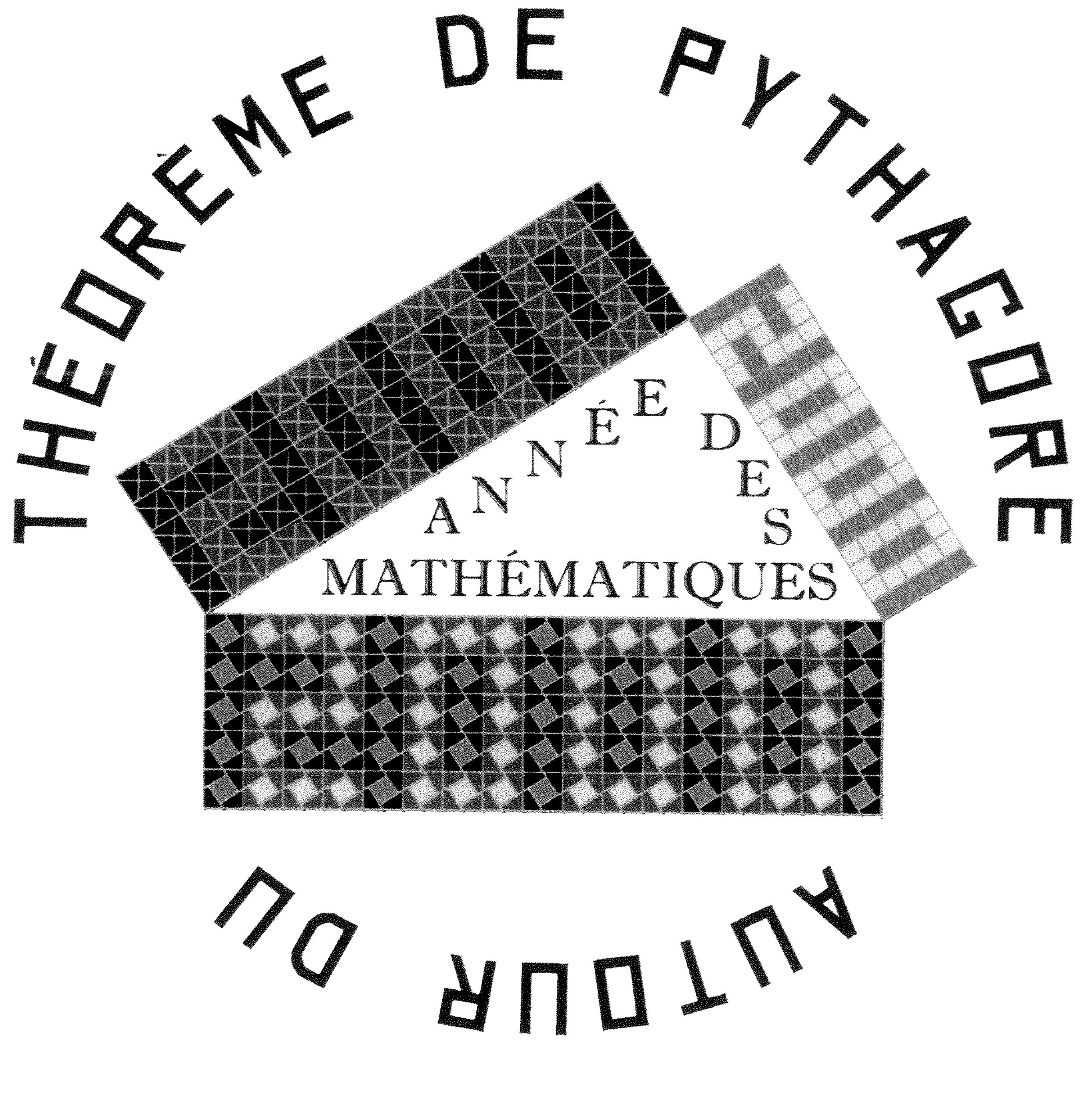
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 99 JUIN 2000 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

La page de couverture reproduit le logo réalisé à l'occasion d'une exposition préparée puis présentée au lycée SCHEURER-KESTNER de THANN dans le cadre de l'année mondiale des mathématiques.

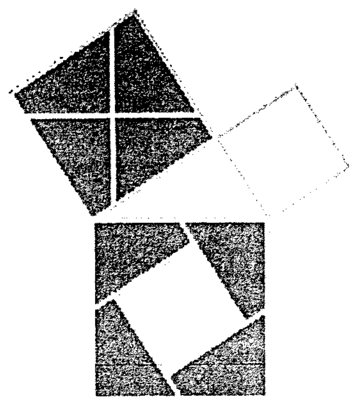
Cette exposition était l'aboutissement de travaux menés dans cinq classes du lycée de Thann par Mme Alice Kwasny et M. Bernard Courtois, professeurs de mathématiques, et consacrés à différentes démonstrations ou illustrations du théorème de Pythagore.

Les études préalables ont été faites dans le cadre normal du cours de mathématiques (identités remarquables, aires et symétries en seconde, suites géométriques et probabilités en première STT, rotations en première S).

La réalisation des panneaux et des maquettes a été faite en dehors des heures de cours par les élèves qui ont mis en oeuvre leurs talents artistiques, mathématiques et qui ont fait preuve de beaucoup d'ingéniosité et de disponibilité.

La composition du logo se sert du puzzle de Henry Dudeney, représenté ci-dessous. Nous nous excusons auprès des auteurs et des lecteurs de n'avoir pu donner l'image en couleurs. Les grisés mettent moins bien en évidence les décompositions et recompositions intervenant dans les rectangles mais la réflexion de chacun complétera ce travail.

Certains travaux effectués dans des collèges ou lycée d'Alsace et du Bade-Wurtenberg ont été exposés à l'Hotel du Département (Conseil Général du Bas-Rhin) du 16 au 28 juin 2000. Vous trouverez en page 44 le discours prononcé par Monsieur Norbert SCHAPPACHER lors de l'inauguration de cette exposition.



PUZZLE DE HENRY DUDENEY

EDITORIAL

MATHÉMATIQUES ET TRAVAUX PERSONNELS ENCADRÉS

Les attaques d'un récent ancien ministre de l'éducation qui déclarait que « *les mathématiques sont en train de se dévaluer de façon quasi inéluctable* » sont le reflet d'un courant très fort aux États-Unis où on assiste à la mise en en place de nouveaux programmes *constructivistes* pour l'enseignement des mathématiques.

La description que font les détracteurs de ces réformes paraît terrible : l'enseignement traditionnel des règles et des techniques de base du calcul doit être abandonné ; les élèves travailleront en petits groupes pour inventer leurs règles pour faire des opérations ; il n' y aura pas de manuel ; le professeur n'imposera plus de règles ; on survolera les compétences de base.

Dans son éditorial de début d'année[1], le ***Wall Street Journal*** signalait l'opposition grandissante de la communauté scientifique : « *Quelques semaines après les trouvailles du ministère, deux cents mathématiciens et scientifiques y compris quatre Prix Nobel et deux lauréats d'un prestigieux prix de mathématiques, la médaille Fields, ont publié une lettre dans le* **Washington Post** *pour se lamenter sur les réformes. De plus en plus de personnes se mobilisent sur le site web* "www.mathematicallycorrect.com "[2] *et ils font bien. Car ces types de programmes émanant de groupe du travail fédéral s'avèrent dramatiquement déficients sur les apprentissages fondamentaux* ».

Les partisans de la réforme font remarquer les mauvaises performances des élèves aux évaluations pour illustrer l'échec des anciennes méthodes pour enseigner les mathématiques. Il faut apprendre à penser mathématiquement, à se concentrer sur les concepts et la théorie et non sur des savoir-faire routiniers.

Wilfried SCHMID[3] répond que « *Les mathématiciens ne sont pas convaincus. À tout prix , il faut rendre vivant les manuels, rendre le sujet attrayant et inclure des problèmes intéressants. Mais ne pas abandonner les compétences de base ! La compréhension conceptuelle peut et doit coexister avec l'aisance technique : nous n'avons pas besoin de choisir entre elles.* »

Dans le même temps, on prépare en France la mise en place des travaux personnels encadrés (TPE) dans les classes de premières à la prochaine rentrée et dans les classes de terminales à la rentrée suivante.

Pour ces travaux, organisés autour de deux disciplines dominantes de la série (par exemple *mathématiques–sciences physiques* ou *mathématiques–sciences de la vie et de la terre* en série S, et *mathématiques–sciences économiques et sociales* en série ES) , chaque élève disposera de deux heures hebdomadaires inscrites à son emploi du temps, au cours desquelles il rencontrera un des professeurs ou fera des recherches documentaires, travaillera en salle informatique, ou dans une salle de travail.

---

[1] Édition du 4 janvier 2000.

[2] Piqué sur ce site : "*Mathematics achievement in America is far below what we would like it to be. Recent "reform" efforts only aggravate the problem. As a result, our children have less and less exposure to rigorous, content-rich mathematics .*"

[3] Déclarations de Wilfried SCHMID , professeur de mathématiques à l'université d'Harvard, et ancien conseiller pour l'enseignement des mathématiques de l'État du Massachusetts, en préparation à une conférence-débat du 8 juin 2000 sur « *la controverse autour de l'enseignement des mathématiques aux U.S.A.* »

Chaque élève définira un sujet à partir d'une liste nationale de thèmes et entreprendra une démarche scientifique sur ce sujet : les ambitions doivent être modestes, l'élève doit réaliser quelque chose de très simple sans prétendre à l'exhaustivité.

Depuis longtemps les instructions des programmes précisent l'importance du travail personnel des élèves comme élément clé de la formation : développer les capacités de réflexion, de raisonnement et une attitude responsable et autonome dans les apprentissages, affirmer les qualités d'organisation et de soin.

Les travaux personnels encadrés institutionnalisent une forme de travail personnel déjà présente en classes préparatoires (TIPE), en option informatique avec les projets, dans certains BTS … ou de manière informelle lors d'un exposé, de la préparation d'un dossier, du montage d'une exposition ou d'un projet.

Ces travaux seront évalués de manière continue à l'aide d'un carnet de bord, et de manière terminale par le court compte rendu écrit et oral présenté par chaque élève. En classe terminale, l'évaluation du TPE devrait être prise en compte pour le baccalauréat.

La première année de mise en place s'annonce difficile :

– la diffusion officielle de l'information (instructions officielles et compte rendu des expérimentations) reste déficiente ;

– les conditions de calendrier , héritage des méthodes irréalistes du précédent ministre de l'éducation, reporteront sans doute le démarrage de la plupart des TPE au mois de janvier.

Les premières évaluations des expérimentations montrent quelques difficultés à impliquer les mathématiques dans une action interdisciplinaire :

– soit le sujet choisi s'adapte très bien aux mathématiques (les fractales par exemple) mais laisse peu d'expression aux autres disciplines ;

– soit les mathématiques impliquées dans le sujet sont ou très élémentaires (quelques règles de trois ou pourcentages), ou très sophistiquées (traitement des matrices).

Il ne faut pas négliger cependant l'apport de notre discipline du point de vue méthodologique : mise en question de problèmes, mise en doute d'affirmations, croisement des informations, distinction des types d'argumentation et de validation, organisation des données et de l'information …

Malgré les déclarations maladroites de l'actuel ministre qui précise que le travail des TPE « *donnera lieu à une production personnelle, une sorte de chef-d'œuvre …* », les difficultés évoquées précédemment amènent à recommander la modestie et l'ouverture d'esprit pour favoriser une réussite des TPE avec une bonne implication des mathématiques.

Les mathématiques ne doivent pas rater le rendez-vous des TPE pour montrer à nos élèves que les mathématiques sont importantes pour leur formation et qu'elles interviennent dans le monde qui nous entoure, et notamment dans les autres disciplines. Nous éviterons ainsi de donner des arguments à ceux qui veulent installer allègrement en France le débat actuel sur l'enseignement des mathématiques aux États-Unis.

Richard *CABASSUT*

SOMMAIRE

N° 99 – JUIN 2000

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile Schladenhaufen
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre Friedelmeyer
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
7, rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 03-88-41-64-40
Fax : 03-88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
http ://irem.u-strasbg.fr/irem
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges Reeb (66 F port compris).
Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.
◇ *Prix du numéro* : 35.– F

UNE QUESTION DE WALTER RUDIN
L'INTÉGRALE DE RIEMANN ET LA CONVERGENCE DOMINÉE

Olivier GEBUHRER [1]
ULP Strasbourg

1 Introduction

Dans l'un de ses classiques , – et à mon point de vue, pour certains d'entre eux, indépassables – Walter Rudin pose le problème suivant : [2]
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer, sans recouvrir au **moindre élément** de **théorie de la mesure**, que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$.[3]

Avec l'humour et la perspicacité qui le caractérisent, Walter Rudin ajoute : *«Ceci vise à vous impressionner par la puissance de l'intégrale de Lebesgue»*. Un instant de réflexion suffit à se convaincre de la force de cette suggestion. Si, en effet, l'on dispose du théorème de convergence dominée (de Lebesgue), la question n'en est pas une et on n'oserait pas la poser à un examen de licence.

Un nouvel instant de réflexion ouvre cependant un abîme (relatif!) et c'est l'objet de cette note que de l'explorer en détail. Si en effet, la convergence dominée est autorisée, alors la condition «f_n continue pour tout n» n'a **rien à voir** dans la question. Si la question posée par Walter Rudin a un sens, on doit la reformuler comme suit : *Si les f_n sont continues, leur intégrale est une intégrale de Riemann* et se pose alors l'alternative suivante :

– ou bien la convergence des intégrales ne peut s'obtenir dans le cadre Riemann et il convient de comprendre pourquoi.

– ou bien on peut obtenir cette convergence, dans le cadre Riemann, et il convient d'en donner une preuve, la plus simple possible, si l'on veut que la comparaison ait un sens.

Walter Rudin ne se contente pas de poser la question. Il donne une référence de preuve. Toujours dans un esprit de comparaison, nous donnons cette preuve plus loin. J'ai consulté cette référence, il y a bien longtemps, après de vaines tentatives de résoudre par moi-même la question posée. Grande fut, je l'avoue, ma déception à la lecture de cette preuve, ce qui me laissa pour longtemps dans la certitude que telle n'était pas celle à laquelle convie Walter Rudin, malgré son appréciation élogieuse (a nice proof!).

L'objet de cette note est donc, entre autres, de donner une autre preuve inédite, celle là, avec comme contraintes de n'utiliser que les propriétés des fonctions continues et bien sûr, les propriétés de l'intégrale de Riemann. Le résultat est étonnant et l'effet de comparaison *"With the power of Lebesgue integral"* garanti.

[2]Real and Complex Analysis Mc Graw Hill Ed. - Analyse réelle et complexe Masson 1980.

[3]Dans l'édition française, il s'agit de l'exercice 7 p. 55 du chapitre 2 «Mesures de Borel positives».

2 Pistes et défrichage

Commençons par observer qu'il existe un théorème de la limite monotone, cadre Riemann. Ce théorème est le suivant :

THÉORÈME ·÷·*Si* (f_n) *est une suite de fonctions continues sur* $[0,1]$ *telles que* $f_n \leqslant f_{n+1}$ *pour tout* n *et si* $f = \sup_n f_n = \lim_n f_n$ *est continue, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

On aura reconnu, sous forme à peine déguisée l'énoncé du théorème de Dini :

THÉORÈME ·÷·*Si* (f_n) *est une suite monotone de fonctions* **continues**, *de limite* **continue**, *sur un espace topologique compact, alors la convergence de la suite* (f_n) *est* **uniforme**.

Si on lève l'hypothèse que la limite est continue, le seul recours est le théorème de la limite monotone associée au lemme de Fatou :

$$\int \underline{\lim} f_n dx \leqslant \underline{\lim} \int f_n dx \leqslant \overline{\lim} \int f_n dx \leqslant \int \overline{\lim} f_n dx \quad (f_n \text{ positive mesurable})$$

Nous disons «associée», car le lemme de Fatou nécessite pour sa preuve le théorème de la limite monotone et le lemme de Fatou se réduit à ce dernier pour une suite monotone de fonctions mesurables positives. Observons que déjà à ce point, on peut mesurer la limite de l'intégrale de Riemann.

C'est un exercice chausse trappe classique de proposer : $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ avec une preuve par Dini de la propriété $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = 0$. Bien entendu le calcul direct est trivial. Or la suite (f_n) ne satisfait pas les conditions du théorème de Dini sur $[0,1]$ mais sur tout intervalle $[0,\alpha]$ avec $\alpha < 1$. Ceci suffit pour conclure et montre que l'exemple le plus simple nécessite un long détour si l'on veut rester dans le cadre de Riemann.

Revenons à la question posée initialement ; on peut songer éventuellement à utiliser le résultat suivant :
Si m désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe un ensemble $A_\varepsilon \subset [0,1]$ tel que $m({A_\varepsilon}^C) \leqslant \varepsilon$ et tel que sur A_ε, la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

Ce résultat donne aussitôt la conclusion mais son inconvénient majeur pour notre propos est d'utiliser de façon d'ailleurs non complétement triviale, la théorie de la mesure. C'est le théorème d'Egorov.

Il est bien sûr absurde de recourir à de tels raffinements puisque, nous l'avons vu, la convergence dominée suffit ici de façon triviale. Néanmoins ce résultat indique qu'il doit y avoir un moyen de se rapprocher de la convergence uniforme, lorsque les fonctions de la suite (f_n) sont continues, et c'est la seule «vraie»propriété de l'intégrale de Riemann.

Il faut donc faire intervenir de façon décisive la continuité. Or, une autre piste de réflexion se présente :

LEMME ·÷·*Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues sur* $[0,1]$, *simplement convergente en tout point de* $[0,1]$. *Alors, si* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, *l'ensemble des points de continuité de* f *est dense dans* $[0,1]$.

Avant tout commentaire, donnons la preuve de ce lemme pour la commodité du lecteur :

Démonstration ·÷·Si $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\Gamma_{p,n} = \{x \in [0,1] \quad \backslash \quad \forall q \leqslant p, |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \frac{1}{n}\}.$$

$\Gamma_{p,n}$ est fermé pour $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ car les f_n sont continues. Soit Ω un ouvert non vide de $[0,1]$. Alors $\Omega = \bigcup_p (\Omega \cap \Gamma_{p,n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, pour tout $x \in [0,1]$, donc en particulier si $x \in \Omega$, il existe un entier $p = p(x)$ tel que $|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant 1/n$ pour $q \geqslant p(x)$, par hypothèse. Donc, pour n fixé la suite $(\Omega \cup \Gamma_{p,n})_p$ est une suite de fermés de Ω admettant Ω pour réunion.

Comme Ω possède la propriété de Baire (ouvert d'espace topologique admettant la propriété de Baire), l'un au moins des $\Omega \cap \Gamma_{p,n}$ est d'intérieur non vide relativement à Ω. Donc on vient de voir que $U_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\Gamma}_{p,n}$ est un ouvert dense de $[0,1]$.

Soit $x \in U_n$; pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un intervalle ouvert $I_x^n(\varepsilon)$ centré au point x, contenu dans $\Gamma_{p(x),n}$ tel que

$$|f_{p(x)}(x) - f_{p(x)}(y)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour } y \in I_x^n(\varepsilon) \text{ (par continuité des } f_n)$$

Or

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f_{p(x)}(x)| + |f_{p(x)}(x) - f_{p(x)}(y)| + |f_{p(x)}(y) - f(y)| \\ &\leqslant 2/n + \varepsilon \quad \text{si} \quad y \in I_x^n(\varepsilon). \end{aligned}$$

Si Ωf désigne l'oscillation de f, en tout point x, on a $\Omega f(x) = \inf_{V(x)\in\mathcal{V}(x)} \delta[f(V(x))]$ où $\delta(A)$ désigne le diamètre de la partie A ($\delta(A) = \sup_{x\in A}|x-y|$) et où $\mathcal{V}(x)$ désigne une base de voisinages de x. De ce qui précède, on déduit donc que $\Omega f(x) \leqslant \frac{4}{n}$, si $x \in U_n$.

Par propriété de Baire, $\Gamma = \bigcap_n U_n$ est une partie dense de $[0,1]$ et sur $\Gamma, \Omega f$ est identiquement nulle. C'est un exercice élémentaire de prouver que

$$\Omega f(x) = \overline{\lim_{y\to x}} f(y) - \underline{\lim_{y\to x}} f(y) \quad ,$$

de sorte que f est continue sur Γ et le lemme est prouvé $\square$.

Ce lemme donne en un sens le **meilleur** résultat possible. **Ce n'est pas du tout la version topologique du théorème d'Egorov** car on ne contrôle pas la mesure de Γ qui peut être très petite a priori (de même que dans le théorème d'Egorov les propriétés topologiques du bon ensemble A_ε sont perdues !).

Quel usage peut-on faire de ce lemme ? A priori, aucun, pour notre propos, car notre hyptohèse est que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc le problème des points de continuité de la limite n'est pas posé : la limite est par hypothèse continue. A première vue, par conséquent, il semble que l'on aboutisse à l'impasse.

Or, comme on va le voir, ce qui importe dans le lemme, c'est moins le résultat, intéressant en soi, mais inutile ici, que ce que dit la preuve qui n'est autre que l'une des innombrables variantes du **principe de condensation des singularités**.

3 La preuve de l'intervention des limites : la convergence dominée cadre Riemann

On commence par faire l'observation d'apparence triviale suivante : supposons que $f_n(1) = f_n(0) = 0$ pour tout entier n et prolongeons les fonctions f_n par 0 en dehors de $I = [0,1]$. On se convainc aisément que cela ne restreint pas la généralité du problème.

Si maintenant φ est une fonction continue positive d'intégrale égale à 1, à support compact dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_n * \varphi(x)dx = (\int_0^1 f_n(x)dx).(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt)$$

où l'on a évidemment noté $f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi(t)dt$.

Tout ceci a un sens dans le cadre Riemann et le théorème de Fubini s'applique dans ce cadre dès que f et φ sont continues à support compact. *On vient d'introduire un paramètre souple dans un problème d'apparence rigide.*

Posons alors $K_\varphi(f)(x) = f * \varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, f et φ continues à support compact, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1, \varphi \geqslant 0$. Nous avons :

$$|K_\varphi(f)(x) - K_\varphi(f)(y)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x-t) - \varphi(y-t)||f(t)|dt.$$

Par uniforme continuité de φ sur le support de f, on déduit que si $\varepsilon > 0$ est fixé, on peut trouver un voisinage de x, $I_x(\varepsilon)$ tel que :
Si $y \in I_x(\varepsilon)$, on ait $|K_\varphi(f)(x) - K_\varphi(f)(y)| \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$. Si, en outre on suppose $0 \leqslant f \leqslant 1$, (il suffirait ici d'avoir $|f| \leqslant M$) et à support dans un compact fixe (ici $[0,1]$) et si $[a,b]$ est un intervalle contenant $[0,1]$, alors

$$|K_\varphi(f)(x) - K_\varphi(f)(y)| \leqslant \varepsilon M(b-a)$$

pour tout $y \in I_x(\varepsilon)$ et toute f telle que $|f| \leqslant M$, $suppf \subset [a,b]$. Il en résulte que pour φ fixée, l'ensemble $\{K_\varphi(f)\}$ où f parcourt l'ensemble des fonctions continues telles que $0 \leqslant f \leqslant 1$, $suppf \subset [0,1]$ est équicontinu sur $\mathbb{R}$.

Cette observation a la conséquence suivante :
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ pour tout n (prolongées par 0 hors de $[0,1]$)et telle que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ pour tout n. Alors si φ est continue sur $\mathbb{R}$ positive, telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1$, φ à support compact, la suite $K_\varphi(f_n)$ admet une suite extraite uniformément convergente sur Γ où Γ est un intervalle compact contenant le support des $f_n * \varphi$ ($\Gamma \subset [0,1] + supp\varphi$).

Ce résultat n'est autre que le théorème d'Ascoli caractérisant les parties compactes dans l'espace des fonctions continues sur un espace topologiques compact (pour la convergence uniforme sur cet espace).

Si maintenant, on prouve que pour toute φ fixée comme précédemment (ou une φ cela suffirait), toute suite extraite de $K_\varphi(f_n)$ possède une suite extraite uniformément convergente vers 0 sur Γ, on concluera par la remarque anodine du début de ce paragraphe :
$\lim_{h\to\infty} K_\varphi(f_n) = 0$ uniformément sur Γ implique

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}} K_\varphi(f_n)(x)dx = 0 = \lim_{h\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Ce schéma est naturellement trop beau pour être vrai. Il donne néanmoins l'idée de la preuve qui suit.

Pour le moment, on n'a exploité que la DOMINATION des f_n.
Le fait que $\lim_{h\to\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ n'est pas intervenu.

Observons que $0 \leqslant \int_0^1 f_n(x)dx \leqslant 1$, donc si $\alpha_n = \int_0^1 f_n(x)dx$, il existe une suite extraite (α_{n_k}) de α_n qui converge vers $\alpha \in [0,1]$. Supposons que pour une telle suite extraite, $\alpha > 0$. On va montrer que cette hypothèse est absurde, la conclusion s'ensuivra.

Nous sommes donc ramené à la situation suivante :
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$,
$f_n(0) = f_n(1) = 0$, $supp f_n \subset [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \alpha > 0$.

De la preuve du lemme exposé au §2, on tire la conséquence suivante ; pour cela on adopte les notations du §2 et on rappelle un résultat intermédiaire.

Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe pour tout $x \in [0,1]$, alors $U_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\Gamma}_{p,n}$ est un ouvert dense de $[0,1]$ où

$\Gamma_{p,n} = \{x \in [0,1], \quad |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant 1/n \text{ pour } q \geqslant p\}$.

LEMME ·÷·*Pour tout entier n fixé, pour tout* $\gamma > 0$, *pour tout* $x \in U_n$, *il existe un intervalle* $I_x^n(\gamma)$ *centré au point* x, *tel que si* $y \in I_x^n(\gamma)$,

$$|f_q(x) - f_q(y)| \leqslant 2/n + \gamma \,\text{pour}\, q \geqslant p(x)$$

où $p(x)$ *est un entier tel que* $x \in \overset{\circ}{\Gamma}_{p(x),n}$.

Démonstration ·÷·Ceci résulte de l'inégalité :

$$|f_q(x) - f_q(y)| \leqslant |f_q(x) - f_{p(x)}(x)| + |f_{p(x)}(x) - f_{p(x)}(y)| + |f_{p(x)}(y) - f_q(y)|.$$

En utilisant la continuité de $f_{p(x)}$ on déduit l'existence d'un intervalle ouvert $I_x^n(\gamma)$ contenu dans $\overset{\circ}{\Gamma}_{p(x),n}$ tel que :

$$|f_{p(x)}(x) - f_{p(x)}(y)| \leqslant \gamma \,\text{si}\, y \in I_x^n(\gamma).$$

Donc, si $y \in I_x^n(\gamma)$, on a :

$$|f_q(x) - f_q(y)| \leqslant 2/n + \gamma \quad \text{pour} \quad q \geqslant p(x),$$

comme annoncé $\square$.

Soit maintenant $\{\varphi_k\}$ une suite de fonctions continues positives d'intégrales égales à 1, à support dans un voisinage de 0, disons $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$. C'est une «approximation de l'unité»et clairement pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{|t|\geqslant\alpha} \varphi_k(t)dt = 0.$$

Considérons $f_q * \varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}} f_q(x-t)\varphi_k(t)dt$. On a :

$$f_q * \varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}} [f_q(x-t) - f_q(x)]\varphi_k(t)dt + f_q(x)$$

Pour x fixé dans U_n, soit $I_x^n(\gamma)$ un intervalle ouvert centré en x, tel que $|f_q(x) - f_q(y)| \leqslant 2/n + \gamma$ pour $q \geqslant p(x)$ et $y \in I_x^n(\gamma)$. Alors :

$$\begin{aligned}|f_q*\varphi_k(x)| &\leqslant \int_{I_0^n(\gamma)} |f_q(x-t)-f_q(x)|\varphi_k(t)dt + \int_{[I_0^n(\gamma)]^C} |f_q(x-t)-f_q(x)|\varphi_k(t)dt + f_q(x) \\ &\leqslant (2/n+\gamma) + 2\int_{[I_0^n(\gamma)]^C} \varphi_k(t)dt + f_q(x)\end{aligned}$$

où, comme il se doit, on a écrit $I_x^n(\gamma) = x + I_0^n(\gamma)$ où maintenant $I_0^n(\gamma)$ est un intervalle ouvert centré en O et A^C désigne le complémentaire de A .

Si $\gamma > 0$ est fixé, il existe $k(\gamma)$ tel que si $k \geqslant k(\gamma)$ on ait :

$$2\int_{[I_0^n(\gamma)]^C} \varphi_k(t)dt \leqslant \gamma.$$

(en fait, avec nos hypothèses $\int_{[I_0^n(\gamma)]^C} \varphi_k(t)dt = 0$).

Fixant alors un tel k, on a :

$$|f_q * \varphi_k(x)| \leqslant 2/n + 2\gamma + f_q(x) \quad \text{pour}\, q \geqslant p(x)$$

et compte tenu du fait que $\lim_{q\to\infty} f_q(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$, on peut de plus supposer que $f_q(x) \leqslant \gamma$ si $q \geqslant p(x,\gamma)$.

En résumé, si k est fixé $\geqslant k(\gamma)$ et si $q \geqslant p(x,\gamma)$:

$$|f_q * \varphi_k(x)| \leqslant 2/n + 3\gamma \quad \text{si } x \in U_n$$

Or, pour k fixé il existe une suite extraite $(f_{q_r} * \varphi_k)_r$ de $(f_q * \varphi_k)$ qui converge uniformément vers Ψ_k.

On a donc $|\Psi_k(x)| \leqslant 2/n + 3\gamma$ si $x \in U_n$. Comme U_n est dense dans $[0,1]$, $|\Psi_k(x)| \leqslant 2/n + 3\gamma$ si $x \in [0,1]$ par continuité des Ψ_k.
De plus, $supp\Psi \subset [1-1/k, 1+1/k]$ et sur ce support $0 \leqslant \Psi_k \leqslant 1$.

De sorte que,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_{q_r} * \varphi_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \Psi_k(x)dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^1 f_{q_r}(x)dx \leqslant (2/n+3\gamma)+2/k.$$

En prenant k assez grand on a donc :

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^1 f_{q_r}(x)dx \leqslant 2/n+4\gamma \quad \text{pour tout } n.$$

Donc $\lim\limits_{r\to\infty}\int_0^1 f_{q_r}(x)dx \leqslant 4\gamma$. Comme $4\gamma < \alpha$ si γ est assez petit on en déduit la contradiction cherchée. C'est la preuve cherchée, sous réserve de simplifications mineures possibles. La clé de la convergense dominée selon Riemann est donc, comme on devait s'y attendre, le théorème d'Ascoli. Pourquoi devait-on s'y attendre ? Parce que la convergence dominée est un théorème de compacité dans l'espace $L^1([0,1],dx)$ (par exemple) dont la philosophie est très proche de celle d'Ascoli (l'équicontinuité est remplacée par l'équiintégrabilité)

4 Voici maintenant la preuve citée en référence par Walter Rudin

On note I l'intégrale de Riemann sur $[0,1]$: $I(f)=\int_0^1 f(x)dx$.

LEMME ·÷·*Soit* $|f|\leqslant\sum|f_n|$ *alors* $I(|f|)\leqslant\sum\limits_n I(|f_n|)$, f *et* f_n *continues sur* $[0,1]$.

Démonstration ·÷·On a $|f(x)|\leqslant\sum_1^{N(x)}|f_n(x)|+\varepsilon$, où $\varepsilon>0$ est fixé. Cette inégalité a lieu dans un voisinage $U(x)$de x, par continuité. Par compacité de $[0,1]$, en posant $N=\sup N(x_i)$, on a :

$$|f|\leqslant\sum_1^N|f_n|+\varepsilon$$

Donc :

$$I(|f|)\leqslant\sum_{n=1}^N I(|f_n]) + \varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^\infty I(|f_n|)+\varepsilon$$

D'où le résultat $\square$.

Soit maintenant (f_n) suite de fonctions continues sur $[0,1]$ avec $f_n\geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=0$ (simplement sur $[0,1]$) et $0\leqslant f_n\leqslant 1$. Tout revient à voir que si $\lim\limits_{n\to\infty}I(f_n)=L$ alors $L=0$. En effet, $0\leqslant I(f_n)\leqslant 1$ donc existe une suite extraite (f_{n_k}) telle que $\lim\limits_{k\to\infty}I(f_{n_k})=L$. Si on prouve que $L=0$ on aura montré que de toute suite extraite de $\alpha_n=I(f_n)$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers 0. Il en résulte que $\alpha_n\to 0$.

On considère donc une suite (f_n) de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que $s\leqslant f_n\leqslant M$ pour tout n, $f_n\to 0$ simplement sur $[0,1]$ et $\lim\limits_{h\to\infty}I(f_n)=L$. On va prouver que $L=0$. Posons $K_n=CO[f_m:m\geqslant n]$ où CO désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble entre crochets. Si $g_n \in K_n$ pour tout n, alors la suite (g_n) satisfait les mêmes propriétés que (f_n).

Posons $d_n = \inf[||g||_2 : g \in K_n]$ où $||g||_2 = [I(|g|^2)]^{1/2}$. Alors, comme $K_{n+1} \subset K_n$ $d_n \leqslant d_{n+1} \leqslant M$ pour tout n. Donc $d = \lim_{h\to\infty} d_n$ existe. Soit $g_n \in K_n$ telle que $||g_n||_2 \leqslant d_n + 1/n$.

LEMME ·÷·

$$\lim_{m,n\to\infty} ||g_n - g_m||_2 = 0$$

Démonstration ·÷·

Résulte de l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned}||g_n - g_m||_2^2 &= 2\{||g_n||_2^2 + ||g_m||_2^2\} - 4||\frac{1}{2}(g_n + g_m)||_2^2 \\ &\leqslant 2\{(d_n + \frac{1}{n})^2 + (d_m + \frac{1}{m})^2\} - 4d_m^2 \text{si } m \geqslant n\end{aligned}$$

D'où la conclusion $\square$.

Soit alors (h_n) une suite extraite de (g_n) telle que

$$\sum_1^\infty ||h_n - h_{n+1}||_2 < +\infty$$

ce qui est évidemment possible.

Clairement, (h_n) satisfait aux mêmes hypothèses que (f_n) : $\lim_{n\to\infty} I(h_n) = L$. Comme $h_n \to 0$ partout, on a $h_n = \sum_{m\geqslant n} h_m - h_{m+1}$ pour tout n.

Donc $|h_n| \leqslant \sum_n^\infty |h_m - h_{m+1}|$ et par le lemme initial,

$$0 \leqslant |I(h_n)| \leqslant I(|h_n|) \leqslant \sum_n^\infty I(|h_n - h_{m+1}|) \leqslant \sum_n^\infty ||h_m - h_{m+1}||_2.$$

D'où la conclusion $L = 0$.

Laissons à chacun sa liberté d'appréciation. Mon opinion est que la preuve précédente, outre son caractère aussi peu naturel que possible, contient une évidente supercherie : on travaille fictivement dans $L^2([0,1], dx)$!!. Autrement dit, la preuve est contruite en utilisant les propriétés de $L^2([0,1], dx)$ puis en ne gardant que celles qui sont réellement nécessaires pour le problème posé. Je ne peux pas penser que c'est à ce genre de preuve que W. Rubin pouvait songer. Vos commentaires sont les bienvenus.

5 Ultimes remarques

Les puristes remarqueront que la version Riemann de la convergence dominée exige ici $|f_n| \leqslant M$ sur $[0,1]$ et non pas $|f_n| \leqslant g$ où g est Riemann intégrable sur $[0,1]$, indépendante de n. Or ce dernier énoncé est illusoire : comme on le sait, une fonction bornée est Riemann intégrable si et seulement si elle est continue presque partout.

Les fonctions non bornées échappent à l'intégrale de Riemann. Un théorème qui demanderait de vérifier que la fonction dominante g soit continue presque partout (en excluant les trivialités telles que g continue par morceaux) donc de vraies singularités pour g n'aurait évidemment AUCUN INTÉRÊT.

C'est pourquoi la version RAISONNABLE Riemann s'écrit

$$|f_n| \leqslant g \quad \text{où g est continue}$$

Mais dans ce cas g est bornée sur le compact considéré et on est ramené à l'énoncé initial. Par quelque bout qu'on la prenne, l'intégrale de Riemann est réellement IMPRATICABLE pour les besoins de l'analyse. J'insiste donc à nouveau ici : au prix d'efforts pédagogiques sérieux le XXI^{e} siècle devra se passer de cette notion qui n'offre d'intérêt qu'historique. Et il est absolument faux qu'elle soit plus simple à enseigner que l'intégrale de Lebesgue. Au demeurant, il est notoire qu'il n'existe pas chez Riemann l'embryon du début d'une théorie d'intégrale. Cela ne diminue en rien son génie.

POURQUOI DÉMONTRER ?
UN EXEMPLE ALLEMAND

par Richard CABASSUT
Lycée international, Strasbourg

Il est intéressant d'observer les différences dans le rôle joué par la démonstration d'un pays à l'autre. Nous allons ici évoquer quelques exemples concernant un gymnasium allemand à propos des démonstrations sur les calculs d'aires et volumes.

1. Aires et volumes des solides sans calcul intégral

Dans le programme

En étudiant les programmes du gymnasium[1] en Bade-Wurtemberg on observe que dès la **classe 5** (10-11 ans) sont mentionnés les premiers solides, parallélépipède rectangle, cube, sphère, cylindre et pyramide, pour lesquels on découvre les propriétés. Parmi ces propriétés, celles relatives aux longueurs, aux aires et aux volumes ne sont évoquées explicitement que pour le rectangle et le parallélépipède rectangle. En classe 6, on prend connaissance de π à propos du cercle et de l'arc de cercle. Il faut attendre la classe 10 pour évoquer explicitement les volumes et aires de surfaces de solides.

En **classe 10** (15-16 ans) le programme précise

« Calcul sur le cercle, présentation et calculs sur les solides :

Les élèves comprendront le problème des déterminations de la circonférence et de l'aire du cercle ainsi que du volume de solides déterminés. Ils reçoivent un point de vue sur comment une considération propédeutique des limites permet le calcul. Ils acquièrent les formules de surfaces, en partie également de manière autonome, et les appliquent sans faute. Avec la représentation des figures et des solides les élèves exercent et approfondissent leur capacité de représentation spatiale. »

Le programme énonce : « Volume du prisme, du cylindre à base circulaire, de la pyramide, du cône et de la sphère ». En commentaire de cette partie, il est précisé : « L'introduction de la formule est suffisante au travers des dessins de prise en considérations illustrées de la plausibilité Adapté à des acquisitions autonomes à partir d'extraits du livre de classe. Bonaventura Cavalieri (1598-1647). »

Dans le livre de classe[2]

Dans le plan – cercle et disque –

On démontre que le rapport entre l'aire d'un disque est le carré d'un rayon est constant.[3]

---

[1] On pourra consulter dans le numéro 91 de l'Ouvert l'article *Mathématiques dans un lycée allemand* qui rappelle sommairement quelques caractéristiques de l'enseignement mathématique en Allemagne.

[2] Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ausgabe Baden-Würtemberg, Klasse 10, Lambacher Schweizer, Ernst Klett Verlag.

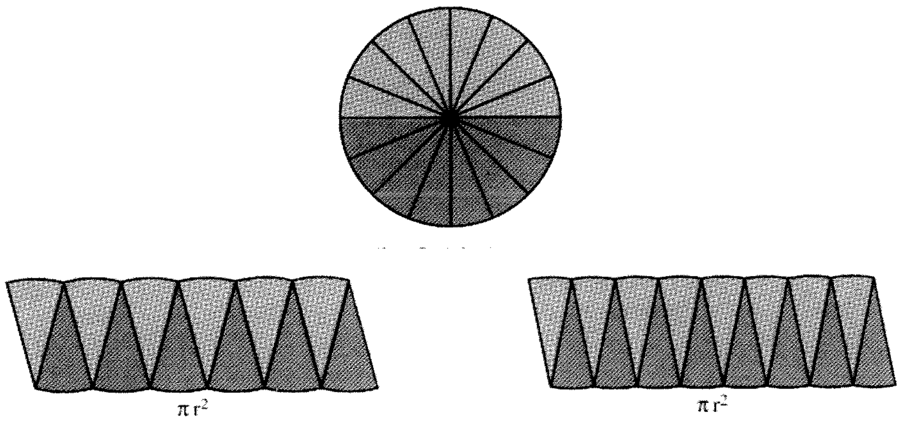
[3] Page 74.

Pour cela on considère deux cercles semblables dans le rapport de leurs rayons. On inscrit dans chacun des cercles un polygone régulier à n côtés. Ces deux polygones réguliers sont également semblables dans le rapport des rayons, leurs surfaces sont alors semblables et le rapport de leurs aires est égal au rapport des carrés des rayons des cercles correspondants. « Comme l'aire du polygone à n côté diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques » que le rapport des aires des disques est égal au rapport des carrés des rayons des cercles correspondants.

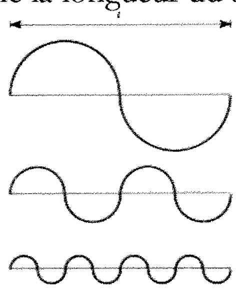
Plusieurs méthodes sont proposées pour déterminer une valeur approchée de π (méthode d'Archimède,...)[4]

On démontre ensuite la formule de l'aire du disque[5]. On décompose le disque en 2^n secteurs de même angle que l'on recompose de manière à former un figure approchant un parallélogramme, comme suggéré par la figure ci-jointe.

« On choisit un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur une demi-circonférence et de largeur un rayon » Comme l'aire du rectangle recomposé est l'aire du disque, et comme on a précédemment démontré que l'aire du disque vaut π fois le carré du rayon, on en déduit que la circonférence du cercle vaut π fois le diamètre.



On signale cependant par la figure ci-dessous extraite du manuel qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment



[4] Pages 75, 83, 84.

[5] Pages 78 et 79.

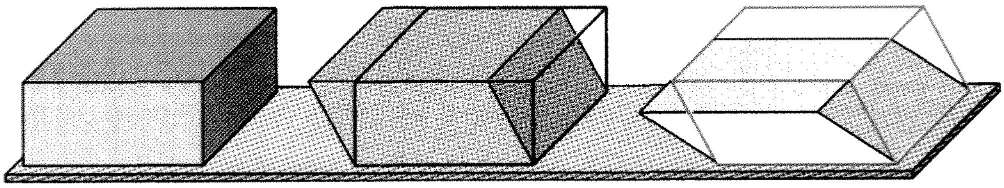
Dans l'espace – volume de solides –

On veut montrer que pour un prisme d'aire de base G et de hauteur h le volume V=G×h.

Parallélépipède rectangle

Les formules de l'aire du rectangle ou du volume du parallélépipède rectangle sont vues en classe 5 (10-11ans) à partir de quadrillage ou de pavage, en admettant la généralisation. Pour le parallélépipède rectangle, la formule de classe 5 donne le volume V en fonction de l'aire de la base G et de la hauteur h correspondante : V=G×h.

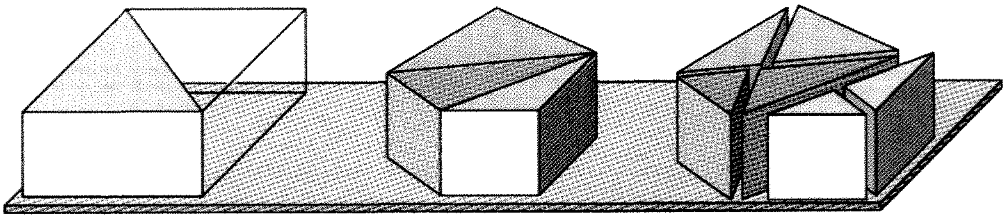
En classe 10, pour la formule du parallélépipède non rectangle, un dessin illustre la technique de l'équidécomposabilité[6] sur un exemple qui ramène en deux étapes à un pavé droit de même volume. La formule précédente se généralise donc au parallélépipède non rectangle.



Prisme

Pour un prisme droit ayant pour base un triangle rectangle, on interprète ce prisme comme une moitié d'un parallélépipède rectangle.

On admet la généralisation à un prisme non droit à base triangulaire.



Pour un prisme droit à base polygonale on décompose sa base polygone en triangles. Chaque triangle peut être décomposé en deux triangles rectangles, comme suggéré par la figure. Un prisme droit à base polygonale et de hauteur h se décompose donc en prismes droits à base triangle rectangle et de même hauteur h. *« Ces bases (triangle rectangle) ont pour aires $G_1, G_2, ..., G_n$ alors le volume du prisme originel est : $V = G_1 \times h + G_2 \times h + ... + G_n \times h = (G_1 + G_2 + ... + G_n) \times h = G \times h$ et ceci est valable également pour les prismes inclinés. »*

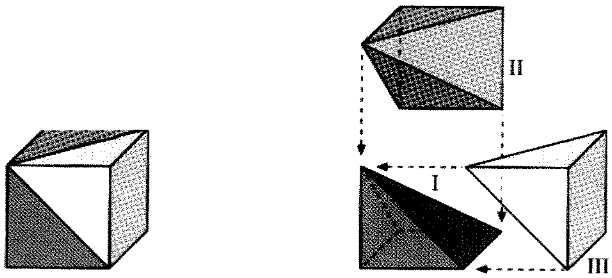
Pyramide[7]

[6] Deux polyèdres sont équidécomposables lorsqu'ils sont décomposables en un même nombre fini de polyèdres isométriques. Ils ont alors le même volume. Dans le plan, deux polygones sont équidécomposables lorsqu'ils sont décomposables en un même nombre fini de polygones isométriques. Ils ont alors la même aire

[7] Page 105 à 107.

Un cas particulier

Un cas des plus simples est celui de la pyramide incluse dans un cube. La figure ci-contre montre que le cube se décompose en trois pyramides. Ces pyramides sont isométriques : elles ont la même aire de base G et la même hauteur h si le cube est d'aire de base G et de hauteur h. Chaque pyramide a le volume $V = \frac{1}{3}\ G \times h$.

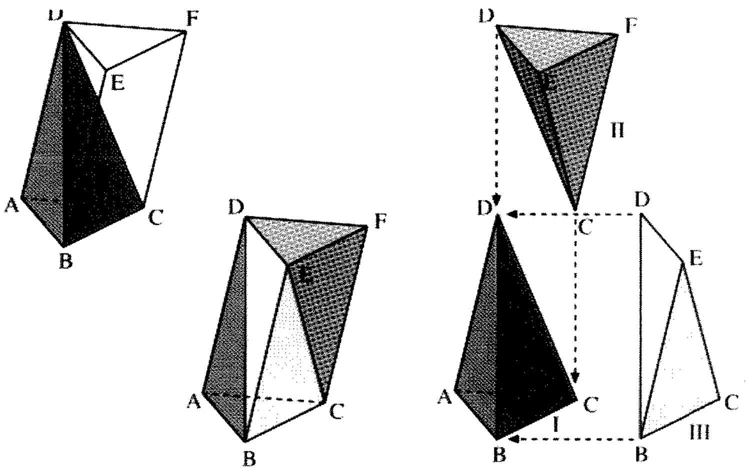


Cas général

Dans la suite on essaie, avec d'autres pyramides, de procéder de manière analogue.

Pour déterminer le volume d'une pyramide de base polygonale, on décompose la base en triangles et on est ramené ainsi au calcul du volume d'une pyramide à base triangulaire ou tétraèdre.

Tétraèdre

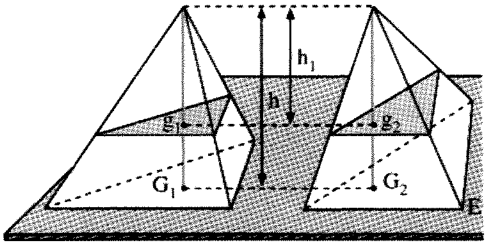


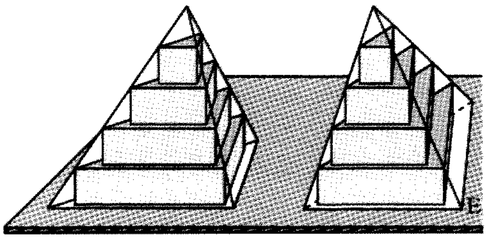
On détermine le volume d'un tétraèdre I de hauteur h et d'aire de base G. Par translation de la base le long d'un côté on génère un prisme, que l'on décompose en trois tétraèdres I, II et III comme suggéré par la figure. Ces tétraèdres ont même aire de base et même hauteur d'après le raisonnement suivant.

I et II ont leurs bases ABC et DEF isométriques et de hauteurs issues respectivement de D et C de même longueur.

II et III ont leurs bases respectives CEF et BCE isométriques et leurs hauteurs issues de D de même longueur.

Des tétraèdres de même aire de base et même hauteur ont-ils même volume ?





Dans la figure ci-dessus, on coupe les deux tétraèdres d'aires de base G_1 et et G_2 égales par un plan parallèle au plan E contenant leurs bases et on obtient des surfaces d'aires respectives g_1 et g_2, intersection. du plan E et des tétraèdres. Les surfaces d'intersection sont semblables aux surfaces de base des tétraèdres respectifs . Ainsi :

$$\frac{g_1}{G_1} = \frac{h_1^2}{h^2} \text{ et } \frac{g_2}{G_2} = \frac{h_1^2}{h^2}.$$

On déduit : $g_1=g_2$. Puis on considère le « solides en escalier » dont les marches ont même hauteur et par conséquent même volume (puisque même aire de base). Ceci est valable pour tout nombre de marches.

« On augmente le nombre de marches et on diminue la hauteur des marches de telle manière que le volume du « solide en escalier » diffère, aussi peu que souhaité, du volume du tétraèdre. Ainsi le volume des deux tétraèdres ne peut pas être différent. »

On vient de démontrer que les volumes des deux tétraèdres de même aire de base et de même hauteur sont égaux. En conséquence les tétraèdres I, II et III ont même volume, égal au tiers du volume du prisme.

Théorème : Une pyramide d'aire de base G et de hauteur h a pour volume V avec

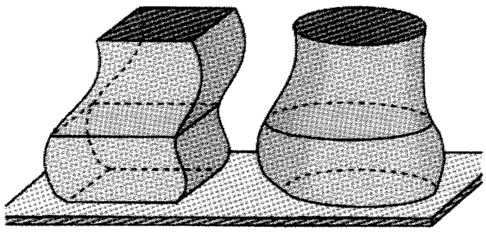
$$V = \frac{1}{3} G \times h .$$

On a démontré que si deux tétraèdres ont la même hauteur, des bases dans le même plan et des sections, par des plans parallèles à leurs bases, de même aire, alors ces tétraèdres ont même volume. Cette propriété se généralise et donne le théorème suivant :

Théorème de Cavalieri [8]:

Si les surfaces d'intersection de deux solides avec un plan E ont des aires égales ainsi qu'avec tout plan parallèle au plan E, alors les solides ont même volume.

[8] Page 107.



Avec le théorème de Cavalieri on peut parfois pour des solides de formes différentes formes prouver qu'ils ont même volume.

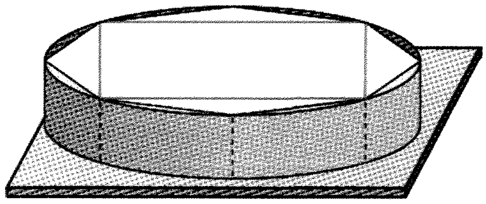
Cylindre [9]

On inscrit dans un cylindre droit un prisme droit ayant pour base un polygone régulier à n côtés comme suggéré par la figure.

« Par augmentation du nombre n de côtés du polygone, le volume $V_n = G_n \times h$ du prisme s'approche aussi précisément que souhaité du volume du cylindre. En effet l'aire G_n du polygone s'approche aussi près que souhaité de l'aire $G = \pi r^2$. »

(Cette approximation du cercle par un polygone régulier inscrit a été étudiée dans une précédente leçon[10]). Ainsi le volume du cylindre droit vaut : $V = \pi r^2 h$.

Pour un cylindre incliné, *le théorème de Cavalieri* permet de montrer l'égalité avec le volume d'un cylindre droit de même hauteur et même aire de base.

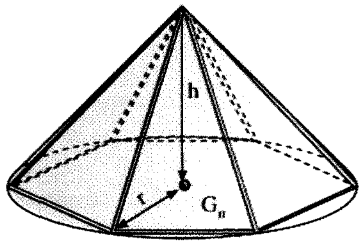


Cône

La méthode est analogue à celle du cylindre. Dans un cône, on considère la pyramide de même sommet que le cône mais dont la base est un polygone régulier d'aire G_n inscrit dans la base d'aire G du cône (comme pour la base du cylindre). *En augmentant n, l'aire de base G_n de la pyramide approche aussi près que souhaité l'aire $G = \pi r^2$ de la base du cône. Or les deux solides ont même hauteur et le volume de la pyramide vaut $V = \frac{1}{3} G_n h$, il s'ensuit que le volume du cône vaut $V = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.*

[9] Page 110.

[10] On rend compte de cette démonstration dans le numéro 91 de l'Ouvert, page 18, dans l'article *Mathématiques dans un lycée allemand.*



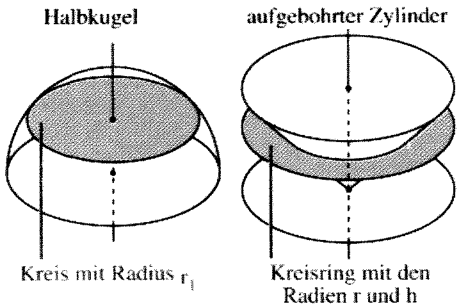
Sphère

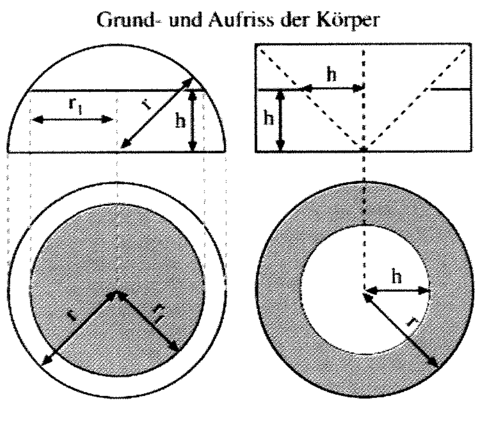
Pour déterminer le volume V d'une sphère de rayon r, on utilise le théorème de Cavalieri. On considère une demi-sphère comme suggéré par la figure ci-jointe. La demi-sphère, de hauteur h, est coupée par un plan en un cercle de rayon r_1 et d'aire A. Alors $r_1^2=r^2-h^2$ et on obtient : $A=\pi\ r_1^2=\pi r^2-\pi h^2$. A est également l'aire d'un anneau circulaire de cercle extérieur de rayon r et de cercle intérieur h. Aussi cherche-t-on un solide de hauteur h et de surface de section un tel anneau circulaire. Ce solide s'obtient quand on enlève d'un cylindre de rayon r et de hauteur r un cône de même rayon et de même hauteur.

Si on coupe la demi-sphère et ce solide par un plan parallèle à leurs bases (situées sur un même plan), à une hauteur h, les surfaces de sections ont même aire. D'après le *théorème de Cavalieri*, la demi-sphère et le solide précédent ont même volume :

$$\frac{1}{2}V = \pi r^2 \times r - \frac{1}{3}\pi r^2 \times r = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Le volume d'une sphère de rayon r vaut $\frac{4}{3}\pi r^3$.





2. Aires et volumes des solides avec le calcul intégral

Dans le programme

Le calcul intégral est introduit dans le Bade-Wurtemberg dans un programme qui couvre les deux dernières années de scolarité avant le baccalauréat, à savoir les classes 12 et 13. On distingue deux programmes : un programme de mathématique de base (Grundkurs) et un programme de mathématiques approfondies (Leistungskurs).

Mathématiques de base

« Chapitre : Introduction au calcul intégral. Le concept de contenu motivé intuitivement du 1^{er} cycle du secondaire va être précisé. Les élèves s'aperçoivent que la relation entre le calcul intégral et le calcul différentiel permet dans bien des cas le calcul simple d'intégrales. Ils peuvent maintenant calculer également l'aire d'une surface délimitée par des courbes » … « Calcul d'aires et de volumes de solides ayant un axe de révolution. La rotation autour de l'axe (Ox) est suffisante. Interdisciplinarité avec la Physique, cours de base, chapitre 1 : énergie des champs électriques) »

« Chapitre : Approfondissement du calcul différentiel et intégral dans le cas de fonctions particulières ». Pour les fonctions rationnelles et exponentielle : calculs d'aires et de volumes.

Mathématiques approfondies

On retrouve les mêmes formulations précédentes du programme de mathématiques de base. S'y ajoute « le cas échéant le calcul de valeurs approchées à l'aide d'un calculateur »

Dans le livre de classe

Nous proposons des extraits du livre de mathématiques approfondies[11], plus complet que le livre de mathématiques de base[12].

Interprétation comme limite d'une aire délimitée par une fonction bord [13]:

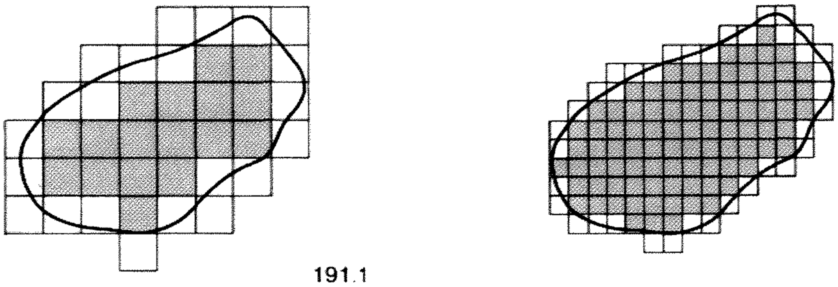
On expose, en s'appuyant sur une analogie avec la méthode de quadrillage (pour l'encadrement des aires), la méthode des rectangles qui définit une suite (U_n) de sommes d'aires de rectangle inférieures et une suite (O_n) de sommes d'aires de rectangle supérieures à l'aire déterminée par la fonction bord f, aire qui s'obtient comme limite commune de ces deux suites. Cet exposé, plus détaillé dans le livre de mathématiques approfondies, s'appuie essentiellement sur les figures qui illustrent des cas particuliers.

---

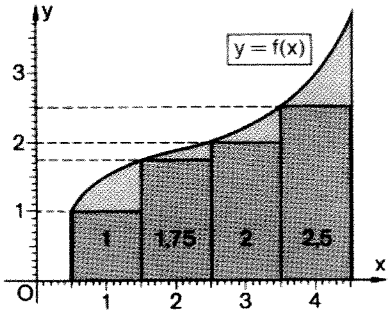
[11] Lambacher Schweizer, Analysis, Leistungskurs, Klett Verlag, 1990.

[12] Lambacher Schweizer, Analysis, Grundkurs,, Klett Verlag, 1990.

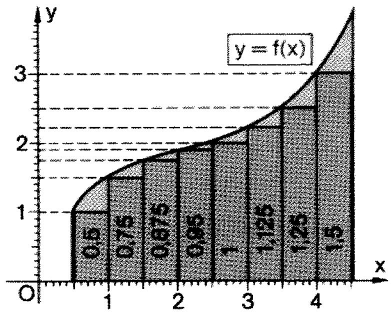
[13] Pages191 et 192.



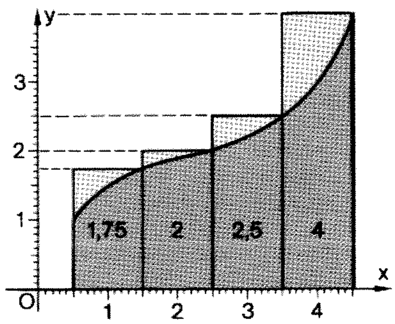
191.1



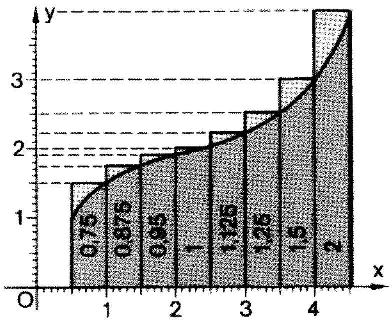
$U_4 = 7{,}25$ 191.3



$U_8 = 7{,}95$ 191.·



$O_4 = 10{,}25$ 192.1



$O_8 = 9{,}45$ 192.2

Des études plus rigoureuses des suites majorant et minorant sont effectuées sur des exemples en utilisant le calcul des limites.

Fonction aire déterminée par la fonction bord f :[14]

« De manière générale soit une fonction f définie sur l'intervalle [a ; b] telle que $f(x) \geq 0$ sur [a ; b]. La surface délimitée par la courbe de f et l'axe (Ox) sur l'intervalle [a ; x] a une aire A(x) Alors la fonction $x \mapsto A(x)$ est appelée **fonction aire déterminée par la fonction bord f** sur [a ; b]. » Si $c \in [a ; b]$, on note $A_c(x)$ l'aire de la surface précédente limitée à l'intervalle [c ; b].

Théorème : Si A_a est la fonction aire de la fonction bord f continue sur [a ; b], alors la fonction A_a est différentiable et on a : $A_a'(x) = f(x)$.

On observe la validité de ce théorème sur deux exemples où f est une fonction affine. Puis « on étudie maintenant, si cela est généralisable. On suppose que la fonction bord f est continue sur [a ;b]. Alors le taux différentiel de A_a en x est $\dfrac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h}$. Dans ce cas $A_a(x+h) - A_a(x)$ pour $h > 0$ s'interprète comme l'aire

[14] Page 195.

de la surface de la figure comprise coloré en rouge[15] et de largeur h. Si M est le maximum et m le minimum de la fonction f sur [x ; x+h], alors on a :

$$m\times h \leq A_a(x+h) - A_a(x) \leq M\times h \quad \text{ou encore} \quad m \leq \frac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h} \leq M\,.$$

Cet encadrement est encore valable pour h < 0. (Justification ?) Pour h tend vers 0, comme f est continue, aussi bien m que M tendent également vers f(x). Ainsi la conjecture A'(x)=f(x) est vérifiée. »

Puis le livre définit une intégrale et établit le théorème affirmant que deux primitives sur un intervalle d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Calcul d'aires [16]

Puis est énoncé le

<u>Théorème fondamental de l'aire</u> : Si F est une primitive sur [a ; b] de la fonction continue f avec $f(x) \geq 0$, alors l'aire $A_a(b)$ de la surface délimitée par la courbe de f et l'axe (Ox) sur l'intervalle [a ; b] vaut : $A_a(b)=F(b) - F(a)$.
Ce théorème est justifié par le raisonnement suivant .
« Comme pour tous les x de [a ; b] la fonction A_a est différentiable (et donc également continue) et comme $\lim\limits_{x\to a} A_a(x) = 0$, alors A_a est la primitive de f qui s'annule en a. Si on a trouvé une primitive F, alors $A_a(x) = F(x)+c$, alors $F(a)+c = 0$ et $c = - F(a)$.
Ainsi $A_a(x) = F(x) - F(a)$.

Intégrales

Dans la suite du cours[17] est donnée une définition plus formelle et plus générale des suites (U_n) et (O_n) à partir d'une subdivision $a = x_0 < x_1 <...< x_n = b$ quelconque en n sous-intervalles d'un intervalle [a ; b] pour une fonction continue f.
« $U_n=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_n(x_n-x_{n-1})$ et $O_n=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\ldots+M_n(x_n - x_{n-1})$ où m_i minimum et M_i maximum de f sur $[x_i ; x_{i+1}]$. »

La convergence des suites vers une limite commune, indépendante de ma subdivision choisie, est admise. Cette limite commune est définie comme l'**intégrale** de **a** à **b** de **f.**

On démontre alors l'inégalité de la moyenne.

On définit ensuite la fonction $I_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ dont on montre la dérivabilité sur l'intervalle J lorsque f est continue et a élément de J avec $I_a'(x)=f(x)$ sur J.

« $\dfrac{I_a(x+h)-I_a(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt\right] = \dfrac{1}{h}\left[\int_x^{a} f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt\right] = \dfrac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$

Comme f est continue, entre x et x+h f admet un minimum m et un maximum M. d'après l'inégalité de la moyenne :

pour $h > 0$, $m\times h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M\times h$ et

pour $h < 0$, $m\times(- h) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M\times(-h)$ soit dans les deux cas,

---

[15] Ce qui correspond sur notre illustration à la portion de surface de bord f sur [x ;x+h].
[16] Page 202.
[17] Page 209.

$$m \leq \frac{1}{h} \times \int_{x}^{x+h} f(t)dt \ \leq M$$

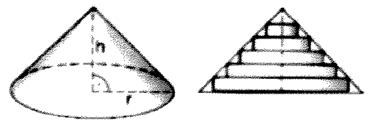
Quand h tend vers 0, comme f est continue, alors m aussi bien que M convergent vers f(x). Donc I_a est différentiable et $I_a'(x)=f(x)$ »

Ce théorème montre que « pour la fonction donnée f, la fonction intégrale I_a est une primitive de f. Si F est une primitive connue de f, alors $I_a(x)=F(x)+c$. Comme $I_a(a)=0$, $c=-F(a)$ et ainsi $I_a(x)=F(x)-F(a)$. En particulier $I_a(b)=F(b)-F(a)$. »

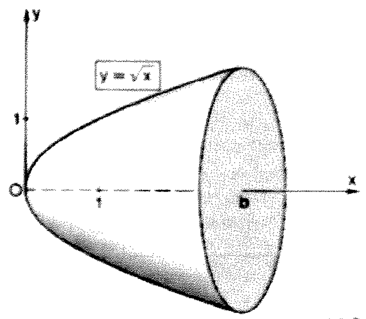
On a donc démontré le *théorème fondamental du calcul intégral et différentiel :*[18]

« Si f est continue sur un intervalle J et si F est une primitive de f, alors pour tout a et tout b de J, on a : $\int_{a}^{b} f(t)dt \ = F(b) - F(a)$ ».

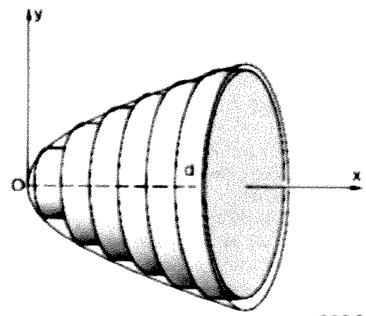
Application au calcul de volumes :[19]



226 1



226.2



226.3

On commence en exercice à décomposer le volume d'un cône par une suite somme des volumes de tranches cylindriques comme suggéré par la figure 226 et à calculer la limite de cette suite.

On considère le volume V du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction f sur [a,b] représentée dans (Oxy) autour de l'axe (Ox). On s'appuie sur la

[18] Page 219.
[19] Page 226 à 227.

figure 226.2 représentant le cas particulier $f(x)=\sqrt{x}$. « Dans ce solide on inscrit ou on circonscrit n tranches cylindriques de même épaisseur (figure 226.3) ; on obtient une somme inférieure U ou O supérieure à V. Une section orthogonale à l'axe (Ox) produit une surface de section d'aire q(x) telle que :...

$U=q(0)\ d + q(d)\ d+ q(2d)\ d +\ldots +q((n-1)d)\ d$ et

$U= q(d)\ d+ q(2d)\ d + q(3d)\ d+ \ldots +q(n\ d)\ d$.

Le volume V recherché se trouve être la limite des suites de sommes inférieures U et sommes supérieures O quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire l'intégrale de la fonction section $x \mapsto q(x)$. »

Par rotation $q(x)=\pi(f(x))^2$. On obtient ainsi le

Théorème : Si f est une fonction continue sur [a ; b], alors le solide déterminé par la rotation de la courbe de f sur [a ; b] autour de l'axe (Ox) admet pour volume :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

On généralise le théorème précédent

Théorème : Si pour solide les aires de sections orthogonales à l'axe (Ox) forment une fonction continue q sur [a ; b], le volume de ce solide est : $V = \int_a^b q(x)dx$.

Remarque : Ce théorème confirme **le principe de Cavalieri ;** des solides ont même volume si les sections à même distance d'un plan déterminé ont même aire .

3. Pourquoi démontrer ?

Nous allons engager le débat sur le thème « pourquoi démontrer » au vu des exemples précédents et des pratiques françaises suggérées dans les projets de nouveaux programmes de seconde pour la rentrée 2000-2001 et première scientifique pour la rentrée 2001-2002. Rappelons un passage[20] intéressant concernant la démonstration en série scientifique :

« Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration tout à fait académique ; en analyse par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'étude, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées (au sens *bourbakiste* du terme) : la nature et le niveau d'étude des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes. Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des preuves conçues et exposées à l'aide de graphiques (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). »

Examinons quelques rôles de la démonstration sans prétendre être exhaustif.

Démontrer pour valider

Un des premiers rôles de la démonstration en mathématiques est d'établir la vérité d'une proposition par l'application de raisonnements utilisant la logique mathématique

[20] Projet de programme de série scientifique S, paragraphe *généralités à propos d'une formation scientifique en première et terminale S.*

traditionnelle (avec son principe de non contradiction et ses valeurs exclusives de vérité : vrai ou faux) et les théorèmes et axiomes de la théorie dans laquelle on travaille.

Une des qualités que doit avoir une démonstration pour valider est la **rigueur** : rigueur dans les pas de raisonnements déductifs employés et rigueur dans les conditions d'applications des théorèmes, axiomes et définitions de la théorie. Une démonstration qui manque de rigueur reste une démonstration, mais avec des défauts qui peuvent éventuellement la rendre inexacte.

Observons qu'en situation d'enseignement les axiomes et les théorèmes de la théorie ne sont pas toujours connus clairement. Comment est défini l'espace et ses objets dans l'enseignement secondaire ? Quels sont les théorèmes de la géométrie de l'espace supposés connus des élèves ? Les réponses à ces deux questions ne sont pas claires dans l'enseignement secondaire français.

Remarquons ensuite qu'en cours de mathématiques la démonstration n'est pas le seul mode de validation d'un énoncé. L'**argument d'autorité** est bien souvent utilisé comme mode de validation. En France la plupart des théorèmes de cours sont admis. L'autorité du professeur donne à un énoncé le statut de théorème et le déclare vrai. S'il vient à l'idée d'un élève de vouloir mettre en cause ce contrat didactique il peut se voir répliquer : « ce n'est pas au programme » ou « vous verrez plus tard ». L'argument d'autorité peut intervenir de manière plus subtile. Ainsi dans les exemples précédents, pour démontrer les formules de volumes de solide, il est utilisé le principe de Cavalieri, qui est admis. C'est l'autorité du livre qui invoque le théorème de Cavalieri, jusque là inconnu des élèves, et qui l'admet.

Mais la démonstration n'a pas pour seul rôle de valider, témoin les nouvelles démonstrations de théorèmes déjà démontrés. Le rôle de ces nouvelles démonstrations n'est pas de démontrer la vérité d'un résultat puisque celui-ci est déjà avéré vrai. Nous allons donc examiner maintenant quelques autres rôles de la démonstration au travers des exemples précédents.

Démontrer pour expliquer

Dans les précédents exemples, différentes méthodes sont présentées : en classe 10 équidécomposabilité pour le parallélépipède, la pyramide, et le tétraèdre ; méthode des indivisibles pour le tétraèdre ; principe de Cavalieri pour le tétraèdre et la sphère ; en classe 13 méthode des rectangles .

Certaines de ces méthodes, notamment en classe 10, ne sont pas reprises en exercices. Elles peuvent cependant être réinvesties dans d'autres démonstration du cours. Elles ne sont pas exigibles. Leur but est d'éclairer sur la démarche de la démonstration.

Démontrer pour apprendre

Le programme de classe 10 indique clairement qu'on met en place une propédeutique à l'enseignement des limites. La **rigueur formelle** n'est pas encore mise en place et les justifications ne sont pas explicitées : *« Comme l'aire du polygone à n côté diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques » que le rapports des aires des disques est égal au rapport des carrés des rayons des cercles correspondants.* ou bien *« On choisit un nombre* *de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur une demi-circonférence et de largeur un rayon »* . Cependant la démarche des limites est présentée. Parfois on signale les problématiques sous-jacentes, comme dans le cas où on illustre qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment.

On retrouve cette démarche avec la méthode des indivisibles, utilisée en classe 10 pour la pyramide. Elle prépare à la méthode des rectangles du calcul intégral vue en classe 13. La méthode des rectangles est présentée au cours de démonstrations et est réutilisée au cours d'exercices.

De même le principe de Cavalieri vu en classe 10 pour le tétraèdre et la sphère est démontré rigoureusement en classe 13 avec le calcul intégral.

En classe 13, les démonstrations sur les aires et les volumes sont plus formelles, et plus abstraites, en utilisant notamment les concepts du calcul différentiel (limite, continuité, suite). Elle continue l'apprentissage au formalisme et à l'abstraction.

Démonstration et communication

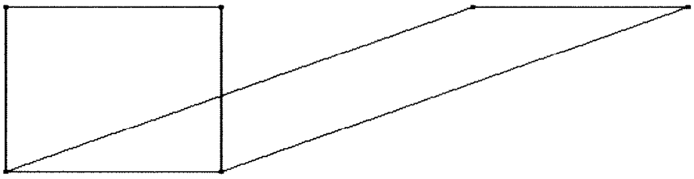
Beaucoup des démonstrations précédentes peuvent être réalisées avec une prise de note réduite, soit en s'appuyant sur le texte du livre à commenter, soit par la pratique d'un débat oral. La pratique de démonstration où la production d'écrit est minorée et où la forme dialoguée est mise en valeur permet de travailler plus facilement, grâce au débat en direct, sur les précisions de niveau de rigueur et de niveau de problématique. Le travail, sur un texte écrit que l'on n'a pas produit, est également un entraînement à la compréhension écrite et à la pratique des textes mathématiques dont les qualités abstraites et formelles sont spécifiques.

Démonstration et formation à la rigueur

La rigueur d'une démonstration ne réside pas seulement dans l'explicitation complète de toutes les étapes de la démonstration. Elle consiste dans la précision du niveau d'explicitation ou de problématique d'un pas de démonstration . Parfois on préfère un niveau bas pour ne pas « semer le trouble » chez l'élève pour qu'il puisse se concentrer sur les grandes idées de la démonstration. Le niveau zéro de l'explicitation étant la démonstration admise. L'élève se concentre sur le seul énoncé du théorème. A trop utiliser cette technique, qui au départ veut défendre la rigueur en ne démontrant pas ce qu'on ne peut pas rigoureusement démontrer, on risque d'induire des attitudes ne percevant pas la nécessité de démontrer pour valider.

Il convient donc de préciser le niveau d'explicitation de rigueur en précisant clairement ce qui est admis, ce à quoi on se limite, ce dont on admet la généralisation.

Il faut également préciser le niveau de problématique d'une technique de démonstration. Par exemple dans la démonstration sur le volume du parallépipède utilisant la méthode d'équidécomposabilité, on ne signale pas à l'élève que l'équi-décomposabilité n'est pas aussi simple que le dessin le laisse paraître. Le dessin ci-dessous montre un parallélogramme dont une base et une hauteur ont même longueur que celles du rectangle; mais ce rectangle et ce parallélogramme ne sont pas équidécomposables en une seule étape comme suggéré par le dessin extrait du manuel.



De même [21]à propos des indivisibles, on peut évoquer les paradoxes étudiés par Torricelli. Torricelli propose un exemple de découpage de la sphère en surfaces indivisibles conduisant à des paradoxes[22]. De même à propos des volumes de solides de révolution on peut évoquer des partitions de solides en surfaces qui conduisent à de fausses intégrales [23]. Il paraît souhaitable d'indiquer que les techniques sont plus complexes qu'il n'y paraît pour inciter les élèves à la vigilance, notamment en leur livrant quelques paradoxes quand ils sont en état de les recevoir.

Enfin dans l'exemple précédent de la démonstration du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, l'affirmation que le maximum et le minimum sur une subdivision [x, x+h] converge vers f(x) lorsque h tend vers 0 ne paraît pas aussi simple à démontrer que suggéré.

Autres formes de validation

D'autres formes de validations[24] ne respectent pas les critères de la démonstration mathématiques :

- les validations utilisant l'argument d'autorité : on a vu précédemment qu'en cours de mathématiques cet argument peut être utilisé par le professeur ou par le livre ;
- les validations utilisant l'argument de plausibilité : on valide dans un contexte particulier (contexte de la figure, vérifier les premiers cas, ...) et on généralise par plausibilité ; ce type d'argument est fréquemment utilisé dans l'introduction à l'enseignement des limites ;
- les validations préformelles utilisant une argumentation pragmatique : les arguments dépendent de la situation et de l'observation (par exemple la technique d'équidécomposabilité dépend de la figure).

Un certain nombre de démonstrations précédentes relèvent de ces validations et ne constituent pas des démonstrations mathématiques formelles et déductives.

C'est pourquoi il est important de préciser aux élèves quel est le statut de la validation utilisée et d'indiquer clairement la frontière entre une validation non mathématique et une validation mathématique, et pour cette dernière les niveaux de rigueur ou de problématique exigés .

[21] TORRICELLI, *Campo di Tartuffi* XVII[e], traduit par DE GANDT F., dans *Les indivisibles et Torricelli*, séminaire d'épistémologie et d'histoire des sciences de l'Université de Nice.

[22] SCHNEIDER Maggy, *Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides* , dans Recherches en didactique des mathématiques, vol.11, n°23, pp 248-249.

[23] SCHNEIDER Maggy, *Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides*, dans Recherches en didactique des mathématiques, vol.11, n°23, p.272.

[24] Begründen und Argumentieren-Formen, Darstellung und Allgmeingultigkeit, in Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Tietze, Klika, Wolpers, pp 158-159.

Il semblerait qu'en Allemagne les démonstrations de résultats de cours soient plus répandues qu'en France. Ces démonstrations remplissent des fonctions qui sont plutôt assumées par des exercices et des activités en France. Mais en démontrant beaucoup de résultats de cours n'est-ce pas aussi un choix culturel : insister sur la démonstration comme démarche spécifique de la pensée mathématique appliquée à une construction élémentaire des objets mathématiques, en déconnectant cette démarche de tout contexte local lié à la résolution d'un problème donné isolé ou à une situation d'évaluation.

INVITATION

Le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Strasbourg vous invite à participer à ses travaux sur le thème : **histoire des notations et origine des mots utilisés en mathématiques.**

Ce thème de recherche permet une diversité d'investissement de chacun selon ses goûts et ses disponibilités. Le but serait de rédiger une sorte de dictionnaire des notations, symboles et mots mathématiques à l'usage des professeurs de tous niveaux.

Une première réunion aura lieu :

Mercredi 27 septembre 2000 à 17 h

à la bibliothèque de l'IREM.

SUR LE POLYNÔME MINIMAL

Paul BOREL [1]

1 Introduction.

Dans ce qui suit, nous ne parlerons que de matrices à coefficients dans un corps commutatif K (ou un anneau commutatif R). La traduction en termes d'endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie sur K (voire de R-modules libres de type fini) est immédiate. Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$ une matrice $n \times n$ à coefficients dans un corps K ; à la matrice A sont associés deux polynômes remarquables (entre autres) de $K[X]$, à savoir :

- le polynôme caractéristique $P_A(X) = \text{dét}\ (XI_n - A)$;
- le polynôme minimal $m_A(X)$.

Rappelons la définition de $m_A(X)$: nous avons un homomorphisme de K-algèbres $K[X] \longrightarrow M_n(K)$ associé à A et défini par $\varphi(f) = a_m X^m + \cdots + a_1 X + a_0 \mathbf{1}_n$. Comme $dim_K K[X] = +\infty$ et que $dim_K M_n(K) = n^2$, φ n'est certainement pas injectif ; donc $Ker\varphi$ est un idéal $\neq \{0\}$ de $K[X]$. Puisque $K[X]$ est un anneau principal, il existe un polynôme unique unitaire qui engendre $Ker\varphi$: c'est le polynôme minimal $m_A(X)$; $m_A(X)$ est donc le polynôme unitaire de plus bas degré qui s'annule pour la matrice A : $m_A(A) = 0$. Si $f(X) \in K[X]$ est tel que $f(A) = 0$, $f(X)$ est un multiple de $m_A(X)$. Par définition même du polynôme caractéristique $P_A(X)$, nous disposons d'un algorithme pour son calcul. Nous allons voir que nous avons aussi un algorithme pour le calcul de $m_A(X)$.

2 Calcul du polynôme minimal

Soit R un anneau commutatif et $M \in M_n(R)$ une matrice $n \times n$ à coefficients dans R. Nous pouvons calculer $\widetilde{M}$ = (ajointe de M)= (transposée de la matrice des cofacteurs de M) et nous avons alors $M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \text{dét}\ M$. Nous appliquons cela au cas où $R = K[X]$ et $M = X\mathbf{1}_n - A$; nous avons alors :

$$(X\mathbf{1}_n - A) \cdot (\widetilde{X\mathbf{1}_n - A}) = (\widetilde{X\mathbf{1}_n - A}) \cdot (X\mathbf{1}_n - A) = P_A(X).\mathbf{1}_n.$$

Remarquons que cette égalité peut être considérée comme un égalité dans $M_n(K[X])$ et comme une égalité dans $M_n(K)[X]$ (dans ces deux anneaux non commutatifs, $\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément unité et $\mathbf{1}_n D = 0$ implique $D = 0$; c'est une façon de prouver le théorème de Hamilton-Cayley).

Soit maintenant $h(X)$ le PGCD (calculé dans $K[X]$ des éléments de $(\widetilde{X\mathbf{1}_n - A})$, c'est-à-dire le PGCD des mineurs $(n-1)\times(n-1)$ de $(X\mathbf{1}_n - A)$. Clairement $h(X)$ est

[1]© L'OUVERT 99 (2000)

un polynôme unitaire de $K[X]$ qui divise $P_A(X)$ (développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne) de sorte que nous pouvons écrire
$P_A(X) = h(X)g(X)$où $g(X)$ est un certain polynôme unitaire de $K[X]$.

Proposition. 1 *: $g(X) = m_A(X) =$(polynôme minimal de A).*

Démonstration : Écrivons $(\widetilde{X\mathbf{1}_n - A}) = h(X)B(X)$ où $B(X) \in M_n(K[X])$ est une matrice dont les coefficients sont premiers entre eux. Nous avons alors :

$$h(X)g(X).\mathbf{1}_n = h(X)B(X)(X\mathbf{1}_n - A).$$

Comparant les coefficients des deux membres et puisque $K[X]$ est intègre, nous en déduisons : $g(X).\mathbf{1}_n = B(X)(X\mathbf{1}_n - A)$ (relation que nous pouvons considérer dans$M_n(K[X])$ tout comme dans $M_n(K)[X]$). Alors $g(A).\mathbf{1}_n = B(A)(A - A) = 0$ et donc $g(A) = 0$. Par conséquent $m_A(X)$ divise $g(X)$.

Pour démontrer la réciproque nous considérons le polynôme $m_A(X) - m_A(Y)$ de $K[X, Y]$. Nous pouvons écrire dans $K[X, Y]$, $m_A(X) - m_A(Y) = (X - Y)R(X, Y)$; en substituant $X\mathbf{1}_n$ à X et A à Y nous obtenons :
$m_A(X\mathbf{1}_n) - m_A(A) = (X\mathbf{1}_n - A)R(X\mathbf{1}_n, A)$; compte tenu de $m_A(A) = 0$ et puisque $m_A(X\mathbf{1}_n) = m_A(X).\mathbf{1}_n$, nous avons $m_A(X).\mathbf{1}_n = (X\mathbf{1}_n - A)R(X\mathbf{1}_n, A)$; en multipliant à gauche par $(\widetilde{X\mathbf{1}_n - A})$ nous obtenons :

$$\begin{gathered}(\widetilde{X\mathbf{1}_n - A})m_A(X).\mathbf{1}_n = m_A(X)(\widetilde{X\mathbf{1}_n - A}) = \\ = P_A(X).\mathbf{1}_n R(X\mathbf{1}_n, A) = P_A(X)R(X\mathbf{1}_n, A) = h(X)g(X)R(X\mathbf{1}_n, A) = \\ = h(X)B(X)m_A(X) = h(X)m_A(X)B(X)\end{gathered}$$

Comme précédemment, nous pouvons simplifier par $h(X)$, d'où :
$g(X)R(X\mathbf{1}_n, A) = m_A(X)B(X)$. Donc $g(X)$ divise tous les coefficients de la matrice $m_A(X)B(X)$; mais les coefficients de $B(X)$ sont premiers entre eux.

Lemme. 2 *: Soit R un anneau principal; $b_1, \cdots, b_m$des éléments de R premiers entre eux, $a \in R$ et $x \in R$. Si x divise tous les ab_i alors x divise a.*

Démonstration : $ab_i = xc_i (1 \leq i \leq m)$. Comme $PGCD(b_1, \cdots, b_m) = 1$, il existe des r_i tels que $r_1b_1 + \cdots + r_mb_m = 1$. Nous avons alors $ar_ib_i = xr_ic_i$, donc :
$a = a(r_1b_1 + \cdots + r_mb_m) = x(r_1c_1 + \cdots + r_mc_m)$ et par conséquent x divise a. Revenons à la proposition : il résulte du lemme que $g(X)$ divise $m_A(X)$; puisque $g(X)$ est unitaire on a $g(X) = m_A(X)$. Nous avons a que $m_A(X)$ divise $P_A(X)$; il y a une réciproque.

Proposition. 3 *: $P_A(X)$ divise $m_A(X)^n$.*

Démonstration : Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Les racines de $P_A(X)$ sont les valeurs propres de A. Si λ est une valeur propre de A, on a $m_A(\lambda) = 0$; soit $\overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur propre associé (dans $\overline{K}^n$) de sorte que $A\overrightarrow{V} = \lambda\overrightarrow{V}$ et donc $A^k\overrightarrow{V} = \lambda^k\overrightarrow{V}$. Si $m_A(X) = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \cdots + a_1X + a_0$ on a
$m_A(A) = A^r + a_{r-1}A^{r-1} + \cdots + a_1A + a_0\mathbf{1}_n = 0$ donc
$m_A(A).\overrightarrow{V} = A^r\overrightarrow{V} + \cdots + a_0\overrightarrow{V} = \lambda^r\overrightarrow{V} + a_{r-1}\lambda^{r-1}\overrightarrow{V} + \cdots + a_1\lambda\overrightarrow{V} + a_0\overrightarrow{V} = m_A(\lambda)\overrightarrow{V} =$

0. Puisque $\overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$, cela implique que $m_A(\lambda) = 0$. Dans $\overline{K}[X]$ nous pouvons écrire $P_A(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ ($\sum_{i=1}^m \alpha_i = n$) et $m_A(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ car $m_A(X) \mid P_A(X)$. On vient de voir que $1 \leq \beta_i$ donc $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i \leq n$, d'où $\alpha_i \leq n\beta_i$; $m_A(X)^n = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{n\beta_i}$. Donc $P_A(X) \mid m_A(X)^n$.

Remarques :

- Si $A = \lambda \mathbf{1}_n$ alors on a $P_A(X) = m_A(X)^n$ puisque $P_A(X) = (X - \lambda)^n$ et $m_A(X) = X - \lambda$.

- La division qui a priori à lieu dans $\overline{K}[X]$, a en fait déjà lieu dans $K[X]$.

3 Remarques concernant les matrices diagonalisables

Une matrice $A \in M_n(K)$ est dite diagonalisable si il existe un corps L tel que $K \subseteq L \subseteq \overline{K}$(clôture algébrique de K) et dans $M_n(L)$ une matrice inversible S vérifiant la condition : $S^{-1}AS$ est une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Alors les λ_i sont exactement les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités. On a alors la caractérisation : A est diagonalisable si et seulement si toutes les racines du polynôme minimal $m_A(X)$ sont simples (c'est-à-dire sans facteur carré). Comme on a un algorithme pour calculer $m_A(X)$ dans $K[X]$, nous pouvons calculer $m'_A(X)$ =la dérivée du polynôme minimal et, par l'algorithme de la division, le PGCD $D_A(X)$ de $m_A(X)$ et $m'_A(X)$: alors A est diagonalisable si et seulement si $D_A(X) \neq 1$.

On a donc un algorithme qui permet de décider si une matrice est diagonalisable sans calculer aucune valeur propre.

Dans $M_n(K)$, deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible S telle que $B = S^{-1}AS$.

Proposition. 4 *: Si A et B sont semblables, alors $m_A(X) = m_B(X)$.*

Démonstration : Si $B = S^{-1}AS$ (alors $A = SBS^{-1}$) on a :
$m_A(B) = S^{-1}m_A(A)S = S^{-1}0S = 0$ donc $m_A(X) \mid m_B(X)$; de la même façon $m_B(X) \mid m_A(X)$. Donc $m_A(X) = m_B(X)$.

Corollaire. 5 *: Supposons A diagonalisable. Alors B est semblable à A si et seulement si*
$m_A(X) = m_B(X)$ en supposant que toutes les valeurs propres sont dans le corps de base.

Démonstration : On vient de voir qu'en toute généralité, si A et B sont semblables, $m_A(X) = m_B(X)$. Réciproquement, si $m_B(X) = m_A(X)$ comme A est diagonalisable $m_A(X)$ est sans facteur carré donc aussi $m_B(X)$, donc B est diagonalisable. Soit $L = K(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ le corps engendré sur K par les valeurs propres de A et B. Dans une base $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}A$ devient $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ i.e.

$D = S^{-1}AS$, $S \in GL(n,L)$. De même $D = T^{-1}BT$, $T \in GL(n,L)$. Donc $T^{-1}BT = S^{-1}AS$ et $B = (ST^{-1})^{-1}AST^{-1}$ donc A et B sont semblables, la similitude ayant lieu dans L (corps contenant les valeurs propres).

Remarques :

- En général la situation est plus compliquée.

Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

on a $P_A(X) = P_B(X) = (X-1)^4$, $m_A(X) = m_B(X) = (X-1)^2$ mais A et B ne sont pas semblables (A possède trois vecteurs propres linéairement indépendants tandis que B n'en possède que deux).

- Prenons pour corps de base $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'application $M_n(K) \longrightarrow K[X]$:
$A \longmapsto P_A(X)$ est continue puisque polynomiale. Pour le polynôme minimal ça n'est pas vrai : voici un exemple simple. Dans $M_2(\mathbb{C})$ on considère la matrice
$A_\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\begin{cases} (m_{A_\alpha}(X) = (X-\alpha)(X-1) = X^2 - (\alpha+1)X + \alpha \,\text{si}\, \alpha \neq 1 \\ m_{A_1}(X) = X - 1 \end{cases}$

donc $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow 1} m_{A_\alpha}(X) \neq m_{A_1}(X)$.

4 Questions de rationalité

Dans ce dernier paragraphe nous allons examiner brièvement ce qui subsiste lorsque le corps K est remplacé par un anneau. Soit donc R un anneau commutatif et $A \in M_n(R)$ une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans R. Nous pouvons bien sûr considérer $P_A(X) = \text{dét }(X\mathbf{1}_n - A)$ et sans aucune autre hypothèse, le théorème de Hamilton-Cayley reste vrai (cf par exemple [1] p.441).

La formule $(X\mathbf{1}_n - A).(\widetilde{X\mathbf{1}_n - A}) = (\widetilde{X\mathbf{1}_n - A}).(X\mathbf{1}_n - A) = P_A(X).\mathbf{1}_n$ est encore valable ; mais la détermination de $h(X) =$ [PGCD des coefficients de l'adjointe $(\widetilde{X\mathbf{1}_n - A})$] ainsi que la formule $P_A(X) = h(X)g(X)$ posent des problèmes en général.

D'autre part nous pouvons encore considérer l'homomorphisme de R-algèbres $R[X] \xrightarrow{\varphi} M_n(R) : \varphi(f(X)) = f(A)$; posons alors $I_A = \text{Ker}\varphi$. En général $R[X]$ n'est pas un anneau principal de sorte qu'on ne peut rien dire a priori des générateurs de I_A .

La première hypothèse raisonnable à faire est de supposer R intègre ; désormais R est un anneau intègre et posons $K = \text{Frac}(R) =$ (corps des fractions de R) . Nous pouvons alors calculer $h(X)$ dans $K[X]$ et écrire $P_A(X) = h(X)g(X) \text{dans} K[X]$: le problème est de savoir à quelles conditions cette écriture valable dans $K[X]$ l'est en fait dans $R[X]$.

Soit $R \subset S$ des anneaux commutatifs ; un élément $x \in S$ est dit entier sur R s'il vérifie une équation du type $x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ où les $a_i \in R$ (équation de dépendance intégrale pour x sur R).

Un anneau commutatif intègre R est dit intégralement clos si tout élément du corps des fractions de R, entier sur R, est en fait dans R. Voici des exemples d'anneaux intégralement clos : $\mathbb{Z}$; tout anneau principal ; tout anneau factoriel ; tout anneau de valuation ; tout anneau de Dedekind (en particulier l'anneau des entiers d'un corps de nombres ou l'anneau des fonctions régulières sur une courbe non singulière) etc. (voir [1] pp 623-624 exercices 41-50).

Théorème. 6 *Soit R un anneau intégralement clos, $K = Frac(R)$ le corps des fractions de R et $A \in M_n(R)$ une matrice à coefficients dans R. Alors :*

i. le polynôme minimal $m_A(X)$ calculé dans $K[X]$ est dans $R[X]$;

ii. l'écriture $P_A(X) = h(X)m_A(X)$ a lieu dans $R[X]$;

iii. l'idéal I_A défini ci-dessus est principal et engendré par $m_A(X)$.

Démonstration : Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Dans $\overline{K}[X]$ nous pouvons écrire $P_A(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{a_i}$ et $m_A(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{b_i}$ avec des b_i tels que $1 \leq b_i \leq a_i$; puisque $P_A(X)$ est unitaire les λ_i sont entiers sur R.

Cela montre que les coefficients du polynôme minimal $m_A(X)$ sont entiers sur R (le produit et la somme d'entiers sont encore des entiers). Mais $m_A(X) \in K[X]$; puisque R est intégralement clos, nous avons en fait $m_A(X) \in R[X]$.

Puisque $m_A(X)$ est unitaire, nous pouvons diviser $P_A(X)$ par $m_A(X)$ et écrire $P_A(X) = m_A(X)q(X) + r(X)$ avec deg $r <$ deg m_A. Comme $P_A(A) = m_A(A) = 0$, nous avons $r(A) = 0$ donc $r(X) = 0$ (dans $K[X]$ donc aussi dans $R[X]$). Par suite l'écriture $P_A(X) = h(X)m_A(X)$ a lieu dans $R[X]$.

Clairement $m_A(X) \in I_A$. Si $f(X) \in I_A$, comme $m_A(X)$ est unitaire, nous pouvons diviser et comme ci-dessus on voit que $f(X) = m_A(X)q(X)$ donc $m_A(X)$ engendre I_A .

On vient de voir que dans le cas des anneaux intégralement clos une belle partie de la théorie du polynôme minimal reste vraie.

Référence : [1] R. GODEMENT *Cours d'algèbre*

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

Philippe NABONNAND

Archives Poincaré - Université de Nancy 2 - BP 3397 F. 54015 Nancy cedex

e.mail : Philippe.Nabonnand@plg-univ-nancy2.fr

Connaître la personnalité des mathématiciens célèbres n'est pas chose aisée. Leur oeuvre publiée a gommé toute trace d'émotion et de sentiment pour présenter les résultats mathématiques dans toute leur rigueur et leur vérité. Vérité souvent très belle sans doute et admirable, "honneur de l'esprit humain", mais abstraite et froide, figée dans son éternité comme un ciel étoilé par une nuit d'hiver glacée. Ce qui en a éloigné plus d'un, curieux de sciences mais rebuté par son aridité. A tort : les lettres écrites par les mathématiciens à leurs amis ou collègues nous révèlent des personnalités sensibles et passionnées, essayant de résoudre au mieux, non seulement les problèmes scientifiques qu'ils se sont posés mais aussi les mille et un tracas de leur vie quotidienne et les difficultés causées par les événements politiques et sociaux. Cette rubrique vous présente des lettres, ou de larges extraits que nous pensons représentatifs et révélateurs de la personnalité profonde, mais quelquefois méconnue, de nos illustres savants.

Nous poursuivons cette rubrique avec des extraits de la correspondance Poincaré, Mittag-Leffler qui vient d'être publiée par Philippe NABONNAND. Nous remercions vivement les éditions Birkhäuser pour avoir autorisé "*L'Ouvert*" à reprendre ces quelques pages de *La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler*, présentée et annotée par P. NABONNAND, Bâle : Birkhäuser 1999, 421 p.
Sauf exception nous n'avons pas voulu omettre ni modifier les importantes notes renvoyant quelque fois à d'autres lettres ou commentaires non reproduits ici : le lecteur intéressé se reportera au texte intégral du livre publié par Ph. Nabonnand. Nous avons tenu par contre à traduire les textes écrits en allemand et reproduits tels que dans les notes. Le style propre de Mittag Leffler a aussi été conservé.

1) Présentation générale de la correspondance Mittag Leffler-Poincaré.

On peut distinguer quatre périodes dans cette correspondance qui couvre toute la carrière scientifique de Poincaré. Une première période assez courte (neuf lettres entre le 11 avril 1881 et le 9 août 1881) permet aux deux mathématiciens de faire connaissance par l'intermédiaire de Hermite ; la seconde période est celle, extrêmement féconde, de la création de la revue *Acta Mathematica* par Mittag-Leffler et de la rédaction par Poincaré des grands mémoires sur les fonctions fuchsiennes (quarante-huit lettres du 19 août 1881 au 5 mars 1887) ; suit la période du concours du Roi de Suède avec, en particulier, de très intéressantes lettres sur la gestion, tant scientifique qu'institutionnelle, de l'erreur de Poincaré dans son mémoire présenté au concours (quarante-cinq lettres du 13 juillet 1887 au 20 juillet 1890). La dernière période est celle de la "maturité", nettement moins scientifique, durant laquelle on voit deux universitaires de renom gérer leur réseau d'obligés et d'élèves, s'occuper de nominations dans diverses académies et de propositions au prix Nobel de Physique (cent cinquante-sept lettres du 13 mars 1891 au 10 septembre 1911).

2) La prise de contact.

La période de prise de contact est centrée autour d'un article de Poincaré *Sur les fonctions à espace lacunaire* (Les fonctions à espace lacunaire sont des fonctions analytiques non prolongeables à tout le plan complexe.) que Mittag-Leffler publie dans les *Acta Societatis Scientarum Fennicae, 12 (1883), 343-350; Oeuvres 4, 28-35.*. Hermite lui a fait parvenir le travail de Poincaré à fin de publication. Dans sa lettre à Mittag-Leffler du 28 mars 1881, Hermite exprime l'excellente opinion qu'il a de Poincaré en rapportant les reproches qui lui sont faits parce qu'il "place trop haut et qu'il vante trop Poincaré dans son rapport sur ses travaux" à l'occasion d'une élection à l'Académie des sciences; néanmoins, Mittag-Leffler adoptera au début de leur correspondance un ton assez condescendant et protecteur avec le "jeune homme" qui lui est présenté par Hermite. En effet, Mittag-Leffler est déjà un mathématicien confirmé et reconnu. Il est l'un des élèves les plus brillants de l'école de Berlin. Son théorème sur le développement des fonctions monogènes généralise des résultats de Weierstrass, son vieux maître berlinois, auquel, comme on va le voir, Mittag-Leffler voue une sincère dévotion. Consécration suprême, Hermite et Weierstrass proposeront d'autres démonstrations de son théorème. Mittag-Leffler a donc une position reconnue dans la communauté mathématique que n'a pas encore Poincaré car les travaux de ce dernier sur les équations différentielles ne sont pas encore publiés (seule une note est parue aux *Comptes rendus*). Poincaré a seulement présenté aux *Comptes rendus* deux notes sur les fonctions fuchsiennes en février 1881 qui contiennent certes l'essentiel de la théorie mais dont on peut penser que peu de mathématiciens en comprenaient l'importance à l'époque[2]. L'essentiel des notes sur la théorie des fonctions fuchsiennes n'est pas encore paru au début de la correspondance entre Poincaré et Mittag-Leffler. Mittag-Leffler est certes impatient de lire les travaux de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes dont il a lu un compte rendu dans le rapport de Hermite pour le grand prix des Sciences mathématiques, mais il considère qu'en ce qui concerne les fonctions à espace lacunaire, ses propres travaux sont d'une généralité beaucoup plus grande que ceux de Poincaré et de Picard.

M. Poincaré est un jeune homme encore je suppose. J'ai été très frappé par le dernier article de M. Picard : "Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels". Mais les résultats de M. Picard comme ceux de M. Poincaré s'obtiennent immédiatement des formules générales que je possède pour exprimer analytiquement

[2] La correspondance avec Klein, qui était le mathématicien le plus concerné par les travaux de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes, débute en juin 1881.

une fonction uniforme ayant une infinité de la première classe de points singuliers essentiels. Chez M. Picard les points singuliers sont distribués sur la circonférence d'un cercle. Chez M. Poincaré, ils remplissent l'intérieur d'un espace qui a pour limite un polygone rectiligne. Il n'y a pas de différence essentielle entre les deux résultats. J'espère de trouver assez de loisirs pendant cet été pour pouvoir rédiger mes recherches. [Lettre de Mittag-Leffler à Hermite datée du 6 avril 1881]

De plus, Poincaré, alors qu'il adopte la présentation de Weierstrass des fonctions analytiques, ne cite pas celui-ci dans la version préliminaire de son article *Sur les fonctions à espace lacunaire*. Il attribue en outre la paternité des fonctions qui "n'ont d'existence que dans un domaine limité" à Hermite. Or, Weierstrass s'était intéressé aux fonctions à espace lacunaire et avait exhibé un certain nombre d'exemples dans son mémoire *Zur Functionlehre* (Monatsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1880, 719-743 et 1881, 228-230; Werke, 2, 201-223; 231-233; traduction française, *Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques*, bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, (II) R (1881), 157-183.) Mittag-Leffler rappelle avec vigueur la priorité de Weierstrass à Hermite et Poincaré en signalant que "Weierstrass a parlé de telles fonctions depuis des années dans son cours".(...)

A la mort de Weierstrass en 1897, considérant Poincaré comme "le premier analyste maintenant vivant", Mittag-Leffler lui demandera de rédiger une étude sur Weierstrass. Poincaré répondra favorablement à la demande de Mittag-Leffler et étudiera, en même temps que l'œuvre mathématique de Weierstrass, son style. (*l'Oeuvre mathématique de Weierstrass*, Acta Mathematica, 22 (1898), 1-18.) Il soulignera que Weierstrass est un mathématicien qui "ne cherche pas à voir, mais à comprendre"; tout en reconnaissant les mérites du géomètre et de l'analyste, Poincaré se plaçait résolument du côté de ceux qui veulent voir plutôt que comprendre, qui fondent leur approche sur l'intuition plutôt que sur la logique. Mittag-Leffler, formé à l'école de rigueur "weierstrassienne", critique assez souvent le style d'exposition de Poincaré. Dans sa lettre adressée à Weierstrass le 11 mai 1883, il regrette que le manque de clarté et de rigueur du mode d'exposition de Poincaré nuise à ses idées et affirme la nécessité d'un exposé rigoureux de ses travaux :

Comment trouvez vous le deuxième mémoire de Poincaré "sur les fonctions fuchsiennes" ? C'est vraiment très dommage qu'il n'ait pas été formé dans une université allemande. Bien qu'il soit fourmillant d'idées nouvelles, son travail, me semble-t-il, laisse beaucoup trop à désirer du point de vue formel.

Les commentaires de Mittag-Leffler concernant les travaux de Poincaré oscilleront toujours entre l'enthousiasme le plus vif pour les résultats et une critique non moins acerbe de son style d'exposition. En effet, s'il ne ménageait pas ses commentaires admiratifs pour "le génie de Poincaré" et "ses travaux admirables", il ne ratait pas pour autant une occasion de rappeler que souvent, ses travaux étaient trop peu rigoureux :

Mais il [Poincaré] a pourtant une faute qui est extrêmement à regretter. Il écrit avec trop peu de soin, c'est incontestable, et ses mémoires sont remplis d'inexactitudes. Que ça ne soit dit qu'entre nous ! Il faut laisser aux grands génies de suivre leur propre chemin et accepter avec reconnaissance ce qu'il nous donne, même si l'on aurait désiré de le recevoir sous une forme plus digestible. [Lettre de Mittag-Leffler à Hermite datée du 27 octobre 1887]

Mittag-Leffler aura encore le souci, lors du second Congrès international des mathématiciens de Paris en 1900, de saluer la mémoire de Weierstrass et celle de Kowalevskaja en consacrant sa conférence plénière à leur correspondance. Par ailleurs, il écrira à plusieurs reprises des articles sur l'œuvre et la vie de Weierstrass. En 1881, Poincaré ne fait pas de difficultés pour "rectifier une erreur historique". Il propose quelques modifications à son article dans lesquelles il attribue clairement à Weierstrass la paternité des fonctions à espace lacunaire. Toutefois, Mittag-Leffler ne sera pas très satisfait de ces rectifications et le confiera à Hermite dans une lettre datée du 20 août.

M. Poincaré a bien voulu faire quelques corrections mais je trouve pourtant qu'il soit injuste envers Weierstrass.

3) La création des Acta Mathematica

Dans le même temps, impressionné par la lecture des notes sur les fonctions fuchsiennes de Poincaré aux *Comptes rendus* et convaincu par sa correspondance avec Hermite, Mittag-Leffler se rend compte que Poincaré est un "véritable génie mathématique". L'importance des résultats obtenus par Poincaré offre alors à Mittag-Leffler l'opportunité de mettre en œuvre un projet de publication d'un journal mathématique. Les revues françaises n'étaient plus aussi dynamiques que dans la période précédente. Les journaux allemands, en particulier le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* et les *Mathematische Annalen*, reflétaient bien l'intense activité et la créativité des mathématiciens allemands. Cependant, leur diffusion était limitée du fait de la langue allemande, peu lue en dehors de sa zone d'influence naturelle. D'autre part, les relations amicales qu'entretenait Mittag-Leffler avec son maître français Hermite et ses maîtres allemands, Weierstrass et Kronecker, lui permettaient d'envisager le soutien des écoles mathématiques françaises et allemandes à son entreprise.[3]
L'occasion de mettre en œuvre son projet éditorial lui était fournie par sa rencontre avec Poincaré. En effet, pour hisser rapidement sa revue au niveau international qu'il souhaitait, Mittag-Leffler avait non seulement besoin des contributions des meilleures plumes mathématiques mais aussi de publier dès les premiers tomes des travaux d'une importance exceptionnelle. Il se souvenait que le succès de la revue fondée par Crelle, le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, avait été assuré par les contributions d'Abel à la résolution de quelques unes des plus

[3] Si Hermite soutient sans ambiguïté le projet de Mittag-Leffler, ce dernier pouvait craindre que les Allemands n'accueillent pas avec le même enthousiasme la création d'un nouveau journal, qui ne pouvait que concurrencer le *Journal de Crelle*, alors dirigé par Kronecker et Weierstrass. Ces derniers ne s'opposeront pas au projet puisque Kronecker, selon ses dires, trouvera le nom définitif des *Acta mathematica* et que Weierstrass manifestera à plusieurs reprises son intention de publier des articles dans la nouvelle publication.

fameuses conjectures de la théorie des fonctions elliptiques. Les fonctions fuchsiennes sont de l'avis de Mittag-Leffler "les plus remarquables qui ont été trouvées après les fonctions elliptiques" et les résultats obtenus par Poincaré "feront la concurrence avec ceux d'Abel". Mittag-Leffler considère que les circonstances sont comparables à celles de la découverte des fonctions elliptiques et que la diffusion des nouvelles idées nécessite la création d'un nouveau journal. Mittag-Leffler reprend les mêmes arguments dans la préface du premier fascicule des *Acta mathematica* en insistant sur l'aspect international de son entreprise :

> L'époque à laquelle nous commençons notre publication est certainement l'une des plus fécondes dans l'histoire des mathématiques, par le grand nombre et l'importance des découvertes qui touchent aux principes les plus essentiels de l'analyse. On sait combien, en divers pays, ce mouvement a été puissamment secondé par des journaux mathématiques, qui contiennent les œuvres des plus grands géomètres de notre temps. Nous nous sommes proposés le même but, de servir la science, en réunissant et associant les recherches nouvelles qui concourent à son progrès, par la nouveauté des résultats ou l'originalité des méthodes. Des mathématiciens éminents dans tous les pays, en nous assurant de leur collaboration, nous ont donné un témoignage de sympathie qui nous pénètre de reconnaissance, et que nous voulons justifier par les soins et le zèle que nous apporterons à notre publication.

Mittag-Leffler espère donc à juste raison que Poincaré fera le succès du journal suédois de la même manière qu'Abel pour le *Journal de Crelle.* Poincaré accepte de rédiger cinq mémoires, dans lesquels il expose les démonstrations des résultats annoncés dans les notes aux *Comptes rendus*, et de les confier au nouveau journal. Les lettres dans lesquelles il transmet à Mittag-Leffler son accord sont malheureusement perdues. On est réduit à faire des suppositions sur les motivations du choix de Poincaré de publier ses mémoires fondamentaux sur les fonctions fuchsiennes dans les *Acta mathematica.* On peut d'abord penser qu'il est flatté que Mittag-Leffler fonde le succès de son journal sur sa participation. D'autre part, il est clair que Poincaré est conscient de la nécessité de diffuser rapidement ses travaux en Allemagne, tant pour des raisons de prestige que de priorité. L'Allemagne reste sans conteste la nation dominante en mathématiques ; de plus sa querelle de priorité et de dénomination avec les mathématiciens allemands Klein et Schwarz ne pouvait que l'inciter à se faire reconnaître le plus rapidement possible en Allemagne. En outre, comme il l'explique dans une lettre adressée à l'historien des mathématiques suédois Eneström le 3 juin 1884, Poincaré accorde une importance particulière à annoncer rapidement ses nouveaux résultats à quelques mathématiciens reconnus :

> Si les auteurs sont généralement pressés d'avoir leurs tirages à part, ce n'est pas pour faire une ample distribution à tous leurs amis, mais pour envoyer aussitôt que possible un exemplaire à une dizaine de grands noms à qui ils désirent faire connaître leurs travaux.

Néanmoins, compte tenu de la germanophobie en France, Poincaré ne pouvait pas publier l'intégralité de ses mémoires dans une revue allemande. L'offre de Mittag-Leffler, élève de Weierstrass, introduit auprès de la communauté mathématique allemande, lui donne l'occasion d'être lu par les mathématiciens allemands sans heurter les sentiments nationalistes de ses compatriotes. Enfin, Poincaré ne cesse pas pour autant ses collaborations avec les journaux français; ses travaux concernant la théorie qualitative des équations différentielles sont publiés dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* et ceux sur les formes quadratiques et cubiques dans le *Journal de l'Ecole polytechnique.* Si Mittag-Leffler considère la collaboration de Poincaré comme essentielle au succès de son entreprise, Poincaré assoit son statut et sa reconnaissance internationale grâce à ses publications dans les *Acta mathematica.* Les espoirs de Mittag-Leffler ne sont pas déçus et très rapidement, grâce en particulier aux contributions régulières de Poincaré, les *Acta mathematica* deviennent un journal de renommée internationale dans lequel publient des mathématiciens de premier plan et de tous pays. Certes, l'essentiel des mémoires publiés dans les dix premiers numéros proviennent d'Allemagne et de France; néanmoins, Mittag-Leffler a réussi à créer une entreprise qui permet les échanges et la diffusion des travaux entre les deux pays; on peut penser que les idées de Poincaré n'auraient pas été reçues en Allemagne de la même manière sans les *Acta mathematica.* De même, les travaux de Cantor seraient certainement restés ignorés en France pendant longtemps sans leur traduction en français dans les *Acta.* Poincaré et Klein étaient parfaitement convaincus de l'importance acquise par les *Acta*, notamment pour la diffusion des idées nouvelles en mathématiques. Dans le cadre de la politique de traduction de textes allemands, Poincaré propose le 14 août 1883 à Mittag-Leffler de publier celle du programme d'Erlangen de Klein en argumentant qu'"une certaine publicité donnée à ces idées sera utile à bien des géomètres et surtout aux Français". Mittag-Leffler ne donnera pas suite à ce projet qui avait suscité l'enthousiasme de Klein. En un peu plus d'une année, les *Acta* apparaissaient aux yeux de la plupart des mathématiciens comme un vecteur essentiel pour la diffusion de leurs travaux. Dès le début, Mittag-Leffler se préoccupa de créer les meilleures conditions pour en assurer la pérennité et la qualité. Outre le soutien de nombreux mathématiciens européens, Mittag-Leffler s'était aussi assuré celui des autorités politiques et administratives de Scandinavie. Ainsi, le roi de Suède et de Norvège Oscar II soutiendra financièrement le journal, de même que les gouvernements du Danemark, de Norvège et de Suède.

Mittag-Leffler à Poincaré - Stockholm 29/3/1882

Mon cher ami,
J'ai à vous remercier des deux lettres et de l'envoi de votre mémoire dans les *Mathematischen Annalen.* J'ai parcouru votre mémoire sans avoir eu le temps de l'étudier au fond pourtant. J'ai guère besoin de vous dire que je suis frappé de la plus grande admiration de votre génie et de la beauté des résultats que vous avez obtenu[s]. Je ne crois que je me trompe quand je vous assure que vos découvertes feront la concurrence avec celles d'Abel et que vos fonctions sont les plus remarquables qui ont été trouvé[es] d'après les fonctions elliptiques. Mais certainement que Monsieur Klein a raison que vous avez tort d'appeler vos fonctions, fonctions Fuchsiennes et Kleinéennes. Elles doivent porter le nom

des fonctions de Poincaré[4]. C'est le seul nom qui est juste et raisonnable. Si je parviendrai une fois de travailler sur ce champ fertile que vous avez ouvert à l'analyse je tacherai d'introduire ce nom au lieu de vos noms. Je vous prie de m'excuser en avance mais je ne pourrai]s[faire autrement. Voulez vous me faire la service de me dire où je trouverai les publications de Fuchs et de Klein qui vous ont amené d'appeler vos fonctions après eux [5]

---

[4] La polémique extrêmement vive entre Poincaré et Klein au sujet de ces dénominations est la partie apparente de leur concurrence scientifique. Le prétexte invoqué par Klein était la sous-estimation par Poincaré des travaux de Fricke et surtout de Schwarz. Dans sa lettre adressée à Poincaré le 19 juin 1881, il souligne l'importance de ceux-ci : *La dénomination "fonctions fuchsiennes" provient, pour autant que je le comprenne bien, de ce que vous avez été conduit à ces idées par les travaux de Fuchs. Fondamentalement toutes ces recherches sont basées sur Riemann. Pour mon développement propre, l'observation très vosine que fait Schwarz dans le volume 75 du Journal de Borchardt (que je vous recommande expressément, au cas où vous devriez ne pas le connaître encore) a été d'une signification déterminante.* (traduit par la rédaction). Correspondance d'Henri Poincaré et de Felix Klein, Oeuvres de Poincaré, II, 26-65. Mittag-Leffler avait déjà abordé la question de la dénomination des nouvelles fonctions de Poincaré dans sa lettre adressée à Hermite le 20 août 1881 : *Pour les fonctions Fuchsiennes je trouve qu'il a eu raison parce que les grands mérites de M. Fuchs sont incontestables. Pour les fonctions Kleinéennes qui ont donné lieu à ce nom fonctions Kleinéennes, elles sont guère d'une grande importance pour mériter l'honneur d'un nom spécial dans l'Analyse. [AS] Mittag-Leffler reviendra sur la question de l'appellation des fonctions kleinéennes dans une lettre adressée à Hermite le 3 août 1882 dans laquelle il fait part de l'opinion de Weierstrass au sujet de la querelle Klein-Poincaré : [...] il [Weierstrass] trouve que Poincaré a parfaitement raison. La seule chose qu'il ne paraissait pas approuver c'était le nom "fonctions Kleinéennes". Et c'est vrai que le nom est drôle. M. Poincaré l'avait introduit à cause d'une lettre de M. Klein où M. Klein lui communiquait des certaines choses. Mais ces choses n'étaient pas de Klein. Elles étaient de M. Schottky ce que M. Klein avait oublié de dire. Je tiens cette histoire de M. Klein lui-même. [AS] Le point de vue de Poincaré est défendu avec vigueur dans sa réponse au commentaire que Klein fait à la suite de l'article de Poincaré paru dans les Mathematischen Annalen en 1882.*

[5] Poincaré a toujours considéré le mémoire *Über eine Classe von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten entstehen* [Journal für die reine und angewandte mathematik 89 (1880) 151-169] comme ayant inspiré sa théorie des fonctions fuchsiennes. Dans son mémoire présenté en 1880 pour le grand prix de l'Académie, Poincaré fait une analyse du mémoire de Fuchs et montre que les conditions énoncées, pour que l'inverse du quotient de deux solutions d'une équation différentielle du second ordre soit méromorphe, ne sont pas suffisantes. Il reprend l'analyse de Fuchs en approfondissant les cas où l'intégration de l'équation se fait avec des fonctions doublement périodiques et ceux où l'équation admet deux points singuliers à distance finie. L'étude de ces exemples contient en germe la méthode qu'utilisera Poincaré dans l'élaboration définitive de sa théorie. Dans sa lettre du 12 juin 1880, Poincaré informe Fuchs de ses travaux : *Dans le cas où ces points singuliers ne sont qu'au nombre de deux je trouve que la fonction que vous avez définie jouit de propriétés fort remarquables et comme j'ai l'intention de publier les résultats que j'ai obtenus, je vous demande la permission de lui donner le nom de fonction Fuchsienne puisque c'est vous qui l'avez découverte.* [Correspondance Poincaré-Fuchs, Oeuvre de Poincaré, 11, 13-25.] Dans sa réponse à la note de Klein [1882] (voir note n°2), il précise sans ambiguité les raisons qui justifient à ses yeux ses appellations :

Mais il ne m'était pas possible d'oublier les découvertes si remarquables que le savant professeur d'Heidelberg a publiées dans le Journal de Crelle. Elles sont le fondement de la théorie des équations linéaires et, sans elles, je n'aurais pu aborder l'étude de mes transcendantes qui se lient si facilement à cette théorie. [...] Quant à M. Fuchs, dans ses mémoires des Tomes 83 et 89 du Journal de Crelle, il s'est élevé à un point de vue nouveau et a mis en lumière le lien étroit qui unit la théorie des équations différentielles à celles de certaines équations uniformes. Ce fut la lecture de ces mémoires qui devint le point de départ de mes recherches. En ce qui concerne les fonctions kleinéennes, j'aurai cru commettre une injustice si je leur avais donné un autre nom que le vôtre. C'est M. Schottky qui a découvert la figure qui faisait l'objet de votre lettre, Dites-moi aussi, je vous en prie, où M. Fuchs a publié son dernier article contre M. Klein [6] Fuchs m'envoi[e] en général tout ce qu'il écrit mais je n'ai rien reçu sur ce sujet. Et maintenant j'ai une proposition à vous faire et une prière à vous adresser. Nous, les mathématiciens dans / les pays scandinaves, ont le projet de publier un nouvel journal mathématique d'après le modèle du *journal de Crelle.*[7] On m'a demandé de devenir l'éditeur principal. Les autres éditeurs seront Malmsten et Gyldén en Suède, Broch, Bjerknes, Lie et Sylow en Norvège, Lorenz et Zeuthen au Danemark et Lindelöf en Finlande[8]. Le journal sera publié en français et en allemand mais surtout en français. Je vous prie à garder cette confiance [9] strictement à vous seul pour quelques temps encore. Vous savez que c'est Abel, un norvégien, qui a fait surtout le succès du *journal de Crelle.* [10] Maintenant

---

mais c'est vous qui avez "ihre prinzipielle Wichtigkeit betont"; comme vous le dites à la fin de votre savant travail : "Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich".

[6] Poincaré, dans les lettres manquantes, a dû faire état de la lettre datée du 4 mars 1882 que Fuchs venait de lui envoyer et dans laquelle il annonçait qu'il allait répliquer à la note de Klein (1882) commentant l'article de Poincaré paru dans les *Mathematischen Annalen.* Dans cette note, Klein affirme entre autre que Fuchs n'a rien publié sur le sujet : *Ainsi, notamment, toutes les recherches que M. Schwarz et moi-même avons publiées depuis un certain temps déjà dans cette direction, se tournènt vers le domaine des "fonctions fuschiennes", sur lequelles M. Fuchs n'a lui-même jamais rien publié* (traduction de la rédaction). Dans sa lettre à Poincaré datée du 4 mars, Fuchs exprime son indignation et annonce qu'il a rédigé une note pour répondre à Klein : *Mais dans sa note, il [Klein] a aussi osé de faire une assertion qui répugne à la vérité. Il dit que je n'ai publié en aucun lieu un mémoire concernant les fonctions qui se reproduisent par des substitutions linéaires. C'est pourquoi je crois le devoir à la dignité de la science, et aussi à vous, Monsieur, de témoigner publiquement que l'assertion de M. Klein n'est pas vraie.* Dans sa note aux *Nachrichten* datée elle-aussi du 4 mars, Fuchs cite un certain nombre de ses travaux ((1877), (1880), (1876)), en commente rapidement les résultats et rappelle que Klein lui-même en a souligné l'importance. En particulier dans le second de ceux-ci Fuchs rappelle qu'il étudie la variable comme une fonction du quotient de deux solutions indépendantes et que le troisième a été commenté par Klein lui-même dans les *Mathematischen Annalen* (1877) :
En ce qui concerne finalement l'insinuation contre la conclusion de la note, comme quoi j'aurais été influencé sur le fond par les recherches personnelles de Fuchs cela est tout simplement et historiquement faux. Mes recherches commencent en 1874 avec la détermination de tous les groupes finis de transformations linéaires à une variable. En 1876 j'ai ensuite montré que de cette manière le problème soulevé alors par Fuchs, consistant à déterminer toutes les équations différentielles linéaires intégrables d'ordre 2, était réglé eo-ipso. L'affaire est donc exactement à l'inverse de ce qu'indique Fuchs. Ce n'est pas dans son travail que j'ai puisé les idées, mais au contraire, c'est son thème qui doit être traité avec mes idées. (traduction de la rédaction).

[7] Mittag-Leffler signale dans l'annonce de la mort de Lie publiée dans les *Acta mathematica* (1899) que l'idée de créer un journal de mathématiques dans les pays scandinaves lui revenait : *Sophus Lie appartient à la rédaction de ce journal depuis sa fondation à la fin de l'année 1882. C'était bien lui qui avait le premier compris que l'époque était venue d'éditer un grand journal mathématique scandinave. C'est lui qui dans une entrevue que nous eûmes à Stockholm au printemps de 1882 me proposa de tenter cette entreprise et de la diriger moi-même comme rédacteur en chef du nouveau journal.*

[8] A la requête de Lie, Malmsten et Zeuthen, Mittag-Leffler ajoutera au comité éditorial du nouveau journal, Backlund, Daug, Holmgren et Petersen (cf. Domar, on the fundation of *Acta Mathematika*, Acta Mathematika 148 (1982), 3-8)

[9] [confidence]

[10] Abel a publié la plupart de ses principaux mémoires dans les 4 premiers tomes du *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (6 notes ou articles dans le tome 1 (1826), 3 dans le tome 2 (1827), 4 dans le tome 4 (1828) et 4 dans le tome 4 (1829)). En particulier, ses mémoires fondamentaux sur la théorie des fonctions elliptiques (Recherches sur les fonctions elliptiques, Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, ...) et des extraits de celui sur les

nous avons pensé M. Gyldén et moi que vous, un français, serez peut-être assez généreux pour vouloir faire le succès de notre journal [11].. Voudriez vous nous donner votre mémoire "*Sur les groupes fuchsiens*" pour être publié le premier mémoire dans le journal [12]. Il sera publié tout de suite et vous recevrez tant de tirages à part que vous désirez et sitôt que possible. Le premier numéro du journal paraitra au commencement de l'année 83 [13] mais vous pouvez distribuer votre tirage à part quand vous désirez. Est-ce-que vous nous donneriez les quatre mémoires suivants aussi [14]? Je sais parfaitement que ma proposition est bien prétentieux, mais pensez-y que les pays scandinaves et surtout les suédois sont les amis les plus chaud]e[s de la France et qu'il ne peut nullement être regardé comme une trahison contre votre patrie que vous publiez chez nous. Vous auriez du reste comme collègues les premiers géomètres de la France et de l'Allemagne. Je ne doute pas qu'en France M. Hermite en premier lieu et après Messieurs / Picard et Appel[l] seront de nos collaborateurs [15] En Allemagne, en Italie et en Russie

intégrales de différentielles algébriques (appelées depuis intégrales abéliennes), dans lequel il expose son théorème d'addition, (Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes, Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes), sont publiés dans ce journal et ont contribué de manière essentielle à son succès. *Ce qui fut un vrai bonheur pour Abel, ce sont les relations qu'il noua à Berlin avec Crelle, homme excellent qui accueillit le jeune géomètre dans sa maison, l'encouragea de toute manière et devint pour lui un ami absolument dévoué. La rencontre d'Abel avec Crelle, dit M. Holst, fut pour tous deux le grand événement de leur vie et c'est dans leur première entrevue que furent jetées les bases du Journal für die reine und angewandte Mathematik.* [Mansion *le centenaire d'Abel, la revue des questions scientifiques* 1902, 603-618]

[11] La même idée que la participation de Poincaré serait une garantie de succès pour les débuts du nouveau journal est exprimée de la même manière dans une lettre de Mittag-Leffler à Malmsten datée du mois de mars 1882 [Domar 1982, p. 5].

[12] Poincaré a annoncé que les démonstrations des théorèmes, cités dans l'article *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires* publié aux *Mathematischen Annalen*, seraient "publiées prochainement dans un travail de longue haleine". D'autre part, dans les lettres perdues, Poincaré a dû répondre à Mittag-Leffler qui lui demandait de rédiger sa théorie des fonctions fuchsiennes et lui annoncer la rédaction du premier mémoire consacré à ce sujet. On peut donc penser que le mémoire sur les groupes fuchsiens a été rédigé au premier trimestre de 1882.

[13] Le premier fascicule des *Acta mathematica* sera imprimé début décembre 1882. Mittag-Leffler en présentera la première copie au roi Oscar à la mi-décembre 1882 [Domar 1982, p. 8] : *Avant hier j'ai été chez sa Majesté pour lui offrir le premier exemplaire du premier fascicule de notre journal. Mais c'est seulement aujourd'hui que je puisse vous envoyer des exemplaires. Je n'ai reçu d'autres que celui qui était destiné à sa Majesté auparavant. Je vous envoye d'abord deux exemplaires dont l'un pour l'institut. Le roi a été extrêmement gracieux. Je lui ai donné la lecture de votre dépêche et d'une partie de votre lettre. Il m'a prié de vous rappeler votre promesse de faire imprimer dans les Comptes rendus ainsi que dans les publications mathématiques de la France quelques mots sur le Journal. Pour le Bulletin [des Sciences Mathématiques], Monsieur Tannery m'a promis de dire quelques mots. Pour les autres journaux ou publications, vous avez bien voulu prendre la peine d'arranger l'affaire. [Lettre de Mittag-Leffler à Hermite datée du 14 décembre 1882-AS]. Dans une lettre adressée à Weierstrass, datée du 15 décembre, Mittag-Leffler évoque aussi sa visite chez le roi : Ich habe gestern das erste Exemplar des ersten Heftes der neuen Zeitschrift dem König übergeben. [IML](Institut Mittag-Leffler-Djurskolm)*

[14] Dans les lettres perdues, outre l'annonce de la rédaction de son premier mémoire sur les groupes fuchsiens, Poincaré a dû informer Mittag-Leffler de son projet d'organiser la rédaction de son travail en cinq mémoires.

[15] Mittag-Leffler ne recevra en fait confirmation du soutien actif de Picard que le 18 avril 1882, par l'intermédiaire d'Hermite : *M. Appell a été toute la semaine absent de Paris et je n'ai pu*

les meilleurs auteurs nous enverront des articles [16]. Il sera aussi une convention entre les éditeurs scandinaves de toujours publier leurs meilleures choses dans le journal.
Je vous prie de ne dire rien à personne encore sur notre projet parce que la réalisation de ce projet dépend de vous. Si vous refusez je suis de l'avis que nous devons attendre deux ou trois ans encore. Entre nous c'est incontestable que notre journal fera un peu la concurrence avec le journal de Weierstrass et Kronecker [17] et c'est une chose que je n'aimerais pas quand Weierstrass est encore à la tête de ce journal [18]. C'est seulement l'avantage énorme de pouvoir publier vos découvertes qui pourrait m'y décider. Le premier éditeur de la Suède fera imprimer le journal. On formera une association de quelques riches gens en Suède qui payeront la perte économique qu'on aura possiblement pendant les premièr[e]s cinq années [19]. Je n'ai rien voulu faire pour former cette association avant d'avoir reçu votre réponse. Peut-être que vous avez donné déjà votre premier mémoire au journal de l'école polytechnique et que vous ne voulez pas le reprendre. Est-ce-que vous ne voulez admettre dans ce cas qu'il sera publié en même temps chez nous et en France? J'irai en Finlande me marier au milieu du mois de Mai
20

encore m'entretenir avec lui de votre grand projet, mais M. Picard me charge de vous exprimer sa plus vive sympathie pour l'entreprise et de vous donner l'assurance de son active collaboration.

[16] Mittag-Leffler réussira au-delà de toute espérance à fonder un journal international réputé. Dans le tome 10, la rédaction des *Acta mathematica* donne des résultats statistiques sur ses auteurs : Le cahier 1 : 1 a paru en décembre 1882, le cahier 10 : 4 le 30 novembre 1887. Les dix tomes publiés ont contenu en tout 162 mémoires ou notes dont 95 (embrassant 2382 pages) sont rédigés en français, 66 (embrassant 1561 pages) en allemand et 1 (embrassant 36 pages) en anglais.

[17] *Journal für die reine und angewandte Mathematik* dirigé, depuis la mort de Borchardt en 1880, par Kronecker et Weierstrass.

[18] Weierstrass ne publiera aucun mémoire original aux *Acta mathematica*. Une traduction en français de son mémoire sur la théorie des fonctions elliptiques paraîtra dans le tome 6 de la revue. Il n'en soutiendra pas moins l'initiative de Mittag-Leffler et lui écrira, trois ans après la création des *Acta* : *J'ai hâte de vous exprimer d'emblée la statisfaction avec laquelle j'accompagne les progrès réjouissants de votre entreprise. En tant que co-éditeur de la plus ancienne des revues mathématiques existant actuellement,, on me pardonnera peut-être une pointe de jalousie de ce que vous ayez réussi dès le début à gagner comme collaborateurs des Acta tant de maîtres confirmés et des jeunes talents naissent, et cela pas uniquement dans les pays scandinaves, mais ausi d'Allemagne, de France, d'Italie. C'est mon voeu et mon espoir, que les Acta puissent continuer à rester, avec le même succès brillant, un organe international pour le développement de notre science, la plus cosmopolite de toutes.* [Nörlund, G. Mittag-Leffler, *Acta Mathematica* 50 (1927), I-XXIII.] (traduction de la rédaction)

[19] En avril 1882, Mittag-Leffler et Malmsten rédigeront une annonce pour collecter des fonds auprès d'éventuels mécènes scandinaves. Le roi Oscar affirmera publiquement son soutien à l'entreprise en souscrivant personnellement 1500 couronnes. La souscription réunira 26 000 couronnes ce qui, avec la subvention annuelle des gouvernements du Danemark, de Norvège et de Suède, permettait de financer au moins cinq volumes. Hermite participera à la souscription en donnant 1000 francs, c'est à dire 720 couronnes [Domar 1982, p. 6].

[20] En mai 1882, Mittag-Leffler épouse Signe Lindfors (1861-1921) qu'il avait rencontrée lorsqu'il était en poste à Helsingfors (Helsinki). Une grande partie de la fortune de Mittag-Leffler provient de son mariage : *Mittag-Leffler's wealth was based on the fortune of Signe's grandfather, Henrik Borgström, a Helsingfors tobacco businessman whose only child, Emilia, married the Finnish general Julius av Lindfors. Signe, being the only child of this marriage, received the whole of the fortune founded on Borgström's commercial success. Mittag-Leffler used this money at once*

Après nous irons directement à Paris où j'espère d'avoir le bonheur de faire votre connaissance personnelle [21] Si le projet du journal se réalisera nous ferons un peu la tournée de l'Europe pour que je puisse m'entendre avec les géomètres étrangers [22]

J'ai été et je suis encore très occupé par mon cours à l'université et c'est l'explication pourquoi j'ai répondu si tard à votre appel de communiquer le principal de mes recherches dans ce genre. J'ai deux cours à faire un sur la théorie des fonctions - deux leçons par semaine - et un autre sur la théorie des fonctions elliptiques, aussi deux heures par semaine. Mais je travaille outre ça beaucoup avec mes élèves. Ne me regardez pas comme trop insolent et exaucez si possible ma prière [je] vous prie avec la plus grande admiration de votre génie votre très dévoué.

Gösta Mittag-Leffler

---

to found Acta Mathematica in 1882, and from then until the end of his life he remained its editor and lived in Stockholm. [Grattan-Guinness Materials for the History of Mathematics in the Institut Mittag-Leffler, Isis, 62 (1971) 1636-374.]

[21] Mittag-Leffler avait annoncé, l'été précédent, son mariage avec Mlle Lindfors à Hermite et prévu sa visite en France. Dans sa lettre du 27 septembre 1881, Hermite se réjouit de la prochaine visite de Mittag-Leffler et de sa future épouse : *Veuillez faire savoir à votre chère fiancée que nous serons on ne peut plus heureux de vous voir après votre mariage, nous accueillons avec joie l'espérance de votre voyage en France, [...].* Mittag-Leffler évoque rapidement sa présence en France au printemps 1882 dans son article biographique sur Kowalewskaja et Weierstrass : *J'avais visité Paris au printemps 1882* [...].

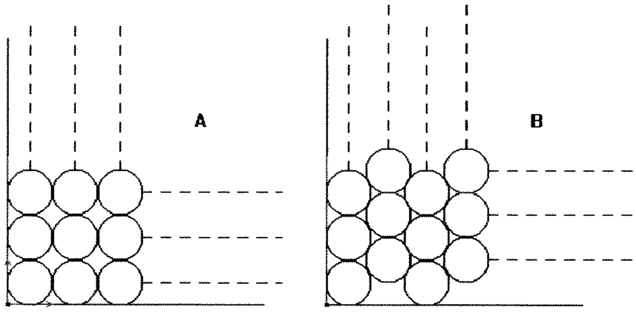
[22] Mittag-Leffler et son épouse feront le tour de l'Europe mathématique à l'occasion de leur voyage de noces. Dans sa lettre adressée à Kowalewskaja le 8 août 1882, Weierstrass émet quelques doutes sur l'intérêt pour Mme Mittag-Leffler de visiter les meilleurs mathématiciens européens à l'occasion de son voyage de noces : *Mittag-Leffler et Madame étaient ici la semaine précédente, du mercredi jusqu'au dimanche soir; nous étions souvent ensemble. La jeune femme a beaucoup plu; on admirait aussi beaucoup sa toilette très élégante et pourtant très simple. Vu de Paris, Mittag-Leffler a fait un voyage, à proprement parler, mathématique : Strasbourg, Heidelberg, Göttingen, Leipzig, Halle, Berlin. Certainement très intéressant pour lui; mais je n'affirmerais pas qu'il en fut de même pour la jeune femme* (traduction de la rédaction).

RALLYE MATHÉMATIQUE DE PREMIÈRE 2000

SUJET 1

Émile, le pâtissier, possède des plaques de cuisson carrées de côté un multiple de 10 centimètres. Il peut disposer les gâteaux ronds de 10 centimètres de diamètre qu'il doit faire cuire de deux manières A ou B comme indiqué sur la figure.

Déterminer pour chaque taille de plaque la disposition qui permet de cuire le plus grand nombre de gâteaux en une fournée.



SUJET 2

On dispose d'un tableau ayant 4 lignes et 1998 colonnes. À l'intersection de la ligne m et de la colonne n se trouve l'élément noté $f(m,n)$. On donne pour tout entier n compris entre 0 et 1997 la valeur $f(0,n) = n + 1$, ce qui permet donc de remplir la première ligne du tableau comme indiqué sur la figure.

Par ailleurs, on sait que pour tout entier m compris entre 1 et 3 et pour tout entier n compris entre 1 et 1997, on a les égalités suivantes :

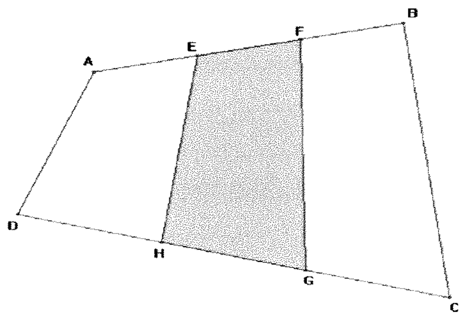
$$f(m, 0) = f(m-1, 1) \qquad \text{et} \qquad f(m, n) = f(m-1, f(m, n-1))\,.$$

Quel nombre de trouve à l'intersection de la dernière ligne et de la dernière colonne ?

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*		*1997*
0	1	2	3	4	5	6		1998
1								
2								
3								$f(3, 1997)$

SUJET 3

On considère un quadrilatère convexe quelconque ABCD dans le plan (voir figure). On découpe les segments [AB] et [CD] en trois parties égales, définissant les points E, F, G, H comme indiqué sur la figure. Montrer que l'aire du quadrilatère central EFGH est le **tiers** de celle du quadrilatère total ABCD.



RALLYE MATHÉMATIQUE DE TERMINALE 2000

SUJET 1

Grand organisateur à Lembach des festivités liées à l'Année Mondiale des Mathématiques, Émile le Bon est chargé de placer le mât du drapeau du Rallye Mathématique d'Alsace au centre de la place circulaire de son village.
Il ne dispose pour cela que d'une règle de longueur infinie non graduée à deux côtés parallèles et d'un crayon. Comment doit-il procéder ?

SUJET 2

Montrer que l'on peut trouver un entier de 2000 chiffres divisible par 2^{2000} qui s'écrive seulement avec les chiffres 1 et 2.

SUJET 3

On se donne un entier naturel non nul n. On choisit $n + 1$ nombres entiers tous distincts entre 1 et $2n$. Montrer que parmi eux, il en existe toujours deux dont le quotient est une puissance de 2.

INAUGURATION DE L'EXPOSITION

Math.u-vu

Strasbourg, jeudi 15 juin 2000
Hôtel du Département — Hall

Discours de Norbert Schappacher
Directeur de l'U.F.R. de mathématiques et d'informatique, ULP

Monsieur le Recteur !
Monsieur le Conseiller Général !
Monsieur le Consul !
Madame, Monsieur les Présidents !
Mesdames Messieurs !
Cher jeunes !

Le prestige, l'image des mathématiques dans notre société est catastrophique. Il est socialement acceptable, même pour des concitoyens par ailleurs intellectuels, d'avouer qu'ils trouvent les maths insupportables. La réponse la plus fréquente que je reçois quand j'ose dévoiler à une connaissance fortuite le fait que je suis mathématicien est : "Un matheux ; ah quel horreur ; c'est la seule chose que je n'ai jamais comprise à l'école." Je ne m'empresse donc plus d'avouer ma profession.
Un jour en Angleterre, à Cambridge, j'étais invité à déjeuner dans un College et me trouvais assis entre une jeune américaine ravissante, experte en histoire du bouddhisme chinois, et un homme avec une mèche blonde remarquable qui se présentait (parlant suffisament fort pour que l'américaine à ma gauche puisse aussi l'entendre) : "Hi, I'm Jack, I am a philosopher, I am writing a book on erotic love."
Je me suis alors bien gardé de confier à mes voisins que j'étais en train d'écrire un livre sur les Variétés abéliennes à multiplication complexe, et nous avons plutôt parlé, avec l'américaine des poêmes chinois de Bertolt Brecht — et de Lawrence Durrel avec ce m'as-tu vu érotique.
Les gens ne trouvent pas les mathématiques sexy. Se plaindre de l'ennui ou de la difficulté des mathématiques est de bon ton ; "durchaus intelligente, gebildete Leute bringen" Beteuerungen Ihrer Abscheu vor der Mathematik

"routiniert vor, mit einer sonderbaren Mischung aus Trotz und Stolz", hat Hans Magnus Enzensberger einmal treffend formuliert.

L'exposition que nous inaugurons aujourd'hui a pour but d'apporter une petite contribution pour éviter que la jeune génération ne tombe dans ce mépris insensé des mathématiques.

Je dis : *mépris insensé* pour plusieurs raisons :

Tout d'abord parceque il n'y a jamais eu de société où les mathématiques étaient aussi omniprésentes que dans notre société actuelle.

* Si vous utilisez un téléphone portable — ce qu'on appelle en allemand "ein Handy" — alors l'appareil cherche le canal de communication avec son central par un algorithme d'optimisation qui utilise des résultats non triviaux et récents d'une branche des mathématiques, à savoir des mathématiques discrètes. Ces résultats ne relèvent donc pas du domaine de l'informatique ou de l'ingénierie. — Im deutschen D2 Netz wird der bertragungskanal des Telefonats durch einen Optimisierungsalgorithmus ermittelt, der von Mathematiker-Kollegen an der TU Berlin entwickelt wurde.

* Si vous payez votre facture avec une carte bleue à puce, la machine vérifie votre signature électronique par une procédure dont la sécurité dépend de la complexité de la tâche consistant à factoriser un grand nombre entier donné en produit de nombres premiers.

* Les nombreux robots qui interviennent dans le montage des voitures de grandes marques telles Mercedes sont programmés (afin de minimiser leur dépense d'énergie, les chemins parcourus par les bras, et l'usure des articulations) en suivant des solutions d'équations différentielles qu'on n'aurait pas pu obtenir sans les recherches mathématiques des quinze dernières années.

* Les seconds marchés de produits dérivés, les options d'achat, n'existeraient pas sans les théories des probabilités autour du calcul intégral inventé par le mathématicien japonais Itô, qui nous a appris à prévoir le comportement à moyen terme d'une action indépendamment de paramètres soum is aux fluctuations quotidiennes du marché.

Voilà quatre exemples de trouvailles proprement mathématiques qui sont devenues immédiatement utiles dans notre vie moderne.

Mais vous trouvez peut-être les téléphones portables énervants, les codes des

cartes bleues trop difficiles à retenir, les voitures trop chères, et les seconds marchés sauvagement capitalistes.
Peut-être êtes vous attirés davantage par un aspect tout à fait différent, plus sélect, des mathématiques de notre ère :

* Les mathématiques pures (et dures) sont parmi les disciplines scientifiques qui connaissent un développement des plus rapides et couronné de nombreux succès. Cela vous étonne ? — Je sais bien que nous lisons très souvent dans les quotidiens des informations sur les progrès du déchiffrage du génôme humain, et fort peu sur les derniers théorèmes mathématiques nouvellement démontrés. Mais les résultats sur le génôme sont actuellement obtenus par des méthodes de séquentiation répétitives, ni créatives ni originales, tandis que chaque nouveau grand théorème est dû à une nouvelle argumentation ingénieuse, une méthode innovatrice, la simple répétition de procédés établis étant considérée comme ne faisant pas partie de la recherche mathématique de haut niveau. — C'est un peu la différence entre Proust et un polard de la série noire.
Mais vous avez peut-être entendu parler de la démonstration du célèbre Dernier Théorème de Fermat il y a bientôt 5 ans, par Andrew Wiles — démonstration qui résolvait définitivement un problème resté intraitable pendant plus de 350 ans. N'est-ce pas là une réussite comparable au déchiffrage du génôme humain ? — Eh bien : oui et non ; car ce Dernier Théorème de Fermat n'intéresse personne, surtout pas les mathématiciens. Ce qui est effectivement passionant dans les travaux de Wiles ce sont les méthodes révolutionnaires qu'il a inventées pour construire sa démonstration. Elles donnent d'autres théorèmes extrêmement puissants. Mais pour comprendre ne serait-ce que l'énoncé de ces résultats qui passionnent — et pour cause — les experts, il faut rester de **longues** heures devant un seul programme sans zapper.
Vous voyez donc : le charme des mathématiques pures de pointe est plutôt discret, réservé en grande partie aux initiés. Wiles nous amène des Variétés abéliennes à multiplication complexe aux courbes et variétés modulaires ! C'est épatant, mais ne vaut ni Brecht, ni Durrell, ni le génôme comme sujet de conversation à table.

Or : si ni l'aspect des applications, ni celui du progrès fulgurant de la science ne vous pousse à jeter un coup d'oeil sur les mathématiques, je vous engage tout de même à visiter cette exposition que nous sommes en train d'inaugurer.

Vous y découvrirez au moins deux dimensions des mathématiques dont je n'ai pas encore parlé : d'une part la dimension historique et culturelle, d'autre part le côté ludique.

Car les mathématiques ont une histoire. Même une procédure apparemment aussi cristalline et invariable que le calcul numérique effectif a traversé tout un parcours au fil des siècles et des diverses notations en cours dans les civilisations qui se sont succédées.
Cet aspect est particulièrement cher au comité de pilotage Math 2000 Alsace qui a organisé Math.u-vu. Ce comité a été mis en place par l'IREM [l'Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques], une sous-composante de l'UFR des mathématiques et d'informatique qui se distingue précisément par cette disponibilité constante à assurer la liaison entre les mathématiques des universités et le monde extérieur.
Je tiens à remercier très vivement tous ceux et celles qui ont mis leur dynamisme et leur enthousiasme au service de cette exposition !
Ils continueront d'ailleurs à travailler pour monter d'autres grands projets dans le cadre de l'année des Mathématiques 2000 — par exemple en octobre dans le cadre de la semaine de la science, et en javnvier 2001, de nouveau dans ce hall, pour la venue en Alsace de l'exposition MATHS 2000 conçue par la Cité de la Science.
L'expérience de cette année 2000 est inextriquablement liée pour moi à la découverte de toute cette passion mathématique extérieure au circuit universitaire, dans écoles, collèges et lycées, que vous allez tous découvrir avec moi en parcourant cette belle exposition.
De plus, l'exposition (et son inauguration) montre bien que cette passion est naturellement trans-frontaliére, internationale, comme l'activité mathématique elle même.

Je vous souhaite une excellente visite.

A VOS STYLOS

Rappel à propos de cette rubrique de problèmes.— Nous cherchons autant que possible à soumettre à nos lecteurs des problèmes originaux, ou en tout cas méconnus. Comme en général peu de mathématiciens ont réfléchi à ces énoncés, du moins sous la forme où ils sont ici proposés, il est hasardeux de prétendre évaluer leur niveau de difficulté. Certains problèmes peuvent donc s'avérer difficiles. Qu'il soit entendu que ni les auteurs des problèmes, ni l'animateur de la rubrique ne sont tenus d'apporter des solutions complètes. L'objectif n'est pas celui-là, il est bien plutôt de susciter l'intérêt des lecteurs, qui sont par ailleurs invités à soumettre leurs propres énoncés pour cette rubrique.

Dominique Dumont

PROBLÈME 56

Énoncé (proposé par M. Emery) :

1°) Soient a, b, r des réels tels que $a < b$ et $0 < b-a < 2r$. Soit u une fonction réelle continue sur $[a, b]$, telle que $u(a) = u(b)$, et satisfaisant la propriété suivante :
pour tout z intérieur à $[a, b]$, il existe c et d tels que $a < c < z < d < b$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r, c'est-à-dire donné par une équation de type $y = p + \sqrt{r^2 - (x-q)^2}$.
Montrer que le graphe de u est lui-même un arc de cercle de rayon r.
Remarque.— On peut, dans un premier temps, chercher une démonstration en imposant des hypothèses plus fortes à la fonction u (par exemple des conditions de différentiabilité).
2°) Soient J un intervalle ouvert, r un réel > 0 et u une fonction continue sur l'adhérence de J. On suppose que pour tout z de J il existe c et d dans J tels que $c < z < d$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r.
Montrer que J est borné, de longueur au plus $2r$, et que le graphe de u est un arc de cercle de rayon r.

PROBLÈME 57

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante entre séries formelles (ou entre séries entières dont on aura calculé le rayon de convergence) :

$$\left(1+x+2^2\frac{x^2}{2!}+3^3\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3 = \left(1+2^2x+3^3\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(1-x-\frac{x^2}{2!}-2^2\frac{x^3}{3!}-3^3\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)$$

Indication (par D. Dumont et P. Renfer) : Les séries intervenant dans l'identité à démontrer sont liées à celle-ci :

$$R(x) = x + 2\frac{x^2}{2!} + 3^2\frac{x^3}{3!} + \cdots + n^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

dont on sait classiquement qu'elle est solution de l'équation fonctionnelle

$$R(x) = x.exp(R(x)).$$

Ce résultat peut se démontrer par des méthodes d'Analyse classique (théorème de Rouché, ou formule d'inversion de Lagrange), ou par des méthodes combinatoires plus modernes sur les structures arborescentes (composé partitionnel, vertébrés, etc.).
A partir de cette équation fonctionnelle, on peut déduire d'autres identités et parvenir ainsi à l'identité proposée au départ. Un problème qui reste à examiner est de donner une preuve combinatoire directe du résultat.

PROBLÈME 58

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante (on peut, soit lui donner un sens formel en développant chaque fraction rationnelle selon les puissances croissantes de x, soit supposer que $|x| < 1$) :

$$\left(\frac{x}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^6} + \frac{5x^5}{1-x^{10}} + \cdots\right)^2 = \frac{1^3x^2}{1-x^4} + \frac{2^3x^4}{1-x^8} + \frac{3^3x^6}{1-x^{12}} + \frac{4^3x^8}{1-x^{16}} + \cdots$$

PROBLÈME 60

Énoncé (proposé par P. Borel) :

Résoudre l'équation

$$x^{x^8} = 2$$

a) pour x réel > 0;
b) pour x complexe.

PROBLÈME 61

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Soit $P(N)$ le produit des chiffres de l'entier naturel N écrit dans le système décimal.
Exemples.— $P(5) = 5$, $P(12) = 2$, $P(275) = 70$, $P(306) = 0$.
On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par la récurrence

$$u_{n+1} = u_n + P(u_n),$$

où u_0 est un entier naturel choisi arbitrairement.
1°) Montrer que, quel que soit le choix de u_0, la suite (u_n) est stationnaire à partir d'un certain rang r.
2°) Que peut-on dire sur l'estimation de ce rang r ?

PROBLÈME 62

Énoncé (proposé par J. Borowczyk) :

Etant donné un triangle (ABC), on désigne par (C) le cercle qui lui est circonscrit et par O son centre. Le cercle inscrit a pour centre I et pour rayon r. Les bissectrices intérieures (AI), (BI), (CI) recoupent (C) respectivement en A', B',C'.
On désigne par F_A, F_B, F_C les symétriques des points A', B',C' par rapport respectivement aux droites (BC), (CA), (AB).
On suppose que le triangle (ABC) n'est pas équilatéral. Montrez que :
a) les points F_A, F_B, F_C sont distincts; on désigne par (Γ) le cercle circonscrit au triangle $(F_AF_BF_C)$.
b) le cercle (Γ) a pour rayon OI.
c) le cercle (Γ) passe par l'orthocentre H du triangle (ABC) et recoupe ses hauteurs en des points situés à distance $2r$ des sommets.
d) la droite (OH) passe par le centre de (Γ). Caractériser le point diamétralement opposé à H.