'on pointe sur le segment [AB), la machine demande "quel objet?", appuyer sur le bouton gauche de la souris, apparaît : 1 : ce triangle ; 2 : cette demi-droite sélectionner alors 2), puis le centre de rotation A (même problème avec "quel objet?", sélectionner la proposition 1 : ce point A), puis l'angle en allant chercher le résultat adéquat obtenu précédemment à la calculatrice, la demi-droite image s'affiche, reproduire exactement la même opération en sélectionnant la demi-droite venant d'être créée pour commencer ; les trisectrices issues de A sont créées! La même démarche conduit à la construction des trisectrices issues de B puis de C. Sortir du menu.

La figure devient alors peu lisible! Pas de panique, on va effacer tout ce qui gêne, mais avant, il faut mettre en évidence les points de Morley, intersections des trisectrices les plus proches des côtés de ABC.

Ouvrir le menu "intersection d'objets", pointer successivement les deux trisectrices proches de [AB), le point d'intersection est créé, on peut immédiatement le nommer K, idem pour les deux autres points I et J.

**4<sup>ème</sup> étape** : ménage!

Le balai et l'aspirateur se trouvent en ouvrant "montrer-cacher", puis en sélectionnant les objets que l'on souhaite voir disparaître (ici les neuf demi-droites créées, les mesures des angles de rotation et probablement les six images des points A, B et C obtenues après les diverses rotations) et qui se mettent en pointillés à l'écran; après être sorti du menu, on retrouve un écran "propre" avec le triangle ABC, les points I, J et K et, dans un coin, les mesures des angles du triangle (que l'on peut aussi cacher éventuellement); si les noms des points sont mal placés, il suffit de les mettre à l'endroit souhaité en les déplaçant comme signalé ci-dessus.

**5<sup>ème</sup> étape** : mise en forme et observation.

La figure mérite alors d'être complétée par le tracé des six segments trisecteurs [AK], [BK], ... et des côtés du triangle IJK, avec les outils "segments" ou "triangle".

Il ne reste plus qu'à observer! Les points A, B ou C peuvent être déplacés à volonté en les saisissant avec la main (bouton gauche de souris enfoncé), la figure se reconstruit immédiatement et l'on peut sans doute souligner les curiosités.

La mesure des angles du triangle IJK peut se révéler intéressante à afficher dans un autre coin de l'écran (voir 2<sup>ème</sup> étape)! Le théorème est alors parfaitement illustré !

Remarque:

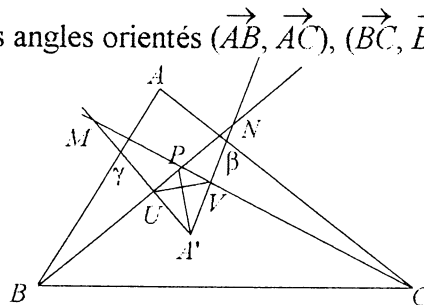
Cette démarche peut être faite de façon totalement identique en utilisant le module géométrie de la calculatrice TI 92.

Devoir proposé en terminale S à des élèves suivant la spécialité mathématiques

Tracer plusieurs triangles et leurs trisectrices intérieures (les trisectrices partagent les angles en trois angles de même mesure; à tracer avec un rapporteur, le plus précisément possible) ; repérer les points d'intersection de couples de trisectrices les plus proches de chaque côté (vous devez en trouver trois !). Que remarque-t-on ? Ce résultat étonnant est connu sous le nom du théorème de MORLEY (mathématicien anglais né à Woodbridge, Suffolk, Grande Bretagne, professeur à l'université de Baltimore spécialiste de géométrie, Frank Morley est né en 1860 et décédé en 1937). L'exercice propose une démarche pour établir ce théorème.

Enoncé:

On considère le triangle ABC direct dans le plan orienté; les trisectrices des angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{BCA}$  les plus proches de [BC] se coupent en A', les deux autres trisectrices de ces deux angles se coupent en P. On ne construira pas les trisectrices de l'angle  $\widehat{CAB}$  dans un premier temps. On notera a, b et c les mesures des angles orientés  $(\vec{AB}, \vec{AC})$ ,  $(\vec{BC}, \vec{BA})$  et  $(\vec{CA}, \vec{CB})$ .



1) Que représente le point A' dans le triangle BCP ? Que peut-on en déduire pour la droite (PA') par rapport aux droites (PB) et (PC) ?

2) Construire l'image  $\Delta$  de (PA') par la rotation de centre A' et d'angle  $\frac{\pi}{6}$  et l'image  $\Delta'$  de (PA') par la rotation de centre A' et d'angle  $-\frac{\pi}{6}$ .  $\Delta$  coupe (BP) en U et (CP) en M et  $\Delta'$  coupe (BP) en N et (CP) en V. Préciser les natures des triangles A'UV et A'MN et du quadrilatère MNUV. On note  $\gamma$  le symétrique de A' par rapport à la droite (PB) et  $\beta$  le symétrique de A' par rapport à la droite (PC). Montrer que  $\gamma$  appartient au segment [AB] et que  $\beta$  appartient au segment [AC].

3) Montrer que  $\gamma, \beta, M, N, U,$  et V sont cocycliques. Que peut-on dire des cordes  $\gamma U, UV$  et  $V\beta$  ?

4) Démontrer que:  $(\vec{NU}, \vec{NV}) \equiv (\vec{PB}, \vec{PA}') + (\vec{PA}', \vec{NA}') \pmod{\pi}$ . Evaluer l'angle  $(\vec{PB}, \vec{PA}')$  en fonction de b et c, puis en fonction de a. En déduire l'expression de  $(\vec{NU}, \vec{NV})$  en fonction de a.

5) Montrer que  $(\vec{N\gamma}, \vec{N\beta}) \equiv 3(\vec{NU}, \vec{NV}) \pmod{2\pi}$ . En déduire que A est sur le cercle défini à la question 3).

Montrer alors que (AU) et (AV) sont les trisectrices de  $\widehat{BAC}$  et conclure.

Corrigé:

1) A' est centre du cercle inscrit dans APB (PA') est axe de symétrie pour le couple de droites ((PB),(PC))

2) (PA') est axe de symétrie de  $(\Delta, \Delta')$ , donc, avec le 1), on peut conclure que les symétriques de U et de M par rapport à (PA') sont V et N. les triangles AUV et AMN sont donc isocèles avec un angle en A' de mesure  $\frac{\pi}{3}$ , ils sont donc équilatéraux ; on peut conclure également que le quadrilatère MNUV est un trapèze isocèle. (PC) est axe de symétrie de (CA), (CA'), donc  $\beta$  appartient à [CA] et de même  $\gamma$  appartient à [AB].

3)  $(\vec{NM}, \vec{NV}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$  et  $(\vec{\beta M}, \vec{\beta V}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$  (par symétrie de  $(\vec{AM}, \vec{AV})$ ); on peut en conclure que M, N, V et  $\beta$  sont cocycliques. D'une façon identique, on peut obtenir que M, N, U et  $\gamma$  sont cocycliques. MNUV étant un trapèze isocèle, les points M, N, U et V sont également cocycliques. En étudiant les trois cocyclicités ci-dessus, on peut affirmer que M, N, U, V,  $\beta$  et  $\gamma$  sont cocycliques.

Par symétrie, on a :  $\gamma U = UA'$  et  $\beta V = VA'$ , compte tenu du triangle équilatéral A'UV, on obtient :  $\gamma U = UV = V\beta$ .

4) Par alignement de points, on a, modulo  $\pi$  :  $(\vec{NU}, \vec{NV}) = (\vec{PB}, \vec{NA}') = (\vec{PB}, \vec{PA}') + (\vec{PA}', \vec{NA}')$ . (PA') étant bissectrice intérieure de BPC, on a :

$$(\vec{PB}, \vec{PA}') = \frac{1}{2}(\vec{PB}, \vec{PC}) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{2}{3}(b+c)) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}(\pi - a) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}a$$

$$(\vec{PA}', \vec{NA}') = -\frac{\pi}{6} \text{ (par construction)}$$

donc, d'après tous les résultats énoncés ci-dessus :  $(\vec{NU}, \vec{NV}) = \frac{1}{3}a$ .

5) Les points  $\gamma$ , U, V et  $\beta$  étant régulièrement espacés dans cet ordre sur le cercle de cocyclicité, on a :

$$(\vec{N\gamma}, \vec{N\beta}) = 3(\vec{NU}, \vec{NV}) = a \text{ (d'après 4)).}$$

Or, par alignement,  $(\vec{A\gamma}, \vec{A\beta}) = (\vec{AB}, \vec{AC}) = a \pmod{\pi}$ , on a donc :

$(\vec{A\gamma}, \vec{A\beta}) = (\vec{N\gamma}, \vec{N\beta}) \pmod{\pi}$ , d'où on peut conclure que A,  $\gamma$ , N et  $\beta$  sont cocycliques et donc que A appartient au cercle de la question 3).

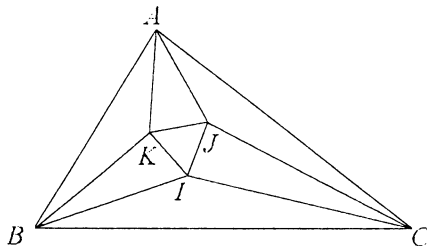
6) les points  $\gamma$ , U, V et  $\beta$  étant régulièrement espacés dans cet ordre sur le cercle de cocyclicité qui contient A, on peut affirmer alors que les droites (AU) et (AV) sont trisectrices de l'angle  $\widehat{\beta A \gamma}$  et donc de l'angle  $\widehat{BAC}$ .

On peut lire dans le résultat ci-dessus le théorème de Morley!

### III. Théorème de MORLEY (version "Berger")

Cette démonstration est proposée en exercice dans l'ouvrage "Géométrie" de Marcel Berger, elle reprend une des preuves faites en réponse au défi de Morley dans la première partie de ce siècle, je n'en connais pas actuellement les références exactes, d'où le titre !

Soit ABC un triangle et IJK le triangle obtenu en traçant les trisectrices. On note a, b et c les côtés de ABC et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les tiers des angles  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{CBA}$  et  $\widehat{ACB}$ , et R le rayon du cercle circonscrit à ABC.



On a dans le triangle ABC:

$$(1) \frac{a}{\sin(3\alpha)} = \frac{b}{\sin(3\beta)} = \frac{c}{\sin(3\gamma)} = 2R$$

On a dans le triangle ABK:

$\widehat{AKB} = \pi - (\alpha + \beta)$ , et donc:  $\sin(\widehat{AKB}) = \sin(\alpha + \beta)$ , en appliquant partiellement la formule du type (1) dans ce triangle, on obtient:

$$(2) \frac{AK}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)}$$

en éliminant c dans les équations (1) et (2), et en remarquant que:

$3\gamma + 3\alpha + 3\beta = \pi$ , et donc que:  $\sin(\frac{\pi}{3} - \gamma) = \sin(\alpha + \beta)$ , on obtient:

$$AK = 2R \frac{\sin(\beta)\sin(3\gamma)}{\sin(\frac{\pi}{3} - \gamma)}$$

Un peu de trigonométrie astucieuse s'impose alors:

$$\sin(3\gamma) = 3\sin(\gamma) - 4\sin^3(\gamma) \quad (\text{résultat classique})$$

$$2\sin(\frac{\pi}{3} - \gamma)\sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) = \cos(2\gamma) - \cos(\frac{2\pi}{3}) = 1 - 2\sin^2(\gamma) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2\sin^2(\gamma)$$

On peut alors écrire:  $AK = 8R\sin(\beta)\sin(\gamma)\sin(\frac{\pi}{3} + \beta)$ .

Par symétrie des données du problème, on a alors, par permutation des lettres:

$$AJ = 8R \sin(\gamma) \sin(\beta) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right).$$

On en déduit :

$$\frac{AK}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)} = \frac{AJ}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)} = 2R \sin(\beta) \sin(\gamma) \quad (3)$$

Or, de :  $3\gamma + 3\alpha + 3\beta = \pi$ , on peut déduire la relation :  $\frac{\pi}{3} + \gamma + \frac{\pi}{3} + \beta + \alpha = \pi$ , le triangle AKJ

ayant pour l'angle  $\widehat{KAJ}$  la valeur  $\alpha$ , il convient donc, d'après (3), pour vérifier la relation :

$$\frac{AK}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)} = \frac{AJ}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)} = \frac{JK}{\sin(\alpha)} = 2R \sin(\beta) \sin(\gamma)$$

On peut alors conclure que :  $JK = 2R \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)$ .

Cette valeur magnifiquement symétrique en  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , permet à l'évidence de conclure :

$$JK = KI = IJ !$$

D'où le théorème de MORLEY.

**IV. Démonstration de Raoul Bricard (1922)**, reprise dans l'ouvrage de J.M. Monier (géométrie T.7 ; exercice C 2.5, page 132). (non réalisée lors du stage)

A) Préliminaire : caractérisation du centre du cercle inscrit dans un triangle.

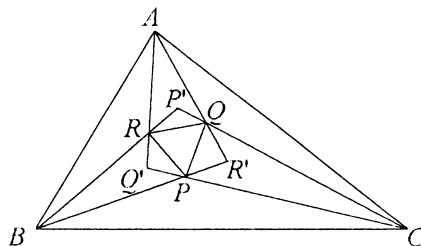
1) soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, montrer que :  $\widehat{BIC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2}$

2) établir que le point J de la bissectrice intérieure issue de A caractérisé par :  $\widehat{BJC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2}$

est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

B) théorème de MORLEY :

Soit PQR un triangle équilatéral et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels de  $]0; \frac{\pi}{3}[$  tels que :  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{3}$ . Soit P', Q' et R' trois points extérieurs au triangle PQR tels que les triangles P'QR, Q'RP et R'PQ soient isocèles d'angles à la base respectifs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Les droites (Q'R) et (R'Q) se coupent en A, (R'P) et (P'R) en B et (P'Q) et (Q'P) en C.



1) Montrer que le triangle ABC est bien défini.

2) Etablir que :  $\widehat{BP'C} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{BPC}}{2}$ . En déduire que le point P est centre du cercle inscrit au triangle BP'C.

3) Conclure que les droites (BP) et (BR) sont les trisectrices de l'angle  $\widehat{ABC}$ , (CQ) et (CP) celles de  $\widehat{BCA}$  et (AQ) et (AR) celles de  $\widehat{CAB}$ .  
 Enoncer le théorème de MORLEY.

Réponses:

A) 1)  $\widehat{BIC} = \pi - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = \pi - \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \pi - \frac{1}{2}(\pi - \widehat{BAC}) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$

2) Si M est un point de la bissectrice intérieure du triangle ABC issue de A, et a le pied de cette bissectrice, les angles  $\widehat{MBC}$  et  $\widehat{MCB}$  ont des mesures strictement décroissantes lorsque M parcourt le segment [Aa] de A vers a, donc l'angle  $\widehat{BMC}$  a lui une mesure strictement croissante de façon continue dans les mêmes conditions; il y a donc bijection entre les points du segment [Aa] et les mesures prises par l'angle  $\widehat{BMC}$ ; le point I prenant la valeur proposée (d'après 1)), le point J caractérisé est le centre du cercle inscrit dans ABC.

B) 1) ABC est bien défini si les droites précisées dans l'énoncé sont bien sécantes, or les droites (Q'R) et (R'Q) sont parallèles si et seulement si :

$$\frac{\pi}{3} + \beta + \frac{\pi}{3} + \gamma = \pi$$

soit, compte tenu de  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , ce qui est exclu par hypothèse.

2)  $\widehat{BP'C} = \widehat{RP'Q} = \pi - 2\alpha = \pi - 2(\frac{2\pi}{3} - \beta - \gamma) = 2\beta + 2\gamma - \frac{\pi}{3}$

$$\widehat{BPC} = \widehat{Q'PR'} = \frac{\pi}{3} + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\widehat{BP'C}$$

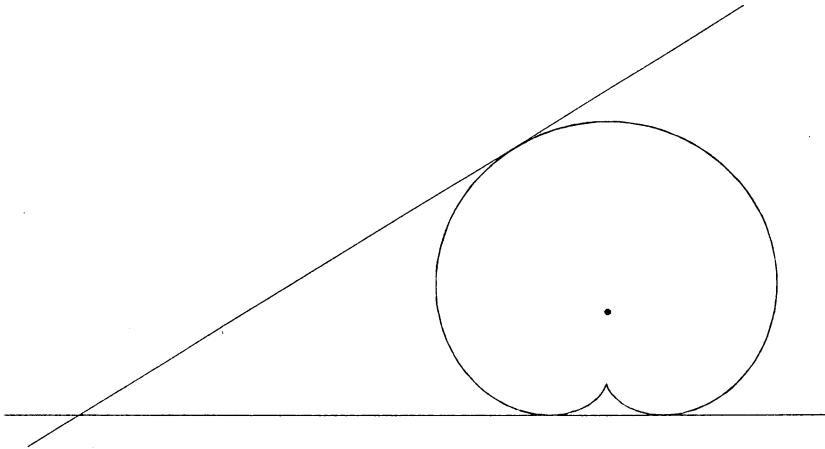
3) D'après le préliminaire et le résultat précédent, sachant (PP') est médiatrice de [RQ] (par construction) et donc que (PP') est bissectrice intérieure dans le triangle RP'Q ou dans BP'C, on peut affirmer que P est le centre du cercle inscrit dans BP'C; en faisant tourner les points, on obtient de même que Q est centre du cercle inscrit dans le triangle CQ'A et R est centre du cercle inscrit dans le triangle AR'B. On peut en déduire alors que (BP) est bissectrice intérieure du triangle BP'C et donc que :  $\widehat{RBP} = \widehat{PBC}$ , mais aussi que (BR) est bissectrice intérieure dans le triangle AR'B et donc que :  $\widehat{ABR} = \widehat{RBP}$  ; il est alors immédiat que (BP) et (BR) sont trisectrices intérieures de l'angle  $\widehat{ABC}$ . De même, on obtient que (CP) et (CQ) sont trisectrices intérieures de l'angle  $\widehat{BCA}$  et (AQ) et (AR) sont trisectrices intérieures de l'angle  $\widehat{CAB}$ .

4) "les trois points d'intersection des trisectrices adjacentes aux côtés d'un triangle forment toujours un triangle équilatéral".

### V. Quelques prolongements

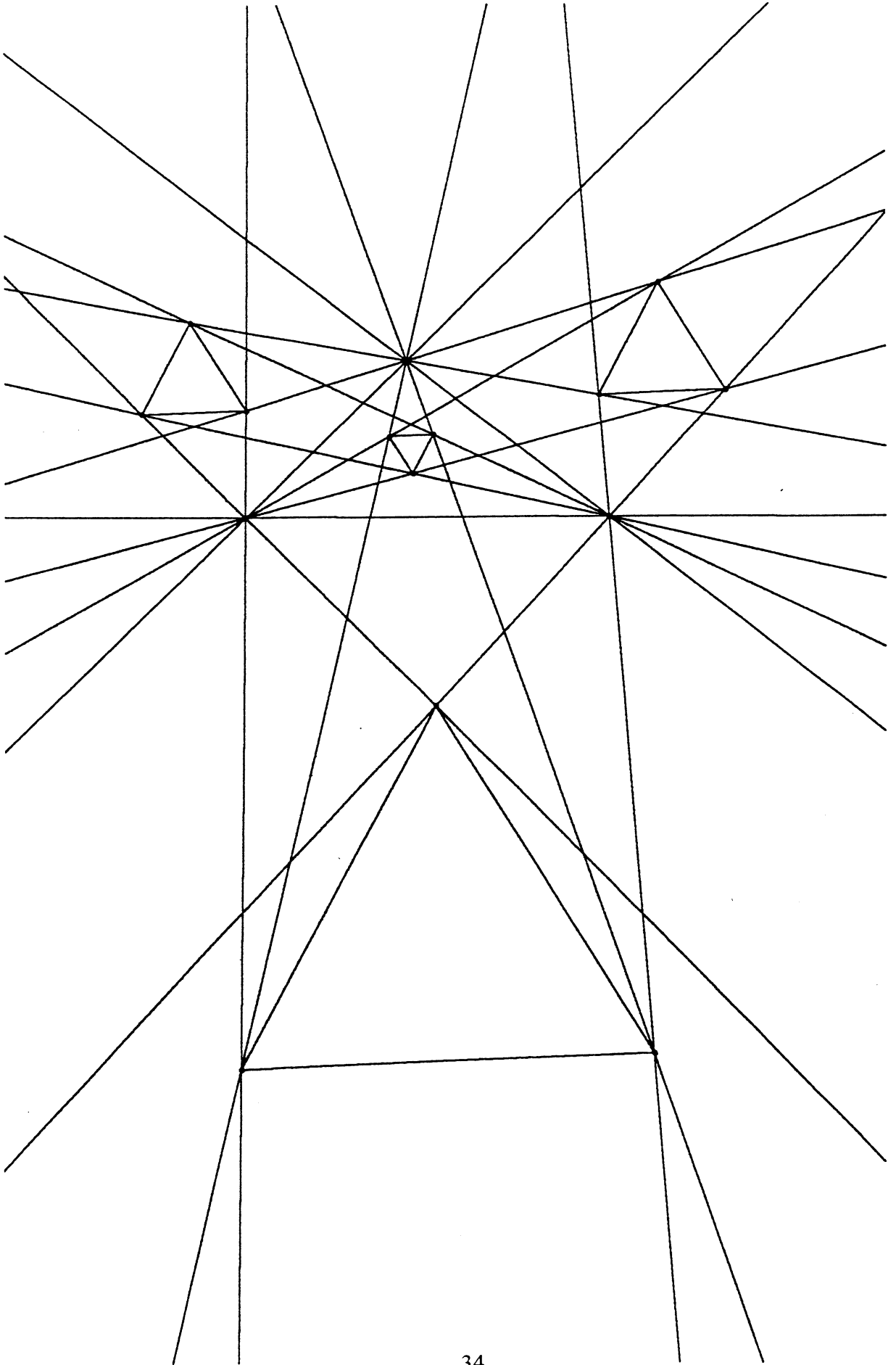
Frank Morley a obtenu son théorème alors qu'il effectuait des recherches sur des cardioides. Voici quelques résultats et remarques qui pourraient être développés dans un prochain stage.

Si l'on considère une droite  $\Delta$ , un point  $A$  n'appartenant pas à cette droite, un point  $M$  de  $\Delta$  et l'image  $\Delta'$  de  $\Delta$  par la rotation de centre  $M$  et d'angle  $3(\Delta, \overrightarrow{MA})$ , alors l'enveloppe de  $\Delta'$  lorsque  $M$  décrit  $\Delta$  est une cardioïde doublement tangente à  $\Delta$ ,  $A$  est appelé centre de cette cardioïde.



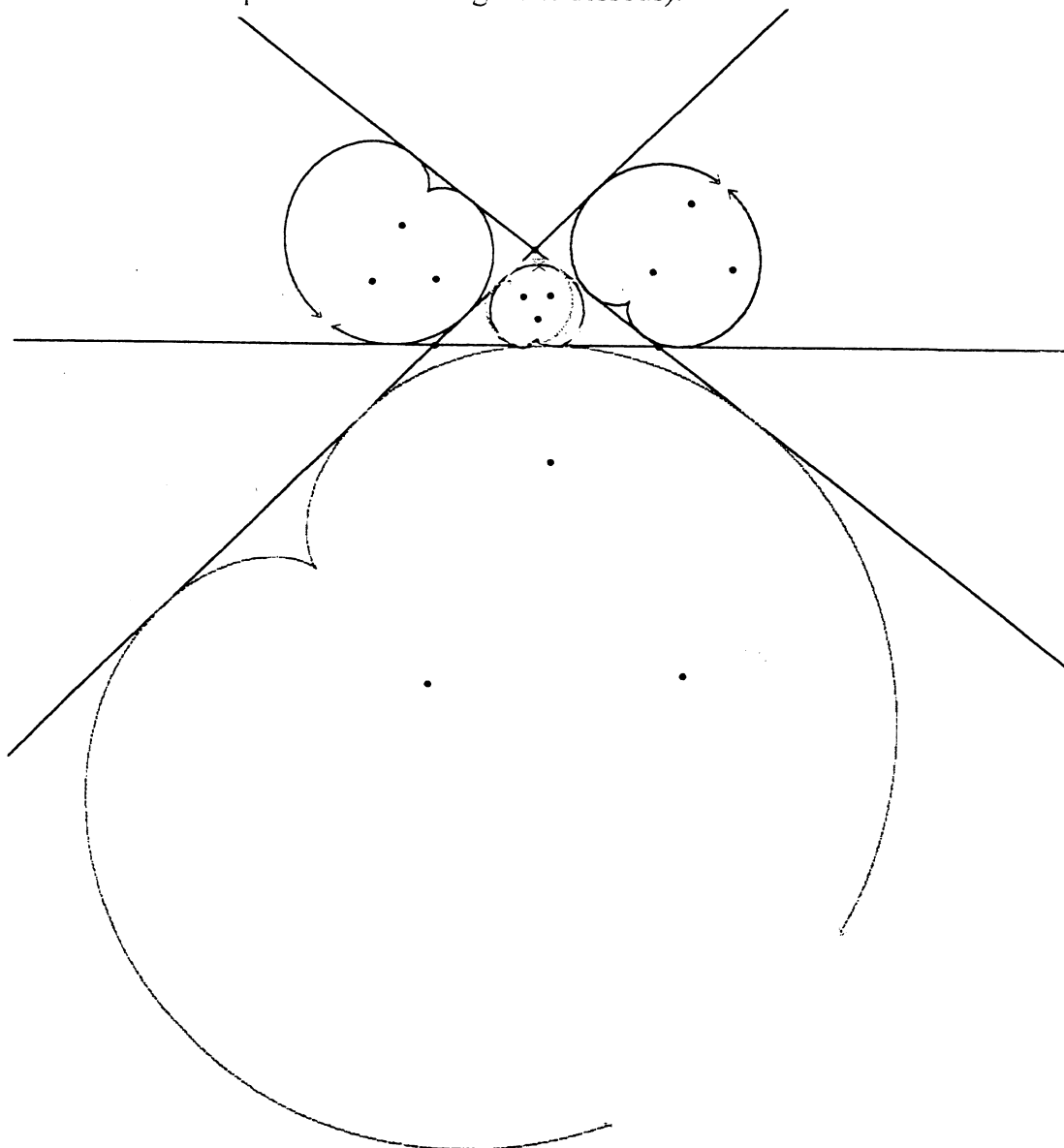
Il est clair que les sommets du triangle équilatéral de Morley sont les centres des trois cardioides inscrites dans le triangle initial et doublement tangentes à l'un des côtés.

Les trisectrices extérieures du triangle définissent avec les trisectrices intérieures un ensemble de 12 droites qui se coupent en formant 27 triangles ; l'observation de la figure suivante permet de constater de troublants alignements et parallélismes (confirmés par des tests faits avec Cabri Géomètre), il a été établi que 18 de ces triangles sont équilatéraux ; nous l'avons établi de diverses manières pour l'un d'entre eux, pour les autres nous verrons plus tard !





On obtient comme ci-dessus que les points d'intersection extérieurs des trisectrices, adjacentes à une même droite côté du triangle initial, sont centres d'une cardioïde tangente doublement à cette droite et tangente extérieurement aux deux autres côtés du triangle (quelques unes de ces cardioïdes sont représentées sur la figure ci-dessous).



#### Bibliographie

- Documents fournis par J. Borowczyk lors de son atelier.
- M. Berger, Géométrie, Nathan
- J.M. Monier, Cours et exercices Prépas (Géométrie Tome 7), Dunod
- B. Fort, Aimer faire des maths au lycée (tome 4), IREM de Rouen
- J. Aymes, Ces problèmes qui font les mathématiques, APMEP
- A. Avez, la leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation, Masson
- Shang-Ching Chou, Mechanical geometry theorem proving, Reidel
- C.O. Oakley ; J.C. Baker, The Morley trisector theorem, American mathematical monthly



Il faut lire: « IzoRRonale dri-Houkeunne » avec un « RR » qui vient du plus profond de la gorge, un petit « r » roulé et un « H » aspiré comme il se doit!...

**Intro:**

C'était un de ces mercredis trempés du mois de mars, le pavé de la cour d'honneur du lycée Corneille reflétait le gris du ciel...Luc me tendit un papier avec ce titre encadré « Isogonale driehoeken »!?..

Luc avait interrogé le dieu Internet au sujet de Morley et son fameux triangle, le dieu Internet lui avait répondu ..... en néerlandais! Alors Luc, qui savait mon intérêt à la fois pour la langue de Rembrandt et la géométrie du triangle, se tourna vers moi..et voilà comment je fus amené à découvrir le travail d'un collègue de l'autre pays du fromage, répondant au nom de Floor van Lamoen, portant sur ... vous allez voir!

\*\*\*

**So, wat is een driehoeken?**

*Mais enfin quoi qu'est-ce qu'un « driehoeken »?*

Si je vous énonce à la file: een, twee, drie, vier.....ein, zwei, drei, vier.....one, two, three, four.....vous l'aurez compris, drie = trois.

Et un « hoek », c'est quoi un « hoek »? Réponse: un « hoek » est un coin<sup>1</sup>, un angle. Par conséquent, een « driehoeken » est un triangle.

**En nu, wat is een « isogonale » driehoeken?**

*Et maintenant, qu'appelle-t-on un triangle isogonal?*

La notion de triangle isogonal repose sur la notion de droites isogonales; deux droites issues du même sommet d'un triangle sont dites « isogonales » si et seulement si elles sont symétriques par rapport aux bissectrices issues de ce sommet, ou, ce qui revient au même, par rapport à l'une d'elle. (cf figure 1)

Considérons ensuite un triangle  $ABC$ , et trois droites  $D_A, D_B, D_C$  issues respectivement de chacun de ses sommets; construisons les droites isogonales associées  $D'_A, D'_B, D'_C$ , et  $A'$  le point d'intersection de  $D_B$  avec  $D'_C$ , respectivement  $B'$  le point d'intersection de  $D_C$  avec  $D'_A$ , et  $C'$  le point d'intercection de  $D_A$  avec  $D'_B$ . Le triangle  $A'B'C'$  ainsi obtenu est dit« isogonal ». (cf figure 2)

---

<sup>1</sup> Ne dit-on pas « een schrophoek » pour dire corner..à propos de choses footballistiques et puisque les Pays-Bas viennent de battre la Yougoslavie en 1/8 ème de finale de la coupe du monde 98!

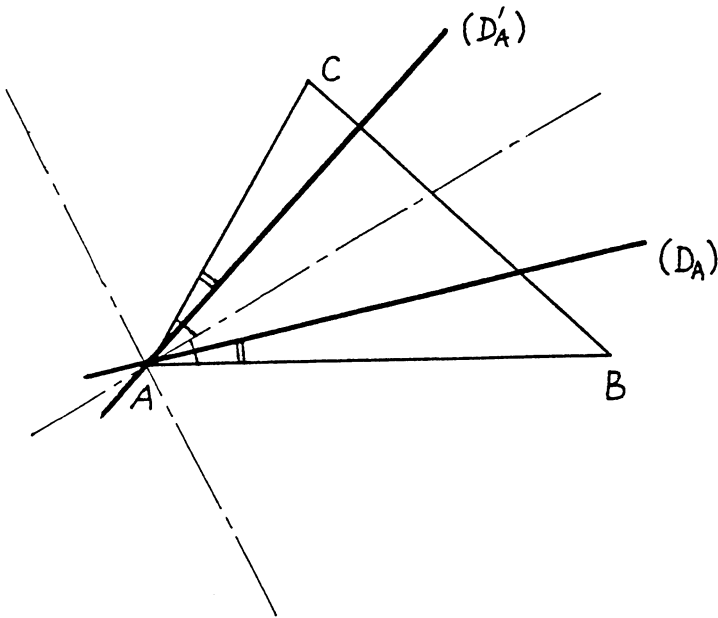
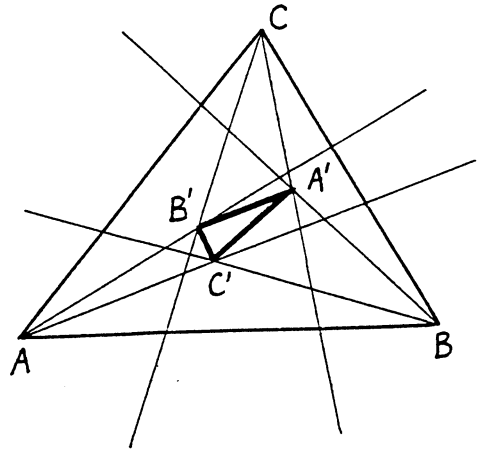


fig. 1



\*\*\*

**Citons quelques exemples bien connus de triangles isogonaux:**

1. En construisant extérieurement au triangle  $ABC$ , trois triangles équilatéraux (en néerlandais « drie gelijkzijdige driehoeken »; on pourra s'amuser à prononcer l'adjectif comme suit: « RReu-leik-zeï-diRe »)  $ABC'$ ,  $BCA'$ ,  $CAB'$  on obtient un triangle isogonal ; dans cette configuration, on sait que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes en un point appelé, le saviez-vous, « het punt van Fermat » (*le point de Fermat*)! (cf figure 3)

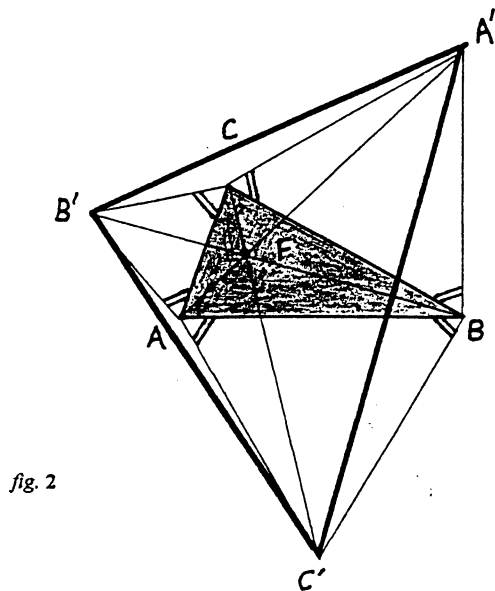


fig. 2

2. Les centres  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  des triangles équilatéraux  $ABC''$ ,  $BCA''$ ,  $CAB''$  de la figure précédente constituent eux aussi, de façon assez évidente, un triangle isogonal; les droites  $(AA'')$ ,  $(BB'')$  et  $(CC'')$  concourent encore en point qui, cette-fois-ci, serait appelé « het punt van Napoleon »<sup>2</sup> (cf figure 4)

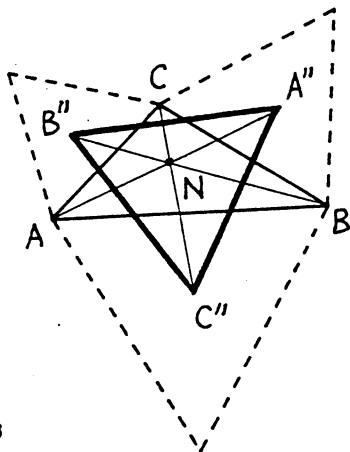


fig. 3

3. Les trisectrices fournissent naturellement un exemple de triangle isogonal, il s'agit du triangle de Morley, et je rappelle le stelling van Morley, version modern-batav: « de Morley driehoeken is een gelijkzijdige driehoeken ». Une fois encore, les droites reliant deux à deux les sommets du triangle initial au triangle isogonal sont concourantes en un point, « de Morley centra »! (cf figure 5)

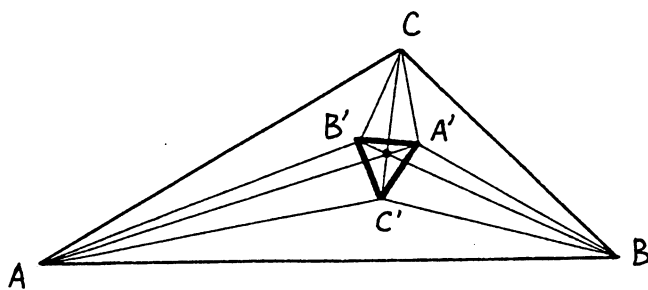


fig. 4

<sup>2</sup> C'est en tous les cas ce qu'affirme le dieu Internet par l'intermédiaire de son envoyé parmi nous, M. Floor van Lamoen, l'auteur de l'article, cité en introduction.

## Quelques propriétés des triangles isogonaux:

Les exemples donnés ci-dessus nous amène à énoncer le résultat basique suivant:

Tout triangle isogonal qui se déduit d'un triangle  $ABC$  est en perspective avec celui-ci, autrement dit, les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  sont concourantes

Nous allons démontrer ce résultat, en utilisant les équilibres.

Je me permettrai de faire référence au travail édité par l'I.R.E.M. de Rouen sous le titre « Barycentres associés-Equilibres », signé Sinègre-Lachaux-Hamel et plus précisément à la troisième partie du fascicule en question intitulée précisément « isogonalité ». On y trouve notamment la proposition suivante et sa démonstration en termes d'équilibres:

Etant donné un triangle  $ABC$ ,  $U$  un point de  $(BC)$  tel que la droite  $(AU)$  admette pour symétrique par rapport aux bissectrices issue de  $A$  une droite sécante à  $(BC)$  en  $V$  (cf figure 6), si  $U$  est barycentre de  $(B, \beta)$  et  $(C, \gamma)$ , alors  $V$  est barycentre de  $(B, b^2\gamma)$  et  $(C, c^2\beta)$ .

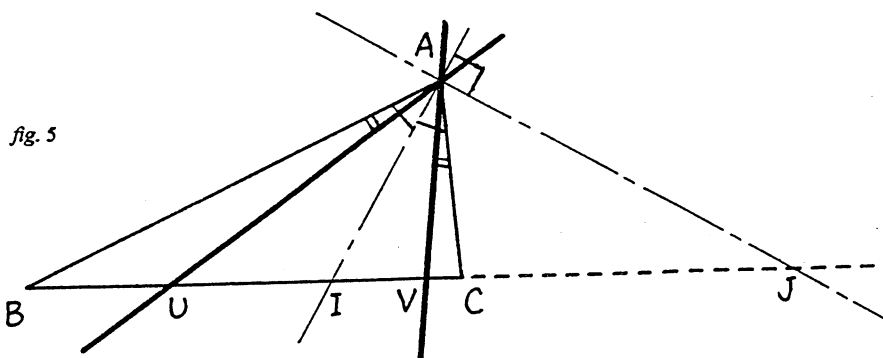


fig. 5

Rappelons ce qu'est un équilibre; il s'agit d'un tableau du type:

$M$	$A$	$B$	$C$
$m$	$x$	$y$	$z$

où la somme des coefficients  $m + x + y + z$  est nulle, traduisant l'égalité vectorielle:

$$m\vec{OM} + x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC} = \vec{0}$$

indépendante du choix du point  $O$ ,

et signifiant à la fois:

que  $M$  est barycentre de  $(A, x)$ ,  $(B, y)$ ,  $(C, z)$ <sup>3</sup>,

ou que  $A$  est barycentre de  $(M, m)$ ,  $(B, y)$ ,  $(C, z)$

ou encore que les droites  $(MA)$  et  $(BC)$  sont sécantes (éventuellement à l'infini, *i-e* parallèles) au point  $K$  barycentre de  $(M, m)$ , et  $(A, x)$ , d'une part et barycentre de  $(B, y)$ ,  $(C, z)$  d'autre part.<sup>4</sup>

<sup>3</sup> La réserve d'existence est implicite, natuurlijk: il suffit en l'occurrence que  $m$  ne soit pas nul!

<sup>4</sup> Ce sont les propriétés des équilibres mentionnées sur cette page, que j'utiliserai dans la démonstration annoncée.

Considérons la « configuration du triangle isogonal » suivante:

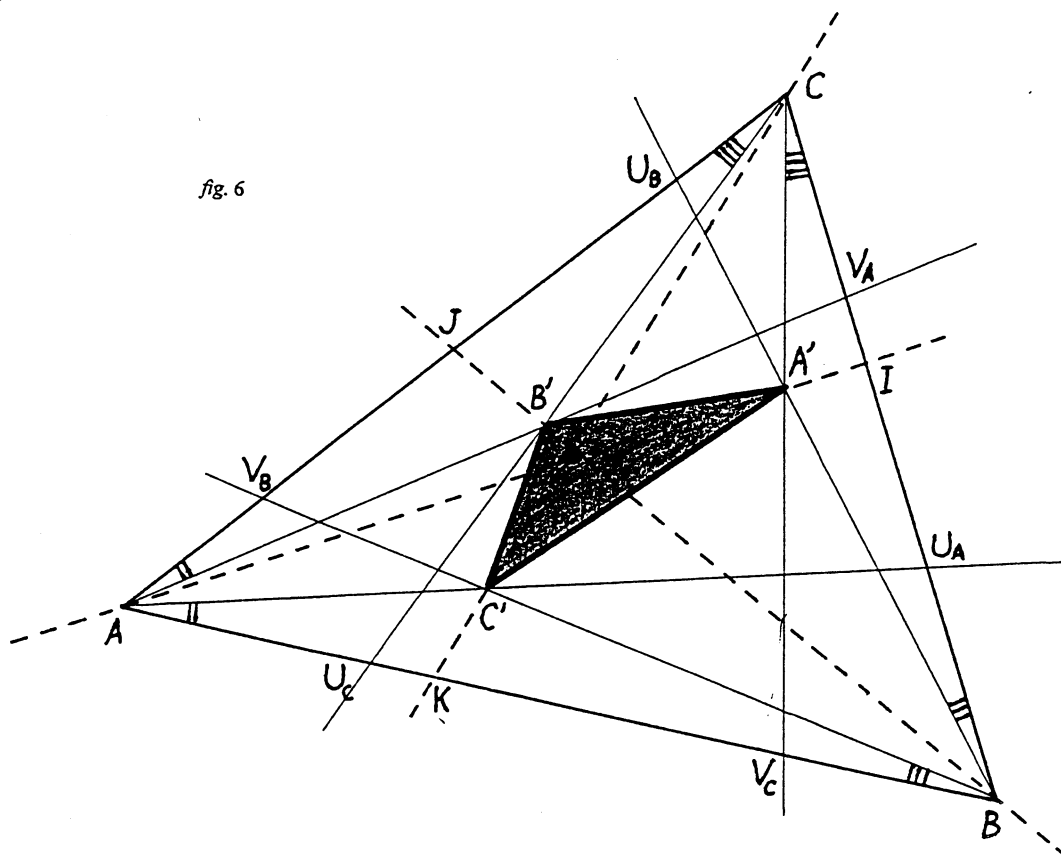
Un triangle  $ABC$ , des points  $U_A, V_A$  sur  $(BC)$  (respectivement  $U_B, V_B$  sur  $(CA)$  et  $U_C, V_C$  sur  $(AB)$ ) tels que les droites  $(AU_A), (AV_A)$  soient isogonales (respectivement les droites  $(BU_B), (BV_B)$  et les droites  $(CU_C), (CV_C)$ ).

Les points  $A', B', C'$  sont définis comme suit:

$A'$  est le point d'intersection des droites  $(BU_B), (CV_C)$

$B'$  est le point d'intersection des droites  $(CU_C), (AV_A)$

$C'$  est le point d'intersection des droites  $(AU_A), (BV_B)$



Le triangle  $A'B'C'$  est par construction isogonal; il s'agit, comme il l'a été précisé auparavant, de prouver que les droites  $(AA'), (BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes.

Posons les équilibres déterminés par les hypothèses précédentes:<sup>5</sup>

(E<sub>1</sub>)

$U_A$	$B$	$C$
$-(\beta_1 + \gamma_1)$	$\beta_1$	$\gamma_1$

(F<sub>1</sub>)

$V_A$	$B$	$C$
$-(c^2\beta_1 + b^2\gamma_1)$	$b^2\gamma_1$	$c^2\beta_1$

(E<sub>2</sub>)

$U_B$	$C$	$A$
$-(\alpha_2 + \gamma_2)$	$\gamma_2$	$\alpha_2$

(F<sub>2</sub>)

$V_B$	$C$	$A$
$-(c^2\alpha_2 + a^2\gamma_2)$	$c^2\alpha_2$	$a^2\gamma_2$

(E<sub>3</sub>)

$U_C$	$A$	$B$
$-(\alpha_3 + \beta_3)$	$\alpha_3$	$\beta_3$

(F<sub>3</sub>)

$V_C$	$A$	$B$
$-(a^2\beta_3 + b^2\alpha_3)$	$a^2\beta_3$	$b^2\alpha_3$

La combinaison linéaire d'équilibres  $c^2\alpha_2$  (E<sub>1</sub>) -  $\gamma_1$  (F<sub>2</sub>) donne l'équilibre:

$U_A$	$V_B$	$A$	$B$
$-c^2\alpha_2(\beta_1 + \gamma_1)$	$\gamma_1(c^2\alpha_2 + a^2\gamma_2)$	$-a^2\gamma_1\gamma_2$	$c^2\alpha_2\beta_1$

d'où l'on déduit: le point  $C'$  comme barycentre de  $(B, c^2\alpha_2\beta_1)$  et  $(V_B, \gamma_1(c^2\alpha_2 + a^2\gamma_2))$  puis compte tenu de l'équilibre (F<sub>2</sub>),  $C'$  comme barycentre de  $A, B, C$  et enfin l'équilibre:

(G<sub>1</sub>)

$C'$	$A$	$B$	$C$
xxx	$a^2\gamma_1\gamma_2$	$c^2\alpha_2\beta_1$	$c^2\alpha_2\gamma_1$

De même, la combinaison linéaire d'équilibres  $b^2\gamma_1$  (E<sub>3</sub>) -  $\beta_3$  (F<sub>1</sub>) donne l'équilibre:

$U_C$	$V_A$	$C$	$A$
$-b^2\gamma_1(\alpha_3 + \beta_3)$	$\beta_3(c^2\beta_1 + b^2\gamma_1)$	$-c^2\beta_1\beta_3$	$b^2\alpha_3\gamma_1$

d'où l'on déduit: le point  $B'$  comme barycentre de  $(A, b^2\alpha_3\gamma_1)$  et  $(V_A, \beta_3(c^2\beta_1 + b^2\gamma_1))$  puis compte tenu de l'équilibre (F<sub>1</sub>),  $B'$  comme barycentre de  $A, B, C$  et l'équilibre:

(G<sub>2</sub>)

$B'$	$A$	$B$	$C$
xxx	$b^2\alpha_3\gamma_1$	$b^2\beta_3\gamma_1$	$c^2\beta_1\beta_3$

<sup>5</sup> Les réels  $a, b, c$  représentent selon l'usage les longueurs  $BC, CA, AB$ ; les réels  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  sont arbitrairement choisis, étant déterminés par la position arbitraire des points  $U_A, V_A, U_B, \dots$  etc.



Enfin, la combinaison linéaire d'équilibres  $\alpha^2\beta_3 (E_2) - \alpha_2(F_3)$  donne l'équilibre:

$U_B$	$V_C$	$B$	$C$
$-\alpha^2\beta_3(\alpha_2 + \gamma_2)$	$\alpha_2(\alpha^2\beta_3 + b^2\alpha_3)$	$-b^2\alpha_2\alpha_3$	$\alpha^2\beta_3\gamma_2$

d'où l'on déduit: le point  $A'$  comme barycentre de  $(C, \alpha^2\beta_3\gamma_2)$  et  $(V_C, \alpha_2(\alpha^2\beta_3 + b^2\alpha_3))$  puis compte tenu de l'équilibre  $(F_3)$ ,  $A'$  comme barycentre de  $A, B, C$  et l'équilibre:

(G<sub>3</sub>)

$A'$	$A$	$B$	$C$
xxx	$\alpha^2\alpha_2\beta_3$	$b^2\alpha_2\alpha_3$	$\alpha^2\beta_3\gamma_2$

Les équilibres  $(G_1)$ ,  $(G_2)$  et  $(G_3)$  permettent de déterminer les points  $I, J, K$  points d'intersection respectivement de  $(AA')$  avec  $(BC)$ ,  $(BB')$  avec  $(AC)$ , et  $(CC')$  avec  $(AB)$ ; on obtient effectivement:

(H<sub>1</sub>)

$I$	$B$	$C$
xxx	$b^2\alpha_2\alpha_3$	$\alpha^2\beta_3\gamma_2$

(H<sub>2</sub>)

$J$	$C$	$A$
xxx	$c^2\beta_1\beta_3$	$b^2\alpha_3\gamma_1$

(H<sub>3</sub>)

$K$	$A$	$B$
xxx	$\alpha^2\gamma_1\gamma_2$	$c^2\alpha_2\beta_1$

On vérifie que les équilibres  $c^2\beta_1(H_1)$ ,  $\alpha^2\gamma_2(H_2)$  et  $b^2\alpha_3(H_3)$  sont de la forme:

$I$	$B$	$C$
xxx	$q$	$r$

$J$	$C$	$A$
xxx	$r$	$p$

$K$	$A$	$B$
xxx	$p$	$q$

avec  $p = \alpha^2 b^2 \alpha_3 \gamma_1 \gamma_2$ ;  $q = b^2 c^2 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1$ ;  $r = c^2 \alpha^2 \beta_1 \beta_3 \gamma_2$ .

L'utilisation du théorème de Ceva (barycentrique) nous fournit la conclusion tant attendue, à savoir que les droites  $(AI)$ ,  $(BJ)$  et  $(CK)$  c'est-à-dire les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes au point  $W$  barycentre de  $(A,p)$ ,  $(B,q)$ ,  $(C,r)$ .

\*\*  
\*

**Autres propriétés des triangles isogonaux: (laissées aux lecteurs à titre d'exercices)**

1. Etant donné un triangle isogonal  $A'B'C'$  déduit d'un triangle  $ABC$ , si on projette orthogonalement les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  respectivement sur les côtés  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ , on obtient un nouveau triangle  $A''B''C''$  en perspective avec le triangle  $ABC$ .<sup>6</sup>

2. Etant donnés deux triangles isogonaux  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  déduits d'un même triangle  $ABC$ , si on construit les points d'intersection  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  des droites  $(A_1A_2)$ ,  $(B_1B_2)$ ,  $(C_1C_2)$  avec respectivement les côtés  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ , on obtient un triangle inscrit dans le triangle  $ABC$  en perspective avec celui-ci.<sup>7</sup>

\*\*\*

A l'issue de ce court article, qu'il me soit permis d'inviter le lecteur intéressé par...l'isogonalité à jeter un coup d'oeil à la première composition de mathématiques du concours externe de recrutement de professeurs certifiés (CAFEP), sections mathématiques-breton<sup>8</sup>, session de 1998: il y trouvera un problème consacré à cette notion mise en parallèle avec celle de triangles orthologiques, et par exemple l'équation en coordonnées barycentriques du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , à savoir:.

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 = 0$$

où  $M$  est considéré comme barycentre de  $(A,x)$ ,  $(B,y)$ ,  $(C,z)$ , équation que l'on retrouve sous la forme:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$$

dans le fascicule « Barycentre associé-Equilibres », sus-mentionné.

*(Quant au lecteur intéressé par cette langue méconnue qu'est le néerlandais, je suggère un séjour au coeur de cette merveilleuse capitale hollandaise qu'est Amsterdam)*

---

<sup>6</sup> L'auteur de l'article étudié, j'ai renommé M.Floor van Lamoen, donne le présent résultat en ajoutant: « *Met de hulp van de stelling van Ceva is het bewijs eenvoudig* », comprendre qu'avec l'aide du théorème de Ceva, on trouve la preuve assez facilement.

<sup>7</sup> Ici, il nous est conseillé: « *Het bewijs is het best te doen met behulp van vergelijkingen van driehoekcoördinaten* », le mot « *vergelijkingen* » signifiant « équation ».

<sup>8</sup> Authentique.

# LES FRACTIONS CONTINUES

## CAS $\sqrt{N}$

### I Une nouvelle écriture exemple

#### 1) Exemple pour un rationnel

Soit  $A = \frac{477}{152}$ , la division euclidienne de 477 par 152 s'écrit :  $477 = 152 \times 3 + 21$

$$\text{donc } A = 3 + \frac{21}{152} \quad (1)$$

$\frac{21}{152}$  a un inverse supérieur à 1, or  $\frac{152}{21} = 7 + \frac{5}{21}$ . En remplaçant dans (1) nous pouvons

maintenant écrire A sous la forme d'une fraction à étages :  $A = 3 + \frac{1}{7 + \frac{5}{21}}$  (2)

$\frac{5}{21}$  a pour inverse ....etc. En continuant ainsi, nous constatons que le processus s'arrête et nous

obtenons la fraction à étages suivante :  $A = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}$

Cette fraction peut être codée : [3, 7, 4, 5]

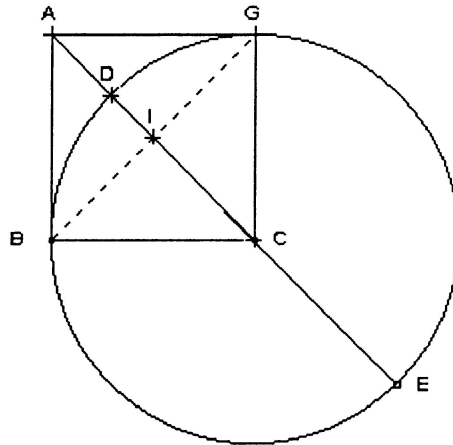
#### 2) Nouvelle écriture de $\sqrt{2}$

##### a) Présentation géométrique

Problème : La diagonale et le côté d'un carré sont ils commensurables ?

Solution de Monsieur Legendre (d'après *Eléments de géométrie Livre III écrit en 1793*) ; voir annexe 1

Soit ABCG un carré de côté  $a$ . On considère le cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre C et de rayon  $a$ . Il coupe la diagonale [AC] en D. Soit E le point de ( $\mathcal{C}$ ) diamétralement opposé à D.



Nous nous intéressons au rapport  $\frac{AC}{AB}$  :

$$\text{Comme } CA = CD + DA, AE > 2a \quad AE = 2AB + AD \text{ donc } \frac{AE}{AB} = 2 + \frac{AD}{AB} \quad (1)$$

Nous allons chercher à exprimer  $\frac{AD}{AB}$  en fonction de lui-même :

$$\text{Or, } AD \cdot AE = (AC - CD)(AC + CE) = AC^2 - AB^2 = AB^2 \text{ puisque } AC^2 = 2AB^2$$

$$\text{Ainsi } \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE} \text{ et d'après (1) } \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}} \quad (2)$$

$$\text{Or } AC = AB + AD \text{ donc } \frac{AC}{AB} = 1 + \frac{AD}{AB} \quad \text{donc } \frac{AC}{AB} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}} \text{ d'après (1)}$$

$$\text{En réutilisant (2), alors } \frac{AC}{AB} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}}$$

Nous pouvons répéter ces opérations indéfiniment et le processus ne s'arrête pas ce qui met en évidence l'incommensurabilité du rapport entre la diagonale et le côté du carré.

### b) Présentation numérique

$1 < \sqrt{2} < 2$  et  $(\sqrt{2})^2 - 1 = 0$  d'où  $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$ . De nouveau nous pouvons

remplacer  $\sqrt{2} - 1$  par  $\frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$  et nous obtenons :  $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}$ . En continuant

indéfiniment, nous obtenons :  $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$  et le processus ne s'arrête pas.

## II Définition et algorithme

1) Soit  $\alpha = (a_n)$  une suite d'entiers naturels non nuls à partir du rang 1. On appelle fraction continue associée à la suite  $(\alpha)$ , la suite  $(r_n)$   $n \in \mathbb{N}$  définie par :

$$r = a_0$$

$$r_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$r_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \dots \dots$$

$r_n$  se note :  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  ; c'est la  $n^{\text{ième}}$  réduite de la fraction continue et  $a_n$  est son  $n^{\text{ième}}$  quotient partiel.

2) Admettons qu'une fraction continue converge vers un réel  $x$  ; c'est à dire  $\lim_{p \rightarrow +\infty} r_p = x$ ,

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} ; \text{ soit } x_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} [a_n, a_{n+1}, \dots, a_p] \text{ alors } x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

ainsi  $a_n < x_n$  puis  $x_{n+1} > a_{n+1} \geq 1$  d'où  $0 < \frac{1}{x_{n+1}} < 1$  par conséquent  $x_n < a_n + 1$

Finalement  $a_n < x_n < a_n + 1$  par suite  $a_n$  est la partie entière de  $x_n$  et  $x_n$  n'est jamais entier.

La suites  $(x_n)$  et  $(a_n)$  sont définies par l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ a_n &= E(x_n) \\ x_{n+1} &= \frac{1}{x_n - a_n} \end{aligned}$$

Cet algorithme est facile à programmer sur les calculatrices.

Pour un réel  $x$  donné, la suite  $(a_i)$  est unique,  $x$  ne peut pas avoir plus d'un développement en fraction continue que nous noterons d'ailleurs D.F.C. de  $x$ .

Remarque : cet algorithme appliqué à  $\sqrt{2}$  donne sans surprise d'après le premier paragraphe

$$x = \sqrt{2} \approx 1,41421352$$

$$a_0 = E(\sqrt{2}) = 1 ; x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0} \approx 2,41421352$$

$$a_1 = E(x_1) = 2 ; x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} \approx 2,41421352$$

et nous retrouvons la fraction continue associée à  $\sqrt{2}$  :  $[1, 2, 2, 2, 2, \dots]$

La suite des  $(a_i)$  est constante à partir du rang 1

Ce même algorithme appliqué à  $\sqrt{3}$  donne les résultats suivants :

$$x = \sqrt{3} \approx 1,732050806$$

$$a_0 = E(\sqrt{3}) = 1 ; x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0} \approx 1,366025404$$

$$a_1 = E(x_1) = 1 ; x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} \approx 2,732050808$$

$$a_2 = E(x_2) = 2 ; x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} \approx 1,366025404$$

$$a_3 = E(x_3) = 1 ; x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3} \approx 2,732050808 \quad \text{etc}$$

$\sqrt{3}$  a pour D.F.C.  $[1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$

la suite  $(a_i)$  est périodique de période 2 à partir du rang 1

De même, nous obtenons les fractions continues associées aux racines carrées des 100 premiers entiers non carrés parfaits. Voir annexe 2.

Est ce que tous les D.F.C. rencontrés seront tous périodiques ?

Voici les résultats pour

$$a_0 = E(\sqrt{7}) = 2 ; x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0} \approx 7,062513306$$

$$a_1 = E(x_1) = 7 ; x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} \approx 15,9965944068$$

$$a_2 = E(x_2) = 15 ; x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} \approx 1,00341723092$$

$$a_3 = E(x_3) = 1 ; x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3} \approx 292,634598625$$

En continuant ainsi, il apparaît que  $\sqrt{7}$  a un D.F.C. non périodique et les premiers termes en sont :  $[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 21, 3, 1, 1, 2, 64, 4, 1, 48, 1, 9, 2, 2, 12, 2, 4, 60,$

### III Propriétés

#### **1) Théorème 1**

Si  $x$  est rationnel, la suite  $(a_i)$  existe et est finie.

Si  $x$  est irrationnel, la suite  $(a_i)$  existe et est infinie.

#### **2) Théorème 2 (fondamental)**

Toute fraction continue converge

### Démonstration :

a) Etant donnée une suite de réels :  $\alpha = (a_i)$  (strictement positifs à partir du rang 1) on définit la suite des fractions  $r_n(\alpha) := [a_0, a_1, \dots, a_n]$ , les suites d'entiers  $(p_n)$  et  $(q_n)$  par les relations :  $p_0 = a_0$  ;  $q_0 = 1$  ;  $p_1 = a_0 a_1 + 1$  ;  $q_1 = a_1$  ;  $p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$  ;  $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$ . (1)

alors ,  $r_n = \frac{p_n}{q_n}$  ; la suite  $(q_n)$  est une suite croissante (strictement à partir du rang 2) d'entiers et  $q_n \geq n$  pour tout entier n.

(Ceci se démontre sans difficulté par récurrence.)

b) Les relations suivantes sont vérifiées :

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n \quad (2)$$

$$\text{C'est à dire : } r_{n+1} - r_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \quad (3)$$

$$\forall n \geq 1 \quad p_{n+1} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{a_{n+1}}{p_{n-1} q_{n+1}} \quad (4)$$

car d'après (1),  $p_{n+1} q_n = a_{n+1} p_n q_n + p_{n-1} q_n$  ;  $q_{n+1} p_{n-1} = a_{n+1} q_n p_{n-1} + q_{n-1} p_{n-1}$  et après soustraction membre à membre, nous obtenons

$$\begin{aligned} p_{n+1} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n+1} &= -(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) = -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = \dots \\ &= (-1)^n (p_1 q_0 - p_0 q_1) = (-1)^n \text{ d'où la formule (2) annoncée.} \end{aligned}$$

La division de (2) par  $q_n q_{n+1}$  donne la relation (3)

$$\begin{aligned} p_{n+1} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n+1} &= (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_{n-1} - p_{n-1} (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) \\ &= a_{n+1} (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) \\ &= (-1)^n a_{n+1}. \end{aligned}$$

$$r_{n+1} - r_{n-1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n+1} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n+1}}{q_n q_{n+1}} = \frac{(-1)^n a_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$$

c) Conséquence

$$\begin{aligned} \text{Puisque } \forall n \quad a_{n+1} \in \mathbb{N}^* \text{ et } q_{n+1} \geq q_n ; \quad q_{n+1} q_n &= (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n \\ &\geq 2 q_n q_{n-1} \\ &\geq 2^2 q_{n-1} q_{n-2} \\ &\geq 2^n q_1 q_0 \end{aligned}$$

$$\text{or } q_1 q_0 = 1 a_1 \geq 1$$

par suite la série de terme générale :  $r_{n+1} - r_{n-1}$  est telle que  $|r_{n+1} - r_{n-1}| \leq \frac{1}{2^n}$ , cette série est donc absolument convergente.

or  $r_n - r_0 = \sum_{k=0}^{k=n} r_k - r_{k-1}$  donc  $(r_n)$  converge ! Sa limite  $x$  est un irrationnel puisque la suite  $(a_i)$  est infinie.

Remarque :  $p_n$  et  $q_n$  vérifient une identité de Bezout par suite  $(r_n)$  est une fraction irréductible, dite réduite d'ordre n.

Les réduites d'ordre n sont des approximations rationnelles de  $x$  dont la précision croît avec n.

## IV Théorèmes de Lagrange et Galois

### 1) Théorème de Lagrange (fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle)

Soit  $x$  un réel positif alors  $x$  est algébrique de degré 2 si et seulement si le D.F.C. de  $x$  est périodique à partir d'un certain rang.

### 2) Théorème de Galois (le 1er avril 1829)

Soit  $x$  un réel quadratique,  $\bar{x}$  son conjugué ;

$x$  admet un développement immédiatement périodique si et seulement si  $x > 1$  et  $\bar{x} \in ]-1, 0[$

de plus  $x$  et  $-\frac{1}{x}$  ont des périodes inversées.

Exemple : Soit  $x = \frac{3 + \sqrt{15}}{4} \approx 1,718$  et  $\bar{x} = \frac{3 - \sqrt{15}}{4} \approx -0,21$

$x$  vérifie les conditions du théorème de Galois.

$\frac{3 + \sqrt{15}}{4}$  a pour D.F.C. : [1, 1, 2, 1, 4, 1, ...]

$\frac{3 + \sqrt{15}}{4}$  est la solution positive de l'équation  $f_0(x) = 0$  avec :  $f_0(x) = 8x^2 - 12x - 3$

$$(\Delta = 240 \text{ et } f_0(1) < 0 < f_0(2))$$

$x_0 = 1 + \frac{1}{x_1}$  et  $x_1$  est la solution positive de l'équation  $f_1(x) = 0$  avec :  $f_1(x) = -7x^2 + 4x + 8$

$$(\Delta = 240 \text{ et } f_1(1) > 0 > f_1(2)) ; 1 < x_1 < 2$$

$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$  et  $x_2$  est la solution positive de l'équation  $f_2(x) = 0$  avec :  $f_2(x) = 5x^2 - 10x - 7$

$$(\Delta = 240 \text{ et } f_2(2) < 0 < f_2(3)) ; 2 < x_2 < 3$$

$x_2 = 2 + \frac{1}{x_3}$  et  $x_3$  est la solution positive de l'équation  $f_3(x) = 0$  avec :  $f_3(x) = -7x^2 + 10x + 5$

$$(\Delta = 240 \text{ et } f_3(2) < 0 < f_3(1)) ; 1 < x_3 < 2$$

$x_3 = 1 + \frac{1}{x_4}$  et  $x_4$  est la solution positive de l'équation  $f_4(x) = 0$  avec :  $f_4(x) = 8x^2 - 4x - 7$

$$(\Delta = 240 \text{ et } f_4(1) < 0 < f_4(2)) ; 1 < x_4 < 2$$

$x_4 = 1 + \frac{1}{x_5}$  et  $x_5$  est la solution positive de l'équation  $f_5(x) = 0$  avec :  $f_5(x) = -3x^2 + 12x + 8$

$$(\Delta = 240 \text{ et } f_5(5) < 0 < f_5(4)) ; 4 < x_5 < 5$$

$x_5 = 4 + \frac{1}{x_6}$  et  $x_6$  est la solution positive de l'équation  $f_6(x) = 0$  avec :  $f_6(x) = 8x^2 - 12x - 3$

$f_6 = f_0$   $x_6 = x_0$  ; on a bien un développement périodique et ceci à partir du rang 0  
le D.F.C. de  $x_0$  est : [1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 1, 4...].

Regardons ce qu'il se passe pour  $y_0 = -\frac{1}{x_0}$

Puisque  $x_0$  est solution de l'équation  $f_0(x) = 0$  avec  $f_0(x) = 8x^2 - 12x - 3$

$y_0 = -\frac{1}{x_0}$  est la solution positive de l'équation  $g_0(x) = 0$  avec :  $g_0(x) = f_0(-\frac{1}{x}) = -3x^2 + 12x + 8$

et  $y_0 = x_5$

$y_0 = 4 + \frac{1}{y_1}$  ; nous comprenons que nous allons retrouver la succession des mêmes polynômes

et donc retrouver les mêmes composants d'où le D.F.C. : [4, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 1...]

La période de  $-\frac{1}{x_0}$  est bien inverse de celle de  $x_0$

### V Etude du cas $\sqrt{N}$ et applications pour $N \leq 100$

#### 1) 1<sup>ère</sup> propriété

exemples :  $\sqrt{11}$  : [3, 3, 6, 3, 6, ...]

$\sqrt{19}$  : [4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8...]

$\sqrt{28}$  : [5, 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10, ...]

Si  $N$  désigne un entier naturel tel que  $\sqrt{N}$  soit irrationnel alors son D.F.C. est périodique à partir du rang 1 et vérifie  $\sqrt{N} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_s, \dots]$

$$a_s = 2a_0$$

si  $s > 1$ ,  $(a_1, a_2, \dots, a_{s-1}) = (a_{s-1}, a_{s-2}, \dots, a_2, a_1)$ .

Démonstration : Soit  $a_0 = E(\sqrt{N})$  ainsi :  $a_0 \leq \sqrt{N} < a_0 + 1$  donc  $a_0^2 \leq N < (a_0 + 1)^2$

Soit  $x_1$  tel que :  $\sqrt{N} = a_0 + \frac{1}{x_1}$ . Or  $\sqrt{N}$  est solution de l'équation :  $x^2 - N = 0$  par conséquent,  $x_1$

est solution des équations suivantes :  $a_0^2 + 2a_0 \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} - N = 0$

$$f(x_1) = 0 \text{ avec } f : x_1 \mapsto (a_0^2 - N)x_1^2 + 2a_0x_1 + 1 = 0$$

or  $f(-1) = (a_0 - 1)^2 - N$  ainsi  $f(-1) < 0$

$f(0) = 1$  ainsi  $f(0) > 0$

$f(1) = (a_0 + 1)^2 - N$  ainsi  $f(1) > 0$

donc le polynôme  $f$  a deux racines : l'une,  $x_1$  supérieure à 1 et l'autre  $\bar{x}_1$  comprise entre -1 et 0.

D'après le théorème de Galois,  $x_1$  et  $-\frac{1}{x_1}$  ont un développement immédiatement périodique tels

que :  $x_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{s-1})$  et  $-\frac{1}{x_1} = (a_{s-1}, a_{s-2}, \dots, a_2, a_1)$ , ainsi  $\sqrt{N} = (a_1, a_2, \dots, a_{s-1})$

or  $\sqrt{N} = a_0 + \frac{1}{x_1}$  donc  $\frac{1}{x_1} = \sqrt{N} - a_0$  d'où  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{N} - a_0}$  par suite  $\bar{x}_1 = \frac{-1}{\sqrt{N} + a_0}$

nous pouvons donc écrire :  $a_0 + \sqrt{N} = -\frac{1}{\bar{x}_1} = (a_s, a_{s-1}, a_{s-2}, \dots, a_2, a_1)$ .

Nous savons que  $\sqrt{N} = (a_1, a_2, \dots, a_{s-1})$  par conséquent  $a_0 + \sqrt{N} = (2a_0, a_1, a_2, \dots, a_{s-1})$

Comme un nombre a un D.F.C. unique, les deux développements de  $a_0 + \sqrt{N}$  sont identiques par conséquent,  $(a_s, a_{s-1}, a_{s-2}, \dots, a_2, a_1) = (2a_0, a_1, a_2, \dots, a_{s-1})$  donc  $a_s = 2a_0$ .

2) Quand nous regardons les périodes des D.F.C. des entiers  $N$  inférieurs ou égaux à 100, nous constatons que

a)  $\sqrt{2}, \sqrt{5} = \sqrt{2^2+1}, \sqrt{17} = \sqrt{4^2+1}, \sqrt{26} = \sqrt{5^2+1} \dots$  ont une période de longueur 1.

Cherchons les nombres inférieurs à 100 dont la fraction continue a une période de longueur 1

Soit  $a_0$  un entier supérieur à 1. Considérons  $x = [a_0, 2a_0, 2a_0, \dots]$ . Nous savons que la fraction continue converge, ce nombre existe, il est limite de la suite  $(r_n)$  telle que :  $r_{n+1} = a_0 + \frac{1}{a_0 + r_n}$

il est donc solution positive de l'équation :  $x = a_0 + \frac{1}{a_0 + x}$  c'est à dire  $x^2 = a_0^2 + 1$  ;  $x = \sqrt{a_0^2 + 1}$

b)  $\sqrt{3} = \sqrt{a_0^2 + 2}$  ;  $\sqrt{6} = \sqrt{a_0^2 + a_0}$  ;  $\sqrt{8} = \sqrt{(a_0 + 1)^2 - 1}$

$\sqrt{11} = \sqrt{a_0^2 + 2}$  ;  $\sqrt{12} = \sqrt{a_0^2 + a_0}$  ;  $\sqrt{15} = \sqrt{(a_0 + 1)^2 - 1}$

$\sqrt{27} = \sqrt{a_0^2 + 2}$  ;  $\sqrt{30} = \sqrt{a_0^2 + a_0}$  ;  $\sqrt{35} = \sqrt{(a_0 + 1)^2 - 1}$  ..ont une période de longueur 2

Cherchons les nombres inférieurs à 100 dont la fraction continue a une période de longueur 2

Soit  $a_0$  et  $n$  des entiers supérieurs ou égaux à 1. Considérons  $x = [a_0, n, 2a_0, n, 2a_0, \dots]$ . Nous savons que la fraction continue converge, ce nombre existe, il est limite de la suite  $(r_n)$  telle que

$$r_{n+1} = a_0 + \frac{1}{n + \frac{1}{a_0 + r_n}}$$



il est donc solution positive de l'équation :  $x = a_0 + \frac{1}{n + \frac{1}{a_0 + x}}$  c'est à dire  $x - a_0 = \frac{a_0 + x}{n(a_0 + x) + 1}$

$$\text{soit } n(x^2 - a_0^2) = 2a_0$$

mais la solution cherchée doit être dans  $[a_0, a_0 + 1[$ , il est donc nécessaire que  $\frac{2a_0}{n} < 2a_0 + 1$

c'est à dire

$$a_0 > \frac{n}{2(n-1)}$$

pour  $n = 1$  ;  $x^2 = a_0^2 + 2a_0 = (a_0 + 1)^2 - 1$  on obtient  $\sqrt{3}, \sqrt{8}, \sqrt{15}, \sqrt{24}, \sqrt{35}, \sqrt{48}, \sqrt{63}, \sqrt{80}, \sqrt{99}$

pour  $n = 2$  ;  $x^2 = a_0^2 + a_0$  ce qui convient voir  $\sqrt{6}, \sqrt{12}, \sqrt{20}, \sqrt{30}, \sqrt{42}, \sqrt{56}, \sqrt{72}, \sqrt{90}$

pour  $n = 3$  ;  $3(x^2 - a_0^2) = 2a_0$  .

Remarque : pour  $n \geq 3$ ,  $\frac{n}{2(n-1)} < 1$  est vrai ainsi toute solution  $x$  est dans  $[a_0, a_0 + 1[$

$$\begin{aligned} a_0 \text{ multiple de } 3 ; a_0 = 3k \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)} & \quad \text{pour } a_0 = 3, x = \sqrt{11} \\ & \quad \text{pour } a_0 = 6, x = \sqrt{40} \\ & \quad \text{pour } a_0 = 9, x = \sqrt{87} \end{aligned}$$

pour  $n = 4$  ;  $4(x^2 - a_0^2) = 2a_0$ , c'est à dire  $2(x^2 - a_0^2) = a_0$

pour  $a_0 = 2, 4$  on obtient  $\sqrt{6}$  et  $\sqrt{18}$

pour  $a_0 = 6$  on obtient  $\sqrt{39}$

pour  $a_0 = 8$  on obtient  $\sqrt{68}$

pour  $n = 5$  ;  $5(x^2 - a_0^2) = 2a_0$

pour  $a_0 = 5$ , on obtient  $\sqrt{27}$

pour  $n = 6$  ;  $6(x^2 - a_0^2) = 2a_0$

pour  $a_0 = 3$ , on obtient  $\sqrt{10}$  qui ne convient pas

pour  $a_0 = 6$ , on obtient  $\sqrt{38}$

pour  $a_0 = 9$ , on obtient  $\sqrt{84}$

pour  $n = 7$  ;  $7(x^2 - a_0^2) = 2a_0$

pour  $a_0 = 7$ , on obtient  $\sqrt{51}$

pour  $a_0 = 6$ , on obtient  $\sqrt{38}$

pour  $n = 8$  ;  $8(x^2 - a_0^2) = 2a_0$

pour  $a_0 = 4$ , on obtient  $\sqrt{17}$  qui ne convient pas

pour  $a_0 = 8$ , on obtient  $\sqrt{65}$  qui ne convient pas

pour  $n = 9$  ;  $9(x^2 - a_0^2) = 2a_0$

pour  $a_0 = 9$ , on obtient  $\sqrt{83}$

Conclusion, nous avons trouvé tous les entiers non carrés parfaits et inférieurs à 100 dont la fraction continue a une période de longueur 2. Sur le même principe, on peut trouver les autres nombres d'autres périodes particulières et prouver diverses conjectures.

Bibliographie : Les trois articles de François Jarboeuf parus dans les trois premiers numéros de "QUADRATURE".

*Trouver la commune mesure, s'il y en a une, entre fig. 154. la diagonale et le côté du carré.*

Soit ABCG un carré quelconque, AC sa diagonale.

Il faut d'abord porter CB sur CA autant de fois qu'il peut y être contenu, et pour cela soit décrit du centre C et du rayon CB le demi-cercle DBE : on voit que CB est contenu une fois dans AC avec le reste AD ; le résultat de la première opération est donc le quotient 1 avec le reste AD, qu'il faut comparer avec BC ou son égale AB.

On peut prendre  $AF=AD$ , et porter réellement AF sur AB ; on trouveroit qu'il y est contenu deux fois avec un reste : mais comme ce reste et les suivants vont en diminuant, et que bientôt ils échapperoient par leur petitesse, ce ne seroit là qu'un moyen mécanique imparfait, d'où l'on ne pourroit rien conclure pour décider si les lignes AC, CB, ont entre elles ou n'ont pas une commune mesure ; or il est un moyen très-simple d'éviter les lignes décroissantes et de n'avoir à opérer que sur des lignes qui restent toujours de la même grandeur.

En effet, l'angle ABC étant droit, AB est une tangente et AE une sécante menée du même point ; de sorte qu'on a  $AD:AB :: AB:AE$ . Ainsi dans la seconde opération, qui consiste à comparer AD avec AB, on peut, au lieu du rapport de AD à AB, prendre celui de AB à AE : or AB ou son égale CD est contenue deux fois dans AE avec le reste AD ; donc le résultat de la seconde opération est le quotient 2 avec le reste AD qu'il faut comparer à AB.

La troisième opération, qui consiste à comparer AD avec AB, se réduira de même à comparer AB ou son égale CD avec AE, et on aura encore 2 pour quotient et AD pour reste.

De là il résulte que l'opération n'aura pas de fin, et qu'ainsi il n'y a pas de commune mesure entre la diagonale et le côté du carré ; vérité qui étoit déjà connue par l'arithmétique ( puisque ces deux lignes sont entre elles  $:: \sqrt{2}:1$  ), mais qui acquiert un plus grand degré de clarté par la résolution géométrique.

*Scholie.* Il n'est donc pas possible non plus de trouver le rapport exact en nombres de la diagonale au côté du carré ; mais on peut en approcher tant qu'on voudra au moyen de la fraction continue qui est égale à ce rapport. La première opération a donné pour quotient 1 ; la seconde et toutes les autres à l'infini donnent 2 ; ainsi la fraction dont il s'agit est  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ , etc. à l'infini.

Par exemple, si on calcule cette fraction jusqu'au quatrième terme inclusivement, on trouve que sa valeur est  $1 \frac{11}{27}$  ou  $\frac{38}{27}$  ; de sorte que le rapport approché de la diagonale au côté du carré est  $:: 41:27$ . On trouveroit un rapport plus approché en calculant un plus grand nombre de termes.

**LES FRACTIONS CONTINUES DES RACINES CARREES DES  
PREMIERS ENTIERS NATURELS**

$$\sqrt{2} : [1, 2, 2, \dots]$$

$$\sqrt{3} : [1, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{5} : [2, 4, 4, \dots]$$

$$\sqrt{6} : [2, 2, 4, 2, 4, \dots]$$

$$\sqrt{7} : [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$$

$$\sqrt{8} : [2, 1, 4, 1, 4, \dots]$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{10} : [3, 6, 6, \dots]$$

$$\sqrt{11} : [3, 3, 6, 3, 6, \dots]$$

$$\sqrt{12} : [3, 2, 6, 2, 6, \dots]$$

$$\sqrt{13} : [3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, \dots]$$

$$\sqrt{14} : [3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, \dots]$$

$$\sqrt{15} : [3, 1, 6, 1, 6, \dots]$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{17} : [4, 8, 8, \dots]$$

$$\sqrt{18} : [4, 4, 8, 4, 8, \dots]$$

$$\sqrt{19} : [4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, \dots]$$

$$\sqrt{20} : [4, 2, 8, 2, 8, \dots]$$

$$\sqrt{21} : [4, 1, 1, 2, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 1, 8, \dots]$$

$$\sqrt{22} : [4, 1, 2, 4, 2, 1, 8, 1, 2, 4, 2, 1, 8, \dots]$$

$$\sqrt{23} : [4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, \dots]$$

$$\sqrt{24} : [4, 1, 8, 1, 8, \dots]$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{26} : [5, 10, 10, 10, \dots]$$

$$\sqrt{27} : [5, 5, 10, 5, 10, \dots]$$

$$\sqrt{28} : [5, 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10, \dots]$$

$$\sqrt{29} : [5, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, \dots]$$

$$\sqrt{30} : [5, 2, 10, 2, 10, \dots]$$

$$\sqrt{31} : [5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, \dots]$$

$$\sqrt{32} : [5, 1, 1, 1, 10, 1, 1, 1, 10, \dots]$$

$$\sqrt{33} : [5, 1, 2, 1, 10, 1, 2, 1, 10, \dots]$$

$$\sqrt{34} : [5, 1, 4, 1, 10, 1, 4, 1, 10, \dots]$$

$$\sqrt{35} : [5, 1, 10, 1, 10, \dots]$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{37} : [6, 12, 12, \dots]$$

$$\sqrt{38} : [6, 6, 12, 6, 12, \dots]$$

$$\sqrt{39} : [6, 4, 12, 4, 12, \dots]$$

$$\sqrt{40} : [6, 3, 12, 3, 12, \dots]$$

$$\sqrt{41} : [6, 2, 2, 12, 2, 2, 12, \dots]$$

$$\sqrt{42} : [6, 2, 12, 2, 12, \dots]$$

$$\sqrt{43} : [6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12, \dots]$$

$$\sqrt{44} : [6, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12, \dots]$$

$$\sqrt{45} : [6, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 12, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 12, \dots]$$

$$\sqrt{46} : [6, 1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12, 1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12, \dots]$$

$$\sqrt{47} : [6, 1, 5, 1, 12, 1, 5, 1, 12, \dots]$$

$$\sqrt{48} : [6, 1, 12, 1, 12, \dots]$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{50} : [7, 14, 14, \dots]$$

$$\sqrt{51} : [7, 7, 14, 7, 14, \dots]$$

$$\sqrt{52} : [7, 4, 1, 2, 1, 4, 14, 4, 1, 2, 1, 4, 14, \dots]$$

$$\sqrt{53} : [7, 3, 1, 1, 3, 14, 3, 1, 1, 3, 14, \dots]$$

$$\sqrt{54} : [7, 2, 1, 6, 1, 2, 14, 2, 1, 6, 1, 2, 14, \dots]$$

$$\sqrt{55} : [7, 2, 2, 2, 14, 2, 2, 2, 14, \dots]$$

$$\sqrt{56} : [7, 2, 14, 2, 14, \dots]$$

$$\sqrt{57} : [7, 1, 1, 4, 1, 1, 14, 1, 1, 4, 1, 1, 14, \dots]$$

$$\sqrt{58} : [7, 1, 1, 1, 1, 1, 14, 1, 1, 1, 1, 1, 14, \dots]$$

$$\sqrt{59} : [7, 1, 2, 7, 2, 1, 14, 1, 2, 7, 2, 1, 14, \dots]$$

$$\sqrt{60} : [7, 1, 2, 1, 14, 1, 2, 1, 14, \dots]$$

$$\sqrt{61} : [7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14, \dots]$$

$$\sqrt{62} : [7, 1, 6, 1, 14, 1, 6, 1, 14, \dots]$$

$$\sqrt{63} : [7, 1, 14, 1, 14, \dots]$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{65} : [8, 16, 16, \dots]$$

$$\sqrt{66} : [8, 8, 16, 8, 16, \dots]$$

$$\sqrt{67} : [8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16, \dots]$$

$$\sqrt{68} : [8, 4, 16, 4, 16, \dots]$$

$$\sqrt{69} : [8, 3, 3, 1, 4, 1, 3, 3, 16, 3, 3, 1, 4, 1, 3, 3, 16, \dots]$$

$$\sqrt{70} : [8, 2, 1, 2, 1, 2, 16, 2, 1, 2, 1, 2, 16, \dots]$$

$$\sqrt{71} : [8, 2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16, 2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16, \dots]$$

$$\sqrt{72} : [8, 2, 16, 2, 16, \dots]$$

$$\sqrt{73} : [8, 1, 1, 5, 5, 1, 1, 16, 1, 1, 5, 5, 1, 1, 16, \dots]$$

$$\sqrt{74} : [8, 1, 1, 1, 1, 16, 1, 1, 1, 1, 16, \dots]$$

$$\sqrt{75} : [8, 1, 1, 1, 16, 1, 1, 1, 16, \dots]$$

$$\sqrt{76} : [8, 1, 2, 1, 1, 5, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 16, 1, 2, 1, 1, 5, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 16, \dots]$$

$$\sqrt{77} : [8, 1, 3, 2, 3, 1, 16, 1, 3, 2, 3, 1, 16, \dots]$$

$$\sqrt{78} : [8, 1, 4, 1, 16, 1, 4, 1, 16, \dots]$$

$$\sqrt{79} : [8, 1, 7, 1, 16, 1, 7, 1, 16, \dots]$$

$$\sqrt{80} : [8, 1, 16, 1, 16, \dots]$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{82} : [9, 18, 18, \dots]$$

$$\sqrt{83} : [9, 9, 18, 9, 18, \dots]$$

$$\sqrt{84} : [9, 6, 18, 6, 18, \dots]$$

$$\sqrt{85} : [9, 4, 1, 1, 4, 18, 4, 1, 1, 4, 18, \dots]$$

$$\sqrt{86} : [9, 3, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 3, 18, 3, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 3, 18, \dots]$$

$$\sqrt{87} : [9, 3, 18, 3, 18, \dots]$$

$$\sqrt{88} : [9, 2, 1, 1, 1, 2, 18, 2, 1, 1, 1, 2, 18, \dots]$$

$$\sqrt{89} : [9, 2, 3, 3, 2, 18, 2, 3, 3, 2, 18, \dots]$$

$$\sqrt{90} : [9, 2, 18, 2, 18, \dots]$$

$$\sqrt{91} : [9, 1, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 18, 1, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 18, \dots]$$

$$\sqrt{92} : [9, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 18, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 18, \dots]$$

$$\sqrt{93} : [9, 1, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 1, 18, 1, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 1, 18, \dots]$$

$$\sqrt{94} : [9, 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18, 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18, \dots]$$

$$1, 1, 3, 2, 1, 18, \dots]$$

$$\sqrt{95} : [9, 1, 2, 1, 18, 1, 2, 1, 18, \dots]$$

$$\sqrt{96} : [9, 1, 3, 1, 18]$$

$$\sqrt{97} : [9, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18, \dots]$$

$$\sqrt{98} : [9, 1, 8, 1, 18, 1, 8, 1, 18, \dots]$$

$$\sqrt{99} : [9, 1, 18, 1, 18, \dots]$$

$$\sqrt{100} = 10$$

Cet article est paru (en deux parties) avec une forme différente dans le bulletin "Maths en Seine" de la régionale Haute Normandie de l'APMEP (n° 15, juin 1998 et n° à paraître).

### I. Position du problème

#### 1) Une erreur ...énervante

Voici un exemple de "calcul" qu'on peut lire parfois dans des copies

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$$

$$\cos x = -\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ donc } x = \frac{3\pi}{4} + k(2\pi)$$

Bien sûr, une solution convenable a été obtenue ... moyennant une faute de calcul et une omission. Mais après tout, quand a-t-on :  $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$  ?

ou plus précisément :

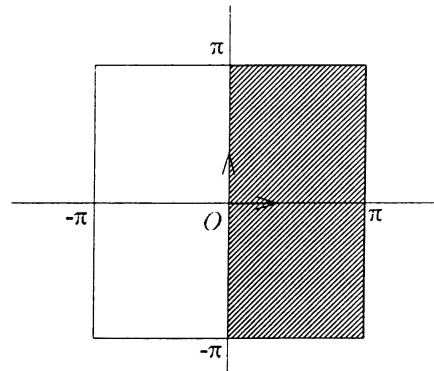
**Quel est l'ensemble des couples  $(x,y)$  tels que :  $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$  ?**

#### 2) Restriction de l'ensemble d'étude.

La périodicité de la fonction cosinus permet d'établir que

si  $(x,y) \in \mathcal{S}$  alors  $(x+2\pi, y+2\pi) \in \mathcal{S}$ , donc on peut restreindre l'étude à  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$

De même, la parité de la fonction cosinus permet d'établir que  $(x,y) \in \mathcal{S}$  alors  $(-x,-y) \in \mathcal{S}$ , donc on peut restreindre l'étude à  $[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$



L'ensemble des points  $M(x,y)$  est invariant par la translation de vecteur  $\vec{u}(2\pi, 2\pi)$  et est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

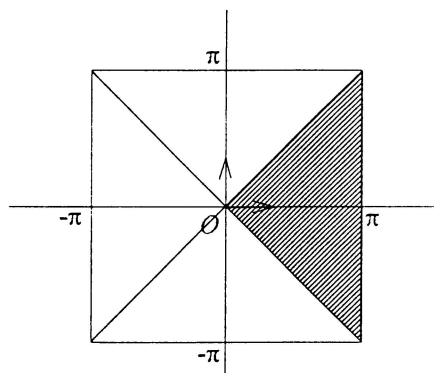
Remarque : De plus l'équation étant symétrique en x et y, il, est immédiat que :

$$\text{Si } (x,y) \in \mathcal{S} \text{ alors } (y,x) \in \mathcal{S}$$

donc la droite d'équation  $y = x$  est axe de symétrie de  $\mathcal{S}$ .

On en déduit puisque O est centre de symétrie que la droite d'équation  $y = -x$  est aussi axe de symétrie, on pourrait donc réduire l'ensemble d'étude à :

$$\{(x,y) \in [0; \pi] \times [-\pi; \pi]; -x \leq y \leq x\}$$



Cependant dans les calculs qui vont suivre, l'étude sera faite sur  $[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ .

Dès qu'on aura représenté l'ensemble des points  $M(x,y)$  pour  $(x,y) \in S \cap ([0, \pi] \times [-\pi, \pi])$ , il suffira d'effectuer une symétrie de centre O puis autant de translations de vecteur  $\vec{u}(2\pi, 2\pi)$  ou  $-\vec{u}(-2\pi, -2\pi)$  que l'on voudra, pour représenter une partie de l'ensemble S.

## II. Détermination de l'ensemble $E = \{ M(x,y) / \cos(x+y) = \cos x + \cos y \}$

Soit S l'ensemble des couples de solutions.

### 1) Existence de solutions

Comme on a deux variables x et y, l'idée est de considérer l'une d'elles comme un paramètre. Soit la fonction f définie par :  $f_a(x) = \cos(x+a) - \cos x - \cos a$  où  $a \in [-\pi, \pi]$ <sup>1</sup>. On doit chercher les solutions de l'équation  $f_a(x) = 0$  sur  $[0, \pi]$ . Il suffit d'étudier les variations de la fonction  $f_a$ .

On a :  $f'_a(x) = -\sin(x+a) + \sin x$

$$\text{D'où } f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+a = x+k2\pi \\ x+a = \pi-x+k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x = -a+k2\pi \\ x = \frac{\pi-a}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi-a}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

On peut considérer  $a \neq 0$  car :  $\forall x \in [0, \pi] f_0(x) = \cos x - \cos x - \cos 0 = -1$  donc  $f_0$  ne s'annule pas.

1<sup>er</sup> cas :  $a = -\pi$  ou  $a = \pi$

Alors  $f'_a(x) = 2\sin x$  s'annule en 0 et  $\pi$ ,  $f_a(x) = -2\cos x + 1$ , cette fonction s'annule sur  $[0; \pi]$  uniquement en  $x = \frac{\pi}{3}$

2<sup>ème</sup> cas :  $-\pi < a < \pi$  et  $a \neq 0$

Alors  $0 \leq \frac{\pi-a}{2} < \pi$  alors  $\frac{\pi-a}{2}$  est l'unique réel de  $[0, \pi]$  en lequel la dérivée s'annule.

$f'_a(0) = -\sin a$  et  $f'_a(\pi) = \sin a$ , donc si  $a \neq \pi$  et  $a \neq -\pi$   $f'_a(0) \cdot f'_a(\pi) < 0$ ,  $f'_a$  s'annule en changeant de signe en  $\frac{\pi-a}{2}$  : puisque  $f_a$  a un extremum en  $\frac{\pi-a}{2}$ , plus précisément un minimum si  $a \in ]0, \pi[$ , un maximum si  $a \in ]-\pi, 0[$

• Si  $0 < a < \pi$

x	0		$\frac{\pi-a}{2}$		$\pi$
$f'_a(x)$	$-\sin a$	-	0	+	$\sin a$
$f_a(x)$	-1		$f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right)$		$-2\cos a + 1$

Nécessairement  $f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right) < 0$ , donc le nombre de solutions de l'équation  $f_a(x) = 0$  dépend du signe de  $-2\cos a + 1$

$$\text{Sur } ]0; \pi[ : -2\cos a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos a \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq a < \pi$$

<sup>1</sup>Comme y est devenu un paramètre, on l'appelle a. y désignera l'image de x par la fonction  $f_a$ .

On obtient alors les résultats suivants :

Valeurs de $a$	Nombre de solutions de l'équation $\cos(x+a) - \cos x - \cos a = 0$ sur $[0; \pi]$	Localisation
$0 < a < \frac{\pi}{3}$	pas de solution	
$\frac{\pi}{3} \leq a < \pi$	une unique solution	$\left] \frac{\pi-a}{2}; \pi \right]$

• Si  $-\pi < a < 0$

$x$	0	$\frac{\pi-a}{2}$	$\pi$
$f'_a(x)$	$-\sin a$	+	0
$f_a(x)$	-1	$f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right)$	$-2\cos a + 1$

Le nombre de solutions de l'équation  $f_a(x) = 0$  dépend du signe de  $f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right)$  et de celui de

$-2\cos a + 1$

Sur  $]-\pi; 0[$  :  $-2\cos a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos a \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\pi \leq a \leq -\frac{\pi}{3}$

Il reste à déterminer le signe de l'extremum  $f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right)$

$$f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi+a}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi-a}{2}\right) - \cos a = -2\sin\left(\frac{a}{2}\right) - \cos a = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{a}{2}\right) - 1$$

Posons  $X = \sin\left(\frac{a}{2}\right)$  alors :

$$f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 2X - 1 > 0 \Leftrightarrow X < \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ ou } X > \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{a}{2}\right) < \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin\left(\frac{a}{2}\right) > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{a}{2}\right) < \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ car } \frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$$

La fonction sinus étant continue et strictement croissante sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , elle définit une

bijection de  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $[-1, 1]$ . Or  $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \in [-1, 1]$  donc il existe un unique réel  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

tel que  $\sin \alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ .

<sup>2</sup>Bien sûr, il s'agit de :  $\alpha = \text{Arc sin}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ , mais cette fonction n'est pas au programme de Terminale.

Or  $\frac{a}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  donc puisque la fonction sinus est strictement croissante sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $\sin\left(\frac{a}{2}\right) < \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{a}{2}\right) < \sin \alpha \Leftrightarrow \frac{a}{2} < \alpha \Leftrightarrow a < 2\alpha$

De plus :  $2\alpha \approx -0,75$  donc  $2\alpha > -\frac{\pi}{3}$ . On obtient alors les résultats suivants :

Valeurs de a	Signes de $f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right)$ et de $-2\cos a + 1$	Nombre de solutions de l'équation $\cos(x+a) - \cos x - \cos a = 0$ sur $[0; \pi]$	Localisation
$-\pi < a < -\frac{\pi}{3}$	$f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right) > 0, -2\cos a + 1 > 0$	une unique solution	$\left]0; \frac{\pi-a}{2}\right[$
$-\frac{\pi}{3} \leq a < 2\alpha$	$f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right) > 0, -2\cos a + 1 \leq 0$	deux solutions distinctes	$\left]0; \frac{\pi-a}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi-a}{2}; \pi\right[$
$a = 2\alpha$	$f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right) < 0, -2\cos a + 1 < 0$	une unique solution	$x = \frac{\pi-a}{2}$
$2\alpha < a < 0$	$f_a\left(\frac{\pi-a}{2}\right) < 0, -2\cos a + 1 < 0$	pas de solution	

Conclusion :  $\forall y \in [-\pi; 2\alpha] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right], \exists x \in [0; \pi], \cos(x+y) = \cos x + \cos y$

Alors par la symétrie de centre O, on a :

$$\forall y \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup [-2\alpha; \pi], \exists x \in [-\pi; 0], \cos(x+y) = \cos x + \cos y$$

Cette équation admet donc une infinité de solutions (x;y), et suivant les valeurs de y, on a zéro, une, ou deux valeurs de x.

## 2) Représentation graphique de l'ensemble des solutions.

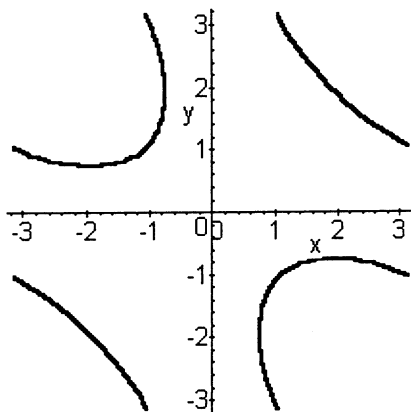
Pour y fixé, on peut calculer une valeur approchée de la ou des valeurs de x telle(s) que  $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$ , par exemple par la méthode de dichotomie. En faisant prendre à y des valeurs dans  $[-\pi; \pi]$ , on obtient ainsi des points de la courbe définie par cette équation<sup>3</sup>.

On peut aussi utiliser Maple et lui demander un tracé de fonction implicite :

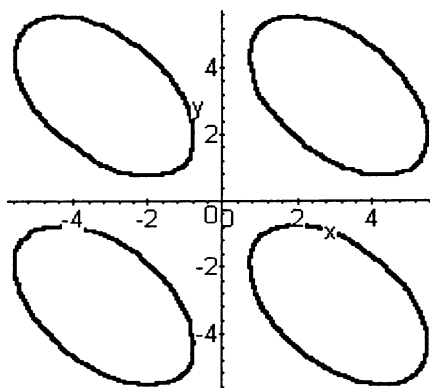
<sup>3</sup> La méthode de dichotomie nécessite la connaissance de bornes a et b entre lesquelles l'équation admet une unique solution : l'étude précédente donne ces bornes et le nombre de solutions en fonction de y.



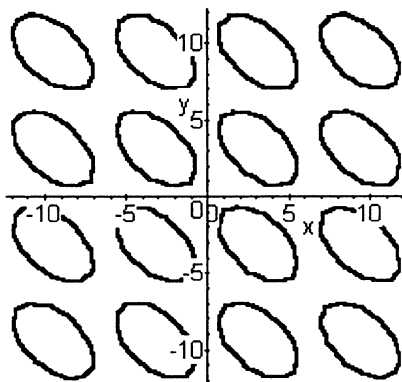
> with(plots):implicitplot(cos(x+y)=cos(x)+cos(y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi);



> implicitplot(cos(x+y)=cos(x)+cos(y),x=-2\*Pi..2\*Pi,y=-2\*Pi..2\*Pi);



> implicitplot(cos(x+y)=cos(x)+cos(y),x=-2\*Pi..2\*Pi,y=-2\*Pi..2\*Pi);



Les courbes ressemblent à des ellipses, ont l'aspect d'ellipses mais ...

### 3) S'agit-il d'ellipses ?

Les droites d'équations  $y = x$ ,  $y = -x$  étant des axes de symétrie de la figure, considérons le nouveau repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  où  $\vec{u}(1;-1)$  et  $\vec{v}(1;1)$

$$M(x,y) \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} = x \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2} + y \frac{\vec{u} - \vec{v}}{2} = \frac{x-y}{2} \vec{u} + \frac{x+y}{2} \vec{v}$$

$$M(X; Y) \text{ dans } (O, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{x-y}{2} \\ Y = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

$$M \in E \Leftrightarrow \cos(x+y) = \cos x + \cos y$$

$$\Leftrightarrow \cos(2Y) = \cos(X+Y) + \cos(Y-X)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2Y) = 2\cos Y \cos X$$

$$(\cos p + \cos q = 2\cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2})$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 Y - 2\cos Y \cos X - 1 = 0$$

$$\Delta' = \cos^2 X + 2$$

$$\cos Y = \frac{\cos X \pm \sqrt{\cos^2 X + 2}}{2}$$

$$Y = \pm \text{Arccos}\left(\frac{\cos X \pm \sqrt{\cos^2 X + 2}}{2}\right) [2\pi]$$

Déterminons les points d'intersection avec l'axe (OX) :

$$Y = 0 \text{ donne } \cos X \pm \sqrt{\cos^2 X + 2} = 2$$

$$\text{puis, successivement : } 2 - \cos X = \sqrt{\cos^2 X + 2} \quad \text{car } 2 - \cos X > 0$$

$$4 - 4\cos X + \cos^2 X = \cos^2 X + 2$$

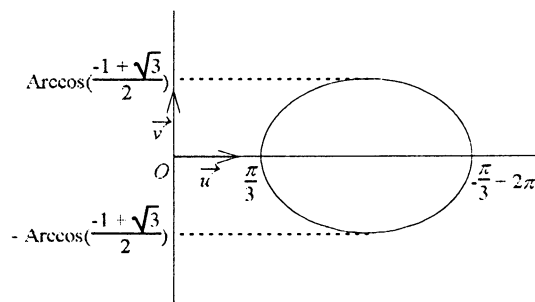
$$4\cos X = 2$$

$$\cos X = \frac{1}{2} \text{ soit } X = \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{ou} \quad X = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{De même, si } X = 0, \text{ on trouve } \cos Y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} < -1$$

$$\text{soit } Y = \pm \text{Arccos}\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) [2\pi]$$

La courbe obtenue avec Maple, pour  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $-2\pi \leq y \leq 0$ , peut être représentée ainsi dans le nouveau repère :



S'il s'agit d'une ellipse, elle doit donc avoir pour équation, dans  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  :

$$\frac{(X - \pi)^2}{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\text{Arccos}\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} = 1$$

$$Y^2 = \left(\text{Arccos}\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{X^2 - 2\pi X + \pi^2}{\frac{4\pi^2}{9}}\right)$$

$$Y^2 = \frac{9\text{Arccos}^2\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)}{4\pi^2} \left(-X^2 + 2\pi X - \frac{5\pi^2}{9}\right)$$

$$Y = \pm \frac{3\text{Arccos}\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)}{2\pi} \sqrt{\left(-X^2 + 2\pi X - \frac{5\pi^2}{9}\right)}$$

Par un tableau de valeurs, on conjecture que la réponse est ... non !

#### 4) Et si on trouvait une formule ?

- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos x + \cos y$   
 $\Leftrightarrow -\sin x \sin y = \cos x + \cos y - \cos x \cos y$   
 $\Rightarrow \sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 x \cos^2 y + 2\cos x \cos y - 2\cos x \cos^2 y - 2\cos^2 x \cos y$  (1)  
(1)  $\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 y) - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 x \cos^2 y - 2\cos x \cos y + 2\cos x \cos^2 y + 2\cos^2 x \cos y = 0$   
 $\Leftrightarrow (2\cos x - 2)\cos^2 y + (2\cos^2 x - 2\cos x)\cos y + 1 - 2\cos^2 x = 0$   
 $\Delta' = (\cos^2 x - \cos x)^2 - (2\cos x - 2)(1 - 2\cos^2 x)$   
 $= \cos^4 x - 2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x + 2 + 4\cos^3 x - 4\cos^2 x$   
 $= \cos^4 x + 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - 2\cos x + 2$

Posons  $X = \cos x$  et soit  $P(X) = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2X + 2 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 2X - 2)$

Comme  $(X - 1)(X + 1) \leq 0$  car  $X = \cos x \in [-1; 1]$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -1 \text{ ou } X^2 + 2X - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ ou } \cos x = -1 \text{ ou } -1 - \sqrt{3} \leq \cos x \leq -1 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 [2\pi] \text{ ou } x = \pi [2\pi]) \text{ ou } (-\pi \leq x \leq -\text{Arccos}(-1 + \sqrt{3})) \text{ ou } (\text{Arccos}(-1 + \sqrt{3}) \leq x \leq \pi)$$

On a alors  $\cos y = \frac{-\cos^2 x + \cos x \pm \sqrt{(\cos^2 x - 1)(\cos^2 x + 2\cos x - 2)}}{2(\cos x - 1)}$

et  $y = \pm \text{Arccos}\left[\frac{1}{2}(-\cos x \pm \frac{|\sin x| \sqrt{\cos^2 x + 2\cos x - 2}}{\cos x - 1})\right] [2\pi]$

Sur  $]0; \pi]$ ,  $y = \pm \text{Arccos}\left[\frac{1}{2}(-\cos x \pm \frac{|\cos \frac{x}{2}| \sqrt{\cos^2 x + 2\cos x - 2}}{-\sin \frac{x}{2}})\right] \quad (2)$

Il faut vérifier que les solutions trouvées pour  $\cos y$  sont dans  $[-1; 1]$ , c'est-à-dire placer -1 et 1 par rapport aux racines de  $P(Y) = (2\cos x - 2)Y^2 + (2\cos^2 x - 2\cos x)Y + 1 - 2\cos^2 x$

$$\text{or } P(1) = 2\cos x - 2 + 2\cos^2 x - 2\cos x + 1 - 2\cos^2 x = -1$$

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2\cos x - 2 - 2\cos^2 x + 2\cos x + 1 - 2\cos^2 x \\ &= -4\cos^2 x + 4\cos x - 1 \\ &= -(2\cos x - 1)^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } P \text{ a pour maximum } P\left(\frac{-b}{2a}\right) = P\left(\frac{-2\cos^2 x + 2\cos x}{2(2\cos x - 2)}\right) = P\left(\frac{-2\cos x(\cos x - 1)}{4(\cos x - 1)}\right) = P\left(-\frac{\cos x}{2}\right)$$

Y	$-\infty$	$-1$	$-\frac{\cos x}{2}$	$1$
P(Y)	$\begin{array}{c} \nearrow \emptyset \rightarrow \geq 0 \rightarrow \searrow \emptyset \\ \leftarrow \emptyset \rightarrow \end{array}$			
	$-(2\cos x - 1)^2 \leq 0$			$-1$

$$\begin{aligned} \text{avec } P\left(-\frac{\cos x}{2}\right) &= (2\cos x - 2)\frac{1}{4}\cos^2 x + (2\cos^2 x - 2\cos x)\left(-\frac{\cos x}{2}\right) + 1 - 2\cos^2 x \\ &= -\frac{1}{2}(\cos^3 x + 3\cos^2 x - 2) \\ &= -\frac{1}{2}(\cos x + 1)(\cos^2 x + 2\cos x - 2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc  $P(Y)$  s'annule pour une ou deux valeurs comprises entre  $-1$  et  $1$ .

Attention : on n'a pas d'équivalence ; on a des solutions "parasites" ... qui n'ont pas été éliminées.

On peut seulement affirmer que les couples  $(x; y)$  solutions de  $\cos(x + y) = \cos x + \cos y$  dans  $[0; \pi] \times [-\pi; \pi]$  vérifient la formule (2).

• On essaie à nouveau en posant  $t = \tan \frac{x}{2}$  et  $u = \tan \frac{y}{2}$

$$\cos(x + y) = \cos x + \cos y \Leftrightarrow \cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos x + \cos y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{1-u^2}{1+u^2} - \frac{2t}{1+t^2} \frac{2u}{1+u^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + u^2 + 4tu + 1 - 3t^2 u^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3t^2)u^2 + 4tu + 1 + t^2 = 0$$

$$\text{Si } t^2 = \frac{1}{3} \text{ alors } u = \frac{-1 - \frac{1}{3}}{\pm 4\frac{\sqrt{3}}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et dans ce cas, } y = \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{Si } t^2 \neq \frac{1}{3} \text{ alors } \Delta' = 4t^2 - (1 + t^2)(1 - 3t^2) = 3t^4 + 6t^2 - 1$$

$$\delta' = 9 + 3 = (2\sqrt{3})^2$$

$\Delta'$  possède donc deux racines  $t^2 = -3 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} = -1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$  d'où  $\Delta' = 3(t^2 + 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3})(t^2 + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3})$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - (\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1} \text{ ou } t \geq \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}$$

$$\text{Donc } \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} \leq -\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1} \text{ ou } \tan \frac{x}{2} \geq \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}$$

Or  $-\pi \leq x \leq \pi$  d'où  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$  et  $x \rightarrow \tan \frac{x}{2}$  est croissante sur  $]-\pi, \pi[$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\beta \text{ ou } x \leq \beta \text{ en ayant posé } \beta = 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}$$

Quel est cet angle mystérieux ?

$$\beta = 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1} \in [0; \frac{\pi}{2}] \text{ d'où, en posant } \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1} = \tan \frac{\beta}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{1 - \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}^2}{1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}^2} = \frac{2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} - 1 \text{ et ainsi } \beta = \text{Arccos}(\sqrt{3} - 1)$$

$$\text{De même, } \beta = -2\text{Arcsin}\frac{1 - \sqrt{3}}{2} = -2\alpha \text{ (angle obtenu au II.1)}$$

$$\text{On a alors pour } x \leq -\beta \text{ ou } x \geq \beta : u = \frac{-2t \pm \sqrt{3t^4 + 6t^2 - 1}}{1 - 3t^2}, t \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \frac{y}{2} = \frac{-2\tan \frac{x}{2} \pm \sqrt{3\tan^4 \frac{x}{2} + 6\tan^2 \frac{x}{2} - 1}}{1 - 3\tan^2 \frac{x}{2}} \quad \tan \frac{x}{2} \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Soit } y = 2\text{Arctan}\left(\frac{-2\tan \frac{x}{2} \pm \sqrt{3\tan^4 \frac{x}{2} + 6\tan^2 \frac{x}{2} - 1}}{1 - 3\tan^2 \frac{x}{2}}\right) [2\pi] \text{ et } \tan \frac{x}{2} \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Et si } \tan \frac{x}{2} \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} [2\pi] & \text{pour } \tan \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -\frac{\pi}{3} [2\pi] & \text{pour } \tan \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

### 5) Que disent les logiciels de calcul formel ?

- Pour la TI 92 :

$$y = \frac{2\text{Arcsin}\left(\frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}}\right) - x + 2(2k+1)\pi}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \leq 2$$

$$\text{ou } y = \frac{-2\text{Arcsin}\left(\frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}}\right) + x - 4k\pi}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \leq 2$$

- Pour Maple Release 4 :

$$y = 2\text{Arctan}\left(\frac{\sin x \pm \sqrt{\sin^2 x - 2\cos x + 1}}{-2\cos x + 1}\right) = 2\text{Arctan}\left(\frac{\sin x \pm \sqrt{-\cos^2 x - 2\cos x + 2}}{-2\cos x + 1}\right)$$

- Pour la Casio 9990 GC :

$$y = 2\text{Arctan}\left(\frac{\sin x}{-2\cos x + 1} \pm \frac{\sqrt{\sin^2 x - (2\cos x - 1)}}{-2\cos x + 1}\right) + 2k\pi$$

- Pour Mathematica :

$$y = \pm \text{Arccos}\left(\frac{\cos x - \cos^2 x \pm \sqrt{\sin^2 x(1 - 2\cos x + \sin^2 x)}}{2 - 2\cos x}\right)$$

On ne retrouve pas immédiatement l'une des formules obtenues «à la main», mais reprenons la formule donnée par Maple et posons  $t = \tan\frac{x}{2}$  ; alors  $y = 2\text{Arctan } u$

$$\text{où } u = \frac{\sin x \pm \sqrt{\sin^2 x - 2\cos x + 1}}{-2\cos x + 1} = \frac{2t}{1+t^2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 - 2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1}}{-2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \frac{-2t \pm \sqrt{3t^4 + 6t^2 - 1}}{-3t^2 + 1}$$

$$\text{donc } y = 2\text{Arctan}\left(\frac{-2t \pm \sqrt{3t^4 + 6t^2 - 1}}{-3t^2 + 1}\right) = 2\text{Arctan}\left(\frac{-2\tan\frac{x}{2} \pm \sqrt{3\tan^4\frac{x}{2} + 6\tan^2\frac{x}{2} - 1}}{1 - 3\tan^2\frac{x}{2}}\right)$$

C'est l'une des formules établies précédemment.

### III. D'autres équations...pourquoi pas ?

Cherchons les solutions d'équations semblables (mais plus faciles) :

- $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos y + \sin y \cos x - \sin x - \sin y = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\cos y - 1) + \sin y(\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin x \sin^2\frac{y}{2} - 2\sin y \sin^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\sin(x + y) = \sin x + \sin y$$

$$\Leftrightarrow -4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} + \cos\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 [2\pi] \text{ ou } y = 0 [2\pi] \text{ ou } y = -x [2\pi]$$

•  $\tan(x + y) = \tan x + \tan y$

$$\Leftrightarrow \tan x + \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + \tan y)(- \tan x \tan y) = 0 \text{ avec } \tan x \tan y \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -\tan y \text{ ou } \tan x = 0 \text{ ou } \tan y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -y [\pi] \text{ ou } x = 0 [\pi] \text{ ou } y = 0 [\pi]$$

•  $\ln(x + y) = \ln x + \ln y$

$$\Leftrightarrow x + y = xy \quad x > 0, y > 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1} \quad x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; \infty[$$

•  $e^{x+y} = e^x + e^y$

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{e^x}{e^x - 1}, \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right), \quad x > 0$$

•  $(x + y)^n = x^n + y^n \quad (1)$

Etudions la fonction  $f_y$  définie par  $f_y(x) = (x + y)^n - x^n - y^n$

$$f'_y(x) = n(x + y)^{n-1} - nx^{n-1}$$

- Si  $n$  est pair, alors  $n - 1$  est impair et  $f'_y(x) = 0 \Leftrightarrow (x + y)^n = x^{n-1} \Leftrightarrow x + y = x \Leftrightarrow y = 0$

• Si  $y = 0, \forall x \in \mathbb{R}, f_y(x) = 0 : (x; 0)$  est solution de (1)

• Si  $y > 0, x + y > x, (x + y)^{n-1} > x^{n-1}$  car la fonction  $t \rightarrow t^{n-1}$  est croissante  $f'_y(x) > 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'_y(x)$		$+$	
$f_y(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

$x = 0$  est solution unique de  $f_y(x) = 0$

De même si  $y < 0$

Conclusion :  $f_y(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $y = 0$

- Si  $n$  est impair alors  $n - 1$  est pair impair et  $f'_y(x) = 0 \Leftrightarrow (x + y)^{n-1} = x^{n-1}$

$$\Leftrightarrow x + y = x \text{ ou } x + y = -x$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = -2x$$

• Si  $y = 0, \forall x \in \mathbb{R}, f_y(x) = 0 : (x; 0)$  est solution de (1)

• Si  $y > 0$

$x$	$-\infty$	$-y$	$-\frac{y}{2}$	$0$	$+\infty$
$f'_y(x)$		$-$	$0$	$+$	
$f_y(x)$	$+\infty$	$0$	$< 0$	$0$	$+\infty$

On obtient deux solutions  $x = 0$  ou  $x = -y$

De même si  $y < 0$

Conclusion :  $f_y(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $y = 0$  ou  $y = -x$

- $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = xy \quad x \neq 0, y \neq 0, x+y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + xy + x^2 = 0 \quad x \neq 0, y \neq 0, x+y \neq 0$$

$$\Delta = x^2 - 4x^2 < 0 \text{ car } x \neq 0$$

Cette équation n'admet donc pas de solution

On conjecture alors que dans le cas où  $f$  est une fonction impaire, dérivable, définie en zéro, l'équation  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  a pour ensemble de solutions :  $x = 0$  ou  $y = 0$  ou  $y = -x$

Etudions d'autres exemples :

- Si  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow \frac{1+x+y}{1-x-y} = \frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}$$

$$\Leftrightarrow (1+x+y)(1-x)(1-y) = (1+x)(1+y)(1-x-y)$$

$$x \neq 1, y \neq 1, x+y \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 2xy(x+y) = 0 \quad x \neq 1, y \neq 1, x+y \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } y = -x \text{ avec } (x;y) \neq (1;0) \text{ et } (x;y) \neq (0;1)$$

$$(x;y) \neq (1;-1) \text{ et } (x;y) \neq (-1;1)$$

- Si  $f(x) = \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow \text{en posant } X = e^x \text{ et } Y = e^y, \quad X - \frac{1}{X} + Y - \frac{1}{Y} = XY - \frac{1}{XY}$$

$$\Leftrightarrow X^2Y - Y + XY^2 - X = X^2Y^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (X+Y)(XY-1) - (XY-1)(XY+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (XY-1)(X+Y-XY-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow XY = 1 \text{ ou } (X-1)(-Y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = e^{-x} \text{ ou } e^x = 1 \text{ ou } e^y = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -x \text{ ou } x = 0 \text{ ou } y = 0$$

La conjecture semble de plus en plus vraisemblable !

... Hélas ! Considérons la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x^5 - 5x^3$

Alors :  $f(2) + f(-1) = f(1)$  donc  $(2;-1)$  est solution.



La conjecture énoncée est donc fausse.

On peut toutefois la modifier ainsi :

**" Si  $f$  est une fonction impaire, dérivable, définie en zéro, et si sa dérivée est strictement monotone sur  $\mathbb{R}^+$  alors l'équation  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  a pour ensemble de solutions :  
 $x = 0$  ou  $y = 0$  ou  $y = -x$ "**

Il reste ... à la démontrer ou à l'infirmier.

Une autre conjecture est la suivante :

" Existe-t-il une fonction  $f$  telle que l'équation  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  admette un nombre fini non nul de solutions ?"

#### **IV. Bilan**

Dans cette étude, on a finalement :

- résolu des inéquations trigonométriques
- étudié une fonction avec paramètre et déterminé la ou les racines d'une équation à l'aide de l'étude de variations
- étudié la position d'une racine par rapport à -1 et 1
- utilisé les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques
- utilisé un logiciel de calcul formel

Bref, on a "fait des mathématiques" !



**I. Polynômes de Bernstein**

**1) Rappels de probabilité**

a) Loi binomiale

On considère une suite de  $n$  épreuves aléatoires indépendantes ne possédant que deux issues, dénommées échec et succès. À chaque épreuve on associe une variable aléatoire  $X_k$  prenant la valeur 0 en cas d'échec et 1 en cas de succès. On définit alors  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , et  $Z_n = \frac{S_n}{n}$ .  $S_n$  désigne donc le nombre de succès dans la suite des  $n$  épreuves et  $Z_n$  la fréquence de succès. Si la probabilité de succès d'une épreuve est  $p$ , alors dans la suite des  $n$  épreuves indépendantes,

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ avec } q = 1 - p$$

b) Loi faible des grands nombres

• Inégalité de Markov

Soit  $Y$  une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs positives, et  $\lambda$  un réel positif.

$$Y(\Omega) = \{y_0, y_1, \dots, y_k\}.$$

$$E(Y) = \sum_{i=0}^k y_i \cdot P(Y = y_i)$$

$$E(Y) \geq \sum_{y_i \geq \lambda E(Y)} y_i \cdot P(Y = y_i) \\ \geq \lambda \cdot E(Y) \sum_{y_i \geq \lambda E(Y)} P(Y = y_i)$$

Or  $\sum_{y_i \geq \lambda E(Y)} P(Y = y_i) = P(Y \geq \lambda \cdot E(Y))$  soit  $E(Y) \geq \lambda \cdot E(Y) P(Y \geq \lambda \cdot E(Y))$

Donc  $P(Y \geq \lambda \cdot E(Y)) \leq \frac{1}{\lambda}$

• Inégalité de Bienaymé-Tchébichev

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète d'espérance  $E(X)$ , de variance  $\sigma^2$ , prenant un nombre fini de valeurs réelles. Posons  $Y = (X - E(X))^2$ . Alors  $Y$  vérifie les conditions de Markov et  $E(Y) = \sigma^2$ , donc

$$P(Y \geq \lambda E(Y)) \leq \frac{1}{\lambda}$$

$$P((X - E(X))^2 \geq \lambda \sigma^2) \leq \frac{1}{\lambda}$$

$$P(|X - E(X)| \geq \sigma \sqrt{\lambda}) \leq \frac{1}{\lambda}$$

On choisit  $\lambda = \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}$

d'où  $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

• Loi faible des grands nombres.

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi d'espérance

$m$  et de variance  $\sigma^2$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , et  $Z_n = \frac{S_n}{n}$ .

Alors  $E(Z_n) = m$ ,  $V(S_n) = n\sigma^2$  et  $V(Z_n) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébichev appliquée à  $Z_n$ , on obtient

$$P(|Z_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Donc  $P(|Z_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

• Théorème de Bernoulli

Il s'agit d'un cas particulier du théorème précédent lorsque les  $X_n$  suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Alors  $E(Z_n) = m$  et  $V(Z_n) = \frac{pq}{n}$ . Or, si  $p \in [0; 1]$ ,  $pq \in [0; \frac{1}{4}]$ .

Donc  $P(|Z_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

**2) Continuité uniforme**

$f$  étant continue sur le compact  $[0; 1]$ , elle y est uniformément continue.

Donc  $\exists M > 0$  tel que  $\forall x \in [0; 1], |f(x)| \leq M$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ , tel que  $\forall (x, y) \in [0; 1]^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

**3) Mise en place du problème**

On considère une suite de  $n$  épreuves indépendantes suivant la même loi de Bernoulli, avec une probabilité  $x$  de succès.  $S_n$  est la variable aléatoire discrète indiquant le nombre de succès, et  $Z_n = \frac{S_n}{n}$  est la fréquence de succès. On sait que  $E(Z_n) = x$ .

On va comparer  $E(f(Z_n))$  à  $f(E(Z_n))$ , c'est-à-dire à  $f(x)$ .

**4) Polynômes de Bernstein**

$$Z_n(\Omega) = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

$$E(f(Z_n)) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(Z_n = \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k)$$

Mais  $S_n$  suit la loi binomiale  $B(n, x)$ .

Donc  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ . On pose  $B_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ , que l'on appellera poly-

nôme élémentaire de Bernstein, et  $B_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^n B_n^k(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$

$B_{n,f}(x)$  est le polynôme de Bernstein, d'ordre  $n$ , associé à  $f$ . On a donc démontré que  $E(f(Z_n)) = B_{n,f}(x)$ .

**5) Algèbre linéaire**

Pour  $k$  décrivant  $\llbracket 0; n \rrbracket$ , les  $n+1$  polynômes  $B_n^k(x)$  sont de degré  $n$  et de valuation  $k$ . Ils forment donc une base de l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à  $n$ . Et les nombres  $f\left(\frac{k}{n}\right)$  sont les coordonnées de  $B_{n,f}(x)$  dans cette base.

## 6) Résolution du problème

Soit  $\varepsilon > 0$ . On choisit  $\eta$  vérifiant la 2<sup>ème</sup> condition de la continuité uniforme de  $f$ .

$$\begin{aligned} E(f(Z_n)) - f(x) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(Z_n = \frac{k}{n}\right) - f(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] P\left(Z_n = \frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

On va couper cette somme en deux, selon que  $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \eta$  ou  $\left|\frac{k}{n} - x\right| > \eta$

$$B_{n,f}(x) - f(x) = \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \eta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] P\left(Z_n = \frac{k}{n}\right) + \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \eta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] P\left(Z_n = \frac{k}{n}\right)$$

Pour  $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \eta$ ,  $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$ .

Donc  $\left|\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \eta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] P\left(Z_n = \frac{k}{n}\right)\right| \leq \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \eta} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| P\left(Z_n = \frac{k}{n}\right) \leq \varepsilon$

Par ailleurs, pour  $\left|\frac{k}{n} - x\right| > \eta$ ,  $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq 2M$  et  $\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \eta} P\left(Z_n = \frac{k}{n}\right) = P(|Z_n - x| > \eta)$

D'après la loi de Bernoulli,  $P(|Z_n - x| > \eta) \leq \frac{1}{4n\eta^2}$

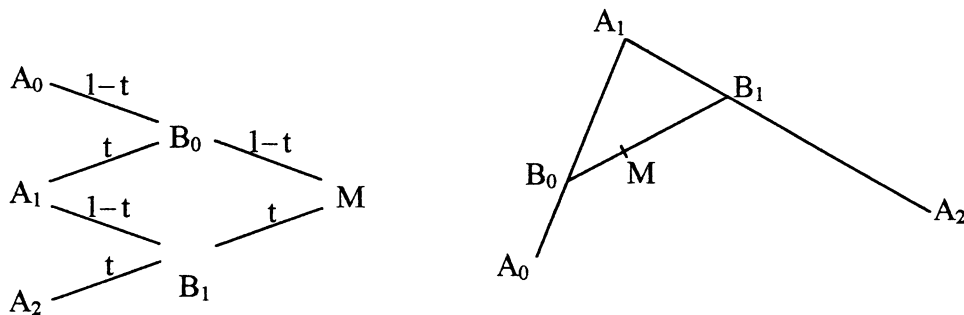
Donc  $\left|B_{n,f}(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon + \frac{K}{n}$ , avec  $K = \frac{M}{2\eta^2}$

Donc  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n > N_0, \forall x \in [0,1], \left|B_{n,f}(x) - f(x)\right| \leq 2\varepsilon$ . Vrai pour tout  $\varepsilon$ , d'où la convergence uniforme des  $B_{n,f}$  vers  $f$ .

## II. Courbes de Bézier

### 1) Cas élémentaire avec 3 points de contrôle

On donne 3 points non alignés  $A_0, A_1$  et  $A_2$ . Pour tout  $t \in [0,1]$ , on construit successivement :  $B_0$ , barycentre de  $(A_0, 1-t)$  et de  $(A_1, t)$ , puis  $B_1$ , barycentre de  $(A_1, 1-t)$  et de  $(A_2, t)$ , et enfin  $M$ , barycentre de  $(B_0, 1-t)$  et de  $(B_1, t)$ . Ce qui peut être visualisé par un schéma et une construction :



On peut aussi traduire les constructions précédentes par les égalités vectorielles

$\vec{OB}_0 = (1-t)\vec{OA}_0 + t\vec{OA}_1$  ;  $\vec{OB}_1 = (1-t)\vec{OA}_1 + t\vec{OA}_2$  ;  $\vec{OM} = (1-t)\vec{OB}_0 + t\vec{OB}_1$   
d'où l'on tire  $M$  en fonction des points de contrôle :

$$\vec{OM} = (1-t)^2 \vec{OA}_0 + 2t(1-t)\vec{OA}_1 + t^2 \vec{OA}_2, \text{ qui s'écrit aussi } \boxed{\vec{OM} = \sum_{k=0}^2 B_2^k(t) \vec{OA}_k}$$

Etudions la courbe décrite par M lorsque t parcourt [0;1].

Pour cela, on appelle O le milieu du segment [A<sub>0</sub>A<sub>1</sub>], et on choisit comme repère

(O;  $\vec{OA}_2$ ,  $\vec{OA}_1$ ). D'où les coordonnées de A<sub>0</sub>(-1;0); A<sub>1</sub>(0;1) et A<sub>2</sub>(1;0).

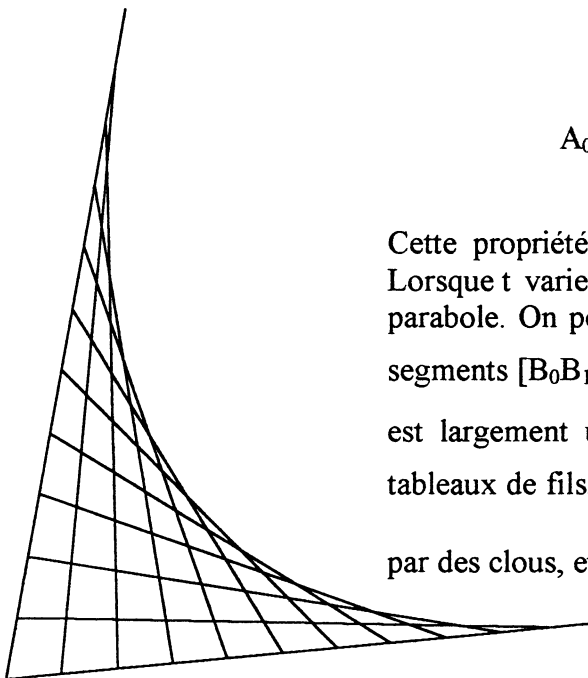
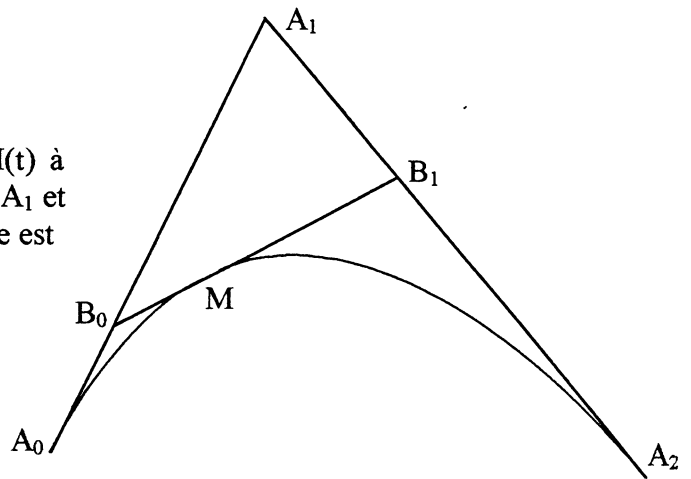
Les coordonnées de M sont donc  $x = -(1-t)^2 + t^2 = 2t - 1$ ;  $y = 2t(1-t)$  d'où  $y = \frac{1}{2}(1-x^2)$

Il s'agit donc d'un arc de parabole passant par les points A<sub>0</sub>, A<sub>2</sub> et par le milieu de [OA<sub>1</sub>].

Passons maintenant à l'étude des tangentes à cette parabole. On dérive l'égalité

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= (1-t)^2 \vec{OA}_0 + 2t(1-t) \vec{OA}_1 + t^2 \vec{OA}_2 \\ \frac{d\vec{OM}}{dt} &= -2(1-t) \vec{OA}_0 - 2t \vec{OA}_1 + 2(1-t) \vec{OA}_1 + 2t \vec{OA}_2 \\ &= -2[(1-t) \vec{OA}_0 + t \vec{OA}_1] + 2[(1-t) \vec{OA}_1 + t \vec{OA}_2] \\ &= -2\vec{OB}_0 + 2\vec{OB}_1 \\ &= 2\vec{B_0B_1} \end{aligned}$$

Ainsi, la droite (B<sub>0</sub>B<sub>1</sub>(t)) est la tangente en M(t) à l'arc de parabole. En particulier, B<sub>0</sub>B<sub>1</sub>(0) = A<sub>0</sub>A<sub>1</sub> et B<sub>0</sub>B<sub>1</sub>(1) = A<sub>1</sub>A<sub>2</sub>, de sorte que l'arc de parabole est tangent en A<sub>0</sub> à (A<sub>0</sub>A<sub>1</sub>) et en A<sub>2</sub> à (A<sub>1</sub>A<sub>2</sub>).



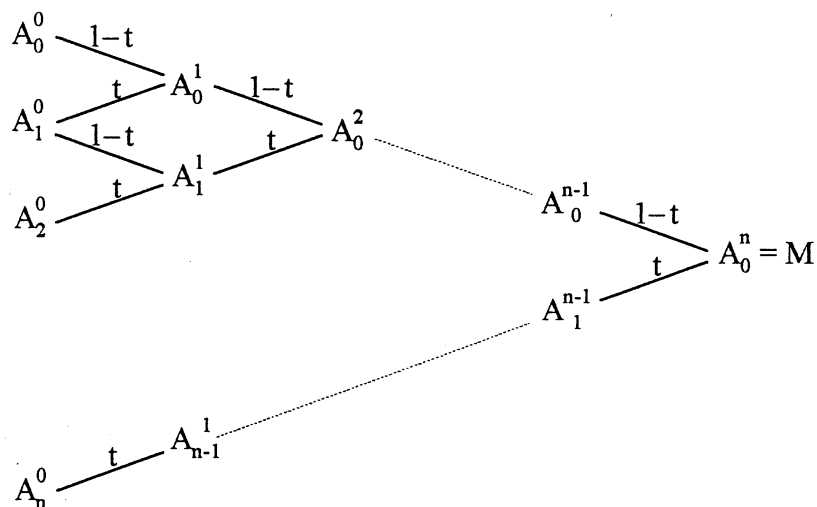
Cette propriété des tangentes peut s'interpréter autrement. Lorsque t varie, les segments [B<sub>0</sub>B<sub>1</sub>(t)] enveloppent un arc de parabole. On peut donc suggérer cet arc en traçant les n+1 segments [B<sub>0</sub>B<sub>1</sub>( $\frac{k}{n}$ )] pour k décrivant  $\llbracket 0; n \rrbracket$ . Cette propriété est largement utilisée pour son aspect esthétique dans les tableaux de fils, où les B<sub>0</sub>( $\frac{k}{n}$ ) et les B<sub>1</sub>( $\frac{k}{n}$ ) sont matérialisés par des clous, et les segments [B<sub>0</sub>B<sub>1</sub>( $\frac{k}{n}$ )] par un fil tendu.

## 2) Cas général avec n+1 points de contrôle

Dans le paragraphe précédent, le point courant de la courbe de Bézier a été construit en 3 étapes : tracé des points de contrôle, tracé du segment [B<sub>0</sub>B<sub>1</sub>], puis tracé de M. Avec n+1 points de contrôle, il faudra n+1 étapes, ce qui amènera à adapter les notations. Le numéro de l'étape, de 0 à n, sera écrit en exposant.

**Construction.** Les  $n+1$  points de contrôle sont notés  $A_0^0, A_1^0, \dots, A_n^0$ .

Pour l'étape suivante,  $A_i^1$  est le barycentre de  $(A_i^0, 1-t)$  et  $(A_{i+1}^0, t)$  pour  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ .



Plus généralement, pour  $i \in \llbracket 0; n-k \rrbracket$ ,  $A_i^k$  est le barycentre de  $(A_i^{k-1}, 1-t)$  et  $(A_{i+1}^{k-1}, t)$ , ceci pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Le dernier point,  $A_0^n = M$ , est le point courant de la courbe de Bézier. On observera que les points peuvent être dans l'espace à trois dimensions, ce qui donne pour la courbe de Bézier une courbe gauche.

En utilisant, entre les polynômes élémentaires de Bernstein, la relation :

$B_n^k(t) = (1-t)B_{n-1}^k(t) + tB_{n-1}^{k-1}(t)$ , on obtient, par récurrence sur  $n$ , la relation suivante donnant

$$M \text{ en fonction des points de contrôle : } \overrightarrow{OM} = \sum_{k=0}^n B_n^k(t) \overrightarrow{OA_k^0}$$

Cette relation montre le lien entre les polynômes de Bernstein et les courbes de Bézier : étant donnée une fonction  $f$ , on choisit pour points de contrôle les  $A_k^0$  de coordonnées  $(\frac{k}{n}, f(\frac{k}{n}))$ .

Alors la courbe de Bézier obtenue est la représentation graphique du polynôme de Bernstein d'ordre  $n$  associé à  $f$ .

La propriété des tangentes se généralise de la manière suivante : la tangente à la courbe de Bézier en  $M = A_0^n$  est la droite  $A_0^{n-1}A_1^{n-1}$ , c'est-à-dire la dernière droite construite avant la construction du point  $M$ . Pour démontrer ce résultat, on utilise la relation

$$\frac{dB_n^k(t)}{dt} = nB_{n-1}^{k-1}(t) - nB_{n-1}^k(t)$$

Cette relation sous entend que  $B_n^k(t) = 0$  pour  $k \notin \llbracket 0; n \rrbracket$ , et  $B_0^0(t) = 1$ .

On dérive la relation  $\overrightarrow{OM} = \sum_{k=0}^n B_n^k(t) \overrightarrow{OA_k^0}$

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} &= \sum_{k=0}^n \frac{dB_n^k(t)}{dt} \overrightarrow{OA_k^0} \\ &= \sum_{k=0}^n nB_{n-1}^{k-1}(t) \overrightarrow{OA_k^0} - \sum_{k=0}^n nB_{n-1}^k(t) \overrightarrow{OA_k^0} \\ &= n \sum_{k=1}^n B_{n-1}^{k-1}(t) \overrightarrow{OA_k^0} - n \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-1}^k(t) \overrightarrow{OA_k^0} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-1}^k(t) \overrightarrow{OA_{k+1}^0} - n \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-1}^k(t) \overrightarrow{OA_k^0} \\ &= n \overrightarrow{OA_1^{n-1}} - n \overrightarrow{OA_0^{n-1}} \\ &= n \overrightarrow{A_1^{n-1}A_0^{n-1}}. \end{aligned}$$

```
> restart;
```

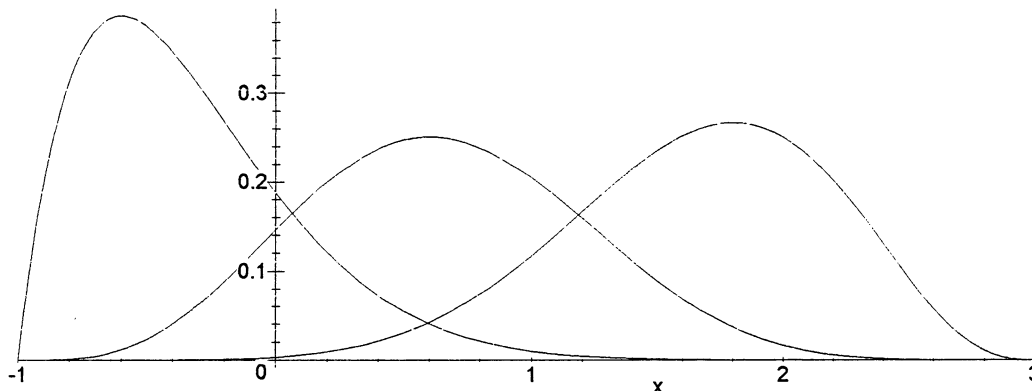
On définit le polynôme élémentaire de Bernstein de degré n et d'ordre k entre a et b.

```
bern := (n, k, a, b, x) -> binomial(n, k) / (b-a)^n * (x-a)^k * (b-x)^(n-k);
```

$$bern := (n, k, a, b, x) \rightarrow \frac{\text{binomial}(n, k) (x-a)^k (b-x)^{(n-k)}}{(b-a)^n}$$

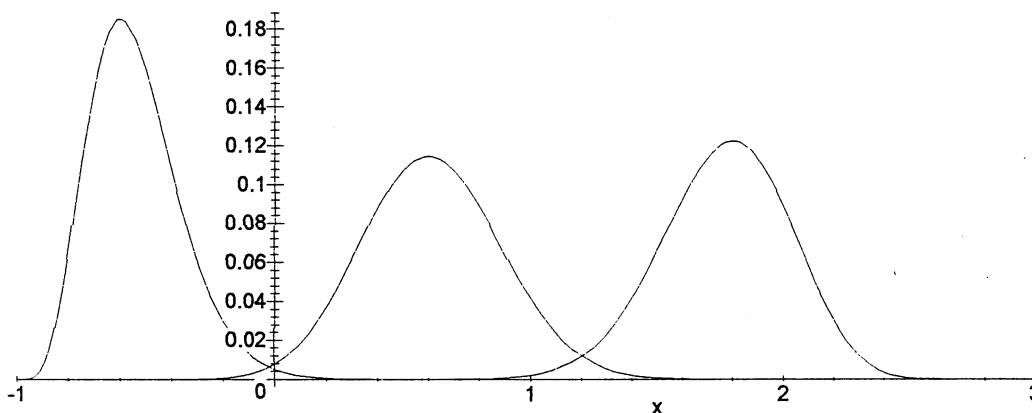
Tracé des polynômes élémentaires d'ordre 10 pour k=1, k=4 et k=7, entre -1 et 3.

```
plot({bern(10, 1, -1, 3, x), bern(10, 4, -1, 3, x), bern(10, 7, -1, 3, x)}, x=-1..3);
```



Tracé des polynômes élémentaires d'ordre 20 pour k=1, k=8 et k=15, entre -1 et 3.

```
plot({bern(20, 1, -1, 3, x), bern(20, 8, -1, 3, x), bern(20, 15, -1, 3, x)}, x=-1..3);
```



Définition du polynôme de Bernstein d'ordre n associé à la fonction sinus entre -pi et 3\*pi

```
> bsin := (n, a, b, x) -> sum(bern(n, k, a, b, x) * sin(a + (b-a) * k/n), k=0..n);
```

$$bsin := (n, a, b, x) \rightarrow \sum_{k=0}^n \text{bern}(n, k, a, b, x) \sin\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

Comparaison de la fonction sinus et de ses approximations par les polynômes de Bernstein associés de degré 10 et de degré 50.

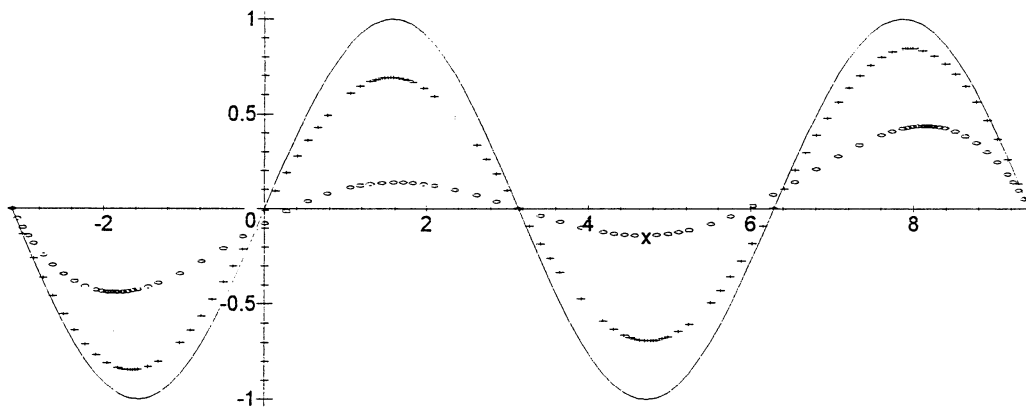
```
> a:=plot(sin, -Pi..3*Pi):
```

```
b:=plot(bsin(10, -Pi, 3*Pi, x), x=-Pi..3*Pi, style=point, symbol=circle):
```

```
c:=plot(bsin(50, -Pi, 3*Pi, x), x=-Pi..3*Pi, style=point, symbol=cross):
```



```
plots[display]({a,b,c});
```



Définition de la fonction de Gauss associée à la loi normale.

```
> gauss:=x->1/sqrt(2*Pi)*exp(-x^2/2);
```

$$gauss := x \rightarrow \frac{e^{(-1/2x^2)}}{\sqrt{2\pi}}$$

Définition du polynôme de Bernstein de degré n associé à la fonction précédente.

```
bgauss:=(n,a,b,x)->sum(bern(n,k,a,b,x)*gauss(a+(b-a)*k/n),k=0..n);
```

$$bgauss := (n, a, b, x) \rightarrow \sum_{k=0}^n \text{bern}(n, k, a, b, x) \text{gauss}\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

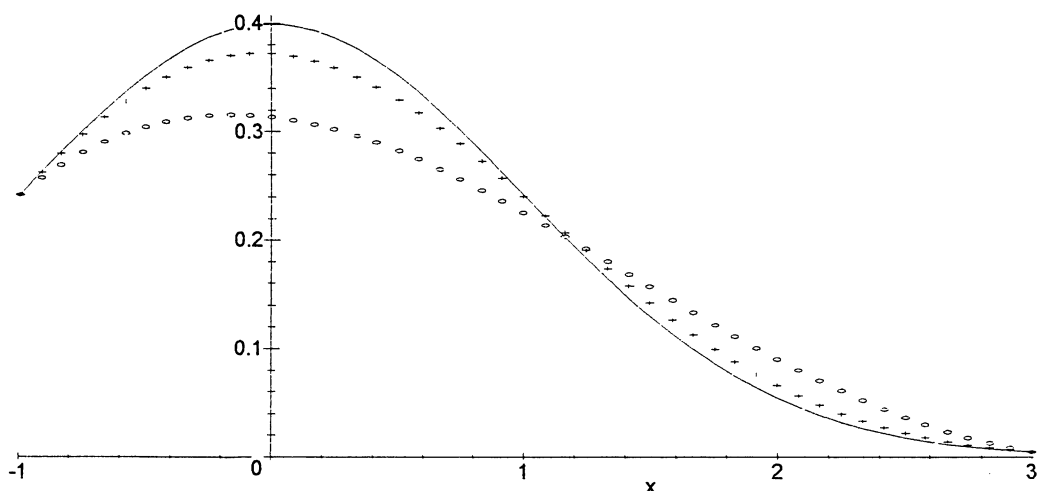
Comparaison de la fonction de Gauss et de ses approximations par les polynômes de Bernstein associés de degré 10 et de degré 50.

```
> d:=plot(gauss,-1..3):
```

```
e:=plot(bgauss(5,-1,3,x),x=-1..3,style=point,symbol=circle):
```

```
f:=plot(bgauss(20,-1,3,x),x=-1..3,style=point,symbol=cross):
```

```
plots[display]({d,e,f});
```



Définition d'une nouvelle fonction g

```
g:=x->1/(1+x^2);
```

$$g := x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$$

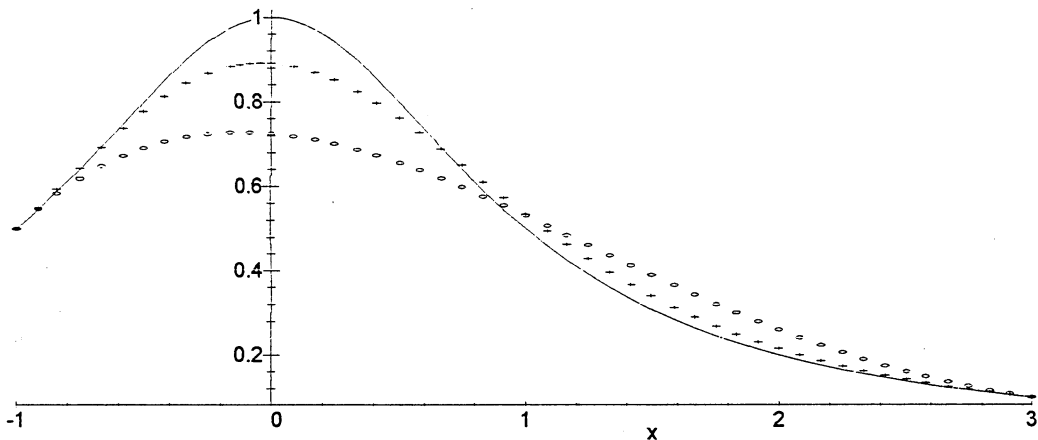
Définition du polynôme de Bernstein de degré n associé à la fonction précédente.

```
> bg := (n, a, b, x) -> sum(bern(n, k, a, b, x) * g(a + (b-a) * k/n), k=0..n);
```

$$bg := (n, a, b, x) \rightarrow \sum_{k=0}^n \text{bern}(n, k, a, b, x) g\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

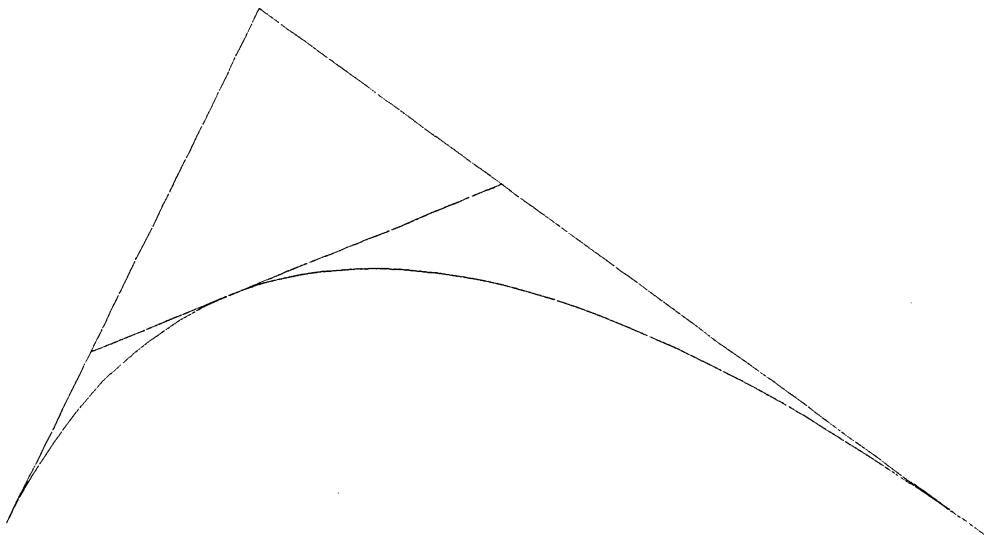
Comparaison de la fonction g et de ses approximations par les polynômes de Bernstein associés de degré 10 et de degré 50.

```
> h:=plot(g, -1..3):
  i:=plot(bg(5, -1, 3, x), x=-1..3, style=point, symbol=circle):
  j:=plot(bg(20, -1, 3, x), x=-1..3, style=point, symbol=cross):
  plots[display]({h,i,j});
```



Courbe de Bézier et tangente dans le cas élémentaire avec trois points de contrôle.

```
> k:=plot([-3*(1-t), 6*t, t=0..1]):
  l:=plot([9*t, 6*(1-t), t=0..1]):
  m:=plot([-2*(1-t)+3*t, 2*(1-t)+4*t, t=0..1]):
  n:=plot([-3*(1-t)^2+9*t^2, 6*2*t*(1-t), t=0..1]):
  plots[display]({k,l,m,n}, axes=None);
```



# Comment les physiciens traitent (et maltraitent) quelques équations différentielles

Thomas CHÉNEL  
Lycée Corneille, Rouen

L'objet de ce petit exposé n'est pas de traiter de mathématiques : ce serait outrecuidant, venant d'un physicien très ignorant en la matière. Il va donc surtout y être question de physique. Voilà peut-être de quoi décourager des mathématiciens, voire leur rappeler de mauvais souvenirs...

Puisque l'*interdisciplinarité* est à la mode, je veux essayer de montrer comment les physiciens pratiquent les mathématiques, au niveau des classes de Mathématiques supérieures et spéciales. Peut-être nos méthodes feront-elles bondir ou sourire les mathématiciens ? Quoi qu'il en soit, je crois qu'il peut être intéressant pour des professeurs de mathématiques de savoir dans quel esprit leurs collègues physiciens utilisent la science mathématique.

En pratiquant les mathématiques, les physiciens semblent souvent sacrifier la rigueur à l'efficacité. Il est vrai que nous définissons souvent fort mal les objets mathématiques que nous utilisons, que nous passons rapidement sur leurs conditions précises d'application... Deux raisons justifient cela. D'abord, les exigences de la pédagogie font que nous ne voulons pas que la nature même des sciences physiques, largement empiriques et expérimentales, disparaissent derrière un appareil théorique si parfait que les élèves en viennent vite (surtout dans les classes préparatoires) à le préférer à la triste et complexe réalité. D'autre part, si nous pouvons (dans une certaine mesure) négliger un peu la rigueur, c'est que la preuve en physique vient avant tout de l'expérience. La cohérence interne d'un modèle n'est d'aucune importance si ce modèle ne "colle" pas à la réalité ; et inversement, si le modèle donne de bons résultats, c'est qu'il contient probablement une bonne part de vrai.

L'utilisation des mathématiques en physique étant permanente, j'ai limité mon sujet aux équations différentielles. En effet, bien rares sont les problèmes de physique qui ne débouchent pas sur une ou plusieurs équations différentielles. Ce sujet étant encore très vaste, j'en ai exclu les fonctions de plusieurs variables, pourtant essentielles en physique, notamment en thermodynamique (notion de *fonction d'état*) ou en électromagnétisme (notion de *champ* électrique ou magnétique). Je me suis donc limité aux fonctions d'une seule variable, et plus précisément à des fonctions du temps.

Comme le sujet demeurerait énorme, j'ai dû me limiter encore, et ne parlerai que des équations linéaires à coefficients constants. Voilà bien un sujet sur lequel tout semble avoir été dit. De fait, mathématiquement parlant, je ne crois pas ouvrir quelque horizon que ce soit à des mathématiciens, et cet exposé ne prétend nullement "voler très haut". Sa seule ambition est de montrer un peu de la physique qui se dissimule derrière les équations différentielles linéaires. Tout ce qui sera dit restera du niveau des classes préparatoires (la transformée de Laplace, par exemple, est enseignée dans la filière PSI). Et les problèmes qui seront évoqués sont ceux qui sont posés aux élèves dans les concours d'entrée aux Grandes Écoles.

*Remarque* : j'ai joint à cet exposé quelques exemples de calculs réalisés avec Maple. N'étant pas spécialiste non plus en matière informatique, ces calculs peuvent sans aucun doute être améliorés. Ils ont au moins le mérite de montrer que les logiciels de calcul formel peuvent rendre service même au boétien qui tatonne, avec pour seul appui l'aide en ligne fournie par le logiciel.

# I. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

## 1. Équation canonique et constante de temps

Il s'agit des équations de la forme :

$$a \, dx/dt + b \, x(t) = c(t)$$

Si l'on préfère en physique la notation  $dx/dt$  à la notation  $x'(t)$ , c'est pour deux raisons :

- d'une part, parce que le physicien manipule les différentielles comme des infiniment petits, travaillant ainsi comme les pères fondateurs du calcul différentiel (Leibniz...),
- ensuite parce que cette notation a la mérite de faire ressortir la nature des grandeurs utilisées, ce que le physicien appelle leur "dimension". Ainsi,  $dx/dt$  s'exprime dans l'unité de  $x$ , divisée par l'unité de temps.

Tout le monde sait résoudre cette équation, en cherchant les solutions générales de l'équation sans second membre (équation homogène), puis en cherchant une solution particulière de l'équation complète, enfin en calculant la constante d'intégration avec la condition initiale.

Un cas fréquemment rencontré est celui où  $c(t)$  est une constante  $c$ . Ce cas est tellement "banal" que nous apprenons à nos élèves à écrire directement la solution de l'équation sans la résoudre. On écrit pour cela l'équation sous la *forme canonique* :

$$dx/dt + x/\tau = c/a \quad \text{ou encore} \quad \tau \, dx/dt + x = c/b$$

Cette écriture fait apparaître une constante de temps  $\tau$  (forcément homogène à un temps). Cette *constante de temps*, appelée aussi *temps de relaxation*, gouverne l'évolution du système, et l'on écrit directement la solution sous la forme :

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)] \exp(-t/\tau)$$

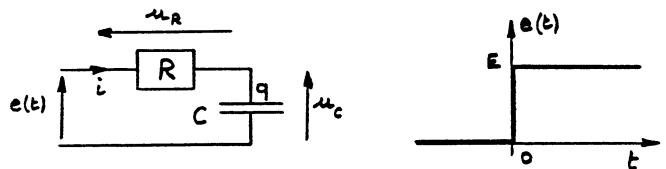
Cela traduit seulement le fait que le système évolue exponentiellement de la valeur  $x(0)$  (condition initiale) à la valeur  $x(\infty)$  (correspondant au régime permanent, et obtenue en annulant  $dx/dt$  dans l'équation différentielle).

## 2. Exemple très simple : charge d'un condensateur

Un circuit R-C est soumis à un échelon de tension, ayant la forme ci-contre :

$$e(t) = 0 \text{ pour } t < 0,$$

$$e(t) = E \text{ pour } t > 0.$$



Le condensateur est initialement déchargé ( $q = 0$  pour  $t < 0$ ), et on veut connaître  $q(t)$  pour  $t > 0$ . On écrit donc l'équation différentielle vérifiée pour  $t > 0$  :

$$E = R \, dq/dt + q/C$$

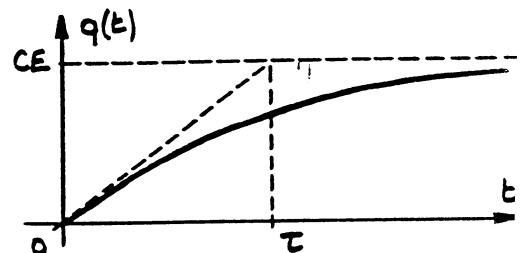
(Avec un peu d'habitude, on écrit directement cette équation, qui est pour le débutant la combinaison de quatre équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = u_R + u_C \text{ (additivité des tensions)} \\ u_R = R \, i \text{ (loi d'Ohm)} \\ i = dq/dt \text{ (relation entre l'intensité dans un condensateur et sa charge)} \\ q = C \, u_C \text{ (relation entre la charge d'un condensateur et la tension à ses bornes)} \end{array} \right.$$

En mettant cette équation sous la forme canonique  $dq/dt + q/RC = E/R$ , on fait apparaître la constante de temps  $\tau = RC$ . Avec la condition initiale  $q(0) = 0$  (qui vient de ce que la charge d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue) et la valeur finale  $q(\infty) = CE$ , on peut écrire directement :

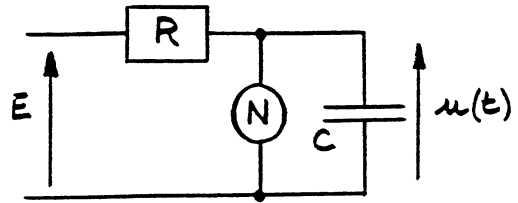
$$q(t) = C E [1 - \exp(-t/\tau)] \quad \text{pour } t > 0$$

L'intérêt de la constante de temps n'est pas seulement d'alléger l'écriture de la solution. Il est aussi que cette constante a un sens physique. C'est un temps caractéristique de la durée nécessaire pour que le circuit R-C évolue d'un état initial à un état d'équilibre. Si l'on veut tracer l'allure de  $q(t)$ , on se sert de fait que la tangente à l'origine coupe la valeur finale pour  $t = \tau$ , comme le montre la figure ci-contre :



### 3. Autre exemple : oscillations de relaxation d'une lampe au néon

Essayons maintenant de mettre en oeuvre les principes précédents sur un cas un peu plus complexe. Un exercice très classique, régulièrement donné dans les concours des écoles d'ingénieurs, est le suivant. On peut produire des oscillations de relaxation avec le montage ci-contre. La lampe au néon a les caractéristiques suivantes :



- elle équivaut à une résistance  $r$  lorsqu'elle est allumée, et à une résistance infinie (circuit ouvert) lorsqu'elle est éteinte,

- elle s'allume lorsque la tension à ses bornes atteint la tension d'allumage  $V_a < E$ , et reste allumée tant que cette tension reste supérieure à la tension d'extinction  $V_e < V_a$ .

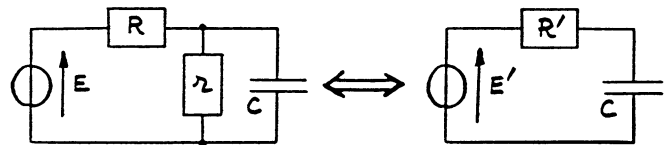
Initialement, le condensateur est déchargé, et la lampe est éteinte. À partir de l'instant  $t = 0$ , on soumet ce circuit à une tension constante  $E$ . L'étude se fait en plusieurs phases, car l'équation qui gouverne le système change selon que la lampe est allumée ou éteinte.

- **Première phase** : la lampe étant éteinte, elle équivaut à un circuit ouvert. Le condensateur se charge donc exactement comme dans le paragraphe précédent, et on a :

$$u(t) = E [1 - \exp(-t/\tau)], \text{ avec } \tau = RC$$

Cette phase dure jusqu'à ce que  $u(t) = V_a$ , ce qui se produit pour  $t_1 = \tau \ln[E/(E - V_a)]$

- **Deuxième phase** : la lampe est allumée. Le circuit équivaut au montage ci-contre. Il n'est même pas utile d'écrire l'équation différentielle qu'il vérifie. Un théorème commode (théorème de Thévenin) permet de se ramener au circuit habituel, en remplaçant  $R$  par  $R' = Rr/(R + r)$  et  $E$  par  $E' = rE/(R + r)$ .



Pour simplifier les écritures, il est commode de prendre une nouvelle origine des temps en posant  $t' = t - t_1$ . Alors,  $u(t')$  évolue avec la constante de temps  $\tau' = R'C$ , de la valeur initiale  $u(0) = V_a$  à la valeur finale  $u(\infty) = E'$ .

Donc : 
$$u(t') = u(\infty) + [u(0) - u(\infty)] \exp(-t'/\tau')$$

soit : 
$$u(t') = E' + (V_a - E') \exp(-t'/\tau')$$

Deux cas peuvent se produire :

- $E' \geq V_e$  : la lampe ne s'éteint jamais,
- $E' < V_e$  : la tension  $u(t)$  décroît jusqu'à l'extinction de la lampe, qui se produit pour  $t' = t_2$  tel que  $u(t') = V_e$ , ce qui donne  $t_2 = \tau' \ln[(V_a - E')/(V_e - E')]$ .

- **Troisième phase** (dans le cas où  $E' < V_e$ ) : si la lampe s'est éteinte, on revient au circuit R-C initial. La constante de temps du circuit est de nouveau  $\tau = RC$ . On peut prendre une nouvelle origine des temps au début de cette troisième phase, en posant  $t'' = t' - t_1 - t_2$ .

La tension  $u(t'')$  évolue alors entre  $u(0) = V_e$  et  $u(\infty) = E$ , et :

$$u(t'') = E + (V_e - E) \exp(-t''/\tau)$$

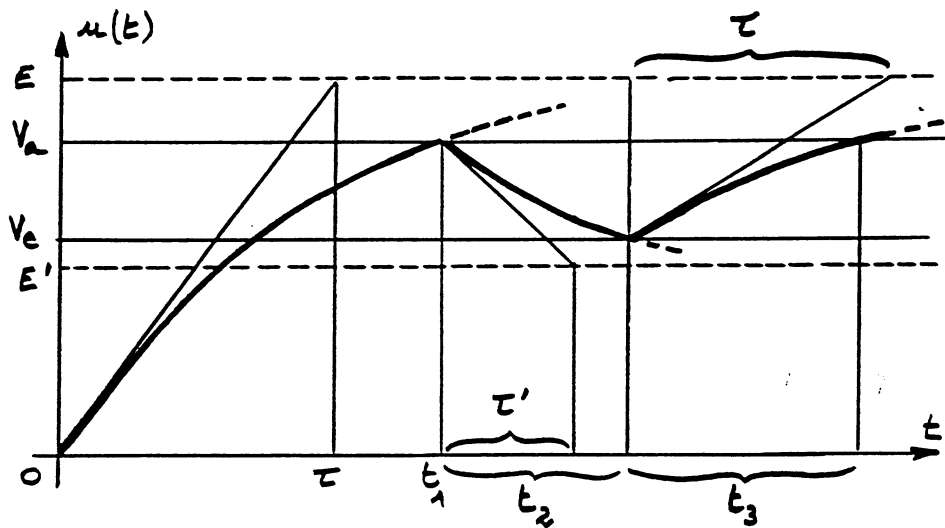
La lampe s'allume de nouveau pour  $t'' = t_3$  tel que  $u(t_3) = V_a$ , soit :  $t_3 = \tau \ln[(E - V_e)/(E - V_a)]$

- **Phase ultérieures** : les phénomènes se reproduisent ensuite à l'identique, avec la période :

$$T = t_2 + t_3$$

De telles oscillations, où le fonctionnement du système change périodiquement, sont dites "de relaxation".

- **Représentation de  $u(t)$**  : on peut récapituler tous ces résultats avec la figure suivante (tracée en prenant  $R = r$ , ce qui donne  $E' = E/2$  et  $\tau' = \tau/2$ ).



● Conclusion. Pour traiter cet exercice, l'élève moyen perd beaucoup de temps. Il cherche pour chaque phase l'équation différentielle vérifiée par le circuit, puis la résout de façon classique (solution générale de l'équation homogène, solution particulière, calcul de la constante...). En fait, nous avons vu qu'il est possible, en raisonnant par analogies et en ayant bien compris qu'un circuit du premier ordre est gouverné par sa constante de temps, de conduire tous les calculs sans même écrire une équation différentielle.

## II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

### 1. Régime libre d'un oscillateur harmonique non amorti

#### a. Pulsation propre, intégrale première de l'énergie

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique non amorti est de la forme :  $a \frac{d^2x}{dt^2} + b x = 0$ , mais on l'écrit sous la forme canonique :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

qui a l'avantage de faire apparaître la *pulsation propre*  $\omega_0$  de l'oscillateur. On obtient une solution sinusoïdale, (ce qui prouve bien l'absence de frottement). Les oscillations se font autour de la position d'équilibre  $x = 0$  (on peut toujours choisir l'origine des coordonnées de façon que l'origine coïncide avec la position d'équilibre). Notons aussi l'*isochronisme* des oscillations (la pulsation étant indépendante de l'amplitude).

Pour un oscillateur non amorti, l'énergie mécanique se conserve. On peut écrire directement la conservation de l'énergie, ou la retrouver à partir de l'équation précédente, avec le facteur intégrant  $dx/dt$ ... Prenons par exemple le cas où l'oscillateur est une masse ponctuelle en translation. Son énergie cinétique est de la forme  $E_c = (1/2) m \frac{d^2x}{dt^2}$ , et son énergie potentielle de la forme  $E_p = (1/2) k x^2$  (c'est une propriété caractéristique du mouvement harmonique). Si l'on dérive l'expression :

$$E_m = E_c + E_p = (1/2) m \frac{d^2x}{dt^2} + (1/2) k x^2 = \text{cte}$$

on obtient :  $m \frac{d^2x}{dt^2} + k x = 0$ , ce qui montre que  $\omega_0^2 = k/m$

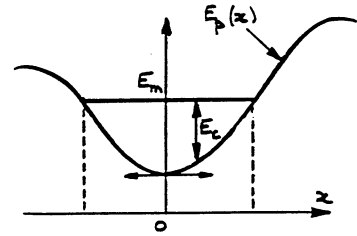
#### b. Importance pratique de l'oscillateur harmonique

Si tous les cours de physique insistent autant sur l'oscillateur harmonique, c'est qu'il n'est pas seulement le seul cas d'oscillateur dont la solution soit aisément calculable. En fait, l'oscillateur harmonique se retrouve presque partout dans la nature pour les petites oscillations d'un système non dissipatif.

Considérons un oscillateur sans frottement à un seul degré de liberté, par exemple un système en translation. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = E_c + E_p = (1/2) m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x) = \text{cte}$$

Caractérisons les petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable. Une telle position d'équilibre correspond à un "puits de potentiel", ou "cuvette de potentiel". Comme on le voit sur la figure ci-contre, l'amplitude des oscillations est limitée, pour une valeur donnée de l'énergie mécanique, par le fait que l'énergie cinétique est toujours positive.



En appliquant la formule de Taylor à l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre  $x = 0$ , on obtient :

$$E_p(x) = E_p(0) + (dE_p/dx)_{x=0} \cdot x + (1/2) \cdot (d^2E_p/dx^2)_{x=0} \cdot x^2 + \dots$$

(En physique, on ne termine jamais les formules de Taylor par un "petit o" ou quoi que ce soit. On se contente de dire que l'on développe "à l'ordre 2", à des termes d'ordre supérieur près.) La dérivée première est nulle (puisqu'on a un puits de potentiel). La dérivée seconde est forcément positive, et presque toujours non nulle. Si on la note  $k$ , on a au voisinage de 0 l'expression approchée :

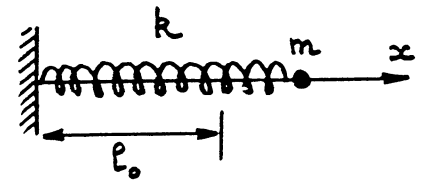
$$E_p(x) = E_p(0) + (1/2) k x^2$$

et on a donc, en dérivant  $E_m$ , l'équation :  $m d^2x/dt^2 + k x^2 = 0$

Si les petites oscillations au voisinage d'un équilibre sont presque toujours sinusoïdales, c'est parce que l'on presque toujours développe le potentiel sous la forme d'une parabole.

### c. Exemple : ressort et masse

Il y a quelques années, on introduisait en classe de première l'oscillateur harmonique avec le cas d'une masse accrochée à un ressort (raideur  $k$ , longueur à vide  $l_0$ ) et pouvant glisser sans frottement sur une tige horizontale.



La position d'équilibre correspond à la longueur à vide  $l_0$  du ressort. Si on prend l'origine des  $x$  à l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique donne :

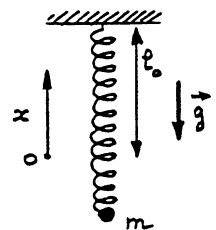
$$m d^2x/dt^2 = -k x$$

d'où un mouvement sinusoïdal avec  $\omega_0^2 = k/m$ . À cette occasion, on pouvait introduire la notion d'énergie (et sa conservation), et les élèves apprenaient que l'énergie potentielle d'un ressort est  $E_p = (1/2) k x^2$ .

● Les programmes excluaient totalement le cas du même système, simplement accroché verticalement. De fait, le problème semble singulièrement compliqué par le poids et l'énergie potentielle de pesanteur.

Une façon maladroitte de considérer les choses consiste à séparer l'énergie potentielle du ressort et celle de pesanteur. Prenons toujours une origine des  $x$  correspondant à la longueur à vide de ressort, l'axe des  $x$  étant orienté vers le haut. L'énergie potentielle totale est (à une constante près) :

$$E_p(x) = (1/2) k x^2 + m g x$$



Pour le mathématicien, il est évident que ce potentiel est parabolique et correspond à un mouvement harmonique. Pour l'élève, ceci n'a rien d'évident. Il trouve néanmoins le résultat en dérivant l'expression de l'énergie mécanique, ce qui donne :

$$m d^2x/dt^2 + k x + m g = 0$$

expression où il apparaît immédiatement que les oscillations se font autour de la position d'équilibre  $-mg/k$ .

Une méthode plus "physique" consiste à raisonner toujours par rapport à la position d'équilibre. En effet, le poids étant indépendant de la position de la masselotte, il n'intervient pas dans les oscillations, mais seulement dans la translation de l'origine. Il est donc évident que l'on a des oscillations avec la pulsation  $\omega_0$  autour de la nouvelle position d'équilibre  $-mg/k$ .

Remarque : si l'on fait un changement d'origine en posant  $X = x + mg/k$ , on peut vérifier que :

$$E_p(x) = (1/2) k (X - mg/k)^2 + m g (X - mg/k) = (1/2) k X^2 + cte$$

ce qui montre bien que l'on pouvait oublier d'entrée de jeu la pesanteur et considérer seulement l'action du ressort. Cela demande évidemment d'avoir bien compris la notion de puits de potentiel, et le fait qu'un tel puits de potentiel correspond à une force proportionnelle à l'élongation, et ne saurait faire intervenir une force constante telle que le poids.

## 2. Régime libre d'un oscillateur harmonique amorti

### a. Formes canoniques de l'équation différentielle

L'oscillateur non amorti est un cas limite qui n'existe jamais. En réalité, il y a toujours des frottements. Pour le régime libre d'un oscillateur harmonique amorti, on a une équation de la forme :

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c x = 0 \quad (\text{avec } a, b, c \text{ positifs})$$

Pour cette équation, les physiciens utilisent plusieurs formes canoniques :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

ou  $\frac{d^2x}{dt^2} + (\omega_0/Q) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$

ou  $\frac{d^2x}{dt^2} + (1/\tau) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$  (plus rarement rencontré)

Dans tous les cas,  $\omega_0$  est la pulsation propre du système en l'absence de frottements. L'autre coefficient ( $\lambda$ ,  $Q$ , ou  $\tau$ ) traduit l'importance des frottements.

### b. Remarque : irréversibilité

L'irréversibilité due aux frottements se traduit dans l'équation différentielle par l'existence d'une dérivée d'ordre impair. En effet, le phénomène étant irréversible, on ne peut pas inverser le cours du temps. Si on fait le changement de variable  $t \rightarrow t' = -t$ , l'équation différentielle en  $x$  et  $t'$  est différente, ce qui est la traduction mathématique de l'irréversibilité due aux frottements.

### c. Résolution de l'équation différentielle : trois cas possibles

La résolution de l'équation est aisée. Considérons la première forme de l'équation. L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 2 \lambda r + \omega_0^2 = 0$$

Cela conduit à distinguer trois cas, selon le signe du discriminant réduit :

●  $\delta = \lambda^2 - \omega_0^2 > 0$  : c'est le cas où les frottements sont importants. L'équation admet deux racines réelles négatives (leur somme est  $< 0$ , et leur produit est  $> 0$ ) que l'on peut noter  $-r_1$  et  $-r_2$  (avec  $r_1$  et  $r_2 > 0$ )  
Alors :

$$x(t) = A \exp(-r_1 t) + B \exp(-r_2 t) \quad (\text{régime aperiodique})$$

●  $\delta = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0$  : l'équation admet une unique racine réelle négative  $-\lambda$ , et :

$$x(t) = (At + B) \exp(-\lambda t) \quad (\text{régime critique})$$

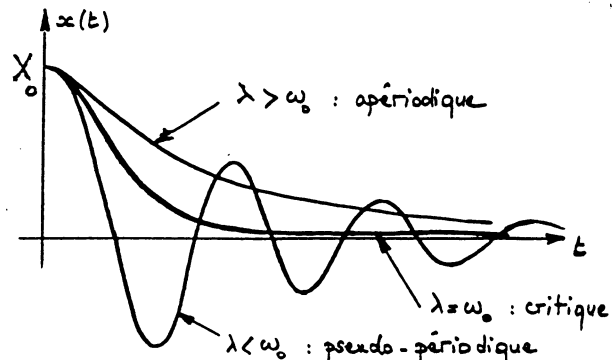
●  $\delta = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$  : cas où les frottements sont peu importants. L'équation admet deux racines imaginaires conjuguées de la forme :  $-\lambda \pm i\omega$ , en notant  $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ .

Alors :  $x(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \exp(-\lambda t) \quad (\text{régime pseudo-périodique})$

où  $\omega$  est la pseudo-pulsation, et  $T = 2\pi/\omega$  la pseudo-période.

On obtient des courbes avec l'allure ci-contre (tracées dans le cas où le système est écarté de l'équilibre et laissé sans vitesse initiale, c'est-à-dire avec  $x(0) = X_0$  et  $(dx/dt)_{x=0} = 0$ ) :

Le régime critique correspond au régime pour lequel le régime permanent est atteint le plus rapidement.



● *Autres réductions canoniques* : elles conduisent à des conclusions analogues. On utilise surtout :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\omega_0/Q) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Le coefficient  $Q$  sans dimension est le *facteur de qualité* du système. Le régime est pseudo-périodique si  $Q > 1/2$ , et oscille d'autant plus longtemps que le facteur de qualité est élevé. La signification physique de  $Q$  est dans ce cas très simple :  $Q$  caractérise le nombre d'oscillations amorties effectivement observables.

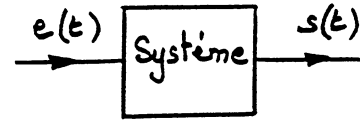


### III. RÉPONSE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

#### 1. Système linéaire, signal d'entrée et signal de sortie

Dans ce qui précède, on n'a étudié que des régimes libres (ou, ce qui revient sensiblement au même, les cas où le second membre est une constante). On va voir maintenant le cas où le second membre est quelconque. Pour cela, nous considérerons de façon très générale la réponse d'un système à une excitation.

Un grand nombre de systèmes physiques peuvent se ramener au schéma ci-contre. Selon le signal  $e(t)$  que l'on envoie en entrée, on obtient un certain signal en sortie  $s(t)$ .



Dans le cas d'un système linéaire, on a très souvent entre le signal d'entrée et celui de sortie une équation différentielle de la forme :

$$a_0 e + a_1 de/dt + \dots + a_n d^n e/dt^n = b_0 s + b_1 ds/dt + \dots + b_m d^m s/dt^m$$

Le plus grand des deux entiers  $n$  et  $m$  est appelé *l'ordre du système*. (En pratique, pour tous les systèmes réels, on a  $n \leq m$ .)

*Remarque* : tous les systèmes linéaires ne sont pas régis par une équation de cette forme. Ainsi, un système tel que  $s(t) = e(t - \tau)$  est linéaire aussi (on l'appelle "opérateur retard").

Pour *identifier* le système, il est évidemment hors de question d'étudier la réponse pour toutes les fonctions  $e(t)$  possibles et imaginables. Le physicien se limite en pratique à quelques signaux, dont il peut déduire le fonctionnement du système dans tous les cas. En pratique, on considère principalement :

- la réponse indicielle (réponse à un échelon),
- la réponse fréquentielle (réponse en régime sinusoïdal permanent),
- la réponse impulsionnelle.

*Remarque* : c'est ainsi que l'électronicien, pour étudier un circuit, dispose d'un GBF (générateur basse fréquence) capable de produire tous ces signaux (impulsions, signaux sinusoïdaux, créneaux...)

#### 2. Réponse fréquentielle

##### a. Fonction de transfert en régime sinusoïdal forcé

Pour la plupart des systèmes, il peut exister un régime sinusoïdal permanent (les frottements font que les régimes transitoires, qui correspondent au régime libre du système, sont rapidement amortis). Le régime sinusoïdal permanent apparaît en fait comme une solution particulière de l'équation différentielle complète.

Étudier la réponse fréquentielle d'un système, c'est étudier sa réponse en régime sinusoïdal forcé, pour toutes les fréquences. La réponse fréquentielle permet l'identification complète du système, parce que l'analyse de Fourier permet de décomposer la plupart des signaux réels en signaux sinusoïdaux.

Considérons un signal d'entrée purement sinusoïdal, de fréquence  $\omega$ . La sortie est également sinusoïdale, de même pulsation. On la calcule facilement en utilisant la *notation complexe*. Si l'on a :

$$e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e)$$

on associe à ce signal réel le signal complexe :  $\underline{e}(t) = E \exp i(\omega t + \varphi_e)$ .

On a alors  $e(t) = \Re(\underline{e}(t))$ , avec  $\underline{e}(t) = \underline{E} \exp(i\omega t)$ , où  $\underline{E} = E \exp(i\varphi_e)$  est l'amplitude complexe de  $e(t)$ .

Cette amplitude complexe contient deux informations : son module est l'*amplitude* du signal sinusoïdal, et son argument est la *phase à l'origine*. De même, pour le signal de sortie, on travaille en notation complexe, avec  $\underline{s}(t) = \underline{S} \exp(i\omega t)$ , où  $\underline{S} = S \exp(i\varphi_s)$ .

L'intérêt de cette notation est que l'opérateur "partie réelle" commute avec toutes les opérations classiques : dérivation, intégration, sommation... En particulier, la dérivation revient à une multiplication par  $i\omega$ . L'équation différentielle reliant  $\underline{e}$  et  $\underline{s}$  est donc :

$$[a_0 + a_1(i\omega) + \dots + a_n(i\omega)^n] \underline{e} = [b_0 + b_1(i\omega) + \dots + b_m(i\omega)^m] \underline{s}$$

Le comportement du système en régime sinusoïdal est donc caractérisé par sa fonction de transfert complexe que l'on note  $\underline{H}(i\omega)$  :

$$\underline{H}(i\omega) = \underline{s}/\underline{e} = [a_0 + a_1(i\omega) + \dots + a_n(i\omega)^n] / [b_0 + b_1(i\omega) + \dots + b_m(i\omega)^m]$$

Le fait de noter la variable  $i\omega$  plutôt que  $\omega$  est une convention qui permet de se rappeler que la fonction de transfert est relative aux grandeurs complexes, et pas aux signaux réels  $s(t)$  et  $e(t)$ , seuls à avoir une réalité physique. On peut aussi écrire la fonction de transfert avec la *variable de Laplace*  $p = i\omega$  :

$$H(p) = \underline{s}/\underline{e} = [a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n] / [b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m]$$

Remarque : la raison pour laquelle on a  $n \leq m$  pour les systèmes réels est que  $H(i\omega)$  doit rester finie lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ .

La fonction de transfert est au coeur de tout enseignement sur les circuits électriques. Il y a plusieurs façons de la représenter, la plus utilisée étant le *diagramme de Bode*. Cela consiste à tracer le module et l'argument de  $\underline{H}(i\omega)$  (avec des échelles logarithmiques, de surcroît). Nous ne rentrerons pas dans ce détail. Disons seulement qu'un élève de classes préparatoires doit s'attendre, entre le cours, les exercices, les devoirs et les travaux pratiques, à tracer quelques dizaines de diagrammes de Bode.

Les racines du numérateur de la fonction de transfert sont appelés les *zéros*, et les racines du dénominateur en sont les *pôles*. Ceux-ci surtout sont importants. Le dénominateur pouvant être factorisé en polynômes de degré 1 ou 2 (à coefficients réels), la fonction de transfert peut toujours être décomposée en éléments simples, comme une somme de fonctions de transfert d'ordre 1 ou 2. C'est ce qui fait l'importance pratique des fonction de transfert des systèmes d'ordre 1 et 2. On les étudie donc en détail (d'autant qu'elles sont peu nombreuses).

Un tel système linéaire est un *filtre*, dans la mesure où il ne modifie pas les composantes spectrales d'un signal. Il peut les atténuer ou les augmenter, éventuellement les déphaser. Il remplit des fonctions d'amplification ou de filtrage, mais ne peut pas créer de nouveaux harmoniques.

### **b. Exemple : filtre R-C passe bas**

Pour illustrer ces propos un peu abstrait, donnons l'exemple le plus simple qui soit, correspondant au cas où la fonction de transfert est de la forme :

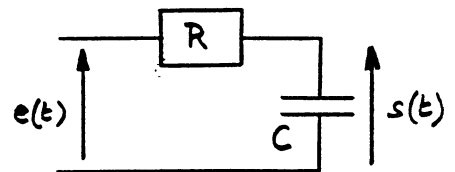
$$\underline{H}(i\omega) = a_0 / (b_0 + b_1 i\omega)$$

C'est le cas par exemple d'un circuit tel que celui-ci, pour lequel on a l'équation différentielle :

$$e(t) = RC \, ds/dt + s(t)$$

soit :

$$\underline{H}(i\omega) = 1 / (1 + i RC \omega)$$



Il est d'usage de mettre cette fonction sous la forme :  $\underline{H}(i\omega) = 1 / (1 + i \omega / \omega_c) = 1 / (1 + i \tau \omega)$ , en faisant apparaître une *pulsation de coupure* telle que  $\omega_c = 1 / RC = 1 / \tau$  (rappelons que  $\tau = RC$  est le temps de relaxation du circuit). Sans trop rentrer dans le détail, notons que :

si  $\omega \ll \omega_c$ , alors  $\underline{H}(i\omega) \approx 1$  : la fonction de transfert a une asymptote horizontale,

si  $\omega \gg \omega_c$ , alors  $\underline{H}(i\omega) \approx \omega_c / i\omega$  : la fonction de transfert décroît rapidement, et le système se comporte alors en intégrateur (diviser par  $i\omega$  équivaut à intégrer un signal sinusoïdal).

Il est clair que le filtre R-C a pour effet de laisser passer sans atténuation les basses fréquences, nettement inférieures à la fréquence de coupure, et de supprimer totalement les hautes fréquences. C'est un filtre passe-bas. Les fréquences voisines de la fréquence de coupure sont seulement partiellement atténuées.

### **c. Forme canonique des fonctions de transfert**

Pour les fonctions de transfert comme pour les équations différentielles, les physiciens utilisent des formes canoniques qui permettent de faire ressortir toutes les propriétés importantes du système. Ainsi, pour un filtre passe-bas du premier ordre, la fonction de transfert est toujours de la forme :

$$\underline{H}(i\omega) = G_0 / (1 + i \omega / \omega_c)$$

et son fonctionnement est entièrement caractérisé par deux grandeurs :

- son gain maximal à basse fréquence  $G_0$  (correspond à l'asymptote horizontale quand  $\omega \rightarrow 0$ ),
- sa pulsation de coupure  $\omega_c$ .

L'intérêt d'une telle forme canonique pour la fonction de transfert est évidente. Cela permet :

- de ramener des systèmes de natures diverses à un cas unique et bien connu,
- et par suite de se dispenser d'en étudier en détail le fonctionnement.

Pour un filtre du deuxième ordre, la fonction de transfert peut s'écrire dans tous les cas avec trois paramètres :

- le gain maximal  $G_0$ ,
- une pulsation caractéristique  $\omega_0$ ,
- un coefficient de qualité  $Q$  caractérisant la sélectivité du filtre.

Par exemple, pour un filtre passe-bande du deuxième ordre, la forme canonique de la fonction de transfert est :

$$H(i\omega) = G_0/[1 + i Q((\omega/\omega_0)^2 - (\omega_0/\omega)^2)]$$

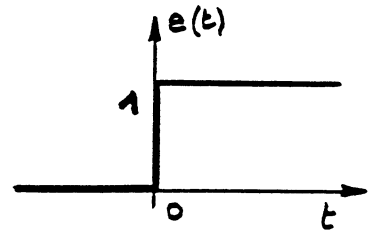
### 3. Réponse indicielle

La réponse indicielle correspond au cas où, en entrée, on a un échelon unité, ou fonction de Heaviside, le système étant initialement au repos. Pour  $t > 0$ , l'équation différentielle est donc de la forme :

$$a_0 = b_0 s + b_1 ds/dt + \dots + b_m dm_s/dt^m$$

et l'on revient ici à l'étude d'un régime libre, auquel on ajoute la solution particulière  $s = b_0/a_0$ . Nous ne n'y attarderons donc pas.

*Remarque* : il existe des liens entre la réponse fréquentielle et la réponse indicielle. Ainsi, la valeur de  $H(i\omega)$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$  être connue directement en prenant la réponse indicielle lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Et la valeur de  $H(i\omega)$  lorsque  $\omega \rightarrow \infty$  est liée à la valeur de la réponse indicielle pour  $t = 0^+$ .



### 4. Fonction de transfert et décomposition en série de Fourier

#### a. Principe

Pour bien montrer aux élèves l'intérêt de la fonction de transfert d'un système, on leur montre d'abord qu'elle permet de déterminer le signal de sortie dans le cas de signaux périodiques quelconques. Rappelons que, pour une fonction de période  $T = 2\pi/\omega$ , on peut écrire :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad \text{avec :}$$

$$a_0 = (1/T) \int_0^T e(t) dt, \quad a_n = (2/T) \int_0^T e(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = (2/T) \int_0^T e(t) \sin(n\omega t) dt$$

*Remarque* : pour que cette décomposition soit possible, les conditions de Dirichlet sont que :

- $f$  soit univoque et bornée,
- $f$  ait un nombre fini de discontinuités par période,
- $f$  possède un nombre fini de minima et maxima par période.

Il va sans dire que ces conditions sont toujours réalisées avec les fonctions périodiques rencontrées en physique, de sorte que les cours de physique de les mentionnent jamais.

On peut aussi écrire : 
$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Une telle décomposition est particulièrement intéressante pour un système linéaire, tel que la réponse à une somme de plusieurs entrées soit la somme des réponses à chacune des entrées. Il suffit donc de calculer séparément la réponse à chacune des composantes de  $e(t)$ , et de les additionner.

En utilisant la notation complexe, on aura donc :

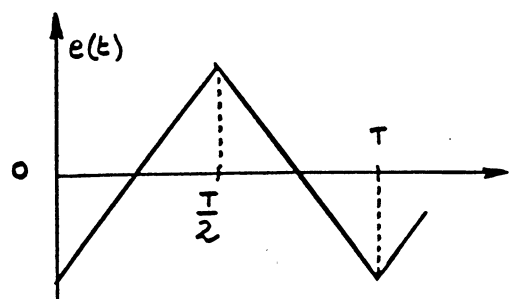
$$\underline{e}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{E}_n \exp(in\omega t) \quad \text{avec} \quad \underline{E}_n = E_n \exp(i\varphi_n)$$

Comme  $\underline{S}_n = H(in\omega) \cdot \underline{E}_n$ , on a immédiatement : 
$$\underline{s}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H(in\omega) \cdot \underline{E}_n \exp(in\omega t)$$

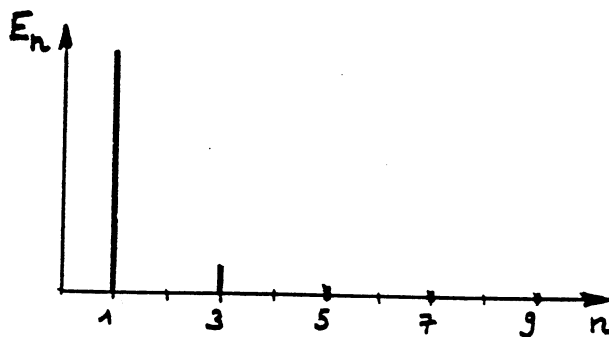
Le spectre de Fourier du signal de sortie est donc obtenu en multipliant simplement l'amplitude complexe des composantes du signal d'entrée par la fonction de transfert.

#### b. Exemple

Reprenons notre filtre R-C, avec en entrée un signal triangulaire ayant l'allure ci-contre. Le signal est encore relativement simple, et il est possible de calculer  $s(t)$  à la main. Mais essayons ici l'analyse de Fourier et le raisonnement physique.



Pour un tel signal triangulaire, le spectre de Fourier est très classique. Il ne comporte que des harmoniques impairs, lesquels décroissent rapidement (en  $1/n^2$ ). En pratique, seuls les premiers harmoniques "comptent" donc, et suffisent ici pour reconstituer le signal.



Qu'obtient-on en sortie ? Tout dépend de la pulsation de coupure  $\omega_c$ . Deux cas sont très simples, et directement accessibles par le raisonnement :

- si  $\omega_c \gg \omega$ , tous les premiers harmoniques sont restitués sans atténuation ni déphasage, et  $s(t) \approx e(t)$ ,
- si  $\omega_c \ll \omega$ , on a alors  $\underline{H}(in\omega) \approx \omega_c/in\omega$  pour tous les harmoniques, qui sont tous intégrés séparément (en notation complexe, diviser par  $in\omega$  un signal de pulsation  $n\omega$  équivaut à une intégration). Le signal de sortie sera donc formé de morceaux de parabole.

Si  $\omega_c$  est voisin de  $\omega$ , le résultat n'a rien d'évident, les différentes composantes du signal d'entrée sont diversement atténuées et déphasées. On trouvera en annexe I le signal de sortie donné pour un tel filtre, tel qu'on peut le calculer avec le logiciel Maple.

## 5. Fonction de transfert et transformée de Fourier

### a. Principe

Un signal non périodique ne peut pas se décomposer en série de Fourier, mais la transformée de Fourier remplit à peu près le même rôle.

Un signal d'énergie finie (tel que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^2(t) dt$  converge) peut s'écrire :  $e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$   
 où  $\underline{E}(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \exp(-i\omega t) dt$  est la transformée de Fourier de  $e(t)$ .

Remarque : le terme en  $1/2\pi$  n'existe que parce qu'on travaille avec les pulsations. Il disparaît lorsqu'on raisonne avec les fréquences. On peut aussi mettre  $1/\sqrt{2\pi}$  à chaque intégrale.

En sortie, on aura donc :  $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}(i\omega) \cdot \underline{E}(\omega) \exp(i\omega t) dt$

La transformée de Fourier du signal de sortie est donc tout simplement :  $\underline{S}(\omega) = \underline{H}(i\omega) \cdot \underline{E}(\omega)$ .  
 Cette propriété peut être mise en oeuvre pour calculer  $s(t)$ , en trois étapes :

- calculer la transformée de Fourier  $\underline{E}(\omega)$  du signal d'entrée,
- multiplier  $\underline{E}(\omega)$  par la fonction de transfert  $\underline{H}(i\omega)$ ,
- calculer la transformée de Fourier inverse de ce produit.

À la main, cette suite de calculs peut rapidement être assez lourde, voire infaisable. C'est là que les logiciels de calcul formel viennent à la rescousse, en permettant un calcul soit littéral, soit approché avec la transformée de Fourier rapide (algorithme astucieux qui calcule la transformée de Fourier pour un nombre donné N de pulsations régulièrement espacées).

### b. Exemples

On trouvera en annexe II un exemple d'utilisation de la transformée de Fourier lorsqu'on envoie en entrée du filtre R-C passe-bas déjà utilisé plus haut quelques signaux non périodiques.

## 6. Fonction de transfert et transformée de Laplace

### a. Principe

La transformée de Fourier a pour inconvénients d'exiger des signaux d'énergie finie, et de conduire à des calculs souvent très lourds à la main (ce qui fait qu'elle est surtout utilisée en pratique pour des calculs approchés et numériques, avec la transformée de Fourier rapide).

La transformée de Laplace est beaucoup plus utilisée en sciences de l'ingénieur (notamment en automatique, pour tout ce qui concerne la commande et l'asservissement de systèmes linéaires).

Pour une fonction telle que  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ , la transformée de Laplace d'une fonction est :

$$\text{laplace}(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-pt) dt$$

La variable de Laplace  $p$  est à valeurs complexes. Pour que l'intégrale précédente converge, il faut que la partie réelle de  $p$  soit suffisamment grande. (Il faut forcément avoir  $Re(p) > 0$ , mais cela ne suffit pas forcément. On peut montrer que le lieu des valeurs de  $p$  telles que  $F(p)$  converge est dans le plan complexe un demi-plan délimité par une droite parallèle à l'axe imaginaire.)

La fonction  $f(t)$  est appelée l'original de  $F(p)$ . Son expression analytique est donnée par l'intégrale de Mellin-Fourier :

$$f(t) = (1/2i\pi) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) \exp(pt) dp$$

$a$  étant une abscisse positive telle que tous les points singuliers de  $F(p)$  sont à gauche de la droite  $x = a$ .

*Remarque* : des méthodes mathématiques permettent, par le calcul des résidus de chaque pôle de l'expression  $F(p) \exp(pt)$ , de trouver  $f(t)$  sans calculer l'intégrale de Mellin-Fourier, mais cela dépasse nettement l'utilisation qui est fait de la transformée de Laplace en classes préparatoires PSI.

En pratique, le physicien ne procède pas ainsi, mais utilise des tableaux de correspondance permettant de passer de  $f(t)$  à  $F(p)$  et réciproquement. Par exemple, on a (avec  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ ) :

Pour $t > 0$ :	$f(t) = 1$ (échelon de Heaviside)	$F(p) = 1/p$
	$f(t) = t$	$F(p) = 1/p^2$
	$f(t) = \exp(-at)$	$F(p) = 1/(p+a)$
	$f(t) = \sin(\omega t)$	$F(p) = \omega/(p^2 + \omega^2)$
	$f(t) = \cos(\omega t)$	$F(p) = p/(p^2 + \omega^2)$

Pour calculer le signal de sortie d'un système linéaire, la méthode consiste donc (si  $e(t)$ ,  $s(t)$  et leurs dérivées sont nulles pour  $t < 0$  !) à :

- calculer la transformée de Laplace  $E(p)$  du signal d'entrée  $e(t)$ ,
- multiplier  $E(p)$  par la fonction de transfert  $H(p)$  pour avoir  $S(p)$ ,
- calculer la transformée de Laplace inverse de ce produit pour obtenir  $s(t)$ .

### **b. Exemples**

Traisons à la main le cas où notre filtre passe-bas est attaqué par la fonction de Heaviside. (Il est bien évident que le plus rapide dans ce cas très simple est de résoudre directement l'équation différentielle, qui donne pour  $t > 0$  :  $s(t) = 1 - \exp(-t/\tau)$ .)

La transformée de Laplace de  $e(t)$  est  $E(p) = 1/p$ . Comme  $H(p) = 1/(1 + \tau p)$ , on a :

$$S(p) = (1/p) \cdot [1/(1 + \tau p)] = S(p) = (1/p) - 1/(p + 1/\tau) \quad \text{en décomposant en éléments simples.}$$

La transformée de Laplace inverse de  $1/p$  est 1, celle de  $1/(p + 1/\tau)$  est  $\exp(-t/\tau)$ , et on retrouve donc en les additionnant le résultat classique. D'autres exemples, moins élémentaires, sont donnés en annexe III.

## **7. Réponse impulsionnelle**

### **a. Distribution de Dirac**

La réponse impulsionnelle consiste à envoyer en entrée une impulsion très brève. Idéalement, le signal d'entrée est la distribution de Dirac  $\delta(t)$ , telle que :

$$\delta(t) = 0 \text{ pour } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Un tel signal est évidemment irréalisable physiquement. En pratique, il suffit d'envoyer une impulsion assez brève devant les temps de réponse caractéristiques du système pour avoir le même résultat.

### **b. Réponse impulsionnelle et transformées de Fourier et de Laplace**

La distribution de Dirac, bien que n'étant pas une fonction ordinaire, admet une transformée de Fourier  $\underline{\Delta}(\omega) = 1/2\pi$ . L'impulsion de Dirac est donc un signal d'énergie finie contenant toutes les composantes du spectre, avec la même amplitude. Si on envoie  $e(t) = \delta(t)$  en entrée d'un système linéaire. On a alors :  $\underline{S}(\omega) = \underline{H}(i\omega) \cdot (1/2\pi)$ . Le spectre de Fourier du signal de sortie donne directement la fonction de transfert, sans qu'il soit nécessaire de faire de nombreuses mesures. Toute l'astuce est qu'en envoyant une impulsion de Dirac, on envoie simultanément toutes les fréquences dans le système.

La transformée de Laplace donne des résultats similaires. Ainsi, si  $e(t) = \delta(t)$ , alors  $E(p) = 1$ , et  $S(p) = H(p)$ . Si la fonction de transfert  $H(p)$  est inconnue, on peut la déterminer expérimentalement de cette façon, en calculant la transformée de Laplace du signal  $s(t)$  lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac.

## IV. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

### 1. Généralités

Un système d'équations linéaires du premier ordre peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_1/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{pmatrix}$$

Rappelons que tout système d'équations différentielles linéaires peut être transformé en un système d'équations du premier ordre, en prenant les dérivées comme inconnues supplémentaires (on augmente, ce faisant, le nombre d'équations). De là vient l'importance théorique et pratique de ces systèmes.

*Remarque* : ces systèmes sont également très utiles pour les équations différentielles non linéaires que l'on ne sait pas résoudre analytiquement. Les méthodes numériques de résolution utilisent en effet des équations du premier ordre. Le cas le plus classique en physique est le *problème à n corps*, qui étudie le mouvement de n corps en interaction gravitationnelle. Il est bien connu que le problème ne peut être résolu que numériquement dès que n est supérieur ou égal à 3. Pour cela, on est obligé de transformer chaque équation du deuxième ordre fournie par le principe fondamental de la dynamique en deux équations du premier ordre. Et, au lieu de raisonner avec 3n variables (les coordonnées de chaque corps), on raisonne avec 6n variables (les coordonnées et les composantes de la vitesse pour chaque corps). Cet espace à 6n dimensions, appelé *espace des phases*, est le cadre d'étude pour le problème à n corps.

La résolution d'un tel système linéaire peut se faire de plusieurs façons. On peut notamment chercher des solutions particulières exponentielles, ce qui conduit à trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M. Cette méthode sera évoquée au paragraphe suivant, avec les systèmes du second ordre. Pour les systèmes du premier ordre, les physiciens préfèrent des outils tels que la transformée de Laplace.

### 2. Exemple : la cinétique chimique

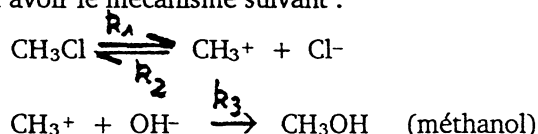
#### a. Quelques notions sur les mécanismes réactionnels

La cinétique chimique, qui étudie la vitesse des réactions chimiques, utilise fréquemment des systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

Les réactions chimiques se déroulent le plus souvent selon des mécanismes complexes. Il est bien rare que le bilan de la réaction traduise la réalité des phénomènes chimiques en jeu. Ainsi, le bilan de la synthèse de l'eau à partir d'hydrogène et d'oxygène gazeux s'écrit :  $2 \text{H}_2 + \text{O}_2 = 2 \text{H}_2\text{O}$ . Cette équation-bilan serait effectivement le mécanisme de la réaction si deux molécules de dihydrogène, en rencontrant une molécule de dioxygène, se combinaient pour donner d'eau molécules d'eau.

Ce n'est pas ainsi que les choses se passent, et le mécanisme réel est celui d'une réaction en chaîne faisant intervenir des radicaux libres tels que  $\text{H}\cdot$ ,  $\text{OH}\cdot$  et  $\cdot\text{O}\cdot$ . Ces *intermédiaires réactionnels* n'interviennent pas dans l'équation-bilan, parce qu'ils ne correspondent pas à des composés stables et que leur durée de vie est très petite. Il n'en reste pas moins qu'il existent, en tant qu'espèces chimiques, pendant la réaction.

Donnons un exemple plus simple de mécanisme réactionnel. Pour l'hydrolyse en milieu basique du chlorométhane, on peut avoir le mécanisme suivant :



Ce mécanisme comporte trois *actes élémentaires*. La première étape est en effet un équilibre, et correspond à deux réactions opposées. La deuxième étape, elle, est considérée comme ne pouvant se faire que dans un seul sens.

Lorsqu'on travaille dans un système de volume constant, on étudie la vitesse de la réaction à partir de l'évolution des concentrations, notées entre [ ], et comptées généralement en moles par litre. Pour chaque acte élémentaire, la vitesse de disparation d'un réactif ou d'apparition d'un produit est alors de la forme :

$$d[\text{produit}]/dt = -d[\text{réactif}]/dt = k_i \cdot [\text{réactif 1}] \cdot [\text{réactif 2}] \dots$$

Le fait que la vitesse soit proportionnelle à la concentration de chaque réactif signifie simplement que la probabilité pour que les réactifs se rencontrent augmente proportionnellement à leur concentration. La constante  $k_i$  est la *constante de vitesse*. Elle traduit le fait que toutes les "rencontres" entre réactifs ne débouchent pas forcément sur une réaction chimique (encore faut-il, par exemple, que leur énergie cinétique soit suffisante...)

Ainsi, pour le mécanisme ci-dessus, la vitesse d'apparition de CH<sub>3</sub>OH peut s'écrire :

$$d[\text{CH}_3\text{OH}]/dt = k_3 [\text{CH}_3^+].[\text{OH}^-]$$

tandis que la vitesse de disparition de CH<sub>3</sub>Cl s'écrit :

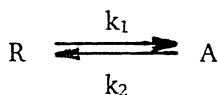
$$-d[\text{CH}_3\text{Cl}]/dt = k_1 [\text{CH}_3\text{Cl}] - k_2 [\text{CH}_3^+].[\text{Cl}^-]$$

et il en va de même pour Cl<sup>-</sup>, I<sup>-</sup> ou CH<sub>3</sub><sup>+</sup>. Ces équations ne sont pas linéaires. Elles peuvent le devenir dans certains cas. En particulier, lorsqu'un des composés est en large excès dans le milieu réactionnel, sa concentration ne varie pour ainsi dire pas, et il n'intervient pas dans les équations. On dit alors qu'il y a *dégénérescence* de la cinétique. Par exemple, si la concentration en ions OH<sup>-</sup> varie peu, la vitesse d'apparition du méthanol peut être simplifiée en :

$$d[\text{CH}_3\text{OH}]/dt = k'_3 [\text{CH}_3^+]$$

### **b. Un cas linéaire**

Supposons donc avoir le mécanisme suivant :



Ce mécanisme n'est évidemment pas "complet". D'autres espèces chimiques existent forcément, mais on suppose que les conditions expérimentales sont telles qu'elles n'interviennent dans la loi de vitesse de la réaction.

Même pour un schéma réactionnel aussi simple, le calcul complet est lourd, comme on va voir. En pratique, les chimistes introduisent souvent des hypothèses supplémentaires qui permettent de mener facilement les calculs "à la main". Ces hypothèses peuvent être :

-  $d[\text{A}]/dt = 0$  (lorsque le composé intermédiaire A est très instable, sa concentration reste faible, et on la suppose constante en première approximation),

-  $k_3 \ll k_1$  et  $k_2$  (cela signifie que l'équilibre entre R et A s'établit très rapidement, alors que le passage de A à B est beaucoup plus lent).

Nous ne rentrerons pas dans le détail des simplifications que peuvent apporter de telles hypothèses (qui ne valent que pour autant qu'elles sont confirmées par l'expérience). Nous considérerons seulement le cas le plus intéressant, mathématiquement parlant, où aucune simplification n'est possible. Le système d'équations est alors :

$$\begin{cases} d[\text{A}]/dt = k_1.[\text{R}] - k_2.[\text{A}] - k_3.[\text{A}] \\ d[\text{B}]/dt = k_3.[\text{A}] \\ d[\text{R}]/dt = k_2.[\text{A}] - k_1.[\text{R}] \end{cases}$$

D'autre part, si les concentrations initiales en R, A et B sont respectivement R<sub>0</sub>, 0 et 0, la conservation de la matière entraîne d'avoir à tout instant :

$$[\text{R}] + [\text{A}] + [\text{B}] = R_0$$

Un tel système se résout assez facilement avec la transformée de Laplace, en utilisant la propriété importante :

$$\text{laplace}(df/dt) = p.\text{laplace}(f(t)) - f(0),$$

On obtient alors, en notant r, a et b les transformées de Laplace de [R], [A] et [B], le système linéaire :

$$\begin{cases} p.a = k_1.r - (k_2 + k_3).a \\ p.b = k_3.a \\ p.r - R_0 = k_2.a - k_1.r \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve facilement r, a et b en fonction de p, R<sub>0</sub> et des k<sub>i</sub>. Il suffit d'appliquer la transformée de Laplace inverse pour obtenir les expressions de [R], [A] et [B] en fonction du temps. Les calculs peuvent être conduits à la main, mais sont un peu fastidieux. Un logiciel de calcul formel est ici très précieux, et on trouvera en annexe IV les résultats obtenus avec Maple.

## V. SYSTÈMES D'OSCILLATEURS COUPLÉS

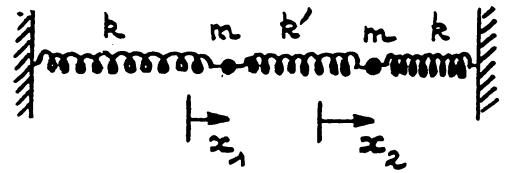
Considérons maintenant des systèmes d'équations différentielles du deuxième ordre (en nous limitant pour simplifier au cas où il n'y a pas de frottements). Là aussi, la transformée de Laplace peut être utilisée, et rend de grands services dans le cas d'équations avec second membre. Elle n'est cependant pas utile dans le cas d'oscillations sinusoïdales forcées ou d'oscillations libres, pour lesquelles il est plus simple de rechercher directement des solutions sinusoïdales.

### 1. Le cas simple d'un système symétrique

#### a. Position du problème et solution générale pour les oscillations libres

Soit un système formé de deux masses ponctuelles identiques et de trois ressorts. Les ressorts latéraux sont identiques, et le système est donc "symétrique". En repérant les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre, les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} -(k + k') x_1 + k' x_2 &= m \, d^2x_1/dt^2 \\ k' x_1 - (k + k') x_2 &= m \, d^2x_2/dt^2 \end{aligned}$$



On a ici deux oscillateurs "couplés". Pour résoudre ce système, on peut additionner et soustraire entre elles les deux équations. Cela donne :

$$\begin{aligned} -k(x_1 + x_2) &= m \, d^2(x_1 + x_2)/dt^2 \\ -(k + 2k')(x_1 - x_2) &= m \, d^2(x_1 - x_2)/dt^2 \end{aligned}$$

et l'on obtient ainsi deux équations "découplées" faisant intervenir les variables  $x_1 + x_2$  et  $x_1 - x_2$ . En posant  $\omega_1^2 = k/m$  et  $\omega_2^2 = (k + 2k')/m$ , on a immédiatement :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t \\ x_1 - x_2 &= C \cos \omega_2 t + D \sin \omega_2 t \end{aligned}$$

Les constantes A, B, C et D sont déterminées à partir des conditions initiales, et il est ensuite facile d'avoir  $x_1$  et  $x_2$  :

$$\begin{aligned} x_1 &= (1/2) \cdot [ A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t + C \cos \omega_2 t + D \sin \omega_2 t ] \\ x_2 &= (1/2) \cdot [ A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t - C \cos \omega_2 t - D \sin \omega_2 t ] \end{aligned}$$

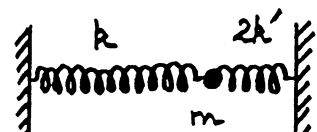
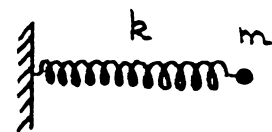
Dans cet exemple,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les *pulsations propres* du système, et les mouvements purement sinusoïdaux associés à ces pulsations propres sont appelés *modes propres* du système. Lorsqu'on étudie un système d'oscillateurs couplés, il est d'usage de "caractériser" les modes propres. Ici, le mode propre associé à la pulsation  $\omega_1$  est tel que  $x_1 = x_2$ , et les deux masses oscillent en phase. Pour le mode propre associé à la pulsation  $\omega_2$ , on a  $x_2 = -x_1$ , les deux masses oscillant en opposition de phase.

Ces résultats sont très généraux. *Lorsqu'on a n oscillateurs couplés non amortis, on trouve n modes propres, tels que tous les oscillateurs sont alors en phase ou en opposition de phase.* (La différence avec l'exemple simple vu ici est que le rapport des amplitudes n'est pas en général égal à  $\pm 1$ .)

#### b. Ces résultats étaient en fait évidents

Avec un brin d'intuition physique, ces résultats étaient quasiment évidents, (pour peu que l'on sache que, pour un système de n oscillateurs couplés, la solution générale pour le régime libre est la superposition de n modes propres purement sinusoïdaux). Ici, avec deux oscillateurs couplés, il suffit de trouver les deux modes propres du système. Or, on y accède facilement en raisonnant un peu.

Ainsi, il est clair que les deux masses peuvent osciller en phase. Le ressort central a alors une longueur constante et ne joue aucun rôle (puisque son énergie potentielle ne varie pas). La pulsation propre  $\omega_1$  est donc celle qui correspond aux oscillateurs non couplés. Tout se passe comme si on avait deux fois le système ci-contre.



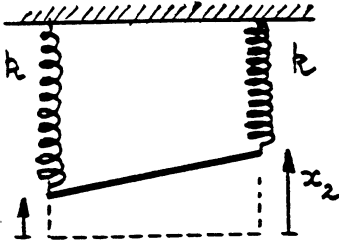
La symétrie du problème entraîne aussi que les masses peuvent osciller en opposition de phase. Tout se passe alors comme si le milieu du ressort central était fixe, et le système équivaut à deux systèmes identiques où une masse m oscille entre deux ressorts de raideurs respectives k et 2k' (car la ressort de la moitié d'un ressort de raideur k' est 2k'). D'où la deuxième pulsation propre  $\omega_2^2 = (k + 2k')/m$ .



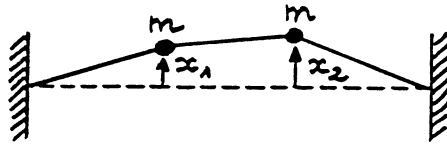
### c. Autres exemples analogues

Dans l'exemple ci-dessus, les oscillateurs sont dit "couplés par élasticité". On peut rencontrer d'autres systèmes *symétriques* de deux oscillateurs couplés. À chaque fois, les deux modes propres correspondent aux cas où les oscillateurs sont en phase ou en opposition de phase, et cela avec la *même amplitude*. Voici quelques exemples de systèmes en tous points analogues au cas précédent :

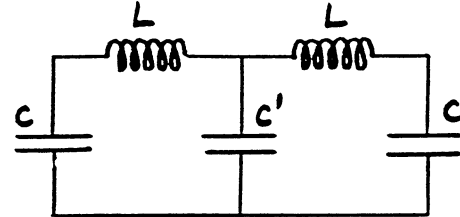
Oscillations d'une barre dans un plan vertical (couplage par inertie)



Mouvements verticaux de plombs sur une corde élastique



Analogie électrique de l'exemple du 1.a (couplage capacitif)



*Remarque* : dans le troisième exemple, les capacités jouent le rôle des ressorts (elles stockent de l'énergie potentielle), et les bobines jouent le rôle des masses (leur énergie, proportionnelle au carré de l'intensité qui les traverse, est analogue à l'énergie cinétique en mécanique). Cette possibilité qui existe en physique de transporter un problème d'un domaine dans un autre est souvent mise à profit pour modéliser et étudier expérimentalement des systèmes complexes. Il est ainsi très simple de construire et d'étudier un modèle électrique d'un système mécanique.

## 2. Cas d'un système quelconque

### a. Principe

Considérons un système de  $n$  oscillateurs couplés, en l'absence d'amortissement. On obtient un système d'équations différentielles que l'on peut mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^2x_1/dt^2 \\ \vdots \\ d^2x_n/dt^2 \end{pmatrix}$$

Si l'on cherche des solutions sinusoïdales pour un tel système, on aura évidemment :

$$\begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

où l'on voit que les valeurs de  $-\omega^2$  ne sont rien d'autre que les valeurs propres de la matrice  $M$ . Pour un ensemble d'oscillateurs couplés, ces valeurs propres existent toujours (et sont de plus toutes négatives), de sorte que la matrice  $M$  est diagonalisable. (J'avoue ne pas en connaître la justification mathématique, mais je serais très étonné qu'il n'y en ait pas une).

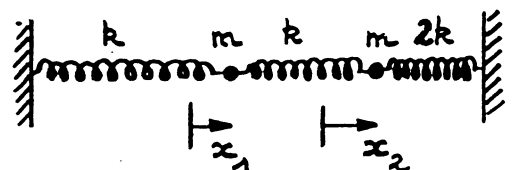
Devant un tel problème, le mathématicien détermine une base de vecteurs propres, puis fait un changement de base. L'élève de classe préparatoire fait tout cela sans même s'en douter, (d'autant qu'il traite souvent ce genre de problème avant même d'avoir entendu parler de valeurs propres ou de diagonalisation !). En effet, ce que le physicien appelle "caractériser les modes propres" revient sans le dire à déterminer pour chaque pulsation propre  $\omega_i$  un vecteur propre (en réintroduisant chaque valeur propre dans le système de départ). Si un tel vecteur propre est  $X_i$ , la solution générale sera alors de la forme :

$$X = \sum X_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

et écrire cela ne nécessite pas de parler de changement de base ou de matrice de passage.

### b. Exemple

Pour fixer les idées, reprenons le cas de deux masses oscillant entre trois ressorts, avec les valeurs simples ci-contre (pour simplifier les calculs et les écritures). Les équations différentielles sont :



$$\begin{aligned} -2kx_1 + kx_2 &= m \, d^2x_1/dt^2 \\ kx_1 - 3kx_2 &= m \, d^2x_2/dt^2 \end{aligned}$$

Posons  $k/m = \Omega^2$ . La matrice M est alors :

$$\begin{pmatrix} -2\Omega^2 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & -3\Omega^2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres  $-\omega^2$  sont donc telles que :

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & \omega^2 - 3\Omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

équation qui conduit aux deux valeurs :  $\omega_1^2 = \Omega^2 [5 - \sqrt{5}] / 2$  et  $\omega_2^2 = \Omega^2 [5 + \sqrt{5}] / 2$

Ayant les pulsations propres, le physicien étudie chaque mode propre, en reportant les valeurs trouvées dans le système de départ. Pour la valeur  $\omega_1$ , on trouve que si  $x_1 = 1$ , alors  $x_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Pour  $\omega_2$ , si  $x_1 = 1$ , alors  $x_2 = (-\sqrt{5} - 1)/2$ . La solution la plus générale s'écrit donc (avec 4 constantes à déterminer) :

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 &= [(\sqrt{5} - 1)/2] A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + [(-\sqrt{5} - 1)/2] B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

On voit clairement sur cet exemple que les deux modes propres correspondent à des mouvements en phase ou en opposition de phase, mais que le rapport existant entre les amplitudes de  $x_1$  et  $x_2$  est ici, dans un cas "non symétrique", impossible à trouver par le seul raisonnement.

En procédant ainsi, on peut rester totalement ignorant de l'aspect mathématique des choses. C'est un peu dommage, car toute occasion de construire des passerelles entre les mathématiques et la physique devrait être utilisée. Alors que le physicien arrive au résultat précédent par habitude, avec de vieilles recettes à sa convenance, le mathématicien procéderait sans doute un peu autrement, et dirait que, pour les valeurs propres de la matrice M, il a trouvé deux vecteurs propres :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ (\sqrt{5} - 1)/2 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (-\sqrt{5} - 1)/2 \end{pmatrix}$$

Dans cette base, la matrice est diagonale, et le système de départ est :

$$\begin{pmatrix} d^2X_1/dt^2 \\ d^2X_2/dt^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Cela donne immédiatement :  $X_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  et  $X_2 = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$  et on revient à  $x_1$  et  $x_2$  avec la matrice de passage formée de vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (\sqrt{5} - 1)/2 & (-\sqrt{5} - 1)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

*Remarque* : ce type de problème est à peu près la seule occasion qui soit donnée de parler en physique de diagonalisation de matrice en classes préparatoires. (La matrice d'inertie pour un solide, ou la matrice des permittivités diélectriques pour la propagation de la lumière dans les milieux anisotropes, sont des cas de matrices symétriques (donc diagonalisables), fréquemment utilisées en physique, mais qui dépassent le programme des classes préparatoires.)

### **3. Importance en physique des oscillateurs couplés**

Si la méthode précédente ne s'appliquait qu'à des systèmes mécaniques ou électriques simples, elle ne mériterait pas qu'on s'y attarde. En fait, elle peut être étendue à des systèmes constitués d'un grand nombre d'oscillateurs, voire un nombre infini. Cela trouve son application :

- dans des théories donnant des modèles de la propagation d'une onde dans un câble électrique, ou d'une onde sonore dans un cristal, ou d'une onde progressive sur une corde.
- mais surtout, soulignons que toute la mécanique quantique utilise abondamment matrices, valeurs propres et vecteurs propres. (Il est impossible d'étudier un tant soit peu la mécanique quantique sans quelques connaissances sur les espaces hermitiens et hilbertiens.)

## ANNEXE I

### APPLICATION DE LA DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURIER AU CALCUL DE LA TENSION DE SORTIE D'UN QUADRIPÔLE

On veut ici montrer comment on peut calculer la tension de sortie d'un quadripôle, en décomposant en série de Fourier le signal d'entrée. On prendra l'exemple très simple d'une tension d'entrée TRIANGULAIRE, et pour le quadripôle d'un FILTRE R-C PASSE-BAS. (fichier fourier4.ms)

> restart;

On caractérise le signal d'entrée, périodique et en dents de scie, par son amplitude et sa période. La tension d'entrée croît de  $-E_{max}$  à  $E_{max}$  entre 0 et  $T/2$ , puis décroît de  $E_{max}$  à  $-E_{max}$  entre  $T/2$  et  $T$ . On choisit  $E_{max} = 1$  V et  $T = 1$  ms, (soit une fréquence de 1000 Hz).

>  $E_{max} := 1$ ;

>  $T := 10^{-3}$ ;

>  $\omega := 2\pi/T$ ;

On calcule les premiers coefficients  $A_n$  de la décomposition en série de Fourier.

>  $A := \text{array}(1..20)$ ;

> for i from 1 to 10 do

>  $n := 2*i - 1$ ;

>  $A[n] := -8*E_{max}/(\pi*n)^2$ ;

>  $n := 2*i$ ;

>  $A[n] := 0$ ;

> od:

On définit des fonctions de deux variables  $U_e(n,t)$ , correspondant à la somme des  $n$  premiers harmoniques de la décomposition en série de Fourier. On calcule ces fonctions avec une boucle.

>  $U_e(1,t) := A[1] * \cos(\omega*t)$ ;

> for n from 2 to 20 do

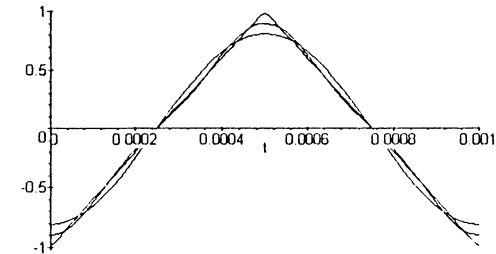
>  $U_e(n,t) := U_e(n-1,t) + A[n] * \cos(n*\omega*t)$ ;

> od:

On trace un certain nombre de ces courbes :  $U_e(1,t)$ ,  $U_e(3,t)$  et  $U_e(20,t)$ , qui correspondent respectivement au terme fondamental seul, puis avec le premier harmonique non nul, puis avec 9 harmoniques non nuls.

> plot( $\{U_e(1,t), U_e(3,t), U_e(20,t)\}, t=0..T, \text{color}=\text{black}, \text{thickness}=1$ );

>



On constate que l'on a très bien approché la fonction triangulaire en se limitant aux harmoniques d'ordre inférieur ou égal à 20.

### CALCUL DES TENSIONS DE SORTIE CORRESPONDANT A CHAQUE HARMONIQUE

Le quadripôle considéré est un filtre RC passe-bas. On donne les valeurs de R et de C. On sait que la pulsation de coupure (pour la bande passante à 3 dB) est  $1/RC$ .

>  $R := 1000$ ;

>  $C := 10^{-7}$ ;

>  $\omega_0 := 1/(R*C)$ ;

$$\omega_0 := 10000$$

Cela correspond à une fréquence de coupure égale à 1590 Hz, légèrement supérieure à la fréquence de la tension d'entrée. On calcule les fonctions  $U_s(n,t)$  obtenues en sortie lorsqu'on a  $U_e(n,t)$  en entrée. On calcule pour cela l'amplitude  $B_n$  de chaque harmonique  $A_n$  en sortie (avec le gain du filtre), puis  $U_s(n,t)$  avec en tenant compte du déphasage.

>  $B := \text{array}(1..20)$ ;

>  $B[1] := A[1] * (1 + (\omega/\omega_0)^2)^{-1/2}$ ;

>  $U_s(1,t) := B[1] * \cos(\omega*t - \arctan(\omega/\omega_0))$ ;

> for n from 2 to 20 do

>  $B[n] := A[n] * (1 + (n*\omega/\omega_0)^2)^{-1/2}$ ;

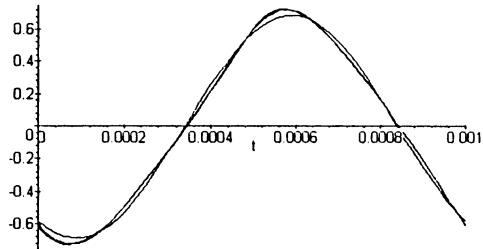
>  $U_s(n,t) := U_s(n-1,t) + B[n] * \cos(n*\omega*t - \arctan(n*\omega/\omega_0))$ ;

> od:

On représente maintenant les courbes  $Us(1,t)$ ,  $Us(3,t)$  et  $Us(20,t)$  sur une période.

```
> plot( {Us(1,t), Us(3,t), Us(20,t)}, t = 0..T, color=black, thickness=1);
```

>



Le rôle des harmoniques est ici peu important, ce qui est normal puisque le premier harmonique non nul correspond à une fréquence de 3000 Hz, supérieure à la fréquence de coupure du filtre, et est donc fortement atténué.

On peut aussi tracer la tension d'entrée et la tension de sortie, telles qu'on les a en ajoutant tous les harmoniques jusqu'à l'ordre 20 (voir courbe ci-après).

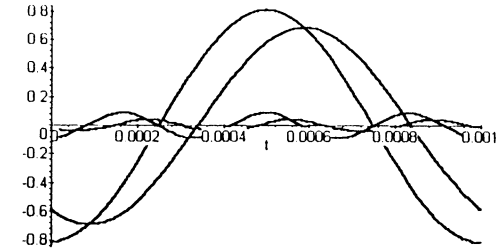
92 > courbe1 := plot( Ue(20,t), t = 0..T, -1.5..1.5, numpoints=200, thickness=2):  
 > courbe2 := plot( Us(20,t), t = 0..T, -1.5..1.5, numpoints=200, thickness=3):  
 > courbe3 := PLOT(TEXT( [T/2,-0.8], `Tension à la sortie d'un filtre R-C passe-ba  
 > s`, FONT(TIMES, BOLD, 12) ), TEXT( [T/2,-0.95], `de fréquence de coupure 1591  
 > Hz, lorsque la tension d'entrée`, FONT(TIMES, BOLD, 12) ), TEXT( [T/2,-1.1], `e  
 > st triangulaire, de fréquence 1000 Hz`, FONT(TIMES, BOLD, 12) ) );  
 > plots[display] ({courbe1, courbe2, courbe3});

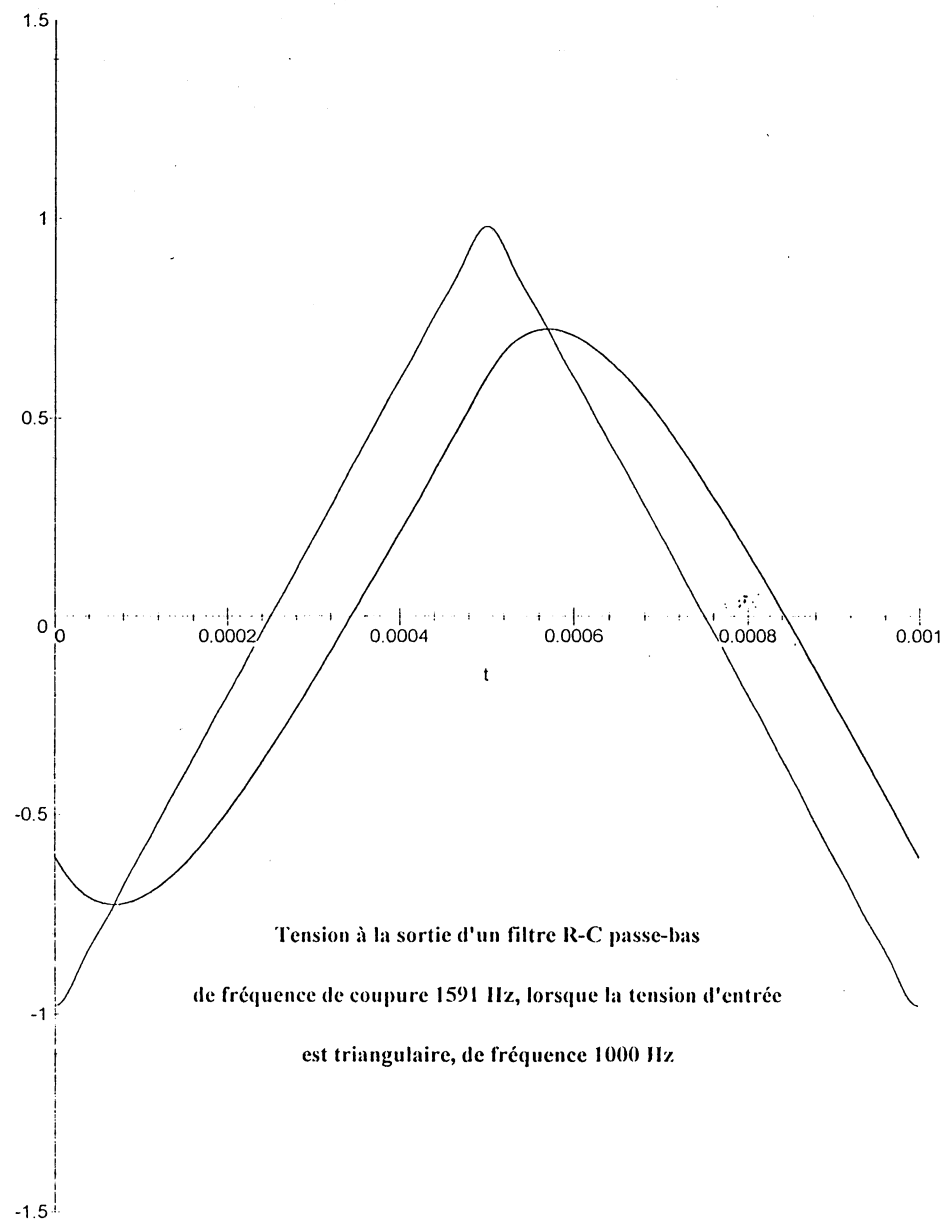
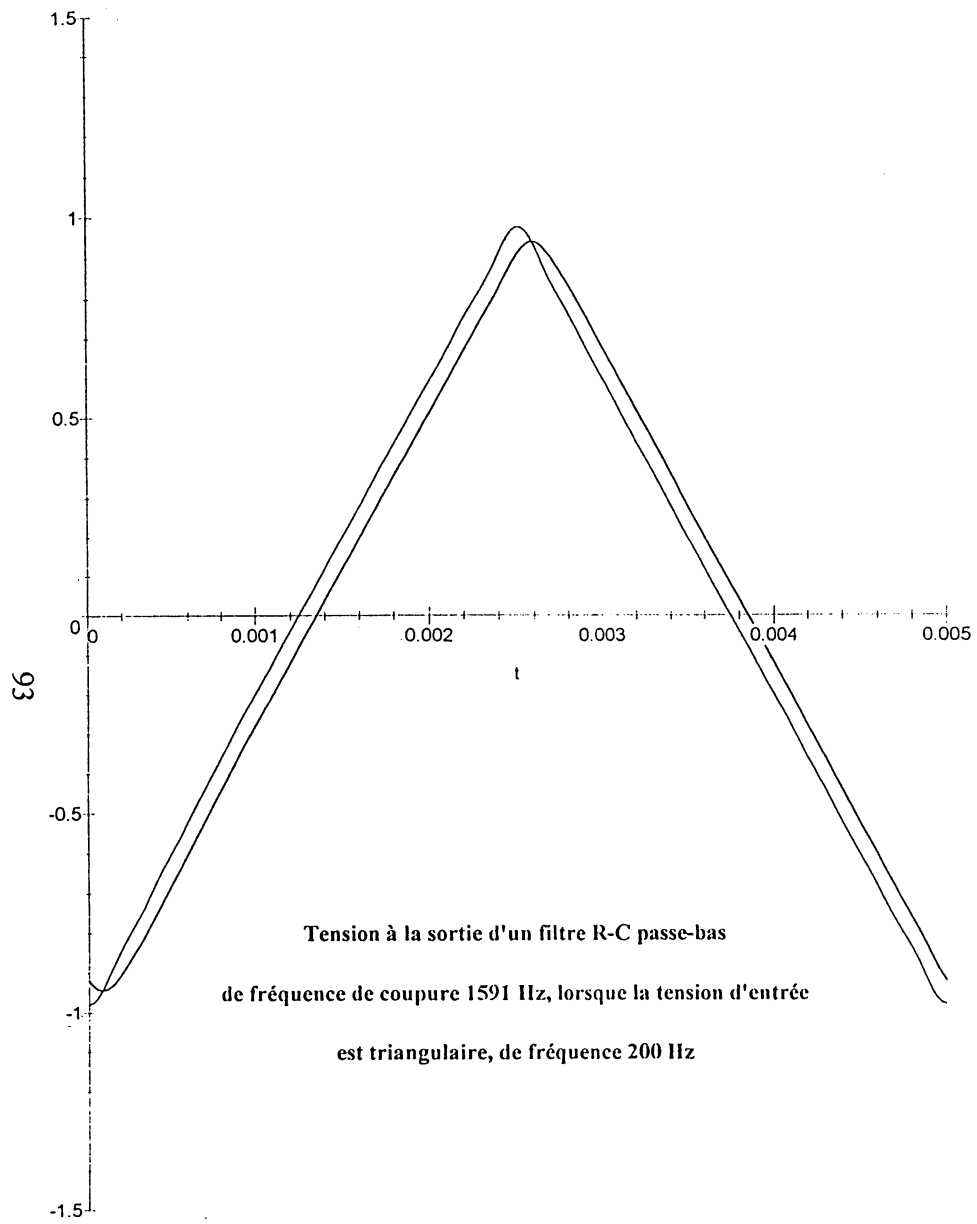
Pour comprendre mieux ce qui se passe, on peut représenter séparément le fondamental et le premier harmonique non nul des tensions d'entrée et de sortie. On voit clairement que l'harmonique (d'ordre 3) est plus atténué et plus déphasé que le fondamental. Néanmoins, cet harmonique n'est pas totalement filtré, ce qui explique que la tension de sortie ne soit pas simplement sinusoïdale.

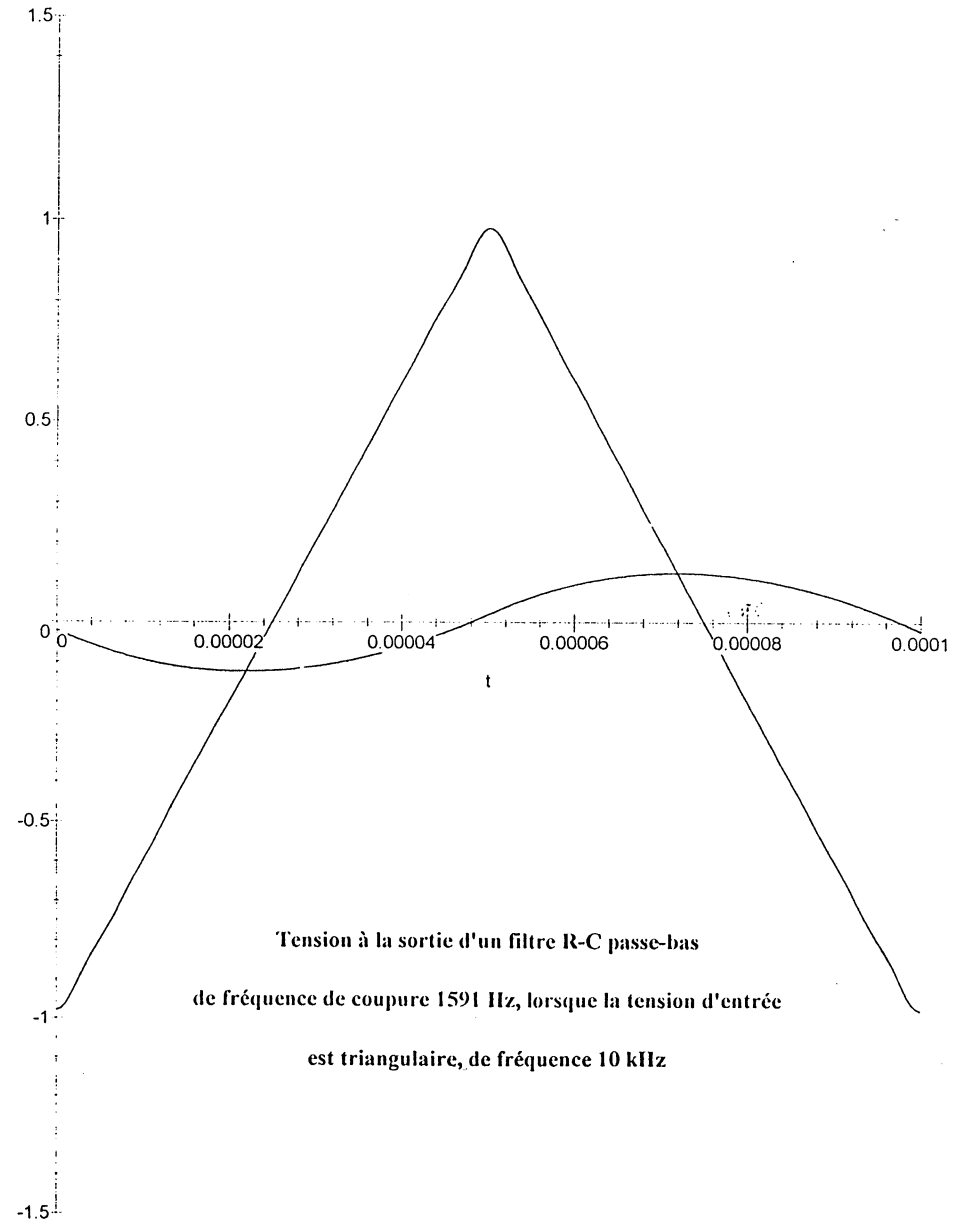
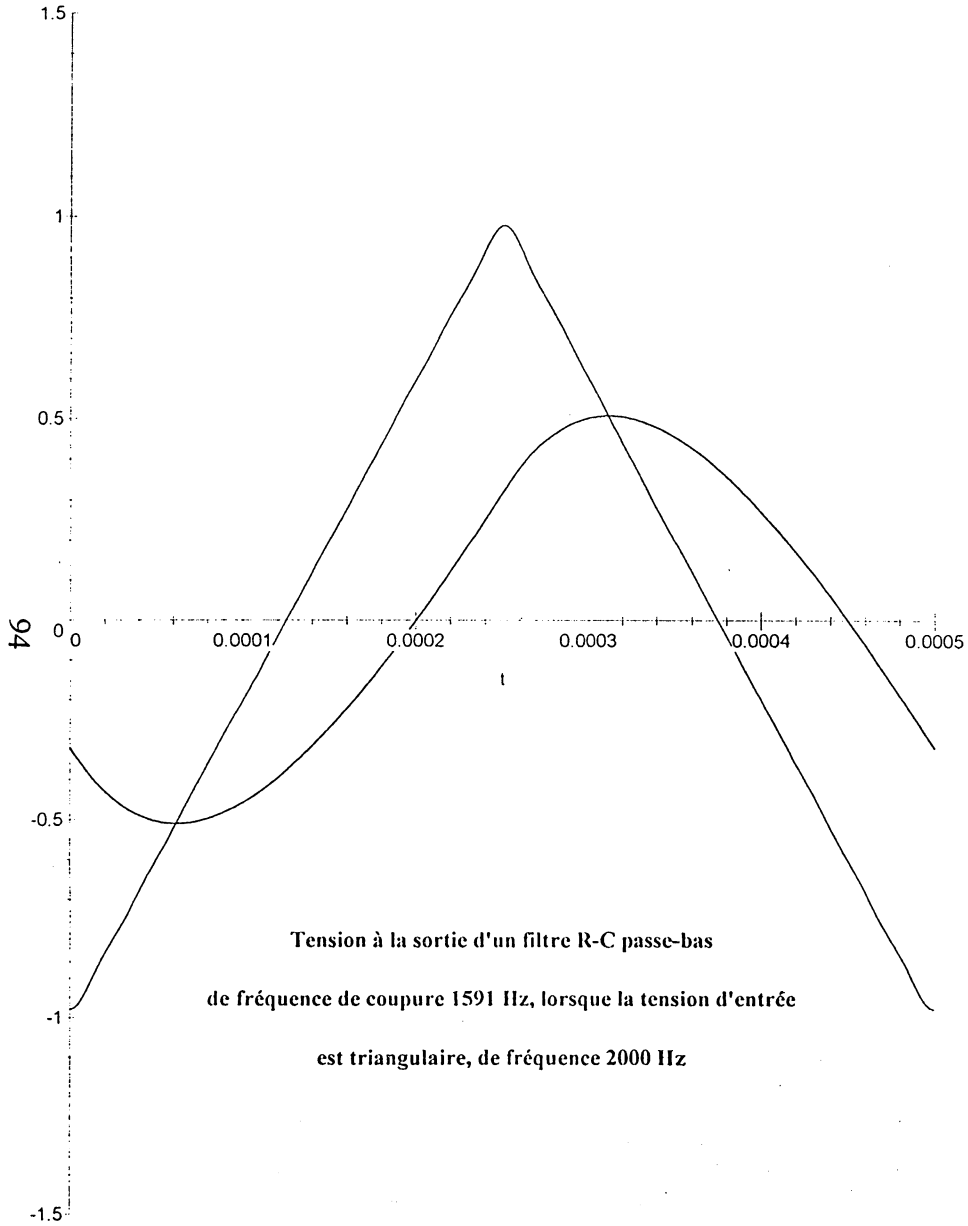
```
> plot( {Ue(1,t), Ue(3,t)-Ue(1,t), Us(1,t), Us(3,t)-Us(1,t)}, t = 0..T, color=black, thick  

  > ness=2);
```

>







**ANNEXE II: UTILISATION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER POUR CALCULER CE QUE DONNE UN FILTRE R-C PASSE-BAS SOUMIS À DES ENTRÉES DIVERSES (fichier fourie1.ms)**

```
> restart;
> readlib(fourier);
```

**I. LE SIGNAL D'ENTRÉE EST UN CRÉNEAU DE DURÉE T.** On fabrique le signal d'entrée à l'aide de la fonction de Heaviside, et non avec une fonction par morceaux, parce que Maple sait en calculer facilement la transformée de Fourier.

```
> e(t) := Heaviside(t + T/2) - Heaviside(t - T/2);
e(t) := Heaviside(t + 1/2 T) - Heaviside(t - 1/2 T)
```

```
> g1(w) := fourier(e(t), t, w);
```

$$g1(w) := -\frac{I e^{\left(\frac{1}{2} I w T\right)}}{w} + \frac{I e^{\left(-\frac{1}{2} I w T\right)}}{w}$$

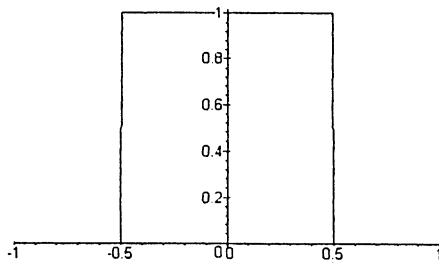
```
> g2(w) := simplify(g1(w));
```

$$g2(w) := 2 \frac{\sin\left(\frac{1}{2} w T\right)}{w}$$

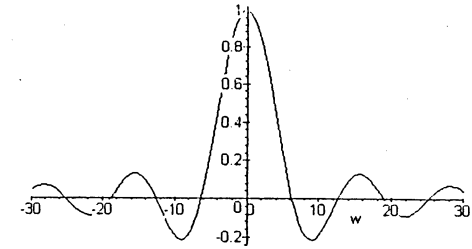
On trouve le résultat classique en sinus-cardinal. On trace les deux fonctions :

```
> T := 1;
> plot(e(t), t = -1..1);
```

$$T := 1$$



```
> plot(g2(w), w = -30..30);
```



$H(w)$  est la fonction de transfert pour le filtre R-C passe-bas. Le spectre en sortie est le produit de  $H(w)$  par le spectre de Fourier  $g(w)$ .

```
> H(w) := 1/(1 + I*tau*w);
```

$$H(w) := \frac{1}{1 + I \tau w}$$

```
> s1(t) := invfourier(H(w)*g2(w), w, t);
```

$$s1(t) := \text{invfourier}\left(2 \frac{\sin\left(\frac{1}{2} w T\right)}{(1 + I \tau w) w}, w, t\right)$$

```
> s2(t) := simplify(evalc(s1(t)));
```

$$\begin{aligned} s2(t) := & -\frac{1}{2} \left( e^{\left(-\frac{\%1 t}{\tau}\right)} \text{Heaviside}\left(t + \frac{1}{2}\right) - e^{\left(\frac{\%1}{\tau}\right)} \text{Heaviside}\left(-t - \frac{1}{2}\right) \right) \\ & + 2 \text{Heaviside}\left(-t - \frac{1}{2}\right) e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{\%1 (2t-1)}{\tau}\right)} - \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2}\right) e^{\left(-\frac{\%1 (2t-1)}{\tau}\right)} \\ & + \text{Heaviside}\left(-t + \frac{1}{2}\right) - 2 \text{Heaviside}\left(-t + \frac{1}{2}\right) e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{\%1 (2t-1)}{\tau}\right)} \\ & + \%1 e^{\left(\frac{\%1}{\tau}\right)} \text{Heaviside}\left(-t - \frac{1}{2}\right) + \%1 e^{\left(-2 \frac{\%1 t}{\tau}\right)} \text{Heaviside}\left(t + \frac{1}{2}\right) \\ & - \%1 \text{Heaviside}\left(-t + \frac{1}{2}\right) - \%1 \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2}\right) e^{\left(-\frac{\%1 (2t-1)}{\tau}\right)} \left( e^{\left(\frac{1}{2} \frac{\%1 (2t-1)}{\tau}\right)} \right) \end{aligned}$$

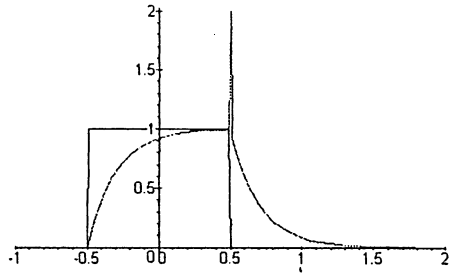
$$\%1 := \text{csn}(\text{conjugate}(\tau))$$

On peut se demander s'il y a moyen de simplifier une telle expression ! ?

```
> tau := 0.2;
```

$$\tau := .2$$

```
> plot({f(t), s2(t)}, t=-1..2);
```



Cette courbe est pour le moins étrange au voisinage de  $t = 0,5$  !!

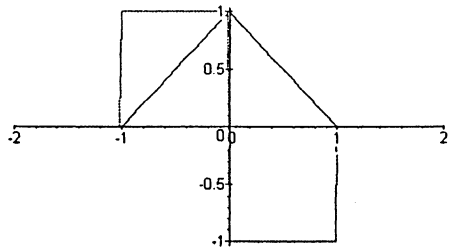
II. LE SIGNAL D'ENTRÉE EST UN UNIQUE TRIANGLE.

```
> restart;
> readlib(fourier);
```

Construisons une fonction en triangle à partir de deux créneaux.

```
> e1(t) := Heaviside(t + 1) - 2*Heaviside(t) + Heaviside(t - 1);
      e1(t) := Heaviside(t + 1) - 2 Heaviside(t) + Heaviside(t - 1)
> e2(t) := int(e1(t), t);
      e2(t) := (t + 1) Heaviside(t + 1) - 2 t Heaviside(t) + (t - 1) Heaviside(t - 1)
> plot({e1(t), e2(t)}, t=-2..2);
```

96



On a bien fabriqué une fonction triangulaire en intégrant un double créneau.

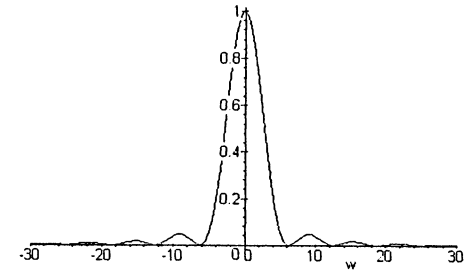
```
> g1(w) := fourier(e2(t), t, w);
      g1(w) := I \left( \pi \operatorname{Dirac}(1, w) + \frac{I e^{I w}}{w^2} + \frac{e^{I w}}{w} \right) - \frac{I e^{I w}}{w} - 2 I \left( \pi \operatorname{Dirac}(1, w) + \frac{I}{w^2} \right)
      + I \left( \pi \operatorname{Dirac}(1, w) + \frac{I e^{-I w}}{w^2} - \frac{e^{-I w}}{w} \right) + \frac{I e^{-I w}}{w}
```

```
> g2(w) := simplify(g1(w));
```

$$g2(w) := -2 \frac{\cos(w) - 1}{w^2}$$

La transformée de Fourier du signal triangulaire est très simple. On peut en tracer l'allure.

```
> plot(g2(w), w = -30..30);
```



```
> H(w) := 1/(1 + I*tau*w);
```

$$H(w) := \frac{1}{1 + I \tau w}$$

```
> s1(t) := invfourier(H(w)*g2(w), w, t);
```

$$s1(t) := \operatorname{invfourier}\left(-2 \frac{\cos(w) - 1}{(1 + I \tau w) w^2}, w, t\right)$$

```
> s2(t) := simplify(evalc(s1(t)));
```

$$s2(t) := \frac{1}{2} \left( \tau e^{\left(2 \frac{\%1}{\tau}\right)} \operatorname{Heaviside}(-t - 1) + \tau e^{\left(-2 \frac{\%1}{\tau}\right)} \operatorname{Heaviside}(t + 1) \right) - 2 \operatorname{Heaviside}(-t - 1) t e^{\left(-\frac{\%1(t-1)}{\tau}\right)} - 2 \operatorname{Heaviside}(-t - 1) e^{\left(-\frac{\%1(t-1)}{\tau}\right)} + \tau \operatorname{Heaviside}(-t + 1) + \tau \operatorname{Heaviside}(t - 1) e^{\left(-2 \frac{\%1(t-1)}{\tau}\right)} - 2 \operatorname{Heaviside}(-t + 1) t e^{\left(-\frac{\%1(t-1)}{\tau}\right)} + 2 \operatorname{Heaviside}(-t + 1) e^{\left(-\frac{\%1(t-1)}{\tau}\right)} - 2 \tau \operatorname{Heaviside}(t) e^{\left(-\frac{\%1(2t-1)}{\tau}\right)} - 2 \tau \operatorname{Heaviside}(-t) e^{\left(\frac{\%1}{\tau}\right)} + 4 t \operatorname{Heaviside}(-t) e^{\left(-\frac{\%1(t-1)}{\tau}\right)} + 2 \tau \operatorname{Heaviside}(-t - 1) e^{\left(-\frac{\%1(t-1)}{\tau}\right)} + \tau e^{\left(-2 \frac{\%1}{\tau}\right)} \operatorname{Heaviside}(t + 1) - \tau e^{\left(2 \frac{\%1}{\tau}\right)} \operatorname{Heaviside}(-t - 1)$$



$$\begin{aligned}
& + 2 \tau \operatorname{Heaviside}(-t+1) e^{\left(-\frac{\%1(t-1)}{\tau}\right)} + \tau \operatorname{Heaviside}(t-1) e^{\left(-2 \frac{\%1(t-1)}{\tau}\right)} \\
& - \tau \operatorname{Heaviside}(-t+1) - 4 \tau \operatorname{Heaviside}(-t) e^{\left(-\frac{\%1(t-1)}{\tau}\right)} \\
& - 2 \tau \operatorname{Heaviside}(t) e^{\left(-\frac{\%1(2t-1)}{\tau}\right)} + 2 \tau \operatorname{Heaviside}(-t) e^{\left(\frac{\%1}{\tau}\right)} e^{\left(\frac{\%1(t-1)}{\tau}\right)}
\end{aligned}$$

`%1 := csgn(conjugate( $\tau$ ))`

>

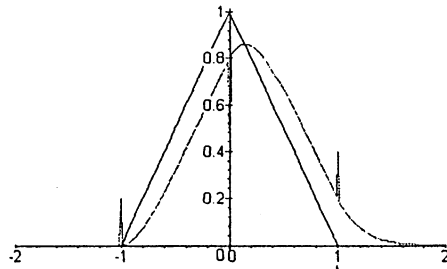
Là encore, le résultat a sans doute une forme plus simple ! ?

> `tau := 0.2;`

`tau := .2`

> `plot({e2(t), s2(t)}, t=-2..2);`

>



Là aussi, la courbe obtenue est correcte, avec toutefois de petits "problèmes" pour  $t = -1, 0$  et  $1$ , valeurs pour lesquelles le signal d'entrée présente des ruptures de pente.

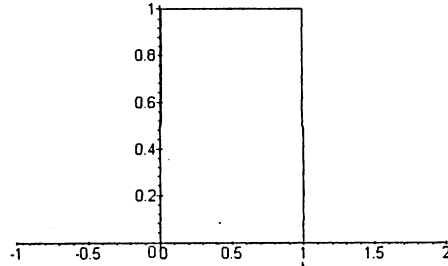
ANNEXE III : UTILISATION DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE POUR CALCULER CE QUE DONNE UN FILTRE R-C PASSE-BAS SOUMIS À DES ENTRÉES DIVERSES (fichier laplace2.ms)

```
> restart;
> readlib(laplace):
```

I. CAS OÙ LE SIGNAL D'ENTRÉE EST UN UNIQUE CRÉNEAU D'AMPLITUDE 1 ENTRE 0 ET T.

```
> e(t) := Heaviside(t) - Heaviside(t - T);
      e(t) := Heaviside(t) - Heaviside(t - T)
> T := 1;
      T := 1
```

```
> plot(e(t), t = -1..2);
>
```



```
> F(p) := laplace(e(t), t, p);
```

$$F(p) := \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}$$

```
> H(p) := 1/(1 + tau*p);
```

$$H(p) := \frac{1}{1 + \tau p}$$

```
> s(t) := invlaplace(H(p)*F(p), p, t);
```

$$s(t) := \int_0^t \frac{e^{-\frac{U}{\tau}} (1 - \text{Heaviside}(t - U - 1))}{\tau} d_U$$

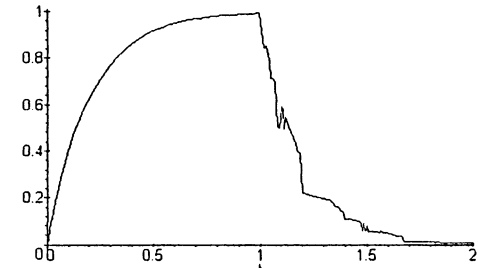
```
> s2(t) := simplify(eval(s(t)));
```

$$s4(t) := - \frac{\int_0^t e^{-\frac{U}{\tau}} (-1 + \text{Heaviside}(t - U - 1)) d_U}{\tau}$$

86

Maple semble avoir du mal à simplifier cette expression !

```
> tau := 0.2;
      tau := .2
> plot(s2(t), t=-0..2);
>
```



Le moins qu'on puisse dire est que le résultat n'est guère satisfaisant.

```
> restart;
> readlib(laplace):
```

En fait, le produit  $F(p)*H(p)$  se décompose facilement à la main sous la forme :

```
> S(p) := 1/p - exp(-p)/p - 1/(p + 1/tau) + exp(-p)/(p + 1/tau);
```

$$S(p) := \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{e^{-p}}{p + \frac{1}{\tau}}$$

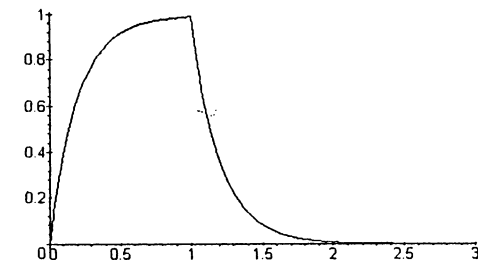
```
> s3(t) := invlaplace(S(p), p, t);
```

$$s3(t) := 1 - \text{Heaviside}(t - 1) - e^{-\frac{t}{\tau}} + \text{Heaviside}(t - 1) e^{-\frac{t-1}{\tau}}$$

```
> tau := .2;
```

$$\tau := .2$$

```
> plot(s3(t), t=0..3);
>
```



Le résultat est nettement plus satisfaisant. Tout le problème est donc de réaliser avec

Maple la décomposition en "éléments simples" du produit  $F(p)*H(p)$ . La difficulté est que ce produit n'est pas une simple fraction rationnelle (à cause de l'exponentielle...)

## II. ÉTABLISSEMENT D'UN RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT

```
> restart;
> readlib(laplace);
> e(t) := sin(omega*t);
```

$$e(t) := \sin(\omega t)$$

```
> F(p) := laplace(e(t), t, p);
```

$$F(p) := \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

```
> H(p) := 1/(1 + tau*p);
```

$$H(p) := \frac{1}{1 + \tau p}$$

```
> s(t) := invlaplace(F(p)*H(p), p, t);
```

$$s(t) := \frac{\sin(\omega t)}{1 + \tau^2 \omega^2} - \frac{\omega \tau \cos(\omega t)}{1 + \tau^2 \omega^2} + \frac{\omega \tau^2 e\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{\tau + \tau^3 \omega^2}$$

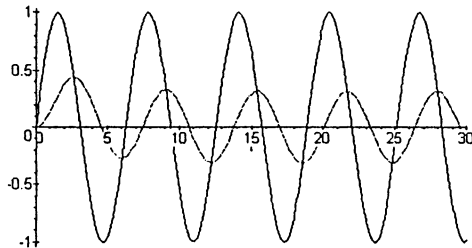
```
> omega := 1; tau := 3;
```

$$\omega := 1$$

$$\tau := 3$$

```
66 > plot({e(t), s(t)}, t=0..30);
```

```
>
```



Sur cet exemple, le logiciel se montre indéniablement très efficace.

## III. LE SIGNAL D'ENTRÉE EST UNE MAXWELLIENNE

```
> restart;
> readlib(laplace);
> e(t) := t^2*exp(-t);
```

$$e(t) := t^2 e^{-t}$$

```
> F(p) := laplace(e(t), t, p);
```

$$F(p) := 2 \frac{1}{(p+1)^3}$$

```
> H(p) := 1/(1 + tau*p);
```

$$H(p) := \frac{1}{1 + \tau p}$$

```
> s(t) := invlaplace(F(p)*H(p), p, t);
```

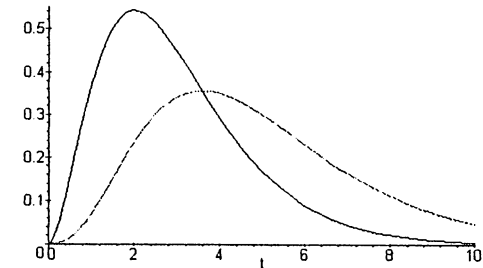
$$s(t) := -2 \frac{\tau^2 e^{-t}}{-3 \tau^2 + \tau^3 + 3 \tau - 1} - 2 \frac{t e^{-t} \tau}{-2 \tau + \tau^2 + 1} - \frac{t^2 e^{-t}}{\tau - 1} + 2 \frac{\tau^3 e\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{-3 \tau^3 + \tau^4 + 3 \tau^2 - \tau}$$

```
> tau := 2;
```

$$\tau := 2$$

```
> plot({e(t), s(t)}, t=0..10);
```

```
>
```



Le signal de sortie est retardé et atténué, du fait du temps de réponse  $\tau = RC$  du circuit.

ANNEXE IV : RÉOLUTION AVEC LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL EN CINÉTIQUE CHIMIQUE (fichier laplace1.ms)

> restart;

> readlib(laplace);

Le système d'équations reliant les transformées de Laplace a, b et r des trois concentrations A, B et R est le suivant :

> Eq1 := p\*a = k1\*r - (k2 + k3)\*a;

$$Eq1 := p a = k1 r - (k2 + k3) a$$

> Eq2 := p\*b = k3\*a;

$$Eq2 := p b = k3 a$$

> Eq3 := p\*r - R0 = k2\*a - k1\*r;

$$Eq3 := p r - R0 = k2 a - k1 r$$

> sols := solve({Eq1, Eq2, Eq3}, {a, b, r});

$$sols := \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{R0(p+k2+k3)}{p^2+p k1+k2 p+k3 p+k3 k1}, a = \frac{R0 k1}{p^2+p k1+k2 p+k3 p+k3 k1}, \\ b = \frac{k3 R0 k1}{p(p^2+p k1+k2 p+k3 p+k3 k1)} \end{array} \right\}$$

> assign(sols);

Ayant ainsi obtenu a, b et r, on en déduit les concentrations A, B et R en calculant la transformée de Laplace inverse de a, b et r.

> A(t) := invlaplace(a, p, t);

$$A(t) := 2 R0 k1 e^{\left(-\frac{1}{2} t k1 - \frac{1}{2} t k2 - \frac{1}{2} t k3\right)} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{2 k3 k1 - k1^2 - 2 k1 k2 - k2^2 - 2 k2 k3 - k3^2} t\right)}{\sqrt{2 k3 k1 - k1^2 - 2 k1 k2 - k2^2 - 2 k2 k3 - k3^2}}$$

> B(t) := invlaplace(b, p, t);

$$B(t) := R0 - \frac{R0 k1 \%2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\%1} t\right)}{\sqrt{\%1}} - \frac{R0 k2 \%2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\%1} t\right)}{\sqrt{\%1}} - \frac{R0 k3 \%2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\%1} t\right)}{\sqrt{\%1}} - R0 \%2 \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\%1} t\right)$$

$$\%1 := 2 k3 k1 - k1^2 - 2 k1 k2 - k2^2 - 2 k2 k3 - k3^2$$

$$\%2 := e^{\left(-\frac{1}{2} t k1 - \frac{1}{2} t k2 - \frac{1}{2} t k3\right)}$$

> R(t) := invlaplace(r, p, t);

$$R(t) := -\frac{R0 k1 \%2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\%1} t\right)}{\sqrt{\%1}} + \frac{R0 k2 \%2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\%1} t\right)}{\sqrt{\%1}} + \frac{R0 k3 \%2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\%1} t\right)}{\sqrt{\%1}} + R0 \%2 \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\%1} t\right)$$

$$\%1 := 2 k3 k1 - k1^2 - 2 k1 k2 - k2^2 - 2 k2 k3 - k3^2$$

$$\%2 := e^{\left(-\frac{1}{2} t k1 - \frac{1}{2} t k2 - \frac{1}{2} t k3\right)}$$

On pourra remarquer qu'un calcul "à la main" conduit à des expressions analytiques plus simples. Quoiqu'il en soit, ces résultats sont corrects, même si Maple semble avoir du mal à les simplifier.

Prenons maintenant des valeurs numériques pour pouvoir tracer l'évolution des concentrations.

> k1 := 100; k2 := 10; k3 := 100; R0 := 1;

$$k1 := 100$$

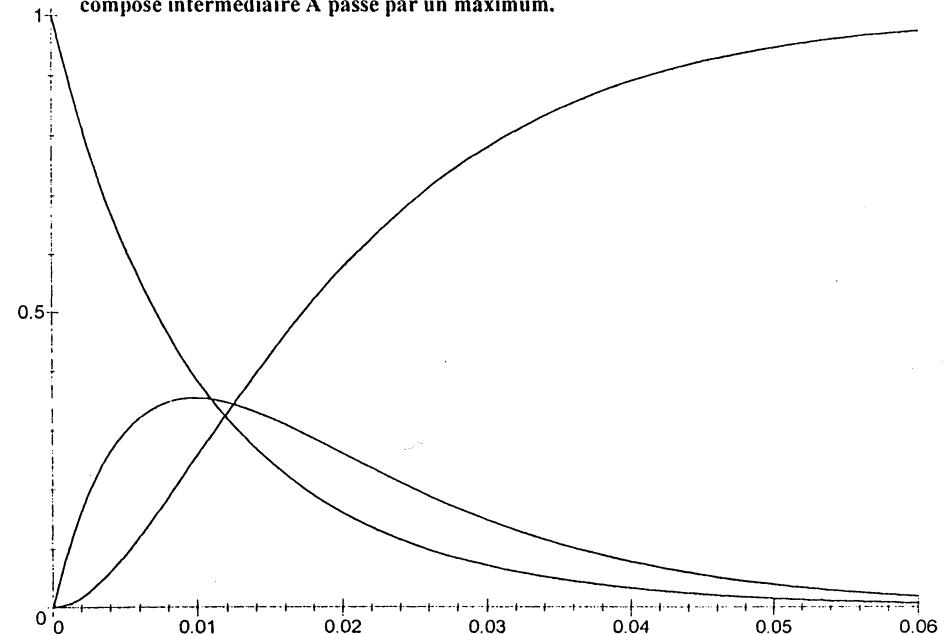
$$k2 := 10$$

$$k3 := 100$$

$$R0 := 1$$

> plot({A(t), B(t), R(t)}, t = 0..0.06, 0..2, color=black, thickness=3);

On peut tracer les trois courbes donnant l'évolution des concentrations dans le temps. La concentration du réactif R est décroissante, celle du produit B est croissante, celle du composé intermédiaire A passe par un maximum.



**I - AUTEURS**

Daniel Lecouturier, Luc Sinègre, Frédéric Vivien, Gildas le Hir, Thierry Hamel, Eliane Andrieu, Yves Suprin, Bertrand Fort, Thomas Chénel.

**II - TITRE**

**R 123 AIMER FAIRE DES MATHS 5**

**III - CARACTERISTIQUES DE L'EDITION**

Edité par l'IREM DE ROUEN  
Brochure de l'IREM de ROUEN  
Format : A4  
ISBN : 2-86-239-078-X  
Date de parution : Juin 1998

**IV - TYPE DE DOCUMENTS ET SUPPORT**

Type : /  
Support : /

**V - PUBLIC VISE**

NIV : Professeurs de lycée, collèges, Post-Bac  
AGE : /

**VI - CONTENUS**

RESUME : Actes du Stage P.A.F. "Aimer faire des Maths"  
Bibliogr. /  
MCL : Points visibles ou invisibles, Maple, dénombrement,  
Bac S, spécialité, Joukovski, écoulements,  
Morley, Isogonal, Cabri-Géomètre II,  
fractions continues, Bernstein, Bezier,  
Physique, équations différentielles

\*\*\*\*\*

**BON DE COMMANDE**

M., Mme, Melle :  
Adresse :

<i>LIBELLE :</i>	<i>PRIX</i>	<i>QUANTITE</i>	<i>TOTAL</i>
R 123 Aimer faire des maths 5	40 F		

Frais d'envoi : 15 F pour le 1<sup>er</sup> livre et 5 F par livre supplémentaire (France)  
Frais réels pour l'étranger

**SOMME DUE :**

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :  
**L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN**  
Et adressés directement à l'I.R.E.M. - B.P. 153 - 76135 MONT SAINT AIGNAN  
Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 02.35.14.61.41.

RIB : TP ROUEN TGV 10071 76000 00044004056 81

\*\*\*\*\*

DATE : SIGNATURE :