

---

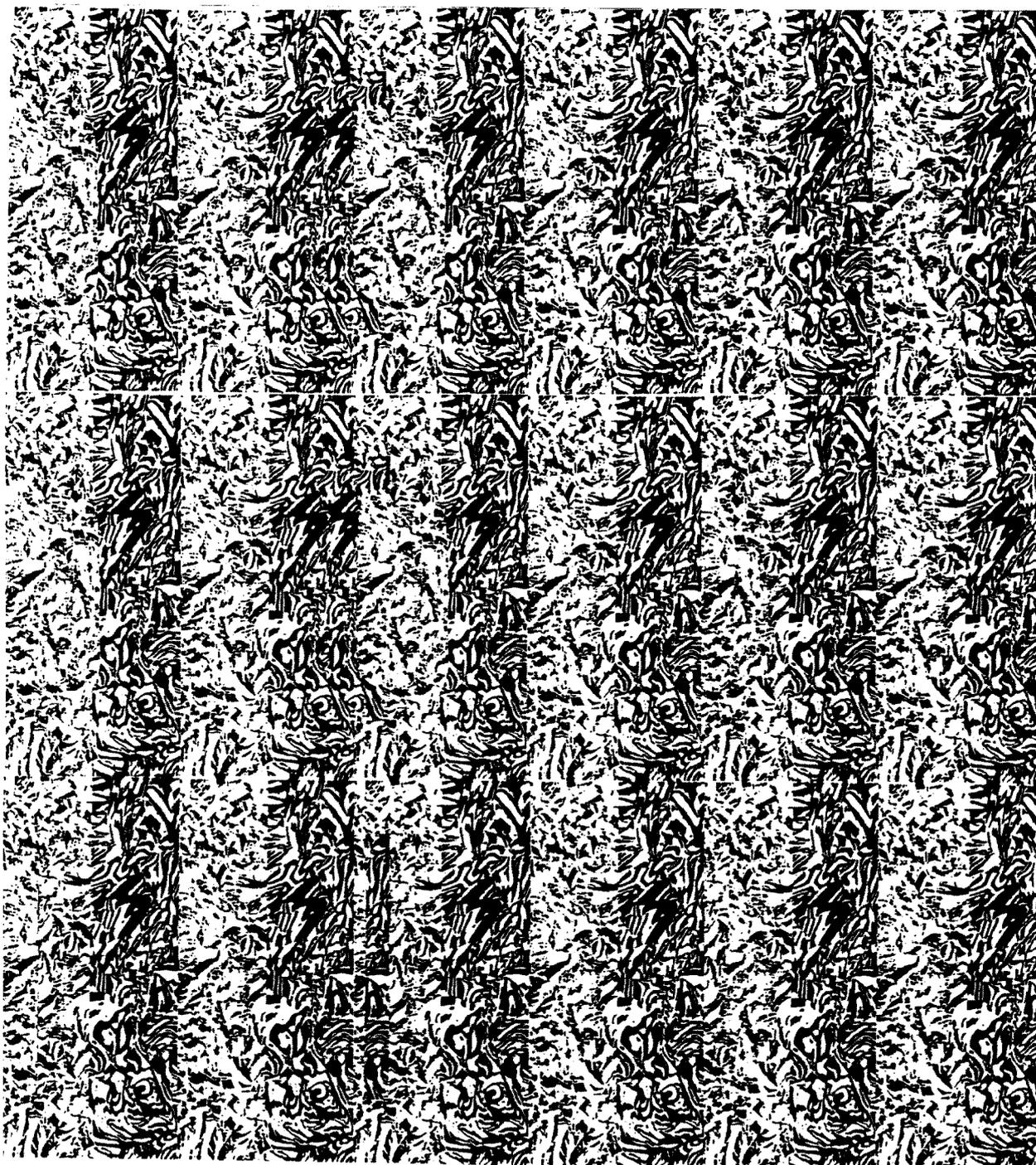
# L'OUVERT

---

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

n<sup>os</sup> 100&101 SEPTEMBRE 2000

I.S.S.N. 0290 - 0068



#### NOTRE COUVERTURE

Stéréogramme 100 illustrant le numéro double 100&101.

En vision parallèle 100, écrit verticalement, se détache au-dessus du fond. Ce stéréogramme a été réalisé à la photocopieuse. Voir les explications dans l'article de LEFORT pages 86-89.

## EDITORIAL

Voici venu le numéro 100 de "*L'Ouvert*", et ceci en l'an 2000! Pourquoi lui donner plus d'importance qu'au numéro 99, tout beau avec ses deux 9? Pour l'expliquer, citons Jean Lefort dans la préface de son livre **La Saga des Calendriers** ou Le Frisson Millénariste (\*) : "Magie des nombres ronds : 2000 n'est ni l'âge de notre calendrier, ni la durée qui nous sépare de la naissance du Christ, ni même la première année du troisième millénaire, mais, chrétiens ou non chrétiens, nombreux seront ceux qui célébreront avec faste le premier jour de l'an 2000!"

Nous succombons aussi au charme de ce nombre "rond" de notre système décimal. Mais, contrairement à l'an 2000, ce numéro 100 de "*L'Ouvert*" n'est pas contestable car vous avez pu collectionner, année après année, les 99 numéros qui ont déjà paru (sinon vous pouvez les consulter la Bibliothèque de l'IREM de Strasbourg (\*\*)) ou en garder des traces avec des articles que nous jugiez plus marquants, utiles ou importants. Pas question de faire ici un tour d'horizon de ce que vous avez pu y trouver : la variété et la richesse des informations est énorme lorsqu'on feuillette ces numéros, avec beaucoup d'inattendu puisque les articles se décrochent au gré des conférences, des rencontres, des conversations, au gré des bonnes volontés. Nous n'avons pas fonctionné autrement pour constituer ce numéro particulier qui est devenu un numéro double en raison de la richesse de son contenu que nous ne pouvions plus éclater. Mais par un heureux concours de circonstances, nous avons pu le construire sur un thème : l'intérêt qu'offrent les mathématiques pour d'autres branches de la science.

Pour commencer, une exception, car le premier article est exclusivement mathématique. Nous l'avons placé au début parce qu'il est inspiré d'une couverture d'un autre numéro de "*L'Ouvert*" (le 87 de juin 1997); la satisfaction de ce rebondissement sur une précédente parution nous a donné l'envie de le publier sans tarder. L'article suivant pourrait sembler encore purement mathématique, mais il nous projette dans une utilisation bien actuelle de connaissances mathématiques pour l'industrie ou le marché économique. Et les autres articles sont bien dans le cadre indiqué. Ils évoquent de plus pour nous une rubrique que nous avons ouverte, intitulée "Dans nos groupes IREM", qui a pu relater quelques travaux des groupes "Maths-Français", "Philosophie-Mathématique". Enfin, l'article sur Bach et les mathématiques nous rappelle que la musique fut longtemps une branche des mathématiques.

Le nombre de pages est un clin l'oeil à ce numéro double!

O. SCHLADENHAUFEN

---

(\*) Ed. Pour la Science, 1998.

(\*\*) Tous les sommaires de "*L'Ouvert*" se trouvent sur le site Internet de l'IREM : <http://irem.u-strasbg.fr>.

## L'EXPOSITION *MATH.U-VU ?* et la suite...

Parmi ceux auxquels nous nous sommes adressés pour parler d'exposition mathématique, les non mathématiciens se sont souvent montrés perplexes a priori. Peut-on présenter à des visiteurs quelque chose d'attractif sur les mathématiques ? Peut-on seulement exposer des mathématiques d'une manière un tant soit peu accessible à un large public ?

Pour notre part, nous étions confiants, d'autant plus qu'il y avait eu par le passé un précédent (en juin 1982 déjà...) : Math-Expo au Koifus à Colmar, dont Jean Lefort avait assuré la coordination. L'accueil que le public avait réservé à cette exposition avait alors été très concluant. Nous pouvions donc attendre le succès qui a en définitive couronné l'exposition "*math.u-vu ?*" en juin dernier au Conseil Général du Bas-Rhin. Cela ne veut pas dire, tant s'en faut, que tout était d'emblée facile et il convient de saluer toutes les bonnes volontés et imaginations fertiles sans lesquelles le succès n'aurait pas été au rendez-vous. Un travail de préparation important a été effectué au sein du comité mis en place pour l'exposition, dans plusieurs établissements de l'académie et dans le Bade-Wurtemberg ; des apports substantiels ont résulté de contributions personnelles ; l'animation sur place non seulement par des collègues, mais aussi par des étudiants dont la culture et la réceptivité au public ont été unanimement saluées, s'est avérée précieuse.

Dans la même perspective, en ce premier trimestre de l'année 2000-2001, plusieurs événements vont mobiliser l'IREM, le monde de l'enseignement et la communauté mathématique. Un moment important sera la semaine de la science, qui débute le 16 octobre. Dans l'académie, les manifestations les plus notables auront lieu à Mulhouse, Colmar et Strasbourg.

A Mulhouse, dès septembre (du 19 septembre au 7 octobre), la Bibliothèque-Médiathèque accueille "*Des Mathématiques et des Hommes*", une manifestation pour réconcilier scientifiques et littéraires, organisée par l'AFA (association franco-algérienne), le laboratoire de mathématiques de l'UHA (Université de Haute Alsace et le pôle haut-rhinois de l'IREM). Ensuite, le Village des Sciences, place de la Réunion, présentera de nombreuses expériences et animations interactives du 20 au 22 octobre. En même temps, le campus universitaire et certains établissements scolaires seront des lieux d'accueil pour des conférences et des présentations.

A Colmar aux mêmes dates du 20 au 22 octobre, on retrouvera sous le chapiteau (chauffé) du Village des Sciences au centre ville l'essentiel des présentations faites dans le cadre de "*math.u\_vu ?*" C'est pourquoi il était intéressant de présenter dans ce numéro de l'Ouvert le dépliant des images de l'exposition, réalisé en juin dernier. Ce dépliant conserve évidemment toute son actualité pour Colmar.

A Strasbourg, les mathématiques seront accueillies dans deux lieux à l'occasion de la semaine de la science : le chapiteau de la place Kléber du 20 au 22 octobre et le CRDP, rue du Maréchal Juin, du 16 au 20 octobre. Sous chapiteau, c'est plutôt pour le grand public que les présentations seront faites, avec, nous l'espérons, le concours de chercheurs de l'IRMA (Institut de Recherches Mathématiques Avancées) ; des domaines comme la géométrie et ses applications actuelles, la cryptographie, les traitements numériques du son et de l'image pourront être abordés sur un fond d'affiches dont certaines sont visibles sur le site de l'année mondiale des mathématiques. Voici l'adresse URL où voir ces affiches :

<http://wmy2000.math.jussieu.fr/posters.html>.

Au CRDP, dont l'adresse du site est :

<http://crdp.cristal.net>

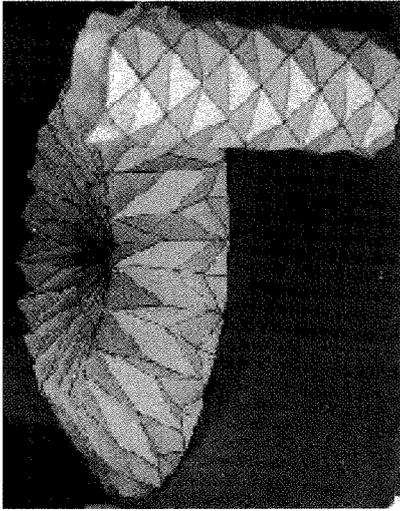
des objectifs plus particulièrement pédagogiques seront visés, à une époque où il importe de se préoccuper de l'acquisition de méthodes de travail avec les ressources actuelles. Il s'agira donc de proposer aux visiteurs, pour quelques domaines mathématiques, une réflexion incluant l'utilisation des ressources actuelles (réseau particulièrement). Les thèmes principalement abordés seront les suivants :

- l'aléatoire et sa simulation,
- la visualisation de la géométrie spatiale,
- l'histoire des mathématiques dans son actualité.

Pour chaque thème, le visiteur, qu'il soit élève, étudiant ou enseignant, pourra d'une part voir des objets, manipuler, expérimenter, d'autre part découvrir des documents multisupport, des références bibliographiques, des réalisations, des outils logiciels de simulation, effectuer des recherches sur l'internet assisté éventuellement de spécialistes de la recherche documentaire.

En guise de conclusion, une recommandation aux professeurs qui emmèneront leurs élèves à l'une des manifestations mentionnées dans cette page : si la visite constitue certes un moment de détente, dans la mesure où elle fait sortir du cadre scolaire habituel, c'est aussi une opportunité d'instruction, en liaison avec des pratiques, telle la recherche documentaire personnelle, ou des thèmes mathématiques qui sont l'objet d'exploitations didactiques. Elle sera d'autant plus fructueuse qu'elle aura été préparée et insérée parmi des activités pédagogiques suivies par le professeur. Songez-y dès le moment de prises de contact préalables ! Mettez aussi à profit les informations qui seront communiquées sur les sites du CRDP, de l'IREM et de l'Académie !

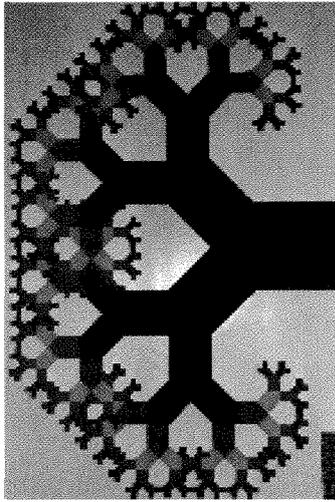
François Pluvinage.



Les objets obtenus par plissage allient l'esthétique à l'utile (études de flambage).

*Présenté par le lycée Schuré de Barr*

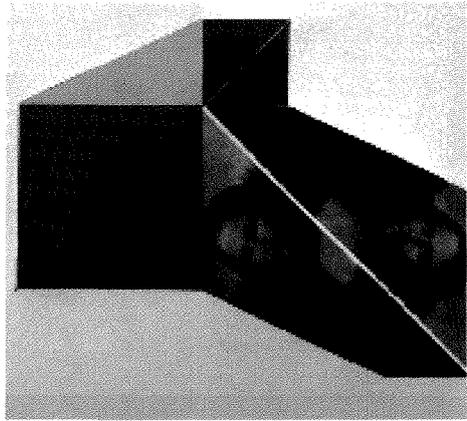
### MODELISATION, DÉMONSTRATIONS ET SIMULATIONS



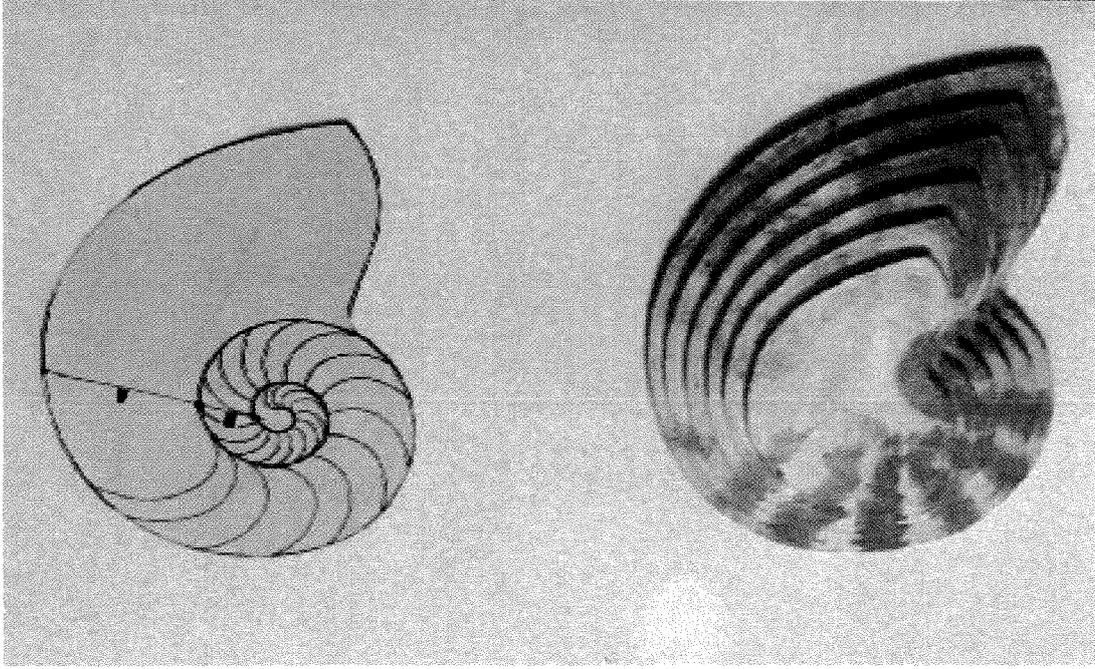
Ainsi mis en scène dans un objet fractal, aviez-vous reconnu les ingrédients du théorème de Pythagore ?

Certaines démonstrations du théorème de Pythagore s'appuyant sur des puzzles sont dues à Léonard de Vinci.

*Présentés par le lycée Scheurer Kestner de Thann*



### REGARDS MATHÉMATIQUES SUR LA NATURE

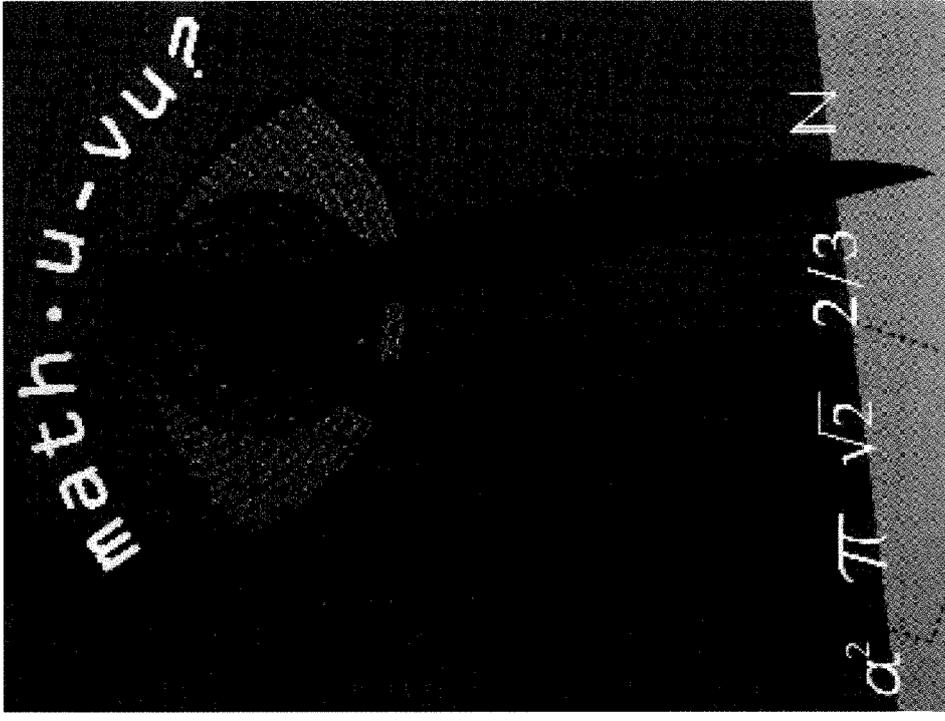


En connaissant les caractéristiques mathématiques des spirales de la coquille d'un nautilus, on peut reproduire leur harmonie.

*Présenté par le lycée Marc Bloch de Bischheim*

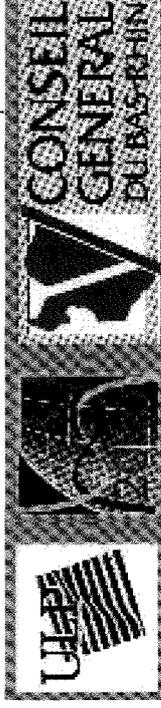
L'IREM de Strasbourg remercie les élèves et les professeurs dont l'enthousiasme a permis cette exposition, ainsi que les personnes qui ont accepté d'animer les visites, notamment les étudiants du Magistère de mathématique.

### IMAGES DE L'EXPOSITION



Affiche de l'exposition : agence COSM

*Des jeunes d'Alsace et du Bade-Wurtemberg exposent à l'Hôtel du Département du Bas-Rhin, du 16 au 28 juin 2000.*  
 Manifestation organisée par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Université Louis Pasteur, à l'occasion de l'Année Mondiale des Mathématiques.



## SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 100 & 101 – SEPTEMBRE 2000

◇ Notre couverture : Stéréogramme 100 illustrant le numéro double 100 & 101 . . .	I
◇ Editorial . . . . .	II
◇ L'exposition "math.u-vu ?" et la suite . . . . .	III
◇ Générations géométrique et algébrique des triplets pythagoriciens, par A. STOLL . . . . .	1
◇ Cryptographie et arithmétique, par M. MIGNOTTE . . . . .	9
◇ Des équations intégrales au formalisme de la mécanique quantique, par J. HARTHONG . . . . .	15
◇ Algèbre linéaire et science économique, un cas exemplaire, par J. ARROUS . . . . .	35
◇ Les lois de la cristallographie en décoration plane périodique (1ère partie), par R. COUSANDIER et P. BUCHERT . . . . .	52
◇ L'infini mathématique, ses inventeurs, découvreurs, détracteurs, maîtres, victimes, utilisateurs et spectateurs, par le D <sup>r</sup> E. BELAGA . . . . .	69
◇ Fabriquer un stéréogramme, par J. LEFORT . . . . .	86
◇ Mathématiques et musique chez J.S. Bach, par A. PAPADOPOULOS . . . . .	90

### L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ Responsable de la publication : Odile SCHLADENHAUFEN
- ◇ Rédacteur en chef : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
- ◇ Correspondance à adresser à :  
Université Louis Pasteur  
Bibliothèque de l'I.R.E.M.  
7, rue René Descartes  
67084 STRASBOURG CEDEX  
Tél : 88-41-64-40  
Fax : 88-41-64-49  
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr  
Site Internet : <http://irem.u-strasbg.fr>
- ◇ Abonnement (pour 4 numéros annuels)  
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,  
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.  
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).  
Chèque à l'ordre du Régisseur  
de Recettes de l'I.R.E.M.
- ◇ Prix du numéro : 35.- F



respectivement. Joignant à nouveau P aux sommets des rectangles inscrits on obtient d'autres triplets et ainsi de suite.

**Théorème 1 :**

Tout triplet pythagorien est ainsi obtenu une et une seule fois.

**2. La métamorphose : de géométrie, le problème devient algébrique**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $\{P, \vec{x}, \vec{y}\}$ , on considère le cercle C de centre  $O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ . On appelle respectivement  $C_1, C_2, C_3$  et  $\Gamma$  les quarts de cercle C correspondant à :  $C_1 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$  ;  $C_2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1$  et  $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$  ;

$C_3 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$  ;  $\Gamma : 0 < x < \frac{1}{2}$  et  $0 < y < \frac{1}{2}$ .

1. On appelle  $\phi$  l'application de C sur lui-même qui à tout point M associe M' le deuxième point d'intersection de C avec la droite (PM).

**Proposition 1 :** Si M a pour coordonnées (a, b) alors les coordonnées de M' sont  $(\frac{a}{4d}, \frac{b}{4d})$  où  $d = a^2 + b^2$ .

**Démonstration :** L'équation du cercle C est :  $x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} = 0$ , celle de la droite (PM) est :  $y = \frac{b}{a}x$ . Par substitution on est amené à résoudre l'équation du second degré :  $(a^2 + b^2)x^2 - (a + b)ax + \frac{a^2}{4} = 0$ .

Or  $x = a$  est solution de cette équation. On en déduit l'autre solution puis le résultat ci-dessus.

2. Partant d'un point A' appartenant à  $\Gamma$ , on construit le rectangle  $A'A_1A_2A_3$  dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées et de telle sorte que  $A_1 \in C_1, A_2 \in C_2, A_3 \in C_3$ .

Il est clair que si  $A'(a,b)$  alors  $A_1(1-a, b), A_2(1-a, 1-b), A_3(a, 1-b)$ . L'application qui au point A' associe le point  $A_i$  ( $i=1, 2$  ou 3) est notée  $\psi_i$ .

3. On appelle k l'application

$$k : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, A'(a, b) \longmapsto \frac{A'A_1}{A'A_3} = \frac{1-2a}{1-2b}.$$

4. Soit **T** l'ensemble des triplets pythagoriens c'est-à-dire des triplets d'entiers naturels non nuls (n, p, q) tels que  $n^2 + p^2 = q^2$  et  $\text{PGCD}(n, p, q) = 1$ .

FIGURE 2

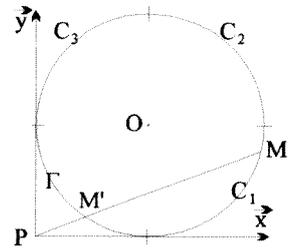
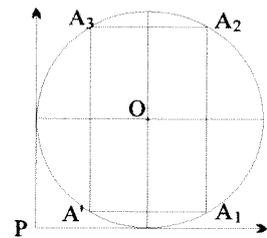


FIGURE 3



Il n'est pas difficile de prouver que n et p sont de parités différentes. On peut alors prendre le nombre n impair ; (n, p, q)  $\in$  **T** étant donné, on cherche un point  $A'(x,y) \in \Gamma$  tel que  $k(A') = \frac{n}{p}$ . Cette recherche conduit au système suivant :

$x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} = 0$ ,  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  et  $\frac{1-2x}{1-2y} = \frac{n}{p}$ . Ce système a exactement une solution :  $x = \frac{q-n}{2q}$  et  $y = \frac{q-p}{2q}$ . Cette application  $\mathbf{T} \longrightarrow \Gamma$  est notée  $f$ .

5. La construction géométrique du §1, nous indique comment calculer trois nouveaux triplets pythagoriciens à partir d'un triplet pythagoricien. Cette méthode est résumée dans le tableau suivant :

$\mathbf{T} \xrightarrow{f} \Gamma \xrightarrow{\Psi_i} C_i \xrightarrow{\Phi} \Gamma \xrightarrow{k} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{T}$ $(n,p,q) \longmapsto A' \longmapsto A_i \longmapsto A'_i \longmapsto k(A'_i) = \frac{N}{p} \longmapsto (N, P, Q = \sqrt{N^2 + P^2})$ $\mathbf{A}' \left( \frac{q-n}{2q}, \frac{q-p}{2q} \right) \quad \mathbf{A}_1 \left( \frac{q+n}{2q}, \frac{q-p}{2q} \right) \quad \mathbf{A}_2 \left( \frac{q+n}{2q}, \frac{q+p}{2q} \right) \quad \mathbf{A}_3 \left( \frac{q-n}{2q}, \frac{q+p}{2q} \right)$ $\mathbf{A}_i \left( \frac{q+n}{2(2n-2p+3q)}, \frac{q-p}{2(2n-2p+3q)} \right) \quad \mathbf{A}_2 \left( \frac{q+n}{2(2n+2p+3q)}, \frac{q+p}{2(2n+2p+3q)} \right) \quad \mathbf{A}_3 \left( \frac{q-n}{2(-2n+2p+3q)}, \frac{q+p}{2(-2n+2p+3q)} \right)$ $N_1 = n-2p+2q \quad N_2 = n+2p+2q \quad N_3 = -n+2p+2q$ $P_1 = 2n-p+2q \quad P_2 = 2n+p+2q \quad P_3 = -2n+p+2q$ $Q_1 = 2n-2p+3q \quad Q_2 = 2n+2p+3q \quad Q_3 = -2n+2p+3q$
---

6. L'introduction des matrices permet de simplifier les notations. Posons

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad R_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations :  $\begin{pmatrix} N_i \\ P_i \\ Q_i \end{pmatrix} = R_i \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

7. Remarque : le lecteur vérifiera que les trois triplets  $(N_i, P_i, Q_i)$  ainsi obtenus sont des triplets pythagoriciens et que de plus  $N_i > n$  et  $P_i > p$ .

### 3. Génération algébrique des triplets pythagoriciens

#### Théorème 2 :

Tout triplet pythagoricien peut être obtenu à partir du triplet pythagoricien  $(3,4,5)$  par application répétée de  $R_1, R_2, R_3$ . De plus, cette décomposition est unique.

En d'autres termes : soit  $t \in \mathbf{T}$ , il existe un et un seul  $p$ -uplet  $(i_1, i_2, \dots, i_p)$  avec

$$i_k \in \{1,2,3\} \quad \text{tel que } t = R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_p} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

#### Démonstration du Théorème 2

**Proposition 2 :** Soit  $t = (a,b,c) \in \mathbf{T}$ ,  $t \neq (3,4,5)$  alors un et un seul des 3 triplets  $t_i = R_i^{-1}(t)$  avec  $i \in \{1,2,3\}$  est un triplet pythagoricien.

Démonstration :

Les inverses des matrices  $R_1, R_2, R_3$  sont :

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, R_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$R_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

En posant  $\begin{cases} \alpha = a+2b-2c \\ \beta = -2a-b+2c \\ \gamma = -2a-2b+3c \end{cases}$  on a :  $t_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$ ,

$t_2 = (\alpha, -\beta, \gamma)$ ,  $t_3 = (-\alpha, -\beta, \gamma)$ . Il est clair que  $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$  et que  $\text{PGCD}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ .

Supposons  $\alpha = 0$ , alors  $2c = a + 2b$ . D'où en élevant au carré et en introduisant  $a^2 + b^2 = c^2$  :  $4c^2 = a^2 + 4b^2 + 4ab = 4a^2 + 4b^2$ . Et, après simplification :  $4b = 3a$ . On en déduit l'existence d'un nombre  $e$  tel que :  $a=4e, b=2e, c=5e$ .

Enfin, comme  $\text{PGCD}(a,b,c) = 1$ , on a :  $a=4, b=3, c=5$ . Ce cas ayant été exclu, on a nécessairement  $\alpha > 0$  ou  $\alpha < 0$ . De la même manière, on a nécessairement  $\beta > 0$  ou  $\beta < 0$ . Enfin, lorsque  $\alpha < 0$  alors on a aussi  $\beta < 0$  car  $\beta = \alpha - 3(a+b) + 4c$ . En effet  $\alpha > 0 \Leftrightarrow a+2b < 2c \Leftrightarrow \frac{4}{3}b < a$  et de même  $\beta < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}b < a$ , d'où le résultat.

Finalement, si  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  alors seul  $t_1 \in \mathbf{T}$ , si  $\alpha > 0$  et  $\beta < 0$  alors seul  $t_2 \in \mathbf{T}$  et si  $\alpha < 0$  alors  $\beta < 0$  et seul  $t_3 \in \mathbf{T}$ .

**Proposition 3 :** Soit  $(a_1, b_1, c_1)$  ce triplet, alors  $a > a_1$

Démonstration : En effet, si  $\alpha > 0$  alors :

$a_1 = \alpha = a + 2(b - c) < a$  car  $c > b$  et si  $\alpha < 0$  alors  $a_1 = -\alpha = -a - 2b + 2c = a + 2(c - a - b) < a$ . En réitérant le processus, on construit une suite d'éléments de  $\mathbf{T}$  :  $(a, b, c), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), \dots$

**Proposition 4 :** Cette suite est finie.

En d'autres termes, il existe un entier naturel  $m$  tel que  $(a_m, b_m, c_m) = (3, 4, 5)$ .

Démonstration : il suffit d'appliquer la méthode dite de descente infinie de Fermat (voir encadré).

EXEMPLE : La démonstration ci-dessus nous fournit une méthode pour calculer le  $p$ -uplet  $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ .

$$t_1 = (2\ 225, 3\ 648, 4\ 273)$$

$$t_3 = R_3^{-1}(t_2) = (275, 252, 373)$$

$$t_5 = R_1^{-1}(t_4) = (15, 8, 17)$$

$$t_2 = R_1^{-1}(t_1) = (975, 448, 1\ 073)$$

$$t_4 = R_2^{-1}(t_3) = (33, 56, 65)$$

$$t_6 = R_3^{-1}(t_5) = (3, 4, 5)$$

et par conséquent :  $(2\ 225, 3\ 648, 4\ 273) = R_1 R_3 R_2 R_1 R_3 (3, 4, 5)$

### La méthode de descente infinie

Cette méthode, inventé par Pierre de Fermat (1601-1665) peut s'énoncer de la manière suivante : il n'existe qu'un nombre fini d'entiers plus petits qu'un entier donné. On peut également l'énoncer de la manière suivante :

Soit  $(a_n)$  une suite décroissante d'entiers naturels, alors il existe  $m \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq m, a_n = a_m$ .

Pierre de Fermat a utilisé cette méthode pour prouver le théorème : « L'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré » ce que l'on traduirait actuellement en disant que le système d'équations :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ ab = 2c \end{cases}$$

n'a pas de solution dans  $\mathbb{N}^3$  autre que la solution évidente  $a = b = c = 0$ .

Pour démontrer ce théorème, P. Fermat suppose qu'un tel triangle  $(a,b,c)$  existe. Il construit alors un triangle  $(a',b',c')$  ayant les mêmes propriétés et tel que :  $a' < a, b' < b, c' < c$ . Il obtient ainsi une suite strictement décroissante de nombres entiers naturels.

Ce qui est impossible.

*Je renvoie le lecteur intéressé par cette démonstration au livre de Catherine Goldstein, Un théorème de Fermat et ses lecteurs aux éditions Presses Universitaires de Vincennes.*

### Relation entre les théorèmes 1 et 2

Ces deux théorèmes sont clairement équivalents. (Il suffit de se souvenir que le produit de la matrice  $R_i$  par un triplet pythagoricien correspond à la construction  $\psi_i \circ \varphi$ ).

Par exemple, la construction du point du cercle  $C$  qui correspond au triplet  $t_1 = (2\ 225, 3\ 648, 4\ 273)$  est la suivante :

$$A \xrightarrow{\varphi} A^1 \xrightarrow{\psi_3} A_3 \xrightarrow{\varphi} A_3^2 \xrightarrow{\psi_1} A_{31} \xrightarrow{\varphi} A_{31}^2 \xrightarrow{\psi_2} A_{312} \xrightarrow{\varphi} A_{312}^2 \xrightarrow{\psi_3} A_{3123} \xrightarrow{\varphi} A_{3123}^2 \xrightarrow{\psi_1} A_{31231}$$

### 4. Équations $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ et $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$

#### 1. Quelques solutions de ces deux équations.

Soit  $t$  un nombre entier quelconque ; le quadruplet  $(x, y, z, t) = (t, 0, 0, t)$  est solution de l'équation  $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$  ; soit  $M$  une matrice produit dans un ordre quelconque des matrices  $R_1, R_2, R_3$ , alors les produits  $M \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $M \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$  nous donnent deux autres solutions de cette équation et le produit  $M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$  nous donne une solution de l'équation  $x^2 + y^2 + t^2 = z^2$ .

EXEMPLE :  $M = R_1 R_2 R_3 = \begin{pmatrix} -89 & 92 & 128 \\ -188 & 191 & 268 \\ -208 & 212 & 297 \end{pmatrix}$  ;

$x = -89, y = -188, z = -208, t = 1$  et  $x = 92, y = 191, z = 212, t = 1$  vérifient  $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$  ;

$x = 128, y = 268, z = 297, t = 1$  vérifie  $x^2 + y^2 + t^2 = z^2$ .

#### 2. Ensemble des solutions de $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$

Soit  $t \in \mathbb{N}^*$  fixé .

Posons  $S(t) = \{(a;b;c) \in \mathbb{N}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2 + t^2\}$  . Il est aisé de montrer que si  $X \in S(t)$  alors  $R_i X \in S(t)$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Inversement, à quelle condition  $R_i^{-1} X$  appartient-il à  $S(t)$  ?

Avec les notations du § 0, posons  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\gamma = -2a - 2b + 3c$ .

$$(\gamma - c)(c + a + b) = 2(c - (a + b))(c + (a + b)) = -2(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = -2(2ab + t^2) < 0$$

Comme  $a + b + c > 0$ , on a nécessairement  $\gamma < c$ .

Si  $\gamma \geq 0$  alors, de la même manière qu'au § 0, l'un des trois vecteurs  $R_i^{-1} X$  appartient à  $S(t)$  et on recommence la même procédure. Posons à présent :

$E(t) = \{X \in S(t) \mid \gamma < 0\}$  ; nous pouvons énoncer le

### Théorème 3

Quel que soit  $X \in S(t)$ ,  $X$  est de la forme  $MU$  où  $U \in E(t)$  et  $M$  est produit dans un ordre quelconque des matrices  $R_i$ .

Le problème qui se pose alors est de trouver l'ensemble  $E(t)$  c'est-à-dire l'ensemble des solutions du système  $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + t^2 & (1) \\ 3c < 2a + 2b & (2) \end{cases}$

En élevant l'inéquation (2) au carré et en multipliant (1) par 9, on obtient tout calcul fait :  $5a^2 + 5b^2 - 8ab < 9t^2$ ;  $a$  et  $b$  jouent des rôles symétriques. Il suffit donc de chercher les solutions vérifiant  $a \leq b$ .

Enfin pour  $b$  fixé, l'étude de la fonction définie pour  $a \in [b, +\infty[$  :  $a \mapsto \Psi_b(a) = 5a^2 - 8ab + 5b^2 - 9t^2$ , montre que l'on peut se limiter au cas où  $0 \leq b \leq \frac{\sqrt{3}}{2}t, 0 \leq a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}t$ .

EXEMPLES

$t = 1$ ,  $E(1) = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$

$t = 7$ ,  $\frac{3}{\sqrt{2}}t \approx 14,8$ : il suffit de chercher  $a, b, c$  vérifiant  $c^2 = a^2 + b^2 - 7^2$ ,

$0 \leq a \leq 14, 0 \leq b \leq 14$ . Un tableur nous rendra quelques services (première ligne :  $a$ ; première colonne :  $b$ ; puis dans chaque case le nombre  $a^2 + b^2 - 7^2$ )

b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	-49	-48	-45	-40	-33	-24	-13	<b>0</b>	15	32	51	72	95	120	147
1		-47	-44	-39	-32	-23	-12	<b>1</b>	<b>16</b>	33	52	73	96	<b>121</b>	148
2			-41	-36	-29	-20	-9	<b>4</b>	19	<b>36</b>	55	76	99	124	151
3				-31	-24	-15	-4	<b>9</b>	24	41	60	<b>81</b>	104	129	156
4					-17	-8	3	<b>16</b>	31	48	67	88	111	136	163
5						<b>1</b>	12	<b>25</b>	40	57	76	97	120	145	172
6							23	<b>36</b>	51	68	87	108	131	156	183
7								<b>49</b>	<b>64</b>	<b>81</b>	<b>100</b>	<b>121</b>	<b>144</b>	<b>169</b>	<b>196</b>
8									79	96	115	136	159	184	211
9										113	132	153	176	201	228
10											151	172	195	220	247
11												193	216	241	268
12													239	264	291
13														<b>289</b>	316
14															343

Le triplet  $a = 13, b = 1, c = 11$  ne convient pas car  $3c \geq 2a + 2b$

$E(7) = \{(5,5,1)(8,1,4)(1,8,4)(9,2,6)(2,9,6)(11,3,9)(3,11,9)(13,13,17)(7,b,b)(b,7,b) \mid 0 \leq b \leq 14\}$

Le

**Théorème 3** peut être généralisé à  $\mathbb{Z}^3$  de la manière suivante :

**Théorème 4**

Quel que soit  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$  tel que  $a^2 + b^2 = c^2 + t^2$ ,  $X$  est de la forme MU ou JMU où  $U \in E(t)$ ,  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $M$  est produit dans un ordre quelconque des matrices  $R_i$  ou  $(R_i)^{-1}$ .

En effet, le produit de X par l'une des trois matrices  $I_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ou J nous ramène aux hypothèses du

**Théorème 3.**

Or  $I_1 = R_2^{-1}R_3 = R_3^{-1}R_2$  et  $I_2 = R_1^{-1}R_2 = R_2^{-1}R_1$ . D'où le résultat.

Exemple :  $X = \begin{pmatrix} -17 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$ ,  $X = I_1 I_2 \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = I_1 I_2 R_3^2 R_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R_3^{-1} R_1 R_3^2 R_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**5. Le groupe orthogonal**

On l'aura compris : si tout ceci « marche bien » c'est tout simplement parce que les matrices  $R_1, R_2, R_3$  sont des matrices orthogonales pour la forme quadratique

$$Q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad (*)$$

Pour ceux qui l'auraient oublié, je rappelle qu'une matrice M est dite orthogonale (sous-entendu pour la forme quadratique Q) lorsque :

$$\forall X \in \mathbb{R}^3 \quad Q(MX) = Q(X) \quad (**)$$

En introduisant la matrice  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et en posant  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  la relation (\*) se

traduit par l'égalité  $Q(X) = {}^tXJX$  et (\*\*) par  ${}^tMJM = J$ .

L'ensemble des matrices orthogonales forme un groupe noté  $O(Q)$ .

Si  $M \in O(Q)$  et  $N \in O(Q)$  alors :

- $MN \in O(Q)$  car  ${}^t(MN)J(MN) = {}^tN({}^tMJN)N = {}^tNJN = J$  ;
- M est inversible car  $\det(J) = \det(MJM) = \det^2(M) \det(J)$  donc  $\det(M) = \pm 1$  ;
- $M^{-1} \in O(Q)$  car  ${}^t(M^{-1})JM^{-1} = (MJ{}^tM)^{-1} = J$ .

Considérons à présent le sous-ensemble E des matrices orthogonales à coefficients entiers. E est un sous-groupe de  $O(Q)$  car si  $M \in E$  et  $N \in E$  alors  $MN \in E$  (évident parce que  $\mathbb{Z}$  est un anneau) et  $M^{-1} \in E$  car  $\det(M) = \pm 1$ .

**Théorème 5**

E est engendré par les trois matrices  $R_1, R_2, R_3$ , leurs inverses et la matrice J.

Tout d'abord, il est clair que ces sept matrices appartiennent à E.

Inversement, soit  $P \in E$  ; il s'agit de montrer que P est produit de ces matrices.

Introduisons la forme polaire de Q, c'est-à-dire l'application  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $(X, Y) \longmapsto \varphi(X, Y) = {}^tXJY$  {en particulier  $Q(X) = \varphi(X, X)$ }.

En appelant,  $e_1, e_2, e_3$  les trois vecteurs colonnes qui forment P, on a :

$$Q(e_1) = Q(e_2) = 1, \quad Q(e_3) = -1 \quad \text{et lorsque } i \neq j, \quad \varphi(e_i, e_j) = 0 \quad (\alpha)$$

Comme  $Q(e_1) = 1$ , il existe une matrice M produit dans un ordre quelconque des matrices  $R_i$  ou  $(R_i)^{-1}$  telle que :  $e_1 = Me$  ou  $e_1 = JMe$  avec  $e \in E(1)$  (voir § 4 et **Théorème 4**).

Posons pour  $i=1,2,3$   $f_i = M^{-1}(e_i) = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$ .  $M \in E$ , les relations  $(\alpha)$  sont conservées :  $Q(f_1) = Q(f_2) = 1$ ,  $Q(f_3) = -1$  et lorsque  $i \neq j$ ,  $\varphi(f_i, f_j) = 0$

Lorsque  $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  alors  $a_2 + b_2 - c_2 = 0$  et  $a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 = 1$ . D'où  $2 a_2 b_2 = -1$ . Cette équation n'a pas de solution dans l'ensemble des entiers. Ce cas n'est pas possible. On a donc  $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  puis  $\varphi(f_1, f_2) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$  et  $Q(f_2) = 1 \Rightarrow b_2 - c_2 = 1$

et par conséquent  $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ou  $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . De la même manière,  $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ou  $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Finalement :  $P=(e_1, e_2, e_3) = M(f_1, f_2, f_3) = MS$  où  $S$  est produit des matrices  $I_1, I_2$  et  $J$ . Or  $I_1 = R_2^{-1}R_3 = R_3^{-1}R_2$  et  $I_2 = R_1^{-1}R_2 = R_2^{-1}R_1$  et la démonstration est terminée.

Exemple :  $P = \begin{pmatrix} -17 & -6 & 18 \\ -6 & -1 & 6 \\ 18 & 6 & -19 \end{pmatrix}$

$e_1 = I_1 I_2 \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = I_1 I_2 R_3^2 R_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R_3^{-1} R_1 R_3^2 R_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $P = R_3^{-1} R_1 R_3^2 R_2 J$ .

### Questionnement

Ce paragraphe pourrait faire l'objet de problèmes de la rubrique « À vos stylos »

1. Comment construire géométriquement les solutions des équations du § 4 – à la manière de la construction qui est à l'origine de cette article – ?
2. Trouver des générateurs du sous groupe  $E$  du groupe de Lorentz formé des matrices à coefficients entiers. (Rappel : le groupe de Lorentz est le groupe orthogonal de la forme quadratique  $Q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ )
3. Même question pour le sous groupe  $E$  du groupe orthogonal de la forme quadratique  $Q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 - z^2 - t^2$  formé des matrices à coefficients entiers.

# CRYPTOGRAPHIE ET ARITHMÉTIQUE

Maurice MIGNOTTE <sup>1</sup>

ULP Strasbourg

## 1 Introduction

Larousse nous dit : **Cryptographie**. (du grec *kruptos* caché et *graphein* écrire). Écriture secrète au moyen d'abréviations ou de signes convenus entre deux personnes.

Par extension, ce terme désigne la science du codage et du déchiffrement des messages codés. Souvent les caractères du texte original sont transformés, pour leur transmission, en chiffres, d'où la synonymie qui s'est établie entre *chiffre* et cryptographie.

Les systèmes de codage fondamentaux sont de deux types : *transposition* et *substitution*. La transposition est une modification de l'ordre des lettres du texte en clair. Par contre, la substitution respecte l'ordre des symboles du texte initial, mais opère une traduction de ce texte, souvent symbole par symbole, mais aussi parfois groupe de caractères par groupe de caractères.

Pour renforcer la sécurité, on est souvent amené à *surchiffrer* les messages codés. La clef de surchiffrement utilisée à cet effet est assez simple et changée très souvent.

L'utilisation des calculateurs permet de réaliser des codages très sophistiqués assurant une grande sécurité du secret des communications. Mais — en sens inverse — les ordinateurs modernes ont une telle puissance de calcul qu'ils permettent aux spécialistes de décoder des codes extrêmement subtils.

Cet exposé est surtout orienté vers les applications de l'arithmétique, en particulier de l'arithmétique élémentaire, à la cryptographie. On présentera donc la méthode RSA, du nom de ses inventeurs R. Rivest, A. Shamir et L. Adleman [R-S-A]. Nous donnerons aussi quelques informations sur des méthodes plus récentes. Cependant, dans une première partie très brève, nous présentons la cryptographie avant notre ère.

## 2 La cryptographie avant notre ère

Il semble que la méthode la plus ancienne "d'écriture cachée" ait été la suivante : pour envoyer un message secret on prenait un esclave auquel on rasait le cuir chevelu, on écrivait alors le message sur son crâne, on mettait l'esclave dans une prison discrète en attendant que ses cheveux repoussent, ensuite on envoyait l'esclave chez le destinataire, ce dernier lui rasait à nouveau le crâne et pouvait donc prendre connaissance du message. Cette méthode a été utilisée il y a plus de vingt-cinq siècles. De nos jours, les impératifs de temps sont tels qu'elle a été abandonnée.

Chez les Grecs, à une époque très ancienne, on trouve l'utilisation de la *scythalle*. Il s'agit du procédé suivant : l'expéditeur et le destinataire possèdent deux bâtons identiques (ils partagent une même clef secrète), le matériel pour la communication

---

<sup>1</sup>© L'OUVERT 100 ( 2000)

est une lanière de cuir ; pour envoyer un message codé l'expéditeur enroule la lanière autour de son bâton et écrit le message sur cette lanière parallèlement à la longueur du bâton, quand il reçoit la lanière le destinataire l'enroule autour de son propre bâton et peut donc retrouver le message initial. Le lecteur pourra vérifier que par ce procédé, les lettres du message initial sont permutées quand on regarde la lanière déroulée. Avec le vocabulaire introduit plus haut, on a donc effectué une transposition du message.

À l'époque de Jules César les romains utilisaient la méthode suivante que l'on retrouvera en décodant le petit message qui suit.

Soit donc le message

YHQL YLGL YLFL.

On essaie de remplacer chaque lettre par sa précédente dans l'alphabet (par permutation circulaire), jusqu'à obtenir un texte significatif. Ici on trouve successivement

XGPK XKFK XKEK,

WFOJ WJEJ WJDJ,

VENI VIDI VICI,

qui correspond bien sûr au message caché. Ce code — appelé code de Jules César — consiste donc à translater chaque lettre d'un nombre fixé de positions, ici de trois positions. C'est l'ancêtre des méthodes de substitution, c'est à dire des méthodes dans lesquelles on transforme chaque caractère (ou de façon plus compliquée, chaque groupe d'un nombre fixé de caractères).

Le lecteur intéressé par ces méthodes traditionnelles trouvera une présentation très lisible dans l'ouvrage de Sinkov [S].

### 3 Systèmes cryptographiques à clef publique

#### Introduction

Ce schéma a été introduit par Diffie et Hellman [D-H]. On considère un ensemble d'individus  $i, j, k, \dots$ , qui veulent communiquer entre eux. Mais, lorsque  $j$  envoie un message à  $i$ , seul  $i$  doit pouvoir le déchiffrer.

À chacun de ces individus  $i$  correspondent deux procédures, l'une  $E_i$  qui est publique, l'autre  $D_i$ , secrète, connue seulement de  $i$  (en principe!). La liste des procédures  $E_i$  figure tout simplement sur l'équivalent d'un annuaire.

Comme les auteurs américains, attribuons des prénoms, Alice, Bob, Eve, ... aux individus désirant communiquer. Si Alice veut envoyer un message  $m$  à Bob elle procédera ainsi : elle consulte l'annuaire pour trouver la procédure, disons  $E_B$ , qui indique le codage pour Bob, elle calcule  $m' = E_B(m)$  et l'envoie à Bob ; pour déchiffrer  $m'$  celui-ci calcule  $D_B(m')$ .

On considère en plus que Alice et Bob communiquent en présence d'une espionne, Eve, qui veut connaître les messages échangés et éventuellement les modifier au passage. Les problèmes modernes de la cryptographie sont les suivants :

- **Confidentialité** : Un message envoyé par Alice à Bob ne doit pouvoir être lu par personne d'autre.

– **Authentification** : Bob doit pouvoir vérifier que c’est bien Alice qui lui a envoyé le message.

– **Intégrité** : Bob doit pouvoir vérifier que le message que lui a envoyé Alice n’a pas été modifié durant la communication.

– **Non-répudiation** : Il doit être impossible qu’Alice puisse éventuellement prétendre qu’elle n’a pas envoyé le message.

On voit donc que dans ce schéma, on a quitté la situation classique de la cryptographie où les personnes échangeant des messages se faisaient mutuellement confiance. C’est le progrès !

Une situation comme la précédente se produit par exemple pour les achats via Internet. Supposons qu’Alice veuille acheter quelque chose à Bob par ce moyen. Elle envoie à Bob son numéro de carte de crédit et les détails pour l’achat. Elle demande une communication confidentielle à ce sujet. D’autre part, Bob doit savoir si le message provient bien d’Alice. Tous deux doivent pouvoir vérifier que l’intégrité du message a été respectée. Enfin Bob exige qu’Alice ne puisse pas prétendre un jour qu’elle n’a jamais effectué cette commande. Ainsi la transaction a lieu entre deux personnes qui — mutuellement — ne se font pas confiance. On peut noter que cette situation ne se présente pas dans certains réseaux privés, comme celui des banques, où l’intégrité des communications est assurée par des moyens “hardware”, et où les personnes se font mutuellement confiance.

Le domaine envisagé ici semble nécessiter l’utilisation de systèmes cryptographiques à clef publique, tandis que celui des banques peut fonctionner (et fonctionne en fait) avec le système usuel des clefs secrètes symétriques.

Une autre remarque s’impose : les systèmes actuels à clef secrète restent beaucoup plus rapides que les systèmes à clef publique et permettent donc des communications avec des débits beaucoup plus élevés que les systèmes à clef publique.

## La méthode RSA

Nous présenterons brièvement cette méthode qui est désormais très connue. Elle repose sur des propositions arithmétiques élémentaires toutes connues de Fermat. De manière précise elle utilise le lemme suivant.

**LEMME** . Soit  $n$  un entier sans facteur carré,  $n = p_1 \cdots p_r$ , où les  $p_i$  sont des nombres premiers distincts. Soit aussi  $k$  un entier congru à 1 modulo le produit  $(p_1 - 1) \cdots (p_r - 1)$ . Alors tout entier  $x$  vérifie

$$x^k \equiv x \pmod{n}.$$

*Démonstration* .— Grâce au théorème d’Euclide et au fait que les  $p_i$  sont distincts, il suffit de vérifier que l’on a  $x^k \equiv x \pmod{p_i}$  pour chaque  $i$ , mais ceci n’est rien d’autre que le petit théorème de Fermat.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter la méthode RSA. À chaque individu  $i$  on associe des entiers  $e_i$ ,  $d_i$  et  $n_i$ , où  $e_i$  et  $n_i$  sont publics tandis que  $i$  est le seul à connaître  $d_i$ . Les messages  $m$  envoyés à  $i$  sont des entiers modulo  $n_i$  (ce qui n’ôte rien à la généralité de la méthode). Les procédures de codage et de décodage,

$E_i$  et  $D_i$ , sont respectivement définies par

$$E_i(m) = m^{e_i}, \quad D_i(c) = c^{d_i}.$$

Chaque entier  $n_i$  est le produit de deux nombres premiers  $p_i$  et  $q_i$  distincts. Pour que le décodage soit correct on doit avoir  $D_i \circ E_i = Id$ ; pour ceci, d'après le lemme, il suffit que l'on ait

$$e_i d_i \equiv 1 \pmod{(p_i - 1)(q_i - 1)}.$$

D'autre part, c'est un truc bien connu des informaticiens (et déjà mis en évidence par Legendre) que le calcul de  $x^k$  nécessite au plus  $O(\log k)$  multiplications. Ceci prouve que les temps de calcul des fonctions de codage et de décodage sont polynomiaux en fonction de  $\log n$ , donc possibles pour de très grandes valeurs de  $n$ .

En ce qui concerne la sécurité de cette méthode, il semble qu'elle soit exactement liée à la difficulté de factoriser l'entier  $n$ . Malgré les progrès spectaculaires des méthodes de factorisation, en choisissant les  $p_i$  et  $q_i$  plus grands que  $10^{70}$  on doit encore avoir une excellente sécurité pour quelques années.

## 4 Cryptographie basée sur des groupes

Dans cette section on considère un groupe fini commutatif fixé  $G$ , d'ordre  $N$ . On considère souvent que  $G$  est cyclique et on désigne par  $g$  un de ses générateurs (fixé). Le problème du *logarithme discret* est le suivant : on se donne  $h \in G$  et on cherche le plus petit entier  $x$  (s'il existe) tel que

$$h = g^x.$$

Il est important, en cryptographie, que ce problème soit difficile.

### Échange de clefs de Diffie-Hellman

Alice et Bob veulent avoir une clef commune, qui pourrait par exemple être utilisée pour une communication codée pour un algorithme symétrique tel que le DES (Data-Encryption-Standard, le système sans doute le plus utilisé actuellement), ceci sans faire circuler la clef sur le réseau. Pour ce faire on peut prendre un groupe  $G$  fixé, d'ordre  $N$ , et un élément d'ordre élevé  $g$  de ce groupe. Ils procèdent alors comme suit :

- Alice choisit un entier  $a$  au hasard dans l'intervalle  $[1, N - 1]$  (qu'elle garde secret) et transmet  $g^a$  à Bob,
- Bob choisit un entier  $b$  au hasard dans l'intervalle  $[1, N - 1]$  (qu'il garde secret) et transmet  $g^b$  à Alice,
- De son côté Alice calcule  $(g^b)^a$ , tandis que Bob calcule  $(g^a)^b$ . Ils ont alors la même clef  $g^{ab}$ , qui n'a pas circulé sur la ligne.

Pour la plupart des groupes, on pense que découvrir la clef à partir de la connaissance de  $G$ ,  $g$ ,  $g^a$  et  $g^b$  est aussi difficile que de savoir résoudre le problème du logarithme discret.

**Chiffrement de El-Gamal**

Alice souhaite envoyer un message  $m \in G$  à Bob, dont la clef publique est  $(g, h)$  avec  $h = g^x$ , où  $x$  est secret. Alice choisit un entier  $k \in [1, N - 1]$  puis calcule et envoie à Bob la paire  $(a, b) = (g^k, h^k m)$ .

Ensuite Bob effectue le calcul

$$ba^{-x} = h^k m g^{-kx} = g^{kx-kx} m = m,$$

qui lui permet donc de retrouver le message initial  $m$ .

**Signature de El-Gamal**

On considère cette fois un message  $m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  que Bob veut envoyer signé. Comme plus haut, on suppose qu'il possède une clef publique  $h = g^x$ , avec  $x$  secret. De plus on suppose que  $f$  est une bijection donnée entre  $G$  et  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . La procédure est la suivante :

- Bob choisit un entier  $k \in [1, N - 1]$  et calcule  $a = g^k$ ,
- puis Bob calcule une solution  $b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  de la congruence

$$m \equiv xf(a) + bk \pmod{N}$$

et il envoie la paire  $(a, b)$  et le message  $m$  à Alice,

- il ne reste plus à Alice qu'à vérifier la relation

$$h^{f(a)} a^b = g^{xf(a)+kb} = g^m$$

qui atteste que Bob est bien l'expéditeur.

**DSA**

Le sigle DSA correspond à *Digital Signature Algorithm*, qui est devenue un standard.

On reprend la situation précédente dont le cas présent n'est qu'une variante. Comme avant, Bob calcule  $a = g^k$ , puis — cette fois — une solution  $b$  à la congruence

$$m \equiv -xf(a) + bk \pmod{N}$$

et envoie  $a, b$  et  $m$  à Alice. Cette dernière calcule

$$u = mb^{-1} \pmod{N} \quad \text{et} \quad v = f(a)b^{-1} \pmod{N}$$

puis  $w = g^u h^v$  et vérifie que

$$w = g^{mb^{-1}} g^{vx} = g^{mb^{-1}+vx} = g^{kbb^{-1}} = a.$$

L'avantage de cette procédure sur celle de El-Gamal est qu'elle comporte deux exponentiations dans  $G$  au lieu de trois.

À dire vrai, les procédures effectives de DSA utilisent en plus une fonction de *hashing* qui comprime le message initial afin de le rendre illisible.

### Codage de Massey-Omura

Ici Alice veut envoyer un message  $m \in G$  à Bob. La procédure est la suivante

- Alice choisit un entier  $x$  premier avec  $N$  et envoie  $a = m^x$  à Bob,
- Bob choisit un entier  $y$ , lui aussi premier avec  $N$ , et envoie  $b = a^y = m^{xy}$  à Alice,
- Alice calcule  $x'$  tel que  $xx' \equiv 1 \pmod{N}$  et envoie à Bob l'élément  $a' = b^{x'} = m^{xyx'} = m^y$ ,
- enfin Bob calcule  $a'^{y'} = m^{yy'} = m$ , où  $y'$  vérifie  $yy' \equiv 1 \pmod{N}$ , ainsi Bob retrouve le message initial  $m$ .

On pourra noter que ce procédé n'utilise aucune clef publique, ni ne partage une clef secrète, par contre chacun des deux acteurs utilise une clef personnelle secrète. On parle tout naturellement d'algorithme à "double-clef".

### Choix du groupe

Pour que les opérations de codage et décodage soient réalisables en un temps rapide il est nécessaire que les calculs dans le groupe  $G$  soient relativement simples. Il faut par contre que le logarithme discret ne se calcule pas facilement dans  $G$ , ce qui exclut par exemple tous les groupes donnés sous la forme  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Pour ces raisons, les premiers groupes choisis ont été les groupes  $\mathbf{F}_q^*$ , où  $\mathbf{F}_q$  désigne un corps fini. Mais — dans ce cas — on connaît un algorithme sous-exponentiel pour calculer le logarithme discret, ce qui impose de prendre de très grandes valeurs de  $q$ . C'est à cause de cela que, dès le milieu des années 80, Miller et Koblitz ont proposé d'utiliser pour  $G$  le groupe des points d'une courbe elliptique sur un corps fini (voir [B-S-S]), dans ce cas on ne connaît pas de méthode sous-exponentielle pour calculer le logarithme discret et on peut donc travailler avec des valeurs de  $q$  beaucoup moins grandes. Pour une discussion plus détaillée et pour l'étude d'autres exemples de groupes, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Blake, Seroussi et Smart [B-S-S].

### Références

[B-S-S] I.F. Blake, G. Seroussi, N.P. Smart .— Elliptic curves in Cryptography, Cambridge University Press, 1999.

[D-H] W. Diffie, M. Hellman .— New directions in cryptography, I.E.E.E. Trans. Inform. Theory IT-22, Nov. 1976, No. 6, p. 644-654.

[R-S-A] R.L. Rivest, A. Shamir, L. Adleman .— A method for obtaining digital signatures and Publi-Key cryptosystems, Com. A.C.M., Fev. 1978, v. 21, No. 2, p. 120-126.

[S] A. Sinkov .— Elementary cryptanalysis, The Math. Ass. of america, New Math. Library, Washington, 1979.

# DES ÉQUATIONS INTÉGRALES AU FORMALISME DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Jacques HARTHONG <sup>1</sup>  
ENSP Strasbourg

## 1 Présentation générale

Je suis physicien et non historien des mathématiques. Mais c'est dans l'histoire des mathématiques que je cherche un élément de réponse à une question importante pour la Physique : *D'où vient le formalisme mathématique de la Mécanique quantique ?* On sait que ce formalisme a pour l'essentiel été proposé par Johann von Neumann dans son livre *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* publié en 1932. Sur cette question, tous les faits historiques sont bien connus et les sources aisément accessibles : le formalisme de von Neumann n'a pas été construit à partir des lois de la nature nouvellement découvertes, mais à partir des travaux antérieurs des mathématiciens de Göttingen. Je voudrais montrer qu'il y a là une *étrangeté historique*, et essayer de la comprendre.

L'étrangeté historique consiste en ceci : les travaux des mathématiciens de Göttingen sont le résultat d'une longue évolution qui pour des raisons évidentes de causalité ne peut pas avoir été influencée par la Mécanique quantique. Je vais donc décrire cette évolution pour répondre à la question : *comment se fait-il qu'après avoir suivi une logique étrangère à des phénomènes encore inconnus, on soit comme par hasard parvenu à un résultat qui coïncide presque parfaitement avec les besoins d'une théorie future et imprévisible, et qu'en outre on y soit parvenu juste au bon moment ?*

C'est la *logique* de l'évolution qui m'intéresse ici ; le déroulement historique est connu (Hellinger 1935, Dieudonné 1981) : le processus aurait commencé avec les travaux de Fourier sur la chaleur, puis à travers ceux de Sturm et Liouville a conduit aux équations intégrales ; ces dernières ont joué un rôle important au cours du XIX<sup>e</sup> siècle en électrostatique, (ce qui a donné chez les mathématiciens le *problème de Dirichlet* par exemple) ; puis vers 1900, Ivar Fredholm a trouvé la solution générale des équations intégrales de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x)$$

ce qui a conduit les mathématiciens de Göttingen à la notion d'espace de Hilbert et à leurs applications aux équations aux dérivées partielles, à la théorie spectrale des opérateurs, etc.

Il n'y a évidemment pas une origine précise de l'analyse fonctionnelle, c'est seulement la présentation de Hellinger et Dieudonné qui commence avec les travaux de Fourier sur les séries trigonométriques, puis de Sturm et Liouville sur les équations

---

<sup>1</sup>© L'OUVERT 100 ( 2000)

intégrales. Le choix d'une telle "origine" est toujours arbitraire : il fallait bien commencer quelque part si on ne voulait pas remonter à la création du monde. Cependant on ne devra pas oublier que l'idée de la représentation des fonctions sous forme de séries trigonométriques est due à Daniel Bernoulli, à propos de la théorie des cordes vibrantes, cinquante ans avant Fourier. Il me sera d'autant plus difficile d'oublier Daniel Bernoulli que les vibrations joueront, pour mon propos, un rôle plus crucial que la propagation de la chaleur.

Je vais présenter cette lente évolution des idées en accéléré, pour faire apparaître sa logique. Puis on examinera si elle est vraiment étrangère à tout ce qui aurait pu avoir un rapport même lointain avec la future Mécanique quantique, et on découvrira que cette dernière avait un ancêtre qui a joué un certain rôle dans l'histoire qui nous intéresse ici.

En ce qui concerne le problème de "l'étrangeté" du formalisme de von Neumann, le doute s'était installé immédiatement sous la forme du classique "Grand débat sur la théorie quantique" : le Bon Dieu ne joue pas aux dés, etc. Ce débat est aujourd'hui dépassé, et le problème discuté ici est tout autre : il ne s'agit pas de contester le formalisme de la Mécanique quantique. Beaucoup d'auteurs l'ont déjà contesté, dont aucun n'a proposé mieux. Beaucoup d'autres en *cherchent* un meilleur, mais aucun ne s'est encore dégagé. L'activité de critique est vaine si elle ne s'accompagne pas d'une alternative. La bonne critique sera fournie par celui qui trouvera la bonne solution. Je laisse donc ce "Grand débat" de côté ; il s'agira ici uniquement de cette étrange coïncidence que *les théoriciens de la Mécanique quantique ont trouvé les outils mathématiques qu'il leur fallait en quelque sorte "clés en main" dans le livre de Courant et Hilbert "Methoden der mathematischen Physik", dont la première édition a paru en 1924, c'est-à-dire juste au moment où la Mécanique quantique allait naître.*

Certains faits cependant atténuent ce mystère : par exemple, le formalisme de von Neumann ne suffit pas pour l'électrodynamique quantique et ses diverses généralisations, et surtout pas en conservant la cohérence et la rigueur qu'il avait dans l'œuvre originale. C'est pourquoi, depuis les premières tentatives de Dirac, le formalisme de la théorie quantique des champs s'est progressivement éloigné de celui qu'avait proposé von Neumann. À première vue, ce dernier constat pourrait étayer la thèse que le formalisme de von Neumann a été provisoirement emprunté "parce que les travaux antérieurs des mathématiciens de Göttingen étaient là", et qu'on s'en est ensuite progressivement et assez rapidement éloigné. Avec cette thèse le mystère serait levé, puisqu'il n'y aurait plus d'adéquation. L'allégorie suivante fera peut-être mieux comprendre la situation : un homme (nommé Erwin) veut ouvrir une porte mais n'a pas la clé ; il cherche rapidement dans ses poches un objet pour crocheter la serrure et trouve un clou qui lui permet d'ouvrir ; cependant, derrière la première porte il y en a d'autres que le clou ne permet pas d'ouvrir et il doit alors limer des clés spécialement selon les différentes serrures. Il n'y aurait là rien d'étrange. Le mystère serait qu'Erwin possédât déjà un trousseau de clés *indépendant* du lieu, et s'aperçoive que les clés de ce trousseau ouvrent les portes une à une.

Toutefois, les difficultés de l'électrodynamique quantique ne suffisent pas à régler le problème, car le formalisme de von Neumann reste quand même la base de la

Mécanique quantique, et continue (sous une forme évidemment simplifiée pour des raisons pédagogiques) d'être enseigné dans les cours d'initiation. S'il en est ainsi, ce n'est pas seulement par conservatisme, mais parce que réellement il fonctionne remarquablement bien sur les problèmes tels que l'atome d'hydrogène, l'oscillateur quantique, l'effet tunnel, etc. En outre, il est vrai que l'électrodynamique quantique et ses diverses succédanées s'en éloignent, mais en en gardant le cœur : le champ de forces est toujours une superposition d'oscillateurs auxquels on applique bel et bien l'outil de von Neumann, même si on doit beaucoup bricoler ensuite. Donc le trousseau qu'Erwin avait dans sa poche permet effectivement d'ouvrir les portes ; il faut limer un peu mais ça marche.

Si ce genre de situation était habituel, c'est-à-dire si l'Histoire nous avait habitués à ce que, par une sorte d'harmonie préétablie, les mathématiques fournissent toujours aux physiciens les outils dont ils ont besoin juste au moment où ils en ont besoin, alors le cas de J. von Neumann ne serait pas étrange, mais normal, et les remarques précédentes n'auraient pas de sens. Or l'Histoire nous a habitués à l'inverse. Le formalisme de la théorie électromagnétique s'est construit lentement à *partir des propriétés des champs*, au fur et à mesure qu'on les découvrait. Le rotationnel d'un champ, le flux à travers une surface, la formule de Green, etc, sont des concepts mathématiques directement issus de la nécessité d'écrire sous une forme mathématique des lois qu'on *venait* de découvrir : il suffit pour s'en convaincre de comparer la formulation mathématique des lois dans les mémoires d'Ampère [1823], de Green [1828], de Beer (environs de 1850 et en particulier [1856]), et enfin dans le *Traité* de Maxwell [1873]. Dans la préface de ce *Traité* on trouve d'ailleurs des témoignages directs et explicites de l'antériorité des lois physiques sur les formulations mathématiques :

J'ai ainsi reconnu que plusieurs des plus fécondes méthodes de recherche découvertes par les mathématiciens pouvaient recevoir, au moyen d'idées dérivées de celles de Faraday, une forme bien préférable à leur expression primitive.

C'est pourquoi on réalisera pleinement l'étrangeté historique que je signalais en essayant d'imaginer que le calcul des fluxions ait été élaboré — dans la continuité des œuvres d'Appolonios de Pergè et d'Archimède de Syracuse sur les coniques — par un prestigieux groupe de mathématiciens établi à Prague depuis 1550 ; que Kepler ait trouvé dans un livre publié par ce groupe en 1604 tous les outils mathématiques pour écrire la loi des aires sous forme différentielle ; et qu'il lui aie suffi d'aller consulter l'un d'entre eux pour qu'il l'aide à résoudre cette équation. Ou encore, on peut essayer d'imaginer que le Calcul vectoriel ait été entièrement élaboré par Laplace et Fourier, juste avant les travaux d'Ampère.

À ma connaissance, cette étrangeté n'a pas frappé les historiens, et c'est pourquoi j'écris cette communication. Certes, la lente maturation des idées qui commence avec la théorie des cordes vibrantes de Jean d'Alembert, Daniel Bernoulli, et Leonhardt Euler (1745 – 1755), et se poursuit jusqu'à la synthèse par les mathématiciens de Göttingen, publiée par Hilbert sous le titre *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (1904 – 1907), a été maintes fois décrite et commentée. Hilbert lui-même, dans l'introduction de son ouvrage de 1912, survole cette évolution historique des idées, et met en avant une certaine logique d'évolution. Celle-ci est

reprise et développée par Ernst Hellinger dans une contribution incluse dans *Hilberts gesammelte Abhandlungen* [1935].

Cette *logique historique* est aujourd’hui une tradition et constitue la base de l’*Histoire de l’Analyse fonctionnelle*. Un ouvrage excellent sur ce sujet, qui fait d’ailleurs autorité, est *History of Functional Analysis* de J. Dieudonné (1981). Cet ouvrage reprend la logique historique décelée par Hilbert et Hellinger, et considère les travaux de Sturm et Liouville comme le commencement de l’Analyse fonctionnelle, sans doute parce que les développements en séries de fonctions arbitraires, qui généralisent les développements en séries de fonctions trigonométriques de Joseph Fourier, sont un premier pas vers une conception où les fonctions sont considérées comme un élément générique d’un espace, et non plus comme la donnée concrète d’une expression analytique particulière.

Malheureusement le livre de Dieudonné appartient à une époque où la science est cloisonnée en disciplines étanches. Le fait que Fourier, Poisson, Sturm, et Liouville cherchaient à résoudre le problème de la propagation de la chaleur est évacué, tout comme le fait que l’importance croissante des équations intégrales au cours du XIX<sup>e</sup> siècle est motivée par l’électromagnétisme. La trace laissée à l’intérieur des mathématiques par ce dernier y apparaît sous la forme de problèmes posés par Gauss ; ainsi Dieudonné parle du problème de Dirichlet sans expliquer son origine ; de même les nombreux travaux sur l’électrostatique, et utilisant des développements en série ou des équations intégrales, sont ignorés. Enfin, il n’y a évidemment pas un mot sur les rapports entre les espaces de Hilbert et la Mécanique quantique, pas même dans le chapitre “Applications de l’Analyse fonctionnelle”. Dans de telles présentations de l’Histoire, le mystère mentionné plus haut ne peut pas être perçu, et toute l’évolution historique semble déterminée téléologiquement, ou par la simple tendance spontanée des mathématiciens à la généralisation des concepts. Ce défaut très courant a souvent été dénoncé par les historiens et je ne m’y attarde pas ; mais il m’oblige, pour montrer le mystère, à reprendre la description de l’évolution historique sans évacuer ces aspects essentiels. C’est pourquoi ce survol sera rapide.

## 2 La méthode de séparation des variables

On sait que la grande découverte de Fourier est la *formule d’inversion* qui permet d’exprimer les coefficients de Fourier par l’intégrale bien connue. Pour résoudre le problème de la propagation de la chaleur, Fourier applique la *méthode de séparation des variables*, qui consiste à chercher la solution sous forme de série trigonométrique. Cette méthode, appliquée à l’équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 . \quad (1.1.)$$

était une invention de Daniel Bernoulli, mais ce dernier ne possédait pas la formule d’inversion, qui justement fait toute la puissance du procédé.

On pourra se souvenir à ce propos de la longue discussion qui eut lieu au siècle précédant Fourier entre Jean d’Alembert, Daniel Bernoulli, et Leonhardt Euler, le premier soutenant que la solution est de la forme  $f(x - vt) + g(x + vt)$ , mais

avec des fonctions  $f$  et  $g$  forcément données par une expression analytique, Daniel Bernoulli lui opposant que la solution devait, pour des raisons physiques, être une série trigonométrique, et enfin Euler qui ne voyait pas pourquoi les fonctions  $f$  et  $g$  de d'Alembert devraient être ainsi restreintes, puisque la corde peut, à l'instant initial de la vibration, recevoir n'importe quelle forme permise par la géométrie.<sup>2</sup>

Pour notre propos la théorie des vibrations est bien plus essentielle que celle de la chaleur, et c'est pourquoi nous allons d'abord rappeler la méthode des séries trigonométriques dans le contexte de la théorie des cordes vibrantes, qui est d'ailleurs son contexte d'origine. Il ne s'agira que d'un rappel (car reprendre toute l'histoire mènerait trop loin), puis nous reviendrons à la théorie de la chaleur.

La théorie des cordes ou des membranes vibrantes est d'autant plus essentielle (pour notre propos ici), que l'équation (1.1) ne décrit pas seulement la vibration d'une membrane; elle décrit *n'importe quelle vibration*, aussi bien celle de l'air que celle de l'éther. Ainsi les modes de vibration acoustiques ou électromagnétiques sont eux aussi décrits par cette équation, qui sera appelée plus tard "équation de Helmholtz", dans le contexte de l'électromagnétisme (encore inexistant du temps de Fourier) et de l'acoustique. Ce point est essentiel pour notre argumentation car le problème de la vibration électromagnétique dans une cavité contient en germe la future Mécanique quantique. Mais voyons d'abord cela comme Euler, Bernoulli et Fourier ont pu le voir.

Proposons-nous de résoudre l'équation (1.1) sur un rectangle de longueur  $p$  (selon la coordonnée  $x$ ) et de largeur  $q$  (selon la coordonnée  $y$ ) par la méthode de Bernoulli (Le rectangle est choisi parce que c'est le plus simple et suffit pour comprendre l'idée générale). On cherche donc d'abord des solutions sous la forme  $f(x) \cdot g(y)$ , et on constate que l'on doit avoir  $f(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$  et  $g(y) = C \cos \beta y + D \sin \beta y$ . Pour que l'équation (1.1) soit satisfaite par le produit  $f(x) \cdot g(y)$ , il faut que l'on ait

$$\alpha^2 + \beta^2 = k^2 \quad (1.2.)$$

mais les constantes  $A, B, C, D$  sont arbitraires. Si on impose à la solution des valeurs données a priori sur le bord du rectangle, les constantes  $A, B, C, D$  seront déterminées par les "coefficients de Fourier". Un cas particulièrement simple est celui où la solution doit être nulle sur tout le bord : dans ce cas, les constantes  $A, B, C, D$  ne sont pas déterminées de manière unique, mais il y a les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\pi}{p} n & A &= 0 \\ \beta &= \frac{2\pi}{q} m & C &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.)$$

où  $m$  et  $n$  sont des entiers vérifiant (1.2), c'est-à-dire

$$\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}; \quad (1.4.)$$

les constantes  $B$  et  $D$  restent cependant arbitraires.

<sup>2</sup>Fourier mit tout le monde d'accord en montrant que les *fonctions arbitraires* d'Euler pouvaient s'écrire comme séries trigonométriques. Le lecteur intéressé par cet épisode historique pourra consulter le livre de Youschkevitch *Le concept de fonction* (voir bibliographie).

Ainsi l'équation (1.1) n'a de solutions nulles sur le bord que si  $k$  appartient à une famille discrète de valeurs ("valeurs propres"), données par (1.4).

Leonhardt Euler a montré une propriété analogue pour les solutions de (1.1) qui sont nulles sur un cercle au lieu d'un rectangle : les valeurs discrètes de  $k$  sont alors déterminées à partir des zéros des fonctions de Bessel  $J_0, J_1, J_2, \dots$

La signification électromagnétique de l'équation (1.1) est que le domaine est une cavité à l'intérieur de laquelle le champ vibre avec une fréquence  $k$ . La condition que le potentiel est nul sur le bord signifie que le domaine est une cavité creusée dans un conducteur parfait (un métal). Le fait mathématique que les solutions nulles au bord de l'équation (1.1) ne peuvent exister que pour des valeurs discrètes de  $k$ , signifie donc que dans une cavité entourée d'un milieu conducteur, le champ électromagnétique ne peut vibrer qu'à certaines fréquences discrètes. Ainsi, le problème de la cavité, capital pour l'électromagnétisme, est mathématiquement identique au problème de la vibration d'une membrane ; identique aussi au problème de la cavité acoustique (tuyau d'orgue par exemple) qui sera étudié par Helmholtz ; et analogue — ou apparenté — au problème de la diffusion de la chaleur le long d'une tringle ou d'une tôle, résolu par Joseph Fourier, que nous allons aborder maintenant.

### 3 La théorie analytique de la chaleur

Les méthodes que Daniel Bernoulli et Leonhardt Euler avaient essayées avec succès pour les cordes vibrantes ou les membranes ont en effet été reprises par Joseph Fourier, pour traiter cette fois le problème de la propagation de la chaleur par conduction dans un milieu matériel. C'est à cette occasion que Fourier va créer la théorie des *séries de Fourier* et prouvera ainsi la justesse des visions de Daniel Bernoulli sur l'universalité des solutions trigonométriques.

Les travaux de Fourier sur la conduction de la chaleur ont commencé dès la fin des années 1790. Toutefois leur présentation à l'Académie date de 1807, et c'est le traité publié en 1822 chez l'éditeur Firmin Didot qui nous servira de référence.

Dans le *discours préliminaire* (préface) de son ouvrage, Fourier motive ses recherches sur la chaleur et les situe par rapport à la philosophie naturelle, en disant que la chaleur est un phénomène à part :

Galilée, premier inventeur des théories dynamiques, découvrit les lois du mouvement des corps graves. Newton embrassa dans cette science nouvelle tout le système de l'univers. Les successeurs de ces philosophes ont donné à ces théories une étendue et une perfection admirables ; ils nous ont appris que les phénomènes les plus divers sont soumis à un petit nombre de lois fondamentales, qui se reproduisent dans tous les actes de la nature. On a reconnu que les mêmes principes règlent le mouvement des astres, leur forme, les inégalités de leurs cours, l'équilibre et les oscillations des mers, les vibrations harmoniques de l'air et des corps sonores, la transmission de la lumière, les actions capillaires, les ondulations des liquides, enfin, les effets les plus composés de toutes les forces naturelles (...)

Mais, quelle que soit l'étendue des théories mécaniques, elles ne s'appliquent point aux effets de la chaleur. Ils composent un ordre spécial de phénomènes qui ne peuvent s'expliquer par les principes du mouvement et de l'équilibre

Ayant fait remarquer qu'on ne connaît pas encore les lois mathématiques générales de la chaleur, Fourier poursuit :

J'ai déduit ces lois d'une longue étude et de la comparaison attentive des faits connus jusqu'à ce jour ; je les ai tous observés de nouveau, dans le cours de plusieurs années, avec les instruments les plus précis dont on ait encore fait usage.

(...) J'ai reconnu ensuite que tous les phénomènes qui dépendent de cette action [de la chaleur] se résolvent en un très petit nombre de faits généraux et simples ; et par là, toute question physique de ce genre est ramenée à une recherche d'Analyse mathématique. J'en ai conclu que, pour déterminer en nombre les mouvements les plus variés de la chaleur, il suffit de soumettre chaque substance à trois observations fondamentales. En effet, les différents corps ne possèdent point au même degré la faculté de *contenir* la chaleur, de la *recevoir* ou de la *transmettre* à travers leur superficie, et de la *conduire* dans l'intérieur de la masse. Ce sont trois qualités spécifiques que notre théorie distingue clairement et qu'elle apprend à mesurer.

Ainsi Fourier a reconnu par l'expérience trois grandeurs qu'il faudra *mesurer*, tout le reste étant affaire d'Analyse mathématique. Il situe donc la théorie analytique de la chaleur dans le cadre de la philosophie naturelle : la physique de la chaleur est donc analogue à la Mécanique céleste, où il faut mesurer les masses et la constante  $G$  de la gravitation, la suite étant affaire d'Analyse mathématique ; ou à la physique des cordes vibrantes, où il faut mesurer la tension, la masse, et la longueur ; etc. etc.

Les trois grandeurs reconnues par Fourier sont

— la faculté de contenir la chaleur, aujourd'hui appelée *chaleur spécifique*, et désignée par  $C$  : "le coefficient  $C$  désigne ce qu'il faut de chaleur pour élever de la température 0 à la température 1 un poids déterminé qui sert d'unité"

— de la recevoir ou de la transmettre à travers leur superficie, le *coefficient de dissipation*, désigné par  $h$  : "la surface extérieure du solide ayant une température  $V$ , laisse échapper dans l'air [supposé à 0°] une quantité de chaleur proportionnelle à cette température et à l'étendue  $S$  de la surface ; cette quantité a pour valeur  $h \cdot S \cdot V$ ".

— et de la conduire dans l'intérieur de la masse, ou *conductibilité*, désignée dans la suite par  $K$ .

Pour éviter toute confusion, il est sans doute utile de noter ceci : la chaleur spécifique est rapportée à la masse et non au volume. C'est pourquoi la chaleur *volumique* (rapportée au volume) sera désignée par  $CD$ , où  $D$  est la densité du corps.

Le problème le plus simple et le plus typique est celui d'une tringle, et on s'y limitera puisqu'il contient toutes les idées essentielles. Si  $x$  représente l'abscisse le long de la tringle et  $t$  le temps, soit  $u(t, x)$  la température au point  $x$  de la tringle à l'instant  $t$ . L'évolution de la température au cours du temps est alors décrite par l'équation aux dérivées partielles

$$CD \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1.)$$

où  $C$  est la chaleur spécifique du matériau dont la tringle est faite,  $D$  la densité, et  $K$  la conductibilité du matériau. Le problème n'est bien posé que si cette équation

s'accompagne des *conditions aux limites* suivantes : a)  $\forall t \geq 0, u(t, 0) = 0$ ; b)  $\forall t \geq 0, u(t, L) = 0$ ; c)  $\forall x, 0 \leq x \leq L, u(0, x) = f(x)$ , Les conditions a) et b) fixent la température aux extrémités de la tringle à tout instant, et la condition c) fixe la distribution initiale tout au long de la tringle. L'équation (2.1) est correcte si la tringle est parfaitement isolée et qu'il n'y a aucune dissipation de chaleur dans le milieu environnant sinon le second membre doit être diminué de  $C^{te} \cdot u$  pour en tenir compte, mais pour les besoins de ce résumé le cas simple (2.1) suffit.

Cette équation est analogue à (1.1) : elle n'en diffère essentiellement que par le fait que la dérivée par rapport au temps y est du premier ordre alors que dans (1.1) elle est du second ordre ; le procédé de la séparation des variables s'applique donc de la même façon, de sorte que le raisonnement suivi par Fourier est simplement repris de Daniel Bernoulli. L'innovation qui conduit à la théorie des séries de Fourier intervient à propos de la troisième condition aux limites, celle qui donne la solution pour  $t = 0$ . En effet, la distribution des températures évolue au cours du temps, mais à partir d'un état initial : au départ, on a chauffé la tringle (avec une flamme par exemple) donc

$$c) \forall x, 0 \leq x \leq L, u(0, x) = f(x),$$

où  $f(x)$  est une fonction donnée au départ, qui décrit l'état initial de la tringle. Or, étant donné qu'on a trouvé, à partir des conditions a) et b), que les solutions possibles de (2.1) sont de la forme

$$B \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left\{-\frac{K}{CD} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 t\right\} \quad (2.2)$$

on obtiendra la solution la plus générale de (2.1) avec les conditions a) et b) sous la forme

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left\{-\frac{K}{CD} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 t\right\} \quad (2.3)$$

qui dépend des constantes arbitraires  $B_1, B_2, B_3, \dots$ . Si cette solution doit en outre satisfaire à c), il faut avoir

$$\forall x, 0 \leq x \leq L, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (2.4)$$

autrement dit, il faut, pour déterminer les constantes arbitraires  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , "trouver le développement en série de Fourier de  $f(x)$ ".

## 4 Le problème de Sturm-Liouville

Les travaux de Fourier sur la chaleur ont inspiré un très grand nombre de contributions et c'était à Paris au début du siècle le sujet majeur, car l'électromagnétisme était encore peu développé. Sur la voie qui conduira à la notion d'*espace de Hilbert*, une étape essentielle, reconnue par tous les historiens, va être le problème de Sturm-Liouville. Le but avoué de Charles Sturm et Joseph Liouville était d'étendre la méthode de Fourier rappelée ci-dessus au cas où les coefficients  $C, D$ , ou  $K$  de

l'équation (2.1) dépendent de la coordonnée  $x$ , c'est-à-dire au cas où la tringle est inhomogène. Le premier mémoire présenté sur le sujet par Liouville en 1836 commence comme ceci :

Lorsqu'on veut déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène, placée dans un milieu entretenu à  $0^\circ$ , on tombe sur l'équation aux différences partielles

$$(1) \quad g \frac{du}{dt} = \frac{d(k \frac{du}{dx})}{dx} - l u .$$

Dans cette équation qui doit servir à déterminer la température  $u$  de chaque point en fonction du temps  $t$  et de l'abscisse  $x$  de ce point, les trois lettres  $g$ ,  $k$ ,  $l$  représentent respectivement la chaleur spécifique, la conductibilité intérieure, et le pouvoir émissif ; et, puisque la barre est hétérogène, on doit les regarder, non comme des constantes, mais comme des quantités variables données pour chaque valeur de  $x$ . Si les abscisses des deux extrémités de la barre sont  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{X}$ , on a de plus deux conditions définies de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{du}{dx} - h u = 0 & \text{pour } x = \mathbf{x}, \\ \frac{du}{dx} + H u = 0 & \text{pour } x = \mathbf{X}, \end{cases}$$

$h$  et  $H$  étant des constantes qui peuvent avoir des valeurs quelconques depuis 0 jusqu'à  $+\infty$ . Enfin, on doit avoir

$$(3) \quad u = f(x) \quad \text{pour } t = 0 ,$$

$f(x)$  étant une fonction arbitraire qui représente l'état initial des températures et qui satisfait aux deux conditions

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} - h f(x) &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{x}, \\ \frac{df(x)}{dx} + H f(x) &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{X}, \end{aligned}$$

lesquelles se déduisent, en posant  $t = 0$ , des équations (2) que nous avons regardées comme ayant lieu pour la valeur générale de  $u$  dont  $f(x)$  n'est qu'un cas particulier.

Puis Liouville présente la méthode de résolution qui est exactement la méthode de Fourier décrite plus haut :

Pour former la valeur de  $u$  qui satisfait à l'équation (1) et aux conditions définies (2) et (3), on est conduit à développer la fonction  $f(x)$  en une série dont les termes successifs diffèrent l'un de l'autre par un paramètre  $r$  et ont la propriété de satisfaire à la fois à l'équation différentielle générale

$$-r g V = \frac{d(k \frac{dV}{dx})}{dx} - l V ,$$

et aux conditions particulières,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} - h V &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{x}, \\ \frac{dV}{dx} + H V &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{X}. \end{aligned}$$

La nouveauté capitale est ici que les fonctions  $V_r$  sont des fonctions *spécifiques* du problème, qui changent si les fonctions données  $g(x)$ ,  $k(x)$ ,  $l(x)$  changent. Si les fonctions données sont constantes, alors les fonctions  $V_r$  seront des fonctions trigonométriques comme chez Fourier ; mais si la tringle est hétérogène, ce seront des fonctions nouvelles, pour lesquelles il n'y a pas de formule analytique qui les exprimeraient à l'aide des fonctions connues.

Au moment où Liouville publie ces lignes, ces fonctions  $V_r$  avaient été étudiées par son ami Charles-François Sturm depuis dix ans. L'essentiel du travail de Sturm avait été publié l'année précédente dans le même Journal, édité par Liouville (une partie des mémoires originaux de Sturm est perdue). Voici ce que Sturm en dit dans cette publication :

La résolution de la plupart des problèmes relatifs à la distribution de la chaleur dans des corps de formes diverses et aux petits mouvements oscillatoires des corps solides élastiques, des corps flexibles, des liquides et des fluides élastiques, conduit à des équations différentielles linéaires du second ordre [à coefficients variables] (...) On ne sait les intégrer que dans un très petit nombre de cas particuliers hors desquels on ne peut pas même en obtenir une intégrale première ; et lors même qu'on possède l'expression de la fonction qui vérifie une telle équation, soit sous forme finie, soit en série, soit en intégrales définies ou indéfinies, il est le plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction. Ainsi, par exemple, on ne voit pas si dans un intervalle donné elle devient nulle ou infinie, si elle change de signe, et si elle a des valeurs *maxima* ou *minima*. Cependant la connaissance de ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques et dynamiques auxquels se rapportent les équations différentielles dont il s'agit. S'il importe de pouvoir déterminer la valeur de la fonction inconnue pour une valeur isolée quelconque de la variable dont elle dépend, il n'est pas moins nécessaire de discuter la marche de cette fonction, ou en d'autres termes, d'examiner la forme et les sinuosités de la courbe dont cette fonction serait l'ordonnée variable, en prenant pour abscisse la variable indépendante. Or on peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu'on ait besoin de leur intégration. Tel est l'objet du présent Mémoire. Les fonctions dont je me suis occupé ont, comme on le verra, des analogies remarquables avec les sinus et les exponentielles, et peuvent, dans certains cas, être évaluées numériquement avec une approximation suffisante à l'aide des tables logarithmiques et trigonométriques.

Autrement dit, pour chaque cas particulier où les fonctions  $g$ ,  $k$ ,  $l$  sont données, il est possible de trouver des fonctions spécifiques  $V_n(x)$ , qui sont analogues aux fonctions  $v_n(x) = \sin(\frac{\pi}{L} n x)$ , et qui permettent d'appliquer la même méthode que Fourier : au lieu de développer la fonction  $f(x)$  (l'état initial de la tringle) en série de sinus, on la développera en série de  $V_n$ . Les fonctions sinus sont les  $V_n$  du cas particulier où les fonctions  $g$ ,  $k$ ,  $l$  sont constantes.

L'équation obtenue après séparation des variables

$$-r g V = \frac{d(k \frac{dV}{dx})}{dx} - l V,$$

mentionnée dans la citation ci-dessus de Liouville fournit des solutions  $V$  pour un

*continuum* de valeurs de  $r$  mais, tout comme dans le problème de Fourier, les fonctions  $V_r$  correspondantes ne satisferont les conditions aux limites en  $x = \mathbf{x}$  et  $x = \mathbf{X}$  que pour des valeurs discrètes de  $r$ .

Sturm et Liouville démontreront alors “par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes”, les propriétés *utiles* des fonctions  $V_n$  (les  $V_r$  pour  $r = r_n$ ) : possibilité de développer n’importe quelle fonction  $f(x)$  en “série de Fourier”  $\sum a_n V_n$ , expression intégrale des coefficients  $a_n$ , orthogonalité<sup>3</sup> des  $V_n$ . Leurs démonstrations n’étaient pas toutes absolument rigoureuses et la critique de ces démonstrations fait aussi partie de la logique historique.

Je n’ai pas la place pour exposer et critiquer leurs démonstrations, mais je choisis un exemple particulièrement intéressant. Dans son premier mémoire, Liouville propose une démonstration. Il annonce ceci :

On peut voir, dans l’ouvrage de M. Poisson sur la chaleur, comment on est porté, par la marche même du calcul, à admettre la possibilité de ce développement [celui dont il est question, le développement en série “de Fourier” selon les fonctions  $V_n$ ] pour une fonction quelconque  $f(x)$  ; mais jusqu’à ce jour il a paru difficile d’établir cette possibilité directement et d’une manière rigoureuse. Je me propose de donner ici une méthode très simple pour y parvenir. Je considère en elle-même la série par laquelle les géomètres ont représenté le développement de  $f(x)$  dont il est question : sans rien supposer a priori sur l’origine de cette série ni sur sa nature, j’en cherche la valeur, et je trouve que cette valeur est précisément  $f(x)$ , du moins lorsque la variable  $x$  est comprise entre les limites  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{X}$ .

La démonstration dont parle Liouville n’était pas vraiment correcte et sa critique a été déterminante pour la compréhension des espaces fonctionnels. Elle contient l’idée des *familles totales*, mais je renvoie à la littérature (notamment l’ouvrage de Dieudonné) pour le complément d’information.

## 5 Les équations intégrales

Dans la littérature scientifique du XIX<sup>e</sup> siècle, les séries obtenues par itération à partir d’une équation intégrale (méthode des approximations successives), sont souvent appelées séries de Beer–Neumann. Carl Neumann semble être le premier à en avoir fourni une théorie générale et rigoureuse selon les canons mathématiques ; A. Beer est connu pour en avoir répandu l’usage en électromagnétisme, à partir de “raisonnements de physicien” ; l’idée d’y recourir (pour le “problème de Dirichlet”) avait été proposée par Gauss. Cette littérature semble avoir ignoré le travail de Liouville. En examinant les textes de cette époque intermédiaire ( $\sim 1830 - 1860$ ), il ne faut surtout pas oublier que l’électromagnétisme n’avait pas encore pris la forme achevée que lui a donné Maxwell dans son *Traité* de 1873, et qui est encore enseignée aujourd’hui.

Pour donner une idée du rôle donné à cette époque aux équations intégrales, voici

<sup>3</sup>Il s’agit de l’orthogonalité *avant la lettre* ; le terme orthogonalité a été introduit en 1904 par Erhard Schmidt et implique une perception géométrique. Cette idée de Schmidt, de l’analogie entre le produit scalaire euclidien et l’intégrale  $\int f(x) g(x) dx$ , est une étape essentielle de la *logique historique*. Pour une étude historique spéciale de cette notion d’orthogonalité, voir Jean-Luc Dorier 1996.

un extrait d'un court article de A. Beer [1856], où il étudie le potentiel électrostatique à l'intérieur d'une surface *conductrice*, si les charges qui le créent sont toutes sur cette surface :

Si maintenant le corps portant les charges est entièrement situé à l'extérieur de la surface  $S$ , alors l'expression  $\Delta V$  devient nulle dans toute la région entourée par ce corps, et on a, selon la formule de Green bien connue, en tout point de ladite région :

$$\begin{aligned} V &= \int \frac{\partial(\frac{V}{4\pi r})}{r} \cdot dS + V' \\ V' &= - \int V \cdot \partial(\frac{1}{4\pi r}) \cdot dS \end{aligned} \quad (4.1.)$$

[le symbole  $\partial$  désigne ici la dérivée normale sur  $S$ ] La fonction  $V$  est de toute évidence elle-même un potentiel. et l'expression  $\Delta V'$  s'annule partout à l'intérieur de  $S$ .

Il est clair que si dans la première équation ci-dessus, on substitue à  $V'$  son expression donnée dans la deuxième, on obtient une équation intégrale. Beer en propose la résolution par itération, et prouve la convergence du procédé à partir d'arguments physiques. Dans ce contexte l'équation intégrale est beaucoup plus parlante que l'équation différentielle, car elle exprime directement la rétroaction du potentiel sur les charges : la surface  $S$  étant conductrice, les charges (qui ne peuvent en sortir, mais peuvent de déplacer le long de celle-ci) sont influencées par le potentiel global, ce qui les déplace et modifie en retour ledit potentiel.

On reconnaîtra aussi dans cette citation le *problème de la cavité*, déjà mentionné plus haut ; mais dans cet exemple Beer n'étudie que le potentiel électrostatique et non les vibrations. Le problème des *vibrations* dans une cavité n'a jamais reçu, au long du XIX<sup>e</sup> siècle une importance comparable aux problèmes *électrostatiques* (problèmes dits "de Dirichlet" ou "de Neumann"). Il n'a donc jamais eu le privilège d'être le guide ou le modèle des géomètres au cours de la longue évolution historique que j'essaie de retracer. Mais il a toujours été présent, soit sous des formes déguisées comme par exemple celui de la membrane, soit comme tel avec une importance modeste.

Ces questions semblent à première vue tout à fait étrangères à la future Mécanique quantique, et bien sûr c'est cela qui donne le sentiment de l'*étrangeté historique* signalée en introduction. On verra l'écart apparent se creuser encore avec la suite de l'histoire, car à partir du moment où Gauss, Neumann, etc, ont donné au problème une vie mathématique autonome, l'évolution ultérieure devait logiquement devenir encore plus indépendante.

Or cet écart n'est qu'apparent : la Mécanique quantique *semble* avoir trouvé par miracle les bases mathématiques qu'il lui fallait ; mais c'est tout simplement parce que la Mécanique quantique prend en compte les propriétés *ondulatoires* des très petites particules, et que toutes les ondes (qu'elles soient acoustiques, électromagnétiques, électroniques) sont décrites mathématiquement par les mêmes équations, qui sont aussi celles d'une membrane. L'atome d'hydrogène est *physiquement* analogue à la cavité électromagnétique, qui est elle-même *physiquement* analogue à la membrane étudiée jadis par Leonhardt Euler. Nous y reviendrons dans la conclusion.

Dans l'Histoire des équations intégrales telle qu'elle est perçue par la tradition des mathématiques pures, une étape importante est la méthode de résolution proposée par Ivar Fredholm [1903]. Ce travail est à juste titre célèbre et il est inutile de le décrire en détail pour notre propos ; je me contente d'en rappeler l'idée de base.

Fredholm propose de résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x) \quad (4.2.)$$

d'une manière analogue à la résolution des systèmes de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues par la méthode des déterminants de Cramer, et introduit pour cela les équivalents *fonctionnels* de ces déterminants. Voici ce qu'écrivit Fredholm au début de son article (troisième page) :

... il existe une quantité  $D_f$  qui joue par rapport à l'équation fonctionnelle (4.2) le même rôle que joue le déterminant par rapport à un système d'équations linéaires. Pour définir  $D_f$  j'introduis la notation abrégée

$$f \left( \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \dots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) & \dots & f(x_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n, y_1) & f(x_n, y_2) & \dots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix} \quad (4.3.)$$

et je pose

$$\begin{aligned} D_f &= 1 + \int_0^1 f(x, x) dx + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 f \left( \begin{matrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{matrix} \right) dx_1 dx_2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int f \left( \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{matrix} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (4.4.)$$

La méthode de Fredholm se comprend aisément si on discrétise l'intervalle  $[0, 1]$  par les points  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = \frac{1}{n}$ ,  $a_2 = \frac{2}{n}$ , ...  $a_n = 1$  : l'intégrale de (4.2) devient une somme finie, et l'équation (4.2) un système de  $n + 1$  équations à  $n + 1$  inconnues dont la matrice est  $I + F$ ,  $I$  étant la matrice unité et  $F$  la matrice provenant de la discrétisation de  $f$ , dont les éléments sont  $F_{i,j} = f(a_i, a_j)$ . Toutes les formules de Fredholm s'obtiennent alors comme les limites quand  $n$  tend vers l'infini des formules de résolution de Cramer. Cet aspect est totalement occulté dans l'article de Fredholm, mais restitué dans l'exposé qu'en fera Hilbert peu après (*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*) ; nous y reviendrons à la section 5 ci-après. On voit ici que les méthodes heuristiques de l'électromagnétisme sont loin ; le travail de Fredholm est celui d'un mathématicien qui suit la logique propre de son domaine : résoudre un problème légué par les Anciens. Ce problème est résolu selon les canons, désormais fixés, de ce qu'on appelle déjà la *mathématique pure* : la discrétisation est occultée afin d'accentuer l'aspect purement déductif de l'exposé ; la question *pratique* du calcul numérique effectif n'est même pas posée et le simple fait d'avoir pu *écrire* la formule de résolution dans le langage de l'analyse suffit pour que le problème soit considéré comme définitivement résolu. Pourtant l'expression (4.4) qui donne le déterminant, tout comme les formules explicites de

résolution données plus loin (dans l'article de Fredholm) sont inutilisables pour le calcul numérique, car l'algorithme optimal pour résoudre numériquement un système linéaire est celui du pivot de Gauss et surtout pas celui de Cramer ; sans compter la manière de discrétiser l'intégrale.

L'étude entreprise ici sur une période qui couvre un siècle met en évidence un phénomène connu, mais peu discuté de l'évolution historique, qui est la spécialisation. Vers 1900, celle-ci était encore bien loin des extrêmes qu'on observe aujourd'hui, mais déjà visible. Les travaux de Bernoulli et d'Euler sur les membranes, ceux de Fourier, puis de Sturm et Liouville, sur la chaleur, ceux de Gauss sur l'électrostatique, étaient des travaux de physique mathématique motivés par la *philosophie naturelle* ; ce faisant, ils ont légué à la postérité des problèmes issus de ces recherches, mais formulés d'une manière purement mathématique qui les rend autonomes par rapport à leur origine : les fonctions de Bessel, les séries de Fourier, les valeurs propres, le problème de Dirichlet, les équations intégrales, etc. Ces problèmes peuvent alors mener leur vie propre dans l'Histoire des mathématiques pures, comme le montre très clairement le travail de Fredholm (c'est ce qui a parfois conduit à l'illusion que cette Histoire se passait dans le ciel des idées). Toutefois ces problèmes peuvent conserver au cours du temps un contenu *physique* lié à leur origine, qui pendant longtemps restera en arrière-plan, au point de n'apparaître aux yeux des contemporains que comme un cas d'application tout à fait contingent, voire oublié. Jusqu'au jour où, la Physique redécouvrant le même phénomène dans une autre région de la Nature, les solutions apportées entretemps par les mathématiciens sembleront relever du miracle ou de l'harmonie préétablie.

## 6 La synthèse de Göttingen

Le texte fondateur de Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, commence par exposer le travail de Fredholm (qui venait d'être publié dans *Acta Mathematica*). Cela montre l'importance énorme que lui donnait Hilbert. La motivation subjective de Hilbert (nous l'examinerons plus loin) est toutefois étrangère aux problèmes qui sont à l'origine de ce grand courant que nous suivons depuis Bernoulli, Euler, Fourier. Ce n'est pas parce que la théorie de Fredholm apporte enfin la solution à des vieux problèmes sur la vibration des membranes, la diffusion de la chaleur, ou la cavité électromagnétique que Hilbert lui fait cet honneur. De toute façon la théorie de Fredholm n'apporte rien à la résolution effective de ces problèmes : les équations intégrales n'intéressaient les physiciens Liouville, Gauss, ou Beer que comme outil pour *calculer* les solutions, et nous avons vu que pour *calculer*, la méthode de Fredholm est inutilisable. En réalité, la principale découverte de Fredholm est le théorème suivant (11<sup>e</sup> page de son article)

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution différente de zéro de l'équation*

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (5.1.)$$

*c'est que  $D_f = 0$  [ $D_f$  est défini par (4.4)]. Si  $n$  est l'ordre du premier mineur de  $D_f$  qui soit différent de zéro, l'équation donnée possède  $n$  solutions linéairement indépendantes.*



Ces solutions linéairement indépendantes liées aux valeurs  $\lambda_n$  sont la généralisation des fonctions  $V_r$  de Sturm et Liouville. Les problèmes de membrane et de cavité électromagnétique sont le plus souvent présentés sous forme d'équation différentielle (équation des ondes telle que 1.1), mais comme l'avaient compris Sturm et Liouville, un problème différentiel *avec* conditions aux limites est équivalent à une équation intégrale, de sorte que cette *alternative de Fredholm* s'y applique. Un calcul assez simple montre par exemple que les deux problèmes suivants sont exactement équivalents :

— premier problème : trouver une fonction  $\varphi(x)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  telle que

$$\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) = \chi(x) \quad \varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 0 ; \quad (5.4.)$$

— deuxième problème : trouver une fonction  $\varphi(x)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  telle que

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y) dy = \psi(x) . \quad (5.5.)$$

Il suffit pour cela que l'on prenne

$$f(x, y) = \kappa(x, y)q(y) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_0^1 \kappa(x, y)\chi(y) dy \quad (5.6.)$$

avec

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 ; \\ x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (5.7.)$$

En effet, ce choix judicieux de  $\kappa$  entraîne que l'équation intégrale (5.5) — compte tenu de (5.6) — est exactement équivalente à l'équation différentielle *plus* les deux conditions  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(1) = 0$ .

On voit que l'équation intégrale (5.5) est exactement de la forme (4.2) étudiée par Fredholm (le cas d'un intervalle quelconque  $[a, b]$  au lieu de  $[0, 1]$ , s'y ramène par une transformation élémentaire).

On comprend aisément que la même équivalence entre problème différentiel avec conditions au bord et équation intégrale subsiste en dimensions deux, trois, ... Quoique Fredholm n'ait pas évoqué ce cas dans son article, sa méthode s'appliquerait de la même façon avec des intégrales doubles, triples, ... La discrétisation serait plus compliquée, mais le principe reste le même.

Par exemple le problème de la cavité électromagnétique s'écrit sous sa forme différentielle :

Trouver les modes de vibration du potentiel  $V$  tels que

$$\Delta V + k^2 V = 0 \quad (5.8.)$$

dans le domaine tridimensionnel (la cavité)  $\Omega$ , et tels que  $V$  soit nul sur le bord  $\partial\Omega$ .

En effet, introduisons le noyau résolvant  $P(x, \xi)$  du problème associé de Dirichlet : si  $h_0(\xi)$  est une fonction continue donnée sur  $\partial\Omega$ , la fonction

$$h(x) = \iint_{\partial\Omega} P(x, \xi) h_0(\xi) d\xi \quad (5.9.)$$

sera son prolongement harmonique dans  $\Omega$  ( $d\xi$  étant la mesure-aire sur  $\partial\Omega$ ). Alors, si on pose

$$\kappa(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{r(x, y)} - \iint_{\partial\Omega} \frac{P(x, \xi)}{r(\xi, y)} d\xi \right], \quad (5.10.)$$

où  $r(x, y)$  est la distance euclidienne de  $x$  à  $y$ , le problème différentiel ci-dessus sera exactement équivalent à l'équation intégrale suivante :

$$V(x) + k^2 \iiint_{\Omega} \kappa(x, y) V(y) = 0 \quad (5.11.)$$

Le noyau  $\kappa(x, y)$  défini en (5.10) devient infini pour  $x = y$ , contrairement à ce qui se produit en dimension 1 avec (5.7). Mais cette singularité est intégrable et par conséquent la théorie de Fredholm peut s'appliquer avec des adaptations mineures. Comme cela avait été rappelé plus haut, le procédé de Fredholm est *sans intérêt* pour le calcul numérique, et de ce point de vue la forme différentielle sera souvent la plus efficace. Mais on voit qu'*en principe*, tous les problèmes classiques (membrane, chaleur, cavité électromagnétique, problème de Dirichlet, etc) peuvent être résolus dans le cadre proposé dans *Grundzüge...* ou *Methoden der mathematischen Physik*, c'est-à-dire sans l'intégrale de Lebesgue ni les espaces  $L_2$ . Il en sera de même pour la Mécanique quantique.

Hilbert s'est exprimé à cette époque sur le sens qu'il entendait donner à la grande synthèse de tous ces problèmes classiques sous l'emblème des équations intégrales : *l'unification de l'algèbre et de l'analyse*. En effet, la similitude entre la méthode de Fredholm pour les équations intégrales et celle de Cramer pour les systèmes de dimension finie doit conduire naturellement à une méthode unique et universelle, que la discrétisation avec passage à la limite met bien en évidence. Voici sa vision [1909] :

*Das genannte Problem der Bestimmung unendlichvieler Unbekannter aus unendlichvielen Gleichungen erscheint auf den ersten Blick wegen seiner Allgemeinheit undankbar und unzugänglich; bei einer Beschäftigung damit droht die Gefahr, daß wir uns in zu schwierige oder vage und weitschichtige Betrachtungsweisen verlieren ohne entsprechenden Gewinn für tiefere Probleme. Aber wenn wir uns durch solche Erwägungen nicht beirren lassen, geht es uns wie Siegfried, vor dem die Feuerzauber von selber zurückweichen und als Lohn winkt uns entgegen der schöne Preis einer methodisch-einheitlichen Gestaltung von Algebra und Analysis.*

4

---

<sup>4</sup>**Traduction** : Ce problème de la détermination d'une infinité d'inconnues à partir d'une infinité d'équations, à cause de sa généralité, semble à première vue ingrat et inextricable ; en voulant le traiter on s'expose au danger de se perdre dans des considérations trop compliquées, ou trop vagues, ou trop vastes, de sorte que les efforts consentis pour gagner une perception plus profonde des problèmes seraient disproportionnés. Mais si nous ne nous laissons pas détourner par de tels scrupules, il nous arrivera ce qui est arrivé à Siegfried, qui a vu le feu enchanté reculer devant lui et en récompense nous verrons scintiller le merveilleux trésor d'une *formulation unifiée de l'Algèbre et de l'Analyse*.

## 7 Conclusion

La synthèse de tous les problèmes étudiés de manière éparse par les mathématiciens au cours du XIX<sup>e</sup> siècle sous la bannière des équations intégrales n'est en réalité qu'une couverture logique<sup>5</sup> qui cache peut-être le sens réel de ces problèmes, mais ne le supprime pas. Tout comme la forme d'un tumulus celtique est encore reconnaissable sous la végétation, ou les configurations de MSDOS sous les systèmes d'exploitation les plus récents et les plus sophistiqués.

Voici maintenant Schrödinger qui arrive en 1926 avec une logique entièrement étrangère à celle affichée par Hilbert (unification de l'Algèbre et de l'Analyse) :

L'analogie entre la mécanique et l'optique signalée par Hamilton ne concerne que l'optique *géométrique*; en effet, d'après cette analogie, à toute *trajectoire* du point représentatif dans l'espace de configuration correspond un *rayon de lumière* et cette dernière notion ne peut être définie sans ambiguïté qu'en optique géométrique. (...) Cette notion, et avec elle toute la mécanique classique, subsistent comme approximations, valables seulement dans le cas où les dimensions de la trajectoire sont grandes par rapport à la longueur d'onde. Au contraire, pour le cas des mouvements "micromécaniques", les équations fondamentales de la mécanique sont tout aussi peu utilisables que l'optique géométrique pour le traitement des problèmes de diffraction; par analogie avec ce qui se passe en optique, les équations fondamentales doivent être remplacées par une seule *équation d'ondes* dans l'espace de configuration. (page XIX dans la réédition Gabay)

Pour aider le lecteur non physicien, il sera peut-être utile ici de rappeler rapidement comment on en est venu à découvrir les phénomènes quantiques. Le fait flagrant était que les atomes de la matière, chauffés (par exemple dans les étoiles), émettent de la lumière uniquement à des fréquences caractéristiques de chaque atome particulier. Ce phénomène est physiquement analogue aux fréquences propres d'une cavité électromagnétique, mais cette analogie n'a pas été perçue aussi facilement. C'est justement Erwin Schrödinger qui en a tiré les conséquences. Dans les atomes les électrons ont un comportement ondulatoire et, s'ils étaient "enfermés dans une cavité", les électrons auraient des fréquences propres comme dans le problème (5.7). Il se trouve que dans les atomes les électrons ne sont pas enfermés dans une cavité qui aurait un bord bien délimité : ils sont confinés par le potentiel coulombien du noyau. Ce que Schrödinger a montré dans ses mémoires, c'est que si on traite le problème d'un électron dans le champ coulombien d'un proton (atome d'hydrogène) en complète analogie avec le problème (5.7), alors on obtient pour valeurs propres exactement les niveaux de Bohr, en parfaite adéquation avec les fréquences d'émission de cet atome.

Très exactement, l'analogie a conduit Schrödinger à l'*équation d'ondes* que voici (pages 2-3 de l'édition Gabay) : (...) [l'équation] s'écrit alors dans notre cas :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z^2} - \frac{2m}{K^2} \left( E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0$$

---

<sup>5</sup>Il ne faut évidemment pas interpréter cette remarque comme une contestation de l'utilité de cette couverture logique; il s'agit seulement de ne pas ignorer ce qui est en-dessous.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$e$  étant la charge et  $m$  la masse de l'électron.

Ajoutons que  $K$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$  et  $E$  l'énergie de l'électron.

Schrödinger indique que

(...) si  $E$  est négatif il n'existe pas de solution, sauf pour une *suite discrète de valeurs* de cette constante. (...) Le spectre discret correspond aux termes de BALMER

Il signale aussi (note au bas de la page 4) :

Je suis redevable à HERMANN WEYL des indications nécessaires pour le traitement de l'équation.

D'ailleurs le traité de Courant–Hilbert (qui venait tout juste de paraître chez Julius Springer) est fréquemment cité dans ces mémoires pour les éléments proprement mathématiques (notamment développements en séries de fonctions propres, polynômes d'Hermite, etc).

Après ce survol historique, on arrive enfin à comprendre pourquoi le trousseau de clés d'Erwin Schrödinger ouvre toutes les portes : *en réalité* toutes les serrures de la Nature étaient construites sur le même modèle, mais on ne le savait pas à l'avance. De Bernoulli à Schrödinger, c'est toujours le problème de la membrane, c'est-à-dire celui des ondes, qui reste le paradigme. Non seulement la Mécanique quantique n'en est pas sortie (du moins pas dans sa première mouture, appelée parfois, pour la distinguer, Mécanique ondulatoire), mais elle a même renforcé l'uniformité : avant, on ouvrait les serrures de la mécanique avec d'autres clés que celles de l'électromagnétisme ; vers 1925, on a découvert que la même clé ouvrait les deux serrures.

## BIBLIOGRAPHIE

### André-Marie Ampère

1823 *Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience.*

Réédition Jacques Gabay, Paris, 1990

### A. Beer

1856 *Allgemeine Methode zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Induction.* Poggendorffer Annalen der Physik vol **98**, pages 137–142.

### Richard Courant, David Hilbert

1924 *Methoden der mathematischen Physik.* Julius Springer, Berlin

### Jean Dieudonné

1981 *History of Functional Analysis.* North-Holland, Amsterdam.

### Jean-Luc Dorian

1996 *Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions.* Revue d'histoire des mathématiques, vol **2**, pages 265–307.

### Joseph Fourier

1822 *Théorie analytique de la chaleur.*

(réédition Jacques Gabay, Paris, 1988).

### Ivar Fredholm

- 1903 *Sur une classe d'équations fonctionnelles.*  
Acta Mathematica, vol **27**, pages 365–390.

**George Green**

- 1828 *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.*  
In *Mathematical Papers of the late George Green*, ed. by N. M. Ferrers, Macmillan and Co, London, 1871.

**Ernst Hellinger**

- 1935 *Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen und unendliche Gleichungssysteme.*  
In *Hilberts Gesammelten Abhandlungen*. Julius Springer, Berlin.

**David Hilbert**

- 1909 *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen.*  
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Band **27**, S 59–74 oder in *Hilberts gesammelten Abhandlungen*, Band III, S 56–72.
- 1912 *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Teubner, Leipzig

**Alexandre Koyre**

- 1961 *La révolution astronomique.* Éd. Hermann, Paris.

**Joseph Liouville**

- 1836 *Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable.*  
Journal de Liouville, vol **1**, pages 253–265.
- 1837 *Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable.*  
Journal de Liouville, vol **2**, pages 16–35.

**James Clerk Maxwell**

- 1873 *Traité d'électricité et de magnétisme.*  
Réédition Jacques Gabay, Paris, 1989

**Carl Gottfried Neumann**

- 1877 *Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential.* Teubner, Leipzig

**Johann von Neumann**

- 1932 *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.*  
Julius Springer, Berlin

**Erwin Schrödinger**

- 1926 *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire.*  
Traduits en français par Al. Proca, Félix Alcan, Paris, 1933 et réédition Jacques Gabay, Paris, 1988.

**Charles-François Sturm**

- 1836 *Mémoire sur les équations différentielles du second ordre.* Journal de Liouville, vol **1**, pages 106–168

**Adolf P. Youschkevitch**

- 1976 *The concept of a function up to the middle of 19<sup>th</sup> century.* Archives for history of Exact Sciences vol. **19**, pages 37–85

# ALGÈBRE LINÉAIRE ET SCIENCE ÉCONOMIQUE, UN CAS EXEMPLAIRE

Jean ARROUS

Professeur de Sciences Économiques  
à l'Université Robert Schuman-Strasbourg III

Vu du côté des économistes, mathématiques et science économique ne font pas bon ménage, c'est le moins que l'on puisse dire. La mathématisation de la science économique intervenue depuis la Seconde Guerre mondiale donne en effet lieu à d'incessantes querelles, une sorte de guerre des anciens et des modernes perpétuellement renouvelée. À terme, il sera possible d'intégralement mathématiser le domaine couvert par l'économie, disent les uns. Impossible de mettre l'humain en équations, disent les autres.

Pour notre part, nous pensons qu'il est des domaines de la science économique qui peuvent être mathématisés, tout comme il en est d'autres qui échapperont à la mathématisation. Ce qu'un économiste disparu il y a peu, N. GEORGESCU-ROEGEN résumait par la formule suivante : « Il y a une limite à ce que nous pouvons faire avec les nombres, tout comme il y a une limite à ce que nous pouvons faire sans eux » (GEORGESCU-ROEGEN [1958], p.275).

Le propos de cet article n'est pas d'ajouter une pierre supplémentaire à ce débat sur l'utilisation des mathématiques en économie mais, dans le droit fil de la citation précédente, de montrer qu'il est un domaine de la science économique, qualifié d'Analyse Entrées-Sorties, auquel l'algèbre linéaire semble si bien adaptée que l'on pourrait croire que cette dernière a été inventée à l'instigation des économistes. L'histoire de ces deux disciplines montre que ce n'est pas le cas.

En quelques mots, disons que l'Analyse Entrées-Sorties a été inventée par un économiste américain d'origine russe, Wassily LEONTIEF (1906-1998), prix Nobel 1973. Comme beaucoup d'européens de l'Est, il fit une partie de ses études à Berlin, où il approfondit ses connaissances en mathématiques, avant d'émigrer dans les années 30 aux États-Unis : c'est là qu'il mit au point l'Analyse Entrées-Sorties (Input-Output Analysis).

L'analyse microéconomique radioscopie l'activité économique à partir du comportement des agents individuels. L'analyse macroéconomique le fait à partir du comportement de quantités globales, qualifiées d'agrégats : le Produit Intérieur Brut (P.I.B.), la consommation des ménages, ... Le point de départ de l'Analyse Entrées-Sorties est proche de celui de la macroéconomie : elle étudie l'activité économique à partir d'un découpage de cette dernière en branches. On entend par branches l'ensemble des entreprises qui fabriquent un produit homogène : caoutchouc, pétrole, bière, automobiles, ...

Les différentes branches achètent et vendent les unes aux autres, le tableau de ces échanges inter-branches est donc un tableau carré. Vient s'ajouter à ce constat l'hypothèse, dite hypothèse de linéarité de LEONTIEF, suivant laquelle les achats d'une branche aux autres branches sont proportionnels à la production de cette même branche : doublez la production d'automobiles, vous doublerez les achats de cette branche en acier, caoutchouc, verre, plastique, ... Ces derniers achats sont

qualifiés de consommations intermédiaires. Si l'on superpose à la description fournie par le tableau des échanges inter-branches l'hypothèse de linéarité, on voit aisément poindre l'intervention du calcul matriciel. Plus précisément, le calcul matriciel relatif aux matrices carrées, qui plus est à coefficients positifs, puisque tel est le signe des quantités échangées entre les différentes branches de toute économie.

C'est à ce point que l'algèbre linéaire constitue un cas véritablement exemplaire d'application des mathématiques à l'économie, sous la forme de théorèmes relatifs aux propriétés des matrices carrées à coefficients positifs. Il s'agit en l'espèce d'un ensemble constitué de théorèmes démontrés au début du XX<sup>e</sup> siècle par PERRON et FROBENIUS et d'autres démontrés plus récemment (Cf. Appendice et Bibliographie). Or, les propriétés de ces matrices ont une interprétation économique en adéquation totale avec la nature du problème étudié. Les théorèmes viennent, de plus, conférer un caractère indispensable de généralité aux applications numériques que nous proposerons.

Achevons à ce point la présentation générale de l'Analyse Entrées-Sorties en indiquant que les différents biens produits dans une économie ne sont pas seulement utilisés à l'occasion des échanges inter-branches. Pour reprendre la terminologie de cette analyse, les biens sont utilisés non seulement en emplois intermédiaires, mais également en emplois dits finals : si l'électricité produite sert à faire fonctionner des locomotives et des alternateurs, elle sert également à éclairer et à chauffer les appartements des consommateurs finals que nous sommes. La somme des différents emplois finals de chacun des biens de l'économie est regroupée sous la forme d'une matrice, uniligne ou unicolonne, en fait unicolonne, on verra ultérieurement pourquoi.

Nous exposerons les fondements de l'Analyse Entrées-Sorties en deux temps. Dans le premier, une analyse fondée sur les seules quantités physiques des biens échangés nous conduira à définir et à construire une courbe, qualifiée de frontière des possibilités de production. Le second temps prendra en considération les prix des produits et fera apparaître une seconde courbe, qualifiée de frontière des prix des facteurs. Le grand intérêt de la construction de ces deux courbes est qu'à partir d'elles, on peut présenter le cœur de la problématique de la science économique.

## **1. L'analyse en termes physiques et l'étude de la rareté**

L'Analyse Entrées-Sorties peut d'emblée être présentée à partir d'exemples numériques, ce qui constitue un atout pédagogique non négligeable. Pour ce faire, nous raisonnerons sur une économie « imaginaire » constituée de deux branches produisant respectivement blé et acier, par exemple.

Une économie à deux branches, c'est irréaliste, nous dira-t-on. Il existe de nombreux débats entre économistes sur la question de l'irréalisme des hypothèses qui fondent la théorie économique. Ces débats n'ont toutefois guère de portée en Analyse Entrées-Sorties. En effet, dans la mesure où les raisonnements que nous allons présenter utilisent l'algèbre linéaire, ils seront, par définition, aussi bien valables pour deux branches que pour 10, 50 ou 200, ces dernier cas étant par nature beaucoup plus réalistes, on en conviendra aisément.

En fait, pour la présentation de notre propos, le choix portant le plus à conséquence nous paraît être celui entre modèle à deux ou à trois branches. Le modèle à trois branches, on peut s'en douter, permet de mettre en évidence des propriétés plus nombreuses. À l'inverse, il ne permet pas de présenter de façon simple la frontière des possibilités de production. Nous « limiterons » donc l'exposé à celui du modèle à deux branches, et renvoyons le lecteur intéressé par plus de détails à ARROUS (1987).

Dans l'ensemble de ce qui suit, nous illustrerons l'activité d'une économie à deux branches à l'aide des données numériques suivantes :

		Emplois intermédiaires		Emplois finals	Total des emplois
		<i>I</i>	<i>II</i>		
Consommations intermédiaires	<i>I</i>	-	140	160	300
	<i>II</i>	120	-	80	200
Entrées-travail		300	400		

Insistons d'abord sur le fait que les données des deux tableaux précédents sont en *quantités physiques* : quintaux de blé et tonnes d'acier. Intéressons-nous ensuite au tableau carré des échanges entre les branches *I* et *II*, tableau dit des échanges intermédiaires ou inter-branches. Par convention, ce tableau retrace en ligne les ventes d'une branche à l'autre branche – les emplois intermédiaires –, et en colonne les achats – les consommations intermédiaires – des branches. Enfin, le second tableau uniligne, indique les entrées-travail, les quantités de travail nécessaires à la production totale de chacun des deux biens.

### 1. Matrice technologique et équation fondamentale de l'Analyse Entrées-Sorties

Considérons maintenant le premier produit : la lecture de la première colonne du tableau des échanges intermédiaires nous indique que, pour produire 300 quintaux de blé, il faut utiliser 0 quintal de blé et 120 tonnes d'acier. Du fait de l'hypothèse de linéarité de Leontief, pour produire 1 quintal de blé, il faut donc consommer 0 quintal de blé et 0,4 tonne d'acier. On met ainsi en évidence deux coefficients, notés algébriquement  $a_{11}$  et  $a_{21}$ , qui indiquent la quantité des biens *I* et *II* nécessaire à la production d'une unité du bien *I*. On peut montrer de la même manière que la production d'un quintal de blé exige 1 unité de travail, quantité que nous noterons  $h_1$ .

Si l'on passe en revue les deux branches de l'économie, on voit ainsi apparaître, d'une part, une matrice carrée  $A$ , de dimension 2, et, d'autre part, une matrice ligne  $L$  (à deux éléments), qui décrivent les conditions physiques de la production dans l'économie considérée. La matrice  $A$  est qualifiée de *matrice technologique* : elle s'interprète par colonne et indique la quantité de consommations intermédiaires de chacun des produits nécessaire à la production d'une unité de chacun des biens. La matrice  $L$  est la *matrice des entrées-travail* : elle indique la quantité de travail qui doit être utilisée pour produire une unité de chacun des biens.

Les données numériques correspondantes sont ici :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,7 \\ 0,4 & 0 \end{bmatrix} \quad L = [1 \ 2].$$

Si l'on produit maintenant non pas 1 unité de chacun des biens, mais  $x_1$  unités du premier et  $x_2$  unités du second, nous représenterons la production globale des deux biens par le vecteur-colonne  $X$  suivant :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On pourra vérifier que les emplois intermédiaires associés à ce vecteur de productions totales s'écrivent  $AX$ .

Désignons par  $y_i$  les emplois finals de chacun des biens. Globalement, ils définissent le vecteur-colonne  $Y$  qui, dans le cas de deux biens, s'écrit :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

La production totale,  $X$ , est utilisée soit à des emplois intermédiaires  $AX$ , soit à des emplois finals  $Y$ . Ceci nous conduit à établir *l'équation fondamentale de l'Analyse Entrées-Sorties en termes physiques* :

$$\boxed{X = AX + Y}$$

À un vecteur de productions totales  $X$ , on peut donc associer un vecteur  $Y$  d'emplois finals :  $Y = X - AX$ . Ces derniers emplois représentent ce qui est disponible pour les consommateurs finals (ainsi que, entre autres, pour les exportations) une fois que l'on a retranché de la production totale ce qui est utilisé de façon intermédiaire.

Ajoutons à ce qui précède que *l'emploi total*  $l$ , associé au programme de production  $X$  s'écrit directement  $l = LX$ . En termes physiques, le fonctionnement de l'économie que nous étudions se résume donc aux deux écritures matricielles suivantes :

$$X = AX + Y \text{ et } l = LX.$$

## 2. La matrice inverse de Leontief et le problème du planificateur

Intéressons-nous maintenant au problème inverse, celui qui consiste à se donner  $Y$  et à en déduire  $X$ . Il est mathématiquement possible de le résoudre, à condition que la matrice  $I - A$  soit inversible. Si c'est le cas, on peut en effet écrire :

$$\boxed{X = [I - A]^{-1} \cdot Y}$$

La matrice  $[I - A]^{-1}$  est qualifiée de matrice inverse de LÉONTIEF.

C'est sous la forme de l'équation précédente que se présenta le problème qu'eurent à résoudre les planificateurs soviétiques. Fixons en effet a priori les besoins en chaussures, chemises, manteaux, ... du « consommateur » soviétique type et multiplions ces quantités par le nombre de consommateurs, on obtient le vecteur  $Y$  de l'économie soviétique. Connaissant les structures de production de cette économie – la matrice technologique  $A$  et le vecteur d'entrées-travail  $L$  –, on en déduit aisément  $X$  et  $l$ , c'est-à-dire les programmes de production totale et d'emploi à prévoir, en tenant compte du fait qu'une partie de la production totale est utilisée en emplois intermédiaires.

En 1929, lors du lancement du premier Plan quinquennal, les planificateurs soviétiques ne disposaient pas d'ordinateurs pour inverser la matrice  $I - A$ . Pour ce faire, ils purent néanmoins disposer d'une application tout à fait étonnante de

l'algèbre linéaire. Utilisant le théorème 6 présenté en Appendice, on peut en effet montrer que, dans le cas où  $A$  désigne la matrice technologique d'une économie produisant des emplois finals positifs, la matrice  $[I - A]^{-1}$  peut être développée en série matricielle, soit :

$$[I - A]^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots$$

Le vecteur  $X$  de productions totales peut donc s'écrire sous la forme :

$$X = Y + A.Y + A^2.Y + \dots + A^n.Y + \dots$$

Cette dernière équation s'interprète aisément : pour produire  $X$  en productions totales de chacun des biens, il faut d'abord produire  $Y$ , c'est-à-dire les productions finales. À cela vient s'ajouter le terme  $A.Y$ , qui représente les emplois intermédiaires nécessaires à la production de  $Y$  ; puis le terme  $A^2.Y$ , qui représente les emplois intermédiaires nécessaires à la production de  $A.Y$ , et ainsi de suite. On voit ainsi comment les planificateurs soviétiques purent tenir compte de l'intégralité des besoins des citoyens : il leur suffisait de calculer le développement en série entière de  $X$ , ce qui conduisait à des calculs tout à fait accessibles avec les moyens techniques dont ils disposaient.

### 3. Valeur-travail et théorie de la valeur-travail

Poursuivons la présentation en nous intéressant maintenant à la quantité  $l$  de travail disponible dans l'économie. D'après ce qui précède, cette quantité s'écrit :

$$l = L.X = L.[I - A]^{-1}.Y$$

Posons par ailleurs :

$$L = [l_1 \ l_2] \text{ et } [I - A]^{-1} = J = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}.$$

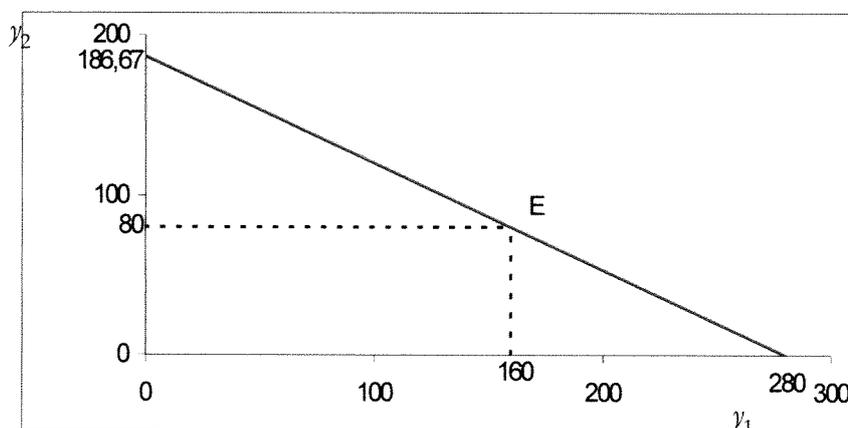
Dans ces conditions, l'équation relative à l'emploi total s'écrit :

$$l = T_1 y_1 + T_2 y_2 \quad \text{avec } T_1 = l_1 j_{11} + l_2 j_{21} \text{ et } T_2 = l_1 j_{12} + l_2 j_{22}.$$

Dans le plan  $(y_1, y_2)$  des quantités d'emplois finals, cette équation est celle d'une droite, qualifiée de *frontière des possibilités de production*. Elle indique les quantités de blé et d'acier que l'on peut obtenir dans cette économie à l'aide de  $l$  unités de travail. Les quantités  $T_1$  et  $T_2$  sont appelées les *valeurs-travail* de chacun des biens : chacune désigne la quantité totale de travail qui est nécessaire, directement et indirectement, à la fabrication d'une unité finale du bien correspondant.

Dans notre exemple numérique, cette droite a pour équation :

$$2,5 \cdot y_1 + 3,75 \cdot y_2 = 700. \text{ Sa représentation graphique suit.}$$



L'activité économique est ici représentée par le point  $E$ . L'emploi total, 700 unités de travail, est utilisé à raison de  $1 \cdot 300 = 300$  unités dans la première branche et de  $2 \cdot 200 = 400$  dans la seconde.

De plus, la pente  $-\frac{T_1}{T_2}$  de la frontière des possibilités de production, ici  $-\frac{2}{3}$ , s'interprète comme un taux d'échange entre les produits : à quantité totale donnée de travail, si l'on veut augmenter d'une unité la quantité finale de blé, il faut réduire de  $\frac{T_1}{T_2}$  la quantité finale d'acier. Dans cette économie où la *rareté* s'introduit par la quantité disponible de travail, la pente  $-\frac{T_1}{T_2}$  de la frontière des possibilités de production s'interprète donc comme le taux d'échange entre les produits,  $T_1$  unités d'un bien s'échangeant contre  $T_2$  unités de l'autre en fonction de leurs contenus respectifs en travail. Alors que l'analyse qui précède n'a en aucun cas fait mention de monnaie, la pente de la frontière définit donc l'équivalent d'un *prix relatif* des biens produits dans cette économie.

Pour terminer sur ce point, signalons que les valeurs-travail que nous venons de calculer sont précisément celles que MARX chercha à mettre en évidence dans sa quête de la théorie de la valeur-travail, théorie qui est vérifiée quand les prix des produits sont proportionnels à leurs valeurs-travail (Cf. *infra*, § 2.1).

#### 4. Deux applications de l'analyse en termes physiques

Considérons en premier lieu le cas où un chef d'État étranger fait une visite en France. La presse nous annonce que de gros contrats ont été signés, la vente de 20 tonnes d'acier par exemple. Numériquement, cela s'interprète en considérant que le nouveau vecteur  $Y$  des emplois finals s'écrit

$$Y = \begin{bmatrix} 160 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

La matrice technologique  $A$  n'a aucune raison d'être modifiée, puisque les conditions techniques de production du blé et de l'acier sont restées les mêmes.

Ces gros contrats vont vraisemblablement avoir l'effet d'un coup de fouet sur l'économie française. On le vérifie en calculant la valeur de la production totale  $X$  associée à la nouvelle valeur de  $Y$ , soit :

$$X = \begin{bmatrix} 319,44 \\ 227,77 \end{bmatrix}.$$

L'augmentation de l'utilisation finale d'un bien se traduit ainsi par l'augmentation de la production totale des deux biens. Ceci découle de l'interdépendance entre les branches, introduite par le canal des consommations intermédiaires. On constate également que l'emploi total augmente et correspond à l'utilisation de 775, au lieu de 700 unités de travail. Mais l'emploi n'augmente pas de façon proportionnelle dans chaque branche : l'impact est plus élevé dans la seconde, où l'emploi croît de 13,9 % contre 6,5 % dans la première.

La seconde application porte sur les effets du progrès technique et considère que ce dernier intervient sous la forme d'une réduction des coefficients de  $A$  ou de  $L$ . Pour illustrer notre propos, nous supposons que la production d'une tonne d'acier n'exige plus que 0,5 quintal de blé au lieu de 0,7 quintal. De la sorte, la matrice technologique s'écrit maintenant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour produire le vecteur  $Y$  « initial », il faut maintenant produire les quantités suivantes de chacun des biens :

$$X = \begin{bmatrix} 250 \\ 180 \end{bmatrix}.$$

La nouvelle valeur de l'emploi total est  $LX = 610$  unités de travail (au lieu de 700). Le progrès technologique envisagé ici est donc créateur de chômage. Là encore, du fait de l'interdépendance entre les branches, les effets de l'introduction du progrès technique se diffusent à l'ensemble de l'économie. Mais ils ne se diffusent pas de façon proportionnelle : la baisse de l'emploi est de 16,7 % dans la première branche, de 10 % dans la seconde.

L'emploi est modifié à la baisse suite à un effet que l'on peut qualifier d'« effet-of-fre », lié à la modification des conditions techniques de la production. En plus de cet effet négatif sur l'emploi, intervient également un « effet-demande » lié à ce que les prix des différents produits sont modifiés. Sans disposer à ce stade de nos développements des éléments du calcul des prix, on peut aisément imaginer que le progrès technologique examiné ici conduit à une baisse des coûts de production de l'acier et, partant, des prix des deux produits. Cette baisse des prix va susciter une augmentation de la demande de la part des consommateurs et de l'étranger : un tel « effet-demande » exerce donc un effet positif sur l'emploi. L'impact total sur l'emploi sera la somme algébrique de ces deux effets. Pour le déterminer, il faudrait ajouter aux données dont nous disposons jusqu'à présent des hypothèses portant sur la réaction des consommateurs et de l'étranger aux variations des prix des différents produits.

### 5. Productivité de la technologie et théorèmes de PERRON-FROBENIUS

Nous avons jusqu'à présent vu que les matrices utilisées par l'Analyse Entrées-Sorties sont à coefficients positifs. Mais cela ne signifie pas pour autant que ces coefficients puissent prendre n'importe quelles valeurs positives, et cela concerne tout particulièrement les coefficients de la matrice technologique  $A$ . L'économie décrite par la matrice  $A$  doit, en effet, produire des quantités positives de chacun des biens non seulement en termes de production totale, mais également en termes de production finale. La technologie est dite *productive* quand cette dernière propriété est vérifiée. Dans de telles conditions, l'économie dégage un surplus, du fait que la production est globalement supérieure aux consommations intermédiaires nécessaires à cette même production.

L'étude de la productivité de la technologie relève des conditions dites de HAWKINS-SIMONS, présentées par ces auteurs dans un article de 1949 : la technologie est productive quand les mineurs principaux successifs de la matrice  $[I - A]$  sont tous positifs (Sur la productivité de la technologie et les conditions de HAWKINS-SIMONS, nous renvoyons à ARROUS [1987], pp. 22-23 ; 34-35, et à DORFMAN-SAMUELSON-SOLOW [1958], p.215).

Dans le cas à deux biens que nous étudions, les deux mineurs principaux de

$[I - A]$  sont respectivement : 1 et  $1 - a_{12}a_{21}$ . Par ailleurs, la valeur propre dominante de la matrice  $A$  est définie algébriquement par :  $s_m = \sqrt{a_{12}a_{21}}$ . On en déduit donc que la *productivité de la technologie* est définie par la condition :

$$\boxed{s_m < 1}$$

De l'établissement de cette condition, nous pouvons maintenant passer à l'application des théorèmes de PERRON-FROBENIUS, mentionnés en Appendice.

Constatons tout d'abord que les valeurs propres de la matrice technologique  $A$  sont respectivement :

$$s_1 = \sqrt{0,28} \text{ et } s_2 = -\sqrt{0,28}.$$

La valeur propre dominante de  $A$  est donc :  $s_m = \sqrt{0,28} = 0,529$ , valeur qui est bien comprise entre 0,4 et 0,7 (cf. Théorème 4).

Intéressons-nous ensuite aux coefficients de la matrice inverse de LEONTIEF :

$$[I - A]^{-1} = \frac{1}{0,72} \begin{bmatrix} 1 & 0,7 \\ 0,4 & 1 \end{bmatrix}.$$

On remarque qu'ils sont tous positifs. Ce résultat est particulièrement «heureux», dans la mesure où il implique que le vecteur  $X$  de productions totales associé à un vecteur  $Y$  positif de productions finales est lui-même positif. Or ce résultat n'est pas seulement un heureux hasard, il découle directement du Théorème 5, appliqué pour  $\mu = 1$ .

Comme les éléments de  $[I - A]^{-1}$  sont tous positifs, il s'ensuit que le résultat obtenu dans l'application numérique relative aux gros contrats est bien tout à fait général : les nouvelles productions totales de chacun des biens sont *toutes* supérieures aux anciennes.

Dans l'application relative au progrès technique, on a vu que les nouvelles valeurs de la production et de l'emploi sont *toutes* inférieures aux valeurs anciennes. Comme l'un des coefficients de la nouvelle matrice technologique prend maintenant une valeur inférieure, le développement en série entière de  $[I - A]^{-1}$  (Cf. supra § 1.2) nous permet de dire que la nouvelle matrice inverse de LEONTIEF a des coefficients inférieurs à ceux de l'ancienne. On peut donc en déduire que le résultat numérique ainsi obtenu est en réalité tout à fait général.

On notera pour terminer que ce dernier résultat s'inscrit dans un contexte plus général, aux termes duquel, suite au progrès technique, les nouvelles valeurs-travail des deux biens sont inférieures aux anciennes (numériquement ici : 2 et 2,625 ; au lieu de 2,5 et 3,75). Graphiquement, cela signifie que la nouvelle frontière des possibilités de production est située « au-dessous » de la précédente. Un tel résultat découle d'un théorème, qualifié de théorème de non-substitution et démontré de façon séparée par N. GEORGESCU-ROEGEN et P.A. SAMUELSON en 1949 (Cf. GEORGESCU-ROEGEN [1950] et [1951], SAMUELSON [1951]). Aux termes de ce théorème, dès l'instant qu'une technique domine une autre technique dans la production d'un vecteur positif de productions finales, elle la domine dans la production de l'ensemble des autres vecteurs (Cf. ARROUS [1987], pp.36-7 et 45-7).

## 2. La détermination des prix et la répartition du revenu national

Nous vivons dans des économies monétaires où les biens sont définis par leurs prix, et la seconde partie de nos développements est consacrée à leur détermination. Notre exposé se fera en deux temps. Dans le premier, nous nous intéresserons à la détermination des prix d'équilibre en fonction de la marge de profit. Le second en constituera un élargissement : traitant de la question de la répartition du revenu national entre salaires et profits, nous construirons une seconde courbe caractéristique du fonctionnement de l'économie, qualifiée de *frontière des prix des facteurs*. Dans les deux cas, l'algèbre linéaire et les théorèmes de PERRON-FROBENIUS tiendront, on le verra, une place essentielle.

### 1. Marge de profit et détermination des prix

Les prix que nous allons calculer sont qualifiés de *prix d'équilibre*, au sens où ils couvrent l'ensemble des coûts. Ces derniers comportent les coûts en consommations intermédiaires et les coûts en salaires, auxquels s'adjoint un montant correspondant aux profits. Les profits sont calculés par prélèvement d'une marge sur les deux premières catégories de coûts. On présentera l'analyse en deux temps, supposant dans le premier que la marge de profit est nulle, et qu'elle est différente de zéro dans le second.

*La marge de profit est nulle*

Désignons par :

$$P = [p_1 \ p_2]$$

le vecteur-ligne des prix d'équilibre des deux biens et par  $w$  le taux de salaire monétaire.

Intéressons-nous à la relation que l'on peut établir sur une unité du premier bien. D'un côté, le prix est  $p_1$  et, de l'autre, le coût en consommations intermédiaires s'écrit :

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{21}$$

À ce dernier terme, il faut ajouter le coût salarial  $w l_1$ . Le prix d'équilibre du premier bien est donc défini par l'équation :

$$p_1 = p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + w l_1.$$

Étendons le raisonnement au second bien. Les prix d'équilibre des deux biens de cette économie sont alors définis par l'équation matricielle suivante :

$$\boxed{P = P \cdot A + w \cdot L}.$$

Cette *équation de détermination des prix d'équilibre* est l'équivalent, dans la sphère des prix, de l'équation fondamentale de l'analyse en termes physiques,  $X = AX + Y$ .

On notera que, si la matrice  $I - A$  est inversible, l'équation précédente peut également s'écrire :

$$\boxed{P = w \cdot L \cdot [I - A]^{-1}}.$$

Ce résultat est fort intéressant : il nous indique en effet que les prix d'équilibre sont déterminés, au coefficient  $w$  près, par les conditions techniques de la production dans l'économie considérée, conditions déterminées par les matrices  $A$  et  $L$ . Reprenant les notations utilisées précédemment, on peut d'ailleurs écrire :

$$P = w \cdot [T_1 \ T_2].$$

On en déduit que le prix relatif  $\frac{p_1}{p_2}$  des deux biens de cette économie est égal au rapport  $\frac{T_1}{T_2}$  des valeurs-travail des deux biens, ces dernières tenant compte tant du travail direct que du travail indirect, intégré dans les consommations intermédiaires, nécessaire à la production des différents biens. Dans le cas où la marge de profit est nulle, *la théorie de la valeur-travail est donc vérifiée*. Dans une telle économie, les biens s'échangent entre eux, sur le marché cette fois, en fonction de leurs contenus respectifs en travail.

Allons plus loin. Les prix étant maintenant connus, on peut les intégrer dans le tableau en termes physiques du § 1 pour en déduire le tableau des échanges monétaires intervenant dans l'économie considérée.

Pour l'application numérique de cette question, on supposera que le taux de salaire monétaire est égal à 1. On en déduit donc que les prix d'équilibre des deux biens sont respectivement : 2,5 et 3,75. De la sorte, il nous suffit de multiplier la première ligne du tableau des échanges en termes physiques par 2,5 et la seconde par 3,75 pour obtenir le tableau des échanges en termes monétaires, qualifié de *Tableau des Entrées-Sorties*. Les résultats sont les suivants :

		Emplois intermédiaires		Emplois finals	Total des emplois
		I	II		
Consommations intermédiaires	I	0	350	400	750
	II	450	0	300	750
Salaires		300	400		
Total des ressources		750	750		

On notera ici que le tableau que nous venons de présenter, qualifié en abrégé de T.E.S., est un des trois tableaux dits de synthèse de la Comptabilité nationale, par lesquels cette dernière présente une maquette globale du fonctionnement de l'activité économique d'un pays pendant une période donnée, généralement l'année.

Les prix des deux biens ( $p_1 = 2,5$  et  $p_2 = 3,75$ ) sont véritablement des prix d'équilibre, au sens où, pour tout autre vecteur de prix, on n'obtient pas, dans chaque branche, égalité entre le total des emplois et celui des ressources, comme c'est le cas ici (on pourra le vérifier en prenant, par exemple,  $p_1 = 1$  et  $p_2 = 1$ ).

*La marge de profit est différente de zéro*

Supposons maintenant qu'une marge de profit  $\lambda$  est prélevée sur l'ensemble des coûts, coûts en consommations intermédiaires et coûts en travail. L'équation de détermination des prix s'écrit alors :

$$P = (PA + wL) + \lambda(PA + wL)$$

De cette équation, on déduit le vecteur des prix :

$$P = (1 + \lambda)w \cdot L \cdot [I - (1 + \lambda)A]^{-1}$$

Formellement, le calcul des prix n'est guère différent dans ce cas : il s'agit en effet d'obtenir l'inverse, non pas de la matrice  $I - A$ , mais de la matrice  $I - (1 + \lambda)A$ . On voit ainsi que l'on passe d'un calcul à l'autre en « dilater » la matrice  $A$  par le coefficient  $1 + \lambda$ , où  $\lambda$  désigne la marge de profit. Ce faisant, on constate que le prix relatif

des deux produits ne peut plus, sauf exception, être égal au rapport des valeurs-travail des deux biens : *la théorie de la valeur-travail n'est plus vérifiée*. Sans insister sur ce point ici, on notera que l'exception que nous venons de mentionner existe bel et bien. Elle correspond au cas dans lequel la proportion de travail et de consommations intermédiaires entrant dans la production unitaire de chacun des biens est identique dans chacune des branches. À ce point, on retrouve MARX, puisque, dans la terminologie de cet auteur, le cas ainsi considéré correspond à la « composition organique uniforme du capital ». De ce fait, la théorie de la valeur-travail, théorie qui eut une importance théorique considérable dans l'histoire du mouvement ouvrier au XX<sup>e</sup> siècle, n'est vérifiée que dans deux cas particuliers : celui où la marge de profit est nulle et celui dans lequel la composition organique du capital est la même dans toutes les branches (Cf. ARROUS [1987], pp.94-101). Perpétuel autodidacte, MARX ne connaissait pas l'algèbre linéaire : la présentation de ses travaux, la problématique de la valeur-travail et les débats qu'elle a suscités auraient été largement simplifiés par le recours à ce type d'outil mathématique.

Dans le cas où la marge de profit s'élève à 20 %, le vecteur  $P$  des prix d'équilibre des deux biens s'écrit :

$$P = [3,94 \ 5,71]$$

À l'aide de ces prix, supérieurs à ceux obtenus précédemment, on déduit le T.E.S. correspondant :

		Emplois intermédiaires		Emplois finals	Total des emplois
		<i>I</i>	<i>II</i>		
Consommations intermédiaires	<i>I</i>	0	551,74	630,56	1182,31
	<i>II</i>	685,26	0	456,84	1142,09
Salaires		300	400		
Profits		197,05	190,35		
Total des ressources		1182,31	1142,09		

Le Produit Intérieur Brut, le P.I.B., de cette économie se calcule directement à partir de ce tableau. Il est défini, entre autres, comme la somme des salaires et des profits distribués dans les deux branches, soit :

$$P.I.B. = 1087,4.$$

Dans le cas précédent avec marge de profit nulle, tout le P.I.B. était affecté à la rémunération des salaires. Ici, sur un total de 1087,4, on constate que 700, soit 64 %, représentent la part des salaires, tandis que la part du Revenu national revenant aux profits s'élève à 36 %. Des calculs qui précèdent, on déduit donc la répartition du Revenu national dans l'économie considérée.

## 2. La frontière des prix des facteurs

On vient d'examiner deux cas numériques de répartition du Revenu national. Intéressons-nous maintenant à cette même répartition pour l'ensemble des valeurs admissibles de la marge de profit : cette étude va mettre en évidence une courbe, qualifiée de *frontière des prix des facteurs* qui est, pour l'analyse en termes monétaires,

l'équivalent de ce qu'est la frontière des possibilités de production dans l'analyse en termes physiques. Or, pour examiner cette question de façon systématique, les théorèmes de PERRON-FROBENIUS vont être d'une utilité décisive.

L'analyse qui suit utilise deux hypothèses simplificatrices. On suppose en premier lieu que l'unité du premier bien définit l'unité monétaire, le « numéraire ». On suppose en second lieu que la consommation des salariés ne porte que sur le premier bien. Leur niveau de vie, leur « salaire réel », sera donc défini par le nombre d'unités de ce bien qu'ils peuvent se procurer, donc, par le rapport entre le salaire monétaire et le prix de ce bien.

*La relation inverse entre marge de profit et taux de salaire réel*

Dans les conditions définies par les hypothèses précédentes, désignons par  $w^{(1)}$  la valeur du taux de salaire quand le premier bien est choisi comme numéraire. Multiplions alors les deux membres de l'équation de détermination des prix (Cf. supra, § 2.1) par la matrice-colonne :  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , il vient alors :

$$[p_1 \ p_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p_1 = 1 = w^{(1)} (1 + \lambda) \cdot L \cdot [I - (1 + \lambda)A]^{-1} \cdot e_1 \text{ soit encore}$$

$$\boxed{w^{(1)} (1 + \lambda) \cdot L \cdot [I - (1 + \lambda)A]^{-1} \cdot e_1 = 1}$$

En fonction du degré de familiarité que l'on a de ces calculs, on peut voir, immédiatement ou non, que l'expression précédente est l'équation d'une courbe dans le plan  $(\lambda, w^{(1)})$ , qui est précisément la *frontière des prix des facteurs*.

À ce point, le théorème 5 de PERRON-FROBENIUS nous permet de préciser les propriétés de cette frontière. Posons pour cela  $v = 1 + \lambda$ . D'après ce théorème, on peut dire que, quand la marge de profit varie, les coefficients de  $[I - (1 + \lambda)A]^{-1}$  sont positifs et sont également fonction croissante de  $\lambda$ . En conséquence, quand  $\lambda$  augmente,  $w^{(1)}$ , le salaire réel, ne peut que diminuer, puisque le produit de  $w^{(1)}$  par une quantité qui augmente reste constant et égal à 1. Ainsi, le taux de salaire réel diminue quand la marge de profit augmente : la frontière des prix des facteurs est une courbe décroissante.

*Une valeur maximale de la marge de profit ?*

Intéressons-nous maintenant à l'équation algébrique de cette frontière. Partons pour cela de l'équation de détermination des prix d'équilibre des biens (dans le cas à deux biens, avec  $a_{11} = 0$  et  $a_{22} = 0$ ) :

$$p_1 = (a_{21}p_2 + wl_1) (1 + \lambda) \quad p_2 = (a_{12}p_1 + wl_2) (1 + \lambda)$$

Divisant les deux équations par  $p_1$  et éliminant ensuite  $\frac{p_2}{p_1}$  entre les deux équations, on vérifiera que l'on parvient à l'équation suivante :

$$\boxed{\frac{w}{p_1} = \frac{1 - a_{12}a_{21}(1 + \lambda)^2}{l_2a_{21}(1 + \lambda) + l_1} \cdot \frac{1}{1 + \lambda}}$$

qui, sous une forme plus classique, est l'équation de la *frontière des prix des facteurs*, relative au cas que nous étudions. En utilisant cette formulation, on peut d'ailleurs véri-

fier que  $\frac{w}{p_1}$  est une fonction décroissante de  $1 + \lambda$ , donc de  $\lambda$  : un tel résultat s'obtient par simple dérivation, sans avoir recours au théorème 5.

L'équation précédente nous permet de calculer aisément les points de la frontière sur les axes. Pour  $\lambda = 0$ , la valeur maximale du taux de salaire réel est :

$$\frac{w}{p_1} = \frac{1 - a_{12}a_{21}}{l_2a_{21} + l_1}.$$

De la même manière, la valeur maximale de la marge de profit est obtenue pour :

$$\frac{w}{p_1} = 0,$$

soit :

$$\lambda_m = \frac{1}{\sqrt{a_{12}a_{21}}} - 1.$$

On a vu précédemment (cf. supra, § 1.5) que la valeur propre dominante  $s_m$  de la matrice technologique  $A$  s'écrit :

$$s_m = \sqrt{a_{12}a_{21}}.$$

On a donc la relation :

$$\lambda_m = \frac{1}{s_m} - 1.$$

Cette dernière relation est tout à fait étonnante et mérite commentaire. Reprenons pour cela notre démonstration au point où nous l'avons laissée à la fin du § 2.1.

Pour une valeur nulle de la marge de profit, tout le Revenu national est attribué aux salariés. Pour une valeur de la marge de profit égale à 20%, la part salariale représente 64 % de ce Revenu, la part revenant aux profits correspondant aux 36 % restants.

L'étude associée à ces deux valeurs de la marge de profit conduit à se poser la question de savoir s'il existe une valeur maximale de la marge de profit. L'algèbre linéaire et les théorèmes de PERRON-FROBENIUS nous montrent que c'est bien le cas. Qui plus est, cette valeur est directement liée aux caractéristiques mêmes de la technologie, sous la forme de la *valeur propre dominante de la matrice technologique*. Pour la valeur correspondante de la marge de profit, l'intégralité du Revenu national est distribuée sous forme de profits et la part salariale est nulle.

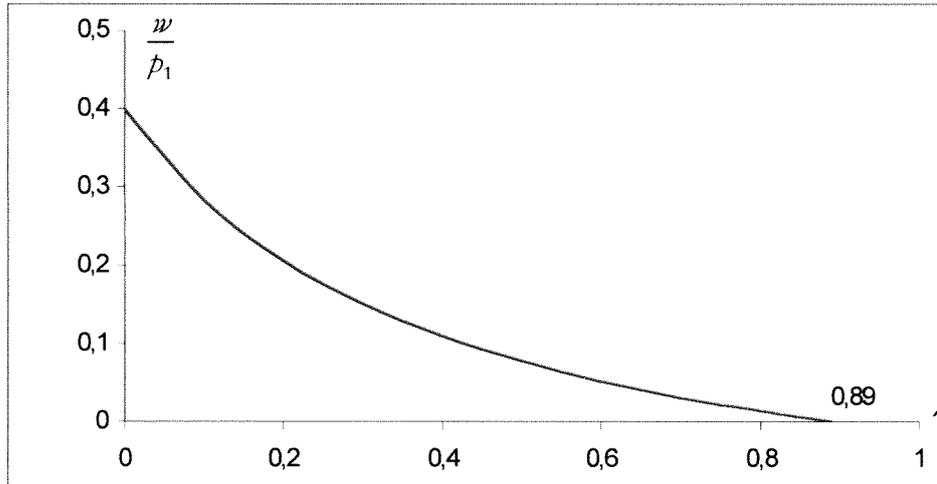
#### *Marge de profit et répartition du Revenu national*

Étudions pour terminer les conditions de la répartition du Revenu national en fonction des valeurs de la marge de profit. Avec les données numériques que nous utilisons, on vérifiera que l'équation de la frontière des prix des facteurs s'écrit :

$$\frac{w}{p_1} = \frac{1 - 0,28 \cdot (1 + \lambda)^2}{1 + 0,8 \cdot (1 + \lambda)} \times \frac{1}{1 + \lambda}.$$

En calculant les coordonnées des points sur les axes, on en déduit la valeur maximale de la marge de profit, soit 0,89 ainsi que la valeur maximale du taux de salaire réel, soit 0,4. On notera également (cf. Théorème 1) que le vecteur propre associé à la valeur maximale de la marge de profit est positif, résultat particulièrement heureux dans la mesure où les composantes de ce vecteur sont des prix.

La représentation graphique de la frontière des prix des facteurs est la suivante :



À chaque valeur de  $\lambda$ , donc à chaque état du rapport de forces entre salariés et capitalistes, est ainsi associé un certain partage du Revenu national. Aux données précédentes, ajoutons celles relatives à une marge égale à 50 %. On vérifiera que l'on obtient :  $p_1 = 8,92$  et  $p_2 = 12,36$ . De ces valeurs, on peut déduire le T.E.S. correspondant ainsi que le partage du Revenu national qui s'établit à 29 % pour la part salariale et 71 % pour la part revenant aux profits. Les résultats relatifs à la répartition du Revenu national peuvent ainsi être consignés dans le tableau suivant :

Marge de profit(en %)	Part salariale(en %)	Part des profits(en %)
0	100	0
20	64	36
50	29	71
89	0	100

Si l'on reprend les statistiques de la Comptabilité nationale, il apparaît que, depuis le début de l'actuelle crise économique, les parts du Revenu national ont connu des évolutions tout à fait considérables : ce sont les entreprises qui ont subi l'ajustement consécutif au premier choc pétrolier. Le balancier a fonctionné ensuite au profit des entreprises, du fait de l'augmentation du chômage et de la précarité. De 1967 à 1981, la part salariale est ainsi passée de 60 à 69 %, pour revenir à son niveau de 1967 en 1989. Depuis le début des années quatre-vingt-dix, elle reste à peu près constante, à un niveau proche de celui du milieu des années soixante.

## Conclusion

Tel est, à nos yeux, l'essentiel des relations que l'on peut faire apparaître entre Analyse Entrées-Sorties et algèbre linéaire. L'algèbre linéaire fournit en premier lieu une méthode pour la mise en équations des problèmes de cette analyse ainsi qu'une technique de calculs des résultats, en utilisant, pour l'essentiel, l'inversion matricielle. Et, en second lieu, beaucoup plus étonnant, du fait des théorèmes de PERRON-FROBENIUS, elle fournit la confirmation théorique des résultats numériques ainsi obtenus.

Bilan d'autant plus étonnant que le domaine d'étude de l'Analyse Entrées-Sorties porte sur le cœur de la science économique. À nos yeux, la démarche de cette disci-

plaine se caractérise en effet par l'étude de l'interdépendance, entre les agents économiques, entre les régions, entre les nations. Or, à partir du moment où nous pouvons considérer que l'hypothèse de linéarité n'est pas trop irréaliste, ce qui s'avère être ici le cas, quoi de plus « naturel » que d'utiliser le calcul matriciel. De ce fait, il devient possible de traiter à l'aide de ce calcul des questions tout à fait centrales pour l'analyse économique et ce, tant sur le plan théorique que sur le plan empirique.

Sur le plan théorique, il devient possible d'analyser les conséquences de l'interdépendance tant au niveau des grandeurs physiques qu'à celui des grandeurs monétaires. Le premier niveau revient à traiter de la rareté, du contenu en travail des biens, du taux d'échange entre les produits. Il permet également, on l'a vu, de clarifier une question aussi décisive, aussi « redoutable » par ses conséquences humaines, qu'a pu être la théorie de la valeur-travail. Le second niveau revient à traiter de la répartition du Revenu national et de pouvoir suivre son évolution en fonction de l'état du rapport de forces entre salariés et capitalistes. Pour traiter de ces questions, il est tout à fait loisible, comme nous l'avons fait ici, de partir de données numériques imaginaires sans qu'elles ne nous éloignent véritablement de préoccupations concrètes. Or ces deux questions, la rareté et la répartition du Revenu national constituent, à nos yeux, le cœur de la problématique de la science économique. Bon nombre de manuels d'économie commencent en définissant la science économique à partir de la rareté et présentent de ce fait un graphique, non linéaire, qui n'est ni plus ni moins que la frontière des possibilités de production exposée plus haut. Quant à la répartition du Revenu national, on y fait constamment référence à travers l'exemple du partage du « gâteau » que représente ce Revenu. L'Analyse Entrées-Sorties, on l'a vu, permet d'explicitier tant la construction du graphique que le partage du « gâteau ».

On rejoint le plan empirique à travers le Tableau des Entrées-Sorties. Avec le T.E.E. (Tableau Économique d'Ensemble) et le T.O.F. (Tableau des Opérations Financières), il constitue l'un des trois tableaux de synthèse de la Comptabilité nationale. Ces trois tableaux donnent chacun une photographie de l'activité d'ensemble de l'économie d'un pays donné, vue sous différents angles, l'angle du T.E.S. étant celui des branches.

Dans notre présentation de l'Analyse Entrées-Sorties, nous sommes partis des données en termes physiques et en avons déduit les données en termes monétaires : dans cette mesure, l'Analyse Entrées-Sorties constitue en même temps la théorie du Tableau des Entrées-Sorties.

Quant aux utilisations empiriques de l'Analyse Entrées-Sorties, nous mentionnerons seulement celle qu'en fit ... son créateur LÉONTIEF. Quand le gouvernement des U.S.A. sentit que la Seconde Guerre mondiale commençait à toucher à sa fin, en vue d'éviter les erreurs consécutives à la fin de la précédente guerre, il voulut avoir des prévisions sur l'évolution économique de l'après-guerre. Il commanda une étude à LÉONTIEF qui, avec des moyens de calcul rudimentaires par rapport à ceux dont nous disposons aujourd'hui, conclut de façon optimiste. L'effort de guerre avait laissé de côté, aux États-Unis même, tout un ensemble de besoins « civils » à satisfaire : la reconversion de l'économie américaine vers une économie de paix n'allait pas entraîner de difficultés insurmontables, en tout cas pas de crise majeure. Com-

binant données statistiques et algèbre linéaire, tel fut le diagnostic apporté par LEONTIEF pour étayer sa conclusion.

## Appendice : Les théorèmes de PERRON-FROBENIUS

Ces théorèmes, relatifs aux propriétés des valeurs propres, des vecteurs propres et des inverses de matrices non-négatives, ont été proposés entre les années 1907 et 1912. On en trouvera un exposé dans ARROUS (1987), pp.74-84, ainsi que dans l'Appendice mathématique de PASINETTI (1977), pp.226-77.

Les théorèmes qui suivent portent sur les matrices irréductibles.

**Théorème 1 :** La valeur propre dominante  $s_m$  de  $A$ , matrice carrée non-négative, est positive. Le vecteur propre associé à  $s_m$  a toutes ses composantes positives.

**Théorème 2 :** À toute valeur propre  $\alpha$  différente de  $s_m$ , il correspond un vecteur propre qui a au moins une composante négative.

**Théorème 3 :** La valeur propre dominante  $s_m$  de  $A$  est une fonction continue croissante des éléments de  $A$ .

**Théorème 4 :** La valeur propre dominante  $s_m$  de  $A$  est comprise entre le maximum et le minimum des sommes en ligne des éléments de  $A$ . La même propriété vaut également pour les colonnes.

**Théorème 5 :** Étant donné un réel  $\mu > 0$ , si  $\mu > s_m$ , alors :  $[\mu I - A]^{-1} > 0$ . De même, pour  $\nu = \frac{1}{\mu}$  (avec  $\nu < \frac{1}{s_m}$ ),  $[I - \nu A]^{-1} > 0$ . Les éléments de ces deux dernières matrices sont donc positifs. Ils sont de plus des fonctions continues et croissantes de  $\nu$ , continues et décroissantes de  $\mu$ .

Ajoutons à cette liste de théorèmes celui portant sur le développement en série entière d'une matrice carrée  $A$  à coefficients quelconques :

**Théorème 6 :** Étant donné un nombre positif  $\nu$  et une matrice carrée  $A$ , la série matricielle  $\nu A$  est convergente si  $\nu < \frac{1}{|s_m|}$ , où  $s_m$  est la valeur propre de  $A$  de plus grand module.

Ce théorème étant acquis, il est ensuite possible de démontrer que, si  $\nu$  demeure inférieur à la valeur citée plus haut, la série matricielle  $\nu A$  converge vers l'inverse de la matrice  $[I - \nu A]$ . On a donc la propriété suivante :

Si  $\nu < \frac{1}{|s_m|}$ , on peut écrire :  $[I - \nu A]^{-1} = I + \nu A + (\nu A)^2 + (\nu A)^3 + \dots$

La même propriété, appliquée à  $\mu = \frac{1}{\nu}$ , devient :

Si  $\mu > |s_m|$ , on peut écrire  $[\mu I - A]^{-1} = \frac{1}{\mu} \cdot \left[ I + \frac{1}{\mu} \cdot A + \left(\frac{1}{\mu} \cdot A\right)^2 + \dots \right]$ .

## Bibliographie :

- ARROUS J. (1987), *Analyse Multisectorielle et Croissance*, Economica, Paris  
 DORFMAN R. - SAMUELSON P.A. - SOLOW R.M. (1958), *Linear Programming and Economic Analysis*, Mac Graw Hill  
 FROBENIUS G., Über Matrizen aus positiven Elemente et Über Matrizen aus nicht negativen Elemente, *Sitzungsberichte der königlichen preussischen Akademie der Wissenschaften*, (1908), pp.471-6 ; (1909), pp.514-8 ; (1912), pp.456-77  
 GEORGESCU-ROEGEN N. (1950), Leontief's System in the Light of Recent Results, *Review of Economics and Statistics*, pp.214-22

GEORGESCU-ROEGEN N. (1951), Some Properties of a Generalized Leontief Model, in T.C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley and Sons, New-York, pp.165-73

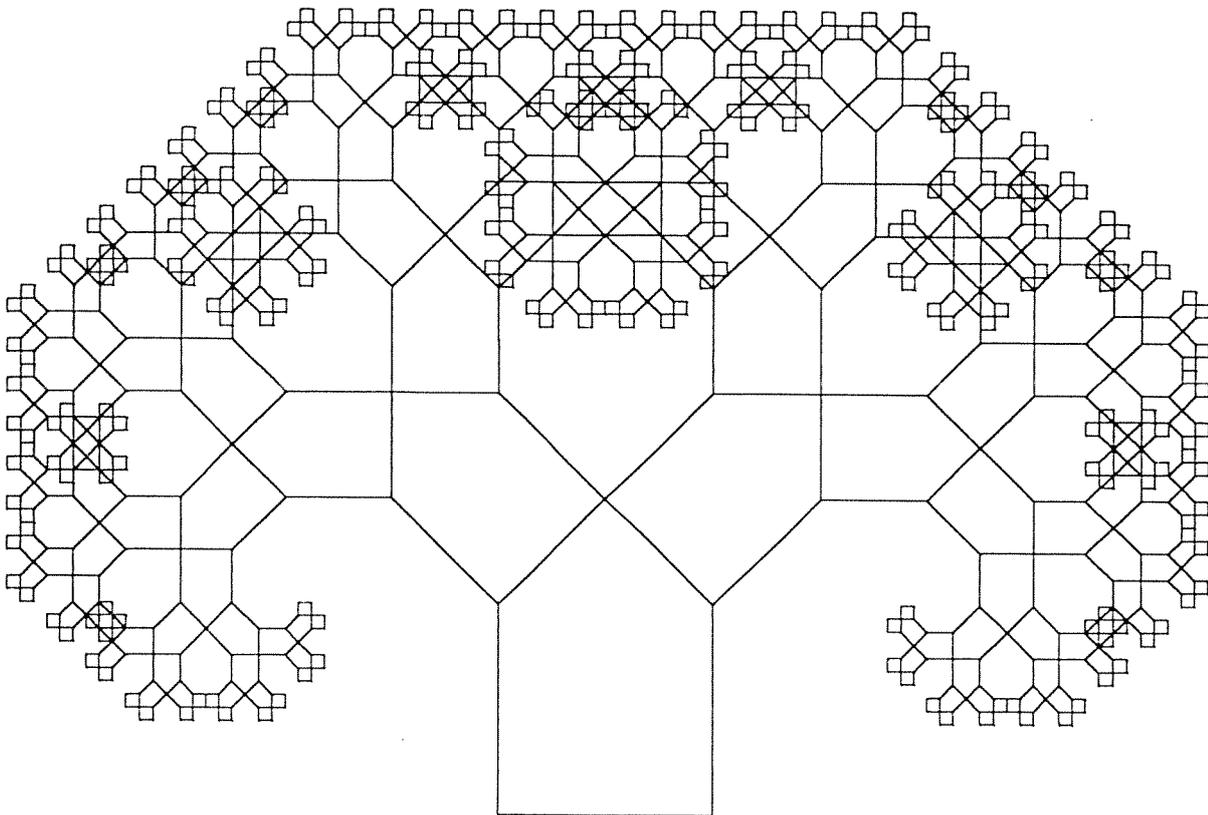
GEORGESCU-ROEGEN N. (1958), The Nature of Expectation and Uncertainty, in Georgescu-Roegen N., *Analytical Economics*, Harvard University Press, 1967, pp.241-75

HAWKINS D. - Simon H.A. (1949), Note : Some Conditions of Macroeconomic Stability, *Econometrica*, juillet-octobre, pp.245-8

PASINETTI L. L. (1977), *Lectures on the Theory of Production*, Macmillan Press Ltd,

PERRON O., Über Matrizen, *Mathematische Annalen*, vol. LXIV, (1907), pp.248-63

SAMUELSON P.A. (1951), Abstract of a Theorem Concerning Substituability in Open Leontief Models, in T.C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley and Sons, New-York, pp.142-46



Ceci est une production du **Lycée Scheurer-Kestner de Thann**  
dans son travail sur le théorème de Pythagore.  
Il s'agit de la version non colorée d'une image qui se trouve dans la plaquette  
de présentation de l'exposition "math.u-vu?".

# LES LOIS DE LA CRISTALLOGRAPHIE EN DÉCORATION PLANE PÉRIODIQUE (1<sup>RE</sup> PARTIE)

Roland COUSANDIER<sup>1</sup> et Pierre BUCHERT<sup>2</sup>

## PANORAMA LIMINAIRE

L'honnête homme et même le spécialiste doit, en quelque sorte, se forcer pour embrasser l'immense champ d'action de la science appelée cristallographie dans notre environnement microscopique ou macroscopique, « naturel » ou produit par le génie humain.

La matière, quasi immuable, du moins en ce qui concerne notre propos, passe son temps à s'organiser sous la forme de cristaux. En géologie dans les chambres magmatiques, en surface dans les sédiments, ou encore dans les roches métamorphiques. Dans l'industrie lourde, en métallurgie, en chimie, mais aussi dans l'alimentation on passe par des phases de cristallisation comme dans le cas du sucre : propriété exploitée à but décoratif pour le sucre candi. Évoquons encore le sel des salins récupéré à partir de l'eau de mer par cristallisation fractionnée et purification, la glace comestible ou celle déposée sur les pistes de ski par les canons à neige. On aurait cependant garde d'oublier les pavés monocristallins de silicium qui sont à la base de l'électronique, le photovoltaïque et qui forment le substrat solide de l'informatique dont le développement prodigieux nous entraîne vers le 3<sup>e</sup> millénaire.

Tous ces matériaux, dans ce déballage « à la Prévert », ont en commun une structure organisée, un arrangement qui se répète périodiquement selon les 3 dimensions de notre espace. Le but de la cristallographie consiste à énoncer le canevas théorique de tous les arrangements possibles de n'importe quelle sorte d'objets. On a généré exhaustivement tous les schémas structuraux et c'est leur petit nombre qui rend cette activité de classification et d'analyse intéressante et utile, l'essentiel de ces travaux s'est poursuivi tout au long du XIX<sup>e</sup> siècle.

L'objectif des savants de l'époque, à commencer par l'abbé René Just HAÛY en France à la veille de la révolution, pour finir avec SCHÖNFLIESS et FÉDOROV un siècle plus tard, a été d'imaginer la structure interne des cristaux en partant des observations macroscopiques alors seules accessibles à l'expérience. Les hypothèses émises et leur développement mathématique ont alors trouvé une éclatante vérification par la diffraction des rayons X obtenue par les BRAGG, père et fils, en Angleterre en 1912 sur une proposition de Max von LAUE. Depuis les premiers clichés obtenus à partir des halogénures alcalins, structures très simples, toute une nouvelle discipline de chimie structurale s'est mise en place sans cesser de décrire de nouvelles structures atomiques ou moléculaires, d'abord dans le monde inorganique ensuite en chimie organique et en biologie.

La cristallographie à deux dimensions n'avait pas, pendant longtemps, de terrain d'étude qui lui soit propre, car le plan, par rapport au volume est difficile à appréhender. C'est une rupture à travers un cristal, une interface cristal-air, une frontière entre deux milieux. Dans une structure atomique il n'y a pas vraiment de

---

<sup>1</sup> Roland COUSANDIER : maître de conférences à l'École et Observatoire des Sciences de la terre, rattaché au groupe surfaces-interfaces de l'Institut de Physique et Chimie des Matériaux de Strasbourg.

<sup>2</sup> Pierre BUCHERT : diplômé de l'École Municipale des Arts décoratifs de Strasbourg, titulaire du Diplôme National Supérieur d'expression plastique.

phase strictement bidimensionnelle et, comme on sait le faire maintenant, un dépôt d'une seule couche d'atomes, une monocouche, n'existe pas sans le substrat sur lequel elle est déposée. Il fallait d'abord trouver des méthodes analytiques qui soient sensibles à la surface sans noyer son signal dans la réponse du volume sous-jacent. Autrement dit, il fallait trouver un outil en forte interaction avec la matière afin de ne pas descendre trop profondément dans le substrat. Cet outil a d'abord été le faisceau d'électrons utilisé à partir des années soixante dans la diffraction des électrons lents, de faible énergie sous incidence normale, ou d'électrons rapides sous incidence rasante et enfin l'analyse en énergie des électrons des transitions Auger. Énorme difficulté supplémentaire, pour contrôler la chimie de la surface et sa contamination, il a fallu mettre au point un appareillage fonctionnant sous ultra-vide, une pression atmosphérique très réduite comme celle de la banlieue terrestre. Cependant, grâce à l'observation macroscopique, on a déjà pu établir des effets géométriques de la périodicité de surface dans ce qu'on appelle l'épitaxie : croissance orientée d'une phase cristallisée sur la surface d'un substrat monocristallin de nature chimique toute différente et dont les premières lois ont été établies par ROYER en 1928.

On retrouve, une fois de plus en science des matériaux, le cheminement temporel qui va de l'observation en minéralogie, passe par les concepts abstraits de la cristallographie pour aboutir à la physique du solide dont l'une des branches est la physico-chimie de la surface. Ainsi, le « creuset Terre » aura été notre premier maître en nous livrant des objets d'étude pour percer les secrets de la nature. Ces compétences une fois acquises, le chercheur va aller plus loin pour créer de nouvelles phases, nouveaux mariages structuraux, multicouches aux textures variées dans le but, par exemple, de réaliser un autre moyen de stockage ultra-microscopique de données etc. Ce type de travail débute par l'étude fine de l'épitaxie et l'observation de surstructures induites sur un substrat ordonné par un adsorbat à une échelle atomique quasi bidimensionnelle.

Mais quittons ces domaines nanométriques pour considérer maintenant des milieux, généralement à deux dimensions stricts, que nous pouvons facilement observer avec notre œil sans recourir à de coûteuses machines : papiers peints, carrelages, pavages, tissus, cannages, grilles... Très souvent, le papier peint habille nos murs et, s'il est avec raccords, il dessine un arrangement qui se répète périodiquement dans un espace à 2 dimensions. Ce décors de nos murs n'échappera pas à la cristallographie, on pourra y distinguer un réseau, une maille, un groupe de symétrie spatial en mettant en évidence les propriétés de symétrie et d'anisotropie. Anisotropie ? prenons un drap que l'on déchire, il n'y a que deux directions de rupture facile, conséquence directe du tissage « toile » bien évidemment périodique !

En décoration plane périodique il faudra se résoudre à l'évidence : quoi qu'il fasse et quelque soient les matériaux (nature et taille) utilisés, le technicien ou l'artiste le plus inspiré aura seulement le choix entre 5 types de mailles et 17 groupes spatiaux. Cela n'empêche nullement une infinie variété de productions, toutes les possibilités structurales ne sont même pas exploitées...et les atomes non plus ne réalisent tous les schémas mais certainement pour d'autres raisons !

## I MILIEUX PÉRIODIQUES À DEUX DIMENSIONS

On appelle *milieu cristallin* une répartition doublement périodique dans le plan d'un certain nombre d'objets jusqu'à l'infini.

On appelle *cristal* une portion finie de ce milieu cristallin.

Considérons le milieu cristallin, nous pouvons trouver deux vecteurs translation  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ , en principe les plus courts possibles, qui, appliqués en un point matériel quelconque du milieu ont leur extrémité en un point identique. Ce point d'arrivée est dit homologue du point de départ : il est de même nature physique et chimique, orientation, et il possède un environnement identique.

Quelque soit l'origine O des vecteurs placée dans ce milieu cristallin, on génère tous les points homologues à l'extrémité du vecteur  $\vec{ON}$  tel que :  $\vec{ON} = q_1\vec{a}_1 + q_2\vec{a}_2$ ,  $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$  cette propriété doit être vérifiée pour tous les points du milieu.

On appelle *maille*, le parallélogramme construit sur les deux vecteurs de base  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ .

Si  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  sont convenablement choisis, alors la maille renferme le matériel minimum nécessaire pour décrire le milieu cristallin, c'est le motif cristallin, on dit alors que la maille est *simple*. Cette maille simple n'est pas unique : il y en a une infinité qui toutes ont la même surface.

Le milieu cristallin peut donc être engendré par la juxtaposition jointive de mailles toutes identiques selon les lois de translation définies par les arêtes de la maille. Une maille renferme donc toutes les données du milieu cristallin.

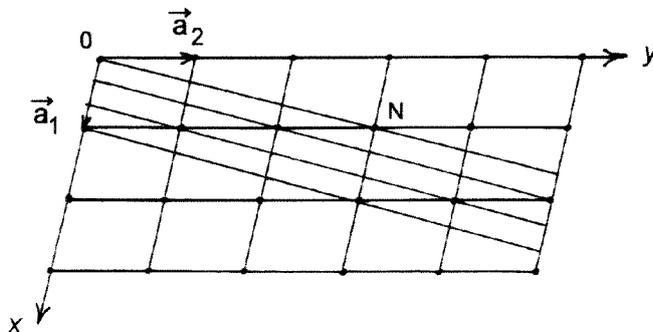
Une maille qui n'est pas simple est dite *multiple*, sa surface est un multiple entier de la surface minimale indispensable.

Nous avons condensé l'information du milieu cristallin à la donnée d'une seule maille avec son contenu, mais cela est encore trop complexe, on se contentera d'étudier le seul groupe de translation tel qu'il est défini par les arêtes de la maille. Cette abstraction, qui est celle des réseaux, de prime abord assez sommaire, se révèle au contraire d'une intéressante fécondité.

### 1. Les cinq réseaux plans

#### 1 Nœuds, rangées

Nous ne retenons que les deux translations  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  qui caractérisent la périodicité du milieu cristallin que nous appliquons à un point géométrique O appelé nœud génère ainsi un espace ponctué, un réseau bidimensionnel :



Considérons le nœud N tel que  $\vec{ON} = q_1\vec{a}_1 + q_2\vec{a}_2$ ,  $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$  et la droite (ON) que l'on appelle une rangée. Si N est le premier nœud sur la rangée après O, alors la périodicité le long de cette rangée est donnée par le paramètre

$p = ON$ ,  $q_1$  et  $q_2$ , coordonnées numériques de N dans le repère  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  sont alors premiers entre eux. On note  $q_1, q_2$  les coordonnées numériques du nœud sans autre signe.

On voit que dans ce réseau, milieu à stratification multiple, toutes les rangées parallèles à (ON) ont même paramètre, leur faisceau renferme tous les nœuds du réseau. Comme l'origine du réseau peut être prise n'importe où, la position dans l'espace d'une rangée parallèle à (ON) importe peu, on convient de désigner l'orientation de toute la famille de rangées parallèles par les coordonnées numériques du premier nœud que la rangée de la famille qui passe par l'origine rencontre après l'origine, soit  $q_1 q_2$  mais cette fois-ci écrit entre crochets  $[q_1 q_2]$  sans mettre de virgule ! Le plus souvent  $q_1$  et  $q_2$  sont inférieurs à 10 ce qui évite toute ambiguïté.

## 2 Les opérateurs de symétrie des réseaux

### 1 Centre de symétrie

On remarque d'abord qu'un réseau est toujours centrosymétrique par rapport à l'un quelconque de ses nœuds. Prenons l'origine du repère en un nœud quelconque O, le nœud N de coordonnées numériques  $q_1 q_2$  aura toujours un nœud symétrique N' de coordonnées  $\bar{q}_1 \bar{q}_2$  le signe moins s'écrit au dessus en cristallographie.

Tous les nœuds du réseau, le milieu des arêtes et le centre de la maille sont centre de symétrie pour tout le réseau.

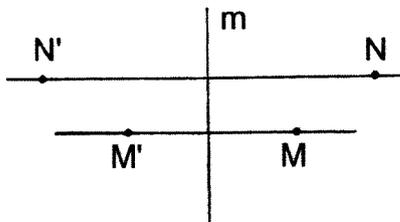
### 2 Plan de symétrie ou miroir

– Si le réseau possède un plan de symétrie, alors celui-ci est nécessairement perpendiculaire au plan du réseau  
sinon il ferait sortir le réseau hors de son plan.

– La trace d'intersection du miroir est nécessairement perpendiculaire à une rangée du réseau, en effet, un nœud N hors du miroir (noté m) et son symétrique N' par m définissent une rangée NN' qui est perpendiculaire.

La trace d'intersection est parallèle à une rangée, soit dans la rangée, soit à mi-distance de deux rangées voisines :

- Soit N hors du miroir et le plus proche possible et M sur la rangée voisine parallèle à NN' et aussi proche que possible du miroir. MM' est une rangée de même nature, le rapport des distances  $\frac{MM'}{NN'}$  est un entier.

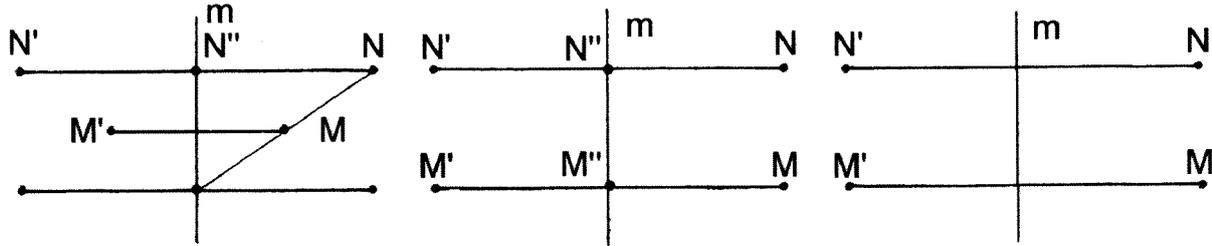


Si  $\frac{MM'}{NN'} < 1$  alors le rapport est nécessairement égal à  $\frac{1}{2}$  et il y a un nœud N'' dans le miroir sur la rangée NN'. Le symétrique de N par M est aussi dans le miroir et, avec N'', il définit la rangée confondue avec la trace.

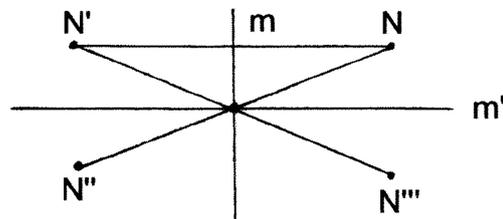
Si  $\frac{MM'}{NN'} = 1$  il y a soit à chaque fois un nœud dans le miroir, respectivement  $N''$  et  $M''$  qui définissent la rangée dans le miroir, soit il n'y a pas de nœuds et le plan de symétrie passe à mi-distance des rangées parallèles  $NM$  et  $N'M'$ .

Si  $\frac{MM'}{NN'} > 1$ , on inverse les rôles de  $N$  et  $M$  et on est ramené au premier cas.

En résumé, on a les situations suivantes :



- L'inventaire des situations précédentes montre que si un réseau est muni d'un miroir, alors il a aussi une famille de miroirs perpendiculaires, cela peut s'établir directement :



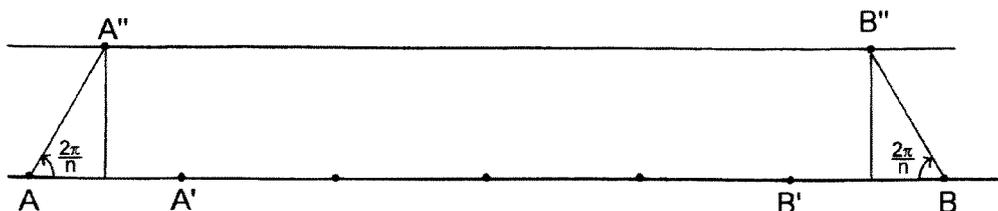
Soit  $m$  un miroir passant par un nœud du réseau et un nœud  $N$  en dehors de ce miroir. Par symétrie par rapport au miroir et par rapport au nœud situé dans le miroir, on obtient les symétriques de  $N$ ,  $N'$ ,  $N''$  et  $N'''$  qui font apparaître l'existence d'un nouveau miroir  $m'$  orthogonal à  $m$ .

### 3 La limitation du nombre des axes de symétrie par les réseaux

Un axe de symétrie d'ordre  $n$  opère une mise en coïncidence d'un objet avec lui-même par des rotations d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  autour de cet axe. Dans le cas d'un plan, cet axe est nécessairement perpendiculaire au plan de l'objet.

Si une figure finie peut être construite avec un axe ou des axes de symétrie d'ordre  $n$  quelconque, il n'en est plus de même pour un réseau qui doit venir en recouvrement avec lui-même.

Considérons une rangée et plaçons un nœud à l'endroit où le réseau est muni d'un axe de symétrie d'ordre  $n$ . Par définition, tous les nœuds seront sur l'intersection d'un axe d'ordre  $n$  avec le plan du réseau. Soit le nœud de départ  $A$  et le  $p$ -ième nœud sur la rangée en  $B$ . Faisons opérer l'axe de symétrie passant par  $A$  sur le nœud voisin  $A'$  à droite et opérons une rotation d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  dans le sens trigonométrique direct, le nœud  $A'$  viendra en  $A''$ . Opérons de même avec l'axe de symétrie passant par  $B$  sur le nœud voisin  $B'$  qui, par une rotation en sens inverse viendra en  $B''$  :



La rangée A''B'', parallèle à AB est de même nature, elle a même paramètre d'où

$$A''B'' = pAA' \pm 2AA' \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = qAA', p, q \in \mathbb{N}$$

il vient  $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \pm \frac{p-q}{2} = \pm \frac{r}{2} \leq 1$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$  les valeurs possibles de  $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$  sont donc  $1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}$  et  $-1$ , soit  $n = 1, 6, 4, 3$  et  $2$  d'où le théorème suivant :

*Les seuls opérateurs de symétrie de rotation compatibles avec un réseau sont d'ordre 1, 2, 3, 4 et 6 ;  $n = 1$  étant l'identité.*

Il nous paraît intéressant de citer une autre démonstration : soit un repère orthonormé avec  $x$  et  $y$  dans le plan,  $z$  perpendiculaire au plan portant l'axe de symétrie de rotation d'angle  $\theta$ , dans ce repère la matrice rotation s'écrira :

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

considérons maintenant le repère lié au réseau  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  tel que tout vecteur du réseau ait des coordonnées entières  $\vec{ON} = p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2, p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$  dans ce nouveau repère,  $U$  étant la matrice de changement de base, la matrice rotation s'écrira :

$$\mathbf{R}'(\theta) = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{U}$$

l'image par  $\mathbf{R}'(\theta)$  d'un vecteur du réseau est un vecteur du réseau de coordonnées entières,  $\mathbf{R}(\theta)$  et  $\mathbf{R}'(\theta)$  sont les images d'une même application dans deux repères différents, elles ont même trace qui vaut  $1 + 2 \cos\theta$  et qui est d'autre part entière,  $\cos\theta$  ne peut prendre que les valeurs  $0, \pm\frac{1}{2}$  et  $\pm 1$ .

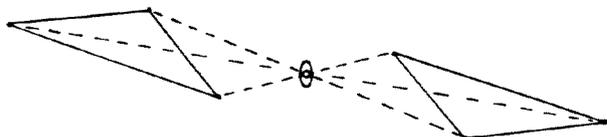
#### 4 Représentation graphique des opérateurs de symétrie

Dans les tables internationales de cristallographie on convient de représenter le centre de symétrie par un petit rond  $\circ$ , un miroir par un trait fort représentant la trace d'intersection du miroir avec le plan du réseau et les axes sont représentés par une figure de même symétrie à l'endroit où l'axe perce le plan du réseau :



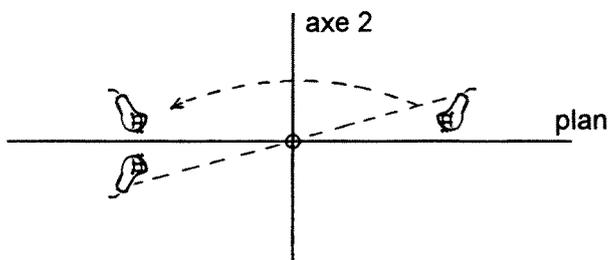
#### 5 Axe de symétrie binaire, centre de symétrie

Dans un réseau bidimensionnel strict, on peut remplacer le centre de symétrie par un axe de symétrie binaire qui perce orthogonalement le plan du réseau au même point :



ceci serait faux dans le cas où le plan à 2 dimensions ( en abrégé 2D) serait

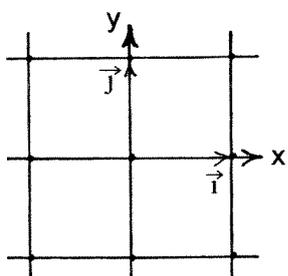
placé dans un espace à 3 dimensions (3D), le plan ayant une certaine épaisseur, une vue en coupe montre que les opérateurs n'ont plus un effet identique car l'espace 2D a deux côtés distincts :



### 6 Opérations de symétrie directe, opérations de symétrie inverse

Dans un repère cristallographique lié au réseau, la matrice d'un opérateur de symétrie est à coefficients entiers. Le module des vecteurs est conservé, donc le déterminant de la matrice vaut  $\pm 1$ . La valeur  $+1$  correspond aux axes de symétrie qui réalisent une opération de symétrie directe qui conserve l'orientation du repère, tout objet et son image sont directement superposables. La valeur  $-1$  correspond au centre de symétrie ou au miroir, un objet quelconque n'est plus superposable à son image (par exemple main gauche, main droite), un tel objet est dit énantiomorphe. Une opération de symétrie inverse ne conserve pas l'orientation du repère (changement de signe du produit vectoriel).

Exemples :



L'action d'un opérateur est entièrement déterminée par son action sur la base. On convient d'écrire sous forme de vecteur colonne les coordonnées du vecteur transformé par l'opérateur dans la matrice  $2 \times 2$  :

$$\text{miroir perpendiculaire à } y \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix},$$

$$\text{axe 2 selon } Oz \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix},$$

$$\text{axe 4 selon } Oz \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 7 Les quatre groupes de symétrie ponctuels des réseaux 2D : les 4 systèmes

D'après I.1.2. 1 et 5, tout réseau 2D possède des axes de symétrie binaires aux nœuds du réseau, au milieu des arêtes et au milieu de la maille. C'est le cas le plus général décrit par un repère cristallographique quelconque et qui définit le *système oblique* noté 2 en notation internationale.

Les groupes de symétrie sont commutatifs, ici le seul opérateur 2 génère un groupe cyclique avec les puissances successives de l'opération symétrie binaire.

Si maintenant on a toujours deux modules différents pour les vecteurs du repère cristallographique, mais s'ils sont maintenant orthogonaux entre eux, il s'introduit, en plus de l'axe 2 un miroir. Combinons ces deux opérateurs :

$$MD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

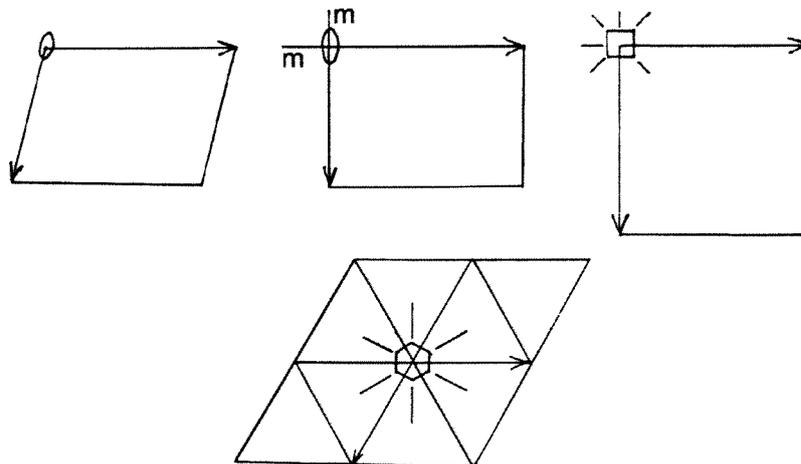
il en résulte un opérateur qui change  $x$  en moins  $x$  et laisse  $y$  invariant, c'est un miroir orthogonal au premier. Ce résultat a déjà été décrit en **I.1.2. 2**, c'est le *système rectangle* noté  $mm$ .

Continuons l'étude des cas particuliers avec un repère cristallographique formé de deux vecteurs de même module formant un angle de  $90^\circ$ . Le réseau admet alors un axe de symétrie quaternaire passant par 4 miroirs qui font entre eux un angle de  $45^\circ$ , c'est le *système carré*, noté  $4mm$ .

Toujours avec deux vecteurs de même module, mais cette fois un angle de  $120^\circ$  ou  $60^\circ$  on engendre le *système hexagonal* avec un axe sénaire et 6 miroirs parallèles qui font entre eux un angle de  $30^\circ$ . On remarquera que l'axe de symétrie ternaire ne peut pas exister seul dans un réseau car ayant toujours un axe binaire il ne peut être que d'ordre  $2 \times 3 = 6$ . On note  $6mm$ .

\*On démontrerait aisément le théorème suivant : si un axe d'ordre  $n$  possède un miroir parallèle à l'axe, alors il y a  $n$  miroirs parallèles qui font entre eux un angle de  $\frac{\pi}{n}$ .

En résumé, nous avons présenté les 4 systèmes cristallographiques 2D qui correspondent à la symétrie macroscopique observable dans les réseaux à 2 dimensions. Quatre groupes de symétrie ponctuels qui caractérisent la symétrie d'un site du réseau et, en quelque sorte, celle du carrelage correspondant, carreaux en parallélogrammes plus ou moins particuliers qui remplissent l'espace d'une façon jointive selon les translations définies par les arêtes de la maille correspondante.



Nous avons présenté tous les groupes de symétrie compatibles avec les réseaux 2D, mais avons-nous décrit tous les réseaux possibles ? certes non car il faudra revenir au système rectangle déjà évoqué en **I.1.2. 2**.

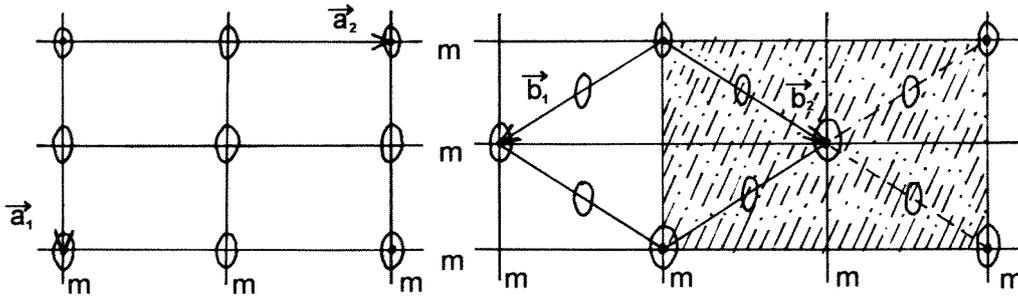
### 8 Les mailles de Bravais

Le système rectangle a une symétrie de site formée par un axe de symétrie binaire et deux miroirs parallèles à l'axe. En **I.1.2. 2** on constate l'existence de deux mailles compatibles avec cette symétrie :

d'une part le rectangle simple  $|\vec{a}_1| \neq |\vec{a}_2| \gamma = \frac{\pi}{2}$  noté *p*

d'autre part le losange quelconque  $|\vec{b}_1| = |\vec{b}_2| \gamma \neq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$  noté *c*.

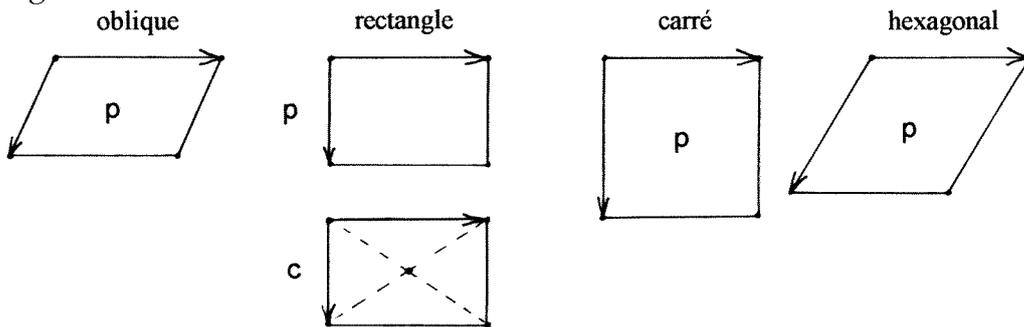
Ces deux mailles génèrent des réseaux différents comme on peut le voir sur les figures suivantes tout en ayant en commun des sites de même symétrie macroscopique :



on convient alors de représenter ces réseaux, différents au niveau microscopique, par une même maille de format rectangulaire. Cela revient à découper dans le réseau losange une portion plus grande que la maille simple, un rectangle de surface double défini les arêtes de translation  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  mais qui possède, en outre, une translation fractionnaire à l'intérieur de la maille notée en coordonnées numériques  $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ .

Malheureusement, cette maille de Bravais, dite de mode *c*, n'est plus une vraie maille à cause de cette translation supplémentaire du réseau à l'intérieur. Elle a cependant l'avantage de symboliser sans ambiguïté le type de réseau qu'elle désigne et sa symétrie macroscopique.

En résumé, il y a 5 types de réseaux 2D qui se rangent dans les 4 groupes de symétrie appelés systèmes. Le système rectangle a 2 réseaux, la maille simple notée *p*, et le rectangle centré noté *c*.



## 2. La symétrie macroscopique des milieux cristallins

Avec le concept abstrait de réseau nous avons déterminé les cinq types de réseaux possibles à 2 dimensions munis des quatre groupes de symétrie ponctuelle, les 4 systèmes cristallins à 2 dimensions.

Ces propriétés issues d'un milieu purement géométrique représentent la symétrie maximum possible pour un milieu cristallin. Un milieu matériel, qui seul existe réellement, peut être moins symétrique que son réseau. L'agencement des particules

matérielles se fait selon leurs propriétés intrinsèques et les liaisons que les unes déterminent avec les autres. En quelque sorte la démarche de la nature s'opère en sens inverse de la nôtre qui s'impose pour des raisons de simplicité et de clarté.

Les particules naturelles s'ordonnent donc suivant des conditions physico-chimiques déterminées par les paramètres de température et de pression afin de minorer l'énergie du système. On sait que pour fabriquer de la glace à partir de l'eau liquide, phase certes déjà condensée mais avec un ordre à courte distance seulement où la molécule a encore beaucoup de degrés de liberté en translation, rotation, vibration, il faut extraire beaucoup de chaleur du système pour la prise en glace. Seuls alors des modes de vibration sont encore possibles dans le solide ordonné.

Le réseau est donc la conséquence des propriétés microscopiques de la matière et non la cause.

### 1 Holoédrie

Le milieu cristallin peut conserver la symétrie maximum possible qui est celle de son réseau, on dit que le cristal est holoédre. La distribution de la matière à l'échelle microscopique vérifie la symétrie des sites esquissée précédemment. À deux dimensions on a donc 4 holoédries pour chacun des 4 systèmes :

2                      2mm                      4mm                      6mm

### 2 Mériédries

Le milieu cristallin peut être moins symétrique que son réseau mais le système cristallin est nécessairement relié à la symétrie locale. Cette symétrie locale peut cependant être plus faible que celle du réseau qu'elle sous tend. Schématiquement, des 4 systèmes on extrait les sous-groupes de symétrie suivants :

système	oblique	rectangle	hexagonal	carré
holoédrie	2	2mm	4mm	6mm
mériédries	1	m	4	6 3m 3

Dans le système oblique, on ne peut que supprimer l'axe binaire.

Dans le système rectangle, conserver l'axe binaire serait retomber sur l'holoédrie du système oblique. Il faut supprimer deux opérateurs sur les trois pour ne pas engendrer de nouveau tout le groupe de départ, on ne peut que garder un miroir.

Pour 4mm et 6mm, si on veut conserver l'axe de symétrie, alors il faut supprimer tous les miroirs( cf. le théorème évoqué en I.1.2. 7 ) mais dans le cas du système hexagonal, on a encore la possibilité de conserver un axe ternaire avec trois miroirs parallèles. On observera que pour tous les cas cités le nombre d'opérations de symétrie du sous-groupe ainsi extrait est la moitié de celui de l'holoédrie, on dit que l'ordre du sous-groupe est  $\frac{1}{2}$  et on appelle ces mériédries *hémiedries*. Enfin, on peut encore extraire de 3m le sous-groupe 3 dont l'ordre est le quart par rapport à l'holoédrie, il s'agit alors d'un *tétartoédrie*.

En résumé, on peut observer en symétrie macroscopique des milieux cristallins 2D 4 holoédries, 6 mériédries soit 10 groupes de symétrie en tout.

Remarque, si l'on veut faire une excursion dans les structures 3D largement étudiées où l'on rencontre des dizaines de milliers d'exemples les mériédries existent bien entendu mais l'holoédrie est largement dominante. L'importance scientifique des mériédries est considérable, il suffira de citer les travaux de Pasteur à Strasbourg sur la symétrie des cristaux et la stéréochimie et plus banalement les cristaux de quartz qui

oscillent dans nos montres ou qui rythment nos ordinateurs ne sont piézo-électriques que parce qu'ils n'ont pas de centre de symétrie ( condition nécessaire mais pas suffisante !).

### 3. Les groupes spatiaux

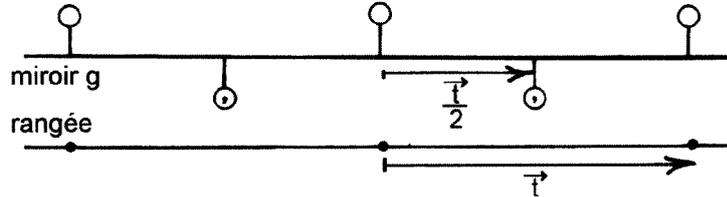
Il s'agit de la théorie la plus achevée de la matière cristallisée qui est la combinaison des groupes de translation avec les groupes de symétrie ponctuels. C'est l'interaction entre la description de la symétrie du motif cristallin à l'intérieur de la maille et le réseau. La nouveauté de la démarche réside dans le fait que les opérateurs de symétrie ne sont plus concourants en un même point.

#### 1 Les 17 groupes spatiaux 2D

##### 1 Miroirs avec glissement

À deux dimensions il s'agit d'introduire un nouvel opérateur de symétrie et un seul : le miroir avec glissement. On a vu que les miroirs sont perpendiculaires au réseau et parallèles à une rangée cristallographique (I.1.2. 2) ils passent selon les arêtes de la maille et au milieu de la maille (I.1.2. 8).

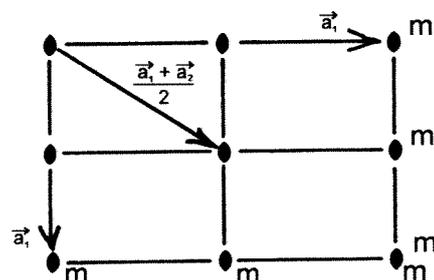
Le miroir avec glissement réalise, en plus de l'opération de symétrie miroir, une translation de l'image parallèlement au miroir d'une longueur égale au demi-paramètre de la rangée parallèle. Au bout de deux opérations, l'objet revient du même côté translaté du paramètre entier en accord avec la périodicité du milieu dans cette direction :



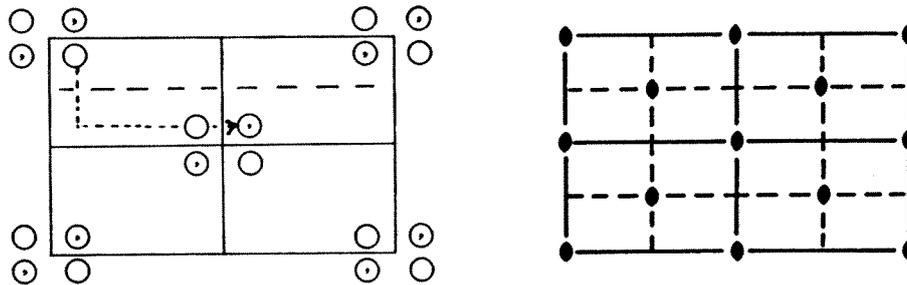
L'objet étant supposé quelconque, son image, après une opération de symétrie inverse n'est plus directement superposable à l'objet de départ, on le fait remarquer symboliquement en y mettant une virgule. La trace d'intersection du miroir avec glissement appelé g est représentée par des tiretés par opposition du miroir ordinaire qui est représenté par un trait plein. Le miroir g peut se trouver au quart selon les translations de la maille. C'est le seul opérateur neuf à considérer, les axes hélicoïdaux n'étant pas utiles dans un milieu à deux dimensions.

##### 2 Exemple de groupe spatial

Soit à représenter le groupe spatial  $c2mm$  : sur le schéma d'une maille rectangulaire, on introduit le groupe de symétrie à l'origine des coordonnées. Ce groupe de symétrie se retrouve à l'extrémité des translations du réseau, au milieu des arêtes et au milieu de la maille :



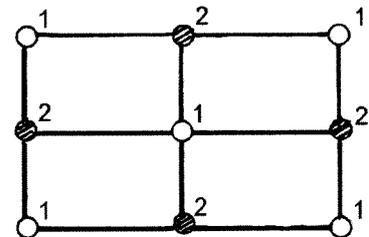
introduisons maintenant un objet énantiomorphe en position générale de coordonnées  $x$  et  $y$  et faisons opérer translations et symétries. À chaque opération de symétrie inverse, l'image de l'objet aura une virgule pour bien montrer que les deux ne sont pas superposables et garder ainsi toute la généralité à ce schéma structural. Après avoir construit toutes ces huit positions générales équivalentes d'un objet dans ce groupe de symétrie spatial, nous voyons que d'autres opérateurs de symétrie appartiennent à ce groupe, on complète graphiquement l'existence de miroirs  $g$  et d'axes de symétrie binaires à leur intersection. On a ainsi la représentation complète de tous les opérateurs du groupe, ils ne modifient pas la donnée de la symétrie macroscopique posée au départ, mais décrivent la symétrie microscopique au niveau de la maille.



Ce nombre huit de positions générales équivalentes dans ce cas correspond au facteur 2 attaché au mode de réseau multiplié par 2 pour l'axe de symétrie binaire et encore par 2 pour un miroir soit 8. Le miroir orthogonal étant la conséquence des deux premiers opérateurs, il n'intervient pas dans le décompte de l'ordre du groupe.

Si l'objet vient en position particulière dans un miroir ordinaire, alors il est son propre symétrique et doit accepter le plan de symétrie comme propriété intrinsèque, la virgule n'a plus de sens. Le nombre de positions est alors divisé par 2.

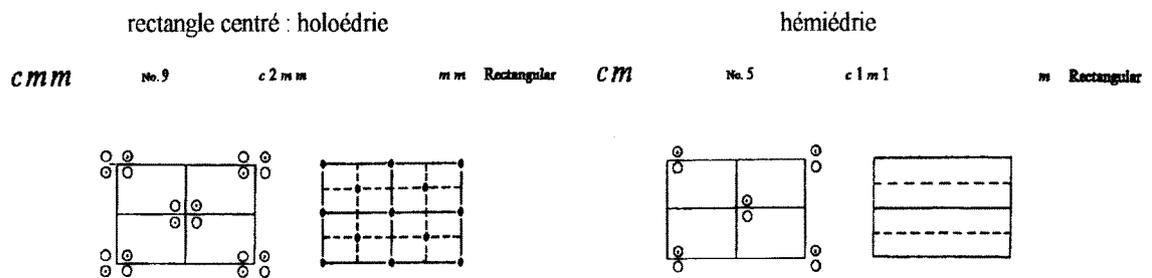
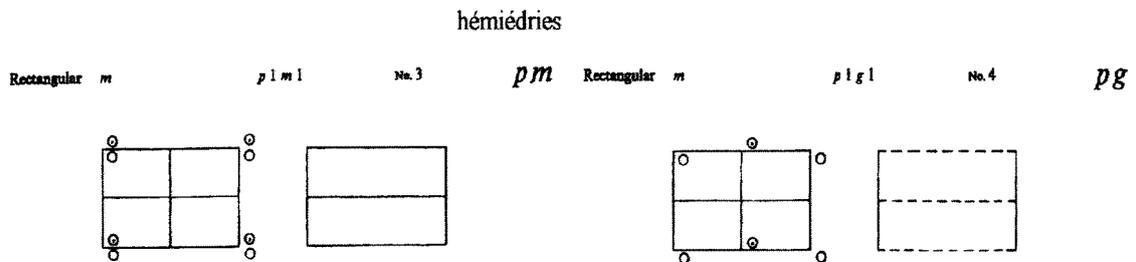
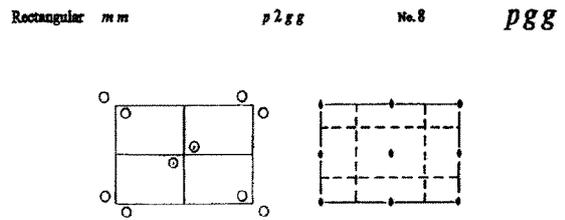
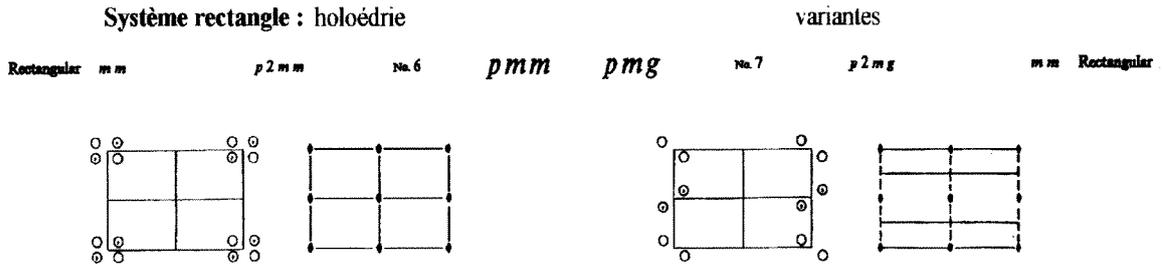
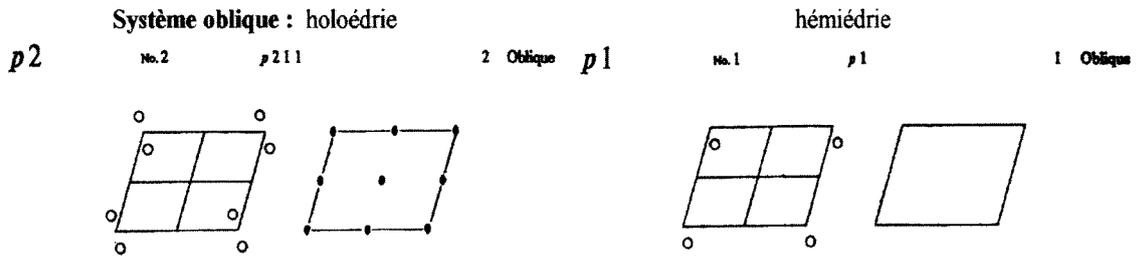
Si l'objet vient sur l'intersection de 2 miroirs, il doit accepter pour lui-même toutes les opérations de symétrie du groupe. Il n'y a alors plus que 2 positions équivalentes dans la maille dues au mode  $c$ . On distingue dans la maille 2 sites de même nature mais non équivalents en position, notés 1 et 2 :



### 3 Tableau des 17 groupes spatiaux

On a ordonné les schémas structuraux des Tables Internationales par systèmes, en commençant par l'holoédrie et ses variantes liées à la distribution des miroirs vrais ou avec glissement, ensuite les méridries.

Voici, en guise d'illustration, 17 figures publiées par G. POLYA (2), la nomenclature étant différente, on propose au lecteur d'établir les correspondances avec les groupes spatiaux précédents.



**Système carré : holoédrie**

**variante**

$p4m$

No. 11

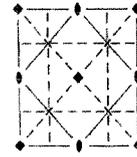
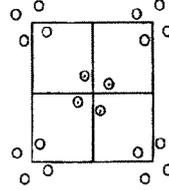
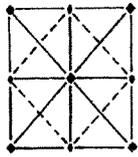
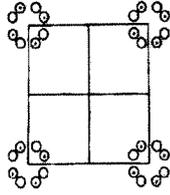
$p4mm$

$4mm$  Square Square  $4mm$

$p4gm$

No. 12

$p4g$



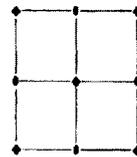
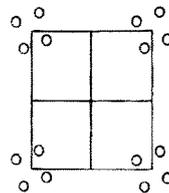
**hémiedrie**

Square 4

$p4$

No. 10

$p4$



**Système hexagonal : holoédrie**

**hémiedrie**

$p6m$

No. 17

$p6mm$

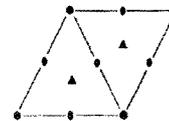
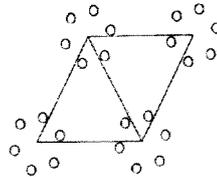
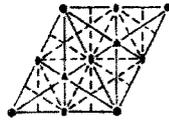
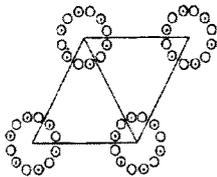
$6mm$  Hexagonal

Hexagonal 6

$p6$

No. 16

$p6$



**hémiedries**

$p31m$

No. 15

$p31m$

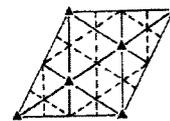
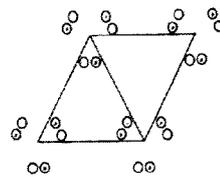
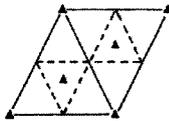
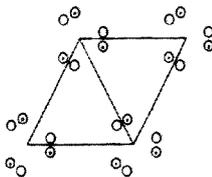
$3m$  Hexagonal

Hexagonal  $3m$

$p3m1$

No. 14

$p3m1$



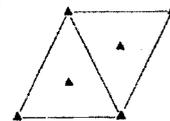
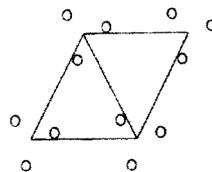
**tétartoédrie**

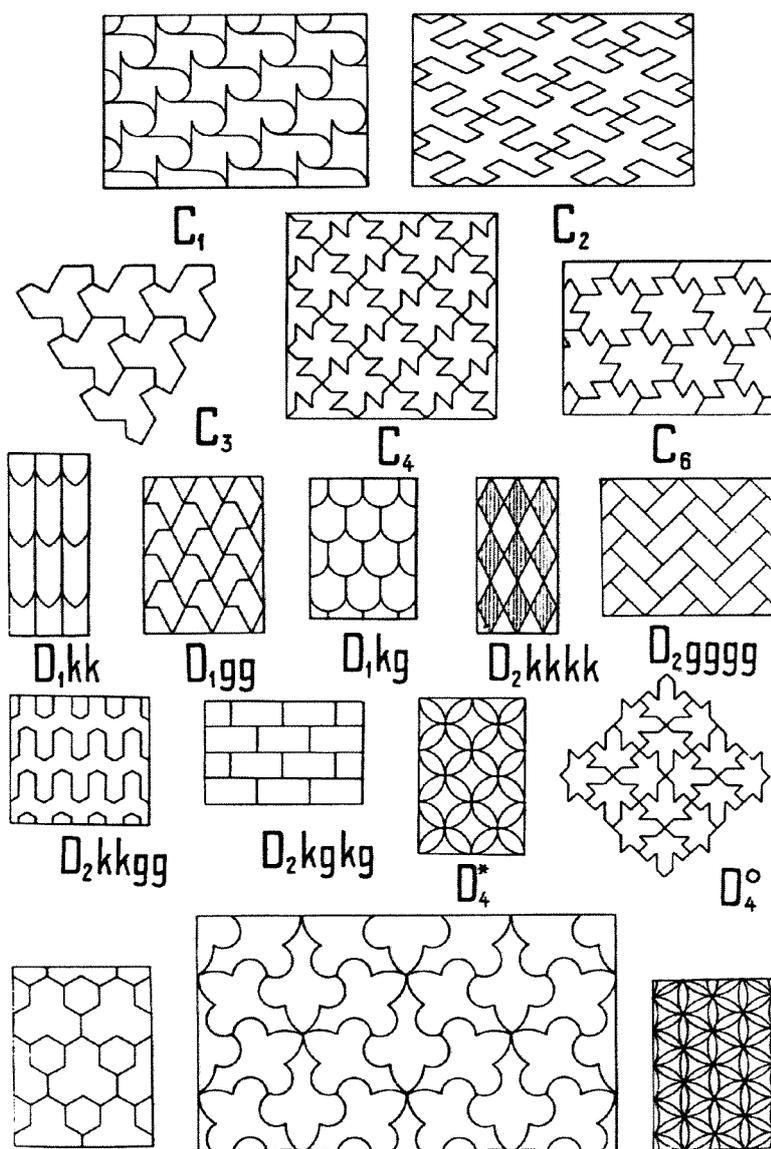
$p3$

No. 13

$p3$

3 Hexagonal





2 Groupes quasi-bidimensionnels dans  $R^3$

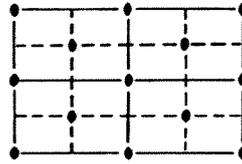
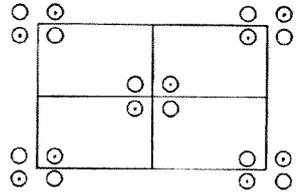
Comme cela a déjà été évoqué en I.1.2. 5, une structure de surface réelle a une certaine épaisseur, ce qui a conduit E. A. WOOD à rechercher parmi les 230 groupes spatiaux à 3 dimensions ceux qui ne renferment pas explicitement une translation dans la 3<sup>e</sup> direction hors du plan. Des groupes de symétrie qui n'ont pas d'axes de symétrie hélicoïdaux perpendiculaires au plan ou des miroirs avec glissement hors du plan. E. A. WOOD arrive à extraire 80 groupes dipériodiques. On peut comparer les 3 schémas structuraux de 2D à 3D qui sont en relation avec le groupe  $c2mm$ , à savoir DG 34 et  $C2mm$  :

*cmm*

No. 9

*c 2 m m*

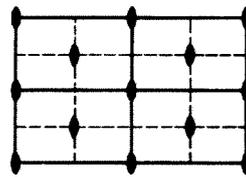
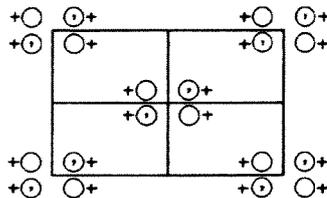
*m m* Rectangular



Rectangular

*C 2 m m*

DG34

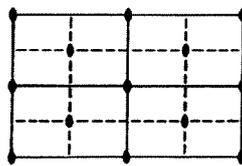
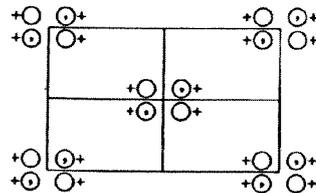


Orthorhombic *m m 2*

*C m m 2*

No. 35

*Cmm2*  
*C<sub>2v</sub><sup>11</sup>*



Cette tentative de mettre à la disposition des chercheurs des schémas structuraux adaptés aux études des surfaces correspond à l'enthousiasme des débuts dans les années soixante. Depuis il a fallu déchanter car la diffraction des électrons ne maîtrise que fort mal l'intensité des faisceaux diffractés et il n'a pas été possible d'adapter tout le formalisme bien rodé par la diffraction des rayons X à la résolution des structures propres à la surface, à cause de ce manque de reproductibilité des intensités diffractées. Cette démarche n'a donc pas eu un succès pratique, mais ce point de vue est néanmoins intéressant à connaître. On en profite pour faire remarquer que d'autres schémas structuraux peuvent être développés en variant les hypothèses de départ.

Et maintenant, un tiers de siècle plus tard, nous pouvons accéder directement à la topographie de la surface à l'échelle nanométrique avec les microscopies en champ proche à la suite des travaux initiés par BINNIG et ROHRER ( prix NOBEL 1986 ). On reste alors dans l'espace réel sans devoir interpréter les clichés de diffraction exprimés dans l'espace des ondes ou encore espace réciproque associé à l'espace réel ou dual de l'espace direct :

soient  $\vec{a}_i$  les vecteurs du réseau direct,  $\vec{a}_j^*$  les vecteurs du réseau réciproque associé sont définis par les 9 produits scalaires  $\vec{a}_j^* \cdot \vec{a}_i = \delta_{ij}$   $i, j$  variant de 1 à 3 { $\delta_{ij}$  symbole de Kronecker :  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  ;  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  }

c'est la relation du cristallographe, le physicien introduit la constante  $2\pi$  pour ne pas devoir la traîner ailleurs :  $\vec{a}_j \cdot \vec{a}_i = 2\pi \delta_{ij}$

Dans la dynamique de la recherche à cette époque, E. A. WOOD a, en fait, seulement réactualisé des résultats déjà connus auparavant. Le lecteur désirant approfondir ce sujet se reportera à la thèse soutenue par E. MÜLLER en 1944 à Zürich en mathématique (4). Elle a appliqué la théorie des groupes à la décoration plane.

### 3 Application à la décoration plane

En décoration plane l'essentiel des réalisations est destiné à être vu d'un seul côté et, malgré une certaine épaisseur physique, l'œuvre répond à un schéma bidimensionnel.

Les effets de perspective parfois recherchés sont obtenus par des techniques et un savoir faire mais dont les signes restent dans le plan. On obtient d'autres artefacts encore par des moyens destinés à faire oublier une périodicité d'essence non artistique mais technique.

On adoptera donc une analyse parfois un peu plus souple que celle totalement rigoureuse exigée par la cristallographie mais où les impressions visuelles de l'observateur ne seront pas trahies.

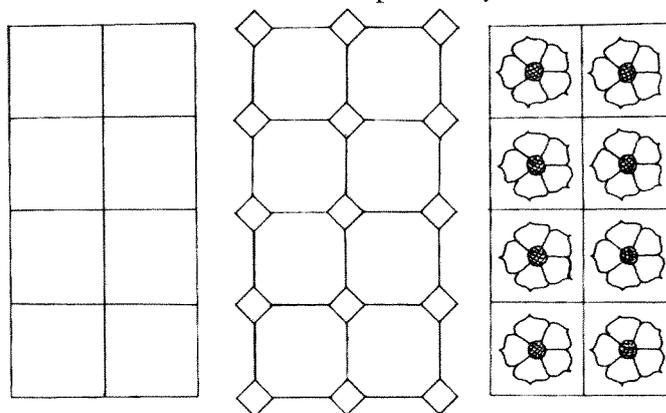
Dans certains cas, grilles en fer forgé par exemple, la prise en compte d'une épaisseur au sens d'E. A. WOOD, ne sera pas à exclure et pourra faire l'objet d'une analyse cristallographique plus complexe si des exemples le justifient.

MAIS IL EXISTE UNE DIFFÉRENCE FONDAMENTALE ENTRE STRUCTURES ATOMIQUES ET STRUCTURES EN DÉCORATION PLANE.

Dans le premier cas, l'ordre est la conséquence des propriétés des atomes qui interagissent l'un sur l'autre selon leur spécificité en minorant l'énergie du système, le réseau est induit par l'ordre local. Ainsi le réseau et le groupe spatial correspondent à un processus unique résumé par les 17 groupes spatiaux holoèdres ou mérièdres.

Il n'en est rien en décoration plane où les objets qui sont disposés n'ont pas d'interaction énergétique au niveau de la maille, le groupe spatial est disjoint de la forme de la maille. Ainsi toute décoration plane périodique sera caractérisée par les deux données qui peuvent ne pas être dépendantes : le réseau et le groupe de symétrie spatial.

Par exemple, voici un carrelage classique holoèdre noté  $4mm$ , un deuxième mais le dernier dont le réseau est néanmoins carré n'a pas de symétrie, noté 1.



Fin de la 1<sup>re</sup> partie .../...

# L'INFINI MATHÉMATIQUE, SES INVENTEURS, DÉCOUVREURS, DÉTRAC- TEURS, DÉFENSEURS, MAÎTRES, VICTIMES, UTILISATEURS ET SPECTATEURS

D<sup>r</sup> Edward BELAGA  
LSIIT-CNRS/UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR

*« La mise au point définitive de la nature de l'infini est devenue nécessaire, non seulement pour l'intérêt spécialisé de sciences particulières mais aussi pour l'honneur de la compréhension humaine. L'infini a toujours suscité les émotions du genre humain, plus que toute autre question ; l'infini a stimulé et enrichi la raison comme peu d'autres idées l'ont fait, mais l'infini plus que toute autre notion a besoin de clarification. » [Hilbert 1925]*

## 1. Préambule

*« Personne ne pourra nous chasser du paradis que Cantor a créé pour nous. » [Hilbert 1925]*

Commençons par la remarque banale suivante de caractère purement phénoménologique : avant que Georg Cantor entre dans la scène de l'infini mathématique, deux types de « totalités infinies » sont connus de manière expérimentale dans la communauté mathématique et ce, au moins depuis le temps d'Euclide, nous parlons de la totalité infinie du dénombrable et de la totalité infinie du continu.

Techniquement Cantor nous apporte :

- premièrement une remarquable mise au point des notions de dénombrable  $\omega$  (ou  $\aleph_0$ )<sup>1</sup> et de continu  $\mathfrak{c}$  ;
- deuxièmement la découverte de l'énorme vide entre les deux ;
- troisièmement l'invention d'une foule innombrable de totalités infinies nouvelles supposées pour certaines combler le vide entre  $\aleph_0$  et  $\mathfrak{c}$  et pour d'autres aller au delà de  $\mathfrak{c}$ .

Les successeurs de Cantor inventent des totalités infinies plus redoutables encore. Ils ont aussi essayé avec beaucoup d'acharnement de combler le hiatus  $\{\aleph_0, \mathfrak{c}\}$  quoique avec un succès relatif.

Bien sûr de si modestes détails phénoménologiques ne peuvent être tenus pour responsables de l'aventure mathématique après Cantor. La vérité est que l'infini mathématique est devenu à la fois un attractif et périlleux « Klondike » de genres : une mine d'or pour les prospecteurs de l'infini, une ruine morale et psychologique pour d'autres, comprenant le fondateur [Dauben 1986], [Meschkowski 1964] et son disciple le plus perspicace [Feferman 1986] qui, c'est dommage, appartiennent à la deuxième catégorie. De nombreuses réussites furent construites ici, mais plus encore d'espérances furent brisées provoquant de temps en temps d'énormes et subits tremblements de terres mathématiques et philosophiques qui purent être ressentis loin de l'épicentre de l'infini. Des guerres fratricides furent jouées, gagnées et perdues.

Et comme ce qui est arrivé après la ruée vers l'or américaine, l'aventure risquée de l'infini s'est traduite par un nouvel essor des mathématiques : d'abord en logique, phi-

---

<sup>1</sup> Alors que les  $\omega$  correspondent aux ordinaux des totalités infinies, les  $\aleph$  correspondent aux cardinaux des totalités infinies ; voir ci-dessous section 3 et par exemple [Hrbacek, Jech 1984].

losophie puis en informatique, physique et, en retour, en mathématiques. (Il est hors des propos d'insister ici dans cet article sur ces développements.)

Quoi qu'il en soit, la poussière de l'infini est encore loin de s'être stabilisée.

Un chercheur réputé n'a pas encore écrit un article complet sur l'infini, avec titres et préliminaires, qui en prendrait la défense tout en calmant le jeu [Shelah 1992]. À une autre occasion, le même auteur se demande sans l'ombre d'une ironie « *pourquoi nombre de ses collègues y compris les meilleurs spécialistes de la théorie des ensembles s'excusent dès qu'on aborde leur sujet.* » [Shelah 1993] p. 2 cf [Jensen 1995] p. 407. Au même moment, son célèbre contemporain, écarte catégoriquement, malgré ses efforts et ceux de ses collègues, toute « *découverte de nouveaux axiomes dans le pays inaccessible des cardinaux transfinis* » [Mac Lane 1983]. Pour consommer la désunion, d'un côté de l'infini, des annonces dramatiques abondent à la fois apocalyptiques [Friedmann 1986] et exubérantes [Fremlin 1993], tandis que de l'autre côté on demeure sceptique, indifférent, ignorant, sinon carrément hostile.

Ce douloureux désaccord continue d'être accompagné par de non moins douloureux conflits sur les fondements de la philosophie des mathématiques [Hersh 1979] (cf un dialogue toujours pathétique [Henle 1991], [Henle 1992]), ainsi que la méthodologie de l'éducation [Bishop, Bridges 1985] ou la politique de la recherche fondamentale en mathématiques [Smoryński 1988], [Mathias 1992]). En fait, l'intégrité des mathématiques [Simpson 1988], sinon son existence même [Arnold 1995], est en jeu.

La question est maintenant : pourquoi ? Pourquoi cela nous arrive-t-il, toujours à nous, chercheurs (et en fait avec tant de succès) de ou dans l'infini ? Pourquoi pas à « eux », les « autres », qui travaillent dans les autres branches des mathématiques ?

Ou bien avec moins d'humour et plus de responsabilité : quelle est la substance et la signification de *la crise sur les fondements, d'une ampleur sans précédent*, qui accompagne (paraphrasant [Friedmann 1986]) la recherche actuelle sur la théorie des ensembles ?

## 2. Objets, questions et structure méthodologique

« *Si j'avais été présent à la création, j'aurais donné quelques conseils pour un ordre meilleur de l'univers* ». Alphonse X le Sage, Roi de Castille 1252-84 cité dans [ODQ 1980] p. 3

### Principal objet et plan de l'étude

Dans ce qui suit, nous comptons exposer et en un sens résoudre le conflit des deux écoles de pensée prédominantes, qui perdure depuis le tout début de la *théorie des ensembles* jusqu'à aujourd'hui : l'une qui prétend bien connaître sinon presque tout de l'infini et l'autre qui affirme qu'un tel savoir, pour des raisons différentes et souvent d'incompatibles, est illusoire et/ou n'a aucun mérite particulier pour l'exercice « normal » de la mathématique.

L'exposé du conflit peut être conduit comme une lecture terre-à-terre du témoignage collectif des chercheurs contemporains dans ce domaine. « Terre-à-terre » devrait signifier en particulier que les attitudes spécifiques envers le continu servent de révélateur (papier tournesol) pour tester la « valeur réelle » des concepts de la théorie générale et de ses progrès.

Notre évaluation critique (mais en rien nihiliste) des règles cantorienne et post cantorienne de *fabrication des nouvelles totalités infinies*, porte en elle l'espoir d'une réconciliation des écoles de pensées en conflit à propos de l'infini, à condition d'accepter

l'impératif de *confirmation mathématique indépendante de l'existence des totalités infinies*. L'idée même n'est pas nouvelle mais sa mise en œuvre systématique et prudente présente une sérieuse gageure d'accès ardu. La difficulté apparaît à qui-conque, à côté des succès retentissants a connu quelques échecs spectaculaires.

Finalement, à la lumière de toutes ces estimations bienveillantes de la Théorie Supérieure des Ensembles, nous adressons une idée séduisante, bien que légèrement controversée, sur d'autres interprétations possibles de ses réalisations.

### Autres questions cruciales

Bien sûr, une lecture attentive du témoignage collectif présenté ci-dessous touche à de nombreuses autres questions intéressantes non traitées dans cet article, à cause du manque de place. Tout ce que nous pouvons faire est de mentionner ici quelques questions de manière un peu informelle. Encore que, comme nous le croyons, même une lecture superficielle et sélective rendra l'exposition suivante plus intelligible et instructive.

Derrière notre choix de questions on retrouve la conviction que les leçons de la crise précoce des fondements dans les mathématiques, nous fournissent les meilleures clés possibles pour la compréhension des difficultés courantes mathématiques, logiques et conceptuelles dans la Théorie Supérieure des Ensembles. Ainsi, peut-on débattre de ce que sont ces leçons. Pour nous cela donne la sélection suivante :

1. La pomme de discorde est, maintenant comme il y a de quatre-vingts à cent ans, l'interprétation de la nature et du sens de l'infini mathématique, aussi bien que le problème de signification et de légitimité des méthodes employées pour « découvrir » de nouvelles totalités transfinies.
2. Paradoxalement, conjointement des champions qualifiés et des objecteurs consciencieux de la théorie des ensembles de Cantor furent justifiés plus tard par les développements mathématiques, logiques et philosophiques qui germèrent de leurs intuitions initiales souvent très controversées. En fait, certains exposés (souvent même mutuellement incompatibles) sur la nature de la pensée mathématique faisant référence à la nouvelle théorie fondamentale des ensembles inspirèrent (et nous le croyons, inspirent) les critiques et défenseurs qui sont contraints de les utiliser. C'est une des principales raisons qui permette de croire que derrière la discorde actuelle, il y a des découvertes quelque peu conflictuelles mais de grande valeur et en la matière un *éclairage nouveau*. Les deux observations suivantes illustrent ce paradoxe.
3. Le fait que les mathématiques nouvelles, dans leur raisonnement sautèrent quelques pas logiques de nature constructive fondamentale froissèrent Luitzen Brouwer. Cette logique constructive a trouvé de nombreuses expressions riches et rigoureuses, en particulier, dans la brillante formalisation de calculabilité de Alonso Church, Alan Turing et autres. À la fin, leurs réalisations purement théoriques furent implémentées dans les ordinateurs modernes. Quelque critiques modernes au franc-parler de la Théorie Supérieure des Ensembles appartient à cette tradition constructive, d'autres non.
4. À l'autre extrême se tient fièrement David Hilbert, avec sa confiance illimitée dans la solidité de toute mathématique exempte de *contradictions logiques intrinsèques*.

ques. Son attitude (appelons-la **méta programme** de Hilbert) consiste en une *justification formelle a posteriori* de toutes théories mathématiques consistantes possibles. Il s'est opposé à l'affirmation de Brouwer et ses successeurs qui prônent la légitimité philosophique a priori d'un *fragment logiquement sûr mais limité des mathématiques*, avec d'autres parties des mathématiques dont la véracité du *logiquement sûr* reste à vérifier [Bishop, Bridges 1985] p. 5. Le programme de Hilbert (son méta programme de spécification finie) s'est avéré d'une remarquable efficacité, pour ses critiques (qui commencent avec Kurt Gödel) et pour ses défenseurs ; et il est devenu et même reste la plus audacieuse vision conceptuelle de la théorie moderne de la démonstration.

5. Non moins paradoxalement les deux écoles ont prouvée la fausseté de leurs aspirations les plus ambitieuses : monopoliser d'une manière ou d'une autre les mathématiques. D'une part, l'intuition mathématique ne peut être réduite et donc justifiée par son fragment constructif. D'autre part, les riches théories mathématiques défient toutes les justifications formelles considérées comme des spécifications formelles du méta programme de Hilbert. Nous sommes en train tout doucement de glisser de la justification de la Théorie Supérieure des Ensembles à la quête en dernier ressort d'une signification provisoire en dehors de la théorie des ensembles de découvertes formelles importantes de cette théorie.

### Structure méthodologique

Pour aborder les questions posées ci-dessus on doit étudier attentivement, et dans un large contexte culturel et intellectuel, les multiples facettes de l'infini mathématique et les tentatives séculaires de son appropriation et de son adaptation scientifique appelée *l'infini dans la théorie des ensembles*.

La vérité est que pour s'aventurer sur le sol incertain de la théorie des ensembles [Cohen 1971] p. 15, avec ses paysages surréalistes [Mathias 1979] p. 109 à la recherche de véritables exemples de l'infini mathématique, on doit prêter autant d'attention aux séduisantes images des guides de voyages officiels, qu'aux évaluations tantôt sérieuses tantôt amères des prospecteurs de l'infini expérimentés, occasionnellement mécontents ou simplement aux avertissements amicaux et témoignages d'incrédules *compagnons de route*.

L'article est un apport très personnel à l'exceptionnelle beauté du sujet, à la richesse et la profondeur des contributions mathématiques et philosophiques de nombreux mathématiciens contemporains à commencer par Georg Cantor. Les abondantes citations, ces perles empruntées à de nombreux auteurs à l'occasion de notre amicale réunion sur l'infini mathématique, sont reconnues ici avec la profonde gratitude de l'auteur et son humble admiration.

Ceci étant, nous nous excusons pour quelques sourires de circonstance peut-être trop évidents (puisse-t-il être comparés à un rire au Paradis ?) avec lesquels nous comptons atténuer la gêne occasionnelle de nos guides distingués de théorie des ensembles.

### 3. L'infini existe

« *L'infini mathématique : a-t-on besoin de Cantor ?* » [Feffermann 1987] le titre.

« Une équipe de génie de la technologie de Hollywood a entrepris de les ramener à la vie ... Ainsi ont-ils pris quelques libertés artistiques et décider de les faire une fois et demie plus grands. De toute façon, qu'en savaient-ils dans les livres ? Il arriva alors quelque chose de surprenant. Dans l'Utah les paléontologues trouvèrent des os d'un vrai rapace, et il était de la taille d'une bête du film. « Nous étions à la pointe » dit le chef des maquettes du film avec la fierté de l'inventeur. Après que nous les ayons créés, ils les ont découverts. » [Dorfmann 1993] p. 53

Comme de nombreux visionnaires et prophètes avant lui, Georg Cantor n'eut pas l'heur de voir les beaux fruits de ses révélations sur la théorie des ensembles ; comme d'habitude c'est même le contraire qui arriva, les controverses de la théorie des ensembles qui en résultèrent eurent des conséquences désastreuses tant pour son activité scientifique que pour son moral et pour sa santé mentale [Dauben 1979].

En fin de compte des applications élégantes et puissantes résultant de la théorie des ensembles ont réhabilité pour le moins quelques traits décisifs de la vision cantorienne de l'infini mathématique.

Un article récent de la recherche sur les techniques d'achèvement de preuve pour Système de Réécriture de Termes (la SRT joue un rôle important en informatique théorique en particulier en déduction automatique et spécifications de données abstraites) commence comme suit : [Dershowitz 1993] p. 243

« Cantor inventa les nombres ordinaux

$0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots, \omega, \omega+1, \dots$

$\omega 2, \dots, \omega n, \dots, \omega^2, \dots, \omega^n, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega \uparrow n$

$\dots, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_0^0, \dots, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\varepsilon_0}, \dots$ , et ainsi de suite.

Chaque ordinal est plus grand que tous ceux qui le précèdent et il est habituellement défini comme leur réunion à tous :

$\omega$  = l'ensemble de tous les entiers naturels ;

$\omega 2$  =  $\omega \cup \{\omega + n \mid n \in \omega\}$  ;

$\omega n$  =  $\cup_{i < n} \omega i$  ;

$\omega^2$  =  $\cup_{n \in \omega} \omega n$  ;

$\omega \uparrow n$  =  $\cup_{i < n} \omega \uparrow i$  ;

$\varepsilon_0$  =  $\cup_{\xi \in \omega} \omega \uparrow \xi = \omega^{\varepsilon_0}$  ;

$\varepsilon_0^0$  =  $\omega^0$  ;

$\varepsilon_1$  =  $\cup_{n \in \omega} \varepsilon_0 \uparrow n$  .

La notation  $\alpha \uparrow n$  représente une tour de  $n$  étages  $\alpha$  . »

Après cette introduction des plus succincte et transparente au ordinaux infinis de Cantor, l'auteur démontre, le tout en six pages seulement, comment la descente ordinaire peut être utilisée pour prouver la finitude pour les SRT spécifiques. Le problème général de finitude pour le SRT (qui est bien sûr une spécialisation du problème de l'arrêt des machines de Turing) est indécidable.

La descente ordinaire est un cas particulier de la descente selon un ensemble partiellement ordonné (dite selon les arbres). Une des idées les plus fructueuses de Cantor a été la notion de bon ordre BO, i.e. d'ensemble linéairement ordonné satisfaisant à la condition de descente finie DF, i.e. qui se termine après un nombre fini d'étapes de sous-suites descendantes (les ordinaux sont bien sûr des BO spéciaux). Le principal mérite de la condition DF est l'extension du mécanisme d'induction mathématique au delà des nombres naturels jusqu'à chaque BO et en particulier jusqu'à chaque ordinal.

Notez qu'on considère que « Cantor inventa ou créa mais ne découvrit point » les nombres ordinaux. Plus tard Gerhard Gentzen [Gentzen 1936] découvrit que, en supposant la validité de la loi d'induction mathématique sur le segment ordinal  $[0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega+1, \dots, \varepsilon_0]$ , on peut prouver la consistance de l'arithmétique de Peano. Alors une interprétation générale remarquable des ordinaux explicitement définis dénombrables comme notations symboliques succinctes pour les structures algorithmiques avec boucles multiples furent données par Alan Turing [Turing 1950], et son approche a contribué substantiellement au développement de la théorie moderne de la vérification des programmes.

Même avant Turing, et corroborant [Gentzen 1936], Reuben L. Goldstein a construit une fonction arithmétique vraiment élémentaire  $n \mapsto g(n)$  dont la structure mime la hiérarchie transfinie de Cantor jusqu'à  $\varepsilon_0$ , et dont les itérées  $g^k(n)$  finalement terminent à 0 pour tout  $n$ . Cependant, avec  $n$  croissant, il leur faut en effet très longtemps pour arriver à 0, ce qui signifie que la fonction  $K(n) = \min(k; g^k(n)=0)$  croît si vite qu'une preuve de ce fait nécessite une induction mathématique à travers les nombres transfinis jusqu'à  $\varepsilon_0$  [Goldstein 1944]. Le cas est devenu un paradigme d'une confirmation indépendante de l'existence d'une totalité infinie à travers son usage obligatoire dans la preuve d'un théorème élémentaire.

En tête, Harvey Friedman découvrit une version de type fini appelée FFF du théorème de Kruskal concernant les suites infinies d'arbres finis. La démonstration de la dénombrabilité FFF requiert la récurrence mathématique jusqu'au premier ordinal dénombrable imprédictif  $\Gamma_0$  [Gallier 1991]. L'imprédictivité de  $\Gamma_0$  signifie qu'en particulier on ne peut lui trouver de formule récursive transfinie explicite comme celle pour  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_{\varepsilon_0}$ .

C'est sûr, « après que Cantor ait créé les ordinaux, il les a découverts » !

De plus Friedman propose que toute totalité infinie nouvellement inventée doit être redécouverte à travers son usage nécessaire dans une solution naturelle d'une finitude naturelle i.e. problème de théorie des nombres ou combinatoire.

« Depuis au moins 20 ans la question principale en théorie des nombres est de savoir quelle théorie abstraite joue un rôle peu ou prou dans la formulation des résultats » [Friedman 1981] p. 192.

Nous sommes prêt pour les surprises qui suivent principalement dans les sections 9 et 10).

#### 4. Survol du paradis de Cantor avec un de ses dadas

« Nous disons que les propriétés des grands cardinaux sont un axiome fort de l'infini. L'adaptation des axiomes forts de l'infini est ainsi une aventure théologique impliquant des questions fondamentales de croyance concernant la vérité sur l'univers.

C'est une analogie plaisante : pour un vrai croyant, connaître dans les règles le mont Everest c'est gravir lentement et péniblement une de ses sinistre face, escalader les rochers dans la neige et la gadoue, avec une confiance déclinante et un scepticisme croissant sur la possibilité de jamais atteindre les hauteurs. Mais en ces jours de progrès rapide de la technologie, pourquoi ne pas monter en hélicoptère, survoler le sommet et contempler le royaume de l'air raréfié tout comme on boirait une tasse de thé. » [Kanamory, Magidor 1978] pp. 103-104

Enhardi par les confirmations remarquables de Gentzen, Goodstein, Turing, Friedman et les autres, un timide compagnon mathématicien est finalement près à croire au

transfini et à suivre l'invitation amicale à contempler en paix la beauté qui inspire le respect de l'univers du transfini :

« Cela m'apparaît comme le fruit le plus admirable de l'intellect mathématique et en général comme l'une des plus grandes réalisations de l'activité humaine de pure rationalité. » [Hilbert 1925] p. 373

Partant du niveau 0 notre hélicoptère passe les nombres naturels et entre dans la région des ordinaux infinis (dénombrables) décrits ci-dessus section 3 :

$\omega, \omega+1, \omega 2, \dots, \omega^2, \dots, \omega^n, \dots, \omega^\omega, \dots, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{\varepsilon_0}, \dots$  et ainsi de suite.

Pour monter davantage, on imposera que tous les ordinaux que l'on peut compter (fini ou dénombrable) sont suivi par le premier ordinal que l'on ne peut compter  $\omega_1$  qui à son tour est suivi de  $\omega_2$ , le premier ordinal au delà de  $\omega_1$  qui n'est pas équipotent à  $\omega_1$ , etc. :

$0, 1, 2, 3, \dots, \omega = \omega_0, \dots, \omega_1, \dots, \omega_2, \dots$ , et ainsi de suite.

Pour accélérer l'ascension, on introduit les valeurs absolues des ordinaux au sens de la théorie des ensembles, dits cardinaux avec disons  $|\omega_0| = \aleph_0$ . La notion est fondée sur la relation d'équivalence introduite par Cantor et appelée correspondance biunivoque ou équipotence. Des ordinaux différents mais équipotents correspondent à un cardinal comme disons  $\aleph_0$  correspond à  $\omega \dots$  en résumé pour tous les ordinaux dénombrables :

$0, 1, \dots, \omega = \omega_0, \dots, \omega_1, \dots, \omega_2, \dots$ , et ainsi de suite  
 $\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$   
 $\quad \quad \quad \aleph_0 \quad \quad \quad \aleph_1 \quad \quad \quad \aleph_2$

Il y a déjà de fortes présomptions d'existence des totalités infinies. Chaque pas derrière le dernier « et ainsi de suite » impliquant une nouvelle notion, une nouvelle construction, une nouvelle aventure théologique. [Kanamory, Magidor 1978] p. 104

Ici se trouve la carte la plus moderne et la plus générale (empruntée à [Jech 1995] p. 414 avec des modifications mineures) du paradis montagneux de Cantor :



FIGURE I

Les guides expérimentés dirige l'attention du spectateur qui les accompagne sur deux faits remarquables du splendide paysage transfini. Premièrement l'univers infini a un toit appelé *plafond de l'inconsistance*. (Lequel propose que les bases axiomatiques du paradis de Cantor s'émiettent sous chaque nouvel étage que l'on rajouterai à son sommet. Ces bases sont ZFC, les axiomes de Zermolo-Frankel augmenté de l'axiome du choix). Deuxièmement fait remarquable du paradis de Cantor, sa structure linéairement ordonnée :

« Comme notre édifice croît, nous dirons comment un à un les grands cardinaux tombent à leur place en hiérarchie linéaire. C'est spécialement remarquable au regard des idées apparemment disparates qui ont motivées leurs formulation. Comme le remarque Friedman, cet aspect hiérarchique de la théorie des grands cardinaux est quelque part un mystère ... Autrement dit, y-a-t-il une hiérarchie des principes de théorie des ensembles dans une autre galaxie basée sur ZFC, disjointe et incomparable à nos grands cardinaux ? [Kanamory, Magidor 1978] p. 104

Notre rapide survol de l'atmosphère raréfié et avec lui la bonne tasse de thé est terminé, nous quittons notre amical hélicoptère avec des sensations diverses. C'était beau, bien sûr, et de ce fait très rassurant de côtoyer de telles lumières dans une aventure à vous couper le souffle, à l'instar de Saunders Mac Lane et de rencontrer là nos vieux copains les nombres naturels qui restent gentiment entre les deux premiers niveaux de notre montagne transfinie  $0$  et  $\aleph_0$ . Après tout, ce n'est pas pour nous surprendre : Mac Lane a toujours été franc sur ses préférences fondamentales [Mac Lane 1986] et son intérêt pour un bon passe-temps [Mac Lane 1994], de plus l'ascension linéairement transfinie est quelque part modélisée par les nombres naturels !

Mais nos guides assument (ou peut-être esquivent-ils la question ?) que toutes les totalités infinies existantes ou imaginaires sont quelque part sur la pente en dehors des pâturages. Alors, **question fréquente** : *Où peut-on localiser le continu  $\mathfrak{c}$  dans le paysage sur-réaliste du transfini ?*

Tout le monde sait que Cantor a cru dur comme fer démasquer  $\mathfrak{c}$  dans le mystérieux  $\aleph_1$ <sup>2</sup>. Durant le voyage notre plouc mathématicien aurait quelque part entendu dire que Kurt Gödel était enclin à croire que le continu était plutôt du côté de  $\aleph_2$ , le second cardinal indénombrable [Moore 1993] p. 175. Comme on nous le raconte, un article récent, qui se réfère *aux évidences actuelles accumulées par trente ans de considérations effrénées* [Judah, Roslanowski 1993] p. 375, tend à confirmer l'intuition de Gödel et reposant sur les travaux précédents, développe une machinerie sophistiquée en direction de la preuve hypothétique de la conjecture de Gödel.

Malheureusement les guides de voyages officiels sont soit silencieux sur ce sujet soit pire encore évasif à l'envie :

« En dépit des efforts de Cantor lui-même et des autres, la question ... restera sans réponse jusqu'à l'apparition des méthodes de la logique moderne » [Jech 1995] p. 409.

Ils oublient juste d'ajouter qu'elle restera irrésolue à tout jamais : il a été démontré que l'hypothèse du continu ne peut ni être démontrée (la célèbre méthode forcing de Paul Cohen) [Cohen 1966], ni rejetée [Gödel 1964] dans la théorie des ensembles ZF.

<sup>2</sup> C'est la version ordinale de l'hypothèse du continu de Cantor, CH. La version cardinale (faible) ne dépend pas de la hiérarchie ordinale, et déclare simplement que tout sous-ensemble infini d'un ensemble continu est équipotent à l'ensemble des nombres naturels ou à l'ensemble continu lui-même.

Pire encore « l'hypothèse du continu généralisée peut tomber en défaut n'importe où » [Foreman, Woodin 1991] ... Parlez-moi d'autre chose, enrage emphatiquement Mac Lane :

« J'admire les réalisations de Gödel mais je trouve très futile de s'émerveiller à l'heure actuelle de ce qu'il imagina être le cardinal réel du continu. Ces spécialistes sérieux qui cherchent encore ce cardinal devraient se rappeler l'infâme image du philosophe – un aveugle dans une cave noire cherchant un chat noir qui n'y est pas ». [Mac Lane 1992] p. 121

Le dessin humoristique suivant<sup>3</sup> illustre cette discussion amicale sur la nature de l'infini mathématique :



FIGURE 2

### 5. Mais comment savoir si toutes ces nouvelles totalités infinies existent réellement ?

« Il suffit de penser qu' en mathématiques, modèle de vérité et de confiance, les véritables notions et déductions que chacun apprend, enseigne et utilise, conduisent à des absurdités. Où peut-on trouver ailleurs, vérité et confiance si même les mathématiques se trompent. » [Hilbert 1925] p. 375

De retour à la maison du splendide voyage transfini, avec sa confiance durement ébranlée, on doit affronter l'amère vérité : la première crise provoquée par la théorie des ensembles, celle des paradoxes logiques (dans les termes de Hilbert des « absurdités ») a laissé la place à une crise moderne de l'arbitraire des points de vue sur le transfini et des notions et constructions formelles extrêmement compliquées construites sur ces points de vue. Nulle part en mathématiques (ou, pour ce problème, dans les sciences naturelles) il n'est nécessaire de croire aveuglément en autant d'inventions conceptuelles et de constructions infinies sans aucun bénéfice de clarification et/ou de confirmation [Maddy 1988].

Sa sobriété mathématique naïve usuelle intacte, notre cousin de la campagne mathématique timidement mais distinctement s'exprime :

**Question fréquente :** *Émotions et guides de voyage à part, existent-ils bien réellement ? !*

Tous les nouvelles totalités infinies découvertes par Cantor et après lui ont-elles « la même exigence forte d'exister » ( une paraphrase de [Barwise 1975] p. 113) que le dénombrable et le continu connus déjà des grecs ? En d'autres termes quelles sont nos raisons d'être confiant dans leur existence, comme nous le sommes dans celle des nombres naturels  $\omega$  et du continu  $\mathfrak{c}$  ? Pour Georg Cantor [Dauben 1979] pp. 132-133, et David Hilbert [Hilbert 1925] pp. 375-376, la réponse *in extremis* était franche et généreuse : tous les objets mathématiques, dont les définitions ne contredisent pas le cadre formel de la théorie, existent. En d'autres mots, *la consistance* est la seule condition d'existence.

D'un autre côté, pour Luitzen Brouwer et Henri Poincaré, aucune des nouvelles totalités infinies non dénombrables n'existe *en matière de principe*, parce qu'aucun n'a été proprement défini : les définitions avancées n'ont pas satisfait quelques critères *a priori* de

<sup>3</sup> Emprunté au International Herald Tribune, November 18, 1993 et légèrement modifié avec sa permission et nous les en remercions. Le dessin original, crée par KAL, représente « Washington traversant le `dinnerware` dans un « Thème de l'histoire US représenté par Disney ». La réplique « Cela m'inquiète » est de KAL.

correction *philosophique*, par exemple elles emploient le *principe du tiers exclu*, ou manquent de *prédicativité*. Ici couve un feu plus moderne, le violent démenti de la générosité existentielle de Cantor et de Hilbert :

« *Au début de ce siècle un principe démocratique auto-destructif était avancé en mathématiques (spécialement par Hilbert), accordant que tous les systèmes d'axiomes avaient le même droit d'être analysés, et la valeur de l'œuvre mathématique est déterminée, non pas par sa signification et son utilité comme dans les autres sciences, mais sa seule difficulté, comme dans l'alpinisme. Ce principe conduisit rapidement les mathématiciens à rompre avec la physique et à se séparer de toutes les autres sciences. Aux yeux de tous les gens normaux, ils s'étaient enfermés dans la sinistre caste sacerdotale d'une religion mourante, comme les Druides.* » [Arnold 1995] pp.7-8.

La persistance de telles attitudes extrêmes, mutuellement (et violemment) incompatibles explique comment la question est devenue l'otage de la guerre des habitudes mathématiques et des goûts philosophiques.

L'atmosphère entourant, depuis le début [Dauben 1979] ; [Moore 1982] ; [van Dalen 1990], ce problème extrêmement difficile était, et reste encore, si dogmatique, les arguments étaient, et restent encore, si personnels et arbitraires que les gens qui préfèrent coller à leur intérêts théoriques ensemblistes sont devenus en quelque sorte cyniques à ce sujet. Quelques uns sont partis après leurs mises à mort formelles, s'étant libérés eux-mêmes de toute chaîne ontologique ; comme Craig Smorynski l'a exprimé sans charité :

« *Le sujet a attiré les carriéristes, qui étaient entraînés à résoudre des problèmes, à réduire tout ce qui n'était pas difficile, et qui n'ont reçu aucun enseignement au sujet de l'histoire ou de la philosophie de leur sujet et qui ont appris rapidement que de telles connaissances ne serviraient pas leurs carrières.* » [Smorynski, 1988] p.13.

D'autres reconnaissent la légitimité du problème, seulement pour le formuler immédiatement à la manière « pas demandé, pas dit » :

« *La question « les grands cardinaux, qui sont-ils donc ? » est, quoique indécidable (sauf sil n'y en a aucun), sûrement naturelle. Non que ces énormes inaccessibles existent évidemment ; mais si la prudence était exigée, il fallait en tenir compte beaucoup plus tôt. L'inaccessible fait ressentir quelques inquiétudes à quiconque s'est réjoui des applications répétées indéfiniment de l'opération ensemble des parties.* » [Dodd 1982] p. xxii.

(Par suite, anticipant les délibérations suivantes, le présent auteur qui ne s'est jamais « réjoui des applications répétées indéfiniment de l'opération ensemble des parties » [Belaga 1988], et ceci, en accord avec [Dodd 1982], est d'une façon ou d'une autre, qualifié pour ressentir les inquiétudes au sujet de nouvelles totalités infinies).

Clairément, l'enjeu est tel qu'on doit comprendre et respecter profondément (mais pas nécessairement partager) l'indignation de Kurt Gödel, qui avait écrit il y a plus de trente ans :

« *L'intuitionnisme de Brouwer est absolument destructif dans ses résultats. La théorie complète des  $\aleph$  plus grand que  $\aleph_1$ , est rejeté comme sans signification* » [Gödel 1964] p.257.

## 6. Pire encore : l'infini mathématique existe-t-il tout à fait ?

« *C'est sûr, la discussion des paradoxes de la théorie des ensembles a mené la recherche sur les bases des mathématiques loin du point de vue classique sur la nature des mathématiques si passionnément défendu par Cantor. Intuitionnistes et formalistes sont réunis dans leurs efforts pour éliminer tous les éléments métaphysiques des fondements des sciences exactes ... Georges Cantor, formé dans Platon et les scolastiques, a pensé différemment le problème, ... C'est la partie tragique de la vie de notre investigateur, si plein de*

déceptions, que sa propre théorie a donné naissance à un nouveau concept mathématique qui, pour de bonnes raisons, fait un sort au fondement des sciences exactes sur la métaphysique. » [Mescbowski 1964] pp. 94-95

Ainsi, avant notre tentative pour réfléchir sur le problème existentiel ci-dessus, on peut être confronté à un autre, bien plus redoutable :

**Question fréquente :** *L'infini mathématique existe-t-il tout à fait ? Ou en d'autres mots : peut-on « réellement savoir » quelque chose à propos de l'infini ?*

Les réponses des deux écoles modernes dominantes de la pensée, *formalisme et constructivisme*, qui se partagent la majorité des votes des membres de la communauté mathématiques philosophiquement affiliés, varient d'un doux « vraiment pas grand chose » au sans excuse « rien, ne vous ridiculisez pas » (Nous nous excusons auprès du lecteur *Platoniste* ou d'obédience *idéaliste* de le classer dans une minorité idéologique, et nous l'implorons de patienter un moment en ligne. Quant aux *nominalistes* et autres *pragmatiques*, ils n'ont de toute façon, rien à faire ici).

La dernière raison, *intuitionniste* ou *constructiviste*, est philosophique, et même religieuse : l'intelligence d'un homme en tant qu'être purement fini ne peut avoir aucun accès sûr à l'infini. En poussant la vision originale et profonde de Brouwer dans ses limites presque absurdes, Errett Bishop revendique :

« Notre point de vue est de décrire les opérations mathématiques qui peuvent être obtenues par des êtres finis, des mathématiques humaines en bref. Par contraste, les mathématiques classiques se préoccupent des opérations qui peuvent être obtenues par Dieu. » [Bishop 1985] p. 9

Et « si Dieu a besoin de ses propres mathématiques, laissez le faire lui-même. » [Bishop, Bridges 1985] p. 5.

Bien sûr, tous les constructivistes ne peuvent aisément avaler cette marque brutale de la philosophie intuitionniste ; Hermann Weyl, jadis, a été d'une autre opinion :

« Les mathématiques ont été appelées la science de l'infini. En fait, le mathématicien invente des constructions finies par lesquelles les questions sont décidées par leur nature en rapport avec l'infini. C'est sa gloire. » [Weyl, 1985] p. 12.

Comme pour l'école *formaliste*, dont la *raison d'être* historique a été le besoin urgent de défendre la *Mère Patrie* mathématique depuis l'attaque de l'intuitionnisme, au vu de ce que raconte le premier épigraphe de David Hilbert du présent article, on pourrait s'attendre à ce que l'infini soit défendu avec, au moins, autant de cœur que Weyl ... C'est surprenant, mais la défense de Hilbert contre la critique de Brouwer des fondements des mathématiques classiques a été basée sur un déni de « l'existence réelle » de l'infini pour le moins aussi précipité que celui de Bishop [Hilbert 1925] p. 392.

Encore, l'honneur douteux d'affirmer clairement et définitivement la mort du *formalisme* de l'infini, et de son propre aveu, en l'absence de toute conviction philosophique inspiratrice, est finalement revenu à Abraham Robinson (qui aussi, a juste poussé la vision originale des fondateurs jusqu'aux limites de absurde) :

« Ma position concernant les fondements des Mathématiques est basé sur les deux principaux points ou principes suivants.

- (i) Les totalités infinies n'existent dans aucun sens du terme (c'est-à-dire ni réellement ni idéalement). Plus précisément, toute mention, ou prétendue mention, des totalités infinies est, littéralement, **dénué de sens**.
- (ii) Néanmoins, nous pouvons continuer à faire des Mathématiques « comme d'habitude », c'est-à-dire, nous pourrions agir **comme si** les totalités infinies existaient réellement. » [Robinson 1965], p. 230.

Deux « mérites » de cette fameuse doctrine portent sur le sujet de l'étude présente. Premièrement, il plagie, avec des corrections mineures, une autre célèbre maxime : cela, de toutes les choses ... de la *Physique* Aristotélicienne<sup>4</sup> !

Deuxièmement, le principe de Robinson est l'affirmation que le *formalisme à la Robinson* de Hilbert et l'inhérent dans sa vision schizophrénique de la théorie et pratique mathématique est devenue une pensée mathématique normative.

## 7. Existence du Continuum : de Zénon à Cantor, et après.

« Pour moi le point essentiel est l'existence des totalités infinis. L'attitude vers les ensembles infinis a traditionnellement été la grande ligne de partage entre mathématiciens. » [Coben 1971] p. 10

Laissez nous résumer ici en quelques mots la plus importante des leçons de notre brève visite dans le paradis cantorien et post-cantorien. La logique *intrinsèque* et la beauté étourdissante de la *théorie supérieure des ensembles* sont là ... mais aussi sa

« tendance déconcertante à produire des résultats indépendants plutôt que des théorèmes dans le sens usuel. La préoccupation de la « consistance » plutôt que la « vérité » qui en découle, semble donner au sujet un air d'irréalité. » [Sbelah 1992] p 197.

C'est cet « air d'irréalité », troublé par notre ignorance persistante, après un siècle d'efforts ardues et sophistiqués, de la nature *ordinaire* du continuum, qui nourrit la discordance dramatique et préjudiciable des appréciations des réalisations de la théorie des ensembles dans un large contexte mathématique, scientifique, philosophique, et culturel.

Dit plus simplement : une *théorie des ensembles naïve* est-elle semblable à *Anabase* de Xénophon, le récit franc et brillant d'une aventure humaine réelle, et sa *théorie supérieure des ensembles* semblable à la saga de Tolkien, une *fantaisie* sophistiquée et captivante qui mêle (c'est-à-dire utilise et abuse) les éléments de base (batailles entre héros et voyous) de la première histoire ? Et, pour chercher à sortir de cette « confusion » infinie, comment pourrait-on formellement saisir la différence *sémantique* tellement subtile entre les différents niveaux de la *théorie des ensembles*, qui sont intimement liés, étant du point de vue *syntactique* « indiscernablement » « vrai » et du point de vue *mathématique* également « beau » et « fructueux » ?

Ce qui suit résume les grandes lignes des trois aperçus (un par section, sections 7à9, commençant donc ici) sur les principales difficultés ontologiques de la *théorie supérieure des ensembles* qui, nous l'espérons, pourrait conduire un jour à une stratégie valide pour la recherche de l'infini.

Pour commencer, survolons rapidement l'histoire étonnante du continuum. En faisant la connaissance de  $\omega$  et  $\mathfrak{c}$  *expérimentalement*, les grecs ont été absolument fascinés par les différences évidentes de ces deux infinis tant dans leurs « origines » que dans

---

<sup>4</sup> En fait (l'auteur du présent article le sait bien), ni Abraham Robinson, ni aucune autre source ne mentionne la similarité frappante entre l'esprit et la lettre des principes de Robinson et le passage suivant de la *Physique* d'Aristote. Nous proposons la traduction : « Notre exposé ne doit rien aux études des mathématiciens, en réfutant l'existence actuelle de l'infini ... À vrai dire, ils n'ont pas besoin de l'infini et ils ne l'utilisent pas. Ils postulent seulement que la ligne droite finie peut être tracée aussi loin qu'ils le veulent. Il est possible de la diviser dans la proportion de la plus grande quantité ou tout autre valeur de la taille qui vous plaît. Ainsi dans leurs preuves, il ne font pas de différence entre les infinis tant que leur existence est dans la sphère des grandeurs réelles »

Bien sûr l'affirmation d'Aristote est plus consistante et, d'un point de vue plus moderne, plus radicale : dans le langage réactualisé il pourrait être appelé quelque chose comme « critique ultra intuitionniste » [Yessenin-Volpin 1970].

leurs « *natures* », comme il est clair depuis les paradoxes avancés par Zénon d'Élée (environ 464-460 avant J.-C.) [Bochenski 1970] p. 26 [Anglin, Lambek 1995] pp 54-57.

En particulier, le paradoxe de Zénon « *Achille et la tortue* » démontre clairement la confrontation conceptuelle entre deux différents types d'expériences qui ont conduit à deux différents types de modèles de l'infini. Le premier type est mieux résumé par l'expérience de comptage (à travers des observations de battements de cœur, marchant comme un mouvement pas à pas, construisant des tours, etc.) - la seule « *accumulation de l'infini* » humainement disponible en parties *finies et discrètes*. Le second type peut être observé dans un monde extérieur comme un infini continu (points de l'horizon, le vol d'une flèche, etc.). Zénon doutait clairement que les deux infinis puissent être réconciliés : on peut courir, mais on ne peut pas correctement (c'est-à-dire en dehors d'un paradoxe) « saisir » ce phénomène d'une façon mentale, parce que *notre compréhension est finie et discrète*, alors que notre mouvement (un mystère en lui-même) est, comme le ciel lui-même, *continu*.<sup>5</sup> Cela ne signifie pas, bien sûr, que Zénon doutait de l'existence du continu. Bien sûr, Cantor a résolu un aspect particulier du paradoxe<sup>6</sup> de Zénon en inventant un univers mathématique absolument nouveau, sa *théorie des ensembles*, indisponible pour Zénon, où les relations entre deux « habitats » infinis, antérieurement incompatibles peuvent être conceptualisées avec succès, et alors formellement étudiées et comprises.

Pour le meilleur et pour le pire, cela n'a pas été la fin de notre histoire. Tombant dans un piège encore plus profond, que celui de Zénon, Cantor « *se libéra de toutes les chaînes et manipula le concept d'ensemble sans aucune restriction* » [Weyl 1949], p.50 ; (Hermann Weyl désapprouve fortement ici l'usage sans limite de l'axiome de l'ensemble des parties de Cantor, PSA (*Power Set Axiom*) ; nous trouvons sa *critique* très convaincante, section 8). En fait, Cantor a inventé les ordinaux transfinites, sections 3 et 4, et a utilisé les itérations transfinites de PSA, avec la perspective explicite de faire exactement ce que Zénon réalisa qu'il était incapable de faire : précisément de « compter » le continu !

La situation qui en résulte dans la théorie des ensembles surpasse de loin dans sa discordance tous les précédents grecs connus<sup>7</sup>. En particulier, le clivage entre les exposés discrets (ou *pythagoriciens*, comme Ronald Jensen a choisi de l'appeler [Jensen 1995] p 401) et continus (*newtoniens*, en accord avec Jensen) du monde est devenu encore plus précis et incompatible.

---

<sup>5</sup> Plus de deux mille ans plus tard, apparemment la même intuition a motivé les efforts de Brouwer pour redéfinir le continu mathématiques de Cantor [Brouwer 1981]. D'un autre côté, en accord avec la bible, quelques milliers d'années avant Zénon, le peuple de Shinar n'a pas eu de tels scrupules :

« *Et il disait : Viens, laisse nous construire une ville, et une tour, dont le sommet atteindra le ciel* » [Genèse 11 :4]

Ils se sont, bien entendu, trompés... Encore que, certains l'affirment, la théorie moderne des ensembles est loin d'être complètement à l'abri d'une telle folie impérieuse.

<sup>6</sup> D'autres aspects de ce paradoxe sont encore vivement discutés par les philosophes. Ainsi, par exemple, Henri Bergson (1859-1941) discute minutieusement et « explique » avec force le paradoxe de Zénon de nouveau dans son livre [Bergson 1959] pp 1259, 1376, 1377.

<sup>7</sup> « *Une « crise de fondation » eut lieu déjà dans les mathématiques grecques, causée par la découverte pythagoricienne des quantités incommensurables. C'était Eudoxe qui procura de nouvelles fondations, et depuis lors les mathématiques grecques ont été inébranlable. Si on lit les livres de mathématiques modernes, il est normalement dit que quelque chose de très similaire est arrivé dans les mathématiques modernes.* » [Lorenzen 1958] p 241.

Mathématiquement, le continu, comme *nous* le savons, est bien plus que sa définition en théorie des ensembles c'est-à-dire l'ensemble de tous les sous-ensembles du dénombrables,  $\mathfrak{c} = 2^{\omega} = \mathfrak{P}(\omega)$ . La découverte la plus frappante et la plus importante de Cantor impliquant que  $\mathfrak{c}$  soit une totalité infinie indénombrable :  $\mathfrak{c} > \omega$ . C'est une aire de jeu pour les intuitions mathématiques profondes conduisant à des théories mathématiques magnifiques, de l'analyse à la théorie analytique des nombres et à la géométrie. Ainsi, on peut affirmer, de manière informelle mais sans ambiguïté, que l'existence du continu précède ontologiquement, et ne peut pas être réduit au PSA de Cantor, ou la définition de l'ensembles des parties d'un ensemble,  $\mathfrak{c} = 2^{\omega} = \mathfrak{P}(\omega)$ . De plus, l'existence indépendante et les propriétés des totalités  $\omega$  et  $\mathfrak{c}$  impliquent conceptuellement ici la construction de  $\mathfrak{P}(\omega)$ .

### 8. Les principes sur l'au-delà des limites supérieures par Cantor

« Bien sûr la nécessité mathématique d'appliquer l'ensemble des parties aux ensembles infinis ne veut rien dire sur la légitimité de cette application... Ce n'est pas un argument de dire : nous avons une image intuitive du continu parfaitement claire, et le principe de l'ensemble des parties nous permet de la comprendre théoriquement. L'argument serait plutôt le suivant : comme nous le pressentions, le principe de l'ensemble des parties (ou les principes qui l'impliquent) a été révélé dans nos tentatives de clarifier notre image intuitive du continu ; dans la mesure où nos tentatives sont couronnées de succès, le principe d'ensemble des parties s'en trouve conforté. » [Hallet 1984] pp. 212-213

Pour simplifier quelque peu, on peut affirmer (bien qu'ils ne le racontent jamais dans les livres scolaires) que la théorie des ensembles de Cantor et de tous ceux qui suivirent est érigée sur (les spécialisations et généralisations de-) les principes méta philosophiques fondamentaux suivants pour l'extension des totalités infinies, le principe d'accessibilité ultime de Cantor pour chaque ensemble inaccessible et l'axiome d'ensemble des parties de Cantor.

#### Principe d'accessibilité ultime de Cantor pour chaque ensemble inaccessible.

FIGURE 3

*Le monde de théorie des ensembles qui vous entoure a sa limite itérative, et au-delà de cette limite commence un nouveau monde. Ainsi approchons nous de ces limites itératives et jetons un regard sur l'au-delà !*

L'esprit de cette démarche est bien figuré par l'ancienne gravure représentée ci-contre.

Ainsi Cantor étendit la procédure de recensement de la section 3 au-delà du dénombrable, en récoltant dans son panier tous les ordinaux recevables, appelés nombre de Cantor de première classe. Il lui suffit d'être un ordinal, et il doit être par définition plus grand que tout nombre de première classe, – ainsi le plus petit ordinal non-dénombrable  $\omega_1 = \aleph(\omega)$  ( $\aleph$  représente l'opération de limite transfinie,



notation personnelle). Tous les ordinaux qui suivent  $\omega_1$  qui lui sont équipotents forment la seconde classe de Cantor suivie par  $\omega_2 = \aleph(\omega_1)$ , ... , « et ainsi de suite » ! Cantor a cru que se déplaçant le long de cette échelle croissante on passait nécessairement par le continu et même qu'on le dépassait largement ... Cela ouvrait d'excitantes possibilités d'incorporer élégamment le second principe d'une grande force :

### Axiome de l'ensemble des parties de Cantor

*Le continu peut être atteint depuis une totalité infinie « bien plus petite » – les dénombrables– avec l'opération d'ensemble des parties. Appliquons itérativement cette opération, à travers les échelles transfinites construites avec le premier principe !*

On ne peut sous-estimer toute l'importance de ces principes pour la théorie des ensembles. En fait, rarement dans l'histoire des sciences ou des mathématiques on peut trouver théorie si vaste et complète, avec une telle prédominance, à la fois conceptuelle et formelle, de seulement deux idées et quant à cela, fortement controversées !

## 9. Doutes, dénégations et confirmations de l'existence des totalités infinies

*« ... même sans regarder la nécessité intrinsèque de créer quelques nouveaux axiomes, et même dans le cas où en fin de compte un tel axiome n'a pas cette nécessité, la décision probable sur ses vérités est possible ainsi ... en étudiant ses succès ... Il se pourrait qu'il existe des axiomes si nombreux dans leurs conséquences vérifiables, mettant en pleine lumière le champ tout entier, et produisant des méthodes si puissantes pour résoudre les problèmes (et même les résoudre constructivement ...) que ... ils seraient forcément enfin acceptés comme toute théorie physique bien établie » [Gödel 1964] p. 261*

Regardons les règles cantorienne et post-cantoriennes de fabrications de nouvelles totalités infinies comme des conjectures, semblable à celles de la physique des particules élémentaires, quand les propriétés des particules existantes étaient utilisées pour conjecturer une théorie globale (et peut-être paradoxale) et inventer des particules nouvelles hypothétiques (peut-être avec des propriétés inhabituelles). Alors, comme le suggéra Kurt Gödel (cf. l'épigraphe ci-dessus), l'existence réelle des particules inventées serait confirmée par des preuves expérimentales tangibles :

***Le critère de l'existence réelle de nouvelle totalité infinie définie dans un cadre axiomatique fixé : cette totalité doit être pertinente et indispensable (rasoir d'Okham).***

(CRE0) *Son existence est confirmée directement en exhibant un vrai théorème vérifiable de théorie des nombres, combinatoire, etc. qui nécessite manifestement dans sa preuve l'induction mathématique étendue à cette totalité infinie particulière.*

*La suite peut être vue comme preuve de confirmation :*

(CRE1) *La totalité est l'objet d'une riche et belle théorie pleine de facettes.*

(CRE2) *Cette théorie interagit de manière fructueuse avec les théories des autres domaines mathématiques et y trouve des applications non triviales et intéressantes.*

*La suite est une recommandation pour l'utilisateur du rasoir :*

(CREU) *Une utilisation indulgente, généreuse et précautionneuse de la critique ci-dessus est conseillée. Cependant, jusqu'à ce que l'existence d'une totalité infinie ait été confirmée indépendamment, elle entraînera une existence purement formelle, restant ouverte aux différentes interprétations, critiques et même à un rejet complet.*

Bien sûr, l'absence actuelle d'une telle confirmation ne doit pas donner à quiconque le droit d'appliquer le rasoir d'Okham comme la hache du boucher, en déclarant la

recherche en théorie des ensembles non pertinente ou d'essayer d'obtenir son interne-ment dans un asile d'aliénés [Mac Lane 1992] p. 121 (citée section 4).

### 10. Un scénario apocalyptique : qu'arrivera-t-il si les cardinaux de Mahlo existent réellement ?!

Néanmoins on arguera ci-dessous que l'utilisation obligatoire de la théorie supérieure des ensembles en mathématiques du fini doit être encore établie. En outre il y a des raisons de croire qu'on peut développer les mathématiques appliquées aux sciences en ignorant la théorie supérieure des ensembles... Autrement dit, l'infini actuel n'est pas indispensable aux mathématiques du monde physique. [Feferman 1987] p. 153

Harvey Friedman a proposé une puissante spécification du critère ci-dessus, [Friedman 1986] p. 192 (cité à la fin de la section 3) : une totalité infinie peut être démontrée par son utilisation obligée dans une branche mathématique bien établie. Ainsi comme nous l'avons vu ci-dessus, les ordinaux dénombrables  $\epsilon_0$  et  $\Gamma_0$  sont clairement d'une indispensable utilité dans la combinatoire élémentaire. Mais les cardinaux ou ordinaux indénombrables reçoivent-ils confirmation semblable de leur existence ?

La réponse de cet auteur est : aucune et c'est dommage.

En fait, certains sont convaincus que la remarquable confirmation finitiste de Harvey Friedman (le premier ordinal imprédicativement dénombrable) montre que « l'obligation d'existence de  $\Gamma_0$  implique l'obligation de l'(existence du premier) indénombrable ordinal  $\omega_1$ . » [Smorinski 1982] p. 186

Cependant, avec tout le respect du à Friedman pour sa remarquable découverte disons clairement que le résultat en question démontre seulement que la prédicativité est un concept trop restreint pour permettre de formaliser pleinement la notion de fini et élémentaire ; bien sûr c'est en lui-même une réalisation remarquable ! Pourtant on reste encore très loin (plus précisément infiniment loin) de l'utilisation nécessaire du premier ordinal indénombrable  $\omega_1$ .

Maintenant, si on ne peut prouver que même l'indénombrable minimal de Cantor existe indépendamment pourquoi ne pas essayer d'aller plus loin à la recherche d'une nouvelle totalité infinie énorme et pleine d'utilité mathématique, dont l'existence justifierait radicalement tous les types mineurs derrière lui, y compris  $\omega_1$  ? C'est ce qui est caché en particulier dans l'affirmation radicale suivante :

*« Ici nous donnons l'utilisation obligatoire de l'extension de la théorie abstraite des ensembles dans un contexte mathématique fini ... En fait ces extensions de la théorie abstraite des ensembles vont significativement au-delà de la structure axiomatique communément acceptée pour les mathématiques (comme celui formalisé par ZFC), et sont fondées sur l'existence des cardinaux de Mahlo d'ordre fini ... Ceux-ci sont parmi les dénommés grands cardinaux inférieurs ... Nous croyons que cet exemple est suffisamment convaincant pour révéler pour la première fois une possibilité réaliste sinon une probabilité que la puissante théorie abstraite des ensembles joue un rôle essentiel dans une variété de plusieurs contextes mathématiques finis standards. Bien sûr cela donnera naissance à une crise fondamentale d'une magnitude sans précédent puisque nous n'avons aucun moyen de nous convaincre de l'exactitude de la cohérence des quelques principes de théorie des ensembles, manquant de confiance en notre pauvre intuition sur ces principes. » [Friedman 1986] p. 93*

Cette déclaration dramatique faite il y a dix ans est restée depuis lors ni commentée, ni justifiée ou expliquée par Friedman ou ses successeurs et admirateurs. La raison en est que, demande exagérée, l'existence d'un cardinal de Mahlo est nécessaire pour

prouver le théorème combinatoire de Friedman. Une explication naturelle est peut être l'extrême faiblesse du système axiomatique fondamental. (Un phénomène opposé rapporté par [Simpson 1984] est discuté dans [Sommer 1998]).

### 11. Remarque et conclusion

Il ne subsiste aucun doute que les témoignages ci-dessus et les critiques de la théorie des ensembles moderne apportent avec eux la responsabilité scientifique et morale de proposer une sortie ontologique digne pour la recherche liée à ce sujet qui a produit depuis presque un siècle un monde d'une beauté exceptionnelle fait de résultats difficiles et de théories profondes. Que signifient ces faits mathématiques si les totalités infinies décrites sont préprogrammées et n'existent que « sur le papier » ? Une tentative d'explication est avancée par Stephen Simpson :

« *Seuls les premiers bas niveaux de la hiérarchie cumulative porte quelque ressemblance à la réalité extérieure. Le reste est une vaste extrapolation fondée sur le modèle brut de processus de pensée abstraite. Gödel lui-même finira par en convenir comme beaucoup.* » [Simpson 1988] p. 362

Autrement dit, la recherche relative à ZF peut être vue comme un exercice sophistiqué et répété qui stimule l'adresse de notre imagination inductive et itérative. D'autres interprétations sont possibles comme celles qui mènent à des applications inconnues dans de futures philosophies du raisonnement et de l'informatique.

En disant au revoir à notre bon lecteur, nous le quittons en lui octroyant le privilège de décider à quelle catégorie appartient l'auteur de cette présente étude : est-il un inventeur, un découvreur, un détracteur, un défenseur, un maître, une victime, un utilisateur ou un spectateur de l'infini mathématique ?

Et vous qui me lisez, qui êtes-vous ?

FIGURE 4

\_\_\_\_\_??

» \_\_\_\_\_*inconsistency*

» » \_\_\_\_\_  $j: V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$

» » » \_\_\_\_\_*huge*

» » » » \_\_\_\_\_*supercompact*

» » » » » \_\_\_\_\_*Woodin*

» » » » » » \_\_\_\_\_  $o(\kappa) = \kappa^{++}$

» » » » » » » \_\_\_\_\_  $o(\kappa) = 2$

» » » » » » » » \_\_\_\_\_*measurable*

» » » » » » » » » \_\_\_\_\_*Ramsey*

» » » » » » » » » » \_\_\_\_\_  $0^\#$

» » » » » » » » » » » \_\_\_\_\_*weakly compact*

» » » » » » » » » » » » \_\_\_\_\_*Mahlo*

» » » » » » » » » » » » \_\_\_\_\_*inaccessible*

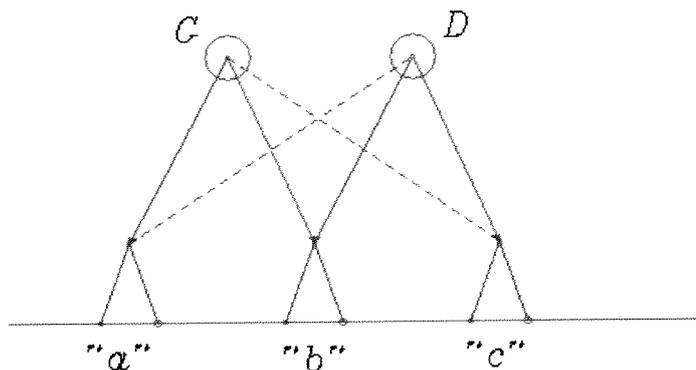
» » » » » » » » » » » » » \_\_\_\_\_  $\aleph_1$

» » » » » » » » » » » » » » \_\_\_\_\_  $\aleph_0$

» » » » » » » » » » » » » » \_\_\_\_\_  $0$



En pratique le cerveau va superposer les symboles qui se trouvent en face de chaque œil puisque vous êtes en vision parallèle. Ainsi selon l'illustration ci-contre, l'objet "a" vu de l'œil gauche (G) est superposé à l'objet "b" vu de l'œil droit (D), de même l'objet "b" vu de l'œil gauche est superposé à l'objet "c" vu de l'œil droit. On verra donc quatre objets les deux objets extrêmes, "a" vu de l'œil droit et "c" vu de l'œil gauche ne donnant pas lieu à relief.



Expliquons alors comment est réalisé le stéréogramme de la couverture. Pour se faire, je me suis largement inspiré du livre STÉRÉOMAGIE (éditions du Seuil) par Jacques Ninio, Directeur de recherche au C.N.R.S., livre dont je recommande la lecture.

Il faut travailler avec une bonne photocopieuse et découper les figures avec précision. Pour augmenter la précision il est plus simple de travailler en grand format et de réduire ensuite le résultat. C'est ce que j'ai fait

1 Choisir un fond présentant une texture de taches irrégulières mais répétitives. Ce fond doit avoir des dimensions correspondant au tiers de l'image finale qui comportera ainsi 3 lés. Photocopier ce fond pour en avoir au moins 3 exemplaires.

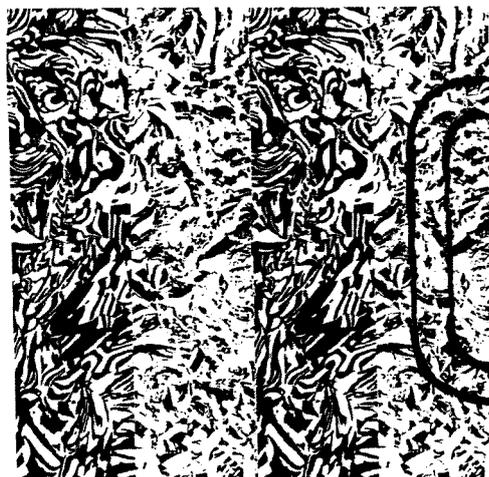


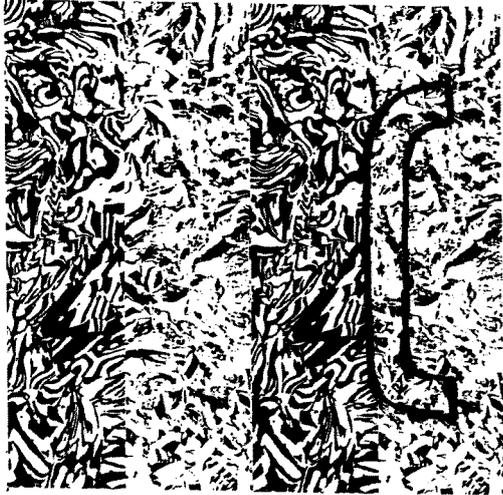
2 Découper dans un des exemplaires la moitié de la figure que l'on souhaite faire apparaître en relief. Pour un bon camouflage il faut prendre une texture de la figure très voisine du fond mais bien sûr distincte de ce fond. Ici j'ai découpé la moitié gauche d'un "0" en prenant le dessin à l'envers.

Photocopier cette figure pour en avoir deux exemplaires.

3 Nous créons le premier lé en collant la figure du demi "0" sur le bord latéral droit d'un des fonds. Il faut repérer très exactement la hauteur à laquelle est positionnée cette figure (en général à peu près au milieu).

*Pour plus de lisibilité nous avons souligné la figure sur l'illustration ci-contre.*





4 Nous créons le deuxième lé en collant le deuxième exemplaire du même demi "0" sur un autre fond, rigoureusement à la même hauteur mais décalé d'environ 10% de la largeur du lé et vers la gauche. Photocopier ce lé n° 2 qui servira de lé n° 3. Puis coller le lé n° 2 à droite du lé n° 1. Photocopier ce double lé. Puis coller le lé n° 3 à droite du double lé. Nous avons ainsi un triple lé.



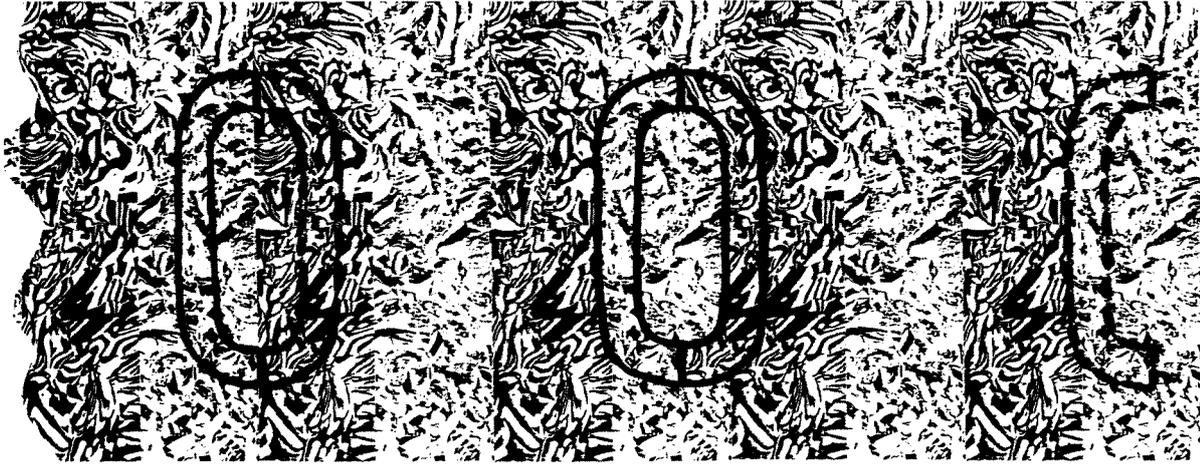
5 Repérer sur le lé n° 2 le prolongement naturel de la figure du demi "0" gauche du lé n° 1, c'est-à-dire le demi "0" droit qui se situe entièrement sur le lé n° 2 et peut éventuellement se télescoper avec le demi "0" gauche situé sur ce lé n° 2. Découper sur la photocopie du double lé ce demi "0" droit.



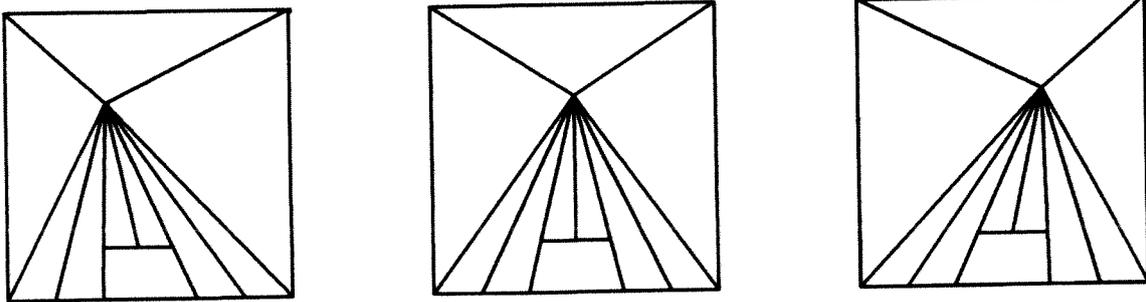
6 Coller le demi "0" droit obtenu sur le triple lé à droite et dans le prolongement exact du demi "0" gauche situé sur le lé n° 2. C'est tout en théorie. En pratique il faut quelques fois modifier légèrement la texture sur le lé n° 3 de l'image finale de manière à améliorer la perception du relief

*Ci-dessous la figure finale où nous avons souligné les différentes images que sont les demis "0" droits et gauches.*

Il faut réduire à la photocopieuse pour que l'écart entre les différentes figures soit compatible avec l'écart naturel des deux yeux (le lé doit faire environ 5 cm. ).



Ce système est très simple car nous nous sommes contentés de surfaces planes horizontales. Si nous voulons des surfaces planes inclinées et mieux, des surfaces arrondies, il faut calculer une déformation des textures, mais le principe est le même. Si nous ne cherchons pas à camoufler l'objet à figurer nous pouvons travailler directement avec trois figures, chacune légèrement décalée par rapport à la précédente. C'est ce que j'ai fait sur le dessin ci-dessous qui représente une pyramide.



# MATHÉMATIQUES ET MUSIQUE CHEZ J. S. BACH

Athanase PAPADOPOULOS<sup>1</sup>

CNRS et Université Louis Pasteur

## Introduction

L'année 2000 a été retenue comme année mondiale des mathématiques. On y célèbre le 250<sup>e</sup> anniversaire de J. S. BACH, et pour cette raison elle a été aussi déclarée année BACH. Ceci est une heureuse coïncidence car, comme il est bien connu, il existe une relation entre BACH et les mathématiques. Notre but dans cet article est de décrire certains aspects de cette relation.

L'article est divisé en trois parties. Dans la première partie, on évoque l'époque de BACH, le siècle des lumières, époque où, dans une partie du continent européen, la relation entre les arts et les sciences (et en particulier entre la musique et les mathématiques) occupait une place privilégiée dans la société cultivée. Dans la seconde partie, on considère la technique musicale du contrepoint en tentant d'exposer certaines des idées mathématiques qui y interviennent et en donnant des exemples dans les œuvres de BACH. Dans la troisième partie, on s'intéresse à la numérogie chez BACH.

Je remercie Roland VENDROUX de m'avoir indiqué il y a quelque temps la référence [4], et Bruno BERNARDOFF pour son aide éditoriale.

## 1 L'époque de BACH

### Le siècle des lumières

BACH a vécu au XVIII<sup>e</sup> siècle, que l'on appelle le *siècle des lumières*, caractérisé par une effervescence intellectuelle, tant artistique que littéraire et scientifique. Une vaste culture générale était présente chez de nombreuses personnes à divers degrés dans la société. Les grandes découvertes du siècle précédent avaient été assimilées et poursuivies à un haut niveau, et un effort considérable de vulgarisation des connaissances, fait par de grands maîtres, souvent munis d'un savoir encyclopédique, avait mis la science à la portée de tous ceux qui s'y intéressaient. Parmi les ouvrages célèbres de vulgarisation, citons le traité de *Mathématique universelle abrégée à l'usage et à la portée de tout le monde* (1728) du P. Louis-Bertrand CASTEL, musicologue, inventeur du clavecin oculaire et professeur de mathématiques à Louis-le-Grand. Mais on pense surtout au travail fait par DIDEROT et D'ALEMBERT, éditeurs et principaux auteurs du *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, qui fut la première encyclopédie au sens moderne du terme. Dans son

---

1. Adresse de l'auteur : Institut de mathématiques, 7 rue René Descartes, 67084 STRASBOURG CEDEX, Email : [papadopoulos@math.u-strasbg.fr](mailto:papadopoulos@math.u-strasbg.fr)

© L'OUVERT 100 ( 2000)

*Discours préliminaire* de l'Encyclopédie (1751), D'ALEMBERT écrit : «Pour peu que l'on ait réfléchi sur la liaison que les découvertes ont entre elles, il est facile de s'apercevoir que les sciences et les arts se prêtent mutuellement des secours et qu'il y a par conséquent une chaîne qui les unit».

Il était courant au XVIII<sup>e</sup> siècle que des artistes rapportent sur des sujets scientifiques et, inversement, que des scientifiques écrivent sur des sujets artistiques. VOLTAIRE publia en 1738 ses *Éléments de la philosophie de NEWTON mise à la portée de tout le monde*. Francesco ALGATORI venait de publier son livre *Il Newtonianismo per le dame*, destiné à expliquer aux dames Italiennes la théorie de l'optique de NEWTON. Un peu plus tard, Tom TELESCOPE publia en Angleterre un ouvrage similaire, *The Newtonian system of philosophy adapted to the capacities of young gentlemen and ladies*. DIDEROT travailla à une encyclopédie musicale et traduisit de l'anglais le dictionnaire de médecine de JAMES. Il publia en 1748 ses *Mémoires sur différents sujets de mathématiques*<sup>2</sup> et en 1765 son *Essai sur la peinture*. ROUSSEAU était aussi compositeur et botaniste. Il publia en 1750 son *Discours sur les sciences et les arts*. Le mathématicien D'ALEMBERT, qui était en même temps membre de l'Académie Royale des Sciences et de l'Académie Française, publia en 1752 ses *Éléments de musique théorique et pratique suivant les principes de M. RAMEAU*, et il existe beaucoup d'autres exemples.

Dans les pays de langue germanique, même si l'esprit des lumières était moins prononcé qu'en France ou en Angleterre (on se souvient que la culture allemande, à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle, avait été saccagée à la suite de la Guerre de Trente ans), les gouverneurs des villes où BACH a vécu (Weimar, Dresde, Leipzig, etc.) et les empereurs tels que FRÉDÉRIC II et JOSEPH II, qui étaient souvent des protecteurs des musiciens, étaient animés d'un esprit d'ouverture propre aux lumières, lié à une volonté de modernisation de l'empire. FRÉDÉRIC II, qui a régné sur la Prusse de 1740 à 1786, était compositeur et aimait être entouré de philosophes, de mathématiciens et de musiciens. L'esprit des lumières qui en résultait (l'*Aufklärung*) avait une précieuse influence sur la grande bourgeoisie germanique. Cela a conduit, dans plusieurs villes d'Allemagne et d'Autriche, à la fondation de théâtres, à la publication de revues à caractère scientifique ou artistique (ou les deux à la fois) et à la création de sociétés savantes dont le but était de promouvoir la relation entre les sciences et les arts. Nous nous intéressons plus particulièrement ici à la société Mizler, dont BACH a fait partie.

### La société Mizler

La *Société des correspondants pour les sciences musicales* ("Correspondierende Societät der musicalischen Wissenschaften"), connue aussi sous le nom de Société Mizler, fut fondée à Leipzig en 1738 par Lorenz Christoph MIZLER, Giacomo de LUCCHESINI et Georg Heinrich BÜMLER. Pour devenir membre de cette société, il fallait être musicologue ou compositeur, et, de plus, avoir des compétences assez

---

2. Puisque l'on va parler de mathématiques et de musique, il est intéressant de noter que trois des cinq mémoires mathématiques de DIDEROT sont reliés à la musique ; ce sont ses *Principes généraux de l'Acoustique*, son *Examen d'un Principe de mécanique sur la tension des cordes* et son *Projet d'un nouvel orgue*.

poussées dans un domaine scientifique. Le membre fondateur L. C. MIZLER était lui-même musicien, mathématicien, juriste, médecin et théologien. Il avait été élève de BACH, en clavecin et en composition, entre 1731 et 1733, en même temps qu'il poursuivait des études de théologie à l'université de Leipzig<sup>3</sup>.

Il était demandé aux membres de la société de correspondre régulièrement entre eux, et chacun de ces membres devait présenter tous les ans au secrétaire de la société (qui était L. C. MIZLER) un mémoire à caractère scientifique. En fait, le règlement précisait même que ce mémoire devait utiliser des idées mathématiques. Une copie du mémoire était ensuite envoyée à tous les autres membres, et l'on demandait à chacun d'entre eux de donner son avis sur le travail. Il est intéressant de noter que BACH a présenté, en guise de mémoire scientifique, en 1747, 1748 et 1749, qui sont les trois années durant lesquelles il était membre de la société (et qui sont aussi les trois avant-dernières années de sa vie), des manuscrits de trois de ses œuvres musicales majeures, les *Variations canoniques*, l'*Offrande musicale* et l'*Art de la fugue*. Il était donc entendu qu'il y a des idées mathématiques sous-jacentes à ces œuvres, et l'on parlera de cela plus bas, après avoir rappelé quelques éléments de l'art du contrepoint.<sup>4</sup>

Il est intéressant de noter au passage un fait relié aux préoccupations numérolologiques de BACH. Ce dernier a adhéré à la société Mizler en 1747, comme 14<sup>e</sup> membre, et il est légitime de se demander pourquoi BACH a attendu si longtemps avant d'y adhérer, alors qu'il avait très probablement été pressenti par son ancien élève MIZLER depuis la fondation de la société. La réponse que l'on donne en général vient de l'importance du nombre 14 pour BACH, ce nombre qui est égal à la somme des valeurs numériques des lettres de son nom :  $BACH=2+1+3+8=14$ , et qui revient si souvent dans sa musique. On parlera de cela dans la troisième partie de cet article.

## 2 Le contrepoint, les mathématiques et BACH

### La technique du contrepoint

Le contrepoint est une méthode de composition musicale, qui consiste à superposer des lignes mélodiques de telle sorte que quand la pièce est interprétée (et si elle l'est correctement), chaque ligne est mise en valeur, de façon à ce que l'oreille

---

3. MIZLER disait qu'il avait étudié la médecine dans le but de pouvoir mieux s'occuper de sa santé physique. Il l'a exercée à partir de 1749, comme médecin à la cour de Varsovie.

4. Notons qu'à part J. S. BACH, d'autres compositeurs importants ont fait partie la société Mizler. Il y a par exemple Georg Philipp TELEMANN, qui a adhéré à la société en 1739 comme 6<sup>e</sup> membre, Georg Frederich HAENDEL, qui y a adhéré en 1745 comme 11<sup>e</sup> membre, et Leopold MOZART, qui y a adhéré en 1755, année où cette société a été dissoute, comme 21<sup>e</sup> et dernier membre. On sait que Leopold MOZART était un passionné de mathématiques et de sciences en général. Il possédait deux microscopes et un télescope, et c'est lui qui a pourvu à l'éducation de ses enfants. On sait aussi que G. P. TELEMANN, depuis son jeune âge, s'est intéressé à la relation entre mathématiques et musique, grâce à l'enseignement de Caspar CALVOER. HAENDEL était un personnage cosmopolite, qui avait étudié le droit, et avant d'accepter son élection à la société Mizler, il avait refusé un titre de Docteur *Honoris Causa* de l'université d'Oxford, invoquant un surmenage.

puisse apprécier en même temps la beauté de toutes les lignes et de leurs combinaisons (et non pas seulement celle des accords produits par les superpositions). Il existe des techniques spéciales de composition en contrepoint, qui ont peu évolué le long des siècles. Ces techniques sont basées sur des transformations simples que l'on applique à un certain motif mélodique de départ, que l'on peut décrire de façon mathématique, et sur lesquelles on dira quelques mots plus bas. Les transformations qui sont appliquées au motif mélodique de départ, permettent de produire d'autres motifs, qui sont "dans le même esprit" que le motif de départ (on dit que les motifs mélodiques sont obtenus les uns à partir des autres par des procédés d'*imitation*). Le compositeur doit ensuite combiner correctement les motifs obtenus et gérer leur entrecroisement et les harmonies qui en résultent. Les transformations utilisées sont essentiellement des symétries (et ces symétries sont visuelles, sur la partition musicale), des translations dans le registre des fréquences, et des homothéties du point de vue des durées. Dans tous les cas, ce sont des transformations qui présentent un aspect mathématique certain et que le compositeur applique à des degrés divers de rigueur. Il est généralement admis que l'art du contrepoint a atteint son apogée chez Josquin DES PRÈS, puis chez MONTEVERDI, et ensuite chez BACH, ce dernier l'ayant appliqué avec une rigueur quasi parfaite. On en verra des exemples plus loin. Ajoutons que le courant sériel de la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle, dû en premier lieu à SCHÖNBERG et son école, a mis en valeur une utilisation formelle et presque abstraite de ces techniques de contrepoint. Il va sans dire que la rigueur de la technique contrapuntique est toujours utilisée avec une entière liberté, et jamais de façon purement mécanique. La qualité du résultat musical dépend d'un équilibre subtil entre l'aspect rationnel et l'aspect émotionnel, équilibre que le compositeur doit trouver, le but de ces combinaisons et de ces frictions de voix étant de produire une musique chargée de lyrisme et d'émotions, et qui fasse vibrer l'âme.

On fait remonter généralement la technique du contrepoint au XIV<sup>e</sup> siècle, et il est intéressant de noter ici, puisque l'on parle de relation entre science et musique, que l'un des principaux traités théoriques de contrepoint, *Il primo libro della prattica del contrapunto intorno all'uso delle consonanze*, a été écrit par Vincenzo GALILEI, le père de l'astronome Galileo GALILEI<sup>5</sup>.

Revenons un peu sur ces transformations que l'on applique en contrepoint à un motif musical donné. Si l'on exclut pour le moment celles qui dilatent ou qui

---

5. Vincenzo GALILEI est le type même de l'humaniste de la Renaissance : physicien, mathématicien, musicologue, compositeur, facteur d'instruments de musique, chanteur, joueur de luth, etc. Ses compositions telles que les *contrapunti a due voci* (1584) sont parfois citées comme de bons exemples d'écriture contrapuntique du XVI<sup>e</sup> siècle. En 1588, il publie son traité *Il primo libro della prattica del contrapunto intorno all'uso delle consonanze*, dans lequel il adapte de manière systématique la technique du contrepoint aux nouveaux modes d'expression musicale (en particulier le traitement et la bonne répartition des dissonances). Dans un autre traité, *Dialogo della musica antica e della moderna* (1581), il aborde la musicologie de manière scientifique, en tenant compte des découvertes acoustiques récentes. En 1590, il réalise des expériences pour faire des calculs de rapports de fréquences émises par des cordes vibrantes en fonction de la tension de ces cordes, ainsi que des calculs de rapports de fréquences émises par des tuyaux en fonction du volume d'air qu'ils contiennent. Ces expériences corrigent certains résultats attribués à PYTHAGORE, et Vincenzo GALILEI les décrit dans son *Discorso particolare intorno all'unisono*. Elles sont reprises par son fils Galileo GALILEI, dans ses fameux *Discorsi e dimostrazioni matematiche*.

contractent l'échelle des temps, on trouve trois transformations de base. Il y a d'abord la *transposition*, qui consiste à reprendre le motif à un registre plus haut ou plus bas que le motif initial, ce qui correspond donc à une translation au niveau des hauteurs des notes<sup>6</sup>. La deuxième transformation est celle de *rétrogradation*, qui consiste à lire la suite des notes à l'envers. En représentation graphique (sur la partition musicale), la rétrogradation correspond donc à une symétrie par rapport à une ligne verticale. La troisième transformation, appelée *renversement*, consiste à appliquer une symétrie par rapport à une ligne horizontale. L'opération de renversement inverse la direction de tous les intervalles musicaux contenus dans le motif initial. En plus de ces transformations, il y a celles qui changent l'échelle des durées. Par exemple, il y a des transformations qui multiplient par un facteur constant toutes les durées. On parle d'*imitation par augmentation* ou par *diminution*, suivant que le facteur de dilatation est plus grand ou plus petit que 1. Par exemple, on peut transformer un motif musical en remplaçant les rondes par des blanches, les blanches par des noires, les noires par des croches, et ainsi de suite. Le nouveau motif est alors une diminution du premier (de facteur deux). Il y a aussi les transformations qui utilisent de nouveaux rythmes en gardant la durée totale de chaque note. Par exemple, on peut remplacer une ligne mélodique n'utilisant que des noires par une ligne utilisant les mêmes notes mais dont les valeurs sont des croches pointées - double croches. Il y a enfin toutes les compositions possibles de ces transformations (on parle de renversement-rétrogradation, etc.)

On peut rappeler ici que des théoriciens de la musique, au XX<sup>e</sup> siècle, ont introduit dans l'enseignement du contrepoint un formalisme purement mathématique, dans lequel les 12 notes de la gamme chromatique sont représentées par la suite d'entiers  $0, 1, \dots, 11$ . Une transposition est alors représentée par une translation modulo 12, un renversement par l'application  $x \mapsto -x$  modulo 12, et une rétrogradation par l'application qui à une suite  $n_0, n_1, \dots, n_p$  fait correspondre la suite  $n_p, \dots, n_1, n_0$ <sup>7</sup>. Ces transformations élémentaires jouent alors le rôle de générateurs d'un certain groupe de transformations qui peut intéresser un mathématicien (voir par exemple [5]).

La technique du contrepoint est utilisée par excellence dans la composition de fugues et de canons. Les fugues sont nécessairement à plusieurs voix (le motif et ses imitations sont jouées à des registres différents), alors qu'un canon peut être à une seule voix (les imitations peuvent être toutes identiques au motif de base ; elles sont jouées avec un décalage dans l'échelle des temps). Notons qu'il peut y avoir dans un canon ou dans une fugue plusieurs motifs de base (appelés aussi *sujets*). Un canon est dit *simplex* s'il possède un seul sujet, *duplex* s'il en possède deux, *triplex* s'il en possède trois, et ainsi de suite. En général, un canon a plus de régularité qu'une fugue (par exemple, un canon peut consister en une répétition périodique d'une seule ligne mélodique), ce qui fait qu'un canon est en général moins complexe qu'une fugue. Il y a dans un canon une idée de *développement perpétuel*, ainsi qu'une idée de *musique automatique*. Dans une fugue, il y a en général une plus grande complexité dans

---

6. Au niveau des fréquences, la transposition correspond à une translation, pourvu que l'on choisisse une échelle de mesure logarithmique.

7. Ce genre de considérations a été développé en particulier par Milton BABBITT, compositeur qui a été aussi professeur de mathématiques et professeur de musicologie à l'université de Princeton.

la combinaison des lignes, une dimension de liberté, un *développement*, que l'on ne trouve pas dans un canon.

Il est intéressant mentionner, en parlant de canon, un point de notation musicale qui est propre à ce type de musique, qui est la notation que l'on appelle *énigmatique*. Dans ce type de notation, le compositeur indique de façon concise les différentes symétries qui sont utilisées dans la pièce. Il écrit le motif mélodique de base, et puis, grâce à un système de notations sybillines (parfois propre au compositeur lui-même), il indique à l'interprète la séquence des lignes mélodiques qui doivent être obtenues à partir de ce motif de base, leurs combinaisons, l'ordre dans lequel elles doivent être exécutées, etc. Par exemple, une clé de sol à la fin de la ligne mélodique, écrite à l'envers (symétrie par rapport à une ligne verticale) indique que l'on doit jouer une imitation en mouvement rétrograde. Un signe spécial indique l'endroit où cette imitation doit commencer. Un canon écrit en notation énigmatique s'appelle *canon énigmatique*. Une partition complète écrite à partir d'un canon en notation énigmatique s'appelle une *solution* du canon. Parfois, certains signes manquent (l'exécutant est censé les trouver tout seul), et le canon est encore plus "énigmatique". Il est bien connu que certains canons énigmatiques posent de vrais problèmes mathématiques pour leur solution, et certains admettent plusieurs solutions. La notation énigmatique date du moyen-âge, et BACH l'a utilisé couramment, peut-être dans le but d'économiser du papier (on sait que c'était l'une de ses préoccupations), mais plus probablement pour son amour des idées abstraites que ces énigmes présentent.

Notons à ce propos que le règlement de la société Mizler demandait à chaque nouveau membre de fournir une peinture à l'huile représentant son portrait, avec un signe distinctif. On sait que BACH a donné un portrait peint par Elias Gottlieb HAUSSMANN, qui le représente en buste, tenant une partition de son canon triplex à six voix BWV 1076, qui est un canon énigmatique<sup>8</sup>.

### Le contrepoint dans la musique de BACH

BACH a utilisé les techniques du contrepoint dans presque toutes ses pièces, et on considère qu'il a atteint le sommet de la perfection dans cet art. On pense bien sûr aux pièces instrumentales intitulées *canons* ou *fugues*, mais il y a aussi le contrepoint des cantates, passions, oratorios, concertos, etc. Il est bien connu que l'interprétation des fugues de BACH exige en général, de la part de l'exécutant, une parfaite maîtrise de l'instrument, et parfois un degré de virtuosité extrême. On pense en particulier aux 48 fugues des deux volumes du *Clavecin bien tempéré*, à la fugue BWV 547 pour 5 voix pour orgue, aux fugues dont la polyphonie est très complexe, écrites pour des instruments *a priori* monodiques, comme les fugues des trois sonates pour violon solo, etc. Il est inutile de dresser ici une liste complète des canons et fugues de BACH, et on va plutôt dire quelques mots sur certaines pièces qui contiennent une collection importante de fugues ou de canons, pièces qui, en plus de leur intérêt du point de vue strictement contrapuntique, possèdent des structures mathématiques qui ont un caractère global.

---

8. Il semble que ce portrait, ainsi qu'une copie ultérieure réalisée par HAUSSMANN lui-même, soient les seuls, parmi ceux qui nous sont parvenus, dont l'origine est certaine.

Un ensemble de fugues bien connu est celui des deux cahiers de préludes et fugues du *Clavecin bien tempéré*. Chaque volume contient 24 préludes et fugues, écrits suivant une progression rigoureuse dans l'ordre tonal chromatique.

Les *Variations Goldberg* contiennent un ensemble important de canons. Cette pièce consiste en 30 variations sur une *Aria*. Chaque variation dont le nombre est un multiple de trois est un canon. Cette suite de canons possède une propriété linéaire dans ce que l'on appelle les *intervalles canoniques*<sup>9</sup>. Le premier de ces neuf canons est à l'unisson, le second à la seconde, le troisième à la tierce, et ainsi de suite jusqu'au neuvième, à la neuvième. Tous les canons ont des mètres différents à l'exception du 3<sup>e</sup> et du 9<sup>e</sup> (symétriques par rapport au milieu de la pièce), qui sont tous les deux en 4:4. Une autre propriété "mathématique" des *Variations Goldberg* est dans la longueur des pièces. Il y a en tout 32 parties: l'*Aria* du début, les 30 variations, et l'*Aria* reprise à la fin. La longueur de l'*Aria* est de 32 mesures. La longueur de chaque variation est aussi de 32 mesures, exceptées les variations 3, 9, 21 et 30, qui font 16 mesures chacune, ainsi que la variation 16, qui est au milieu de la pièce, qui en fait 48.

Il est intéressant de noter ici qu'un exemplaire de l'édition originale des *Variations Goldberg* a été trouvé par hasard en 1975 dans une bibliothèque privée à Strasbourg, copie ayant probablement appartenu à J. S. BACH lui-même, et qui contient, en dernière page, écrits de la main propre de BACH, 14 nouveaux canons (de nouveau le nombre fétiche 14). Ces canons sont tous en notation énigmatique, et ils sont basés sur les huit premières notes de la basse de l'*Aria* des *Variations Goldberg*. Deux de ces canons étaient déjà connus (l'un d'eux est le canon BWV 1076 du portrait de HAUSSMANN mentionné ci-dessus).

D'autres compositions de BACH, qui sont très importantes du point de vue contrapuntique, sont les pièces que l'on a mentionnées en relation avec la Société Mizler; ce sont les *Variations canoniques*, l'*Art de la fugue* et l'*Offrande musicale*. On va parler ici de l'*Offrande musicale*. On reviendra sur l'*Art de la fugue* à la fin de l'article.

Dans l'*Offrande musicale*, le canon 1 (canon à l'écrevisse) constitue un exemple spectaculaire de l'usage de la symétrie par BACH. Ce canon admet une symétrie complète. La pièce est à deux voix (elle peut être jouée par exemple par deux violons, ou par un violon et une flûte, ou encore par un clavecin<sup>10</sup>). BACH a donné la partition de ce canon (comme la plupart de ceux de l'*Offrande*) sous forme énigmatique. Il a écrit la première voix, et puis, a indiqué par un signe que la deuxième voix doit être

9. Il s'agit de l'intervalle musical qui sépare le sujet de son imitation. On dit que le canon est à l'unisson si l'imitation est sur le même degré que le sujet, à la seconde si elle en est séparée par un intervalle de seconde, à la tierce l'intervalle est une tierce, etc.

10. Notons que pour certaines pièces comme celle-ci, BACH n'a pas donné d'indication quant à l'instrument qui doit la jouer, et cela renforce l'idée que BACH s'intéressait plus à la structure de la musique qu'il écrivait qu'au timbre. La question du choix de l'instrument paraissait secondaire pour lui. Rappelons que cette pièce a été présentée à la Société Mizler comme une *musique théorique*. Signalons enfin qu'il y a eu plusieurs arrangements différents de l'*Offrande musicale* pour instruments divers (duo, quatuor à cordes, orchestre de chambre, etc.) L'idée d'écrire des arrangements de pièces de BACH trouve sa motivation dans le fait que BACH lui-même a écrit divers arrangements pour clavier de concertos de VIVALDI, TELEMANN et d'autres.

le symétrique complet (symétrie verticale) de la première. Ainsi, si la pièce est jouée en sens rétrograde (c'est-à-dire en commençant par la fin, et en lisant les notes dans l'ordre inverse), le résultat musical est le même (si les deux voix sont jouées par le même instrument, par exemple deux violons). Il faut mentionner ici que la pièce est longue de 18 mesures, et que par conséquent il est impossible de se rendre compte de cette symétrie par le seul fait d'écouter la pièce. Il n'y donc pas de contenu musical à cette symétrie. C'est une symétrie abstraite, qui est là uniquement pour l'amour que BACH portait pour les structures symétriques.

Dans le canon 3 (*Canon per Motum Contrarium*), l'une des voix est le symétrique complet, par rapport à une ligne horizontale, d'une autre voix, translaté horizontalement de deux temps.

Dans le canon 4 (*Canon per Augmentationem, contrario Motu*), la voix supérieure est, du point de vue des durées, une dilatation par un facteur deux de la voix la plus basse. BACH aimait certainement ce genre d'astuce, et sur le manuscrit de la pièce qu'il a envoyée au roi de Prusse FRÉDÉRIC II (qui était le dédicataire de la pièce), il écrivit, en guise de dédicace : «Que la fortune du roi croisse avec les notes».

On trouve un nouveau type de structure linéaire dans le canon 5 (*Canon per Tonos*), dans lequel la modulation augmente de façon rigoureuse par tons entiers (Do min, ré min, mi min, fa $\sharp$  min, sol $\sharp$  min, si $\flat$  min, do min). Ici, BACH écrivit comme dédicace : «Que la gloire du roi augmente avec la modulation».

On pourrait continuer à trouver des structures mathématiques dans tous les canons de l'*Offrande Musicale*. Signalons que BACH a donné comme titre aux canons 9 et 10 *Quaerendo invenietis* (vous trouverez en cherchant).



Le canon triplex à 6 voix BWV1076, en écriture énigmatique

FIGURE 1



La solution (écriture complète) du canon BWV1076

FIGURE 2

### 3 BACH et la numérologie

#### La numérologie et la gématrie

Pour des raisons souvent personnelles et parfois mystérieuses et difficiles à expliquer, certains nombres particuliers ont exercé (et exercent) une fascination chez certaines personnes, et ces personnes ont le sentiment que les nombres peuvent être dotés d'une signification, plus ou moins mystique, qui peut être révélée aux initiés. La numérologie est la science dont l'objet est la symbolique des nombres.

Même si l'étude de la symbolique des nombres n'est pas à proprement parler une branche des mathématiques, on ne peut nier le fait qu'elle soit reliée d'une manière ou d'une autre aux mathématiques. D'abord parce qu'elle fait intervenir des opérations sur des nombres (même si ces opérations sont très simples), et pour un non-mathématicien, il est peut-être plus facile de concevoir qu'une théorie qui est basée sur des considérations sur des nombres fasse partie des mathématiques que de réaliser que des notions plus abstraites telles que la symétrie, le hasard, le discret et le continu, etc. (qui interviennent également en musique) sont, autant que les nombres, à la base des mathématiques. Une autre raison pour laquelle la symbolique des nombres est reliée aux mathématiques est d'ordre historique. La naissance et les premiers développements des mathématiques, par exemple dans l'école pythagoricienne, ont été accompagnés d'un intérêt certain pour la symbolique des nombres. Les principaux traités de mathématiques de la Grèce antique qui nous sont parvenus contiennent tous des considérations de symbolique des nombres. Cela se répercute d'ailleurs dans certains mots techniques de l'arithmétique (*nombre parfait, nombre irrationnel, nombres amicaux*, etc.)

Un sujet qui est très proche de la numérologie est la *gématrie* (ou *gematria*). C'est un ensemble de techniques par lesquelles on associe un nombre entier à chaque lettre de l'alphabet. Cela permet de donner un nouveau sens à un texte, grâce à certaines manipulations arithmétiques, par exemple en remplaçant certains mots par d'autres mots qui ont la même valeur numérique.

Il y a diverses manières d'associer des nombres aux lettres de l'alphabet. La règle la plus simple consiste à donner à chaque lettre son numéro dans l'ordre alphabétique, mais d'autres règles ont été aussi utilisées, certaines faisant intervenir la suite des carrés des nombres entiers, ou bien la suite des nombres premiers, ou encore la suite de FIBONACCI, etc.

La gématrie peut être considérée comme faisant partie de la numérolgie. Par sa nature même, c'est une science occulte (comme d'ailleurs la numérolgie), parce que ses méthodes (même si elles sont en général très naïves) restent cachées. Notons que la gématrie a été utilisée dans la littérature latine, comme un procédé de rhétorique, pour renforcer l'intérêt dans un discours, en donnant l'impression qu'il contient un sens caché. Il est bien connu aussi que cette science a été utilisée couramment au moyen-âge par les cabbalistes juifs, comme méthode d'exégèse, pour proposer de nouvelles interprétations à des textes sacrés (en particulier, aux textes qui sont peu clairs).

La numérolgie et la gématrie étaient en vogue en Allemagne à l'époque de BACH. On peut donner plusieurs explications à cela. D'un côté, le XVIII<sup>e</sup> siècle allemand connaissait un regain d'intérêt pour la littérature classique grecque et latine, et d'un autre côté, on sait que certaines traditions ésotériques, comme la franc-maçonnerie, la théosophie, ou la fraternité des Rose-croix étaient très présentes dans la société allemande du XVIII<sup>e</sup> siècle, et l'usage de symbolismes comme ceux de la numérolgie était assez courant dans ces traditions<sup>11</sup>.

Diverses études ont été faites sur la numérolgie et la gématrie dans la composition musicale, et même si nous nous intéressons ici en particulier à BACH, il est bon de mentionner que BEETHOVEN, MOZART, BARTOK, SCHÖNBERG et beaucoup d'autres compositeurs étaient fascinés par les nombres et ont pratiqué la numérolgie. Chacun d'eux avait sa collection de "nombres fétiches", et il existe des analyses musicales de leurs oeuvres qui tiennent compte de ce fait. Le travail le plus complet sur la numérolgie chez BACH est certainement celui de van HOUTEN et KASBERGEN [4] auquel nous avons emprunté nos exemples ci-dessous. Sur BEETHOVEN et MOZART, on renvoie à [3]. Signalons au passage deux très bonnes biographies de BACH, [1] et [2].

### **BACH et la numérolgie**

Nous avons déjà mentionné le fait que BACH était intéressé par la numérolgie, et que ceux qui ont étudié la question pensent que dans sa musique, il a utilisé intentionnellement, et de façon systématique, certains nombres comme 14, 41, 48, 158, etc. On ne peut rien affirmer de façon certaine à cet égard, car on n'a aucun témoignage direct de BACH (ce qui par ailleurs est normal, car la plupart de ceux qui ont pratiqué la numérolgie sont restés secrets à ce sujet). Mais le nombre d'exemples qui concordent est troublant. De plus, on sait qu'un cousin de BACH, Johann Gottfried WALTHER, qui était aussi un de ses meilleurs amis, a écrit un livre sur l'usage de la symbolique des nombres en musique.

Il est inutile de tenter de dresser une liste complète d'occurrences numérolgiques

---

11. Par exemple, il est généralement admis que BACH faisait partie de la fraternité des Rose-croix et que MOZART et HAENDEL étaient francs-maçons.

chez BACH. Mentionnons toutefois deux exemples. D'abord celui du choral *Das alte Jahr vergangen ist* (*Orgelbüchlein* 16). Cette pièce est longue de 12 mesures (le nombre de mois dans l'année), et contient 365 notes (le nombre de jours). Un autre exemple est celui du prélude *Dies Sind die heil'gen zehn Gebot'* (*Clavierübung III*), dans lequel il y a 10 entrées du thème, symbolisant les 10 commandements. Ces exemples, ainsi que plusieurs autres, sont discutés dans [4].

En ce qui concerne la gématrie, plusieurs études ont montré que BACH avait l'habitude d'inclure sa signature, sous une forme apocryphe, dans ses œuvres, en utilisant des nombres qui représentent la suite de lettres qui forment son nom. Nous avons déjà mentionné que 14 était un tel nombre, puisqu'il peut être obtenu en ajoutant la valeur numérique des lettres du mot BACH :  $2+1+3+8=14$ . D'autres nombres que BACH a utilisé couramment sont  $41=9+18+2+1+3+8=JSBACH$ ,  $158=JOHANN SEBASTIAN BACH$ , et ainsi de suite<sup>12</sup>.

Par exemple, le nombre total de notes dans le Prélude et fugue N° 1 du premier livre du *Clavecin bien tempéré* est 1283, un nombre obtenu en juxtaposant les valeurs numériques des quatre lettres BACH. Le thème de la fugue en question est formé de 14 notes. Dans la suite de 14 mesures qui débute à la mesure 14 de cette fugue, le thème est exposé 14 fois.

Un autre exemple est celui des 15 inventions à trois voix (les *Sinfoniae*). Les longueurs de la première et de la dernière pièce sont respectivement de 21 et 38 mesures. Ainsi, ces 15 inventions sont comprises entre les 4 lettres du nom BACH. Le lecteur trouvera dans [4] une multitude d'exemples de ce type.

Terminons par quelques mots sur le contenu numérolgique de l'*Art de la fugue*. C'est une pièce qui est chargée de mystères, et elle est considérée, pour plusieurs raisons, comme le testament musical de BACH. De plus, BACH y atteint le sommet de la perfection dans l'art du contrepoint. Le manuscrit de l'*Art de la fugue* est incomplet, et il semble que BACH ait intentionnellement arrêté cette composition, sans jamais la terminer, un an avant sa mort. La pièce contient 14 fugues (BACH), plus la dernière, qui est inachevée. Il y a un thème commun aux 13 premières fugues, et un nouveau thème pour la quatorzième. Le nouveau thème comporte 41 notes (JSBACH). La dernière fugue contient 238 mesures qui sont complètes, et la dernière, qui est incomplète. (On a vu que les chiffres 2, 3, 8, 1 représentent aussi le nom BACH.) Cette dernière mesure, incomplète, contient 14 notes. La dernière fugue se termine sur un thème qui est basé sur les notes *si $\flat$  la do si $\flat$* , qui, en notation musicale allemande, correspond aux quatre lettres BACH<sup>13</sup>. Il y a une analyse complète de cette pièce dans la partie II de [4], dans laquelle les auteurs soutiennent que BACH y rappelle de manière symbolique divers épisodes de sa vie. D'après cette analyse, on lit successivement dans cette pièce l'année de la naissance de BACH (1685), l'année de la mort de son père (1695), l'année où il a quitté sa maison pour s'installer à Lüneburg (1700), l'année où il est entré à la cour de Weimar (1703), et ainsi de suite.

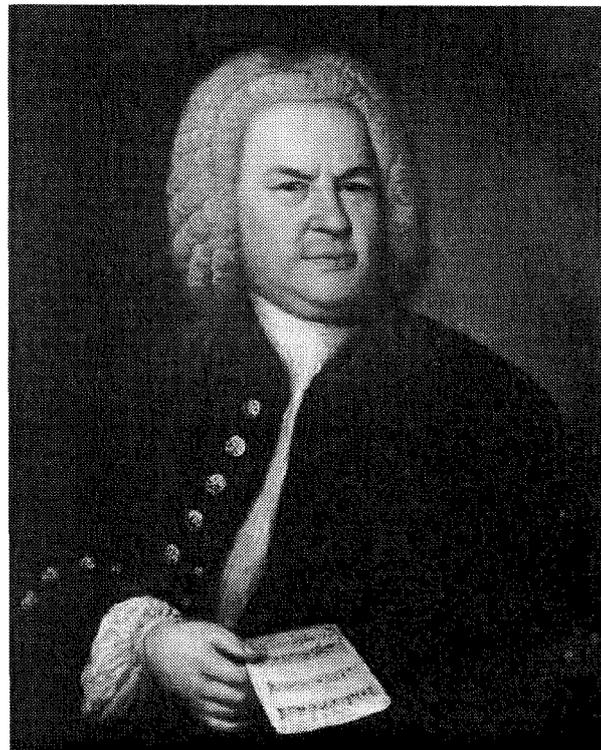
12. Notons que BACH utilisait l'alphabet latin. Cet alphabet comporte 24 lettres. Les lettres *i* et *j* y ont la même valeur numérique, et il en est de même pour *u* et *v*.

13. Notons que ce motif BACH apparaît à la fin de l'*Offrande Musicale*, des *Variations canoniques* et de l'*Art de la fugue*, les trois pièces présentées à la Société Mizler.

L'*Art de la fugue* est le testament musical de BACH, mais ce n'est pas la dernière pièce qu'il a composée. Sur son lit de mort, et alors qu'il était devenu complètement aveugle, BACH dicta son choral *Devant Ton trône j'avance* ("Vor deinen Thron tret'ich"), un autre chef d'œuvre en matière de contrepoint, dans lequel le thème fait 14 notes. Ce fut sa dernière signature.

## Bibliographie

- [1] A. BASSO, *Frau Musika. La vita e le opere di J. S. Bach*, éd. EDT, Torino, 2 volumes, 1979-1983. Trad. Française Fayard, 1984-85.
- [2] R. de CANDÉ, *Jean-Sébastien Bach*, éd. Seuil, 1984.
- [3] I. GRATTAN-GUINNESS, *Mozart 18, Beethoven 32: hidden shadows of integers in classical music* in *History of mathematics. States of the art. Studies in honor of Christoph J. Scriba* (Joseph W. DAUBEN, Menso FOLKERTS, Eberhard KNOBLOCH and Hans WUSSING), éd. Academic Press (1996) p. 29-47.
- [4] K. van HOUTEN et M. KASBERGEN, *Bach et le Nombre*, éd. Pierre Mardaga, Liège, 1992.
- [5] R.C. READ, Combinatorial problems in the theory of music, *Discrete Math.* 167/168 (1997) p. 543-551.



Portrait de Bach par Haussmann, avec dans la main le canon énigmatique BWV1076 (BWV1087 à partir de 1972)

FIGURE 3