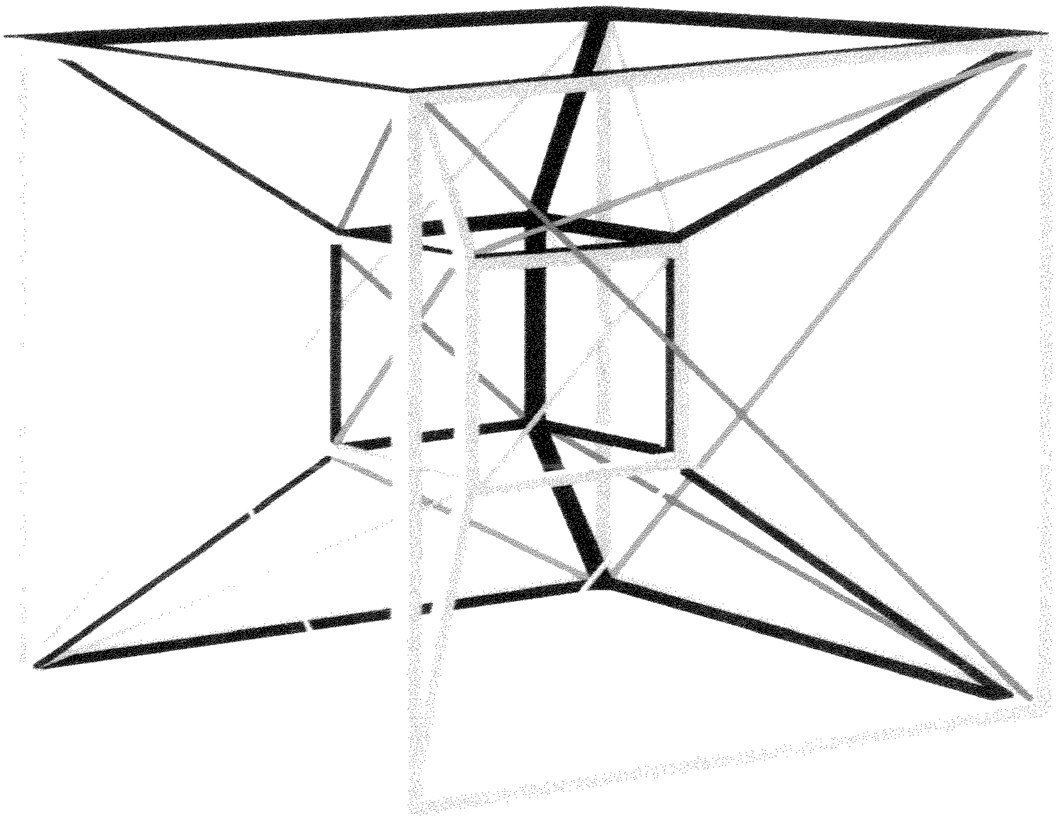
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

n° 102 DÉCEMBRE 2000 I.S.S.N. 0290 - 0068



	Sommets	Arêtes	Faces	Espaces	Schläfli
Hypercube C8	16	32	24	8-Cell	{4,3,3}

Projection centrale d'un Hypercube quadridimentionnel
dans l'espace à trois dimensions

Avec en couleurs les fibres de Hopf

2000

Renouvellement

La démographie des professeurs de mathématiques promet des renouvellements importants dans les prochaines années. L'équipe de L'OUVERT n'échappe pas à cette règle avec le départ de deux importants collaborateurs.

Odile SCHLADENHAUFEN assurait depuis 1993 la fonction de responsable de la publication et de membre de comité de rédaction. Elle a souhaité préparer en douceur sa retraite future, en se dégageant du temps pour les tâches très prenantes de grand-mère. Sa très grande rigueur, son souci de la clarté, sa volonté de tirer parti des richesses locales, son souhait de conserver une présentation de qualité, ont marqué tout au long des année cette belle collection de numéros.

Jean-Pierre FRIEDELMEYER, rédacteur en chef et membre du comité de rédaction depuis1993, est parti en retraite, quittant Strasbourg pour son Haut-Rhin natal. Nous avons rendu hommage au mois de juin dernier à sa très grande culture, en particulier au lien fort avec l'Histoire des Mathématiques, qu'il a su faire vivre à l'IREM de Strasbourg, et notamment dans L'OUVERT, et qui a largement débordé les frontières de l'Alsace. L'article de Klaus VOLKERT sur la quatrième dimension est extrait de cet hommage à Jean-Pierre.

Les liens tissés au cours de ces huit ans de compagnonnage intellectuel et humain demeurent. Et s'il est difficile de remplacer les partants, on peut leur succéder. Ainsi Alain KUZNIAK, maître de conférences à l'IUFM, chargé de cours à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg renforce le lien avec le Département de Mathématiques, nous assure une ouverture sur le pôle didactique. Quant à Jean PERRIN, professeur de mathématiques en lycée, riche de son expérience dans le secteur des entreprises et dans le monde de l'informatique, par ses contacts avec le Haut-Rhin, il nous ouvrira d'autres horizons.

Ils viennent se joindre à Bruno BERNARDOFF, Dominique DUMONT et à moi-même pour assurer la poursuite de la longue et riche vie de notre revue.

L'équipe de L'OUVERT accueille volontiers d'autres collaborateurs, occasionnels ou réguliers, pour mieux accompagner ce mouvement de renouvellement continuel.

Richard CABASSUT

SOMMAIRE

N° 102 – DÉCEMBRE 2000

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Richard CABASSUT
◇ *Rédacteur en chef* : Alain KUZNIAK
◇ *Correspondance à adresser à :*
◇ Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
7, rue René Descartes
F - 67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
http://irem.u-strasbg.fr
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M.E.P. d'Alsace (*).
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.
Indiquer votre e-mail éventuel.
◇ (*) Comme la Régionale d'Alsace subventionne l'impression de '*L'Ouvert*', les adhérents A.P.M.E.P. du Bas-Rhin et du Haut-Rhin ont droit à une réduction.
◇ *Prix du numéro* : 35.– F.

Y A-T-IL UN NATUREL APRÈS 3 ?

Introduction

Le propre des mathématiques, c'est l'abstraction. Abstraire c'est permettre de simplifier puisqu'une même théorie s'appliquera alors à diverses situations. Mais la démarche de l'abstraction est difficile car elle nous oblige à nous débarrasser d'un symbolisme culturel ou non pour en adopter un autre, le symbolisme mathématique, soi-disant plus universel. Impossible d'enseigner les mathématiques sans connaître la culture des enseignés. Ce fait était particulièrement patent à l'époque des mathématiques dites modernes où les enseignants passaient beaucoup de temps à expliquer la différence entre, par exemple, le **et** du français courant et le **et** ($\wedge$) mathématique. La notion de fonction est toujours l'occasion d'un tel aller-retour entre la pratique quotidienne du mot et son sens mathématique. Mais on oublie trop souvent que sur des notions très simples comme le dénombrement, ou même le simple comptage, ces questions sont tout aussi pertinentes. Il y a sans doute un biais culturel, le numérique ayant envahi notre civilisation, mais pas seulement. Certes, tous les professeurs sont sensibilisés aux difficultés qui surgissent à propos de 0 ; mais est-ce le seul nombre à propos duquel surgissent ces difficultés ?

Les réflexions personnelles qui suivent invitent à montrer que les entiers ***1***, ***2*** et ***3*** ont un statut très particulier dans la pensée humaine. Ces réflexions devraient permettre un retour sur l'enseignement du calcul littéral en collège en faisant mieux comprendre les raisons des erreurs des élèves face, par exemple, à l'utilisation du 1.

1. Aspects linguistiques des petits nombres

Si les mathématiques peuvent être considérées comme un des fondements de la pensée humaine et le nombre le fondement des mathématiques, c'est à travers la linguistique que l'on peut remonter aux aspects primordiaux et à la structure de ladite pensée humaine, en particulier aux premières notions de nombre.

Nous allons voir que l'utilisation des petits nombres (***1***, ***2***, ***3***, rarement ***4*** ou plus) est systématiquement incluse dans la grammaire de toutes les langues humaines. Ceci tendrait à prouver que ces nombres jouent un rôle particulier dans la structuration de la pensée. Sans prétendre à une étude exhaustive, les quelques pistes de recherches citées permettent de montrer que ces petits nombres n'ont pas le même statut que les suivants.

1. Les conjugaisons

Il est quand même curieux que (toutes ?) les langues humaines n'envisagent que trois personnes (pour le singulier au moins) dans la conjugaison des verbes ou l'usage des pronoms puisque dans certaines langues les verbes ont une forme invariable. Les trois pronoms du singulier sont, en français, *je*, *tu*, *il* [1]. Remarquons que le *il* est bien plus ambigu que le *je* ou le *tu* En effet le *il* renvoie à une personne ou un objet sur lequel les deux interlocuteurs ont du se mettre d'accord, ce qui n'est pas toujours évident comme le montre la phrase suivante :

[1] Je n'oublie pas le féminin, mais il est, dans le cadre qui nous intéresse ici, très secondaire d'avoir ou non un verbe qui s'accorde en genre avec son sujet. L'étude du genre fait l'objet d'un autre paragraphe.

L'expérimentateur introduit le carbonate de calcium dans ce milieu ; il subsiste après filtration[2]

Par contre *je* et *tu* ne présentent aucune ambiguïté. *Je* c'est moi, l'unité. *Tu* c'est toi, la deuxième personne, l'autre moi-même avec qui je converse. *Il* renvoie à un tout indistinct, une pluralité singulière.

Disons un mot de la conjugaison au pluriel. *Nous, vous, ils* sont beaucoup plus ambigus. À tel point que plusieurs langues distinguent deux formes du *nous*. C'est le cas de certaines langues amérindiennes. Le guarani admet les formes *ñande* et *ore,* la première forme incluant la ou les personnes avec lesquelles parle le locuteur, la deuxième les excluant. Ces formes plurielles, *nous, vous* (je ne parle pas ici de la forme de politesse utilisée en français standard) et *ils,* impliquent une certaine généralisation sur laquelle il n'est pas toujours possible de se mettre entièrement d'accord. Nous retrouvons ici la difficulté vue à propos du *il.* Nous nous heurtons alors à des généralisations abusives source d'incompréhensions et de conflits.

2. Singulier, duel, pluriel

Dans l'ancien indo-européen (langue reconstituée dont sont issues la plupart des langues européennes mais aussi le sanskrit) existait un nombre spécial intermédiaire entre le singulier (réservé à l'unité) et le pluriel, le duel qui servait à dénombrer les couples et d'une façon générale était utilisé dès qu'il s'agissait de deux éléments. On peut noter que nombreux sont les éléments qui vont par couple, des différents organes du corps (mains, yeux, oreilles,...) à la sexualité. Le grec ancien a gardé le duel mais d'autres langues non apparentées comme l'arabe classique, le huron (langue amérindienne d'Amérique du nord), ... ont également une forme de duel. Il en reste quelques traces dans les langues européennes modernes par des formes spéciales pour un et deux alors que la régularité commence à partir de trois (et parfois à quatre mais il faudrait faire une étude poussée sur la reconstruction des formes après usure linguistique à partir de forme régulière) :

En anglais : *once, twice, three times...* avec deux niveaux irréguliers, mais *first, second, third, fourth...* où il y a trois niveaux irréguliers avant de rencontrer la régularité.

En français : *premier, second (deuxième ?), troisième...* mais *demi, tiers, quart, cinquième...*

3. Masculin, féminin, neutre.

La distinction masculin-féminin semble résulter d'une distinction assez naturelle des sexes où l'on retrouve la notion de couples, de *2.* Le problème c'est que cette distinction n'est pas aussi nette dans toutes les langues. Et cela se comprend. En effet le sexe de certains êtres vivants n'est pas facile à déterminer (pour certains végétaux, insectes, oiseaux, ...). Il est alors naturel d'envisager trois genres : masculin, féminin et neutre. Mais ce n'est qu'un choix possible ce qui traduit une influence culturelle dans cette distinction des genres. L'ancien indo-européen distinguait le genre « animé » du genre « inanimé » et il en reste des traces dans les langues slaves. Nous pouvons observer que dans la plupart des langues il y a un partage en deux ou trois classes. Il existe cependant des langues où le partage se fait en un bien plus grand nombre de catégories comme par exemple dans les langues sino-tibétaines avec l'usage des classificateurs. Les classificateurs jouent effectivement un rôle voisin de celui du genre en français mais il arrive qu'un même mot puisse recevoir différents classificateurs[3]. Dans ce cas, il est cependant

---

[2] D'après *Les langues du monde* ouvrage collectif, Éditions Pour la Science.

[3] C'est ainsi que l'on peut distinguer *yF lún yùe* (« la lune » avec le classificateur *lún*) et *yF gè yùe* (« le mois lunaire » avec le classificateur *gè*), le premier mot *yF* correspondant à l'unité.

dant possible de se demander s'il n'y a pas eu nécessité de distinguer un grand nombre d'homonymes. C'est en tout cas une possibilité pour le mandarin (chinois officiel), langue pour laquelle le nombre de classificateur est le plus grand. Comme le nombre de classificateurs a beaucoup changé au cours de l'histoire du chinois (une dizaine en chinois ancien puis plus de 300 aujourd'hui avec toutefois une tendance à la diminution dans certains dialectes) il est difficile de lier cette notion à celle de genre et surtout de penser que cette notion soit primitive.

4. Les positions spatio-temporelles

La plus part des systèmes verbaux reposent soit sur une distinction de temps, soit sur une distinction d'aspect. Les temps distinguent trois niveaux : passé, présent, futur. Les aspects sont en général deux : perfectif et imperfectif (comme dans les langues slaves) ou accompli et inaccompli (comme dans les langues sémitiques). Il n'est pas question de faire une étude comparée et détaillée des divers systèmes verbaux mais d'attirer l'attention sur cette décomposition en deux ou trois catégories. Toutefois d'autres notions interviennent comme l'hypothétique, le souhaitable,… Temps et aspects se recoupent largement. On sait que passé et futur s'opposent au présent puisque les deux premiers ont une durée et que le dernier n'est qu'un point sur l'échelle temporelle. Si nous nous contentons de regarder le système français de l'indicatif nous remarquons que les temps simples correspondent à l'aspect inaccompli (ou imperfectif) et les temps composés à l'aspect accompli (ou perfectif) :

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{je chante}\\ \textit{je chantais}\\ \textit{je chanterai}\end{array}\right. \quad \text{action en cours (inachevée)} \quad \left\{\begin{array}{l}\textit{j'ai chanté}\\ \textit{j'avais chanté}\\ \textit{j'aurai chanté}\end{array}\right. \quad \text{action achevée}$$

D'un point de vue spatial la distinction entre quelques positions est tout aussi patente dans les différentes langues. Il y a toujours deux ou trois catégories correspondant à chacune des extrémités et parfois au milieu, quelques fois quatre par dédoublement de deux catégories initiales. Chacune des trois (!) directions de l'espace donne naissance à au moins un couple de mots : droite et gauche, devant et derrière, dessus et dessous, et, éventuellement, le milieu. Le français distingue *ici* et *là, en deçà* et *au delà.* L'espagnol utilisera jusqu'à trois niveaux *aquí, ahí,* et *allí.* En fait la recombinaison des différentes directions conduit souvent à multiplier le nombre de positions spatiales. Notons, par exemple, les quatre directions de la rose des vents (nord, est, sud, ouest) qui combinent ainsi la droite et la gauche avec l'avant et l'arrière, mais certaines cultures comptent six directions, ajoutant le zénith et le nadir, c'est-à-dire le dessus et le dessous.

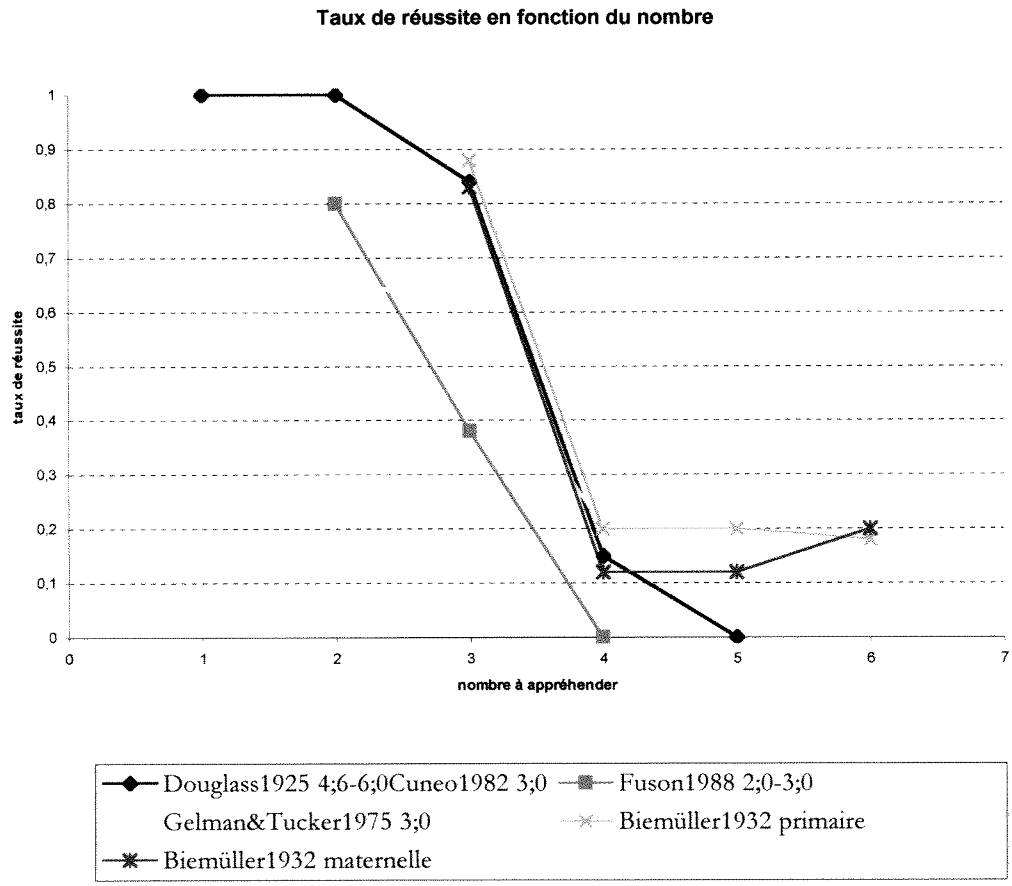
5. Conclusion linguistique

Cette très rapide étude montre bien que les nombres ***1*** et ***2*** ont un statut fondamental, apparaissant systématiquement en opposition. Le ***3*** a un rôle légèrement « second » mais aussi très fort dans les différentes grammaires. Sauf cas de recombinaison, les autres nombres n'ont pas un rôle aussi important ce qui laisse penser que les nombres ***1*** et ***2*** sont imprimés dans nos gènes ou dans la structure de notre cerveau et que le nombre ***3*** n'y est peut-être que l'initial de tous les autres. Bien sûr tous les autres nombres sont en germe sinon il n'y aurait pas de mathématiques telles que nous les connaissons, mais il faut envisager que, contrairement aux axiomes de PEANO (première version[4]) ce n'est pas *1* qui engendre tous les naturels, du moins pas au niveau du fonctionnement de notre cerveau.

2. Historique de la construction des petits nombres

1. La construction du nombre chez l'enfant

De très nombreuses études de didactiques ont été consacrées à la genèse de la notion de nombre chez l'enfant. Les résultats qui suivent sont extraits essentiellement de l'ouvrage *Apprentissages numériques* de Jean-Paul FISCHER[5]. L'auteur y présente les résultats d'expériences passées qui sont résumés dans le tableau ci-après. Ces expériences ont en commun d'avoir présenté des collections linéaires de points ou de boules régulièrement espacés et d'avoir empêché le comptage un par un par une limitation du temps d'exposition ou par des consignes données aux enfants. (les âges du type 3;6 signifient 3 ans et 6 mois).



Ces différentes expériences passées montrent parfaitement que les nombres *1* et *2* sont très rapidement assimilés, que *3* l'est assez vite mais qu'au-delà il y a une chute spectaculaire de l'appréhension du nombre. Le nombre *3* apparaît comme le terme ultime de la numération immédiate, c'est-à-dire des nombres que l'on peut évaluer sans compter.

[4] Dans une première version PEANO construisit les entiers en partant de 1. Toutes les versions ultérieures commencent en 0.

[5] Apprentissages numériques par Jean-Paul FISCHER, Presses Universitaires de Nancy, 1992.

En fait Fischer montre dans son ouvrage que les choses sont un petit peu plus compliquées. Il fait en effet une distinction selon la représentation figurée des nombres soit en ligne, soit en constellation.

	1	2	3	4	5	6
Représentation en ligne	•	• •	• • •	• • • •	• • • • •	• • • • • •
Représentation en constellation	•	• •	• • •	• • • •	• • • • •	• • • • • •

La reconnaissance de la forme géométrique facilite l'appréhension du nombre. Une étude systématique n'a pas été faite pour ***6***, mais il apparaît que si ***3*** reste le nombre ultime pour bien des enfants, surtout des plus jeunes, la disposition symétrique des points facilite la dénomination des nombres ***4*** et ***5*** sauf justement pour les plus jeunes. Le tableau suivant donne le nombre d'enfants ayant réussi la dénomination du nombre présenté en fonction du groupe d'âge. Chaque groupe d'âge de 4;3 ans à 5;9 ans comporte 36 individus.

	1L	*1C*	*2L*	*2C*	*3L*	*3C*	*4L*	*4C*	*5L*	*5C*
4;3ans	35	34	32	30	14	16	5	3	2	0
4;9ans	36	36	32	30	21	23	3	10	5	8
5;3ans	36	36	34	34	28	29	10	19	6	19
5;9ans	36	36	36	36	35	34	12	27	9	26
Total	**143**	**142**	**134**	**130**	**98**	**102**	**30**	**59**	**22**	**53**

La différence entre ***3*** en ligne (3 L) et ***3*** en constellation (3 C) n'est pas significative. De nombreuses expériences tendent à prouver que les bons résultats relatifs à ***4*** et ***5*** en constellation résultent d'un comptage qu'il est beaucoup plus facile et rapide de faire dans ce type de présentation plutôt que dans la présentation en ligne. Il y a ensuite mémorisation de la forme de la constellation. Ceci prouve que ***3*** reste bien une borne supérieure dans l'appréhension des nombres.

En fait une analyse plus fine des diverses expériences faites auprès des enfants tend à montrer que la reconnaissance de ***3*** résulte également d'un comptage qui a lieu beaucoup plus tôt dans le développement. Il faut également noter que pour bien des plus jeunes, tout ce qui n'est pas ***1*** ou ***2*** est nécessairement ***3***.

2. Les grecs et le nombre *3*

On sait que PYTHAGORE avait créé une sorte de secte mathématico-religieuse. Le nombre y était la base de la théologie et plus particulièrement les nombres ***1***, ***2***, ***3*** et ***4***. C'est la fameuse *tétraktys* célébrée dans cet hymne :

*Bénis-nous, nombre divin, toi qui a engendré les dieux et les hommes, Ô Sainte, Sainte Tétraktys, toi qui contient la racine et la source du flux éternel de la création car le nombre divin débute par l'unité pure et profonde et atteint ensuite le **4** sacré puis il engendre la mère de tout, qui relie tout, le premier né, celui qui ne dévie jamais, qui ne se lasse jamais, le **10** sacré qui détient la clé de toute chose*[6]

Pour PYTHAGORE, le ***1***, la monade est la source de tous les nombres. Le ***2***, premier nombre pair est le symbole du féminin et ***3*** premier nombre impair (ce qui prouve que

[6] D'après *Les mathématiques ? Quelle Histoire !* Cassette vidéo d'André STOLL, IREM de Strasbourg.

1 n'est pas un nombre) est le symbole du masculin. Le rôle de la Tétraktys ne peut se comprendre si on ne se réfère pas aux nombres triangles dont l'importance dans la pensée pythagoricienne est indéniable. Le ***1***, le ***2*** et le ***3*** appartiennent aux hommes car ils correspondent aux trois directions de l'espace sensible, et $1 + 2 + 3$ donne ***6***, nombre triangulaire, le premier nombre parfait. Et $1 + 2 + 3 + 4 =$ ***10***, la décade, nombre sacré car il correspond à la base de la numération des grecs[7]. En dépassant les nombres des hommes, ne serait-ce que d'une unité on atteint les nombres des dieux, ce qui explique le caractère sacré de ***4*** (et de ***10***).

L'étude des nombres est alors un moyen de comprendre les dieux et par voie de conséquence la nature que les dieux ont créée :

Là où on ne trouve ni le nombre ni sa nature, rien ne peut exister qui soit intelligible à quiconque en soi-même ou en relation avec d'autres choses. Vous pouvez observer le pouvoir du nombre s'exerçant par lui-même dans tous les actes et toutes les pensées des hommes, dans tous les métiers et la musique.

On retrouve cette vision des mathématiques dans la célèbre phrase de GALILÉE sur l'univers, livre ouvert écrit en langage mathématique.

3. Religion et nombres

Nous venons de voir le rôle très particulier que PYTHAGORE attribuait aux nombres et en particulier aux premiers d'entre eux. Les religions monothéistes vont très vite assimiler le nombre ***1*** à Dieu, ce qui implique que ***1*** ne saurait être un nombre avec les propriétés des nombres puisque Dieu transcende tout. Cette vision religieuse du nombre ***1*** va perdurer pendant tout le Moyen-Âge, surtout dans l'empire arabe alors au sommet de sa puissance. Les mathématiciens, tant musulmans que juifs, travaillant à Bagdad expliqueront plus d'une fois que ***1*** n'est pas un nombre puisqu'il représente Dieu qui ne saurait être divisé. En effet ***1*** n'a pas de diviseur autre que lui-même.

Chez les chrétiens, l'invention de la Trinité peut très bien se concevoir comme une concession à la philosophie pythagoricienne qui imprégnait de façon diffuse la pensée grecque au début de notre ère. C'est dans le fond la trace d'un certain syncrétisme. Mais cela prouve la force du nombre ***3*** qui tend à resurgir dans différents domaines.

D'une façon générale, dans toutes les religions, certains nombres vont recevoir une charge symbolique très forte : – il en est ainsi du nombre ***7*** qui, des sumériens aux juifs puis au chrétiens et aux musulmans, finira par rythmer le temps quotidien avec la semaine –. On sait que la Bible fait un grand usage des nombres ***10*** et ***12***, et on sait aussi qu'une multitude de livres ont été écrit à propos du fameux ***666*** de l'Apocalypse (Apoc. XIII 18), nombre auquel il faudrait joindre le ***153*** de l'évangile de Jean (JEAN **XXIII**)[8] est plus que vraisemblable que tous ces nombres se renvoient les uns les autres par l'intermédiaire de sommes et de produits. Il semble donc que l'on retrouve ici une influence pythagoricienne à moins que PYTHAGORE et juifs n'aient emprunté à la même source. Mais tout ceci est hors de notre présent propos.

La notion de couple, couples primitifs engendrant toute l'humanité ou couples divins se partageant le monde soit en opposition soit en parallèle, se retrouve dans la plupart des cultures. Que l'on pense aux religions de l'Inde, à la religion de l'Égypte antique, au manichéisme, ou à bien d'autres.

---

[7] Heureuse coïncidence qui n'aurait pu avoir lieu chez les mayas avec la base 20.

[8] 666 est le nombre triangulaire de $36 = 6^2$ et 6 est lui-même triangulaire, en même temps que nombre parfait, mais il lui manque ***1*** pour atteindre le 7 divin ; 153 est le nombre triangulaire de $17 = 10 + 7$ deux nombres relatifs à la perfection de Dieu. $10 = 5 \times 2$ et $5 + 2 = 7$, de même $12 = 4 \times 3$ et $4 + 3 = 7$, etc.

4. Fermat et le nombre 1[9]

Dans un défi adressé à divers mathématiciens étrangers et en particulier à WALLIS, FERMAT propose, le 3 janvier 1657, de chercher un carré ou un cube qui ajouté à ses parties aliquotes fasse un cube[10], à l'exemple de $7^3=343$ qui est tel que $343+1+7+49=20^3$... WALLIS proposera rapidement la seule solution ***1***. Cette réponse va déclencher une controverse sur la nature du nombre ***1*** dont les extraits suivants montrent la nature et prouvent la difficulté de concevoir le nombre ***1*** comme un nombre ordinaire.

Ainsi on demande un nombre qui ait des parties aliquotes ; mais un nombre est une pluralité d'unités, et l'unité elle-même n'est pas un nombre ; elle ne résout donc pas la question, où l'on demande un nombre, non pas quelconque, mais qui ait des parties aliquotes qui puissent lui être ajoutées et qui soit de même nature que le nombre ***343****, dont les parties sont énumérées. Mais quelles sont les parties de l'unité ? Il est clair que si elle n 'en a pas, ainsi que l'avoue Wallis lui-même, elle n'est aucunement de la même nature que le nombre* ***343****, cube ayant des parties aliquotes, qui, ajoutées à ce nombre, en donnent un autre carré.*

[...]

Mais quand Wallis présente à plusieurs reprises l'unité comme étant le cube cherché et [...], il est inexcusable, puis qu'en donnant l'unité, il ne donne en fait aucun cube.

Lettre de Frenicle à Digby du 3 février 1658

Sa chicane sur votre solution par le nombre ***1*** *est bien mauvaise; car chacun sait que quelques uns sont de l'opinion que* ***1*** *n'est pas un nombre ; mais ceux-là même savent tout aussi bien que, dans l'opinion des autres, il en est un.*

Lettre de Brouncker à Wallis du 28 février 1658
(datée du 18 février 1657 style anglais[11])

En dehors de la controverse, il faut noter le vocabulaire qui trahit bien la difficulté qu'ont les mathématiciens de l'époque à donner au nombre ***1*** le même statut qu'aux autres nombres. Aujourd'hui, on parle du nombre ***1***, pas de l'unité, mot qui a une signification bien précise dans le cadre de la structure d'anneau. L'extrait suivant montre que le nombre ***2*** a aussi un synonyme, binaire, dont le sens, de nos jours, a été considérablement restreint.

Je lui avois écrit qu'il n'y a qu'un seul nombre quarré en entiers qui, joint au binaire, fasse un cube, et que ledit quarré est 25, auquel si vous ajoutez ***2****, il se fait 27 qui est cube.*

Lettre de Fermat à Digby du 15 août 1657

Une autre trace du rôle particulier de deux est la notation xx pour x^2 encore très vivace au XVIII^e^ siècle.

Ces quelques exemples sont des indices forts du rôle très particulier qu'ont encore les petits nombres dans la pensée mathématiques du XVII^e^ siècle.

Conclusion et retour sur l'enseignement des maths

1. Conclusion provisoire

Le développement de la notion de nombre chez l'enfant, la linguistique, la sociologie, les religions, l'histoire, (on pourrait y ajouter la psychanalyse), tous ces aspects de la

---

[9] Tous les exemples de cet alinéa sont extraits de « œuvres de Pierre FERMAT, I- Théorie des nombres » présenté par R. RASHED et Ai. et publié chez Blanchard (1999).

[10] Les parties aliquotes sont les diviseurs stricts. Ainsi les parties aliquotes de 6 sont 1, 2, 3.

[11] Non seulement les anglais utilisaient le calendrier julien en retard de 10 jours sur le calendrier grégorien, mais leur année commençait au 1er avril.

pensée humaine tendent à prouver que notre esprit fonctionne à partir de la notion de *1* et de *2* et que tous les autres nombres sont construits à partir de ces deux là. Si le nombre *3* apparaît très vite il semble, cependant, jouer un rôle un peu différent. Il regroupe la notion de pluriel et il est le début du comptage. Mais nous n'avons ici que des aspects indirects du fonctionnement de notre cerveau. Bien des recherches seront encore nécessaires pour améliorer la compréhension de notre nature et en particulier la compréhension de notre façon de penser les nombres, à commencer par $\mathbb{N}$.

2. Influence sur l'enseignement

Mon professeur de 4^e avait l'habitude de nous répéter : « Le prochain qui me dit que 0 c'est rien aura 0, il verra si c'est rien !» Bien évidemment il n'en faisait jamais rien ! et nous répétait inlassablement le rôle mathématique du 0. Mais le nombre 0 est apparu très tardivement dans l'histoire des mathématiques et tous les pédagogues sont depuis longtemps sensibilisés aux difficultés de son appréhension mathématique.

Il est curieux que le nombre *1* qui joue rigoureusement le même rôle d'élément neutre pour la multiplication que le 0 pour l'addition ne fasse pas l'objet de soins aussi attentifs de la part des pédagogues. De même que le 0 disparaît de l'écriture, de même le *1* disparaît : on écrit x et non $1x$ ou x^1. Il ne faut donc pas s'étonner que les élèves oublient ce facteur 1 dans une factorisation. Il serait intéressant de savoir si la disparition du *1* dans les écritures algébriques n'est pas vécu comme une disparition du moi, à moins qu'il ne s'agisse de la non visibilité de Dieu ? Question qui n'est pas si idiote quand on a vu l'influence de la religion sur la perception de *1* comme nombre.

Deux paraît être ressenti essentiellement comme la valeur du couple (au sens sexuel), de tout ce qui va par deux dans la vie, donc de la paire : bras, jambes, yeux, oreilles, etc. Cette référence quasi obligée de *2* à bien des aspects du corps ne pourrait-elle pas jouer un rôle analogue dans le refus de l'abstraction qu'impose l'aspect mathématique du nombre *2*. Là encore, je soulève plus de questions que je n'apporte de réponses, le seul fait de s'interroger permettant une prise de conscience qui ne peut être que bénéfique du point de vue didactique et pédagogique.

Il serait intéressant de savoir si la construction de la numération au delà de *3* n'est pas vécu comme une approche de l'infini, que l'on pense à cette réflexion classique d'enfants s'adressant à un de leur parent : « Dis, papa (maman), jusqu'à combien tu sais compter ? » Cet aspect peu pris en compte dans la pédagogie actuelles mériterait une réflexion. Le vertige que l'on éprouve face à l'infini pouvant se révéler traumatisant pour certains enfants qui seront peut-être justement ceux qui rejetteront ultérieurement les mathématiques.

Une des difficultés essentielles qu'ont les élèves pour comprendre les maths, c'est d'admettre que l'abstraction n'est pas une perte de sens mais bien plutôt une multiplication des sens. Pour rester au niveau numérique qui est le mien dans cet article, l'abstraction « deux » recouvre non seulement la notion de couple mais aussi toute sorte d'ensembles dont « *2* » sera le cardinal commun. Ce *2* peut être précisé par un mot qui incarnera[12] alors son sens. Cette prise de conscience me paraît nécessaire pour entrer dans les mathématiques et éviter toute sorte de blocages affectifs. Le mieux est de commencer tôt.

[12] J'utilise volontairement le mot « incarner » qui a une forte connotation religieuse.

3. 1, 2, 3 et après ?

Tout le monde connaît la réponse au titre de cet article. Mais si nous dépassons la simple étude des naturels nous arrivons aux nombres *irrationnels,* puis au nombres *négatifs* (qui donnaient de *fausses* solutions), puis au nombres *imaginaires,* aux nombres *transcendants,* aux nombres *idéaux,*...[13] et finalement nous sommes confrontés à la notion même de nombre.

Qu'est-ce qu'un nombre ?

Ici le vocabulaire porte la trace des difficultés qu'ont eues les mathématiciens à dégager les bonnes notions et ce vocabulaire même incite les enseignants mobiliser toute leur capacité pédagogique afin que les élèves, à leur tour, dégagent les bonnes notions mathématiques à partir de leur symbolique, relative à ladite notion.

Mais les mathématiques ne s'arrêtent pas aux nombres quelque soit l'étendue que nous donnons à ce concept. Il faut ensuite parler des structures et des fonctions. Mais ceci est un autre chapitre bien plus long. Gageons qu'il sera d'autant mieux compris par les étudiants que ceux-ci auront été bien démarré sur ***1***, ***2*** et ***3***.

[13] Et ce n'est pas fini (!), voir par exemple « Et pourtant ils ne remplissent pas $\mathbb{N}$ » de Claude LOBRY, Éd. Aléas.

LA MILLIONIÈME DÉCIMALE de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$

Jean LEFORT

C'était il y a quelques années, en 1996, la communauté mathématicienne apprenait avec stupeur la découverte de David H. BAILEY, Peter B. BONWEIN et Simon M. PLOUFFE rendant possible de calculer le milliardième chiffre du développement binaire de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$ sans qu'il soit nécessaire de calculer les 999 999 999 précédents. Bien sûr, plus le rang du chiffre est élevé plus il faut de temps mais alors que le calcul du premier milliard de décimales de π est à la limite des possibilités de calcul des ordinateurs, le calcul du milliardième chiffre en binaire se fait en un temps ridiculement court. La formule et la méthode de calcul utilisées sont élémentaires et auraient pu être découvertes par le grand Euler. La communauté mathématique s'interroge : Existe-t-il une formule analogue permettant de déterminer la milliardième décimale de π ? Car pour le moment seules les bases puissance de 2 (2, 4, 8, 16, …) sont accessibles à la méthode.

Il existe d'autres constantes mathématiques pour lesquels le travail en base dix est possible. C'est ainsi le cas de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$ .On se propose, dans cet article, d'illustrer la méthode avec le calcul de la millionième décimale de ce nombre. On reviendra sur π ; à la fin de l'article.

1. Aspect théorique

La formule utilisée

On considère le développement en série entière de la fonction logarithme, à savoir $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ et on l'applique au cas $x = \frac{1}{10}$. Comme le logarithme de l'inverse est l'opposé du logarithme, il vient $\ln\left(\frac{10}{9}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,10^n}$. Il est alors clair que si on cherche la p-ième décimale il suffit en gros de ne sommer que jusqu'à $n = p$. En effet les termes négligés $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n\,10^n}$ peuvent être majorés par $\frac{1}{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ où l'on reconnaît une série géométrique de somme $\frac{10}{9(p+1)10^{p+1}} = \frac{1}{9(p+1)10^p}$. Cette quantité n'intervient pas dans le calcul de la p-ième décimale sauf peut-être à cause d'une retenue. Mais il faudrait vraiment jouer de malchance pour qu'il y ait autant de 9 successifs qui entraîneraient une retenue. Si c'était le cas, il serait nécessaire d'aller un peu plus loin dans le calcul. Il est à remarquer que le calcul précédent est très grossier et qu'il est sans doute possible de s'arrêter avant le terme d'ordre p pour calculer la p-ième décimale, surtout si p est grand. La méthode donnée permet d'obtenir non seulement la p-ième décimale mais aussi quelques-unes unes des suivantes.

En conclusion, la p-ième décimale de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$ est la même que celle de $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n\,10^{n}}$. En multipliant la dernière formule par 10^{p-1} il suffit de chercher la première décimale de $\sum_{n=1}^{p} \frac{10^{p-1-n}}{n}$.

La méthode utilisée

La formule précédente n'est pas nouvelle et elle est utilisée de façon classique pour calculer les décimales successives de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$. Ce qui est intéressant c'est que pour avoir la première décimale (et quelques-unes des suivantes), il suffit de considérer la partie fractionnaire de chacun des termes de la somme. Mais la partie fractionnaire de $\frac{10^{p-1-n}}{n}$ est la même que celle de $\frac{10^{p-1-n} - kn}{n}$ pour k entier. Il suffit donc de calculer 10^{p-1-n} modulo n, et de diviser par n pour obtenir cette partie fractionnaire. Or le calcul de 10^{k} modulo n se fait très rapidement par l'algorithme suivant (qui s'applique de façon analogue au calcul de a^{k} pour a entier quelconque) :

L'idée est d'écrire k comme somme de puissance de 2. Par exemple si $k = 43$ alors : $k = 2^5 + 2^3 + 2 + 2^0$. Et on utilise un schéma de HÖRNER pour faire le calcul :
$2^5 + 2^3 + 2 + 2^0$ $2(2(2(2(2(1)+0)+1)+0)+1)+1$. Et le calcul de 10^{43} modulo n se fait à l'aide d'élévations au carré ou de multiplications par 10 en réduisant modulo n selon que l'on rencontre un 0 (simple élévation au carré) ou un 1 (multiplication par 10 puis élévation au carré) en partant de la parenthèse la plus interne. Dans l'exemple donné on trouve la succession 1, 0, 1, 0, 1, 1 ce qui conduit, en prenant par exemple, si $n = 17$, aux 6 étapes :

$1\times10= 10$ et $10^2=100=15$.
$15^2=225=4$;
$4\times10 =40=6$ et $6^2=36=2$;
$2^2=4$;
$4\times10=40=6$ et $6^2=36=2$;
$2\times10=20=3$.

Et pour ce dernier cas il n'y a pas élévation au carré puisque dans le schéma de HÖRNER il n'y a plus de multiplication par 2. On en déduit que 10^{43} modulo 17 vaut 3.

En utilisant les mêmes notations et en notant t la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à k et en partant de $r = 10$, l'algorithme s'écrit :

```
r := r mod n
n := n - t
t := t/2
TANT QUE t >= 1 FAIRE      r := r^2
r := r mod n
SI  n >= t ALORS      r := 10×r
     r := r mod n
     n := n-t     IS
     t := t / 2       QT
```

Il manque l'algorithme permettant la détermination de t. Cela n'est pas difficile en prenant le quotient entier de k par 2 autant de fois que possible. Par exemple pour 43 on trouve 21 , 10, 5, 2, i soit 5 étapes ce qui prouve que t vaut 2^5. D'où l'algorithme:

```
a := 0
TANT QUE k <> 1 FAIRE      k := k div 2
   a := a+i  QT
   t := 2^a
```

On a maintenant tous les ingrédients pour réussir le calcul, calcul qui va être fait en utilisant le logiciel MAPLE.

2. Le calcul effectif avec MAPLE

On utilise la formule $\sum_{n=1}^{p} \frac{10^{p-1-n} \bmod n}{n}$. En fait il faut s'arrêter à p–1 dans la somme car on ne sait pas calculer modulo n avec des fractions. Le dernier terme devrait s'écrire $\frac{1}{10p}$. Il peut bien sûr être regroupé avec les termes du reste de la série entière. Il ne faut pas oublier que la série a été multipliée par 10^p et que par conséquent le reste est majoré par $\frac{1}{9(p+1)}$. Comme le calcul va être fait pour p très grand, l'erreur due à la méthode est inférieure à $\frac{1}{5p}$.

Par ailleurs, pour accélérer le calcul il faut l'effectuer en virgule flottante. Ceci introduit des erreurs d'arrondi et il y en a autant que de termes dans la somme, c'est-à-dire p . Ce qui veut dire que si on travaille avec k chiffres après la virgule, le résultat final ne sera connu qu'avec environ $k - \log p$ chiffres après la virgule (la notation log renvoie au logarithme décimal).

En fait le logiciel MAPLE ne travaille pas comme cela. Il va afficher le résultat avec k chiffres. Or on peut estimer que chaque terme est un nombre au hasard entre 0 et 1. La somme sera donc voisine de $\frac{p}{2}$. Le travail en virgule flottante conduira à un résultat qui ne contiendra qu'environ $k - \log p$ chiffres après la virgule. Ceci prouve que les chiffres donnés seront presque tous exacts si l'on prend $k = 2 \log p$. En fait MAPLE introduit lui-même des approximations et il vaut mieux se donner une marge de sécurité de 2 ou 3 chiffres supplémentaires. Le logiciel MAPLE étant un logiciel évolué, les algorithmes précédents sont implantés directement dans le calcul modulo m . L'aide est à ce propos très explicite :

« Pour calculer `i^n mod m` où `i` est un entier, il est maladroit d'utiliser la syntaxe évidente car c'est la puissance qui est calculée en premier (donnant sans doute un entier très grand) le résultat étant ensuite réduit modulo `m` . Il vaut mieux utiliser l'opérateur inerte `&^` : `i &^ n mod m`. Sous cette forme la puissance sera calculée intelligemment par l'opérateur `mod`. »

Le calcul est alors immédiat. pour p = 10^6, on va travailler avec 15 chiffres.

```
[> Digits:=15:
[> add(evalf((10&^(999999-n)mod n)/n,15),n=1..999999);
        497102.801741811
```

Le temps de calcul est d'environ six minutes sur mon ordinateur équipé d'un Pentium Pro S cadencé à 200 MHz avec 128 kO de RAM.

On en déduit que la millionième décimale de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$ est un 8 suivi de 0,1,7 et 4.

3. Retour sur π

La formule

La formule utilisée est la suivante: $\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$.

Découvrir cette formule n'est pas un mince exploit bien que la démonstration ne pose aucune difficulté et soit à la portée d'un étudiant de DEUG. En voici les principales étapes dont on laisse la justification au lecteur :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{i=0}^{\infty} x^{k-1+8i}\,dx = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+k)}.$$

Par suite : $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\,dx$.

Après simplification et le changement de variable $y = x\sqrt{2}$, on décompose partiellement en éléments simples :

$$\int_0^1 \frac{16y-16}{y^4-2y^3+4y-4}\,dy = \int_0^1 \frac{4y}{y^2-2}\,dy = \int_0^1 \frac{4y-8}{y^2-2y+2}\,dy = \pi.$$

On remarque que la formule pour π ressemble à celle utilisée dans la première partie de cet article, mais la présence des puissances successives de 16 oblige à travailler en hexadécimal.

La millionième hexadécimale de π est 2 suivi de 6, C, 6, 5, E, 5, etc. Pour la milliardième on trouve 8 suivi de 5, 8, 9, 5, 5, etc.

Les changements de base

Il est très facile de passer de la base seize à la base deux. Il suffit de remplacer chaque chiffre hexadécimal par sa traduction sur 4 chiffres en base deux. Ainsi les résultats précédents montre que la quatre millionième « bicimale » de π est 0 et qu'il vient ensuite 010, 0110, 1100, 0110, 0101, 1110, 0101 etc.

Si maintenant on veut travailler en base 32 on regroupe les « bicimales » par 5.

Contrairement à ce que peuvent croire ceux qui n'ont pas l'habitude de l'arithmétique, il n'est pas possible de passer aussi simplement d'une base *a* à une base *b* choisies arbitrairement. On va traiter ici le passage de la base deux à la base dix pour un nombre à virgule puisque c'est le cas le plus fréquent. On suppose que dans la base deux le nombre N s'écrive 0, $a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ où les a_n valent 0 ou 1. Cela signifie que $N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ ce qui peut encore s'écrire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n a_n}{10^n}$ où il semble apparaître une décomposition en base dix. Seulement 5^n est un nombre très grand qui a à peu près 0,6 *n* chiffres puisque le logarithme décimal de 5 vaut à peu près 0,6. Par conséquent la valeur de a_n intervient non seulement sur le *n*-ième chiffre décimal mais encore sur les 0,6 *n* précédents et il y aura sans doute des retenues. Cela veut dire que si l'on veut calculer la milliardième décimale il faut connaître au moins la milliardième « bicimale » et les 1,5 milliard suivantes La méthode vue ci-dessus ne présente plus aucun intérêt.

Conclusion

On a dit qu'Euler aurait été capable de trouver une telle formule. Certes, celle relative à π n'est pas évidente, mais d'autres nombres comme ln 2 se prêtent admirablement à ce calcul du *n*-ième chiffre dans une base donnée. EULER lui-même savait que $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$ qui donne un calcul évident en base deux. Ce qui est étonnant c'est qu'alors que la quête de chiffres du développement dans une base donnée est à la mode depuis des dizaines d'années (et pour π depuis Archimède au moins !) personne ne s'est avisé, avant la découverte de 1996 qu'un nombre tel que ln 2 était aussi facilement accessible à ce type de raisonnement.

Les adeptes de la recherche de l'utilité immédiate seront déçus. À quoi peut bien servir de savoir que la millionième décimale de $\ln \frac{10}{9}$ est un 8 ? À rien bien sûr aujourd'hui. Mais qui sait quelles retombées va avoir cette méthode et les recherche d'une formule donnant les décimales de π ? Ainsi va la recherche en mathématiques, de recherches internes qui n'ont de retombées que beaucoup plus tard en recherches suscitées par des problèmes externes et qui font avancer un tout autre domaine, le progrès est constant grâce à la liberté qui est donné au chercheur.

Les Lois de la Cristallographie en Décoration Plane Périodique (2^e Partie)

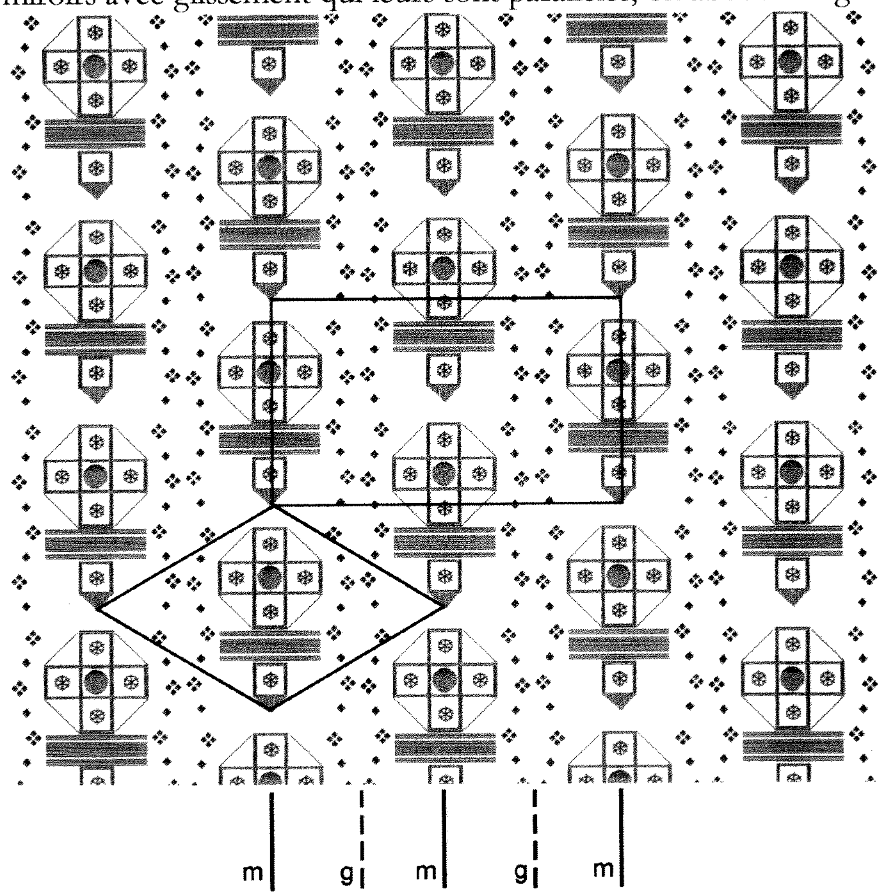
Roland COUSANDIER et Pierre BUCHERT

II EXEMPLES EN DÉCORATION PLANE

1. Le papier peint « broderie »

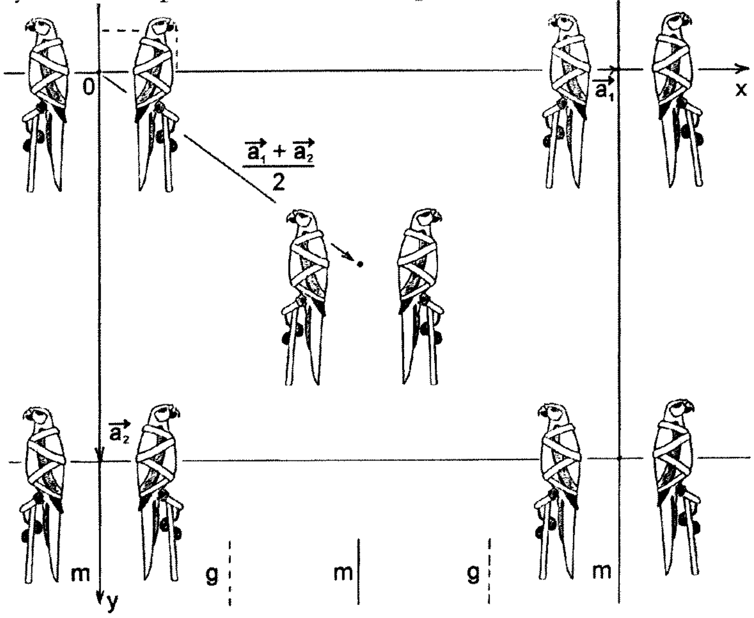
1 Détermination de la maille et des opérateurs de symétrie

Ce premier exemple est une interprétation très libre d'un papier peint LEROY aux couleurs vives et qui simule une broderie sur tissus. Comme la brodeuse, nous devons maîtriser la répartition des sujets identiques. En reliant un point du dessin, n'importe lequel, à ses points homologues, nous pouvons construire les deux vecteurs du groupe de translation qui est compatible avec n'importe quel point du dessin. Nous obtenons une maille losange dont la représentation standard est le rectangle centré. Dans cette maille nous plaçons maintenant les opérateurs de symétrie du groupe spatial, miroirs verticaux et miroirs avec glissement qui leurs sont parallèles, on aboutit au groupe n°5.

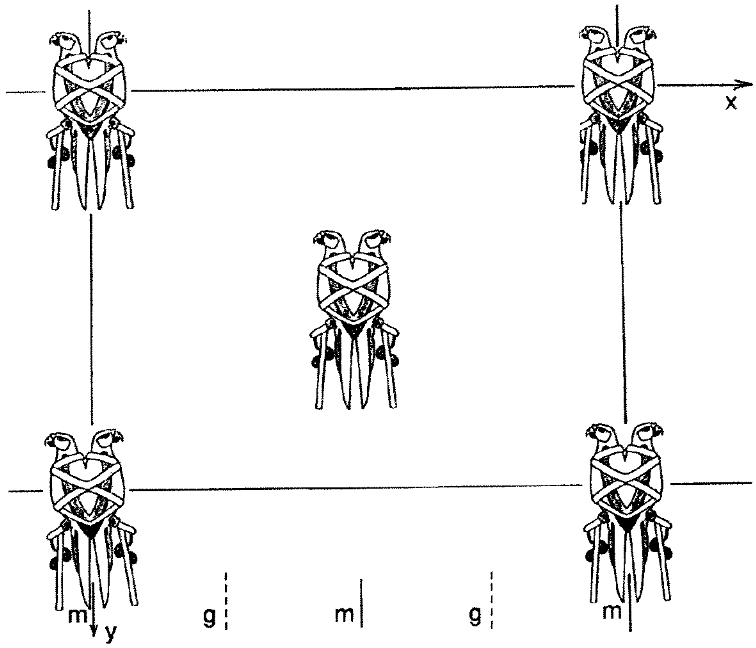


2 Réciproque, comment fonctionne le groupe n°5 ?

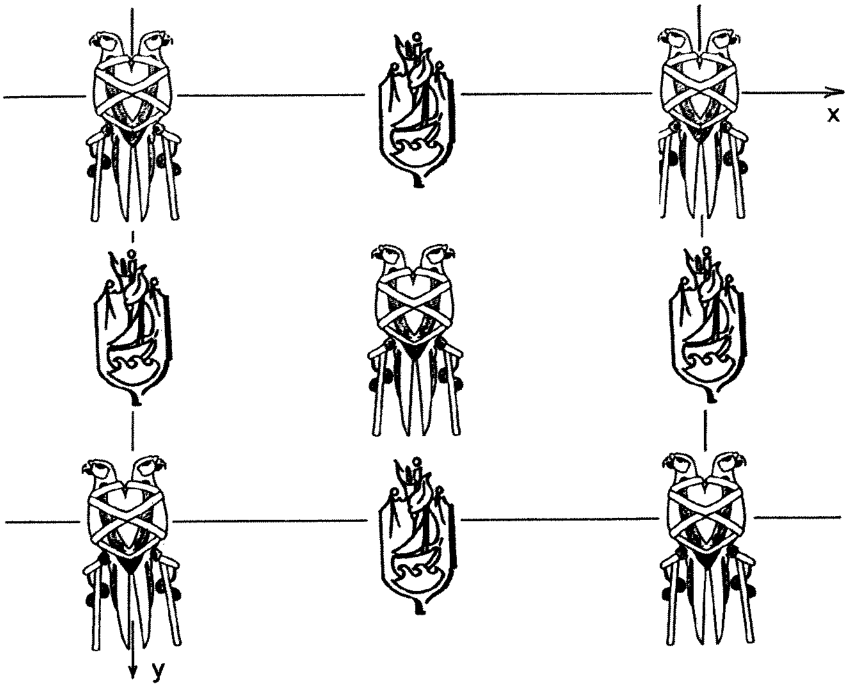
Dans la maille rectangle centré munie des opérateurs de symétrie dont les dimensions sont choisies a priori, introduisons maintenant un perroquet dont la pointe du bec sera placée en position (x,y). Le sujet sera multiplié selon les opérations de translation et de symétrie, la pointe du bec occupant toutes les positions homologues :



Si on change les coordonnées (x,y) du bec pour mettre partiellement le perroquet dans un miroir, il se superposera en partie avec son image prise par rapport au miroir pour ne former plus qu'un emblème bicéphale qui accepte le miroir comme élément de symétrie :

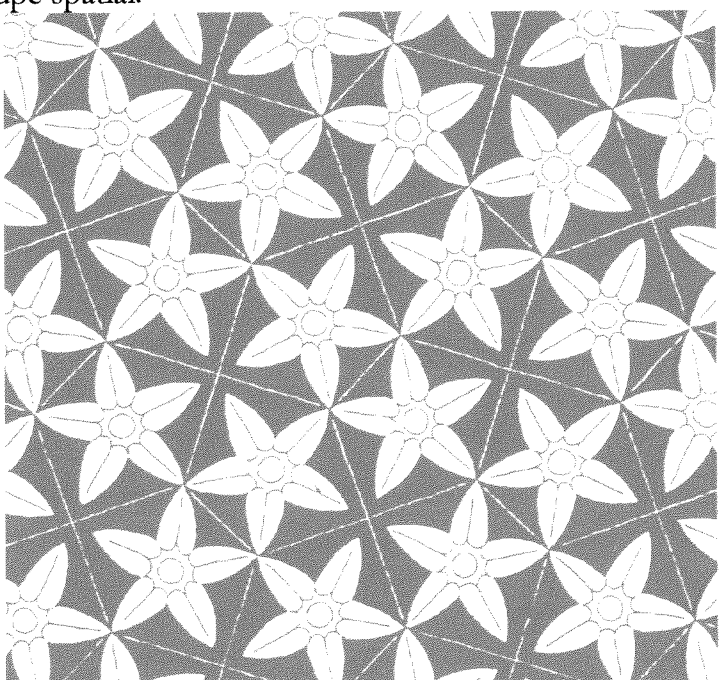


Mais si on veut compléter cette ambiance tropicale par le rajout d'un blason en quinconce pour en faire un papier peint d'apparat pour république bananière, on détruit ce groupe si le blason n'a pas lui-même de symétrie bilatérale étant donné que le site occupé est sur un miroir :



2. Un salut à ESCHER

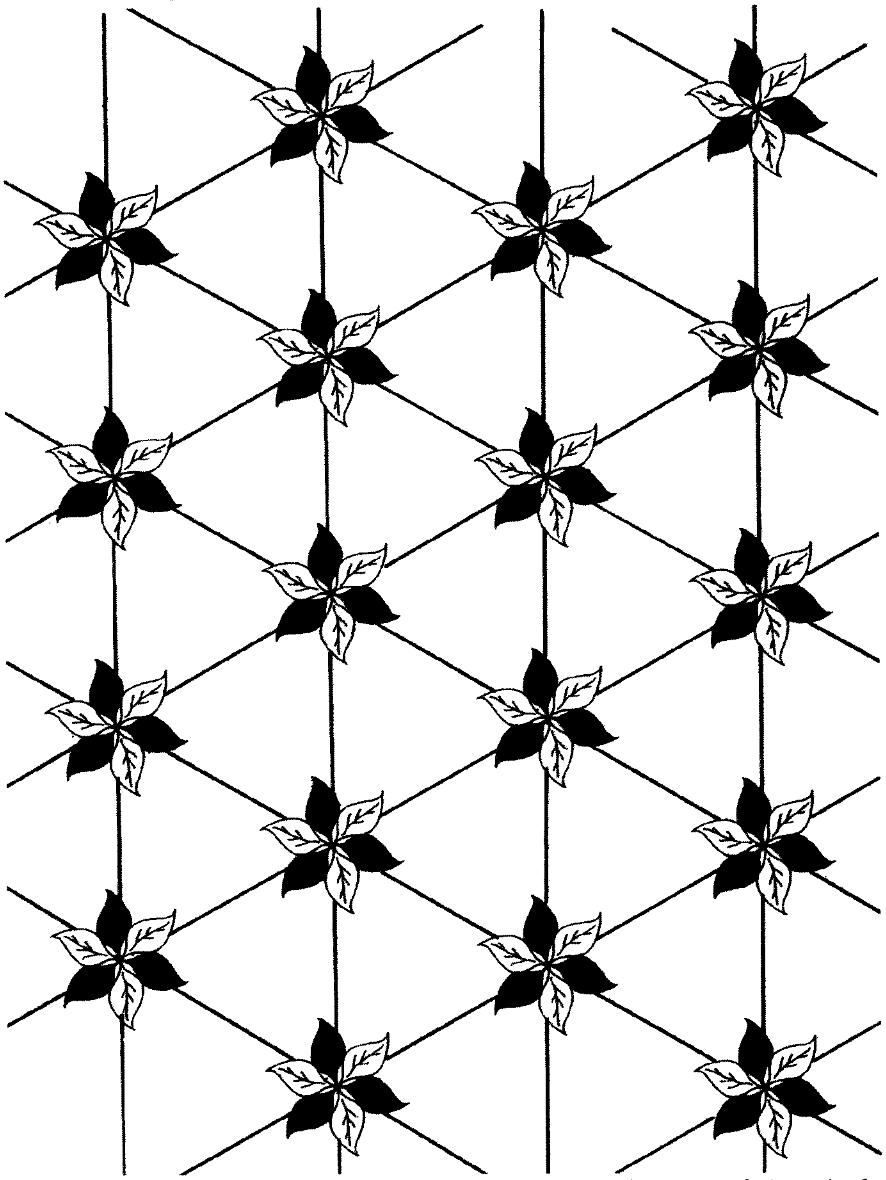
L'exemple ci-dessous constitue un exercice assez difficile où les premières impressions sont souvent mauvaises conseillères. On laisse au lecteur le plaisir de la découverte du groupe de symétrie qui correspond au n° 12 (I -3 -1 -3) . On voit que le schéma théorique apporte une aide non négligeable pour l'identification de tous les opérateurs du groupe spatial.



3. Cannage d'un siège

Le cannage n'est réalisable qu'en 3D, il correspond au groupe d'E. A. WOOD noté DG 49 (**I.3.**2) dont la représentation est, à la cote z hors du plan près, identique au groupe 2 D n°10, mériédrie du système carré (**I.3.1.** 3). En effet, quand on observe le cannage, on ne distingue, comme opérateur de symétrie que des axes quaternaires et binaires perpendiculaires au plan. La maille aura pour origine l'un des deux sites d'axe quaternaire, soit au milieu des entrelacs de rotin, soit au milieu du trou .

4. Projet de grille en fer forgé

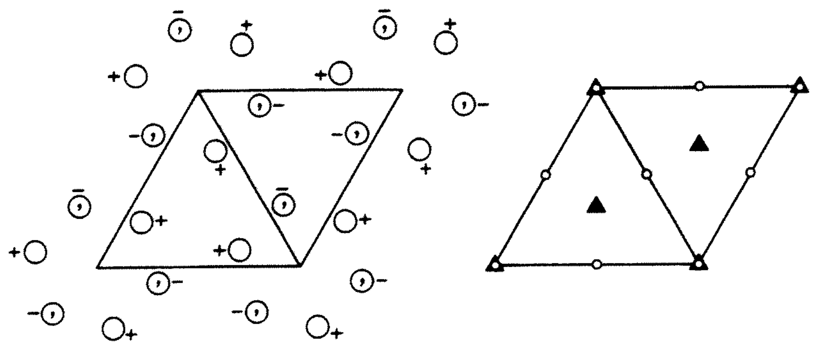


Il pourrait s'agir d'une grille de chœur d'église où l'on exploiterait le symbole trinitaire, d'une part au niveau du groupe des feuilles et, d'autre part, du réseau hexagonal qui dessine des triangles équilatéraux.

Le groupe des feuilles que l'on pourrait exécuter en tôle d'acier martelée pour faire apparaître le relief et les nervures se subdivise en deux sous-ensembles de trois feuilles à 120°, l'un orienté vers l'avant, le deuxième placé sur l'autre face de la grille et qui se déduit du premier par une opération du centre de symétrie placé à l'intersection des tiges. On a ainsi réalisé un site de symétrie « axe de symétrie inverse d'ordre trois » qui, appliqué à l'entité de départ « feuille », génère les six positions homologues par les opérations de symétrie couplées d'axe ternaire et centre de symétrie placé sur l'axe.

On est ainsi en présence d'un réseau 2D ayant une certaine épaisseur et donc existant dans un espace 3D. Ce milieu périodique correspond au groupe d'E.A. WOOD désigné par DG 66 qui est sans équivalent parmi les 17 groupes 2D stricts et dont le schéma théorique est donné ci-après :

Hexagonal $P\bar{3}$ **DG66**



Number of positions, Wyckoff notation, and point symmetry			Co-ordinates of equivalent positions	Conditions limiting possible reflections
6	g	1	$x,y,z;\quad \bar{y},x-y,z;\ y-x,\bar{x},z;$ $\bar{x},\bar{y},\bar{z};\quad y,y-x,\bar{z};\ x-y,x,\bar{z}.$	General: No conditions Special: No conditions
3	e	$\bar{1}$	$\frac{1}{2},0,0;\quad 0,\frac{1}{2},0;\quad \frac{1}{2},\frac{1}{2},0.$	
2	d	3	$\frac{1}{3},\frac{2}{3},z;\quad \frac{2}{3},\frac{1}{3},\bar{z};$	
2	c	3	$0,0,z;\quad 0,0,\bar{z}.$	
1	a	$\bar{3}$	$0,0,0.$	

sur le dessin de gauche on voit la projection sur le plan xOy des 6 positions générales équivalentes appelées « g » obtenues par les opérations de symétrie et de translation du groupe spatial, les cotes en z sont toutes identiques, soit au dessus du plan, notées +, soit en dessous, notées -.Les symétriques de l'objet de départ obtenus par une opération de symétrie directe, donc directement superposables à l'objet de départ sont laissés blancs à l'intérieur. Les positions homologues obtenues par des opération de symétrie inverses (ici le centre) renferment une virgule, ils ne sont pas directement superposables à l'objet de départ (par exemple main gauche, main droite). Si l'objet de départ est doué de symétrie inverse (s'il accepte un centre de symétrie ou un plan comme propriété) ce distinguo virgule sans virgule devient caduc.

Un objet en position particulière placé sur un opérateur de symétrie doit accepter cette propriété pour lui-même, il sera son propre symétrique et le nombre de positions homologues dans la maille sera d'autant diminué. Le tableau résume toutes les possibilités. Par exemple, la soudure des 3 tiges de la grille correspond à la position « a », il y en a une par maille losange.

Le commentaire à droite du tableau indique les extinctions systématiques des directions de diffraction par un rayonnement adéquat que l'on peut relier aux positions particulières. Ici, il n'y a pas d'extinctions typiques.

Le schéma en haut à droite indique la nature et la distribution spatiale des opérateurs du groupe :

triangle	=	axe de symétrie d'ordre 3,
petit rond	=	centre de symétrie,
la somme des deux	=	axe ternaire inverse.

III SURSTRUCTURES

Le développement qui va suivre est la conséquence directe des résultats obtenus lors de l'étude des arrangements atomiques à la surface des solides cristallins. Étonnamment, il y a des papiers peints que l'on peut soumettre à la même analyse.

1. Aspects théoriques

1 Nature de la surface

En considérant une structure cristalline, on crée une surface 2D en coupant un monocristal 3D selon un plan cristallographique, c'est à dire passant par 3 nœuds du réseau, donc par une infinité de nœuds. On peut alors distinguer deux régions :

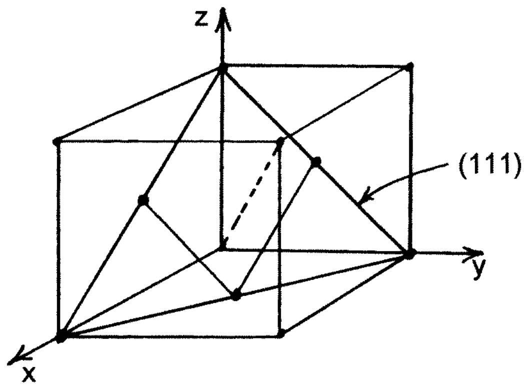
- d'une part le substrat en profondeur, non perturbé, qui a les propriétés du volume et qui possède une périodicité selon la normale à la surface. Ce seront les paramètres du volume parallèles à la surface qui serviront de référence pour décrire les arrangements périodiques à la surface du solide.
- d'autre part l'interface cristal-vide caractérisée par la relaxation des atomes dont les déplacements qui sont la conséquence des liaisons coupées induisent souvent une autre périodicité superficielle parallèle au plan de la coupe sans posséder une périodicité normale à ce plan. On parle alors d'une surface propre reconstruite car réalisée uniquement avec des atomes du substrat. Cette reconstruction peut, en outre, dépendre du mode de préparation choisi, par exemple durée et température de recuit.

Si maintenant on dépose sur la surface précédente des atomes étrangers, soit volontairement, soit provenant de contaminants non maîtrisés, on assiste à la création de nouvelles structures souvent typiques car liées à la nature de l'adsorbat. En définissant une monocouche d'adsorbat par 1 ML (monolayer) comme étant un atome déposé par maille simple non modifiée du susbtrat, on constate souvent l'apparition d'une surstructure nouvelle pour des recouvrements même largement inférieurs à 1 ML.

Enfin, si la symétrie de la surstructure est inférieure à celle du substrat, les opérateurs de symétrie du volume perpendiculaires à la surface vont induire différentes orientations des domaines 2D à l'interface.

2 La nomenclature en notation réduite

Les réseaux de surface qui diffèrent de la section à travers le cristal 3D par la symétrie ou la périodicité sont appelés des surstructures par référence aux clichés de diffraction qui permettent de les caractériser. Dans ce domaine, seule la diffraction des électrons est utilisable dans des appareils sous ultra-vide : électrons lents en incidence normale (LEED Low Energy Electron Diffraction) ou électrons rapides sous incidence rasante (RHEED Reflexion High Energy Electron Diffraction). Mais, en réalité, l'usage du terme de surstructure remonte plus loin dans le temps, vers les années trente, quand on a caractérisé par diffraction aux rayons X des alliages ordonnés moins symétriques que les métaux purs de départ et qui présentaient ainsi plus de raies de diffraction que les métaux correspondants.

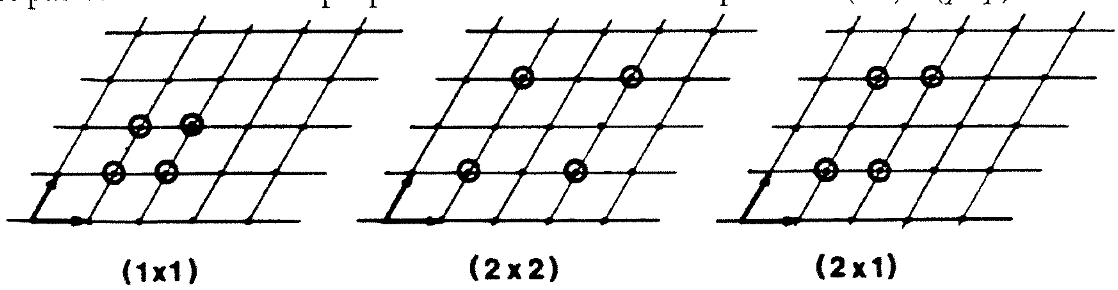


Prenons, par exemple, un métal cubique à faces centrées tel que Al, Cu, Au, Pt etc. coupé selon un plan cristallographique d'indices de MILLER (111), c'est à dire perpendiculairement à la diagonale de la maille cubique :
il en résulte un réseau 2D hexagonal selon le corps massif.

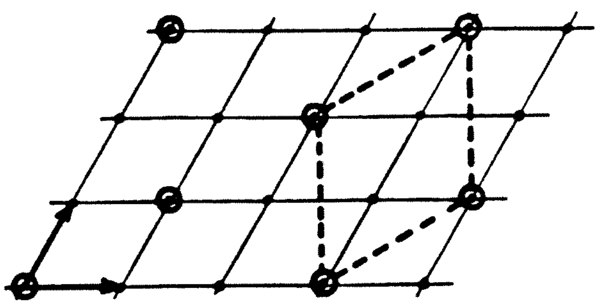
Si la surface n'est pas modifiée, on aura une structure notée (1×1), si la périodicité est deux fois plus grande selon les deux directions de la maille de référence déduite du volume on notera (2×2), si on a une périodicité double dans une direction seulement on écrit (2×1). Dans ce dernier cas on voit immédiatement que la maille de surface, moins symétrique que le substrat, pourra prendre deux orientations différentes sur la surface : il y a deux domaines.

Si l'on désigne par M ce métal et par q_1 et q_2 les périodicités de surface par rapport au substrat dont la nature de la coupe est donnée par les indices de MILLER du plan, on écrira : M (111) – $(q_1 \times q_2)$.

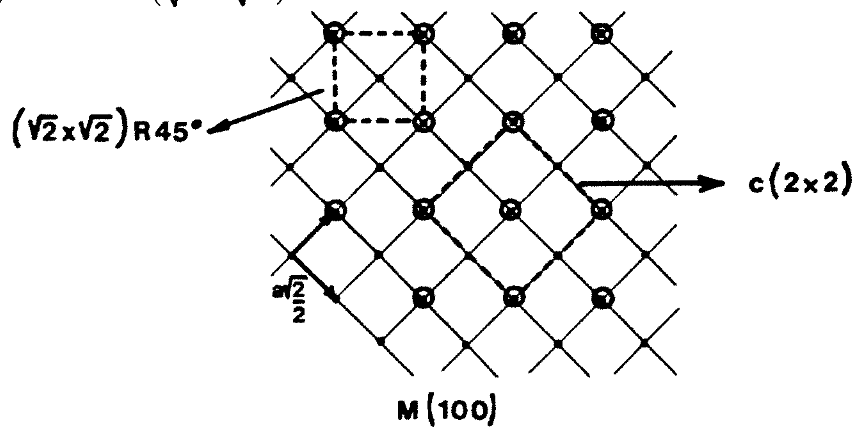
Cette notation sera complétée par le symbole de l'adsorbat A si cette surstructure n'est pas celle de la surface propre mais si elle est induite par A : M(111) – $(q_1 \times q_2)$ – A.



Si, en outre, la maille de surface est tournée par rapport à celle du substrat non perturbé, on indique l'angle de rotation comme dans l'exemple suivant :



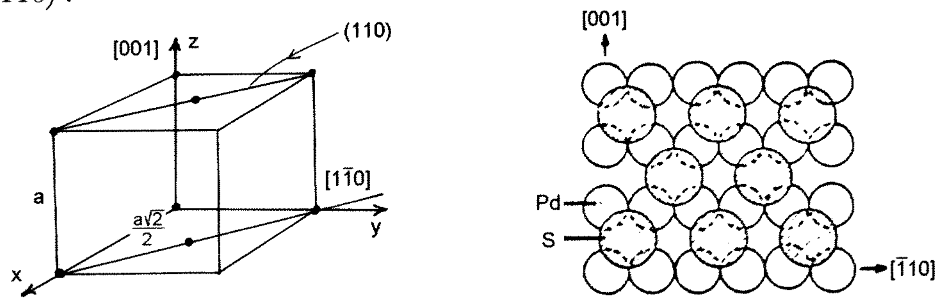
Enfin, un dernier cas qui mérite d'être relevé a trait à l'usage du symbole c, maille centrée, pour décrire une maille de surface sans faire intervenir l'angle de rotation du repère alors que le découpage de BRAVAIS ne s'impose pas par ailleurs. On préfère noter c (2×2) au lieu de ($\sqrt{2} \times \sqrt{2}$) R 45° :



2. Exemples de surstructures

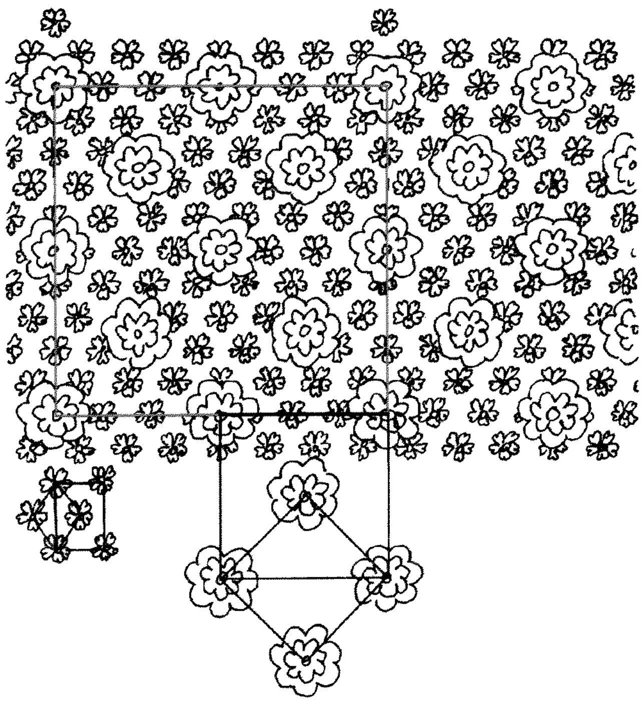
1 Soufre sur palladium

Le palladium cristallise lui aussi avec une maille cubique à faces centrées évoquée précédemment (**III.1.** 2), mais nous considérons maintenant une coupe selon un plan diagonal (110) :



Dans un appareil sous ultra-vide, pour obtenir une surface propre on procède par des alternances de bombardement ionique d'argon pour nettoyer la surface et de recuits pour réordonner la position des atomes afin de guérir le cristal de ses défauts. Ce processus est compliqué par la diffusion des impuretés du volume vers la surface lors des séquences de chauffage. Dans cette étude, on observe une émergence d'atomes de soufre par spectrométrie AUGER. Le diagramme de diffraction en électrons lents (LEED) ne correspond pas à la maille superficielle du Pd (110) 1×1, rectangle simple qui est relié aux paramètres du Pd a et $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ mais se présente sous la forme d'un rectangle centré de mêmes dimensions. Si l'on se reporte à la définition du réseau réciproque (**I.3.** 2), on en déduit que si le cliché de diffraction est deux fois plus dense, la périodicité de la structure induite est deux fois plus grande dans l'espace réel et correspond à une maille elle aussi centrée. Une hypothèse de travail en bon accord avec les observations précédentes consiste à disposer les atomes de soufre sur le substrat palladium de la manière représentée ci-dessus à droite (5), on a construit de la sorte une surface Pd (110) c 2x2 -S.

2 Papier peint « double couche florale » (d'après (6))

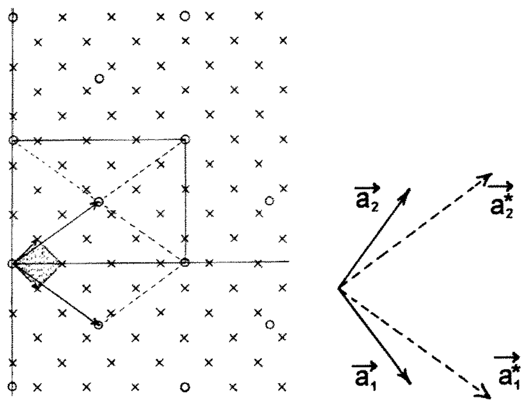


Le substrat formé par les petites fleurs a une maille losange allongée verticalement dont la représentation standard est le rectangle centré, le groupe spatial correspond au n° 5.

L'adsorbat formé par les grandes fleurs occupe 4 sites différents sur le substrat, la maille est un carré à 45°. On retient la maille carré centré, directement comparable au rectangle petites fleurs dont les côtés sont parallèles.

Les coïncidences substrat-adsorbat se font selon un carré centré deux fois plus grand que le précédent. Le rapport des périodicités dans le sens horizontal est de 7/2 et dans le sens vertical de 5/2.

Le cliché de diffraction théorique qui en résulte est interprété dans l'espace réciproque, c'est le dual de l'espace direct ou réel (§ 1-3-2), son aspect dans une fraction du plan a l'allure suivante (figure de gauche) :



pour construire ce cliché on revient impérativement aux mailles simples, losange allongé verticalement pour les petites fleurs, carré à 45° pour les grandes fleurs pour pouvoir exploiter la relation de définition des vecteurs du réseau réciproque $\vec{a_j} \cdot \vec{a_i^*} = \delta_{ij}$. Les modules des vecteurs du réseau réciproque sont inversement proportionnels à ceux du réseau direct, au losange petites fleurs correspondra un cliché losange allongé selon l'horizontale (figure de droite ci-dessus). Le réseau réciproque du carré sera un carré de même orientation.

Le cliché précédent a été réalisé à une échelle arbitraire étant donné que l'on n'a pas précisé la longueur d'onde du rayonnement utilisé, c'est, en fait, le réseau polaire de diffraction qui diffère du cliché réel en ce sens qu'il est d'extension infinie avec une même pondération des taches de diffraction. Enfin, on retrouve le découpage de BRAVAIS du réseau polaire de diffraction, le réseau réciproque est toujours de même nature que le réseau direct.

On observe que l'on a bien le rapport des périodicités $\frac{7}{2}$et $\frac{5}{2}$ selon les deux directions horizontale et verticale, entre le substrat taches rondes et l'adsorbat, croix. Les rapports des distances sont inversées et on comprend mieux le terme de surstructure avec les nombreuses taches de diffraction qui s'ajoutent au diagramme du substrat seul.

Cependant, cette surstructure induite par les grandes fleurs est inhabituelle car elle s'exprime par deux fractions $(\frac{7}{2} \times \frac{5}{2})$ et non pas par des entiers. Pendant longtemps une situation de ce type n'avait pas été décrite en physico-chimie de la surface. Fort à propos, des publications récentes montrent que la Nature n'est pas en reste comme on le verra dans l'exemple suivant.

3 Monocouche de décanethiol sur Au (111)

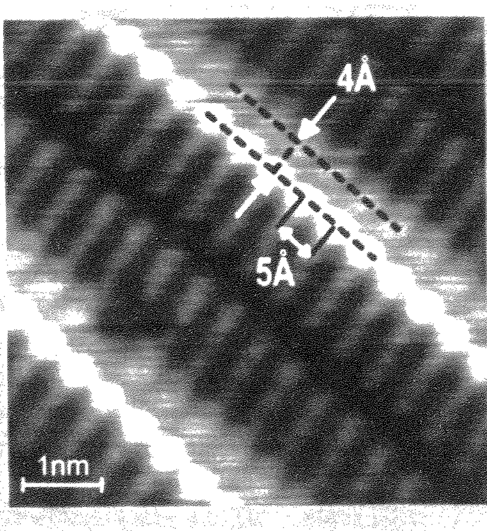


Figure 3:
Sub-molecular resolution STM height image (U=2.0V; I=0.20nA).

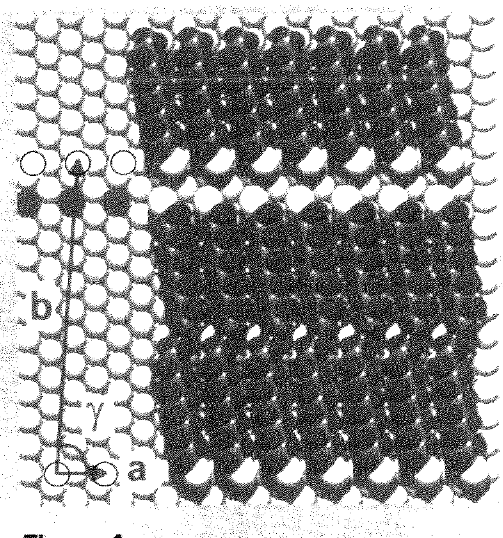


Figure 4:
Real-space structure model of the 11.5x√3 pin-stripe structure of decanethiol. (white circles: *hcp* hollow sites; red circles: on-top positions; a=4.99Å, b=33.26Å, γ= 85.3°)

Nous devons à M. J.P. DEVILLE, responsable du groupe Surface-Interfaces de l'Institut de Physique et Chimie des Matériaux de Strasbourg (IPCMS), le fait de connaître cette publication providentielle où une surstructure est décrite par un nombre non entier selon les règles usuelles de codage, dans le cas présent égal à 11,5.

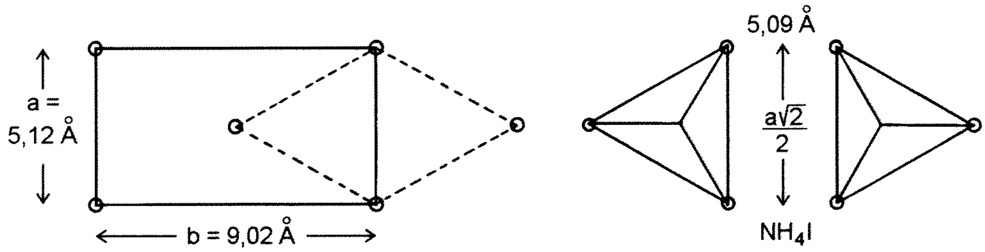
Très succinctement, le substrat Au (111) est préparé par évaporation sous vide d'or épitaxié sur un monocristal de mica. Le décanethiol est déposé par immersion du substrat dans une solution diluée d'éthanol, ensuite l'échantillon est recuit sous ultra-vide. Le décanethiol se présente comme une chenille allongée de formule CH_3-$(CH_2)_9$-SH avec une extrémité à 3 hydrogènes entourant un atome de carbone et à l'autre le gros soufre visible en clair sur le modèle (fig.4). Les maillons –CH_2– de chaque molécule se disposent parallèlement sur le substrat hexagonal d'or légèrement de biais. D'autre part, les chaînes se disposent anti-parallèlement, une fois sur deux les soufre se faisant face, l'un placé dans un creux formé par le losange de 4 atomes d'or, l'autre, plus haut, sur un atome d'or. Par référence à la maille hexagonale d'or du substrat, on arrive ainsi à une surstructure induite par une monocouche de type 11,5 x 3. Les auteurs (R. STAUB et al. Langmuir 1998, 14, 6693) ont utilisé la microscopie à balayage à effet tunnel (STM, fig. 3) pour accéder directement à la représentation de la surface dans l'espace réel à l'échelle atomique, ce qui constitue le progrès le plus récent des outils d'analyse structurale des surfaces dans ce domaine de la recherche.

IV ÉPITAXIE

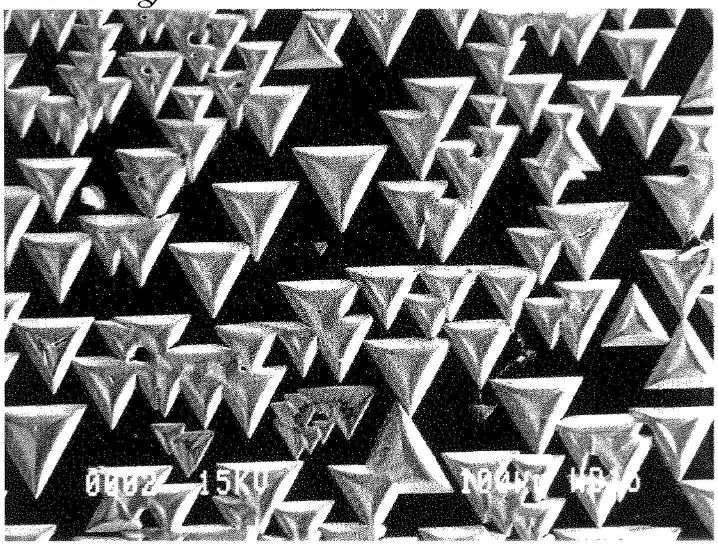
Plus généralement, on rencontre des situations où l'adsorbat est orienté géométriquement sur le substrat sans qu'il y ait de relation simple entre les paramètres qui caractérisent ces deux milieux et leur orientation mutuelle, on désigne ce phénomène par le terme d'épitaxie. On est, le plus souvent, en présence de deux structures incommensurables dont l'étude de leur orientation mutuelle est rendue délicate car l'adaptation de l'adsorbat sur le substrat peut se faire en occupant des sites cristallographiques différents, les décalages entre les périodicités peuvent être rattrapées par des défauts cristallins appelés dislocations etc... Quoiqu'il en soit, on constate que l'épitaxie entre deux phases peut se réaliser si au moins un des deux paramètres des plans en contact ne diffère pas de plus de 10% environ, cet effet est purement géométrique, la nature chimique des deux phases en présence n'intervenant pas. Il ne faut surtout pas perdre de vue que dans le domaine des structures atomiques, l'épitaxie est un phénomène dynamique qui débute au niveau de la croissance d'un germe submicroscopique qui est orienté par des forces atomiques induites par le substrat. À très courte distance, des coïncidences entre les paramètres même approximatives peuvent être tolérées et c'est cette orientation initiale qui sera conservée au cours de la croissance dont le développement ultérieur de l'adsorbat pourra se prêter à des observations macroscopiques. Dans l'exemple suivant, on utilise un clivage frais de mica, c'est à dire une rupture facile dans la structure de ce minéral pour démarrer une croissance épitaxiée sur une surface propre :

L'iodure d'ammonium est cubique faces centrées de paramètre a = 0,72 nm. La face d'accolement est (111). Le paramètre du réseau plan hexagonal est [110] = 0,509 nm.

Le mica muscovite est un aluminosilicate monoclinique. Le réseau plan de clivage basal (001) est fait de rectangles centrés de paramètres a = 0,512 nm et b = 0,902 nm. Ce réseau plan est pseudo-hexagonal comme on le voit sur la figure suivante :



Les cristaux qui croissent sur la surface du mica se présentent sous forme triangulaire montrant en relief les trois faces du cube. Deux orientations sont possibles, la rangée [110] restant parallèle à la rangée [100] du mica. Le cliché de cette expérience a été obtenu par microscopie à balayage (P. KARCHER, EOST Strasbourg) :



Si l'on essaye de transposer ces résultats dans le domaine de la décoration plane, la conclusion est ici fort simple car l'homme peut superposer des graphismes périodiques différents sans interaction énergétique entre eux et leur étude ne peut déboucher sur des relations nouvelles. Il y a ici découplage total entre les deux réseaux comme nous avons déjà constaté l'indépendance entre la symétrie du motif et celle du réseau ce qui n'est pas le cas pour la matière cristallisée. En écartant donc l'épitaxie ne fusse que par son aspect dynamique incompatible avec la décoration, on peut cependant trouver, comme nous l'avons observé au paragraphe précédent, des réalisations artistiques dont on ne sait si elles correspondent à des intentions profondes ou fortuites et qui peuvent s'analyser en termes de surstructures.

V DES PAPIERS PEINTS

Les papiers peints constituent sans nul doute le terrain de prédilection pour une étude de la décoration plane périodique avec un regard de cristallographe à travers le temps et les modes par la relative facilité d'accès à de nombreux exemples. Nous devons à l'obligeance de Madame Véronique de la HOUGUE, conservateur au Musée des Arts Décoratifs du Palais du Louvre à Paris, d'avoir pu consulter les catalogues de la Maison LEROY.

1. Inventaire

C'est un véritable travail de Sysiphe que d'appréhender rapidement la nature de la maille et le groupe spatial d'une longue théorie de catalogues issus d'une seule Maison ! L'inventaire qui va suivre ne porte que sur la période qui va de 1840 jusqu'à la première guerre mondiale en 1914. Si de 1840 à 1853 toute la production a été analysée, ensuite on n'a opéré que des sondages pour chaque décennie à raison d'un échantillon sur dix. Comme cela a été montré (I -3 -3) on a déconnecté dans le tableau qui va suivre la forme de la maille et le groupe de symétrie :

	1D		Maille 2D					Groupe spatial																
Période	**Ø**	**m**	**O**	**Rp**	**Rc**	**C**	**H**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
1840 à 1850				8	20	1		19		3		8	1											
1851 à 1853				12	19	3		25		4	1	3						2						
1863 à 1864				6	23	6		16	1	3	1	5	1			4	2	2						
1873 à 1874			1	5	15	2		12		7						2		2						
1883 à 1884				9	16	6		14	1	2	4	6					1	3						
1893 à 1894				4	12	5		12		2		5						2						
1903 à 1904				6	15	3		12		2		4	2					2						
1913 à 1914	13	2		10	54	9		37		7	2	19						8						

2. Bilan des mailles

Parmi les cinq mailles planes possibles, les mailles oblique (quelconque) et hexagonale (losange à 60 et 120°) sont totalement délaissées.

Les deux mailles rectangle sont largement majoritaires avec un net avantage pour les rectangles centrés Rc sur les rectangle simple Rp. Le rectangle offre sans nul doute des facilités d'exécution lors de la conception d'une part et dans la réalisation technique lors de l'impression d'autre part. Sur le plan esthétique, la maille centrée génère ces « diagonales » qui « ouvrent » l'espace. Le rectangle centré occupe la première place avec un pourcentage qui varie selon les périodes considérées de 52 à 74 %, la moyenne s'établissant à 65% soit les 2/3 des exemples analysés !

Enfin, la maille carrée, peut-être trop symétrique : elle « enferme » l'espace comme une « grille », est nettement minoritaire.

Il serait encore utile de compléter ces observations par la dimension absolue des mailles car ce facteur influe aussi sur l'effet final recherché lors de la conception du papier peint. Il y a des périodes à « gros » motifs ! Rien qu'au niveau du choix des mailles on peut penser que le conformisme des réalisateurs , probablement mal rétribués et couplé à des facilités de mise en oeuvre techniques, rejoint les pesanteurs de la masse du public pour limiter les recherches esthétiques.

Cette période étudiée, qui débute avec la production mécanisée jusqu'au début de la première guerre mondiale se termine avec l'émergence de motifs 1D, en fait des rayures et dessins allongés verticalement avec une périodicité limitée à une dimension selon l'horizontale, du moins quant à son effet visuel.

3. Choix des groupes spatiaux

On retrouve cette relative pauvreté au niveau des groupes spatiaux où l'absence de tout opérateur de symétrie vient très largement en tête (groupe n°1) avec 54%.

Viennent ensuite deux groupes directement connectés avec la maille rectangle, d'abord le groupe n°5 comportant l'alternance du miroir vertical et du miroir avec glissement conséquence de la maille centrée Rc pour 18%, puis le groupe n°3, un seul miroir vertical, pour 11%.

Ensuite vient le groupe n°11 qui possède la symétrie quaternaire la plus élevée avec 8% des cas.

À eux seuls, ces 4 groupes de symétrie couvrent 91% des situations rencontrées, 5 autres groupes se partagent les 9% restants et 8 groupes de symétrie spatiale n'ont pas été observés.

Il est assez facile de conclure que l'analyse structurale de la décoration plane périodique n'a probablement jamais été mise au service de la production des papiers peints, ni dans la disposition spatiale des motifs, ni dans la recherche de nouveautés esthétiques dans ce domaine.

CONCLUSION

Nous pensons avoir bien précisé le cadre cristallographique dans lequel vont évoluer les recherches et réalisations en décoration plane périodique. Par comparaison avec la matière cristallisée, nous avons montré l'indépendance de la nature du réseau avec la symétrie locale, différence qui s'explique par l'absence de forces de liaison entre les éléments décoratifs et donc l'absence d'un contenu énergétique à minorer pour obtenir une structure stable. Si le nombre de schémas théoriques est très limité, la mise en œuvre de canevas structuraux inédits n'est cependant pas facile. On se heurte à une infinité de choix possibles des objets à représenter (bien plus nombreux que les 92 atomes du tableau périodique de MENDELEÏEV) et qui auront une influence décisive sur le résultat esthétique futur. L'intérêt de travailler avec des groupes spatiaux inusités pour dégager des effets novateurs sera tributaire de la nature et de la position des éléments placés dans la maille. Nous pensons que seule une grande économie de moyens pourra déboucher sur des conclusions esthétiques quelque peu solides quoique nécessairement subjectives. La poursuite de notre travail dans cette direction réservera certainement des surprises !

BIBLIOGRAPHIE

(1) **International Tables for X-Ray Crystallography Vol. 1 Symmetry Groups**, The Kynoch Press, Birmingham, England, 1952.

(2) G. POLYA, **Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene**, Zeitschrift für Kristallographie <u>60</u>, pp. 278-282, 1924.

(3) E. A. WOOD, **The 80 diperiodic groups in three dimensions**, The Bell System Technical Journal <u>43</u>, pp. 541-559, January 1964.

(4) E. MÜLLER, **Gruppentheoretische und Strukturanalytische Untersuchungen der Maurischen Ornamente aus der Alhambra in Granada**, Dissertation Universität Zürich, 1944.

(5) C. Speisser, **Rapport de DEA spécialité : Physique de la matière condensée**, Lab. de Cristallographie ULP, 1984.

(6) Véronique DE BRUIGNAC, **Le papier peint**, Arts et Techniques, Massin éd., 1995.

(7) R. STAUB et al., Langmuir <u>14</u>, 6693, 1998.

D. SCHATTSCHNEIDER, **Escher Visions**, Seuil éd.

M. O. HAPGOOD, **Papiers peints d'artistes de Dürer à Warhol**, Abbeville éd., Paris 1992.

I. STEWART, **Simples pavés**, Pour la Science <u>272</u>, juin 2000 ; et aussi <u>273</u> août 1999.

QU'EST-CE QU'IL Y A DANS LA QUATRIÈME DIMENSION ?

Strasbourg, le 24 mai 2000

Hommage à Jean-Pierre FRIEDELMEYER, à l'occasion de son départ en retraite

1. Une histoire très courte de la quatrième dimension

EUCLIDE ne parle explicitement ni de l'espace ni de ses dimensions. Mais de l'ensemble de son œuvre, on peut conclure que pour EUCLIDE l'espace était une grande boîte comprenant les corps. Il définit (XI, déf. 1) :

« Un corps (solide) est quelque chose qui possède une longueur, une largeur et une profondeur. »

Parce qu'il n'y a pas d'idée d'une quatrième dimension on ne multipliait jamais plus que trois longueurs (grandeurs linéaires). Si on n'a que trois facteurs le résultat d'une multiplication peut s'interpréter comme un volume. Par contre même EUCLIDE connaît des produits quelconques de nombres. Par conséquent il ne considère pas les nombres comme des grandeurs !

En principe on aurait eu quelques occasions à considérer une quatrième dimension. J'en donne un exemple : Les Pythagoriciens ont déjà étudié les nombres dits triangulaires 1, 3, 6, 10, 15 etc., une somme de nombres triangulaire donne un nombre pyramidal

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 6 = 10$$
$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

Mais qu'est-ce que se passe si on forme une somme de nombres pyramidaux :

$$1 + 4 + 10 + 20 = 35$$

C'est un nombre « hyperpyramidal » formé par la réunion des pyramides – une idée qu'on ne rencontre pas à l'antiquité. Selon Simplicius PTOLÉMÉE, le grand astronome de l'antiquité, a même donné une démonstration de la proposition « L'espace est tri-dimensionnel » fondée sur l'idée qu'on ne trouve pas plus que trois directions orthogonales dans un point.

Pendant les Moyens Âges on a commencé à se libérer des restrictions anciennes. Nicole ORESME a donné des représentations graphiques pour des quantités : Ces quantités sont représentées par des segments ordonnés selon une base. Si la base est un segment on obtient une ligne courbe (en général), si la base est une surface on obtient une surface courbe dans l'espace et si la base est une corps solide... on obtient rien parce qu'on n'a plus de liberté: ce qui manque c'est la quatrième dimension.

Dans *L'Ars magna* de CARDAN (1545) on lit[1] :

« *For as* positio *[the first power] refers to a line,* quadratum *[the square] to a surface, and* cubum *[the cube] to a solid body, it would be very follish for us to go beyond this point. Nature does not permit this.*" (p. 9)

[1] Comme la puissance un renvoie à une ligne, le carré à une surface et le cube à un corps solide, il serait très déraisonnable pour nous d'aller au-delà. La nature ne le permet pas.

Et D'ALEMBERT écrit dans l'Encyclopédie (article **dimension**): « Au reste, il ne peut y avoir proprement que des quantités de trois dimensions ; car passé le solide, on n'en peut concevoir d'autres.
J'ai dit plus haut qu'il n'était pas possible de concevoir plus de trois dimensions. Un homme d'esprit de ma connaissance croit qu'on pourrait cependant regarder la durée une quatrième dimension, et que le produit du temps, par la solidité, serait en quelque manière un produit de quatre dimensions, cette idée peut être contesté, mais elle a, ce me semble, quelque mérite, quand ce ne serait que celui de la nouveauté. »

L'espace mathématique était limité par l'espace de l'expérience – le dernier étant tridimensionnel le premier doit être tridimensionnel aussi. On peut dire que cette limitation était fondée dans l'intuition – même dans les mathématiques rien était admis sans une interprétation intuitive! Il n'y avait qu'un seul espace – un substratum commun de l'expérience physique, des mathématiques, des arts etc.

Un des premiers qui a parlé d'une quatrième dimension était Thomas MORE (1614-1687), un penseur mystique *scot.* Dans son livre *The Immortality of the Soul* (1659) il décrit des esprits qui sont situés dans une quatrième dimension. Mais ses idées vagues sont passées sous silence. Peut-être le premier à parler d'une manière scientifique des espaces multidimensionnels était-il I. KANT. Dans sa dissertation *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*[2] (1747) il discute une science des espaces de tous dimensions. C'était une science théorique qui n'a rien à faire avec l'espace réel ; aussi pour le jeune KANT le dernier était-il tri-dimensionnel.

„Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumformen wäre ohnfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte... Wenn es möglich ist, dass es Ausdehnungen von anderer Abmessung gebe, so ist es auch sehr wahrscheinlich, dass sie Gott irgendwo angebracht hat." (Jammer, 176)[3]

Vers la fin du XVIII^e siècle, par exemple chez LAGRANGE, on prenait la coutume de considérer le temps comme une quatrième dimension dans les contextes de la mécanique. C'était une manière de décrire les choses sans un contenu intuitif – donc sans une vraie existence. Même A. F. MÖBIUS, un des géomètres les plus avancés de son époque et disciple du grand GAUSS, écrit (*Barycentrischer Calcül* § 140, 1827) :
„Es scheint sonderbar, dass bei körperlichen Figuren Gleichheit und Aehnlichkeit ohne Coincidenz statt finden kann, da hingegen bei Figuren in Ebenen oder bei Systemen von Punkten in geraden Linien Gleichheit und Aehnlichkeit mit Coincidenz immer verbunden ist. Der Grund davon möchte darin zu suchen seyn, dass es über den körperlichen Raum von drei Dimensionen hinaus keinen andern, keinen von vier Dimensionen giebt. Gäbe es keinen körperlichen Raum, sondern wären alle räumlichen Verhältnisse in einer einzigen Ebene enthalten, so würde es eben so wenig möglich seyn, zwei sich gleiche und ähnliche Dreiecke, bei denen aber die Folge der sich entsprechenden Spitzen nach entgegengesetztem Sinne geht, zur Deckung zu bringen...

[2] *Réflexion sur l'estimation vraie de la force vivante*
[3] Une science de toutes ces formes possibles de l'espace serait sans doute la Géométrie supérieure, qui pourrait prendre en charge la compréhension la plus achevée... S'il est possible d'avoir des extensions d'une autre mesure, il est également très probable, que Dieu l'a quelque part utilisée.

Zur Coincidenz zweier sich gleicher und ähnlicher Systeme im Raume von drei Dimensionen: A, B, C, D, E, ... und A′, B′, C′, D′, E′, ... bei denen aber die Punkte D, E, ... und D′, E′, ... auf ungleichnamigen Seiten der Ebenen ABC und A′B′C′ liegen, würde also, der Analogie nach zu schließen, erforderlich seyn, dass man das eine System in einem Raume von vier Dimensionen eine halbe Umdrehung machen lassen könnte. Da aber ein solcher Raum nicht gedacht werden kann, so ist auch die Coincidenz in diesem Falle unmöglich…“ (184)[4]

La citation donnée est très intéressante :

1) MÖBIUS rebute même la possibilité de penser un espace à plus que trois dimensions! Son argument n'est pas limité à l'intuition ou à l'expérience.
2) Pour concevoir la situation dans un espace à quatre dimensions il se sert d'une analogie. Pour l'homme l'espace à quatre dimensions est comme l'espace tri-dimensionnel à des êtres plans.
3) En principe il invente ainsi les êtres plans plus tard appelés « êtres plans de HELMHOLTZ » et cités à plusieurs occasions.

En passant je veux noter que GAUSS lui-même a spéculé vers la fin de sa vie sur l'espace multi-dimensionnel et qu'il n'était pas si restrictif comme son disciple (lettre à GERLING du 08 04 1844 ; cf. JAMMER, 127).

Pour conclure, on peut constater que l'espace à quatre dimensions n'était pas du tout accepté même au début du XIX[e] siècle.

2. La période « purement analytique »

Vers le milieu du XIX[e] siècle plusieurs géomètres commençait à penser à une géométrie à plus de trois dimensions. Mais ils en étaient très prudents : On ne parlait pas de vrais êtres géométriques mais des « existences purement analytiques ». Pour en donner deux exemples je cite A. CAYLEY et A. L. CAUCHY :

"The general theorem,…, can be considered as the expression of an analytical fact, which ought equally well to hold in considering four coordinates instead of three. Here a geometrical interpretation holds which is applied to points in space. We can, in fact, without having recourse to any metaphysical notion in regard to the possibility of a space of four dimensions reason as follows… “ (SMITH, 528)[5]

Et CAUCHY écrit :

[4] Il semble étrange, que chez les solides, l'égalité et la similitude puissent se trouver sans coïncidence, alors qu'au contraire, pour les figures planes ou pour les systèmes de points alignés, l'égalité et la similitude sont toujours liées à la coïncidence. La raison, que j'aimerais ici chercher, est qu'au delà de l'espace des solides à trois dimensions il n' y a pas d'autre espace à quatre dimensions. Il n' y a pas d'autre espace de solides, sinon tous les rapports de l'espace pourrait être contenus dans un simple plan, ainsi serait-il aussi peu possible d'amener à la superposition deux triangles égaux et semblables, pour lesquels la suite des sommets se correspondant va dans le sens contraire…

Pour la coïncidence de deux systèmes égaux et semblables de l'espace à trois dimensions A, B, C, D , E… et A', B', C', D', E',… pour lesquels les points D, E ,… et D', E' ,… se situent sur des côtés de noms différents, des plans ABC et A'B'C' seraient ainsi nécessaires, pour conclure d'après l'analogie, qu'on puisse opérer un demi-tour d'un système dans un espace à quatre dimensions. Mais comme un tel espace est impensable, la coïncidence dans ce cas est également impossible.

[5] Le théorème général… peut être considéré comme l'expression d'un fait analytique, qu'on devrait tout aussi bien traiter en considérant quatre coordonnées au lieu de trois. Ici une interprétation géométrique considère ce qui est appliqué à des points de l'espace. Nous pouvons en fait sans avoir recours à aucune notion métaphysique au regard de la possibilité d'un espace à quatre dimensions raisonner comme suit…

"Conceive now that the number of variables $x, y, z\ldots$ becomes greater than three. Then such a system of values of $x, y, z\ldots$ will determine what we shall call an analytical point of which these variables are the coordinates, and to this point will correspond a certain value of each functions of $x, y, z\ldots$ Further, if the variables are subject to conditions represented by inequalities, the systems of values of $x, y, z\ldots$ for which these conditions are satisfied will correspond to analytical points, which together will form what we shall call an analytical locus." (SMITH, 531)[6]

Ces citations données datent de 1847

En 1854 RIEMANN parlait à Göttingen des variétés à n dimensions. C'était un événement extraordinaire qui n'était pas compris par le monde mathématique que 20 ans après. C'est vrai aussi des travaux de GRAßMANN (1847) et de SCHLÄFLI (1852) qui datent de cette période et qui parlent explicitement d'une géométrie à *n* dimensions. Tous ces travaux restaient sans grand influence à l'époque parce qu'ils étaient trop avancés pour la majorité de la communauté mathématique.

Les années 1860 étaient caractérisées par des discussions sur l'admission de nouvelles idées dans la géométrie. On en a parlé plus tard d'une révolution anti-Euclidienne. Cette révolution avait au moins deux aspects : d'une part la géométrie dite non-Euclidienne (c'est à dire la géométrie hyperbolique et la géométrie elliptique), d'autre part la géométrie à plus que trois dimensions. La discussion était très vive en Allemagne et en Angleterre ; elle fut initiée par la publication des lettres de GAUSS à SCHUMACHER dans lesquelles le premier parlait franchement de la géométrie hyperbolique. En France la situation restait plus calme. En 1875 C. Jordan publiait un long mémoire sur la géométrie à *n* dimensions. Là il écrivait dans l'introduction :

« On sait que la fusion opérée par DESCARTES entre l'algèbre et la géométrie ne s'est pas montrée moins féconde pour l'une de ces sciences que pour l'autre.

Car, si d'une part les géométries ont appris, au contexte de l'analyse, à donner à leurs recherches une généralité jusque-là inconnue, les analystes, de leur côté, ont trouvé un puisant secours dans les images de la géométrie, tant pour découvrir leurs théorèmes que pour les énoncer sous une forme simple et frappants.

Ce secours cesse lorsqu'on passe à la considération des fonctions de plus de trois variables, ainsi la théorie de ces fonctions est-elle relativement fort en retard. Le moment semble venu de combler cette lacune en généralisant les résultats déjà obtenus pour ce cas de trois variables. Un grand nombre de géométrie s'en sont déjà occupés d'un manière plus ou moins immédiate…

Bien que ces recherches soient purement algébrique, nous avons cru utile d'emprunter, ainsi que nos devanciers, quelques expressions à la géométrie. Ainsi nous considérons un point comme défini dans l'espace à *n* dimensions ; par des valeurs de *n* coordonnées… »

Dans le mémoire cité JORDAN traite la géométrie à *n* dimensions d'une manière purement analytique. Il donne des équations par exemple pour les hyperplans, les droites et les sphères dans l'espace à *n* dimensions ; de plus il traite les matrices qui

[6] Imaginons maintenant que le nombre des variables x, y, z,… soit plus grand que trois. Alors un tel système de valeurs de x, y, z,… déterminera analytiquement un point dont les variables sont les coordonnées et à un point correspondra certaines valeurs des variables x, y, z,…. De plus, si les variables sont sujettes à des conditions représentées par des inégalités, le système de valeurs de x, y, z,… pour lesquelles ces conditions sont satisfaites, correspond à des points analytiques, qui ensemble formeront ce que nous devons appeler une région analytique.

décrivent certaines isométries. Je pense que c'est l'endroit où il a introduit la forme qu'on appèle « forme de JORDAN ». Il est clair que pour JORDAN la géométrie à n dimensions est devenue une réalité ; mais c'est la réalité d'un langage. Les formules analytiques précèdent les êtres géométriques ; il n'y a pas de réalité indépendante pour les derniers.

Il semble que la communauté mathématique française était assez hostile en regard de la géométrie à n dimensions (et à la géométrie non-Euclidienne aussi). Même en 1895 le grand POINCARÉ a senti la nécessité de défendre la nouvelle géométrie. Dans l'introduction de son mémoire très important sur l'*analysis situs* il écrit :

« La géométrie à n dimensions a un objet réel ; personne n'en doute aujourd'hui.

Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier...

La géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe ; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres analogues et plus généraux. » (VI, 193)

Pour conclure on peut constater que depuis un certain moment la géométrie à n dimensions est considérée comme une vraie géométrie dont les objets possèdent une réalité. Cette réalité n'est pas épuisée par des formules ; c'est plus qu'une réalité analytique ou d'un langage. Je nomme la doctrine citée la « théorie linguistique des espaces multidimensionnels » (une citation très typique en est donnée en bas).

3. Peupler le nouveau monde : le problème des polytopes réguliers dans l'espace à quatre dimensions

Les êtres dans l'espace à quatre dimensions décrits par Jordan et d'autres étaient d'une nature assez simple ; ils sont des généralisations comme la sphère à trois dimensions :

$$S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

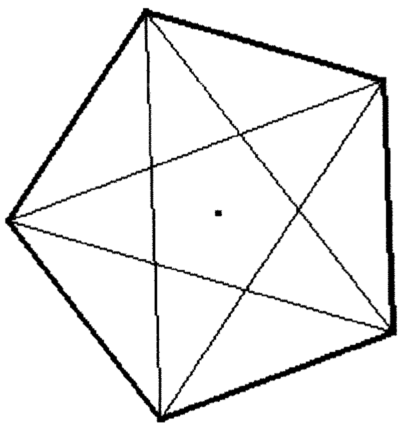
Ce qu'il manquait ici c'était de vrais êtres géométriques comme les corps réguliers c'est-à-dire des entités qui ne sont pas définies par de simples équations mais par une synthèse classique. C'était un grand succès de la géométrie nouvelle d'avoir construit de telles entités. De plus le résultat obtenu en 1880 par le mathématicien américain STRINGHAM – c'était peut le premier résultat important des mathématiques américaines après ceux des Mayas – était stupéfiant : dans l'espace à quatre dimensions il existe six polytopes réguliers par contre dans les espaces de dimensions plus élevées il n'y en a que trois ! Donc : où est allée l'analogie ?

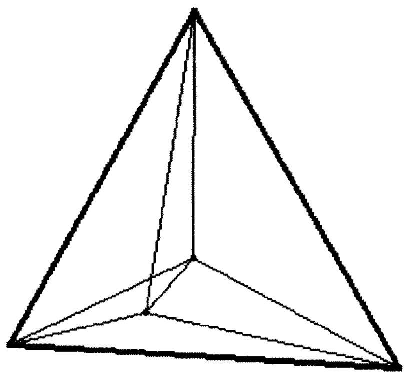
Avant d'entrer un peu, dans les détails du travail de STRINGHAM, je veux donner quelques informations sur les polytopes réguliers dans l'espace à quatre dimensions.

Le premier et le plus simple polytope régulier dans l'espace à quatre dimensions est l'analogue du tétraèdre – le simplex à trois dimensions au sens des topologies – appelé 4-simplex.

> *Regular Figures in* n-*dimensional Space.*
>
> By W. I. Stringham,
>
> *Fellow of the Johns Hopkins University.*
>
> A pencil of lines, diverging from a common vertex in n-dimensional space, forms the edges of an n-fold (short for n-dimensional) angle. There must be at least n of them, for otherwise they would lie in a space of less than n dimensions. If there be just n of them, combined two and two they form 2-fold face boundaries; three and three, they form 3-fold trihedral boundaries, and so on. So that the simplest n-fold angle is bounded by n edges, $\frac{n(n-1)}{2}$ faces, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ 3-folds, in fact, by $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ k-folds. Let such an angle be called *elementary*. Fig. 1 represents the symmetrical arrangement, in three-dimensional perspective, of the four trihedral boundaries of an elementary 4-fold angle. When put into space of four dimensions, the faces of the tetrahedra, which lie adjacent to the common vertex, are to be brought into coincidence two and two; the edges will then fall together three and three.

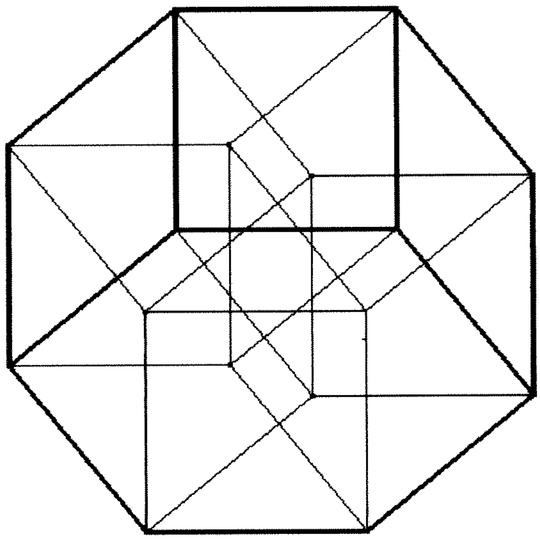
Le point de départ pour sa construction est un tétraèdre. Nous cherchons dans l'espace à quatre dimensions un point qui possède la même distance à tous les sommets du tétraèdre. On joignant ce point avec les autres sommets on obtient un polytope avec 5 sommets, 10 côtés, 10 faces et 5 cases. Les faces sont des triangles isocèles, les cases ou cellules sont des tétraèdres. Voilà une projection plane de ce polytope :





Évidemment on peut généraliser la construction donnée pour un nombre quelconque de dimensions.

L'hypercube est un autre polytope régulier. On peut le construire en déplacent orthogonalement un cube ordinaire dans l'espace à quatre dimensions. On obtient un polytope à 16 sommets, 32 côtés, 24 faces et 8 cases. Les faces sont des carrés, les cases sont des cubes. Voila une projection de ce polytope :

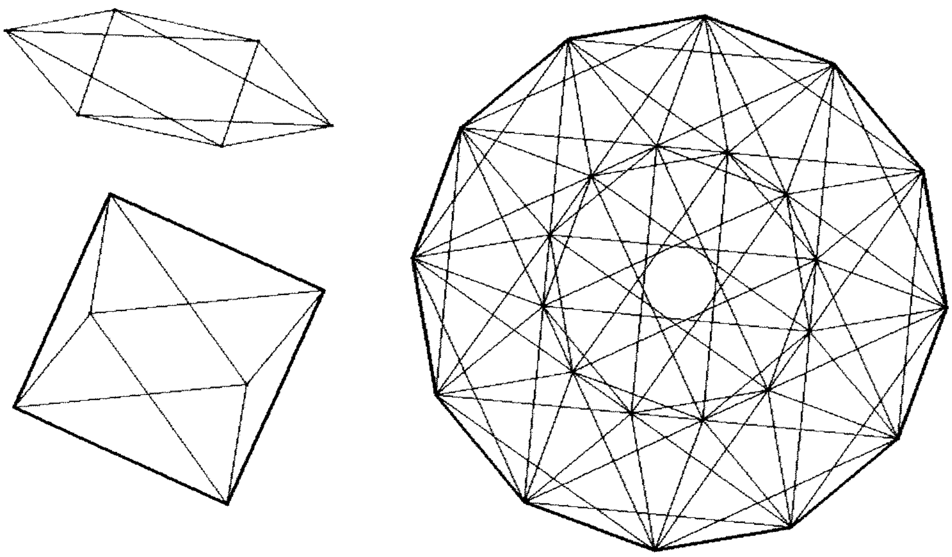


Il n'est pas difficile à donner les coordonnées des sommets de l'hypercube : ce sont les points $(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1)$.

Le troisième polytope est l'analogue de l'octaèdre appelé la bi-pyramide. L'accès le plus simple en est par les sommets. Sur chaque axe orthogonal du repère de l'espace à quatre dimensions on choisit deux points équidistants de l'origine ; par exemple $(\pm1,0,0,0)$, $(0, \pm1,0,0)$, $(0,0, \pm1,0)$, $(0,0,0, \pm1)$.

Ces points sont les 8 sommets du polytope à construire. Alors on construit les côtés, les faces et les cases. On obtient un polytope avec 8 sommets, 24 côtés, 32 faces et 16 cases. Les faces sont des triangles isocèles, les cases des tétraèdres.

Voilà une projection de ce polytope



Il est assez clair que les constructions données sont à généraliser pour un nombre quelconque de dimensions. Par conséquent on peut constater que dans les espaces à quatre ou plus dimensions il existe toujours au moins trois polytopes réguliers.

Pour trouver le nombre exact des polytopes réguliers dans l'espace à quatre dimensions il nous manque un critère comparable au critère d'EUCLIDE. Avec le dernier celui a démontré qu'il n'y a que cinq corps réguliers dans l'espace ordinaire – ce sont les corps dits de PLATON. Le critère d'EUCLIDE est le suivant :

Si on veut former un angle spatial ou – autrement dit un sommet – la somme des angles planes autour d'un sommet doit être inférieur à 360°.

La démonstration du critère est simple : si la somme est égale à 360° on obtient un plan et le sommet disparaît dans ce plan.

Un critère analogue est valable dans l'espace à quatre dimensions : Si on prend un côté la somme des angles diédrales des cases qui se rencontrent à ce côté ne doit excéder 360 °. Si on veut former un polytope régulier ça mène aux possibilités suivantes :

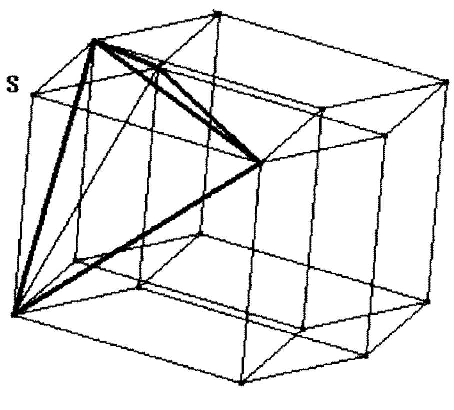
Trois tétraèdres, quatre tétraèdres, cinq tétraèdres, trois cubes, trois octaèdres, trois dodécaèdres.

(Les angles sont comme suit : tétraèdre 70°31' ; cube 90° ; octaèdre 109°28' ; dodécaèdre 116°34' ; icosaèdre 138°11').

Par conséquent on gagne l'information qu'il y a au maximum six polytopes réguliers dans l'espace à quatre dimensions. Mais on ne sait rien sur ces polytopes. Donc il faut procéder d'une autre manière.

Le point de départ de Stringham est la formule dite d'Euler. Il démontre la généralisation de cette formule à *n* dimensions – c'était la première démonstration publiée pour la généralisation (Schläfli a considéré et démontré la formule générale 30 ans avant sans publier ses recherches). La méthode de Stringahm était de projeter le polytope sur une de ses cases et d'utiliser une induction complète. Stringham considérait aussi ce qu'il appelait un angle régulier c'est-à-dire un angle formé par des parties de figures régulières dans toutes les dimensions. Pour faciliter les choses ici, nous considérons seulement l'espace à quatre dimensions.

L'idée – clef de l'analyse de STRINGHAM – est la suivante : si on décrit une sphère avec le rayon unité autour le sommet S d'un angle régulier de l'espace à quatre dimensions cette sphère coupe la figure dans un polyèdre régulier. La dimension du polytope est donc baissée par une unité. Par conséquent on a trouvé un critère : pour qu'un angle soit régulier le nombre des côtés qui se rencontrent dans le sommet de cet angle doit être égal au nombre des sommets d'un polyèdre régulier. Le polyèdre qu'on obtient par l'intersection est appelé « frame » par STRINGHAM. Si le sommet S est un sommet d'un polytope régulier, il est nécessaire que tous les sommets des angles réguliers qu'on construit sur les côtés du « frame » soient identiques avec S.



Autrement dit : si on commence par un polyèdre régulier comme « frame » (en allemand : figure de sommet) on peut se demander : Comment peut-on former un angle régulier qui possède le polyèdre donné comme « frame » ? Le sommet de cet angle est alors un composant du sommet S d'un polytope régulier. On forme un tel angle en joignant des polyèdres réguliers avec le « frame ». Ca mène aux possibilités suivantes :

1. 4 tétraèdres sont liés avec un tétraèdre ;
2. 4 cubes sont liés avec un tétraèdre,
3. 4 dodécaèdres sont liés avec un tétraèdre,
4. 8 tétraèdres sont liés avec un octaèdre ;
5. 8 cubes avec un octaèdre ;
6. 8 dodécaèdres avec un octaèdre ;
7. 20 tétraèdres avec un icosaèdre ;
8. 20 cubes avec un icosaèdre ;
9. 20 dodécaèdres avec un icosaèdre ;
10. 6 octaèdres avec un cube ;
11. 12 icosaèdres avec un dodécaèdre.

Le nombre des cas à considérer se réduit par le fait qu'il y a des cas de dualité : n^{os} 2 et 4, n^{os} 3 et 7, n^{os} 6 et 8 sont réciproques. Les polytopes des cas n^{os} 1, 2 et 4 ont déjà été construits en haut. Ce sont le 4-simplex, l'hypercube et la bi-pyramide.

Pour éclaircir les autres cas nous étudions le premier cas un peu plus de près. Ici on veut lier un tétraèdre comme « frame » avec 4 tétraèdres afin de former un sommet. Le sommet est un des sommets des tétraèdres liés, par exemple le sommet S. Les côtés avec l'origine S sont des côtés de l'angle régulier ; ils doivent passer par trois sommets du tétraèdre qui sert comme « frame ». On obtient quatre tétraèdres (un pour chaque face du « frame ») qu'il faut coller face à face pour former le sommet S. En somme, on obtient le 4-simplex déjà construit en haut.

Évidemment on obtient ainsi un nouveau critère :

> Pour qu'un sommet S d'un polytope régulier soit engendré par le processus décrit en haut il faut que le nombre des polyèdres qui se rencontrent dans ce sommet S soit inférieur au nombre des polyèdres de ce type qui remplissent complètement l'espace autour d'un point.

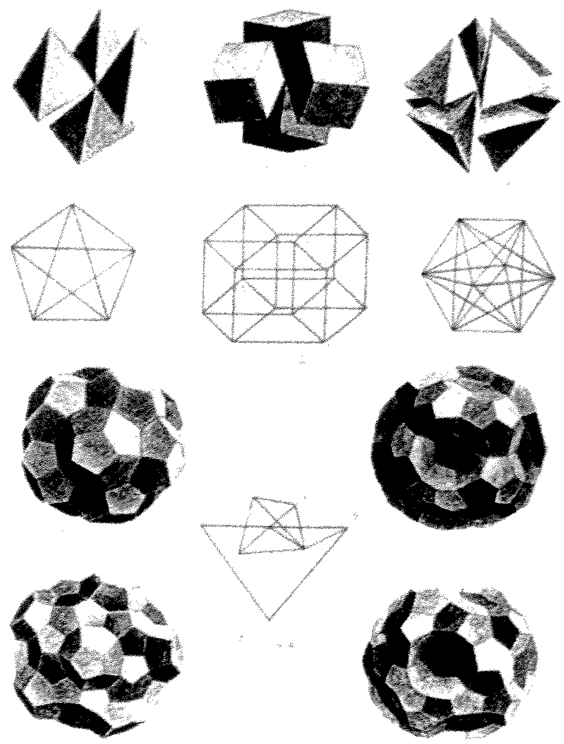
Si le critère n'est pas valable on n'obtient pas de sommet. Un cas particulier est celui dans lequel l'espace autour d'un point est exactement rempli par les polyèdres. C'est vrai seulement dans le cas n^{o} 5. Le résultat n'en est pas un polytope régulier mais une dissection de l'espace ordinaire en cubes (« Raumteilung »). STRINGHAM le nomme le cas infini.

Pour appliquer son critère STRINGHAM part du polyèdre, qui forme le « frame ». Sans restriction de la généralité de l'argument on peut supposer que le polyèdre soit inscrit dans une sphère d'unité. Alors on peut calculer la longueur des côtés du polyèdre « frame ».

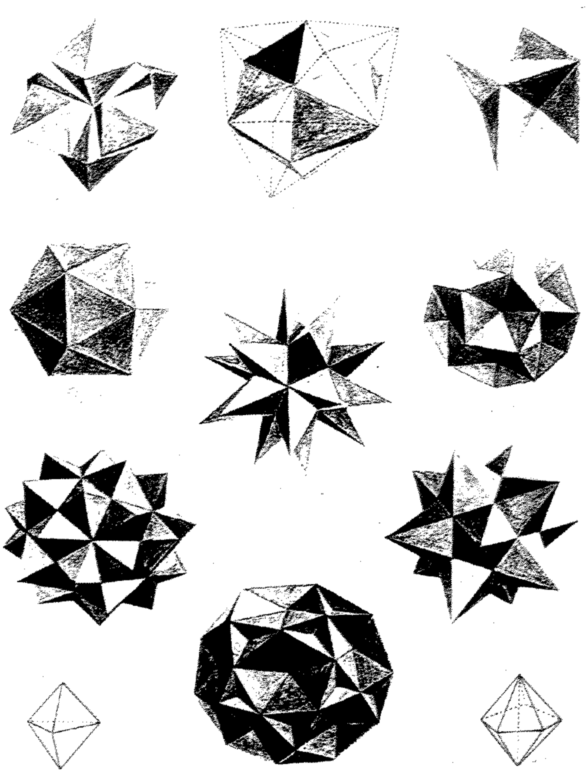
Tétraèdre	1,632994
Cube	1,154700
Octaèdre	1,141214
Dodécaèdre	0,713644
Icosaèdre	1,051462

Maintenant on va construire des angles réguliers tridimensionnels c'est à dire des parties de polyèdres réguliers sur les faces d'un « frame » selon la liste donnée en haut. Prenez comme STRINGHAM le cas n° 6 : On choisit un triangle de l'octaèdre et un sommet S d'un dodécaèdre. Autour de S il y a trois sommets voisins et équidistants de S. Si on a bien choisi cette distance on peut identifier les trois sommets du dodécaèdre avec les trois sommets du triangle donné de l'octaèdre. Par conséquent on peut calculer la longueur de la côté du dodécaèdre et on obtient la valeur l = 0,874048. Si nous orientons le dodécaèdre de la manière que le sommet S se trouve à l'intérieur de la sphère circonscrite autour de l'octaèdre la valeur trouvée nous apprend que S n'est pas identique avec le milieu de cette sphère, parce que la longueur l est inférieure à 1. Par conséquent les huit dodécaèdres liés avec le tétraèdre ne donnent pas un sommet d'un polytope régulier.

L'analyse de STRINGHAM montre qu'il n'y a que les cas n^os^ 3, 7 [le cas dual de 3] et 10 fournissant un sommet d'un polytope régulier : dans ces cas la longueur calculée l est plus grand que l'unité. Pour terminer sa démonstration STRINGHAM construit d'une manière explicite ces polytopes. Prenons le cas n° 10 dans lequel on forme un sommet S par six octaèdres liés avec les faces d'un cube. STRINGHAM nous propose le tableau suivant :



Autour de l'angle régulier formé ainsi on colle 12 octaèdres d'une manière symétrique. La constellation ainsi construite est montrée dans le tableau suivant :



La constellation est alors invertie (l'intérieur devient l'extérieur et vice versa) dans l'espace à quatre dimensions pour qu'on comprenne mieux que sa surface peut se fermer par l'addition de six octaèdres. Par conséquent on obtient un polytope régulier composé de 24 octaèdres avec 24 sommets, 96 faces triangulaires et 96 côtés. Donc la caractéristique d'EULER de ce polytope est zéro – ce qui confirme encore une fois son existence.

Les deux autres polytopes sont plus compliqués. L'un est composé de 120 dodécaèdres avec 600 sommets, 1200 côtés et 720 faces, l'autre par 600 tétraèdres (120 sommets, 720 côtés et 1200 faces).

Après ce travail considérable STRINGHAM applique ses critères aussi aux espaces à plus de quatre dimensions. Il démontre qu'il n'y a que trois polytopes réguliers dans ces espaces : les simplexes, les hypercubes et les bi-pyramides. En somme on trouve le tableau suivant :

Nombre de dimensions	Nombre de figues régulières
2	infini
3	5
4	6
5	3

À la recherche de l'analogie perdue… Les polytopes réguliers fournissent un bel exemple des objets exceptionnels – un aspect des mathématiques qui passe souvent sous silence dans l'histoire et dans la philosophie de cette discipline. J. STILLWELL a consacré un bel article à ce thème. Il y parle entre autres des polytopes réguliers, des groupes de Lie simples et des groupes finis simples dits spontanés.

4. Quelques remarques sur le développement postérieur

Il est remarquable qu'on trouve autour de 1880 beaucoup de travaux sur les polytopes réguliers en particulier en Allemagne. Ce n'était pas les plus grands des mathématiciens qui s'occupaient de cette question ; en rencontre des noms comme PUCHTA, CÉSARÒ, CURJEL, GOSSET, RUDEL, HOPPE, DURÈGE, SCHLEGEL, FORCHHAMMER et d'autres. Leurs travaux sont très concrets et souvent ingénieux du point de vue géométrique mais sans grande perspective.

Par contre le jeune POINCARÉ a bien compris qu'il y a là-dedans une perspective. C'est démontré par une lettre qu'il avait écrite à JORDAN en 1880. Dans cette lettre il posait la question si quelqu'un avait déterminé les polytopes réguliers par leurs groupes de symétrie. JORDAN lui-même avait ainsi déterminé les corps Platoniciens dans son fameux mémoire sur les groupes de mouvement (1875) ; ce sont les sous-groupes finis de SO(3). Mais en 1880 il répondait à POINCARÉ qu'il ne connaît pas la réponse à la question analogue pour SO(4). Cette réponse fut trouvée par GOURSAT en 1885 dans un grand mémoire à l'aide d'un homomorphisme $SO(3)\times SO(3)\rightarrow SO(4)$. Telle est l'histoire purement mathématique de notre sujet.

Mais la quatrième dimension est aussi un sujet extraordinaire au point de vue de l'histoire de la science en général parce que les esprits de Thomas MORE sont revenus dans les années 1870 et 1880 ; ils sont même restés jusqu'à nos jours. Ces années étaient une période féconde pour les idées spiritistes – en particulier en Angleterre et en Allemagne. On estime qu'il y avait entre 8 et 11 millions de partisans de la doctrine spiritiste à cette époque là : le mouvement du spiritisme disposait d'environ 25 journaux (cf. CRANZ 1890, 37). L'idée en était d'expliquer des phénomènes supra-naturels (par exemple la résolution des nœuds, la disparition des choses, des tables qui se meuvent [dans l'article de CRANZ il y a plus qu'une page sur les phénomènes spiritistes, pp. 37/38]) par la quatrième dimension, „in dem *die Geisterwelt in die Körperwelt eingreift.*“ (CRANZ 1890, 43). L'étendue pour nous invisible des objets dans la quatrième dimension était même proposée comme explication de la doctrine kantienne de la « chose en soi ». C'est vraiment rare dans l'histoire des mathématiques qu'une théorie tellement abstraite ait reçu une publicité tellement vaste. Je n'ai pas le temps aujourd'hui d'entrer dans les détails de cette histoire. Je veux ici seulement indiquer qu'une réaction était de se retirer encore une fois sur la position nommée purement analytique en haut :

„Die sogenannten mehrdimensionalen Räume sind nichts weiter als Gedankendinge, analytische Fiktionen, welche dazu dienen, Sätze der Analysis oder Geometrie allgemein auszusprechen, mehrere Sätze in einen einzigen zusammenzufassen, Ausnahmen zu vermeiden. Alle übrigen Anwendungen der sogenannten vierten Dimension sind gegenstandslos, weil auf Trugschlüssen beruhend.“ (CRANZ 1890, 49)[7].

Une discussion détaillée du point de vue de l'anthroposophie est fournie par R. STEINER ; elle est documentée en Steiner 1995 et dans les *Beiträge* cités en bas.

---

[7] Les espaces appelés multidimensionnels ne sont rien de plus que des objets de pensée, des fictions analytiques, lesquelles servent exprès à formuler de manière générale des théorèmes d'analyse ou de géométrie, pour abréger plusieurs théorèmes en un seul, et pour éviter des exceptions. Toutes les autres applications de la dénommée quatrième dimension sont sans intérêt, parce qu'elles s'appuient sur de fausses conclusions.

F. KLEIN avait écrit un article au début des années 1870 dans lequel il a expliqué qu'il n'y a plus de nœuds dans l'espace à quatre dimensions. Par conséquent la résolution des nœuds était expliquée d'un point de vue mathématique. De plus il est clair qu'un objet dans une boîte peut être libéré de cette boîte s'il y a une quatrième dimension. Donc les spéculations spiritistes ont un noyau mathématique raisonnable. Pour se défendre contre ces spéculations une possibilité est la suivante : on distingue les espaces mathématiques de l'espace physique et peut-être d'autres espaces (par exemple l'espace de la vision [analysé par Helmholtz à cette époque là]), de l'espace de l'intuition et de suite. Les espaces mathématiques fournissent des modèles parmi lesquels ont va choisir un candidat pour chaque espace concret. C'est un point de vue tout à fait nouveau qui est apparu dans la deuxième moitié du XIX^{e} siècle.

5. L'importance des objets concrets pour les mathématiques

La philosophie moderne des mathématiques est fortement influencée par le structuralisme de BOURBAKI et d'autres. Ce structuralisme prône la priorité des structures sur les entités concrètes ; les dernières sont souvent considérées comme des « exemples », c'est-à-dire comme des objets qui illustrent une théorie générale et préexistante Pour en donner un exemple simple : Après avoir défini la notion de « polyèdre régulier » on cite le cube comme exemple. Je pense qu'il est clair que la manière décrite renverse la marche historique : la définition est abstraite des entités – elle est à posteriori. Mais ce problème qu'on peut nommer un problème didactique n'est pas le seul échec de la théorie structuraliste. Les objets concrets sont souvent d'une grande importance parce que sans objets concrets une théorie (ou une structure) est vide. Autrement dit : ils sont la raison d'être de la structure ; sans exemples la structure n'est pas justifiée. Si on n'en avait pas découvert des objets intéressants l'espace à quatre dimensions sera sans aucun intérêt – une abstraction vide basé sur la pensée par analogie (ici une sorte de *horror vacui* se fait voir). Un cas tout à fait comparable est fourni par la topologie tridimensionnelle qui était pris à sérieux seulement après la construction des variétés intéressantes – un travail fait par W. DYCK et H. POINCARÉ. Mais il y a au moins un troisième aspect selon lequel les objets concrets sont importants : C'est le fait que beaucoup de théories se développent par une interaction entre le général et le concret. C'est clair aussi dans notre exemple des polytopes réguliers : trois espèces sont construites par voie d'analogie – c'est-à-dire par le général – mais les trois autres ne sont trouvées que par une recherche très concrète. Le point de départ de ce processus était assez général, mais le processus lui-même ne dépend pas de ce point de départ. L'aspect décrit du développement des mathématiques fut analysé par LAKATOS ; il me semble que son quasi-empirisme est une doctrine très importante au niveau de la philosophie des mathématiques. Il est vrai que l'exemple choisi par Lakatos – le théorème d'EULER-DESCARTES – n'est pas tout à fait typique de la démarche des mathématiques. Mais avant tout, c'est un point de départ à partir duquel on peut avancer.

Avec ses remarques concernant l'importance du concret pour les mathématiques je veux terminer mon discours. Je pense que ses remarques sont une illustration aussi de l'importance d'une perspective sur l'enseignement des mathématiques – un travail souvent dur mais de temps en temps aussi très satisfaisant que Jean Pierre a fait avec excellence depuis 30 ans – . Moi j'espère qu'il va consacrer à l'avenir, une partie de ses connaissances et de son activité, à l'histoire des mathématiques. Ce sera – j'en suis sûr – d'un grand profit pour notre discipline en général et pour moi en particulier.

For hard, hard, hard is it only not to tumble,
So fantasical is the dainty metre.[8]

(Phrase qui clôt le mémoire de STRINGHAM)

Bibliographie

COXETER H S M : *Regular Polytopes* (New York: Dover, 1973).

CRANZ C : *Gemeinverständliches über die sogenannte vierte Dimension* (Hamburg: Verlagsanstalt und Druckerei AG, 1890).

GEIDER S : *Anschauliche Darstellung der vierdimensionalen Polytope* (Wissenschaftliche Prüfungsarbeit an der Universität Koblenz – Landau, 26. Mai 1998).

HENDERSON L Dalrymple : *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art* (Princeton University Press: Princeton N.Y., 1983).

JAMMER M : *On Concepts of Space* (New York: Dover, 1993).

JORDAN C : *Essai sur la géométrie à n dimensions.* ***in*** Œuvres. Tome III (Paris : Gauthiers-Villars, 1962), pp.79-149.

POINCARÉ H : *Œuvres.* Tome VI (Paris : Gauthiers-Villars, 1952).

Rudolf STEINER und der mehrdimensionale Raum (Beiträge zur Rudolf Steiner Gesamtausgabe N° 114\115 Dornach, 1995).

SCHOUTE P H : *Mehrdimensionale Geometrie.* II. Teil: Die Polytope (Leipzig: Göschen, 1905).

SMITH E D : *A Source Book in Mathematics* (New York: Dover, 1959).

STEINER R : *Die vierte Dimension. Mathematik und Wirklichkeit.* Hg. Von R. Ziegler (Dornach: Steiner Verlag, 1995).

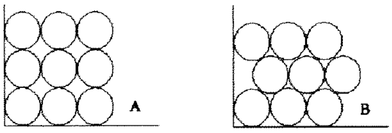
STILLWELL J : *Exceptional objects* (American Mathematical Monthly 105, 1998, pp.850-858).

STRINGHAM W I : *Regular Figures in n-dimensional space* (American Journal of Mathematics 3, 1880, pp.1-14 & 2 plates).

[8] Mot à mot : « Plus dur sera de simplement ne pas tomber, plus fantastique sera la difficile mesure. »

RALLYE MATHÉMATIQUE DE PREMIÈRE

SUJET 1



Émile le pâtissier possède des plaques de cuisson carrées de côté un multiple de 10 centimètres. Il peut disposer les gâteaux ronds de 10 centimètres de diamètre qu'il doit faire cuire de deux manières A ou B comme indiqué sur la figure. Déterminer pour chaque taille de plaque la disposition qui permet de cuire le plus grand nombre de gâteaux en une fournée.

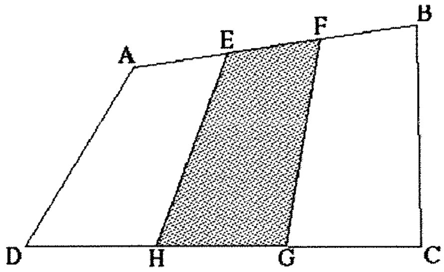
SUJET 2

	0	1	2	3	4	5	...	1997
0	1	2	3	4	5	6	...	1998
1							...	
2							...	
3							...	$f(3, 1997)$

On dispose d'un tableau ayant 4 lignes et 1998 colonnes. À l'intersection de la ligne m et de la colonne n se trouve l'élément noté $f(m, n)$. On donne, pour tout entier n compris entre 0 et 1997 la valeur $f(0, n) = n + 1$, ce qui permet donc de remplir la première ligne du tableau comme indiqué sur la figure.
Par ailleurs, on sait que pour tout entier m compris entre 1 et 3 et pour tout entier n compris entre 1 et 1997, on a les égalités suivantes :
$f(m, 0) = f(m - 1, 1)$ et $f(m, n) = f(m - 1, f(m, n - 1))$. Quel nombre se trouve à l'intersection de la dernière ligne et de la dernière colonne ?

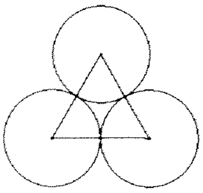
SUJET 3

On considère un quadrilatère convexe quelconque $ABCD$ dans le plan (voir figure). On découpe les segments $[AB]$ et $[CD]$ en trois parties égales, définissant les points E, F, G, H comme indiqué sur la figure.
Montrer que l'aire du quadrilatère central est le tiers de celle du quadrilatère total $ABCD$.



SUJET 1

Réponse : Pour une plaque ayant **jusqu'à 70 cm** de côté, la disposition **A est la plus avantageuse**. À partir de 80 cm, c'est la disposition B qui est préférable.



Solution : Soit n le côté de la plaque mesuré en décimètres (diamètre d'un gâteau : 1 décimètre). Dans la disposition A où les centres des cercles sont aux sommets d'un réseau à mailles carrées, on place n^2 gâteaux.
Dans la disposition B, les centres sont aux sommets d'un réseau à mailles triangulaires (pavage du plan par des triangles équilatéraux). Le côté d'un triangle élémentaire est égal au diamètre des cercles; sa hauteur en cm est donc $5\sqrt{3}$.
Pour la hauteur occupée par x rangées de gâteaux, on obtient donc $10 + 5(x - 1)\sqrt{3}$.
La première rangée comporte n gâteaux. Pour tenir dans la plaque, la deuxième rangée (ainsi que toutes les rangées d'ordre pair) doit comporter un gâteau de moins que la

première. Le nombre total de gâteaux obtenu est ainsi égal à $nx - \frac{x}{2}$ si x est pair, ou à $nx - \frac{x-1}{2}$ si x est impair.

Si $x > n$ (c'est à dire x au moins égal à n+1), ces valeurs sont supérieures à n^2 et cette deuxième disposition est plus avantageuse ; si $x = n$, la première disposition est évidemment plus avantageuse. Il reste à déterminer pour quelles largeurs de plaque, il est possible de placer un nombre de rangées $x = (n+1)$. Ceci conduit à déterminer les valeurs de n pour lesquelles $10n > 10+5n\sqrt{3}$, soit $n > \frac{2}{2-\sqrt{3}}$.

Ainsi, puisque n doit être entier, on obtient n supérieur ou égal à 8.

SUJET 2

Réponse : La troisième ligne du tableau constitue une suite dite arithmético-géométrique, qui conduit pour le terme demandé à la valeur **f(3, 1997) = $2^{2000} - 3$.**

Solution : À partir de f(0, n) = n + 1, on obtient f(1, n) = f(0, f(1,n–1)) = f(1,n–1)+ 1. Comme f(1, 0) = f(0, 1) = 2, il en résulte f(1, n) = n + 2.

Remarque : Les égalités proposées dans l'énoncé doivent être étendues à des valeurs quelconques de n, sans limitation à 1997. Sinon, on ne peut rien dire de f(1, 1997) = f(0, f(1, 1996)) = f(0, 1998). Nous faisons cette extension, ici ainsi que pour la suite du problème.

Par suite, f(2, n) = f(1, f(2, n–1)) = f(2, n–1) + 2.Puisque f(2, 0) = f(1, 1) = 3, il en résulte f(2, n) = 2n + 3. Enfin, f(3, n) = f(2, f(3, n–1)) = 2f(3, n–1) + 3.

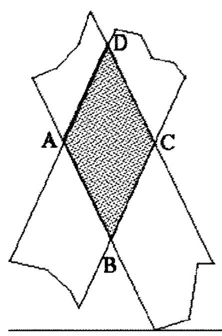
Et f(3, 0) = f(2, 1) = 5.

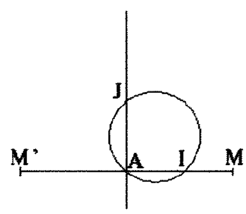
Pour expliciter f(3, n) en fonction de n, posons g(n) = f(3, n) + 3 (cette transformation permet de ramener les suites arithmético-géométriques à des suites géométriques). En remplaçant f(3, n) et f(3, n–1) respectivement par g(n) – 3 et g(n–1) – 3 dans l'égalité de récurrence ci-dessus, on obtient en effet g(n) – 3 = 2(g(n–1) – 3) + 3, d'où

g(n) = 2g(n–1). Donc g(n) est une suite géométrique de raison 2, ayant pour premier terme g(0) = 8 = 2^3. Par conséquent, g(n) = 2^{n+3} et en particulier g(1997) = 2^{2000}. Finalement f(3, 1997) = $2^{2000} - 3$.

SUJET 3

Solution : La solution s'appuie sur une triangulation. Plusieurs égalités d'aires de triangles peuvent être mises en évidence sur la figure, qui renvoient au classique résultat général suivant :





*<u>Théorème général</u> – Soit S un point et **d** une droite ne passant pas par S. Tous les triangles du type SXY, où X et Y sont deux points de la droite **d** tels que le segment XY ait une longueur donnée, ont la même aire.*

Par exemple, on a l'égalité d'aires :

$\mathscr{A}$(EFG) = $\mathscr{A}$(FBG), puisque les segments EF et FB sont de même longueur.

De même, $\mathscr{A}$(EGH) = $\mathscr{A}$(EHD).

Comme le quadrilatère EFGH est convexe puisque ABCD est convexe, son aire est la somme des aires des triangles EFG et EGH. D'où $\mathcal{A}$(EFGH) = $\mathcal{A}$(EFG) + $\mathcal{A}$(EGH) et donc :

$$2\mathcal{A}(\text{EFGH}) = \mathcal{A}(\text{EFG}) + \mathcal{A}(\text{FBG}) + \mathcal{A}(\text{EGH}) + \mathcal{A}(\text{EHD}) = \mathcal{A}(\text{EBGD}).$$

Or $\mathcal{A}$(ABCD) = $\mathcal{A}$(EBGD) + $\mathcal{A}$(AED) + $\mathcal{A}$(BCG). Mais, en se référant au théorème d'égalités d'aires de triangles, on peut écrire :

$$3\mathcal{A}(\text{AED}) = \mathcal{A}(\text{ABD}),\ 3\mathcal{A}(\text{BCG}) = \mathcal{A}(\text{BCD}).$$

On en déduit :

$$3\mathcal{A}(\text{EBGD}) = 3\mathcal{A}(\text{ABCD}) - 3\mathcal{A}(\text{AED}) - 3\mathcal{A}(\text{BCG}) = 2\mathcal{A}(\text{ABCD}).$$

Mais on a vu que $\mathcal{A}$(EBGD) = 2$\mathcal{A}$(EFGH), ce qui entraîne alors l'égalité demandée :

$$\mathbf{3\mathcal{A}(EFGH) = \mathcal{A}(ABCD)}.$$

RALLYE MATHÉMATIQUE DE TERMINALE

SUJET 1

Grand organisateur à Lembach des festivités liées à l'année mondiale des mathématiques, Émile le Bon est chargé de placer le mât du drapeau du Rallye mathématique d'Alsace au centre de la place circulaire de son village. Il ne dispose pour cela que d'une règle de longueur infinie non graduée à deux côtés parallèles et d'un crayon. Comment doit-il procéder ?

SUJET 2

Montrer que l'on peut trouver un entier de 2000 chiffres divisible par 2^{2000} qui s'écrive seulement avec les chiffres 1 et 2.

SUJET 3

On se donne un entier naturel non nul n. On choisit $n + 1$ nombres entiers tous distincts entre 1 et $2n$. Montrer que parmi eux, il en existe toujours deux dont le quotient est une puissance de deux.

SUJET 1

Solution : Un placement de règle permet de tracer deux parallèles dont la distance est la largeur de la règle. Il est donc facile d'utiliser la règle pour tracer des parallèles équidistantes. De plus, l'intersection de deux bandes de même largeur est un losange ABCD, dont on sait que les diagonales AC et BD sont perpendiculaires.
Ces considérations préliminaires conduisent facilement à une solution. Étant donné un point A sur le cercle, on trace une sécante quelconque AI au cercle. On peut déterminer des points M et M' équidistants de A sur cette sécante, en la coupant par des parallèles équidistantes. En plaçant alors la règle dans les deux positions telles que l'un de ses bords passe par M et l'autre par M', on obtient un losange dont MM' est une diagonale. La seconde diagonale de ce losange est donc perpendiculaire à AI ; elle recoupe ainsi le cercle en un point J qui est diamétralement opposé à I. Autrement dit, on a construit un diamètre IJ du cercle.

Deux telles constructions de diamètres permettent à Émile de crier victoire au centre du cercle.

Remarque : On ne pouvait pas retenir l'idée de tracer la médiatrice de AI en considérant un losange de diagonale AI, à cause du fait que la règle peut avoir une largeur supérieure au diamètre du cercle.

SUJET 2

Réponse : L'idée est de procéder par récurrence, même si on se « contente » d'aller jusqu'à 2000 et non pas jusqu'à l'infini. On peut commencer par 2, qui a un chiffre et est divisible par $2^1 = 2$, ou par 12, qui a deux chiffres et est divisible par $2^2=4$.

Solution : Supposons (hypothèse de récurrence) que l'on connaisse un nombre A de n chiffres, qui soit divisible par 2^n et dont tout chiffre soit égal soit à 1 soit à 2. Si le nombre A est un multiple pair de 2^n, c'est à dire si $A = 2p \times 2^n$, on obtiendra un multiple de 2^{n+1} ayant (n+1) chiffres en prenant

$A + 2\times10^n$. En effet, $2\times10^n + A = 2^{n+1}\times5^n + p\times2^{n+1}\times5^n = 2^{n+1}\times5^n\times(1 + p)$.

Si A est un multiple impair de 2^n, c'est à dire si $A = (2p+1)\times2^n$, on considérera $A + 10^n$, ce qui revient à placer un 1 devant l'écriture chiffrée de A. En effet :

$$10^n + A = 2^n \times 5^n + (2p+1)\times2^n = (5^n + 2p + 1)\times2^n.$$

Or 5^n est un nombre impair, donc $(5^n + 2p + 1)$ est un nombre pair. Ainsi, il est possible d'extraire de la parenthèse un facteur 2, qui se combinera avec 2^n pour aboutir à 2^{n+1}.

SUJET 3

Solution À partir d'un entier donné, effectuons des divisions successives par 2 tant que c'est possible, c'est à dire tant que l'on est en présence d'un nombre pair. Ainsi, si le nombre de départ est impair, on ne fait rien. Au contraire, s'il est pair, on le divise par 2 ; si le résultat est encore un nombre pair, on recommence, sinon on s'arrête. De la sorte, on écrit tout entier comme produit d'une puissance de 2 par un nombre impair (qui peut être réduit à 1).

Dire alors que deux entiers ont un quotient qui est une puissance de 2, c'est dire que dans l'écriture considérée, le nombre impair est le même pour les deux entiers. Or, entre 1 et 2n, on dispose de n nombres impairs (à savoir 1, 3,… , 2n–1). Donc, si on choisit (n+1) entiers entre 1 et 2n, on est obligé d'en choisir au moins deux qui sont produits d'un même nombre impair par des puissances de 2.