
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

n° 98 MARS 2000

I.S.S.N. 0290 - 0068

J. Ehrhart



*EE
1959*



*EE
1959*



NOTRE COUVERTURE :

Vous y voyez une photographie de Monsieur Eugène EHRHART ainsi qu'un portrait de lui, fait par lui-même. Mathématicien strasbourgeois, décédé le 17 janvier 2000 à Strasbourg, nous lui rendons hommage dans un article que vous trouverez en page 52.

ANNÉE MONDIALE MATHÉMATIQUE 2000

Le contexte

C'est à Rio de Janeiro, en mai 1992, que l'Union Mathématique Internationale a désigné l'année 2000 comme année mondiale des mathématiques (AMM 2000, ou WMY 2000 selon la terminologie en anglais : World Mathematical Year 2000).

Trois objectifs principaux s'affichent dans la déclaration de Rio :

- les grands défis du XXIème siècle,
- les mathématiques, clé du développement,
- l'image des mathématiques.

L'UNESCO, dans une résolution de novembre 1997, a décidé d'apporter son soutien aux manifestations internationales liées à "WMY 2000". En traduction française, voici les points essentiels de cette résolution.

"Considérant l'importance centrale des mathématiques et de leurs applications dans le monde d'aujourd'hui pour la science, la technologie, les communications, l'économie et de nombreux autres champs,

Consciente de ce que les mathématiques ont des racines profondes dans beaucoup de cultures et de ce que les plus éminents penseurs de plusieurs millénaires ont significativement contribué à leur développement,

Consciente de l'universalité qui caractérise la langue et les valeurs des mathématiques, concourant ainsi à une coopération internationale pour laquelle elles les façonnent idéalement,

Soulignant le rôle clé que remplit l'enseignement mathématique, notamment aux niveaux des premier et second degrés, à la fois pour la compréhension des concepts mathématiques fondamentaux et pour le développement de la pensée rationnelle,

Accueille l'initiative de l'Union Mathématique Internationale de déclarer l'an 2000 année mondiale des mathématiques et de susciter, dans ce cadre, des activités de promotion, à travers le monde, des mathématiques à tous les niveaux ..."

Des adresses URL de sites à consulter

C'est un site installé à Paris (Jussieu) qui regroupe et présente en anglais l'ensemble des informations concernant l'année mathématique 2000. Sa galerie d'affiches notamment, "à la rubrique EMS-Gallery", mérite de retenir l'attention. On y trouve des merveilles, telles les affiches qui ont été créées pour le métro de Montréal : l'une d'elles s'appuie sur une photo de fleur de tournesol, pour attirer l'attention sur les dessins de spirales que les graines font apparaître. Pour ceux qui voudront une explication détaillée du phénomène, le bon réflexe est de se dire que la question a dû être traitée dans "L'Ouvert" ; et en effet, un article du n° 18 de 1979 la présente très complètement : *Quelques problèmes posés par la phyllotaxie*, par François STOLTZ. L'adresse URL du site de WMY 2000, pour lequel un lien permet de s'y rendre depuis le site de l'IREM (<http://irem.u-strasbg.fr> pour mémoire), est :

<http://wmy2000.math.jussieu.fr/ma2000.html>

En français, une introduction est prévue à l'adresse :

<http://acm.emath.fr/amm/>

Ce site fait lui-même partie de l'anneau mathématique francophone (AMF), créé en 1998 par Stéphane Cordier, choisi pour indexer les sites d'intérêt mathématique en France dans le cadre de l'année mathématiques 2000.

Un besoin important d'engagements personnels des professeurs enseignant les mathématiques

Ce qui précède pourrait conduire à penser que l'année mathématique 2000 est une opération programmée de longue date, qui se déroule aujourd'hui d'elle-même, sans nécessiter beaucoup d'apports. Mais tel n'est pas le cas et, au contraire, le bilan qui pourra être dressé au terme de l'année 2000 sera largement tributaire des relais qui auront existé. Or, il faut bien le dire pour le monde de l'enseignement mathématique aujourd'hui, les problèmes du quotidien (vie de l'établissement, états d'esprit utilitaires - dans une lettre à Claudine Robert, Gérard Kuntz parle de *courant consumériste* - parmi les élèves et étudiants, horaires et programmes...) retiennent sensiblement l'attention. De tels aspects contingents risquent de constituer une entrave à une mobilisation suffisante des collègues enseignant les mathématiques, en dépit de toutes leurs qualités professionnelles et de leur engagement, traditionnel dans notre académie.

Des initiatives mettent heureusement en lumière des possibilités intéressantes. Dans un certain nombre d'établissements, des projets d'animation, d'exposition sont actuellement en route. Une manière simple de se joindre au mouvement et d'inciter des élèves à présenter, sous forme d'affiches, l'un ou l'autre des sujets que l'on trouve sur le site de l'IREM, dans la rubrique "Année 2000 - Documents à exploiter". Le choix d'une variante d'énoncés, l'illustration pour susciter la curiosité ou pour faire ressortir des aspects esthétiques par exemple, conduisent à une réflexion en définitive bien plus mathématique que ce que l'on imagine a priori. Les meilleures réalisations seront retenues pour être intégrées à une exposition qui sera présentée au moment de la remise des prix du Rallye Mathématique de cette année 2000.

L'encouragement des élèves à se rendre à telle ou telle manifestation qui pourra les intéresser, alors qu'ils n'y auraient pas songé de prime abord, est une autre initiative dans le même sens. En janvier par exemple, le Jardin des Sciences de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg a consacré à des sujets mathématiques un cycle de quatre conférences ouvertes au grand public (les jeudis à 18 heures à l'Institut de Physique, rue de l'Université). Ce fut très sympathique d'y voir des lycéens et l'on peut être sûr qu'ils n'y ont pas perdu leur temps. Un cycle concernant l'astronomie, avec notamment des problèmes très mathématiques de calendriers dont parlera Jean Lefort, aura lieu prochainement dans le même cadre. Comme le disait autrefois le tambour de ville : "Qu'on se le dise !". Et, dans l'académie, Strasbourg n'est pas la seule ville où auront lieu au courant de l'année des événements analogues : c'est ainsi que sont prévues à Colmar (par exemple autour de W. Schickhard en mars) et à Mulhouse des conférences, des manifestations ; certaines trouveront un cadre de choix cet automne avec la semaine de la science.

Enfin, le soutien à une pratique péri-scolaire des mathématiques fait partie des initiatives qui seront particulièrement indiquées en cette année 2000 : plus haut, il a été question du Rallye mathématique, mais il convient de citer aussi "Mathématiques sans Frontières" et "Maths en Jeans", en se limitant à des activités "hébergées" par l'Education Nationale. En effet, presque toutes ces manifestations auront un caractère particulier cette année, ne pouvant que renforcer auprès des élèves l'image déjà extrêmement positive de l'activité mathématique. Dans une situation scolaire tendant à donner une très (trop parfois, mais ceci est une autre histoire) grande importance aux travaux personnels, de telles animations sont davantage que de simples à coté.

F. PLUVINAGE

SOMMAIRE

N° 98 – MARS 2000

◇ <i>Notre couverture</i> : <i>E. Ehrhart</i>	i
◇ <i>Editorial : Année mondiale mathématique 2000</i> par F. PLUVINAGE	ii
◇ <i>Sur la géométrie élémentaire du triangle dans le plan complexe</i> par Jos. E. HOFMANN	1
◇ <i>Nombres Complexes et Géométrie</i> par L. NIVELLE	2
◇ <i>Calcul Formel ou Calcul Numérique ?</i> par J. THOMANN	23
◇ <i>Hommage à Eugène EHRHART</i>	51
◇ <i>Le polynôme d'EHRHART</i> par T. DELZANT	52
◇ <i>A vos stylos</i> par D. DUMONT	60

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
- ◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
- ◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 03-88-41-64-40
Fax : 03-88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
<http://irma.u-strasbg.fr/irem>
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.
- ◇ *Prix du numéro* : 35.- F

SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DU TRIANGLE DANS LE PLAN COMPLEXE

par Jos. E. HOFMANN (Ichenhausen)

Sur proposition de Jacques BOROWCZYK, professeur de mathématiques à l'IUFM d'Orléans-Tours, nous publions la traduction française d'un article paru en 1958 dans la revue internationale *L'enseignement Mathématique* tome IV p. 178-211, sous le titre Zur elementaren Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene.

Plusieurs raisons nous ont conduit à publier cette traduction :

- L'article en question est très souvent cité dans diverses revues de mathématiques, particulièrement le *Bulletin Vert* de l'APMEP. Or de moins en moins de lecteurs de ces revues lisent l'allemand, il peut être utile de mettre à leur disposition une version française.
- Cet article ouvre sur une pratique de la géométrie dans le plan complexe qui, si elle est bien connue sur le plan de ses principes théoriques, est rarement poussée aussi loin dans ses applications. Les étudiants de CAPES et d'agrégation y trouveront une mine d'idées et d'exercices pour la préparation de leurs concours.
- C'est aussi pour la revue L'OUVERT une manière de célébrer le récent centième anniversaire de la première parution d'un « confrère » apprécié dans le monde entier *L'enseignement Mathématique* dont le premier numéro a été publié en 1899 sous la direction ou le patronage de mathématiciens tels FEHR et LAISANT (directeurs) et POINCARÉ, PICARD, etc.

Quelques mots sur l'auteur Jos. E. HOFMANN (1900-1973) qui n'est nullement un inconnu pour les historiens des mathématiques. Son article présente d'ailleurs cette originalité que tous les théorèmes étudiés sont annotés par des références historiques précises et multiples, renvoyant les théorèmes classiques de la géométrie du triangle à leurs véritables auteurs.

Joseph Ehrenfried HOFMANN est surtout connu pour ses travaux sur l'invention et le développement du calcul infinitésimal, particulièrement dans l'étude des travaux de LEIBNIZ et BERNOULLI. Les deux textes : Die Entwicklungsgeschichte der leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672-1676) et Leibniz in Paris sont bien connus.

La présente traduction a été assurée par Lisiane NIVELLE, dans le cadre du module M19 de professionnalisation de la maîtrise de mathématiques (mention Ingénierie mathématique) de l'université de Tours. La traduction a été revue par Mme Colette BLOCH (IREM de Poitiers), nous la remercions vivement.

Les figures ont dû être reprises : ce travail a été assuré par Bruno BERNARDOFF, notre nouveau collaborateur à L'OUVERT, dont nous apprécions la performance technique.

SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DU TRIANGLE DANS LE PLAN COMPLEXE

par Jos. E. HOFMANN (Ichenhausen)

Quelques questions de géométrie élémentaire du triangle se traitent de façon particulièrement simple sous forme vectorielle si le centre du cercle circonscrit au triangle est employé comme point de référence. Prenons le rayon du cercle circonscrit comme unité, alors les vecteurs a, b, c désignant également les sommets du triangle sont des vecteurs unité, que nous écrivons de façon appropriée à l'aide de nombres complexes. Si on représente un point du cercle unité par le nombre complexe ζ alors on note $\bar{\zeta}$ son symétrique par rapport à l'axe réel. Les exemples qui suivent montrent comment on peut utiliser de façon simple et efficace l'interprétation vectorielle et la relation $\bar{\bar{\zeta}} = \frac{1}{\zeta}$.

1. Au sujet de l'orthocentre, du cercle d'Euler* et problèmes apparentés.

(1,1) Soient a, b, c les vecteurs désignant les sommets d'un triangle inscrit dans le cercle unité (fig. 1). Alors $(a + b)$ est le symétrique du centre O du cercle circonscrit par rapport à la corde $[ab]$; ainsi le vecteur $(a + b)$ est perpendiculaire à cette corde. Complétons à présent le parallélogramme de sommets $(a + b), c$ et O avec le point donné par le vecteur $a + b + c = d$ qui se trouve sur la diagonale issue de O du parallélogramme. Par conséquent, la droite (cd) se trouve être la hauteur du triangle issue de c coupant la droite (ab) . Puisque l'addition vectorielle est commutative et associative, d se trouve être aussi sur les hauteurs issues de a et coupant (bc) et de b coupant (ca) . Cela montre que les trois

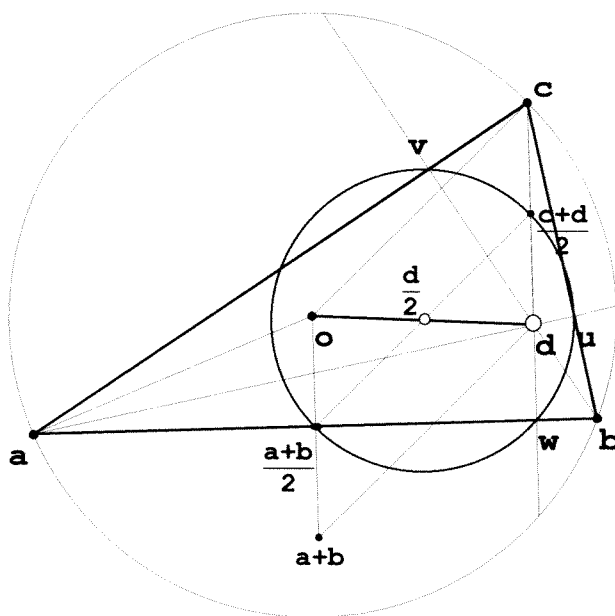


FIGURE 1

Cercle circonscrit, orthocentre et cercle d'Euler

* N.D.T. : Outre-Rhin, le cercle d'Euler est appelé *cercle de Feuerbach*, en hommage à FEUERBACH qui a démontré, en 1822, que ce cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits du triangle abc . Cf. A. GRAMAIN : *Géométrie élémentaire* – HERMANN.

hauteurs du triangle se coupent en *un* point, à savoir l'orthocentre $d = a + b + c$. Si nous faisons un instant, abstraction du cercle circonscrit, les quatre points a, b, c, d jouent exactement le même rôle : chacun d'eux est un orthocentre du triangle déterminé par les trois autres points. Nous parlons de manière appropriée de *quatre points orthogonalement liés* ou de *quadrangle orthocentrique*.

(1,2) À présent, soit $\frac{a+b}{2}$ le milieu de la corde $[ab]$ et du segment $[O, a+b]$. La droite passant par $\frac{a+b}{2}$ de vecteur directeur c rencontre $[cd]$, la section d'une hauteur, en son milieu $\frac{c+d}{2}$, et $\frac{d}{2}$ est le centre du parallélogramme déterminé par $O, a+b, d, c$. Par suite, le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré en $\frac{d}{2}$, le milieu du segment $[Od]$, passe par les milieux $\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}$ des côtés du triangle abc , par les milieux $\frac{a+d}{2}, \frac{b+d}{2}, \frac{c+d}{2}$ des « parties supérieures des hauteurs » (c'est-à-dire les segments d'extrémités d et respectivement a, b, c), et par les pieds des hauteurs u, v, w du triangle ; on l'appelle cercle d'EULER du triangle abc ¹. Autrement dit :

Soient les quatre points a, b, c, d orthogonalement liés, alors les quatre triangles déterminés par trois de ces points ont le même cercle d'EULER. Celui-ci passe d'une part par les six milieux des côtés de chaque quadrilatère complet formé par ces points, d'autre part par les pieds des hauteurs des triangles.

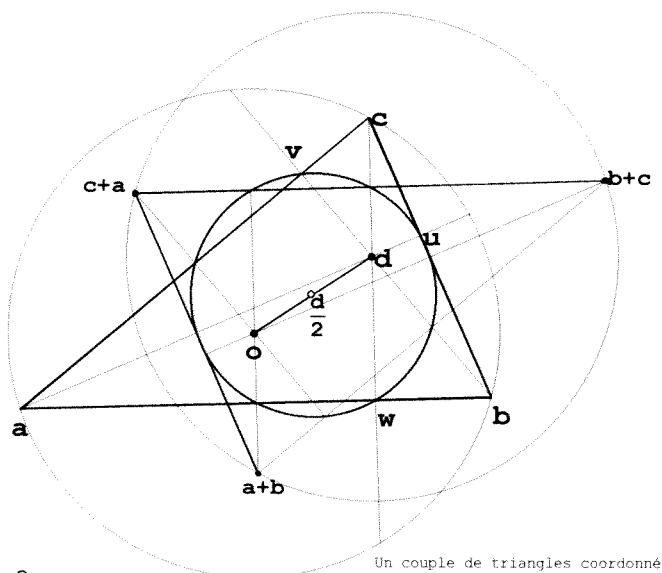


FIGURE 2

(1,3) Ajoutons encore aux sommets a, b, c, d de la fig. 1 les points $(b+c), (c+a), (a+b)$ (fig. 2), alors ces points se trouvent sur le cercle unité centré en d . Ce sont les sommets d'un nouveau triangle qui est le symétrique par rapport à $\frac{d}{2}$ du triangle abc précédent et dont O est l'orthocentre. Ainsi, les points $O, (b+c), (c+a), (a+b)$ sont liés orthogonalement ; les milieux des côtés du triangle abc

¹ K. W. FEUERBACH : *Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmter Linien und Figuren*. Nüremberg, 1822. Pour en savoir plus, cf. J. S. MACKAY : *Proceedings Edinburgh Math. Soc.* 11, 1893, p. 19 et suivantes, et J. LANGE : *Geschichte des Feuerbachschen Kreises*, programme de Berlin, 1894 ; et également M. SIMON : *Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jb.*, compte rendu annuel de la Fédération des Mathématiciens allemands, supplément I, Leipzig, 1906, p. 124-130, et M. ZACCHARIAS dans l'*Encyklopädie der math. Wiss.*, III AB 9, Leipzig, 1914.

sont les milieux des parties supérieures des hauteurs du triangle $(b + c, c + a, a + b)$ et réciproquement. Nous avons alors huit triangles qui admettent le même cercle d'EULER passant par douze points particuliers. La droite passant par les centres O et d des deux cercles congruents est la droite d'EULER² des deux triangles. Les centres de gravité $\frac{d}{3}$ du triangle d'origine et $\frac{2d}{3}$ du triangle associé sont aussi situés sur cette droite.

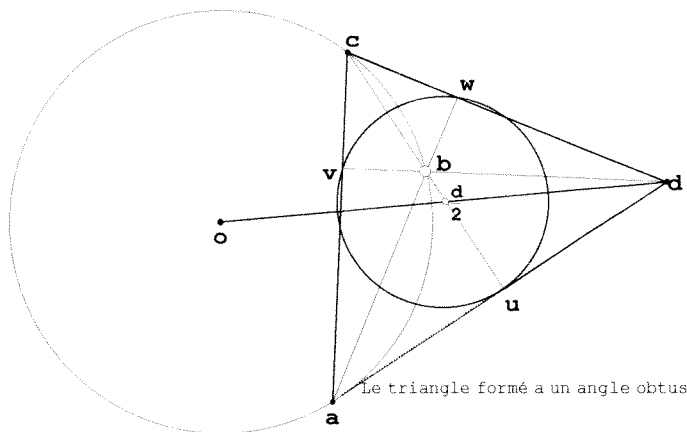


FIGURE 3

(1,4) Si deux des cinq points $O, \frac{d}{3}, \frac{d}{2}, \frac{2d}{3}, d$ sont connus, alors on en déduit les autres. En outre, si nous connaissons aussi le rayon du cercle d'EULER ou d'un des deux cercles circonscrits, alors ces trois cercles nous sont connus avec leurs centres. À une réserve près, indiquée plus loin, il y a une infinité de triangles abc , qui sont inscrits dans le cercle centré en O et ont d pour orthocentre. Choisissons par exemple le sommet c sur le cercle centré en O , alors le sommet opposé $(a + b)$ est déterminé sur le cercle centré en d comme le symétrique de c par rapport à $\frac{d}{2}$. Les parallèles (cd) et $(O, a+b)$ rencontrent le cercle d'EULER aux sommets d'un rectangle, dont les autres côtés portent les autres sommets a, b (respectivement $(b+c), (c+a)$) des triangles associés.

Si le triangle abc est *acutangle*, d se trouve à l'intérieur du cercle circonscrit centré en O . Si le triangle est *rectangle*, d se trouve *sur* le cercle circonscrit. Dans ce cas, le cercle d'EULER et le cercle circonscrit de centre d sont tangents, et la longueur $|Od|$ est le diamètre du cercle d'EULER. Si le triangle abc a *un angle obtus*, d se trouve *hors du* cercle centré en O , mais de sorte que le cercle d'EULER *coupe* le cercle circonscrit. La figure 3 montre comment est alors la configuration.

(1,5) Comme les triangles bcd, cad, abd et abc engendrés par les points orthogonalement liés a, b, c, d ont le même cercle d'EULER, leurs cercles circonscrits sont *congruents*. Les centres de ces cercles circonscrits sont les points associés $(b + c), (c + a), (a + b), O$, qui, de leur côté, sont également orthogonalement liés et qui

² L. EULER : *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, novi commentarii Ac. sc. Petrop., 11 (1765), p. 103-123 et surtout 114 ; *Opera omnia*, XXVI, éd. Andr. Speiser, Zürich, 1953, p. 139-157 et surtout 149. Le traité fut présenté à l'Académie de Saint-Petersbourg le 21 déc. 1763 en style ancien.

forment quatre triangles dont les cercles circonscrits sont congruents comme les précédents et ont pour centres les points a, b, c, d . Les huit cercles ainsi engendrés se coupent toujours à trois en chacun des points orthogonalement liés de ces deux paires de quadruplets.

L'équivalence des quatre points orthogonalement liés a, b, c, d se montre particulièrement bien avec le principe du triangle de HOLZ³ :

Les trois vecteurs partant d'un sommet et allant vers les autres sommets peuvent toujours être joints, en ajoutant l'un de ces vecteurs au bout d'un des deux autres mais en sens inverse, pour former une ligne brisée en trois parties, inscrite dans le cercle unité et dont les extrémités sont diamétralement opposées sur ce cercle.

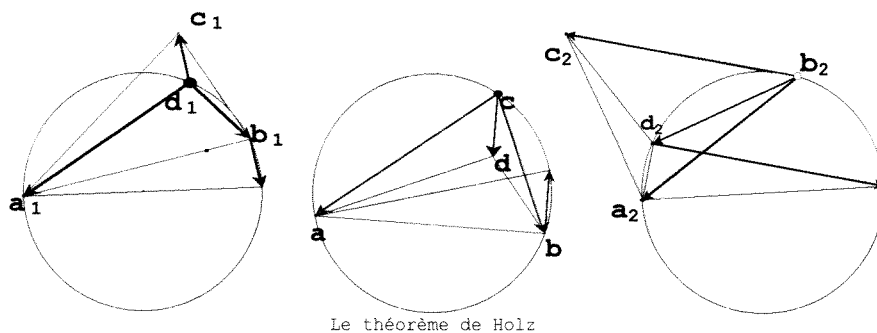


FIGURE 4

Si le quadruplet orthogonalement lié est déterminé à partir des longueurs des vecteurs, il en résulte une équation de degré 3 pour le diamètre du cercle dans lequel la ligne brisée peut être encastrée⁴. Cette équation a trois solutions réelles ; la disposition (leur ordre étant permutable) des vecteurs dans ces cercles est précisément illustrée de trois manières à la fig. 4⁵.

³ K. B. HOLZ : *Das ebene obere Dreieck*, Hagen i. W., 1944. Cf. aussi L. BIEBERBACH : *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Bâle, 1952, p. 114-115 et 156.

⁴ Le problème de l'encastrement est aujourd'hui cité de façon générale selon I. NEWTON : *Arithmetica universalis*, ch. XIII, 8^e/10^e conférence de 1675-76, éd. W. WHISTON, Cambridge, 1707, p. 97-113, ainsi par ex. chez H. DÖRRIE : *Mathematische Miniaturen*, Breslau, 1943, p. 31. Ce n'est pourtant pas tiré de NEWTON, mais de Fr. van SCHOOTEN : *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus...*, cui subnexa est appendix de cubicarum aequationum resolutione, Leiden, 1646, p. 102-108 et 111-117, réimprimé dans une forme corrigée dans R. DESCARTES : *Géométrie*, éd. Fr. van Schooten, I, Amsterdam, 1659, p. 354-359 et 361-367. Ceci a sans doute servi de modèle à Newton qui possédait cette édition de la *Géométrie*.

Fixons par ex. $|bc| = u, |ca| = v, |ab| = w$, alors l'équation cubique (déjà présente chez Schooten) s'écrit

$$x^3 = (u^2 + v^2 + w^2)x + 2uvw.$$

⁵ Ces trois cas se présentent aussi chez SCHOOTEN⁴ et NEWTON⁴. L'élégante résolution cinématique de BIEBERBACH³, p. 115-116, au moyen d'une feuille transparente et d'un compas s'avère aussi, à bien y regarder, être une variante de la résolution de SCHOOTEN. Ce travail se trouve en annexe à Fr. VIÈTE : *Supplementum geometriae*, Tours, 1593, réimprimé dans les *Opera*, éd. Fr. van Schooten, Leiden, 1646, à l'occasion d'une insertion en rapport avec la trisection de l'angle.

2. De l'égalité des arcs.

(2,1) Soient (ab) et (cd) deux cordes parallèles du cercle unité (fig. 5), alors les arcs de cercle entre ces parallèles ont la même mesure. Orientons-les dans le sens positif inverse des aiguilles d'une montre ; alors, avec les notations de la figure, on a $\frac{c}{b} = \frac{a}{d}$, donc

$$\boxed{ab = cd} .$$

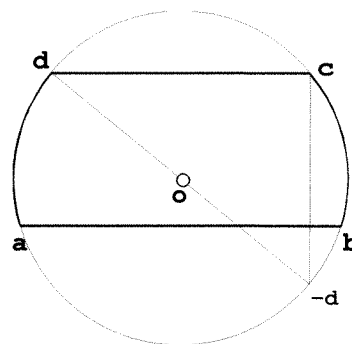


FIGURE 5

Abaissons par exemple la perpendiculaire issue de c à (ab) , elle rencontre le cercle en $-d = -\frac{ab}{c}$.

(2,2) Désormais, nous avons les points a, b, c sur le cercle unité (fig. 6) ; les hauteurs du triangle abc coupent le cercle, respectivement aux points $p = -\frac{bc}{a}, q = -\frac{ca}{b}, r = -\frac{ab}{c}$. Or on a par exemple

$\frac{c}{p} = -\frac{a}{b} = \frac{q}{c}$. Il en résulte que la droite (rv) est la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{prq} .

Par conséquent, les hauteurs du triangle abc sont les bissectrices intérieures des angles du triangle adjoint pqr , et l'orthocentre du triangle initial est en même temps le centre du cercle inscrit du

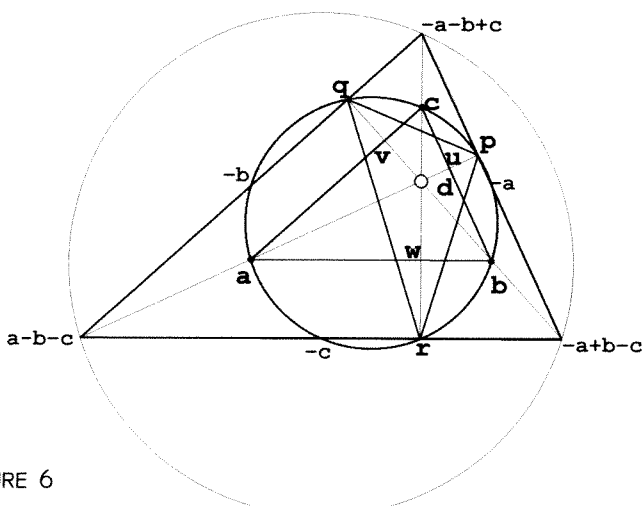


FIGURE 6

Triangle et triangle adjoint

nouveau triangle ⁶.

En outre, soit w (cf. (1,2)) le milieu du segment $[dr]$; ainsi $w = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{ab}{c} \right)$, etc., et $d - w = \frac{ab + cd}{2c}$, etc.

(2,3) À présent, construisons encore les points $(-a), (-b), (-c)$, symétriques respectifs par rapport à O des points a, b, c . Après cela, la droite $(-c,r)$ par exemple est la bissectrice extérieure de l'angle \widehat{prq} . Ajoutons aussi les autres bissectrices extérieures $(-a,p), (-b,q)$ du triangle en résulte, semblable au triangle abc par l'homothétie de centre d et de rapport 2. Maintenant, prenons par exemple le sommet $-a - b + c$ à la place de c ; alors, c est le milieu du segment $[-a - b + c, d]$. Le cercle initial est le cercle d'EULER de ce triangle agrandi, dont le cercle circonscrit est de rayon 2. Par ce moyen, nous sommes revenus d'une autre manière aux premiers résultats.

⁶ Cf. Ph. NAUDÉ dans les *Miscellanea Berolinensia* 5, 1737, p. 17, ou bien FEUERBACH ¹ : § 24.

Nous pouvons aussi exprimer les résultats sans fraction en remplaçant p par p^2 , q par q^2 et r par r^2 . Alors nous devons aussi remplacer a par $-qr$, b par $-rp$ et c par $-pq$ et nous obtenons le centre du cercle inscrit sous la forme $-(qr + rp + pq)$, les centres des cercles exinscrits sous la forme $(-qr + rp + pq)$, $(qr - rp + pq)$, $(qr + rp - pq)$.

3. À propos du coefficient directeur et de l'équation de droite.

(3,1) Soient les points a, b sur le cercle unité; traçons le diamètre parallèle à la corde $[ab]$, passant par le centre O du cercle, d'extrémités x et $-x$. Ainsi, on a $-x^2 = ab$. Le produit ab est appelé le *coefficient directeur* de la corde $[ab]$. Les cordes ayant le même coefficient directeur sont parallèles.

Comme exemple d'application, traitons le théorème de la droite de WALLACE⁷ :

Soient quatre points a, b, c, d sur le cercle unité, alors les perpendiculaires aux côtés (bc) , (ca) , (ab) du triangle abc passant par d rencontrent ces côtés respectivement aux points

$$u = \frac{1}{2} \left(b + c + d - \frac{bc}{d} \right), v = \frac{1}{2} \left(c + a + d - \frac{ca}{d} \right),$$

$$w = \frac{1}{2} \left(a + b + d - \frac{ab}{d} \right).$$

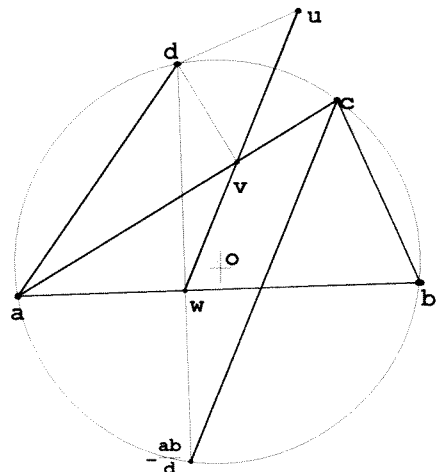
Nous affirmons :

Les points u, v, w sont situés sur une seule et même droite, la droite de WALLACE du triangle abc par rapport au point d appartenant au cercle circonscrit au triangle.

Par exemple, $amvd$ est un quadrilatère inscriptible mais non inscrit dans le cercle unité. Par suite,

$$\widehat{dav} = \widehat{dvw}$$

La parallèle à (vw) passant par c coupe la droite (dw) sous le même angle. Ce point d'intersection se trouve sur le cercle unité. Étant donné que (ab) et (dw) sont perpendiculaires, le point d'intersection est représenté par $-\frac{ab}{d}$. Le coefficient directeur de la droite (vw) est donc $-\frac{abc}{d}$. Ce terme est



Droite de Wallace

FIGURE 7

symétrique en a, b, c . C'est pourquoi les trois droites (vw) , (wu) , (uv) ont le même coefficient directeur; en conséquence, elles coïncident.

(3,2) Soient a, b deux points sur le pourtour du cercle unité et z un point qui n'est pas situé sur la droite (ab) (fig. 8). Ajoutons ensuite $(a + b)$ à a, O, b pour avoir un losange et plaçons s le symétrique de z par rapport à la diagonale $(O, a+b)$ du losange. Tandis que nous formons les vecteurs

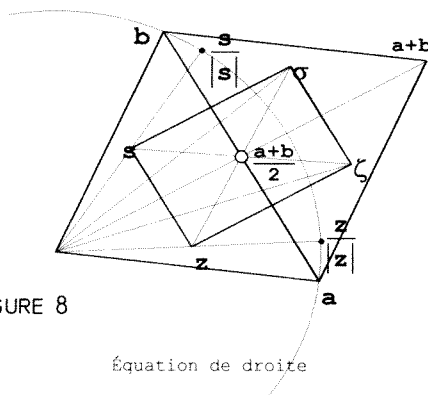


FIGURE 8

Équation de droite

⁷ W. WALLACE dans Th. LEYBOURNE : *Mathematical repository* (old series) 2, 1798, p. 111.

N.D.T. : Cette droite est plus couramment dite « de SIMSON » dans la littérature française.

unité $\frac{s}{|s|}$ et $\frac{\bar{z}}{|\bar{z}|}$, nous obtenons les points d'intersection des vecteurs s et \bar{z} (ou de leurs prolongements sur le cercle) avec le cercle unité. Le segment joignant les extrémités de ces vecteurs unité est parallèle à la corde $[ab]$; ainsi, on a

$$\frac{s}{|s|} \times \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|} = ab. \text{ Or, on a } |s| = |\bar{z}| ; \text{ par conséquent, } |s| \times |\bar{z}| = \bar{z}\bar{z} ; \text{ d'où } \boxed{s = ab\bar{z}} .$$

Maintenant, construisons le symétrique de \bar{z} par rapport au point $\frac{a+b}{2}$ milieu de la corde $[ab]$, qui est $\sigma = a + b - \bar{z}$ et le symétrique de s par rapport au même point, qui est $\boxed{\zeta = a + b - ab\bar{z}}$.

Donc f est en même temps le symétrique de \bar{z} par rapport à la corde $[ab]$. Le point \bar{z} est *sur* cette corde si et seulement si $\sigma = \bar{z}$.

Par suite, $\boxed{\bar{z} + ab\bar{z} = a + b}$ est l'équation de la droite (ab) . Le membre de gauche $\bar{z} + ab\bar{z}$ est appelé la *partie directrice* ; elle est déterminée précisément par le coefficient directeur. Le membre de droite est appelé le *terme constant*. Il est déterminé dans l'équation par la place des extrémités de la corde $[ab]$ (ou d'une manière plus générale : d'un point connu de la droite). Cela fournit – vu que nous pouvons remplacer \bar{z} aussi bien par a que par b – une vérification.

(3,3) Revenons à présent sur la droite de WALLACE (3,1). La partie directrice de son équation est $\bar{z} - \frac{abc}{d} \bar{z}$; on trouve le terme constant en faisant par exemple

$\bar{z} = u$. Nous obtenons après une transformation aisée

$$\boxed{\bar{z} - \frac{abc}{d} \bar{z} = \frac{1}{2} \left[(a + b + c + d) - \frac{abc}{d} (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}) \right]}$$

Cette équation est symétrique en a, b, c ; c'est pourquoi la droite qu'elle représente passe non seulement par u , mais aussi par v et w . Naturellement, cela se vérifie aussi par le calcul. En outre, le point $t = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ se trouve sur la droite de WALLACE. Ici, $\frac{1}{2}(a + b + c)$ est le centre du cercle d'EULER du triangle abc ; pour finir, on dispose le vecteur $\frac{d}{2}$ de longueur $\frac{1}{2}$ en ce point. Dès lors, t est situé sur ce cercle d'EULER, mais aussi sur le cercle d'EULER des triangles bcd, cad, abd .

Dans un quadrilatère inscrit, on considère pour chaque sommet la droite de WALLACE relative au triangle formé par les trois autres sommets ; les quatre droites ainsi engendrées passent par un seul et même point, à savoir le point commun d'intersection des cercles d'EULER de ces quatre triangles⁸.

⁸ Problème de E. LEMOINE dans les *Nouv. annal.* (2) 8, 1867, p. 47.

4. Autres exemples d'application.

(4,1) Nous affirmons :

Les parallèles respectives aux bissectrices intérieures d'un triangle passant par les milieux des côtés de celui-ci se coupent en un même point.

Comme à la fin de (2,2), désignons les sommets du triangle inscrit dans le cercle unité par p^2, q^2, r^2 . Par suite, les milieux des arcs opposés aux sommets sur le cercle unité sont notés $-qr, -rp, -pq$.⁹ La bissectrice intérieure de l'angle $q^2 \widehat{p^2} r^2$ passe

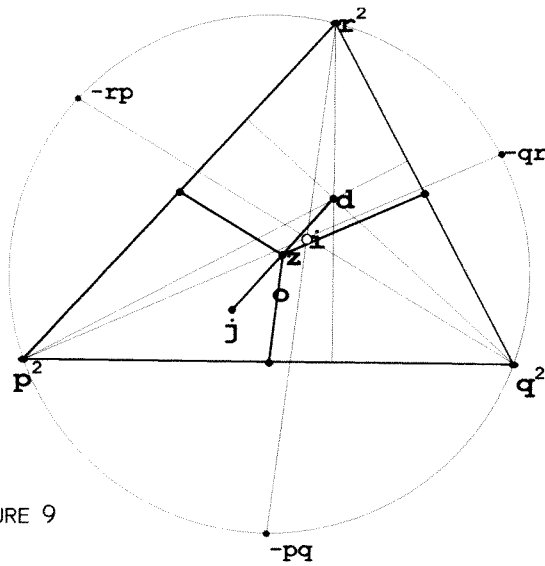


FIGURE 9

Trois droites qui passent par un point

par p^2 et $-qr$; elle a ainsi pour partie directrice $z - p^2 q r \bar{z}$. La parallèle à cette bissectrice passant par le milieu du côté opposé $\frac{1}{2} (q^2 + r^2)$ a pour équation :

$$z - p^2 q r \bar{z} = \frac{1}{2} (q^2 + r^2 - p^2 \frac{r}{q} - p^2 \frac{q}{r}).$$

De même :

$$z - p q^2 r \bar{z} = \frac{1}{2} (p^2 + r^2 - q^2 \frac{r}{p} - q^2 \frac{p}{r}).$$

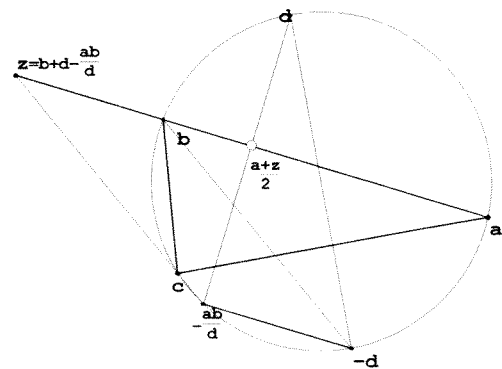
En soustrayant la première équation multipliée par q de la seconde multipliée par p et en divisant par $p - q$, nous obtenons :

$$z = \frac{1}{2} (p^2 + q^2 + r^2 + qr + rp + pq).$$

Cette expression est construite symétriquement en p, q, r ; par conséquent, z se trouve sur les trois parallèles aux bissectrices.

Construisons le symétrique du centre du cercle inscrit $i = -(qr + rp + pq)$ par rapport au centre O du cercle circonscrit, à savoir $j = -i$; alors z est placé au milieu du segment $[jd]$ où $d = (p^2 + q^2 + r^2)$ est l'orthocentre du triangle. Des relations semblables s'appliquent aussi à l'ensemble des bissectrices extérieures.

(4,2) Dans un traité d'ARCHIMÈDE devenu accessible seulement depuis 1927



La prémisses d'Archimède

FIGURE 10

⁹ Hofmann n'évoque pas l'ambiguïté de signe qui existe sur les racines carrées des nombres complexes p^2, q^2 et r^2 . Il faut choisir par exemple q et r de façon que $\frac{p^2+q^2}{-qr}$ soit positif (ndlr).

après avoir été traduit de l'arabe ¹⁰, on trouve le théorème suivant qui est équivalent au théorème d'addition des fonctions trigonométriques :

Sur le cercle unité se trouvent quatre points a, b, c, d , de sorte que d est le milieu de l'arc \widehat{abc} . Alors la perpendiculaire issue de d à la plus longue des cordes $[ab]$ et $[ac]$ partage en deux parties égales la somme $|ab| + |bc|$ des longueurs de ces cordes (fig.10).

Supposons qu'on ait $|ab| > |bc|$. Comme d coupe l'arc \widehat{abc} en deux parties égales, on a $c = \frac{d^2}{a}$. Prolongeons la corde $[ab]$ au-delà de b jusqu'à ξ de sorte que

$|b\xi| = |bc|$, alors (ξc) est parallèle à la bissectrice intérieure $(b, -d)$ de l'angle \widehat{abc} . La perpendiculaire à (ab) issue de d rencontre le cercle encore une fois en $-\frac{ab}{d}$. Comme les

cordes $[bc]$ et $[-d, -\frac{ab}{d}]$ sont entre des cordes parallèles du cercle, elles sont de même longueur. En outre, comme $(\frac{ab}{d}, -d, b, \xi)$ est un parallélogramme, on a

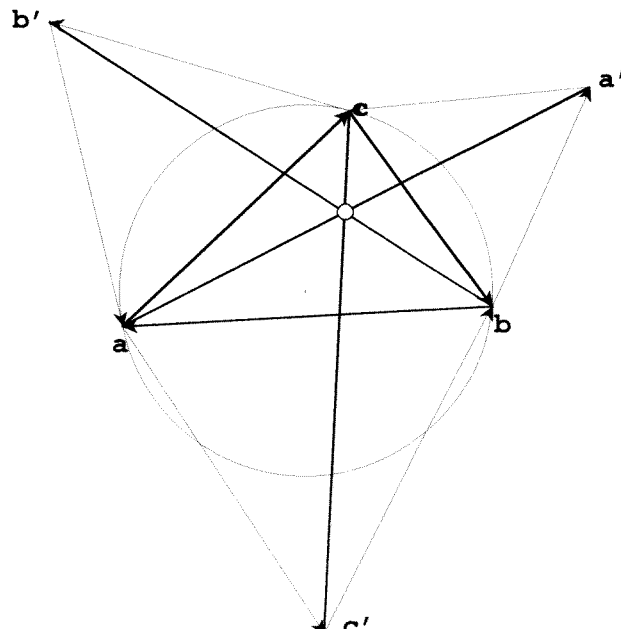
$\xi - b = -\frac{ab}{d} + d$; donc $\xi = b + d - \frac{ab}{d}$. Par suite, $\frac{a + \xi}{2} = \frac{1}{2} \left(a + b + d - \frac{ab}{d} \right)$ est le milieu du segment $[a\xi] = [ab] \cup [b\xi]$ avec

$|a\xi| = |ab| + |b\xi| = |ab| + |bc|$. D'après (2,2), ce point est aussi le pied de la perpendiculaire à (ab) issue de d . Par ce moyen, le théorème, connu sous le nom de prémisses d'ARCHIMÈDE, est démontré.

(4,3) Soient a, b, c les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité et orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, alors $b = a\varepsilon, c = a\varepsilon^2$ où

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}), \varepsilon^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) = \bar{\varepsilon} \text{ sont les racines troisièmes de l'unité.}$$

Soient maintenant u, v deux points quelconques du plan complexe, alors ils sont complétés en un triangle équilatéral, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, par ce point w pour lequel on a $u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w = 0$.



Le point de Fermat

FIGURE II

¹⁰ C. SCHOY : *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen al-Bîrûnî...*, éd. J. Ruska & H.Wieleitner, Hanovre, 1927, p. 3. Sur la portée de la prémisses d'Archimède, cf. J. TROPFKE dans *Archiv f. Geschichte d. Math., d. Nat. u. d. Technik* 10, 1928, p. 430-462, en particulier p. 433-436.

Donnons-nous un triangle abc orienté dans le sens des aiguilles d'une montre inscrit dans le cercle unité, et construisons des triangles équilatéraux sur ses côtés à l'extérieur. Leurs sommets libres a' , b' , c' doivent être associés respectivement avec les côtés $[cb]$, $[ac]$, $[ab]$, pour que nous obtenions des triangles équilatéraux orientés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, sur lesquels nous pouvons appliquer la formule ci-dessus.

$$\text{Il s'ensuit } \begin{cases} a' = -\varepsilon^2 b - \varepsilon c \\ b' = -\varepsilon^2 c - \varepsilon a \\ c' = -\varepsilon^2 a - \varepsilon b \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a - a' = a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c = t \\ b - b' = b + \varepsilon^2 c + \varepsilon a = t\varepsilon \\ c - c' = c + \varepsilon^2 a + \varepsilon b = t\varepsilon^2 \end{cases}$$

Il en résulte que les vecteurs $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$ sont de même longueur et forment deux à deux un angle de $\frac{2\pi}{3}$.

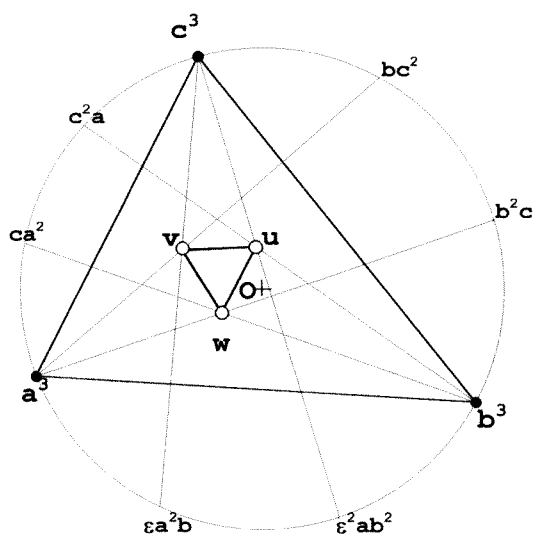


Illustration du théorème de Morley

La parallèle à la droite (aa') passant par l'origine coupe le cercle unité aux points $\frac{t}{|t|}$ et $-\frac{t}{|t|}$; de cette manière, le coefficient directeur de cette droite est égal à $-\frac{t^2}{|t|^2} = -\frac{t}{\bar{t}}$ et l'équation de la droite (aa') est $\bar{t}(z - a) = t(\bar{z} - \bar{a})$, correspondant à l'équation de (bb') qui est $\varepsilon^2 \bar{t}(z - b) = \varepsilon t(\bar{z} - \bar{b})$ et à l'équation de (cc') qui est

$$\varepsilon \bar{t}(z - c) = \varepsilon^2 t(\bar{z} - \bar{c}).$$

Si on additionne ces trois équations, alors les deux membres s'annulent; donc la troisième équation résulte des deux premières et, de ce fait, les trois droites passent par le même point z connu sous le nom de point de FERMAT du triangle¹¹. Il se trouve à l'intérieur du triangle si chacun des trois angles est plus petit que $\frac{2\pi}{3}$.

(4,4) Les points d'intersection des trisectrices intérieures d'un triangle les plus proches des côtés sont les sommets d'un triangle équilatéral. Pour montrer ce théorème intéressant qui a produit toute une littérature¹², nous désignerons les sommets du triangle inscrit

¹¹ Le point de FERMAT (N.D.T. : dit aussi de TORRICELLI) a été découvert par TORRICELLI, en rapport avec le problème de FERMAT selon TORRICELLI (P. DE FERMAT : *Œuvres* I, éd. P. Tannery - Ch. Henry, Paris, 1891, p. 153; cf. *Œuvres* V, éd. C. de Waard, Paris, 1922, p. 127-128, et E. TORRICELLI : *Opere* III, éd. G. Vassura, Faenza, 1919, p. 425-431).

¹² Ce théorème fut présenté en 1904 par Fr. MORLEY par lettre à des amis en Angleterre. Il a été imprimé pour la première fois dans W. L. MUIR : *Morley's Trisections Theorem*, Proceedings Edinburgh Math. Soc. 32, 1913.

dans le cercle unité par a^3, b^3, c^3 , et les points qui partagent en trois arcs élémentaires égaux l'arc (b^3, c^3) ne comprenant pas a^3 par b^2c et bc^2 , et encore les points qui partagent en trois arcs élémentaires égaux l'arc (c^3, a^3) ne comprenant pas b^3 par c^2a et ca^2 (fig. 12). Soit t le point d'intersection de la trisectrice de l'angle (b^3, c^3, a^3) la plus proche de a^3 avec le troisième arc, alors on $a^{\frac{t}{a^3}} \times \frac{b^2c}{b^3} \times \frac{c^2a}{c^3} = \varepsilon$, donc $t = \varepsilon a^2b$.

L'autre point de cet arc situé sur la seconde trisectrice est par conséquent ε^2ab^2 . Le point d'intersection w des trisectrices les plus proches de $[a^3, b^3]$ résulte du système d'équations :

$$\begin{cases} w + a^3b^2c\bar{w} = a^3 + b^2c \\ w + a^2b^3c\bar{w} = b^3 + a^2c \end{cases}$$

Nous éliminons \bar{w} et simplifions par $a - b$.

Ainsi nous trouvons :

$$w = -ab(a + b) + c(a^2 + ab + b^2),$$

de même

$$u = -\varepsilon bc(\varepsilon b + c) + a(\varepsilon^2b^2 + \varepsilon bc + c^2) \text{ et}$$

$$v = -\varepsilon ca(\varepsilon c + a) + \varepsilon b(\varepsilon^2c^2 + \varepsilon ac + c^2).$$

À présent, on a $u + \varepsilon v + \varepsilon^2w = abc(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0$; c'est pourquoi uvw est effectivement un triangle équilatéral.

5. De la longueur des vecteurs.

(5,1) Soient p et q deux points sur le pourtour du cercle unité, alors le carré de leur distance est déterminé par :

$$|q - p|^2 = (q - p)(\bar{q} - \bar{p}) = \frac{(q - p)^2}{-pq}.$$

Donc la mesure affectée d'un signe de la longueur réelle du vecteur \vec{pq} est :

$$\boxed{|q - p| = \frac{q - p}{\sqrt{-pq}} = |\vec{pq}|}$$

Son signe change quand on échange p et q .

(5,2) Affectons à présent aux sommets d'un triangle inscrit dans le cercle unité les nombres a^2, b^2, c^2 , comme à la fin de (2,3) ; le centre du cercle d'EULER est alors défini par :

$$\frac{d}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

et le centre du cercle inscrit par $i = -(bc + ca + ab)$. Ainsi, on a :

$$\boxed{\frac{d}{2} - i = \frac{(a + b + c)^2}{2} \text{ et } \left| \frac{d}{2} - i \right| = \frac{(a + b + c)(bc + ca + ab)}{2abc}}$$

Pour déterminer la mesure de la longueur du rayon du cercle inscrit, abaissons sur la corde (a^2, b^2) , d'équation $\zeta + a^2 b^2 \bar{\zeta} = a^2 + b^2$ (cf. (3,2)), la perpendiculaire issue de i . Son équation a pour premier membre $\zeta - a^2 b^2 \bar{\zeta}$ et pour terme constant

$$i - a^2 b^2 \bar{i} = \frac{(ab - c^2)(a + b)}{c}. \text{ En se débarrassant de } \bar{\zeta} \text{ par addition des deux}$$

équations de droite, on obtient après une transformation facile

$$\zeta - i = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{2abc} \text{ et } \rho = \pm \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{2abc}$$

En outre, on a $r = 1$. D'autre part, on a :

$$|i|^2 = \frac{(a + b + c)(bc + ca + ab)}{abc} = 1 + \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc} = r^2 \pm 2r\rho$$

Mais, comme le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit sont au plus distants de r , le signe $+$ ne concorde pas avec ρ . Il en résulte la relation d'EULER ¹³

$$|i|^2 = r^2 - 2r\rho$$

Si, au lieu du *cercle inscrit*, on considère l'un des *cercles exinscrits*, il faut prendre le signe

+ devant $2r\rho$. De plus, nous obtenons : $\left| \frac{d}{2} - i \right| = \frac{r}{2} - \rho \geq 0$

De ce fait, le cercle inscrit est *tangent intérieurement* au cercle d'EULER et est complètement *entouré* par celui-ci. Ce qui se traduit par : « Les *cercles exinscrits* sont tangents extérieurement au cercle d'EULER ¹⁴ ».

(5,3) En plus, il s'ensuit, de façon analogue :

$$\rho_a = - \frac{(b+c)(b-a)(c-a)}{2abc}$$

La formule de STEINER ¹⁵ en résulte après un calcul élémentaire :

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$$

Le milieu du côté $[a^2, b^2]$ du triangle est $\frac{a^2 + b^2}{2}$. Par conséquent, la distance du centre du cercle circonscrit à ce côté est égale, avec le signe convenable, à $\pm \frac{a^2 + b^2}{2ab}$.

Ainsi, la somme des distances du centre du cercle circonscrit aux trois côtés est égale

$$\text{à } \frac{(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b}{2abc} = \frac{(b+c)(c+a)(a+b) - 2abc}{2abc} = \pm r + \rho$$

¹³ N.D.T. : HOFMANN écrit ici *relation de CHAPPLE – EULER* et fait référence à :

W. CHAPPLE dans les *Miscellanea curiosa mathematica*, 1, 1746, p. 123 (cité d'après SIMON ¹ p. 140).

¹⁴ EULER ² a certes le calcul de $|i|^2$, mais pas encore la forme $r^2 - 2r\rho$.

¹⁵ Cette proposition provenant en réalité de FEUERBACH ¹, p. 4, est cependant toujours citée d'après STEINER dans la nouvelle littérature ; ainsi, par exemple, chez DÖRRIE ³, p. 59-60. Mais là, il manque l'indication que la somme est à prendre *algébriquement*.

La somme des distances du centre du cercle circonscrit aux côtés du triangle est donc égale à $r + \rho$ si le triangle est *acutangle* ou *rectangle*. Si le triangle a *un angle obtus*, la distance au plus long des côtés est à *retrancher* de la somme des deux autres distances. $r + \rho$ est donc la somme *algébrique* des distances du centre du cercle circonscrit à chacun des côtés du triangle.

(5,4) Soit \mathcal{U} le cercle circonscrit et \mathcal{I} le cercle inscrit à un triangle, alors il y a une infinité d'autres triangles admettant \mathcal{U} comme cercle circonscrit et \mathcal{I} comme cercle inscrit. Les cercles d'EULER de ces triangles ont tous le même rayon $\frac{r}{2}$; ils sont tangents intérieurement au cercle inscrit. Quand le triangle se déplace dans \mathcal{U} autour de \mathcal{I} , le cercle d'EULER tourne autour du cercle inscrit qui reste stable. Son centre reste à la distance constante

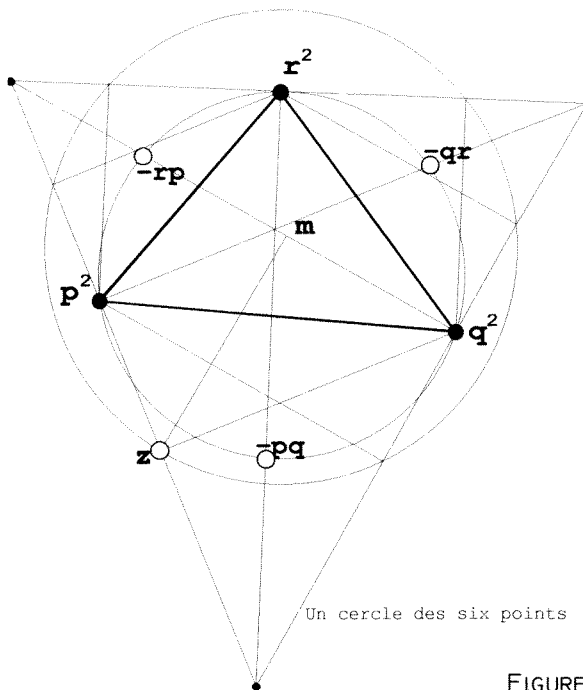


FIGURE 13

$\frac{r}{2} - \rho$ de i et décrit donc un cercle concentrique au cercle inscrit. L'orthocentre du triangle décrit aussi un cercle, dont le centre est le symétrique $2i$ du centre O du cercle circonscrit par rapport à i , et le rayon est égal à $r - 2\rho$.

Ces propriétés sont aussi valables pour les cercles d'EULER et les orthocentres des triangles inscrits dans le cercle \mathcal{U} et ayant un cercle convenable pour cercle exinscrit.

Des relations semblables s'appliquent aussi à l'infinité de cercles inscrits ou de cercles exinscrits des triangles qui ont, comme en (1,4), même cercle circonscrit et même cercle d'EULER ; cependant, cette fois, la valeur de α change constamment.

(5,5) *Les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur ses bissectrices extérieures sont sur un même cercle*¹⁶(fig. 13).

Cette proposition est une conséquence de celle de (4,1). En effet, elle équivaut à la suivante : les six points en question sont à la même distance du point d'intersection $m = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2 + qr + rp + pq)$ des parallèles aux bissectrices intérieures du triangle passant par les milieux des côtés.

¹⁶ Théorème d'EUTARIS (pseudonyme de RESTIAU) dans H. VUIBERT : *Journ. Math. Élément.* (Bruxelles), Novembre 1877, cité d'après SIMON¹ p. 135.

Pour le prouver, coupons la bissectrice extérieure $\zeta + p^2 q r \bar{\zeta} = p^2 + q r$ par la perpendiculaire à celle-ci issue de q^2 , à savoir $\zeta - p^2 q r \bar{\zeta} = q^2 - \frac{p^2 r}{q}$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2} \left(p^2 + q^2 + q r - p^2 \frac{r}{q} \right) \text{ donc} \\ m - \zeta &= \frac{p q^2 + q r^2 + r p^2 + p q r}{2 q} \text{ et} \\ |m - \zeta|^2 &= \frac{(p q^2 + q r^2 + r p^2 + p q r)(p^2 q + q^2 r + r^2 p + p q r)}{4 p^2 q^2 r^2} \end{aligned}$$

Cette expression est symétrique en p, q, r ; c'est pourquoi tout est démontré. Naturellement, cette proposition varie aussi de façon appropriée selon que l'on prend en compte les bissectrices extérieures ou intérieures.

(5,6) Un peu plus compliquée, et difficilement accessible d'une autre façon, par des moyens élémentaires, est la question suivante ¹⁷ :

Comment résoudre le problème de la construction d'un triangle connaissant le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre ?

Prenons pour origine le centre du cercle circonscrit ; le centre du cercle inscrit est alors défini par i et l'orthocentre par d . Nous obtenons $2i$ et connaissons

$|i|^2 = r(r-2\rho)$ et $|d-2i| = r-2\rho$, donc aussi r et ρ , tous deux constructibles à la règle et au compas. Prenons r pour unité de longueur, on a alors :

$$\begin{aligned} a + b + c &= \sqrt{d-2i}; \quad bc + ca + ab = -i, \\ abc &= \frac{(a+b+c)(bc+ca+ab)}{|i|^2} = -\frac{\sqrt{d-2i}}{\bar{i}} \text{ et} \\ \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = d \\ b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 = i^2 + \frac{2(d-2i)}{\bar{i}} \\ a^2 b^2 c^2 = \frac{d-2i}{\bar{i}^2} \end{cases} \end{aligned}$$

On est amené à un problème du troisième degré ; les sommets du triangle sur le cercle circonscrit sont les solutions de l'équation cubique :

$$\zeta^3 - d\zeta^2 + \left[i^2 + \frac{2(d-2i)}{\bar{i}} \right] \zeta - \frac{d-2i}{\bar{i}^2} = 0.$$

Comme les coefficients de cette équation peuvent être exprimés rationnellement en fonction de d et i , le triangle est déterminé de façon unique.

6. Les tangentes.

(6,1) Dans l'équation de droite de (3,2), déplaçons le point b sur le cercle unité jusqu'en a , nous obtenons alors l'équation de la tangente en a au cercle unité sous la forme $\boxed{\zeta + a^2 \bar{\zeta} = 2a}$.

¹⁷ Problème d'EULER ³ : *Opera* a.a.0., p. 150-151. Cf. DÖRRIE ³, p. 20-26.

D'après cela, les tangentes au cercle unité en des points a et b du pourtour de ce cercle se coupent au point $\zeta = \frac{2ab}{a+b}$. En outre, ζ est l'image inverse du milieu $\frac{a+b}{2}$ de $[ab]$.

L'équation de la polaire par rapport au cercle unité $\bar{a}\zeta + a\bar{\zeta} = 2$ s'ensuit en divisant par a . Si a est un point quelconque du plan, cette équation représente la polaire du point a par rapport au cercle unité. Inversement, soit $p\zeta + q\bar{\zeta} = r$ l'équation d'une droite ne passant pas par l'origine ($r \neq 0$) ; alors, en la multipliant par $\frac{2}{r}$, on obtient l'équation d'une polaire. Puisqu'il y a un réel à droite, il faut que les coefficients de ζ et de $\bar{\zeta}$ soient des complexes conjugués ; le coefficient $\frac{2q}{r} = a$ caractérise le pôle de la droite. Par ce moyen, toutes les propriétés des polaires relatives au cercle unité sont immédiatement déductibles. En remplaçant dans le second membre de l'équation de la polaire $+2$ par -2 , on obtient aussi l'équation de l'antipolaire et toutes les propriétés de l'antipolarité.

(6,2) Démontrons tout d'abord le théorème dit de NEWTON ¹⁸ :

La droite passant par les milieux des diagonales d'un quadrilatère circonscrit à un cercle passe par le centre de ce cercle.

Soient a, b, c, d les points de contact des quatre tangentes avec le cercle inscrit, considéré comme cercle unité ; ainsi, le milieu de l'une des diagonales est

$$m = \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} = \frac{\sum abc}{(a+b)(c+d)}.$$

Par suite, $m : \bar{m} = \sum abc : \sum a$. Or $m : \bar{m}$ définit la direction du vecteur m et est manifestement construit de façon symétrique en a, b, c, d . Donc les deux vecteurs allant du centre du cercle inscrit aux milieux des diagonales sont colinéaires ; par conséquent, la droite des milieux passe par le centre du cercle inscrit.

(6,3) Les tangentes au cercle unité en trois points a, b, c , sommets d'un triangle, se coupent aux points $\frac{2bc}{b+c}, \frac{2ca}{c+a}, \frac{2ab}{a+b}$. Le centre u du cercle circonscrit au triangle tangentiel se trouve, par exemple, sur la médiatrice du segment $\left[\frac{2ca}{c+a}, \frac{2ab}{a+b}\right]$. La partie

directrice de l'équation de cette médiatrice est $\zeta - a^2\bar{\zeta}$ et le terme constant est

$$\frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} - a^2\left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right).$$

La médiatrice a donc pour équation :

$$\zeta - a^2\bar{\zeta} = \frac{2a(bc - a^2)}{(a+b)(c+a)}.$$

De même :

¹⁸ Cf. SIMON ¹ p. 162 et DÖRRIE ³ p. 52-54. Ce problème est à relier à la détermination du lieu des centres de toutes les ellipses qui sont inscriptibles dans un quadrilatère convexe. Je n'ai pas pu trouver ce passage chez NEWTON.

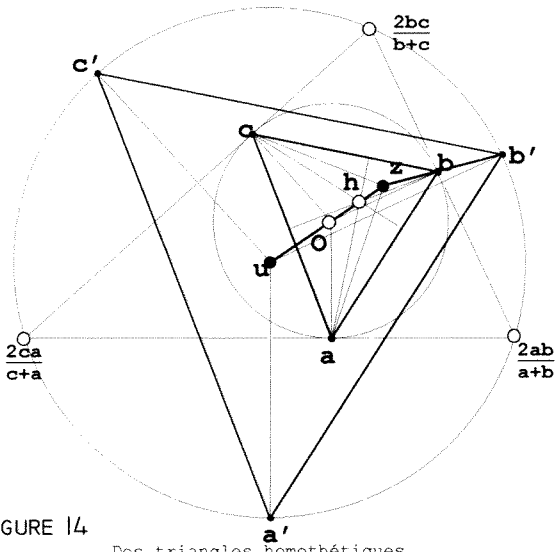


FIGURE 14
Des triangles homothétiques

$$\xi - b^2 \bar{\xi} = \frac{2b(ca - b^2)}{(a+b)(b+c)}.$$

D'où :

$$u = \frac{2abc(a+b+c)}{(b+c)(c+a)(a+b)} \text{ et } \bar{u} = \frac{2(bc+ca+ab)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

et, par exemple,

$$\frac{2bc}{b+c} - u = \frac{2b^2c^2}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

avec le module $\pm \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

C'est l'expression du rayon r du cercle circonscrit au triangle tangentiel. Elle vérifie encore la relation d'EULER (5,2). Il en ressort que r doit avoir le signe $-$. Donc,

on a $a + b + c = -\frac{\rho u}{r}$. Il s'ensuit que O , le

centre du cercle inscrit dans le triangle tangentiel et en même temps le centre du cercle circonscrit au triangle de départ, partage le segment $[uh]$, où u est le centre du cercle circonscrit au triangle tangentiel et $h = a + b + c$ l'orthocentre du triangle de départ, dans le rapport $r : \rho$ à partir de u . Cf. fig. 14.

Soit maintenant a' le point d'intersection de la droite passant par u , de vecteur directeur a , avec le cercle circonscrit, alors on a $a' - u = \frac{ar}{\rho}$, donc $a' = \frac{2abc}{(c+a)(a+b)}$, etc. Les rayons $[ua']$, $[ub']$, $[uc']$ sont parallèles aux rayons $[Oa]$, $[Ob]$, $[Oc]$; donc les triangles abc et $a'b'c'$ sont semblables et semblablement placés. Le rapport des mesures entre deux segments correspondants des deux figures est $\frac{r}{\rho}$ et le centre de l'homothétie est $\xi = -u \times \frac{\rho}{r-\rho}$. Par conséquent, ξ divise extérieurement le segment

$[uO]$, prolongé du côté de O , dans le rapport $\frac{r}{\rho}$ à partir de u .

Les points h et ξ sont fixes quand O et u sont fixes, c'est-à-dire pour tous les triangles inscrits dans le cercle de centre u et circonscrits au cercle de centre O . Les triangles formés par les points de contact des tangentes au cercle inscrit ont un seul et même cercle d'EULER.

(6,4) *Quand un quadrilatère circonscrit est-il en même temps un quadrilatère inscrit, c'est-à-dire bicentrique ?*

Nous partons de quatre points a, b, c, d sur le cercle unité, points de contact des côtés d'un quadrilatère circonscrit à ce cercle. Nous supposons de plus que les cordes $[ac]$ et $[bd]$ se coupent à l'intérieur du cercle (fig. 15). Pour que le quadrilatère soit en même temps *inscriptible*, il faut, par exemple, que les angles des sommets opposés $\frac{2ab}{a+b}$ et $\frac{2cd}{c+d}$ soient supplémentaires, donc que les arcs \widehat{ab} et \widehat{cd} du cercle

unité aient pour somme un demi-cercle. En conséquence, les arcs \widehat{ab} et \widehat{cd} sont égaux, donc $-\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ ou $\boxed{ac + bd = 0}$

Ce qui signifie : *Le quadrilatère des tangentes est inscriptible quand les diagonales du quadrilatère formé dans le cercle inscrit par les points de contact se coupent à angle droit.*

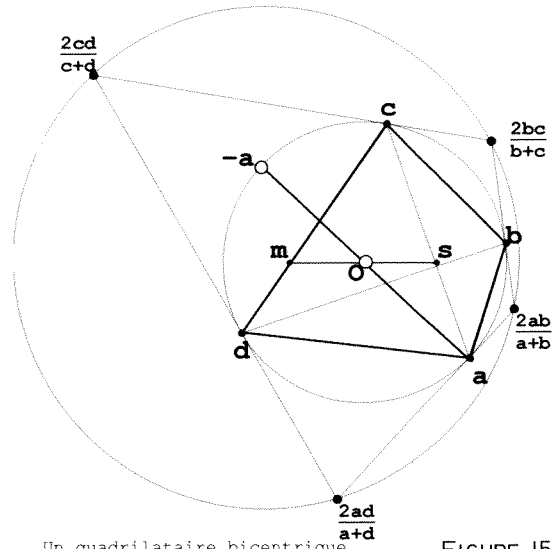
Les équations de ces diagonales sont

$$\xi + ac\bar{\xi} = a + c, \quad \xi + bd\bar{\xi} = b + d \text{ donc}$$

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} \text{ est leur point de concours et en}$$

même temps (cf. (3,3)) le point commun aux cercles d'EULER appartenant aux quatre triangles du cercle inscrit qu'on peut former avec les points a, b, c, d . La réciproque est évidemment vraie :

Si le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère inscrit se trouve sur chacun des cercles d'EULER des quatre triangles formés avec trois des quatre sommets du quadrilatère inscrit, alors les diagonales de ce quadrilatère se coupent à angle droit.



Un quadrilatère bicentrique

FIGURE 15

(6,5) Revenons à présent à notre quadrilatère bicentrique et cherchons le centre m du cercle circonscrit : celui-ci se trouve par exemple sur les médiatrices (cf. (6,3))

$$\xi - a^2\bar{\xi} = \frac{2a(bd - a^2)}{(d+a)(a+b)} \text{ et } \xi - a^2\bar{\xi} = \frac{2a(bd - a^2)}{(b+c)(c+d)} .$$

Compte tenu de $ac + bd = 0$, nous obtenons

$$m = \frac{2abcd \sum a}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}$$

Or, on a

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) = (ac+bd)^2 + \sum a^2(bc+cd+db)$$

et

$$\sum a \times \sum abc = 4abcd + \sum a^2(bc+cd+db) ,$$

donc, dans le cas présent, $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) = -4abcd + \sum a \times \sum abc$.

En plus, $\sum abc = abcd \times \sum \frac{1}{a} = 2abcd\bar{s}$; ainsi, après un court calcul, on a

$m = s : (s\bar{s} - 1)$. De ce fait, le centre O du cercle inscrit, le centre m du cercle circonscrit et le point d'intersection s des diagonales sont sur *une* droite ; O se trouve entre m et s et les longueurs des segments $[mO]$ et $[ms]$ se comportent comme ρ^2 à s^2 .

De plus, on a

$$m \bar{m} = \frac{s \bar{s}}{(s \bar{s} - 1)^2} = \frac{4abcd \sum a \sum abc}{(\sum a \sum abc - 4abcd)^2} = |m|^2 .$$

Pour calculer le rayon r du cercle circonscrit, formons

$$\frac{2ab}{a+b} - m = \frac{2ab(-bcd - acd + abd + abc)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}$$

et sa valeur complexe conjuguée. Il s'ensuit alors après un bref calcul :

$$r^2 = \frac{4abcd(8abcd - \sum a \sum abc)}{(\sum a \sum abc - 4abcd)^2}. \text{ Ainsi, on a :}$$

$$r^2 + |m|^2 = 2 \left(\frac{4abcd}{\sum a \sum abc - 4abcd} \right)^2 \text{ et}$$

$$r^2 - |m|^2 = -2 \times \frac{4abcd}{\sum a \sum abc - abcd} \text{ donc }^{19}$$

$$(r^2 - |m|^2)^2 = -2 \rho^2 (r^2 + |m|^2)^2.$$

Il en résulte le théorème connu :

Si la relation ci-dessus est vérifiée par les rayons r et ρ de deux cercles et la distance $|m|$ de leurs centres, alors il existe une infinité de quadrilatères bicentriques circonscrits au cercle de rayon ρ et inscrits dans le cercle de rayon r ; les segments joignant leurs points de contact avec le cercle inscrit se coupent toujours en un même point s , et même à angle droit.

7. À propos de l'aire des surfaces.

(7,1) Pour déterminer l'aire Δ du triangle dont les côtés sont tangents au cercle unité en a, b, c , calculons tout d'abord la mesure orientée de la longueur des côtés du triangle (cf. fig. 14) : nous formons en effet

$$\frac{2ab}{a+b} - \frac{2ac}{a+c} = \frac{2a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)}.$$

Cette longueur orientée a pour module $\frac{2a(b-c)\sqrt{-1}}{(a+b)(a+c)}$; donc le triangle a pour aire

$$\Delta = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)} \sqrt{-1}$$

En effet, cette expression est affectée d'un signe et dépend du sens de rotation qui résulte de la suite des sommets choisie. Si les parties réelles et imaginaires des vecteurs unité complexes a, b, c sont *rationnelles*, les longueurs des côtés et l'aire du triangle sont aussi rationnelles ; nous avons donc un triangle de HÉRON devant nous.

(7,2) Après cela, nous prenons comme triangle le triangle de HÉRON de sommets a^2, b^2, c^2 comme à la fin de (2,2). À présent, les mesures orientées des longueurs des côtés sont, conformément à (5,1), $\frac{b^2-c^2}{bc} \sqrt{-1}$ etc. ; ainsi, la moitié de la

somme des côtés est :

$$\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{2abc} \sqrt{-1}.$$

En appliquant la formule de (5,2) pour ρ , on obtient désormais l'aire du triangle sous la forme

$$\Delta = \frac{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{4a^2b^2c^2\sqrt{-1}}$$

¹⁹ N. FUSS : *Nova Acta Petrop.* 13, vers 1795-96, édité en 1802, p. 166.

(7,3) La formule du triangle sert à définir l'aire F de la surface d'un quadrilatère de sommets a^2, b^2, c^2, d^2 . Comme nous tenons compte du sens de rotation des triangles $a^2 b^2 c^2$ et $a^2 c^2 d^2$, nous obtenons comme aire

$$F = \frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-d^2)}{4a^2b^2c^2\sqrt{-1}} + \frac{(a^2-c^2)(c^2-d^2)(d^2-a^2)}{4a^2c^2d^2\sqrt{-1}}$$

$$= -\frac{(a^2-c^2)(b^2-d^2)(a^2c^2 - b^2d^2)}{4a^2b^2c^2d^2\sqrt{-1}}$$

Il faut que les côtés du quadrilatère soient orientés de la sorte :

$$\frac{a^2-b^2}{ab}\sqrt{-1}; \frac{b^2-c^2}{bc}\sqrt{-1}; \frac{c^2-d^2}{cd}\sqrt{-1}; \frac{a^2-d^2}{ad}\sqrt{-1}.$$

Ensuite nous obtenons comme somme de la moitié des côtés d'après cette suite dont nous soustrayons toujours l'un des côtés :

$$\frac{(ac-bd)(a+c)(b-d)}{-2abcd\sqrt{-1}}, \quad \frac{(ac+bd)(a+c)(b+d)}{-2abcd\sqrt{-1}},$$

$$\frac{(ac-bd)(a-c)(b+d)}{-2abcd\sqrt{-1}}, \quad \frac{(ac+bd)(a-c)(b-d)}{2abcd\sqrt{-1}}.$$

Nous passons de la première expression (dont le calcul est immédiat) à la deuxième en remplaçant b par $-b$, de celle-ci à la suivante en remplaçant c par $-c$, et finalement de celle-ci à la dernière en remplaçant d par $-d$. En multipliant les quatre dernières expressions, nous obtenons le carré de F ; par ce moyen, nous trouvons la formule connue de l'aire pour un quadrilatère ²⁰.

(7,4) L'aire de la surface du triangle uvw inscrit dans le cercle unité peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{4uvw\sqrt{-1}} \begin{vmatrix} u^2 & 1 & u \\ v^2 & 1 & v \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{-1}} \begin{vmatrix} u & \bar{u} & 1 \\ v & \bar{v} & 1 \\ w & \bar{w} & 1 \end{vmatrix}$$

Cette formule est encore vraie si u, v, w sont trois points *quelconques* n'étant *plus* situés sur le pourtour du cercle unité. Nous les utilisons pour démontrer le théorème de PASCAL ²¹ :

Les droites joignant les sommets opposés d'un hexagone inscrit dans un cercle se coupent en des points alignés (fig. 16).

Soient a, b, c, d, e, f les sommets de l'hexagone, les points d'intersection des droites joignant les sommets opposés sont

$$u = (bc) \cap (ef); v = (cd) \cap (fa); w = (de) \cap (ab).$$

Les équations des droites (bc) et (ef) sont respectivement

²⁰ La formule de l'aire des surfaces a été présentée pour la première fois par les Hindous puis, sous leur influence, par les Arabes. En Occident, elle se trouve indépendamment de ces prédécesseurs dans l'édition en latin, étudiée et complétée par W. SNELL, de Ludolf VAN CEULEN : *De arithmetische en geometrische Fundamenten*, Leiden, 1615, ² 1619. Cf. aussi J. TROPFKE : *Geschichte der Elementarmathematik*, IV³, Berlin, 1940, p. 150-168.

²¹ Ce théorème apparaît déjà dans *Essay pour les coniques* de 1640 (forme primitive), puis sous sa forme actuelle dans la version définitive des *Conica* (1654) dont l'impression en 1676 se fit sur la base d'un rapport de LEIBNIZ ; égarée chez le typographe, cette version n'a jamais été publiée.

$$\zeta + bc\bar{\zeta} = b + c \text{ et } \zeta + ef\bar{\zeta} = e + f.$$

Par suite, leur point d'intersection u est caractérisé par

$$u(bc - ef) = bc(e + f) - ef(b + c);$$

$$\bar{u}(bc - ef) = (b + c) - (e + f)$$

Par conséquent, l'aire du triangle uvw est proportionnelle à :

$$\begin{vmatrix} bc(e+f) - ef(b+c) & (b+c) - (e+f) & bc - ef \\ cd(f+a) - fa(c+d) & (c+d) - (f+a) & cd - fa \\ de(a+b) - ab(d+e) & (d+e) - (a+b) & de - ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-f & b-e & 0 \\ 0 & d-a & c-f \\ d-a & 0 & e-b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} be & 1 & b \\ cf & 1 & f \\ da & 1 & d \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant de ce produit est égal à zéro ; donc l'aire du triangle uvw est nulle. De ce fait, les points u, v, w se trouvent vraiment sur une droite, comme affirmé.

En projetant cette figure, à partir d'un point non situé dans le plan du cercle, sur un plan non parallèle au plan du cercle, nous obtenons le théorème général de PASCAL pour les sections coniques.

(7,5) Si d'aventure on interprète les points e, c, a , respectivement liés aux points b, f, d par homographie sur le cercle, alors la droite de PASCAL passant par les points u, v, w de la fig. 16 est l'axe de cette homographie ; ses points d'intersection x, y avec le cercle

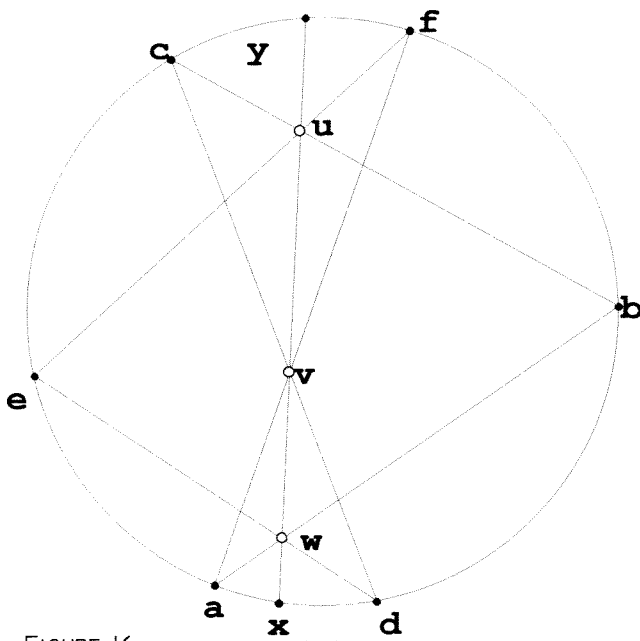


FIGURE 16

Théorème de Pascal

unité

sont les points fixes de l'homographie. On utilise cette propriété pour résoudre par exemple le problème dit d'OTTOJANO²² :

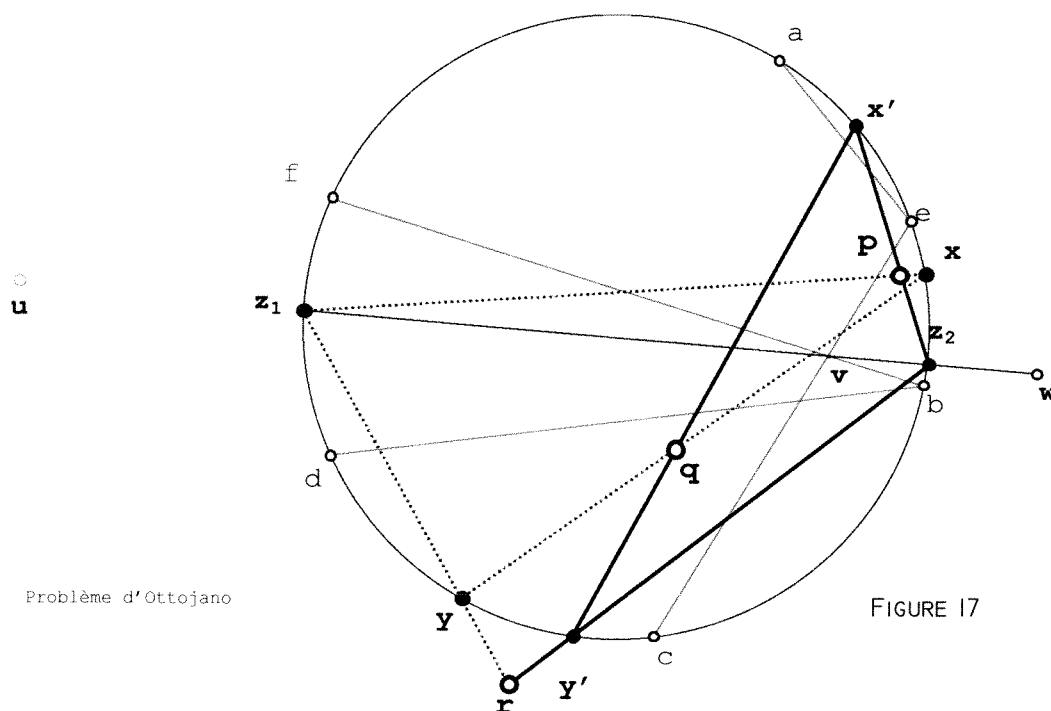
Étant donné un cercle et trois points non situés sur ce cercle, déterminer un triangle inscrit dont chaque côté (éventuellement prolongé) passe par un de ces points.

On prend pour cercle le cercle unité ; soient p, q, r les points distincts deux à deux, soient x, y, ζ les sommets recherchés du triangle. Il faut donc résoudre les trois équations : $p + y\zeta\bar{p} = y + \zeta$, $q + \zeta x\bar{q} = \zeta + x$, $r + x y\bar{r} = x + y$.

²² Ce problème (pour trois points placés sur une droite) tire son origine des *Tactiones* perdues d'APPOLONIUS, sur lesquelles nous connaissons plus de détails par PAPPUS : *Collectiones*, VII, prop. 117. Le problème plus général fut posé par G. CRAMER dont l'élève G. F. M. SALVEMINI DE CASTILLON travailla à sa résolution à partir de 1742 et publia en 1776 une géométrie élémentaire. Le problème pour un polygone à n sommets fut résolu par A. GIORDANO alors âgé de 16 ans à partir d'Ottojano en rattachement à PAPPUS. Cf. M. BRÜCKNER : *Das Ottojanosche Problem*, Programm, Zwickau, 1892, et TROPFKE¹⁹, p.125.

Grâce aux deux premières équations, on peut exprimer x et y comme des fonctions linéaires de z ; en remplaçant dans la troisième équation, nous obtenons ainsi une équation quadratique en z qui peut être mise sous la forme $z + m\bar{z} = n$ après division par z et, de cette manière, représenter une droite. Dont les points d'intersection avec le cercle unité fournissent les deux valeurs recherchées z_1 et z_2 .

Dans le cas présent, nous construisons le plus convenablement possible trois couples de points de l'homographie sur le cercle déterminée par l'arrangement z_1, p, y, r, x, q, z_2 . Nous caractérisons les points allant de pair z_1 et z_2 respectivement avec e, c, a et b, f, d . L'axe de cette homographie est la droite mentionnée ci-dessus. La réalisation bien connue est représentée sur la fig. 17. La mise en équation montre



que le problème peut être transposé du triangle à un polygone à n sommets inscrit dans le cercle et conduit encore à une équation quadratique. Par une homographie appropriée, on arrive à généraliser et à traiter des sections coniques.

Ces quelques essais sont destinés à montrer comment l'idée mentionnée au début – employer des nombres complexes en relation avec le cercle unité – peut être exploitée efficacement. Il existe beaucoup d'autres applications élémentaires mais, comme il ne s'agissait que de préciser l'idée, nous ne poursuivrons pas plus loin.

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE? QUELQUES COMMENTAIRES À CE SUJET

Jean THOMANN ¹

Irma

Avertissement: Le but de cet article est de mettre en évidence, sur quelques exemples d'abord élémentaires, puis un peu plus élaborés, l'articulation entre différentes méthodes de calcul appelées traditionnellement formelles ou numériques.

L'idée est de montrer que ces méthodes font partie d'un tout avec comme finalité de rendre effective une partie des mathématiques.

Les renvois sont destinés à permettre au lecteur de préciser et d'approfondir les questions abordées.

1 Préliminaires

Comment définir le Calcul Formel?

Le rêve serait de définir sur ordinateur des objets mathématiques munis de leurs classifications, de leurs structures et d'automatiser les différents opérateurs et applications sur ces objets par des algorithmes.

Cette ambition est destinée à rencontrer assez rapidement des limites, ne serait-ce que parce que la machine n'est qu'un automate fini. Pour illustrer l'évolution dans la réalisation partielle et progressive de ce rêve, il faut d'abord mettre en évidence quelques caractéristiques de ce qu'on appelle le *calcul numérique classique*.

Les méthodes de ce domaine ont évolué de manière spectaculaire en gain de précision, de vitesse par la vectorisation, la parallélisation, mais sont restées basées sur deux types de données :

- les entiers négatifs, positifs, nuls, représentés par un nombre fixe de positions binaires (32 par exemple);
- les nombres représentés par le système de *Virgule Flottante Normalisée* (VFN).

Un nombre en VFN binaire est structuré en *mot* contenant un nombre fixe de positions binaires (32 ou 64 en général) organisés schématiquement suivant la liste (0 ou 1, m positions binaires, 0 ou 1, c positions binaires) qui représente (le signe du nombre, la *mantisse* de longueur m ou partie fractionnaire, le signe de l'exposant de 2, la *caractéristique* de longueur c ou exposant) par exemple (1,101110,0,101) donne $-0,101110 \times 2^{+101}$, la première position binaire de la mantisse étant toujours égale à 1.

Cette dernière normalisation permet d'avoir toujours une précision maximale de m positions binaires significatives de la mantisse. En effet, la possibilité de faire *flotter* la virgule en translatant la valeur de l'exposant permet ainsi d'avoir cette configuration de 0, . . . , puis le premier chiffre significatif en tête.

1. © L'OUVERT 98 (2000)

Ce système de représentation, un peu simplifié pour des raisons de concision (on peut entre autres utiliser le système hexadécimal à la place du binaire; d'autre part, on utilise la complémentarité à 2 pour les nombres négatifs) entraîne des limitations évidentes que nous allons illustrer sur quelques exemples.

Une première évidence est que ce système ne permet pas de représenter le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} .

Comme les nombres, représentés en binaire en machine, sont visibles sur écran sous forme convertie en système décimal, par exemple sous forme VFN:

$$-0,2372 \times 10^{+23},$$

nous allons illustrer quelques comportements en utilisant la VFN décimale, en n'oubliant pas qu'avant les calculs, ces nombres sont convertis en VFN binaire.

D'autre part, les seuls opérateurs utilisés sont les opérateurs d'addition, de multiplication, de division, de test de positivité ou de négativité; le test d'égalité n'étant significatif que sur les entiers (on va voir pourquoi). Ces premiers exemples permettent de voir comment le calcul formel permet de franchir ces premiers obstacles, puis d'évoluer dans un système de données infiniment plus varié sur lequel on peut établir des structures algébriques et fonctionnelles.

2 Quelques lacunes du système de virgule flottante

Exemple 1

Dans un système VFN décimal avec une mantisse de longueur 2, les nombres positifs accessibles sont:

$$\begin{array}{cccccc} \vdots & 0,10 \times 10^{-1} & \underline{0,10 \times 10^0} & 0,10 \times 10^{+1} & \underline{0,10 \times 10^{+2}} & \vdots \\ \vdots & 0,11 \times 10^{-1} & 0,11 \times 10^0 & 0,11 \times 10^{+1} & 0,11 \times 10^{+2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0,99 \times 10^{-1} & 0,99 \times 10^0 & 0,99 \times 10^{+1} & 0,99 \times 10^{+2} & \vdots \end{array}$$

La première constatation est que la représentation de \mathbb{R}^+ par ces nombres est de plus en plus dense en s'approchant de l'origine et de moins en moins dense en s'éloignant vers l'infini.

La deuxième remarque concerne la somme des 2 éléments $0,10 \times 10^0$ et $0,10 \times 10^2$, qui est $0,10 \times 10^2$ dans ce système. En effet, pour effectuer cette somme le système aligne les 2 nombres sur l'exposant 2 et l'opération se déroule ainsi:

$$\begin{array}{r} 0,10 \times 10^2 \\ + 0,0010 \times 10^2 \\ \hline 0,10 \times 10^2 \end{array}$$

Même si le résultat dans le registre d'addition peut comporter provisoirement 4 chiffres significatifs, le résultat sera ensuite tronqué à $0,10 \times 10^2$.

Autrement dit, l'addition est inopérante sur ces deux nombres.

Ce phénomène, appelé l'erreur de *troncature* ou d'*arrondi*, est à l'origine de beaucoup de catastrophes, notamment quand on opère sur des nombres d'ordres de grandeur très différents et quand le nombre d'opérations est élevé.

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE?

Exemple 2

Le premier exemple peut être critiquable par le fait que ce système à deux chiffres significatifs est vraiment très fruste. On peut rétorquer que l'évaluation du polynôme pourtant peu excentrique:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^7 + x^8 + x^9$$

en $x = 0,1$ est égale à l'évaluation du polynôme:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^6$$

en cette même valeur de x (même en utilisant le schéma de Horner), avec un langage évolué comme FORTRAN, en précision ordinaire.

En effet, avec une mantisse de longueur 6, ce qui correspond à ce qu'on appelle la *simple précision*, l'addition de 1 à 10^{-7} donne 1, suivant le principe du système VFN exposé dans l'exemple 1.

Ces difficultés apparaissant dans les expressions polynomiales laissent présager des bien plus importantes dans les expressions exponentielles! On voit dès maintenant quelle sera la difficulté de reproduire et de contrôler la croissance exponentielle.

Exemple 3

Suivant le même principe, on voit que l'opération d'addition:

$$1 + 0,009 + 0,009 + 0,009 + 0,009 + 0,009$$

dans un système VFN à trois chiffres significatifs (mantisse de longueur 3) donne comme résultat 1 si les additions sont effectuées de gauche à droite et 1,04 si les additions sont effectuées de droite à gauche.

Ce qui met fin à la propriété de commutativité de l'opération d'addition dans le système VFN.

Exemple 4

Il n'est pas difficile de trouver la solution $y(x) = \frac{1}{e}e^{-x}$ de l'équation différentielle très élémentaire:

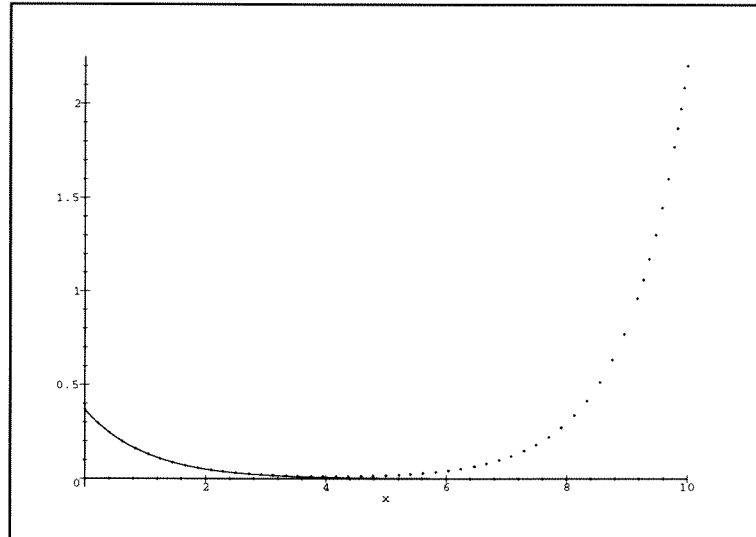
$$y'' - y = 0$$

avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} y(0) &= 1/e \\ y'(0) &= -1/e \end{cases}$$

Si on veut vérifier l'efficacité d'une méthode numérique par *pas*, par exemple les méthodes d'Euler, de Runge-Kutta, etc., il faut commencer par donner une valeur numérique à la valeur initiale $1/e$, par exemple 0,3679 (valeur approchée par excès) puis une valeur numérique à $-1/e$, par exemple $-0,3677$ (valeur approchée

par défaut), puis on effectue le calcul *numérique*. On obtient le résultat représenté graphiquement:



où la courbe obtenue numériquement est dessinée par points et la courbe exacte en trait plein.

Même si $1/e$ et $-1/e$ sont approchés avec plus de chiffres significatifs, avec respectivement une erreur par excès et par défaut sur le dernier chiffre significatif, et si on applique une méthode de Runge-Kutta de plus en plus élaborée, le lecteur peut vérifier que ce phénomène (en fait de bifurcation retardée) se reproduira toujours, avec plus ou moins de retard.

Si on regarde cette équation d'un peu plus près on voit que la solution générale de l'équation homogène est:

$$y(x) = ae^{-x} + be^{+x}$$

Les valeurs des paramètres a et b , qui correspondent à la solution particulière avec les conditions initiales imposées, sont solutions du système linéaire:

$$\begin{cases} y(0) &= a + b = 0,3679 \\ y'(0) &= -a + b = -0,3677 \end{cases}$$

c.à d. $a = 0,3678$ $b = 0,0001$.

Donc la solution est:

$$y(x) = 0,3678e^{-x} + 0,0001e^{+x}.$$

Nous constatons que la croissance de la solution numérique vers $+\infty$ est due uniquement à l'erreur de représentation sur $1/e$, qui entraîne dans la solution la présence d'un coefficient b non nul (même s'il est très petit) de la composante fondamentale dominante e^{+x} quand x tend vers $+\infty$.

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE?

La *vraie* solution $\frac{1}{e}e^{-x}$ est perturbée par la composante ϵe^{+x} .

En posant: $\xi = c - x$, où c est une constante $c \in \mathbb{R}^+$, la solution générale devient: $y(\xi) = ae^{-c+\xi} + be^{+c-\xi}$ et la solution particulière $\frac{1}{e}e^{-x}$ devient $y(\xi) = \frac{1}{e}e^{-c+\xi}$. Ce qui inverse la situation précédente: la solution vraie $\frac{1}{e}e^{-c}e^{+\xi}$ *dominante* cette-fois, sera perturbée éventuellement par une composante *minimale* $\epsilon e^c e^{-\xi}$ qui s'effacera devant la vraie solution quand ξ sera croissante.

L'analyse de ce comportement numérique très répandu dans les équations différentielles (ex: les fonctions spéciales) relève typiquement d'une démarche qui peut s'effectuer à l'aide du calcul formel. Nous y reviendrons.

Exemple 5

Considérons l'équation de récurrence souvent citée de J.M.Muller [9]:

$$a_{n+1} = 111 - \frac{1130}{a_n} + \frac{3000}{a_n a_{n-1}}$$

avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} a_0 = 11/2 \\ a_1 = 61/11 \end{cases}$$

Les calculs effectués en VFN avec 8, 16 ou 30 chiffres significatifs montrent que a_n tend toujours vers 100, avec une très bonne stabilité quand n croît. Les nombres rationnels sont alors représentés par des valeurs approchées en VFN.

Plus loin nous constaterons que si on effectue le calcul avec des nombres rationnels, la limite sera 6 quand n tend vers l'infini. Ce qui pose un problème.

Cet exemple est cité par D.Duval dans un article, paru deux fois dans la revue *La Recherche*, et donnant une très intéressante introduction au Calcul symbolique[18,19].

Exemple 6

Un exemple trivial, mais significatif est donné par l'évaluation de l'expression:

$$y := d \times (a - b + c)$$

avec un système VFN à 3 chiffres significatifs où:

$$d = 100, a = 321, b = 321, c = 0,88.$$

En procédant comme dans l'exemple 1, $a - b = 0$, $a - b + c = 0,88$
d'où $d \times (a + b - c) = 88$.

Dans cette expression, l'ordre des opérations peut être effectué différemment de l'exploration gauche-droite, par exemple si on utilise un *optimiseur*. Si le programme comporte l'expression $h := a + c$ puis l'expression $y := d \times (a - b + c)$, l'optimiseur évalue d'abord $h := 321 + 0,88$, c.à.d. $h = 321$, puis $y := d \times (h - b)$ c.à.d. $d \times (321 - 321)$ et le résultat est 0.

Ce phénomène d'amplification d'une erreur de troncature par un grand coefficient est bien connu dans le calcul de récurrences à 3 termes, très utiles et souvent utilisées pour les calculs de fonctions spéciales, par exemple de polynômes orthogonaux.

Essayons de calculer les fonctions de Bessel $j_n(x)$ (fractionnaires) au voisinage de l'origine.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, les conditions initiales:

$$\begin{cases} j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x} \\ j_1(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x} \end{cases}$$

permettent d'amorcer l'équation de récurrence sur n :

$$j_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{x}j_n(x) - j_{n-1}(x)$$

En fait, cette équation de récurrence est satisfaite à la fois par la fonction de Bessel fractionnaire $j_n(x)$ et par la fonction de Neumann $y_n(x)$ (deux solutions fondamentales d'une équation aux différences finies d'ordre 2). Au voisinage de $x = 0$, par exemple pour $x \leq 0.1$, la valeur de $j_0(x)$ est entachée d'une erreur importante en VFN (indétermination), la valeur de $j_1(x)$ est entachée d'une erreur encore plus importante (singularité en 0). Dans la récurrence, la valeur de $j_n(x)$, qui provient d'une différence fortement tronquée en VFN, est multipliée par le terme $\frac{2n+1}{x}$ qui devient de plus en plus grand quand n croît, tout comme dans le petit exemple trivial ci-dessus. La propagation de cette erreur a pour effet que $j_n(x)$ va tendre vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$, alors que $j_n(x)$ doit théoriquement tendre vers 0 si n tend vers $+\infty$ [1 p.438].

En fait, la propagation de l'erreur d'origine propre à la VFN, est amplifiée par une instabilité essentielle du même type que dans l'exemple 4.

En effet la récurrence, valable également pour la deuxième solution fondamentale $y_n(x)$, qui, elle, tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ au voisinage de 0, introduit une *perturbation dominante*: $j_n(x) + \epsilon y_n(x)$ où $\epsilon \neq 0$.

Il est bien connu, qu'une fois de plus, il faut inverser la situation, en évaluant les $j_n(x)$ par récurrence descendante et normalisation.

3 Ces lacunes revues sous l'angle du calcul formel

Le premier point qui ressort des exemples précédents est la nécessité de pouvoir effectuer un calcul *exact*. En 1966, au colloque national d'analyse numérique (Lille), le professeur d'astronomie P. Bachus (professeur à Strasbourg puis à Lille) a présenté le premier algorithme effectif sur ordinateur d'inversion exacte de la matrice de Hilbert.

Cette matrice H , dont les éléments: $a_i^j = \frac{1}{i+j-1}$ sont rationnels, et qui apparaît naturellement dans bien des résolutions numériques (par exemple les équations normales dans les approximations au sens des moindres carrés de fonctions par des polynômes: $a_n x^n + \dots + a_0$ sur l'intervalle $(0, 1)$) est très mal conditionnée. On sait que la résolution numérique d'un système linéaire avec une matrice de Hilbert d'ordre 10 peut entraîner une erreur relative de l'ordre de 10^{13} fois l'erreur sur le second membre! La solution exacte consiste évidemment à travailler avec des nombres rationnels, donc dans le *corps* \mathbb{Q} pour trouver les éléments de H^{-1} , qui sont d'ailleurs

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE?

des entiers. En 1966, implanter une structure de corps \mathbb{Q} était loin d'être facile (avec tous les problèmes de simplification des fractions, donc de factorisation dans \mathbb{Z}).

Depuis, le fait d'évoluer dans une vraie structure d'anneau ou de corps, par conséquent de manière exacte, a constitué le progrès essentiel apporté par le calcul formel. Du calcul approché en VFN, on est passé au calcul algébrique (Computer Algebra). Cette fois les entiers sont de vrais éléments de l'anneau euclidien \mathbb{Z} (avec une petite restriction toutefois: l'ordre de grandeur des éléments étant limité par la capacité mémoire de la machine et non plus par la longueur du mot binaire fixe).

Les polynômes ne sont pas seulement évalués numériquement, mais traités comme des éléments par exemple de l'anneau euclidien $\mathbb{Z}[x]$. On peut chercher le PGCD de deux polynômes. Un processeur formel *rigoureux* comme ALDOR interdira d'ailleurs l'inversion d'un tel élément, tant qu'on ne sera pas placé dans la structure de corps des fractions de polynômes.

La démarche d'analyse du comportement numérique de l'exemple 4 consistait en fait à effectuer un calcul formel sur un exemple trivial. En effet, un processeur formel donne comme solution de l'équation: $y'' - y = 0$, la liste de 2 solutions fondamentales sous forme de fonctions élémentaires (e^{-x}, e^{+x}). Chercher la solution particulière vérifiant les conditions initiales:

$$\begin{cases} y(0) & = 1/e \\ y'(0) & = -1/e \end{cases}$$

consiste à chercher les coefficients a et b de la solution générale:

$$y(x) = ae^{-x} + be^{+x}$$

en dérivant d'abord formellement $y(x)$:

$$y'(x) = -ae^{-x} + be^{+x}$$

puis en résolvant le système linéaire:

$$\begin{cases} y(0) & = 1/e = a+b \\ y'(0) & = -1/e = -a+b \end{cases}$$

avec le paramètre e et les variables inconnues a et b . D'où: $a = \frac{1}{e}$ et $b = 0$.

Ainsi le calcul formel donne le résultat exact:

$$y(x) = \frac{1}{e}e^{-x} + 0e^{+x},$$

mais nous renseigne également sur l'origine de l'instabilité mathématique due à la confrontation d'une solution *dominante* e^{+x} (pour $x \geq 0$) et d'une solution *minimale* e^{-x} . Il nous indique également le remède de stabilisation des calculs par changement de variable: $x = c - \xi$. Nous avons donc pu *contrôler* le phénomène de croissance et de décroissance exponentielle. Il est important de noter que c'est la connaissance des deux fonctions explicites données par le calcul formel, à la place de courbes intégrales calculées par points, qui permet d'analyser le *comportement* des solutions.

Une fois de plus, on peut reprocher à cet exemple le fait d'être simpliste, mais cette démarche d'analyse de comportement, de recherche de fonctions élémentaires ou spéciales explicites, peut se pratiquer sur des exemples bien plus sophistiqués, comme on le verra par la suite dans l'analyse d'une singularité.

À titre d'exercice on peut essayer de résoudre une équation différentielle un peu plus évoluée:

$$y''(x) + a\left(\frac{1}{3} - 2a\right)y'(x) - \frac{2a^3}{3}y(x) = 0$$

où a est un paramètre. Un processeur formel donne deux solutions fondamentales:

$$[e^{2a^2x}, e^{-\frac{1}{3}ax}].$$

En introduisant les conditions initiales:

$$\begin{cases} y(0) = a - 2 + \pi \\ y'(0) = 2a^2(a - 2) - a\pi/3 \end{cases}$$

formellement, puis numériquement pour $a = 2$, on constatera le même phénomène de perturbation par la solution fondamentale dominante e^{2a^2x} .

On remarquera qu'une recette de vérification de stabilité de méthode d'intégration numérique est de pratiquer l'intégration à *rebours* à partir de l'extrémité de l'intervalle d'intégration et de constater le recouvrement ou le non-recouvrement des deux courbes intégrales.

L'exemple de la récurrence de J.M.Muller [18,19] est encore plus significatif. Cette récurrence détermine les termes de la suite a_n :

$$a_{n+1} = 111 - \frac{1130}{a_n} + \frac{3000}{a_n a_{n-1}}$$

avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} a_0 = 11/2 \\ a_1 = 61/11 \end{cases}.$$

En disposant d'un processeur formel, on peut obtenir la limite 6 en calculant dans la structure du corps \mathcal{Q} , mais on peut aussi déterminer que ce système à 3 points fixes en factorisant le polynôme $P(x) = x^3 - 111x^2 + 1130x - 3000 = 0$ en produit $(x - 5)(x - 6)(x - 100)$.

Nous remercions J.M.Muller, de l'ENS Lyon, de nous avoir communiqué l'origine et la description complète de son exemple. Il est construit à partir de la récurrence linéaire:

$$u_{n+1} = 111u_n - 1130u_{n-1} + 3000u_{n-2}.$$

Les solutions d'un tel système sont de la forme:

$$u_n = \alpha_0(\lambda_0)^n + \alpha_1(\lambda_1)^n + \alpha_2(\lambda_2)^n$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ (on suppose que $|\lambda_0| > |\lambda_1| > |\lambda_2|$) sont les racines $\lambda_0 = 100$, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 5$, du polynôme $P(x)$.

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE?

La suite initiale est obtenue par le rapport de 2 termes consécutifs:

$$a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha_0 100^{n+1} + \alpha_1 6^{n+1} + \alpha_2 5^{n+1}}{\alpha_0 100^n + \alpha_1 6^n + \alpha_2 5^n}.$$

On voit que, si $\alpha_0 \neq 0$, $a_n \rightarrow 100$ si $n \rightarrow +\infty$. Il suffit alors de choisir a_0 et a_1 de sorte que: $\alpha_0 = 0$ (dans notre cas: $a_0 = 11/2$ et $a_1 = 61/11$), et les valeurs de α_1 et de α_2 correspondantes (ici $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 1$).

Tant qu'on effectue les calculs dans le corps \mathcal{Q} , on reste sur la trajectoire *exacte* parcourue par a_n , mais dès qu'on commet une erreur (aussi petite soit-elle) de représentation ou d'arrondi sur les nombres rationnels (notamment en VFN), on est *dévié* sur une trajectoire où α_0 est peut-être très petit mais non nul. D'où la convergence vers 100.

J.M.Muller suggère de fabriquer autant d'exemples qu'on veut à partir d'un choix de: $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ où λ_0 est grand devant λ_1 et λ_2 .

4 Le calcul algébrique

1. Le calcul algébrique exact

Des différents exemples précédents il découle la nécessité d'avoir des outils qui permettent non seulement de travailler de manière exacte, mais encore dans de vraies structures de groupes, d'anneaux, de corps, qui permettent l'utilisation de paramètres ou de nombres algébriques, et qui permettent d'utiliser des fonctions et applications connues ou d'en fabriquer de nouvelles.

La difficulté est de faire correspondre à ces objets mathématiques abstraits des objets qui ont une *forme* de représentation qui peut ensuite être réduite en structures de données sur machine.

On peut imaginer assez facilement comment on peut passer de la structure des entiers à longueur binaire fixe à une structure d'anneau intègre commutatif des entiers à longueur variable, puis construire un algorithme de factorisation unique et un algorithme d'Euclide, encore faut-il utiliser des techniques appropriées.

Un pas décisif du calcul formel a été franchi avec la manipulation des listes de symboles (notamment avec le langage LISP). Soit, par exemple, l'objet symbolique $\frac{2}{3}x^3$ c.à.d. un monôme en x d'ordre 3 avec le coefficient $\frac{2}{3}$. Cet objet mathématique peut avoir une représentation par la liste $(\frac{2}{3}, x, 3)$. On peut lui associer une nouvelle liste

$$(2, x, 2)$$

où le premier élément est $2 = 3 \times \frac{2}{3}$ dans le corps \mathcal{Q} et le troisième élément est $2 = 3 - 1$ dans l'anneau \mathbb{Z} .

Cette règle: $(a, x, n) \rightarrow (na, x, n - 1)$ appliquée à la liste de 3 éléments (a, x, n) où $a \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathbb{Z}$ et x est un symbole choisi, définit la règle de dérivation des monômes en x , qui à ax^n où $a \in \mathcal{Q}$, fait correspondre nax^{n-1} .

Une autre règle qu'on peut appliquer est de faire correspondre à la chaîne de symboles $\text{Log}(x)$ une autre chaîne: $1/x \dots$. Le calcul formel permet ainsi de manipuler, suivant des règles ou des consultations de dictionnaires, des listes de symboles et d'éléments définis précédemment.

Parmi différentes formes *équivalentes*, il faut choisir des représentants particuliers des objets algébriques. Pour le polynôme: $(x + 1)(x - 1)$ on peut choisir $x^2 - 1$ ou plutôt $-1 + x^2$. Ce choix consiste à définir une *forme normale*. Si l'on veut effectuer l'addition de deux polynômes de $A[x]$ où A est un anneau déjà défini, on peut alors effectuer directement la somme deux à deux des éléments correspondants dans la *structure de données* des deux listes des coefficients appartenant à A .

Par exemple, la somme des 2 polynômes de $\mathbb{Z}[x]$: $(x + 1)(x - 1)$ et $2x(x - 3) + 5$ consistera à calculer la somme: $-1 + x^2 + 5 - 6x + 2x^2$; c.à.d. dans les 2 listes de coefficients de \mathbb{Z} : $(-1, 0, 1)$ et $(5, -6, 2)$ on effectuera la somme des éléments 2 à 2 et on trouvera: $(4, -6, 3)$. Donc la somme des 2 polynômes sera: $4 - 6x + 3x^2$.

Le choix d'une forme normale, associée à un objet mathématique abstrait, permet de constater que deux objets sont *égaux*, c.à.d. que *le test de nullité* de leur différence est possible [3].

On peut définir ainsi des formes normales de polynômes à plusieurs variables, par exemple: $x^2 - y^2$ à la place de $(x - y)(x + y)$. Cette fois la forme normale correspond à l'ordre lexicographique sur les indéterminées.

Beaucoup d'expressions se ramènent à une forme polynomiale. Par exemple, l'expression: $(\cos a - \sin b)(\cos a + \sin b) = \cos^2 a - \sin^2 b$ n'est autre que le polynôme précédent où $x = \cos a$ et $y = \sin b$.

Une des difficultés en calcul formel est d'ailleurs la *simplification* des expressions. En effet, $x - 1$ est plus *simple* que $(x^2 - 1)/(x + 1)$, mais $x^{999} - x^{998} + x^{997} \dots - 1$ n'est pas plus *simple* que $(x^{1000} - 1)/(x + 1)$.

En pratique, il existe 2 types de structures de données pour les formes polynomiales: la structure *creuse* et la structure *dense*:

- la structure creuse consiste à représenter: $1 + 3x^2$ comme $((0, 1), (2, 3))$, c.à.d. tous les couples (i, a_i) pour les termes $a_i x^i$ non nuls;
- la structure dense représente le même polynôme par $(1, 0, 3)$, c.à.d. par la liste de tous les coefficients a_i .

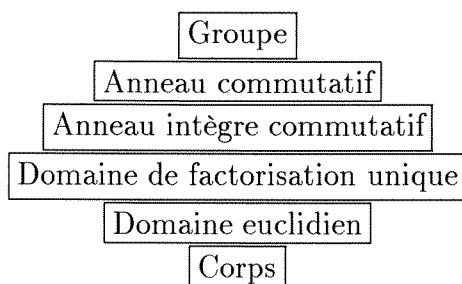
Si on veut vérifier que: $(x^{1000} + 1)(x^{1000} - 1) = x^{2000} - 1$, une méthode dense nécessite un million de multiplications, tandis qu'une méthode creuse n'en nécessite que quatre, comme dans $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$.

Lorsque les représentations des objets mathématiques sont définies, on peut construire les algorithmes, par exemple l'algorithme d'Euclide. Mais cet algorithme doit être construit une fois pour toutes, c.à.d. il doit permettre de calculer le $\text{PGCD}(a, b)$ où a et b sont des éléments d'un domaine euclidien quelconque.

Dans le schéma ainsi défini, les exécutions des opérations élémentaires de cet algorithme sont ensuite concrétisées selon la spécificité du domaine euclidien choisi. Par exemple, si a et b appartiennent à \mathcal{Q} , les multiplications se font dans \mathcal{Q} , tandis que si a et b appartiennent à $\mathcal{Q}[x]$, les multiplications se font dans la structure de $\mathcal{Q}[x]$,

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE?

qui fait d'ailleurs appel elle-même à la multiplication dans \mathcal{Q} . En fait, l'algorithme d'Euclide est construit pour deux éléments appartenant à la *catégorie* indifférenciée des domaines euclidiens. Quand cet algorithme se déroule avec deux éléments d'un domaine euclidien particulier (par exemple $\mathcal{Q}[x]$) les opérations se font dans ce domaine spécifique. Ceci implique une structure hiérarchique des catégories entre elles, suivant, par exemple, le schéma suivant:



Ce schéma n'est qu'une petite partie du schéma de structure général, que l'utilisateur peut agrandir à son gré. Ainsi, si D est un domaine de factorisation unique, alors $D[x]$ est un domaine de factorisation unique dont les éléments premiers sont des polynômes irréductibles.

Une partie essentielle d'un processeur formel est évidemment constitué par les algorithmes de factorisation, par exemple la factorisation du polynôme de Wilkinson:

$$x^{20} + 210x^{19} + \dots + 20! = (x + 1)(x + 2) \cdots (x + 20),$$

qui jouent un rôle central dans la réduction des fonctions rationnelles.

Dans l'étude des singularités, nous utiliserons des algèbres plus évoluées, notamment des algèbres non commutatives dont les éléments sont des opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynomiaux, ou rationnels.

Par exemple, si on note un opérateur élémentaire de dérivation par D , où

$$D = \frac{d}{dx},$$

un premier opérateur est défini par

$$op1 = 3x^2 D^2 + 2D + \frac{1}{x}.$$

D^2 est en fait l'opérateur $D \times D$, c.à.d. d^2/dx^2 . Un deuxième opérateur est défini par

$$op2 = op1 \times (5xD + 7).$$

L'élément $op2$ est évalué formellement:

$$op2 = 15x^3 D^3 + (51x^2 + 10x) D^2 + 29D + \frac{7}{x}.$$

On peut faire agir ces opérateurs sur des polynômes, des fraction rationnelles, ou des séries formelles. Si on fait agir les opérateurs précédents sur:

$$f = \frac{x^4 + 1}{x^2},$$

on trouve que:

$$(op1 \times op2 - op2 \times op1)(f) = \frac{75x^4 - 540x + 75}{x^4}$$

et on constate que la loi de multiplication des opérateurs n'est pas commutative. On voit quel est l'intérêt d'un algorithme de factorisation à gauche ou à droite dans une telle algèbre non commutative.

Les séries formelles peuvent être considérées elles-mêmes comme des éléments d'une algèbre particulière, comme l'algèbre des séries Gevrey: $\sum_n a_n x^n \in \mathcal{Q}[i][[x]]$, dont les coefficients a_n sont tels que:

$$|a_n| < CA^n \Gamma(1 + \frac{n}{k}) \quad n \in \mathbb{N}, \quad A \in \mathbb{R}^+, \quad C \in \mathbb{R}^+, \quad k \in \mathcal{Q}.$$

Dans l'analyse des singularités, qui sera exposée plus loin, les séries formelles seront construites de la manière suivante: une liste de m conditions initiales: (a_0, \dots, a_{m-1}) , où $a_k \in \mathcal{Q}[i]$ (i désigne l'élément imaginaire), suivi d'un opérateur aux différences finies: $\Delta = p_0(j)a_j + \dots + p_m(j)a_{j+m}$ où $p_k(j) \in \mathcal{Q}[i][j]$.

Un coefficient a_n , où $n \in \mathbb{N}$ est ainsi engendré par m valeurs précédentes (au début par les conditions initiales), à l'aide de l'équation aux différences finies:

$$p_0(n-m)a_{n-m} + \dots + p_m(n-m)a_n = 0.$$

Les opérateurs des équations différentielles linéaires et les opérateurs des équations aux différences linéaires peuvent être traités dans un cadre unifié. Ils sont considérés comme éléments d'algèbres particulières non commutatives d'Ore [10,11,12], où les transformations de Mellin constituent le pont entre ces 2 types d'opérateurs et d'algèbres.

Un cas particulier d'algèbre d'Ore est l'algèbre de Weyl des opérateurs aux dérivées partielles à coefficients polynomiaux. Il existe bien d'autres structures d'algèbres (algèbres de Lie, de Grassmann, etc...) dans les bibliothèques de calcul formel.

Dans ce cadre algébrique, on peut également inclure l'utilisation des *paramètres*. Un exemple significatif sur l'apport du calcul formel au calcul numérique *classique* est le système linéaire suivant [2]: soit la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 - \epsilon & 2 & -4 \\ 3/2 - \epsilon & 3 & -5 \\ 5/2 + \epsilon & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

où ϵ est un paramètre. La résolution formelle du système: $Ax = b$ où: $b = [1, 2, 3]$, donne comme résultat:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1}{2\epsilon} \\ x_2 = \frac{1+7\epsilon}{4\epsilon} \\ x_3 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

En évaluant le résultat pour $\epsilon = 10^{-20}$, on trouve:

$$x_1 = -50000000000000000000 \quad x_2 = 100000000000000000007/4 \quad x_3 = 3/4$$

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE?

En effectuant la résolution numériquement en VFN (normalement avec une mantisse de 18 chiffres décimaux en *double precision*), il faudrait d'abord évaluer les éléments de matrice en remplaçant ϵ par sa valeur et, par l'effet des erreurs d'arrondi, la matrice serait singulière.

Un autre exemple de calcul avec paramètre consiste en l'évaluation du rang de la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

en fonction de a .

Ce rang vaut 1 si $a = 1$, sinon le rang vaut 2.

La gestion des nombres algébriques en calcul formel est analogue à la gestion des paramètres. En effet, l'équation $x^2 - 2 = 0$ admet $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ comme solutions. En pratique, on définit ces solutions par le paramètre a qui est tel que, si $x = a$, $x^2 - 2 = 0$, sinon $x^2 - 2 \neq 0$.

La représentation des racines par les radicaux $\sqrt{}$ est en fait une représentation symbolique particulière, qui peut être utilisée pour les équations polynomiales d'ordre inférieur à 5, d'après la théorie de Galois. Mais dans ce cas, comme dans le cas d'ordre supérieur, un nombre algébrique est caractérisé par le seul fait qu'il vérifie une équation polynomiale à coefficients appartenant à \mathbb{Z} ou eux-mêmes algébriques.

La gestion des nombres algébriques doit être effectuée à plusieurs niveaux. En effet, ils peuvent être racines d'un premier polynôme dont les coefficients sont eux-mêmes racines d'un deuxième polynôme, dont les coefficients sont racines d'un troisième polynôme à coefficients dans \mathbb{Z} , etc... Pour effectuer des calculs qui dépendent d'un certain nombre de paramètres ou de nombres algébriques, il faut faire appel à des algorithmes élaborés permettant de réaliser des évaluations dans une *clôture algébrique* ou plus généralement dans une *clôture dynamique constructible* [14,20,21]. Ces algorithmes, qui, depuis une vingtaine d'années, font l'objet de recherches actives (voir le code D5[14] puis D7 [14,20,21], les travaux des équipes de recherche du LACO de Limoges, du LMC de Grenoble), sont en constante évolution.

En effet, une équation différentielle très simple:

$$(x^2 - 2)y'' + p_1(x)y' + p_2(x) = 0$$

qui a comme équation caractéristique $x^2 - 2 = 0$, a des singularités pour les racines de $x^2 - 2$.

Les nombres algébriques $+\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$ vont se retrouver dans toutes les expressions (parties exponentielles, séries, etc...) constitutives des solutions formelles au voisinage de ces 2 singularités. Il faut donc *explorer* toutes les branches de l'arborescence créée par les *cas* constitués par $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ ou toutes les racines d'un polynôme caractéristique d'ordre éventuellement plus élevé, c-à-d les nombres algébriques en présence.

Peuvent s'y rajouter un certain nombre de paramètres.

Les algorithmes de *clôture dynamique constructible* permettent de construire cette arborescence et de dérouler les algorithmes (par exemple de calcul de rang d'une matrice, de solutions d'équations différentielles, etc...) dans tous les *cas*.

À la fin des exécutions pendant lesquelles interviennent les factorisations, les simplifications des expressions rationnelles, etc...les résultats sont formels, par exemple une série formelle $\sum a_n x^n$ dont les coefficients sont exprimés en fonction de ces nombres algébriques.

2. Les limites du calcul algébrique

À ce moment, se pose un problème fondamental, celui de l'évaluation numérique. En effet, si on est dans le cas où une série formelle à coefficients algébriques est convergente pour une valeur de x (par ex. $x = 0.1$) il faut d'abord *évaluer numériquement* les termes de la série, puis *évaluer* la somme de la série.

Il faut donc franchir la barrière entre l'évaluation exacte, algébrique et l'évaluation numérique approchée avec l'aide de la VFN. En fait, au niveau du calcul scientifique, nous sommes à la limite de l'algèbre et de l'analyse. Le problème immédiat est le problème de la représentation de \mathbb{R} et de \mathbb{C} .

Comme on l'a vu, on peut manipuler e ou π comme paramètres dans les expressions algébriques, mais comment évaluer numériquement ces éléments?

Il y a deux solutions possibles: soit évaluer par encadrement de nombres rationnels avec un intervalle d'écart prédéfini, ce qui risque d'être assez lourd pour la suite des calculs *par encadrements*, soit *approcher en VFN* (dont on choisit le nombre de chiffres significatifs) les éléments de \mathbb{R} ou \mathbb{C} (par $a+ib$ dans le cas de \mathbb{C} , où $a, b \in \mathbb{R}$). Par exemple, dans le cas de e ou de π , on peut approcher ces valeurs en évaluant des séries formelles tronquées. Mais cette *conversion numérique* doit être effectuée et *contrôlée* proprement.

On voit maintenant à quel point le test de nullité en VFN est aléatoire. En effet, il n'y a aucune chance, même si toutes les précautions sont prises, que $\log(e) - 1$ soit nul, si le \log et e sont calculés par des séries tronquées. Un exemple nous montre immédiatement quelles peuvent être les difficultés rencontrées, notamment quand il s'agit de convertir un nombre algébrique en nombre numérique VFN.

Reprenons le polynôme:

$$W(x) = (x + 1)(x + 2) \cdots (x + 20).$$

Wilkinson a développé ce polynôme:

$$W(x) = x^{20} + 210x^{19} + \cdots + 20!,$$

puis a introduit une perturbation sur le coefficient de x^{19} de l'ordre de *l'erreur de représentation machine* en VFN à mantisse de 24 positions binaires:

$$\overline{W}(x) = W(x) + 2^{-23}x^{19}.$$

Par un procédé de calcul *exact*, Wilkinson a trouvé que $\overline{W}(x)$ avait 10 racines réelles et que les parties imaginaires des autres racines étaient comprises entre 0.8 et 3.

Cet exemple montre bien quelle est l'instabilité des racines d'un polynôme par rapport à la définition des coefficients. Ceci prouve bien qu'un algorithme conçu exclusivement en VFN est voué à l'échec, à cause de la propagation de l'erreur d'approximation numérique qu'accentue ce phénomène d'instabilité mathématique.

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE?

Le problème très important de calcul des racines réelles de polynômes peut être résolu par un algorithme *mixte formel-numérique* dont nous exposons un schéma résumé. La première phase *formelle* consiste à *isoler* les racines.

En supposant que le polynôme $p[x]$ d'ordre n à coefficients rationnels, ou à coefficients $\in \mathbb{Z}$ (la multiplication des coefficients rationnels par le ppcm des dénominateurs donne une équation polynomiale équivalente) ne comporte pas de racines multiples, on peut construire formellement la *séquence de Sturm* des polynômes. Sinon, on peut réduire formellement la multiplicité des racines à 1.

Cette séquence est au signe près celle obtenue par l'algorithme d'Euclide:

$$\begin{cases} p_0[x] = p[x] \\ p_1[x] = p'[x] \\ \vdots \\ p_i[x] = -\text{reste}(p_{i-2}[x], p_{i-1}[x]) \\ \vdots \\ p_k[x] = \text{constante} \end{cases}$$

où $(\ , \)$ indique la division et $k \leq n$.

En évaluant ces polynômes en une valeur rationnelle de x (qui n'est pas racine), on peut décompter *exactement* le nombre $V(x)$ de changements de signe de cette séquence.

En utilisant le théorème de Sturm, qui permet de dire qu'il y a exactement $|V(p) - V(q)|$ racines réelles entre 2 valeurs rationnelles p et q , on peut par un procédé de dichotomie de l'intervalle (A, B) de 2 nombres rationnels de \mathbb{R} , isoler toutes les racines réelles comprises entre A et B .

Ce procédé formel permet, en un nombre fini d'étapes, de déterminer des encadrements rationnels de ces racines simples même si elles sont très proches les unes des autres; ce qui est irréalisable numériquement pour les raisons exposées plus haut.

Ce travail étant achevé, on peut passer à la phase *numérique* qui permet d'une manière rapide d'approcher ces racines isolées auparavant, avec une précision déterminée, par une méthode de type Newton-Raphson. On aurait pu arriver au même résultat en poursuivant le procédé de dichotomie, mais il est bien connu que la convergence de la méthode de Newton est quadratique, alors que la convergence de la méthode dichotomique est très lente.

Nous disposons donc d'une conversion *contrôlée* d'un nombre algébrique en une approximation numérique en VFN, dans le cas réel. Il existe des méthodes analogues dans le cas de racines complexes.

À partir de ce moment on peut évaluer des sommes de séries (par exemple pour évaluer e ou π) ou toute toute expression contenant un nombre algébrique. L'exemple suivant nous illustre cette double démarche, algébrique et analytique.

Soit un système différentiel non linéaire autonome:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_1x_3 \\ \dot{x}_2 = 7x_2 + 2x_3 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = 3x_2 + 4x_3 + x_2^2 + x_1^3 \end{cases}$$

où x_1, x_2, x_3 sont des fonctions du temps t et où le point indique la dérivation par rapport à t . Ce système a la forme: $\dot{X} = AX + F(X)$ où $F(X)$ désigne la partie non linéaire en x_1, x_2, x_3 .

Pour réduire ce système à une forme plus simple, nous effectuons une première transformation linéaire non singulière: $X = TY$ sur les coordonnées. Donc: $\dot{X} = T\dot{Y}$ et $\dot{Y} = T^{-1}ATY + T^{-1}F(X)$ afin de réduire A à la forme de Jordan: $T^{-1}AT = J$.

Nous obtenons ainsi un nouveau système dans un nouveau système de coordonnées:

$$\dot{Y} = JY + G(Y)$$

où $G(Y)$ est la partie non linéaire. Dans notre cas, J est diagonale:

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33} \end{bmatrix}$$

Les éléments diagonaux λ_i , $i = 1, 2, 3$ de J (racines de l'équation caractéristique) sont des nombres algébriques. Dans notre cas, où le nombre d'équations est 3, ils peuvent être exprimés par radicaux.

Si J est diagonale on peut essayer de linéariser ce système ou le mettre sous forme d'un système *le moins non linéaire possible*, grâce à un changement si possible *régulier*. Pour trouver une telle transformation, concrétisée par une série formelle en x_1, x_2, x_3 , la série de Poincaré, convergente ou divergente, il faut analyser si le système est *résonnant* ou non.

On dit qu'un système d'ordre n est résonnant s'il existe des relations du type:

$$\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i = \lambda_j \quad \text{où } m_i \in \mathbb{N}, \quad j \in 1, \dots, n, \quad \text{et } \sum_{i=1}^n m_i \geq 2.$$

Or ce test de présence ou d'absence de résonance n'est possible qu'en évaluant ces expressions exactement, c.à.d. avec les nombres algébriques λ_i et des entiers m_i .

Dans notre exemple, il est facile de constater qu'il n'y a pas de résonance, mais dans le cas où la dimension du système est ≥ 4 , ces tests d'égalité, donc de nullité, impossibles en VFN, comme on l'a constaté, ne peuvent se faire que dans le corps des nombres algébriques.

En supposant qu'il n'y a pas de résonances et qu'on n'est pas en présence de *petits dénominateurs* (pour plus de détails, il faudrait développer la théorie des singularités de systèmes dynamiques cf[16,24]), on peut construire une transformation régulière qui linéarise ce système.

Dans ce cas, les solutions du système linéarisé peuvent s'exprimer explicitement sous forme de combinaisons linéaires d'exponentielles du type: $x(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-\lambda_i t}$. Cette fois, il s'agit de trouver une bonne approximation numérique des valeurs algébriques de λ_i . Nous sommes donc ramenés au problème précédent d'évaluation numérique des racines du polynôme caractéristique.

5 Le calcul contrôlé

Le but de ce paragraphe est de montrer, dans une étude mathématique particulière, quelle est la part respective de ces différents ingrédients *numériques, formels, symboliques, algébriques*.

Nous allons voir aussi comment les résultats formels permettent de prévoir des comportements numériques et finalement de contrôler et de structurer l'ensemble des calculs.

Nous nous proposons d'étudier la singularité à l'origine de l'équation différentielle:

$$4x^5y'' + 2x^2y' + y = 0.$$

Cette étude peut se faire à plusieurs niveaux d'approfondissement:

- Classer la singularité, chercher les invariants formels.
- Calculer les solutions formelles au voisinage de cette singularité.
- Analyser le comportement des solutions au voisinage de la singularité, plus particulièrement dans les différentes directions autour de cette singularité.
- Calculer efficacement ces solutions avec l'aide des informations recueillies aux trois points précédents, c.à.d. établir une correspondance entre les solutions formelles et les vraies fonctions holomorphes qui sont solutions dans des secteurs déterminés, puis évaluer ces fonctions. Dans ce but nous utiliserons les éléments de théorie de la k-sommabilité établie par J.P.Ramis[25,26,28].

1. Classification

Un instrument spécifique formel, lié à cette équation, *le polygone de Newton* (défini par B.Malgrange et J.P.Ramis) nous renseigne sur la nature de la singularité et la forme des solutions.

Définition du polygone de Newton (Newton, Ramis, Malgrange) en $x = 0$, d'un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathcal{C}[x]$:

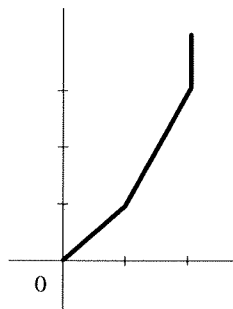
$$L = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^m p_{i,j} x^j \frac{d^i}{dx^i}.$$

Si $Q^+(u, v) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq u, y \geq v\}$, est le second quadrant de \mathbb{R}^2 translaté en (u, v) , on définit:

$$M^+(L) = \bigcup_{p_{i,j} \neq 0} Q^+(i, j - i).$$

Le *polygone de Newton* de L est l'enveloppe convexe inférieure de $M^+(L)$. Toutes ses pentes finies sont rationnelles. Voici le polygone de Newton de l'équation:

$$4x^5y'' + 2x^2y' + y = 0 :$$



En-dehors des demi-droites de pente 0 et infinie, il y a 2 segments respectivement de pentes 1 et 2. Le fait qu'il y a au moins une pente (en-dehors de la pente infinie) non nulle, nous indique que nous sommes en présence d'une *singularité irrégulière*: ce qui veut dire, entre autres, que l'une des deux solutions fondamentales formelles indépendantes comportent une partie exponentielle d'ordre 2 (comme la pente la plus forte 2), c.à.d. en $e^{1/ax^2+1/bx}$ ($a, b \in \mathbb{C}^2$ et que ces solutions comportent également, en général, au moins une série formelle divergente.

Ces séries sont *Gevrey* de classe k et k -sommables (k prenant la valeur 2 de la plus forte pente du polygone de Newton). Rappelons qu'une série formelle: $\sum_n a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ est une série formelle de classe Gevrey k (cf. par.4.1) si les coefficients a_n sont tels que:

$$|a_n| < CA^n \Gamma(1 + \frac{n}{k}) \quad n \in \mathbb{N}, \quad A \in \mathbb{R}^+, \quad C \in \mathbb{R}^+, \quad k \in \mathbb{Q}.$$

Si le polygone de Newton n'avait que des segments de pente nulle (en dehors de la demi-droite de pente infinie), nous serions en présence d'une *singularité régulière*, ce qui signifierait que les solutions ne comporteraient pas de parties exponentielles et que les séries apparaissant dans ces solutions seraient toutes convergentes.

Par un calcul purement formel, nous obtenons ainsi un ensemble de renseignements essentiels sur la nature de la singularité, sur la forme des solutions en cette singularité, sur leurs parties exponentielles et sur la structure de leurs séries formelles.

2. Calcul des solutions formelles au voisinage de la singularité

À présent, les solutions fondamentales formelles peuvent être calculées de manière exacte. Ce calcul est effectué en deux temps:

- **L'algorithme formel de Newton** [3,10,15,36]

La substitution: $\hat{y}(x) = e^{1/ax^2} \hat{\varphi}(x)$ dans l'équation différentielle:

$$4x^5 \hat{y}'' + 2x^2 \hat{y}' + \hat{y} = 0$$

aboutit à la nouvelle équation différentielle:

$$4x^6 \hat{\varphi}'' + 2x^3 (1 - \frac{8}{a}) \hat{\varphi}' + (\frac{24x^2}{a} + x + \frac{16}{a^2} - \frac{4}{a}) \hat{\varphi} = 0$$

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE?

qui dépend du paramètre a .

Afin de *relever* au maximum la pente du premier segment du polygone de Newton, c.à.d. de la rendre plus proche de l'horizontale, on essaie de maximiser la borne inférieure de $j - i$ (voir la définition du polygone de Newton) pour $i = 0$ dans cette équation de la forme $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{i,j} x^j \frac{d^i}{dx^i} = 0$.

Comme $\sum_{j=0}^m p_{0,j} x^j \frac{d^0}{dx^0} = (\frac{24x^2}{a} + x + \frac{16}{a^2} - \frac{4}{a})\hat{\varphi}$, il faut annuler la partie $\frac{16}{a^2} - \frac{4}{a}$, d'où la valeur $a = 4$. Et l'équation différentielle devient *l'équation réduite*:

$$4x^5 \hat{\varphi}'' - 2x^2 \hat{\varphi}' + (6x + 1)\hat{\varphi} = 0$$

vérifiée par $\hat{\varphi}$;

Comme la pente du premier segment n'est encore pas nulle, on réitère dans cette équation réduite la substitution: $\hat{\varphi}(x) = e^{1/bx} \hat{\psi}(x)$, qui conduit à la valeur: $b = -2$ et la nouvelle équation différentielle *réduite*:

$$4x^4 \hat{\psi}'' + (4x^2 - 2x)\hat{\psi}' - (4x - 7)\hat{\psi} = 0,$$

vérifiée par $\hat{\psi}(x)$.

Nous avons donc obtenu, par un algorithme formel, la *partie irrégulière* de $\hat{y}(x) = e^{1/4x^2 - 1/2x} \hat{\psi}(x)$, c.à.d. $e^{1/4x^2 - 1/2x}$ et l'équation différentielle vérifiée par $\hat{\psi}(x)$. Le polygone de Newton de cette équation réduite a maintenant un segment de pente nulle.

Nous constatons que les paramètres a et b sont solutions d'équations polynomiales (appelées *équations caractéristiques associées* aux différentes pentes) dont les coefficients appartiennent à \mathbb{Q} . Dans le cas général, ces racines sont des nombres algébriques.

– L'algorithme formel de Frobenius [3,10,15,36]

Cet algorithme consiste à calculer la solution formelle correspondant au segment de pente nulle du polygone de Newton. Il s'applique d'emblée dans le cas d'une singularité régulière.

La substitution $\hat{\psi}(x) = x^\mu \hat{g}(x)$ dans l'équation différentielle vérifiée par $\hat{\psi}(x)$ conduit à la résolution algébrique de l'équation polynomiale *indicielle* $7 - 2\mu = 0$, dont la racine μ est, dans le cas général, un nombre algébrique, et, dans notre cas particulier un rationnel: $\mu = 7/2$.

L'algorithme nous donne également *l'équation réduite* par substitution:

$$4x^3 \hat{g}'' + 2(14x^2 + 2x - 1)\hat{g}' + 5(7x + 2)\hat{g} = 0,$$

qui admet comme solution la série formelle:

$$1 + 5x + (105/4)x^2 + (525/4)x^3 + \dots$$

Les coefficients de la série formelle sont obtenus par l'équation de récurrence:

$$(7 + 2j)(5 + 2j)a_j + 2(7 + 2j)a_{j+1} - (4 + 2j)a_{j+2} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

où $a_0 = 1$ et $a_1 = 5$, associée à l'équation différentielle *génératrice*:

$$4x^3\hat{g}'' + 2(14x^2 + 2x - 1)\hat{g}' + 5(7x + 2)\hat{g} = 0.$$

L'équation de récurrence peut être obtenue par identification des coefficients a_n , après substitution de la série formelle $\sum_n a_n x^n$ à $\hat{g}(x)$ dans l'équation différentielle génératrice.

D'une manière générale, en termes plus techniques, l'opérateur de récurrence (ou de différences-finies) est obtenu à partir de l'équation différentielle génératrice par une transformation formelle de Mellin, qui à un élément de l'algèbre d'Ore des opérateurs différentiels fait correspondre un élément de l'algèbre d'Ore des opérateurs aux différences finies.[10,11,12]

Ces substitutions purement formelles ont conduit à une solution formelle complète:

$$\hat{y}_1(x) = e^{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x}} x^{7/2} (1 + 5x + (105/4)x^2 + (525/4)x^3 + \dots)$$

L'autre solution formelle fondamentale calculée suivant les mêmes algorithmes est:

$$\hat{y}_2(x) = e^{\frac{1}{2x}} x^{1/2} (1 - 3x + (3/4)x^2 - (1/4)x^3 - (15/32)x^4 + \dots).$$

Dans le cas général, les solutions formelles peuvent être plus compliquées.

L'algorithme de Frobenius peut en effet introduire des combinaisons de séries avec des puissances de $\text{Log}(x)$ si les racines de l'équation indiciale diffèrent de nombres entiers.

D'autre part, les pentes rationnelles du polygone de Newton peuvent introduire des ramifications du type: $x = t^q$ où $q \in \mathbb{N}^+$.

Nous constatons ici, malgré la simplicité de la place de la singularité (l'origine), l'apparition possible de nombres algébriques dans les racines a et b des équations caractéristiques et les racines μ de l'équation indiciale, puis, par conséquent, dans les coefficients des séries formelles (ici $a = 4$, $b = -2$, $\mu = 7/2$ sont rationnels, donc il en est de même pour les coefficients des séries).

Il faut ajouter que, si la singularité est située ailleurs qu'à l'origine, comme dans l'équation différentielle:

$$(x^2 - 2)y'' + p_1(x)y' + p_2(x) = 0$$

du paragraphe 4.1, il faut dès le départ, effectuer une translation pour ramener la singularité à l'origine; ce qui a pour effet d'introduire dès le départ des nombres algébriques dans les coefficients de l'équation différentielle, puis dans les différents algorithmes de calcul des solutions.

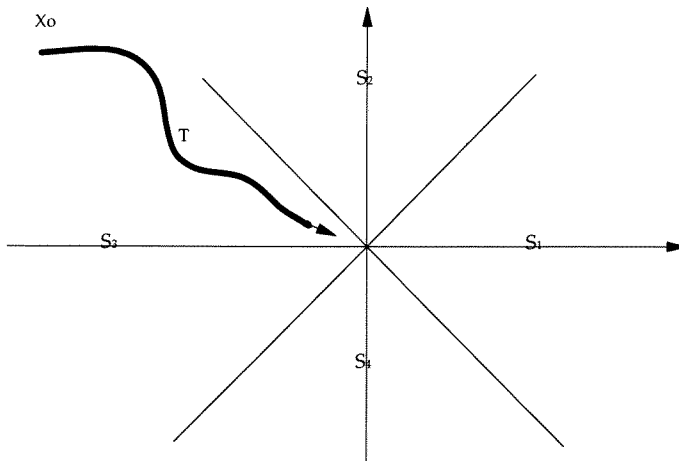
3. Comportement des solutions au voisinage de la singularité

Les résultats formels des 2 sous-paragraphe précédents nous permettent maintenant de procéder à une étude de *comportement*.

Les parties exponentielles $e^{-1/2x}$ et $e^{1/4x^2 - 1/2x}$ nous donnent explicitement le comportement des vraies solutions quand x tend vers 0 dans les différents secteurs

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE?

du plan complexe \mathcal{C} centrés à l'origine (en sachant, d'après la suite, que les autres parties sont à croissance ou à décroissance modérée).



La solution $y_1(x)$ correspondant à $\hat{y}_1(x)$ tend exponentiellement vers 0 strictement à l'intérieur des secteurs S_2 et S_4 et exponentiellement vers l'infini strictement à l'intérieur des secteurs S_1 et S_3 . La solution $y_2(x)$ correspondant à $\hat{y}_2(x)$ tend exponentiellement vers 0 dans le demi-plan de \mathbb{R}^- et exponentiellement vers l'infini dans le demi-plan de \mathbb{R}^+ .

Nous pouvons faire l'étude du comportement des solutions du type $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ (nous supposons que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les vraies fonctions qui seront définies plus loin et qui correspondent aux solutions formelles $\hat{y}_1(x)$ et $\hat{y}_2(x)$) sur une trajectoire dans \mathcal{C} , partant d'un point initial X_0 et s'approchant de O .

Par exemple, en partant de X_0 , à l'intérieur de S_3 , en s'approchant de O suivant la trajectoire T de la figure, et en essayant de calculer une solution du type $y_2(x) + \epsilon y_1(x)$ où $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ est petit, on s'apercevrait que $y_2(x)$, solution *minimale* devant tendre vers 0, serait rapidement annihilée par la solution *dominante* $y_1(x)$, comme dans l'exemple 4 du par.2. Il est donc inutile d'essayer de s'approcher *numériquement* de la singularité, à cause de ces comportements exponentiels, en plus opposés dans des secteurs adjacents.

En outre, les solutions formelles nous indiquent quelles sont, en vue du calcul des *sommes* des séries divergentes, les *directions singulières*. En effet, les directions de plus forte décroissance, autour de l'origine, de la partie exponentielle $e^{1/4x^2}$ nous donnent le *spectre singulier* ou *directions anti-Stokes*.

Ces directions sont *infranchissables* lors du procédé de sommation de Borel-Laplace (nous verrons pourquoi dans le paragraphe suivant) et donnent la configuration *polarisée*, autour de l'origine, du comportement des solutions. Toute la structure des solutions autour de la singularité est ainsi mise en place et toutes les données exactes utiles sont à notre disposition pour planifier les approximations numériques.

Cette étude formelle aurait pu être menée avec des nombres algébriques plus *sophistiqués* et également avec un certain nombre de paramètres qui auraient pu apparaître dans l'équation différentielle du départ.

4. L'isomorphisme de Borel-Laplace

La théorie de la k -sommabilité de J.P.Ramis [23,25,26,28] nous donne une méthode de calcul des vraies fonctions holomorphes solutions dans des secteurs délimités avec l'aide du spectre singulier. Elle est basée sur les isomorphismes de Borel-Laplace, qui, à une série formelle $\hat{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ solution k -sommable d'une équation différentielle, fait correspondre une *somme* $g(x)$, fonction holomorphe solution, dans un secteur d'ouverture plus grande que π/k , de l'équation différentielle, et dont le développement de Taylor est la série formelle $\hat{g}(x)$.

Cet isomorphisme se décompose en 2 temps:

- une *descente formelle* de l'espace des x dans le *plan de Borel* des ξ par une transformation de Borel formelle;
- une *remontée numérique* du plan de Borel dans l'espace initial par une transformation numérique de Laplace.

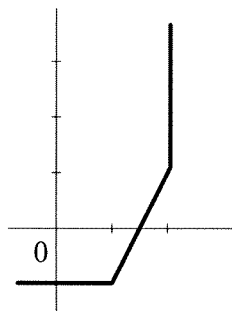
Dans l'exemple que nous avons choisi, nous avons obtenu la série formelle:

$$\hat{g}(x) = 1 + 5x + 105/4x^2 + 525/4x^3 \dots$$

qui est est l'une des 2 solutions de l'équation différentielle:

$$4x^3 \hat{g}'' + 2(14x^2 + 2x - 1)\hat{g}' + 5(7x + 2)\hat{g} = 0.$$

Le polygone de Newton de cette équation est composé d'un segment de pente nulle et d'un segment de pente 2:



Nous pouvons en déduire que la série formelle $\hat{g}(x)$, correspondant à la pente nulle, est 2 -sommable.

La deuxième solution fondamentale de cette équation différentielle, calculée par la méthode de Newton, est de la forme $e^{-\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x}} x^\mu \hat{h}(x)$; donc les directions singulières sont \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- .

La 2 -sommabilité entraîne que la *somme* $g(x)$ de $\hat{g}(x)$ dans toute direction non singulière d , issue de l'origine est définie par la représentation intégrale de Laplace:

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \int_d \varphi(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{x^2}} d\xi^2$$

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE?

où $\varphi(\xi)$ est le prolongement analytique de la somme de la série formelle $\hat{\varphi}(\xi)$ convergente au voisinage de l'origine et où $\hat{\varphi}(\xi)$ est la transformée de Borel formelle d'ordre $k = 2$ de $\hat{g}(x)$.

Chaque terme de la série transformée de Borel formelle est la transformée de Borel d'ordre k du terme correspondant de la série $\hat{g}(x)$:

$$\hat{B}_k(a_n x^n) = \frac{a_n \xi^n}{\Gamma(1 + \frac{n}{k})}.$$

Dans notre cas:

$$\hat{B}_2(a_n x^n) = \frac{a_n \xi^n}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}.$$

Remarque. Pour des raisons de compatibilité avec l'article référencé [34], nous utilisons la définition: $f(x) = \frac{1}{x} \int_d \varphi(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$ pour la transformée de Laplace et la définition: $\hat{B}_k(a_n x^n) = \frac{a_n \xi^n}{\Gamma(1+n/k)}$ pour la transformée de Borel. Plus récemment, la théorie de la k -sommation fait usage de la transformée de Laplace:

$$f(x) = \int_d \varphi(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

et de la transformée de Borel: $\hat{B}_k(a_n x^n) = \frac{a_n \xi^{n-k}}{\Gamma(\frac{n}{k})}$.

Il y a donc un obstacle au calcul exact des fonctions Gamma de nombres fractionnaires (valeurs transcendantes). Pour éviter cet inconvénient, nous scindons $\hat{g}(x)$ en deux sous-séries:

$$\hat{\psi}_1(u) + x\hat{\psi}_2(u) \quad u = x^2.$$

Il est facile de démontrer que chaque sous-série est *1-sommable* dans les directions d_1 correspondant à d dans la transformation $u = x^2$.

Cette fois les transformées de Borel

$$\hat{B}_1(b_n u^n) = \frac{b_n \xi^n}{\Gamma(1+n)}$$

ne comportent que des valeurs entières de la fonction Gamma.

Les coefficients des transformées de Borel formelles: $\hat{\varphi}_1(t)$ et $\hat{\varphi}_2(t)$ respectivement de $\hat{\psi}_1(u)$ et de $\hat{\psi}_2(u)$ seront solutions des équations de récurrence:

$$\begin{aligned} (5+4j)(7+4j)(9+4j)(11+4j)a_j - 2(7+4j)(9+4j)(11+4j)(j+1)a_{j+1} \\ + (6+4j)(8+4j)(j+1)(j+2)a_{j+2} = 0 \quad \text{et} \\ (7+4j)(9+4j)(11+4j)(13+4j)a_j - 2(9+4j)(11+4j)(13+4j)(j+1)a_{j+1} \\ + (8+4j)(10+4j)(j+1)(j+2)a_{j+2} = 0 \end{aligned}$$

Si nous calculons formellement l'équation différentielle génératrice de la première équation (toujours par une transformation de Mellin entre 2 algèbres d'Ore), nous trouvons:

$$16(16t^2 - 8t + 1)t^2 \frac{d^4 U}{dt^4} + (3584t^2 - 1248t + 72)t \frac{d^3 U}{dt^3} \\ + (13920t^2 - 2904t + 48) \frac{d^2 U}{dt^2} + (15840t - 1386) \frac{dU}{dt} + 3465U = 0$$

La série formelle $\hat{\varphi}_1(t)$ est solution de cette équation.

L'équation caractéristique: $16t^2 - 8t + 1 = (4t - 1)^2 = 0$ a une racine double en $1/4$, qui est donc la seule singularité à distance finie de l'équation différentielle, donc la seule possible à distance finie pour $\varphi_1(t)$. On peut situer de la même manière la seule singularité possible à distance finie de $\varphi_2(t)$ en $1/4$.

En analysant formellement cette équation différentielle, après avoir effectué une translation du point $+1/4$ en 0 , par les mêmes algorithmes formels de Newton et de Frobenius, par exemple par le code DESIR [15,17,36], nous constatons, grâce au polygone de Newton, que nous nous trouvons en face d'une singularité irrégulière.

Nous savons donc dans quelles directions nous pouvons effectuer le prolongement analytique [13] de $\varphi_1(t)$ afin de pouvoir calculer:

$$\psi_1(u) = \frac{1}{u} \int_{d_1} \varphi_1(t) \exp\left(-\frac{t}{u}\right) dt.$$

La direction d_1 pourra donc être toute direction sauf \mathbb{R}^+ qui contient $1/4$.

Comme nous pouvons faire tourner d_1 dans toutes les directions, sauf la direction singulière \mathbb{R}^+ , et que pour chaque direction, l'intégrale de Laplace est définie pour tout u situé à l'intérieur d'un secteur de rayon fini, d'ouverture π et bissecté par d_1 , on peut montrer que les valeurs de $\psi_1(u)$ se recollent en une fonction holomorphe ainsi définie sur un secteur d'ouverture 3π , en forme d'oeil, et bissecté par \mathbb{R}^- , sur la surface de Riemann du logarithme.

Nous pouvons maintenant procéder à l'évaluation numérique des intégrales de Laplace. Dans ce but, il faut d'abord calculer ce prolongement analytique de $\varphi_1(t)$ [13,34,35], qui, d'après la théorie de la *1-sommabilité* est convergente dans le disque centré à l'origine, délimité par cette première singularité en $1/4$. Ce prolongement peut s'effectuer numériquement par différents méthodes.

On voit maintenant que la direction singulière de d_1 correspond à \mathbb{R}^+ , direction dans laquelle l'intégrand devient singulier en $1/4$, c.à d. \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- pour d après le changement de variable $u = x^2$.

Ces directions singulières sont bien celles qui sont données par le spectre singulier de l'équation

$$4x^3 \hat{g}'' + 2(14x^2 + 2x - 1) \hat{g}' + 5(7x + 2) \hat{g} = 0,$$

c.à.d. par la direction de plus forte décroissance de la partie exponentielle $e^{-\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x}} x^\mu \hat{h}(x)$ de sa 2^e solution.

6 Conclusion

Cet article n'est exhaustif à aucun titre. C'est une première approche de ce qu'apporte le calcul formel au calcul scientifique. À l'aide de quelques exemples, certains

problèmes sont posés et des ouvertures prometteuses d'un domaine en pleine évolution, celui du calcul scientifique, sont mis en évidence. La structure informatique très complexe et les nombreux domaines d'application ne sont de loin pas tous abordés. Evidemment, tous les groupes de recherche, qui sont nombreux en France et dans le monde, ne sont pas mentionnés. D'ailleurs, les références bibliographiques, qui sont citées pour approfondir certains aspects présentés, ne reflètent pas la totalité du travail publié dans ces domaines.

D'autre part, il est indispensable de mentionner une troisième composante qui complète les différentes possibilités de calcul, d'étude et d'analyse de comportement, celle de l'analyse graphique. Beaucoup de résultats, de comportements d'objets mathématiques ne peuvent être compris, interprétés ou même vérifiés par recoupements, superpositions, etc., que lorsqu'ils sont *visualisés*. En effet, comment analyser le comportement de l'image, par une fonction complexe, solution d'une équation différentielle, d'un cercle entourant un point singulier du plan complexe, sinon par des trajectoires où la couleur (et même le temps en film vidéo [17]) permet d'ajouter une quatrième dimension? L'étude et les algorithmes élaborés dans ce domaine, notamment au LMC-Grenoble [17,30,31,32], nous donnent souvent des images non seulement indispensables à l'étude mathématique, mais aussi très esthétiques.

Remerciements. L'auteur tient à remercier Bruno Bernardoff et Alain Sartout pour leur aide et Émile Urlacher pour ses suggestions.

7 Adresses utiles

- <http://www-lmc.imag.fr>

À l'adresse du Laboratoire de Modélisation et Calcul de Grenoble, on peut accéder aux différentes activités du laboratoire et, sous la rubrique *calcul formel*, au serveur CATHODE (projet européen Esprit: Computer Algebra for Handling Ordinary Differential Equations). La finalité de ce projet est d'élaborer et de diffuser des outils théoriques et algorithmiques dans le domaine des ODE (équations différentielles ordinaires), et de donner accès à de nombreuses références bibliographiques, ainsi qu'à différents logiciels concernant ce domaine.

- <http://www-rocq.inria.fr>

À l'INRIA-Rocquencourt, notamment dans le groupe *projet Algorithmes* (<http://www-rocq.inria.fr/algo>), on peut trouver beaucoup de références bibliographiques, de nombreux articles sur les domaines des équations différentielles, des algèbres d'Ore, de la combinatoire et des fonctions génératrices, etc..., ainsi que les algorithmes correspondants.

- <http://www-irma.u-strasbg.fr>

Le réseau donne accès à toutes les activités de l'IRMA. Le texte de cet article est disponible dans la rubrique *Prépublications*.

8 Bibliographie

Ouvrages d'intérêt général

1. ABRAMOWITZ M.,STEGUN I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications.
2. CZAPOR S.R.,GEDDES K.O.,LABAHN G.: *Algorithms for computer algebra*, Éd. Kluwa 1992.
3. DAVENPORT J.H.,SIRET Y.,TOURNIER E.: *Calcul formel*, Éd. Masson 1995.
4. DAVENPORT J.H.,SIRET Y.,TOURNIER E.: *Computer algebra*, Éd. Academic Press 1993.
5. GOMEZ C.,SALVY B.,ZIMMERMANN P.: *Calcul formel: mode d'emploi*, Éd. Masson 1995.
6. MACCALLUM M.A.H. : *Symbolic and algebraic computation*, à paraître dans the Encyclopaedia of computer science and technology, Éd. A.Kent and J.G.Williams, Marcel Dekker, New-York.
7. MIGNOTTE M.: *Mathématiques pour le calcul formel*, Éd. Presses universitaires de France 1989. *Mathematics for computer algebra*, Éd. Springer 1992.
8. MIGNOTTE M.,STEFANESCU D.: *Polynomials, an algorithmic approach*, Éd. Springer 1999.
9. MULLER J-M: *Arithmétique des ordinateurs*, Éd. Masson 1989.

Publications concernant les différentes méthodes

10. BARKATOU M.A.: *Contribution à l'étude des équations différentielles et aux différences dans le champ complexe*, Thèse à l'INP de Grenoble 1989.
11. BARKATOU M.A.,DUVAL A.: *Sur les séries formelles solutions d'équations aux différences polynomiales*, Pub.IRMA Lille vol.31, n°15 1993.
12. BRONSTEIN M.,PETKOVSEK M.: *An introduction to pseudo-linear algebra*, Theoretical Computer Science 157 1996, p.3-33.
13. CHAFFY C.: *The analytic continuation process, From computer algebra to numerical analysis*, in ISSAC'92 Éd. P.S. Wang p.69-79, ACM Press, New-York 1992.
14. DELLA-DORA J., DICRESCENZO C., D.Duval: *About a New Method for Computing in Algebraic Number Fields*, Eurocal'85 vol.2, Springer Lecture Notes in Computer Science 204 éd. G.Goos, J.Hartmanis p. 289-290 1985.
15. DELLA-DORA J., DICRESCENZO C., TOURNIER E.: *An algorithm to obtain formal solutions of a linear homogenous differential equation at an irregular singular point*, in Calmet J. Lecture Notes in Computer Science Springer, 1982.

CALCUL FORMEL OU CALCUL NUMÉRIQUE?

16. DELLA-DORA J.,STOLOVITCH L.: *Normal forms of differential systems*, in Computer Algebra and Differential Equations, Éd. E.Tournier London Math. Society, Lecture Note Series 193, Cambridge University Press 1994.
17. DI CRESCENZO C., JUNG F.: *Un logiciel nommé DÉsir*, film Hi8 de 10mn 1993.
18. DUVAL D.: *Calcul symbolique: automatisation en cours*, La Recherche n°291 oct. 1996 p.64-71.
19. DUVAL D.: *Calcul symbolique: automatisation en cours*, La Recherche Hors-Série 2 (l'univers des nombres) août 1999 p. 98-105.
20. GOMEZ-DIAZ T.: *Quelques applications de l'évaluation dynamique*, Thèse Université de Limoges 1994.
21. GOMEZ-DIAZ T.: *Examples of using dynamic constructible closure*, Mathematics and Computers in Simulation n°42 1996.
22. JUNG F., NAEGELE F., THOMANN J.: *An algorithm of multisummation of formal power series, solutions of linear ODE equations*, Proceedings ISSAC, Lille 1993.
23. LODAY-RICHAUD M.: *Introduction à la Multisommabilité*, Gazette des Mathématiciens SMF n°44 avril 1990.
24. LOUIES S.,BRENIG L.: *Structure and convergence of Poincaré-like normal forms*, Physics Letters A 233 1997 p.184-192.
25. MALGRANGE B.: *Resommation des Séries Divergentes*, Expo.Math.13 1995.
26. MARTINET J.,RAMIS J.P.: *Théorie de Galois différentielle et Resommation* in Tournier E. *Computer Algebra and Differential Equations*, p. 117-214 Academic Press 1988.
27. NAEGELE F.: *Autour de quelques équations fonctionnelles analytiques*, Thèse de l'INPG (1995).
28. RAMIS J.P.: *Les séries k-sommables et leurs applications*, Lecture Notes in Physics **126** Springer 1980.
29. RAMIS J.P.,THOMANN J.: *Some comments about the numerical utilization of factorial series*, in Della-Dora J.,Demongeot J.,Lacolle B.: *Numerical Methods in the study of critical phenomena*, Springer 1980.
30. RICHARD,F.: *Graphical Analysis of Complex ODE Solutions*, Computer Graphics Forum vol.6 n°4 déc. 1987.
31. RICHARD-JUNG F.: *Représentations graphiques de solutions d'équations différentielles dans le champ complexe*, thèse de l'Université de Strasbourg 1988.
32. RICHARD-JUNG F.: *Le phénomène de Stokes en image*, RT 65 LMC Grenoble 1991.

33. SIBUYA Y.: *Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problems of Analytic Continuation*, Translations Math. Monographs, vol. 82 AMS Providence, RI 1990.
34. THOMANN J.: *Resommation des séries formelles Solutions d'équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre dans le champ complexe au voisinage de singularités irrégulières*, Numer.Math. **58**, p.503-535 1990.
35. THOMANN J.: *Procédés formels et numériques de sommation de séries solutions d'équations différentielles*, Expo.Math.13 1995.
36. TOURNIER E.: *Solutions formelles d'équations différentielles*, Thèse d'Etat de l'Université de Grenoble 1988.

Hommage à Eugène EHRHART (1906-2000)

Eugène EHRHART, figure emblématique des mathématiques strasbourgeoises, est décédé le 17 janvier 2000 à Strasbourg à l'âge de 93 ans.

La carrière d' Eugène EHRHART est exceptionnelle à plus d'un titre : Professeur de mathématiques du second degré de 1932 à 1971 à Nancy, Toul, Lille, Metz puis au lycée Kléber de Strasbourg, ce passionné des sciences effectue des recherches très actives en mathématiques uniquement « pour son plaisir ».

Ses résultats sont remarquables :

Il obtient deux prix de l'Académie des Sciences en 1959 et en 1974 pour ses travaux sur les équations diophantiennes, qui ont donné naissance aux désormais célèbres « polynômes d'Ehrhart ». Le nombre de ses publications est impressionnant : une bonne soixantaine de compte-rendus de l'Académie des Sciences, plus d'une vingtaine de publications internationales, une participation très active aux publications de l'Ouvert, le bulletin de la régionale alsacienne de l'APM (Association des Professeurs de Mathématiques), et à celles du bulletin national de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), ainsi que de nombreux articles dans la Revue de Mathématiques Spéciales. M. EHRHART est l'auteur de deux livres, dont l'ouvrage de référence « Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire » publié chez Birkhauser Verlag en 1977.

Ci-dessous vous trouverez une bibliographie succincte.

Bibliographie

- 1965 *Mathématiques pour la licence en Sciences économiques*, Strasbourg.
- 1967 *Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire*, thèse (extrait du Journal für die reine und angewandte Mathematik), Berlin.
- 1972 *Sur le nombre de solutions des systèmes diophantiens linéaires*, Strasbourg.
- 1975 *Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire*, Strasbourg.
- 1977 *Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire*, Bâle.
- 1986 *Articles de Mathématiques*, Paris.

Suit, sur huit pages, un article de Thomas DELZANT sur *le polynôme d'Ehrhart* .

LE POLYNÔME D'EHRHART

Thomas DELZANT¹

Irma

Introduction.

On observe (exercice!) que le nombre de façons de payer une somme de n francs en utilisant des pièces de 10, 20, 50 centimes ou de 1 fr est

$$P_1(n) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)(5n+6).$$

Si l'on exige que dans le paiement on utilise au moins une fois chaque sorte de pièce on trouve :

$$Q_1(n) = \frac{1}{6}(n-1)(2n-1)(5n-6).$$

Un autre problème amusant a une solution tout à fait semblable : un carré magique de type $(3; n)$ est un tableau constitué de neuf nombres entiers disposés en trois lignes et trois colonnes, de sorte que la somme des nombres situés sur chaque

ligne ou chaque colonne soit égale à n . Ainsi le carré $\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$ est magique de somme

15. Il se trouve (Mac Mahon, [MM] par.407), mais cela n'est pas facile à montrer, que le nombre de carrés magiques de type $(3, n)$ est

$$P_2(n) = \frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2+3n+4).$$

Exigeons maintenant que dans nos carrés magiques, tous les nombres soient strictement positifs. Le nombre des carrés magiques ainsi décrits devient :

$$Q_2(n) = \frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n^2-3n+4).$$

On voit immédiatement que les fonctions P_i, Q_i sont des polynômes, ce qui n'est nullement évident au départ, mais aussi que ces polynômes satisfont une formule étonnante

$$(!) \quad P_i(n) = (-1)^{\deg P_i} Q_i(-n).$$

Entre les années 1955, date de sa première Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences sur le sujet, et 1964, date de sa Thèse, Eugène Ehrhart va bâtir un cadre théorique pour expliquer ces résultats. La publication du traité *Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire* en 1977, couronnera

¹© L'OUVERT 98 (2000)

Irma, Université Louis Pasteur, 7 rue R. Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex.
e-mail : delzant@math.u-strasbg.fr

ce travail. Il introduira un objet - le polynôme d'Ehrhart d'un polyèdre à sommets entiers - et montrera une formule de réciprocité résolvant les problèmes de comptages généraux et généralisant la formule (!) ci-dessus.

Le nom d'Ehrhart est pour toujours attaché à ces deux découvertes.

1 Le polyèdre associé à un système diophantien linéaire.

Pour résoudre le premier problème des pièces de monnaie qui nous a servi d'introduction, il suffit de trouver le nombre de solutions entières du système :

$$X + 2Y + 5Z + 10T = 10n, \quad X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0.$$

L'idée est alors de considérer le polyèdre convexe Δ_n défini par ces équations dans \mathbf{R}^4 , ici un simplexe de dimension 3. La remarque est que le nombre de solutions à notre problème monétaire n'est autre que le nombre de points entiers (dont toutes les coordonnées sont entières) dans Δ_n , et que ce polyèdre est obtenu à partir de Δ_1 par une homothétie de rapport n .

Cette méthode s'applique tout aussi bien aux systèmes de k équations et l inéquations en m inconnues à coefficients entiers de la forme :

$$\sum_{1 \leq i \leq m} a_{i,j} X_i = b_j n, \quad 1 \leq j \leq k$$

$$\sum_{1 \leq i \leq m} c_{i,j} X_i \leq d_j n, \quad 1 \leq j \leq l$$

À ce système, on associe le polyèdre convexe Δ_n de \mathbf{R}^m défini par les mêmes équations et inéquations, mais où maintenant les X_i sont réels. Posons $\Delta = \Delta_1$, et observons à nouveau que $\Delta_n = n\Delta_1 = n\Delta$. Le *compteur*, c'est-à-dire le nombre de solutions entières de ce système d'équations, n'est autre que le nombre de points entiers dans le polyèdre $n\Delta$. Nous le noterons $P_\Delta(n)$. En général, c'est-à-dire si les équations définissant Δ sont indépendantes, le polyèdre Δ est de dimension $d = m - k$. Comme tous les coefficients définissant Δ sont entiers, il n'est pas très difficile de se convaincre que les points extrémaux de Δ sont à coefficients rationnels. Nous pouvons donc reformuler le problème de comptage :

Déterminer le nombre $P_\Delta(n)$ de points entiers du polyèdre $n\Delta$, où Δ est un polyèdre à sommets rationnels.

Au lieu d'inégalités larges dans le système diophantien considéré, nous aurions pu choisir des inégalités strictes. Les mêmes causes produisant les mêmes effets, nous aurions remarqué que le nombre de solutions du système obtenu n'est autre que le nombre de points entiers situés à l'intérieur du polyèdre $n\Delta$. Nous le noterons $Q_\Delta(n)$.

2 Le polynôme d'Ehrhart.

On l'aura compris, les deux exemples *élémentaires* de l'introduction sont des corollaires du théorème fondamental d'Ehrhart :

Théorème. *Soit Δ un polyèdre convexe de dimension d à sommets entiers dans \mathbf{R}^m . Les compteurs $P_\Delta(n)$ et $Q_\Delta(n)$ ² du nombre de points entiers situés dans $n\Delta$ et dans son intérieur sont des polynômes de degré d . De plus*

$$P(n) = (-1)^d Q(-n)$$

On trouvera une démonstration de ce résultat dans le livre d'Ehrhart, mais aussi dans [B] ou [St].

Le cas des polyèdres à sommets rationnels est un peu plus délicat ; mais de fait c'est à celui-ci que l'on doit s'attaquer si l'on veut résoudre des problèmes aussi simples que :

Quel le nombre de façons de payer une somme de n francs en utilisant des pièces de $1fr, 2fr, 5fr$ ou $10fr$?

Ehrhart introduit la notion de polynôme arithmétique ou *polar*. Un polynôme arithmétique est la donnée $P = [P_0, P_1, \dots, P_{p-1}]$ de p polynômes. Sa valeur à l'entier n est $P(n) = P_{\bar{n}}(n)$, où \bar{n} désigne la réduction de n modulo p ; p s'appelle la pseudo-période de P ; son degré est le maximum du degré des P_i .

Soit Δ un polyèdre convexe de \mathbf{R}^n à sommets rationnels. Notons p le ppcm des dénominateurs des coordonnées de ses sommets ; alors $p\Delta$ est à sommets entiers, et donc le théorème d'Ehrhart nous dit qu'il existe un polynôme P_0 tel que le nombre de points entiers situés dans npP_0 soit justement $P_0(np)$. Un phénomène analogue se produit pour l'ensemble des points entiers de $(np\Delta + k)$ pour tout entier k fixé.

Théorème. *Soit Δ un polyèdre convexe à sommets rationnels de \mathbf{R}^m de dimension d , et soit p le plus petit entier positif tel que $p\Delta$ soit à sommets entiers. Les compteurs $P_\Delta(n)$ et $Q_\Delta(n)$ ⁽¹⁾ du nombre des points entiers situés dans $n\Delta$ et dans son intérieur, sont des polars de degré d et de période p . De plus*

$$P(n) = (-1)^d Q(-n)$$

Exemples. Montrons comment ces résultats permettent d'étudier les exemples qui nous ont servi d'introduction. Ces exemples sont tirés du livre d'Ehrhart.

Soit Δ un polyèdre convexe à sommets entiers ; notons $P_\Delta(t) = a_d(\Delta)t^d + a_{d-1}(\Delta)t^{d-1} + \dots + a_0(\Delta)$. Comment calculer les a_i ?

Notons que $0.\Delta$ ne contient qu'un point du réseau des entiers, l'origine ; on a donc toujours $a_0(\Delta) = 1$. Pour Q nous avons déjà convenu que $Q(0) = (-1)^d$ même si cela n'a pas d'interprétation géométrique.

La première méthode pour calculer P_Δ consiste à en évaluer d valeurs distinctes, puis à résoudre le système linéaire en les a_i correspondant.

²On convient que $Q(0) = (-1)^d$

LE POLYNÔME D'EHRHART

Reprenons le premier exemple de cet exposé : quel est le nombre de façons de payer une somme de n francs en utilisant des pièces de 10, 20, 50 centimes ou 1fr ? Il nous suffit, pour calculer P_1 , de déterminer le nombre de solutions pour 1, 2 et 3 francs . On trouve 11, 40 et 98. D'où l'on tire :

$$P_1(n) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)(5n+6).$$

Notons qu'il aurait été beaucoup plus malin de calculer le polynôme Q_1 , car $Q_1(1) = 0$ $Q_1(2) = 2$ et $Q_1(3) = 15$. D'où :

$$Q_1(n) = \frac{1}{6}(n-1)(2n-1)(5n-6).$$

Le résultat sur P_1 s'obtient alors en appliquant la formule de dualité.

Appliquons la même méthode pour résoudre le problème du nombre de carrés magiques constitués de tableaux $(3, 3)$ dont la somme des lignes ou colonnes est n . Si l'on exige que les coefficients soient strictement positifs, il n'y a aucune solution de somme 1 ou 2 ; il y a une seule solution de somme 3, et on se convainc facilement qu'il y a en 6 de somme 4 (penser au groupe des 6 permutations des 3 lignes). Comme $Q(0) = 1$, on tire $Q(n) = \frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n^2-3n+4)$, puis $P(n) = \frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2+3n+4)$. La formule de dualité nous a permis d'éviter d'exhiber les 120 carrés magiques de somme 4 pour déterminer P .

3 Les coefficients du polynôme d'Ehrhart.

La question qui se pose alors naturellement est celle de donner une interprétation géométrique des coefficients du polynôme d'Ehrhart. Connaissant la géométrie de Δ comment calculer $a_i(\Delta)$?

A. La mesure réticulaire et les coefficients de haut degré.

Pour aborder ce problème, Ehrhart introduit une notion utile : *la mesure réticulaire*.

Si un espace vectoriel F de dimension d possède un réseau (un sous groupe isomorphe à \mathbf{Z}^d engendré par une base de F), il est doté d'une mesure, c'est-à-dire d'un déterminant au signe près. En effet, toutes les bases de ce réseau définissent le même déterminant au signe près. Un sous-espace vectoriel F de \mathbf{R}^n engendré par des vecteurs à coordonnées entières est doté d'un réseau $-F \cap \mathbf{Z}^n$ - donc aussi d'une mesure. Si Δ est un polyèdre convexe à sommets entiers de \mathbf{R}^n , les espaces vectoriels sous-jacents aux espaces affines engendrés par les faces sont donc eux aussi dotés d'une mesure : c'est cette mesure qu'Ehrhart appelle la *mesure réticulaire*. Pour toute face Φ de dimension k de Δ , on dispose donc d'une mesure $\mu_k(\Phi)$.

Les deux exemples importants à comprendre sont :

- i* La mesure réticulaire de Δ : c'est son volume pour la mesure ordinaire de \mathbf{R}^n
- ii* La mesure réticulaire d'une arête $[A, B]$ de Δ : comme A et B sont à coordonnées entières, $B - A$ est un vecteur à coordonnées entières. La mesure réticulaire de

$[A, B]$ est la valeur absolue du pgcd des coordonnées de $B - A$; c'est aussi le nombre de points entiers du segment $[A, B[$.

Le coefficient de plus haut degré du polynôme $P_\Delta(t)$ s'interprète facilement :

$$a_d(\Delta) = \mu_d(\Delta) = \text{Volume}(\Delta)$$

En effet quand n tend vers l'infini, pour tout ouvert Ω de \mathbf{R}^d , le nombre de points de Ω à coordonnées dans $\frac{1}{n}\mathbf{Z}^d$ est équivalent à $n^d \cdot \text{Volume}(\Omega)$.

Grâce à la formule de dualité, on voit que $2a_{d-1}(\Delta)$ est le terme de plus haut degré dans le polynôme qui compte le nombre de points du bord de Δ . On peut donc interpréter le second coefficient du polynôme d'Ehrhart en terme de la mesure réticulaire de son bord :

$$a_{d-1}(\Delta) = \frac{1}{2}\mu_{d-1}(\partial\Delta).$$

On a alors une description complète du polynôme d'Ehrhart des polygones.

Théorème. *Soit Δ un polygone convexe à sommets entiers ; alors*

$$P_\Delta(t) = \text{Aire}(\Delta)t^2 + \frac{1}{2}|\partial\Delta|t + 1,$$

ou $|\partial\Delta|$ désigne le nombre de points entiers du bord de Δ .

Cette formule était connue de Pick à la fin du 19^e siècle.

B Simplexes de \mathbf{R}^3 et formule de Mordell-Ehrhart.

Le premier cas vraiment difficile à comprendre est celui de la dimension trois. Il s'agit de calculer $a_1(\Delta)$, où Δ est un polyèdre donné en dimension trois. Ehrhart, réussit, par un véritable tour de force à analyser le cas du simplexe $\Delta_{a,b,c}$, enveloppe convexe des points $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ de l'espace de dimension 3 ; on suppose que a, b, c sont premiers entre eux deux à deux. ³ La formule obtenue est si difficile à comprendre qu'Ehrhart ne jugea pas utile de l'insérer dans sa thèse. La voici, recopiée de l'exposé de Brion [B] ; elle donne une idée de la complexité du problème.

$$a_1(P) = \frac{1}{12}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{1}{abc}\right) + \frac{a+b+c+3}{4} - s(bc, a) - s(ac, b) - s(ab, c)$$

où $s(p, q)$ est la somme de Dedekind

$$s(p, q) = \sum_{i=1}^q \left(\left(\frac{i}{q}\right)\right) \left(\left(\frac{pi}{q}\right)\right),$$

avec $((x)) = 0$ si x est entier $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$ sinon.

C Formule de Weihrauch et Mac Donald.

³À vrai dire, dans un article de 1951 Mordell [Mo], avait déjà traité le problème.

LE POLYNÔME D'EHRHART

Avant l'arrivée des méthodes de la géométrie algébrique dans ce problème, un résultat remontant à la fin du 19^e siècle (1875) retiendra encore notre attention ; il porte en lui le germe des formules générales apparues récemment. Dans un article malheureusement méconnu, Weihrauch [W] étudie le *système d'Euler* constitué d'une seule équation en $d + 1$ inconnues à coefficients entiers positifs

$$\sum_{0 \leq i \leq d} a_i X_i = n, \quad X_i \geq 0$$

Après des calculs assez impressionnants, il en arrive à conjecturer, après l'avoir vérifié pour les valeurs de $d \leq 6$, une formule qui sera établie par I.G. Mac Donald (cette formule fait l'objet d'un paragraphe en appendice du livre d'Ehrhart) ; elle fait intervenir les nombres de Bernoulli.

On suppose les a_i deux à deux premiers entre eux. Dans ce cas, le polar qui compte le nombre de solutions est un polynôme, à une constante périodique près : on peut écrire $P_\Delta(n) = \tilde{P}_\Delta(n) + b_0(n)$, avec $b_0(n) = b_0(\bar{n})$ ou \bar{n} est la réduction de n modulo le ppcm des a_i .

Théorème. *Sous ces hypothèses,*

$$(*) \quad \tilde{P}_\Delta(n) = \frac{(n - \sum_{i=1}^{d-1} a_i B^{[i]})^{d-1}}{(d-1)! a_1 \dots a_d},$$

avec la convention suivante : en développant le numérateur, on voit apparaître des termes du type

$B^{[1]^{n_1}} \dots B^{[i]^{n_i}} \dots B^{[d]^{n_d}}$; on les remplace par $B_{n_1} \dots B_{n_i} \dots B_{n_d}$, où B_k le k -ième nombre de Bernoulli est défini par la série génératrice :

$$[*] \quad \tau(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=1}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

4 Géométrie algébrique et polynôme d'Ehrhart.

En 1992, Pukhlikov et Khovanskii obtiennent une belle formule pour décrire le polynôme d'Ehrhart de certains polyèdres : on dit que le polyèdre convexe Δ à sommets rationnels de dimension d est non singulier si de chaque sommet de Δ partent exactement d arêtes qui portent une base du réseau des entiers. Considérons les faces H_1, \dots, H_p de Δ ; celle-ci sont définies par des équations $L_i(x) = h_i^0$, ou les L_i sont des formes linéaires à coefficients entiers dont le pgcd des coordonnées est 1. Ainsi, Δ est défini par $L_i(x) \leq h_i$. Changeons un peu les h_i et considérons le polyèdre $\Delta(h)$ défini par les mêmes équations mais où maintenant $h = (h_1, \dots, h_p)$ est considéré comme un paramètre. Il n'est pas très difficile de se convaincre que le volume de Δ_h est un polynôme en h . Posons d'autre part,

$$[**] \quad \tau\left(\frac{\partial}{\partial h}\right) = \prod_{i=1}^p \frac{\frac{\partial}{\partial h_i}}{1 - \exp\left(\frac{\partial}{\partial h_i}\right)} = \prod_{i=1}^p \sum_{n_i=1}^{+\infty} B_{n_i} \frac{\frac{\partial}{\partial h_i}^{n_i}}{n_i!} = \sum B_{n_1} \dots B_{n_i} \dots B_{n_d} \frac{\frac{\partial}{\partial h_1}^{n_1}}{n_1!} \dots \frac{\frac{\partial}{\partial h_i}^{n_i}}{n_i!} \dots \frac{\frac{\partial}{\partial h_d}^{n_d}}{n_d!}$$

On considère cette expression curieuse comme une série formelle d'opérateurs différentiels. On peut donc l'appliquer à un polynôme en les h_i (ici $Vol(\Delta_h)$) en oubliant simplement tous les termes de haut degré. Dans le théorème suivant, on notera l'analogie avec la formule de Wehrauch- Mac Donald.

Théorème. *Le nombre de points entiers de Δ est*

$$(**) \# \Delta(h_0) = \tau\left(\frac{\partial}{\partial h}\right) \text{Volume}(\Delta_h)(h_0)$$

Malheureusement l'hypothèse de non singularité portant sur Δ est extrêmement restrictive : dans le cas de Wehrauch, elle ne s'applique que quand tous les a_i sont égaux, et dans le cas de Mordell-Ehrhart que si $a = b = c$.

La formule de Khovanskii-Pukhlikov peut se démontrer de façon "élémentaire", voir par exemple l'article [B] ; mais on peut aussi l'obtenir en appliquant le théorème de Riemann-Roch sur une variété torique associée à Δ . L'idée est de construire une variété projective M_Δ à partir du polyèdre Δ . On interprète le nombre de points entiers comme la dimension de l'espace des sections d'un certain fibré. On calcule cette dimension en appliquant le théorème de Riemann-Roch. Un avatar de cette approche est l'interprétation de la formule de dualité d'Ehrhart : dans le langage de la géométrie algébrique c'est une conséquence de la dualité de Serre sur les variétés toriques.

À la fin du 20^e siècle, de nombreux auteurs se sont attachés à supprimer les hypothèses restrictives sur le polyèdre étudié. La grosse difficulté étant que la variété torique associée au problème n'est pas lisse, et dans ce cas, le théorème de Riemann-Roch n'a pas une forme aussi simple à manipuler. Voir [B], [B-V], [D-R], [K-K],[K-P], [M], [P]. Grâce aux travaux de ces auteurs, on dispose maintenant de (plusieurs) formules "explicites" -mais incroyablement difficile à expliciter, voir la formule de Mordell-Ehrhart ci-dessus- permettant de calculer les coefficients $a_k(\Delta)$ en terme de combinaison des mesures réticulaires des faces de dimension inférieure à k de Δ . Ces formules permettent de traiter de façon unifiée les trois cas que nous avons explicités (Mordell-Ehrhart, Wehrauch-Mac Donald et Khovanskii-Pukhlikov). Une conséquence de ces travaux, est l'existence d'un algorithme à temps polynomial pour calculer le polynôme d'Ehrhart [Ba]. Malgré cela, il ne semble pas que l'on sache donner à ce jour une signification géométrique aux coefficients de ce polynôme.

Je remercie Michel Brion pour sa lecture attentive de ce texte ses remarques et corrections, et M. Friedelmeyer, qui en m'encourageant à le rédiger, m'a permis de rendre un hommage -modeste- à Eugène Ehrhart.

Bibliographie.

Il s'agit évidemment d'une bibliographie très sommaire ; pour les résultats antérieurs à 1993, on consultera le rapport de M. Brion [B], et sa version *grand public* [B'].

Les travaux d'Ehrhart.

-Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire (Thèse), Journal für die R. und A. Math. Vol 226 (1967) pp1-29 et 30-49.

-*Polynômes arithmétiques et méthodes des polyèdres en combinatoire*, Birkhauser 1977.

Quelques références historiques

[MM] P.A. Mac Mahon *Combinatory Analysis*, 1915.

[Mo] L.J. Mordell, Lattice points in a tetrahedron and generalized Dedekind sums, J. Indian Math. Soc. 15, 41-46, 1951

[W] K. Wehrauch, Die Anzahl der Lösungen diophantischer Gleichungen bei theilfremdem Coefficienten. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 20 1875 pp. 97 ff.

Progrès récents sur le polynôme d'Ehrhart. En consultant "Math Sci Net", on se rend compte que plus d'une soixantaine d'articles sont parus depuis une dizaine d'années sur le polynôme d'Ehrhart. On pourra consulter les quelques références suivantes.

[Ba] Barvinok, A. A polynomial time algorithm for counting integral points in polyhedra when the dimension is fixed. Math. Oper. Res. 19 (1994), no. 4, 769-779.

[B] Michel Brion. Points entiers dans les polytopes convexes, Séminaire Bourbaki, Astérisque 227, (1995) pp 145. (fait le point sur la question en 1993)

[B]' Michel Brion, Points entiers dans les polytopes convexes, Gazette des mathématiciens (67) SMF 1996.

[B-V] M. Brion et M. Vergne. Lattice points in simple polytopes J. Amer. Math Soc. 10 (1997)

[D-R] R. Diaz, S. Robins. The Ehrhart polynomial of a lattice polytope, Ann. of Math. (2) 146 (1997), no. 1, 237.

[K-K] J.-M Kantor, A. Khovanskii. Une application du théorème de Riemann-Roch combinatoire au polynôme d'Ehrhart des polytopes entiers de \mathbf{R}^d . C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 317 (1993), no. 5, 501-507.

[K-P] A. Khovanskii et A. Pukhlikov Algebra i Analyz 4 (1992)

[M] R. Morelli Adv. Math 100 (1993) n;2 pp 154-231ff

[P] J. Pommersheim. Toric varieties, lattice points and Dedekind sums. Math. Ann. 295 (1993), no. 1, 1-24.

[St] R.-P. Stanley, Enumerative combinatorics, Vol. I, Cambridge studies in Advanced Math. Vol 49, 1997.

A VOS STYLOS

Rappel à propos de cette rubrique de problèmes.— Nous cherchons autant que possible à soumettre à nos lecteurs des problèmes originaux, ou en tout cas méconnus. Comme en général peu de mathématiciens ont réfléchi à ces énoncés, du moins sous la forme où ils sont ici proposés, il est hasardeux de prétendre évaluer leur niveau de difficulté. Certains problèmes peuvent donc s'avérer difficiles. Qu'il soit entendu que ni les auteurs des problèmes, ni l'animateur de la rubrique ne sont tenus d'apporter des solutions complètes. L'objectif n'est pas celui-là, il est bien plutôt de susciter l'intérêt des lecteurs, qui sont par ailleurs invités à soumettre leurs propres énoncés pour cette rubrique.

Dominique Dumont

PROBLÈME 55

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = f(x + 1)$$

dans l'ensemble le plus vaste possible.

Suggestions de P. Renfer et J. Lefort : a) Une solution f est-elle nécessairement de classe C^∞ ? Comparer ses dérivées successives aux points 0 et 1.

b) Construire une suite de fonctions f_n , où f_n est définie sur $[n, n + 1]$ par la récurrence $f_n(x) = f'_{n-1}(x + 1)$. Puis recoller ces fonctions.

c) Rechercher des solutions particulières de la forme $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, où α et β sont des constantes à déterminer ou à approcher.

PROBLÈME 56

Énoncé (proposé par M. Emery) :

1°) Soient a, b, r des réels tels que $a < b$ et $0 < b - a < 2r$. Soit u une fonction réelle continue sur $[a, b]$, telle que $u(a) = u(b)$, et satisfaisant la propriété suivante :

pour tout z intérieur à $[a, b]$, il existe c et d tels que $a < c < z < d < b$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r , c'est-à-dire donné par une équation de type $y = p + \sqrt{r^2 - (x - q)^2}$.

Montrer que le graphe de u est lui-même un arc de cercle de rayon r .

Remarque.— On peut, dans un premier temps, chercher une démonstration en imposant des hypothèses plus fortes à la fonction u (par exemple des conditions de différentiabilité).

2°) Soient J un intervalle ouvert, r un réel > 0 et u une fonction continue sur l'adhérence de J . On suppose que pour tout z de J il existe c et d dans J tels que $c < z < d$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c , z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r .
Montrer que J est borné, de longueur au plus $2r$, et que le graphe de u est un arc de cercle de rayon r .

PROBLÈME 57

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante entre séries formelles (ou entre séries entières dont on aura calculé le rayon de convergence) :

$$\left(1+x+2^2\frac{x^2}{2!}+3^3\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^3 = \left(1+2^2x+3^3\frac{x^2}{2!}+\dots\right)\left(1-x-\frac{x^2}{2!}-2^2\frac{x^3}{3!}-3^3\frac{x^4}{4!}-\dots\right)$$

Indication (par D. Dumont et P. Renfer) : Les séries intervenant dans l'identité à démontrer sont liées à celle-ci :

$$R(x) = x + 2\frac{x^2}{2!} + 3^2\frac{x^3}{3!} + \dots + n^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \dots,$$

dont on sait classiquement qu'elle est solution de l'équation fonctionnelle

$$R(x) = x \cdot \exp(R(x)).$$

Ce résultat peut se démontrer par des méthodes d'Analyse classique (théorème de Rouché, ou formule d'inversion de Lagrange), ou par des méthodes combinatoires plus modernes sur les structures arborescentes (composé partitionnel, vertébrés, etc.).

A partir de cette équation fonctionnelle, on peut déduire d'autres identités et parvenir ainsi à l'identité proposée au départ. Un problème qui reste à examiner est de donner une preuve combinatoire directe du résultat.

PROBLÈME 58

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante (on peut, soit lui donner un sens formel en développant chaque fraction rationnelle selon les puissances croissantes de x , soit supposer que $|x| < 1$) :

$$\left(\frac{x}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^6} + \frac{5x^5}{1-x^{10}} + \dots\right)^2 = \frac{1^3x^2}{1-x^4} + \frac{2^3x^4}{1-x^8} + \frac{3^3x^6}{1-x^{12}} + \frac{4^3x^8}{1-x^{16}} + \dots$$

PROBLÈME 59

Énoncé (proposé par P. Borel) :

Soit n un entier relatif. Montrer que $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est un carré.

Solution de Daniel Reisz : On cherche une formule du type

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+an+1)^2$$

et on trouve, “bêtement”, nous écrit l’auteur de la solution, que $a=3$ convient.

Remarque. — Dans sa lettre, Daniel Reisz nous reproche amicalement de proposer des problèmes qui sont, soit trop faciles comme celui-ci, soit trop difficiles comme la plupart des autres.

Nous sommes ici confrontés au (méta-)problème difficile de trouver des problèmes qui soient à la fois de difficultés moyennes et de conceptions originales. Nous allons tâcher de faire mieux et encourageons nos lecteurs à nous aider à résoudre aussi ce problème-là!

 PROBLÈME 60

Énoncé (proposé par P. Borel) :

Résoudre l’équation

$$x^{x^8} = 2$$

- a) pour x réel > 0 ;
- b) pour x complexe.

 PROBLÈME 61

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Soit $P(N)$ le produit des chiffres de l’entier naturel N écrit dans le système décimal.

Exemples. — $P(5) = 5$, $P(12) = 2$, $P(275) = 70$, $P(306) = 0$.

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par la récurrence

$$u_{n+1} = u_n + P(u_n),$$

où u_0 est un entier naturel choisi arbitrairement.

1°) Montrer que, quel que soit le choix de u_0 , la suite (u_n) est stationnaire à partir d’un certain rang r .

2°) Que peut-on dire sur l’estimation de ce rang r ?