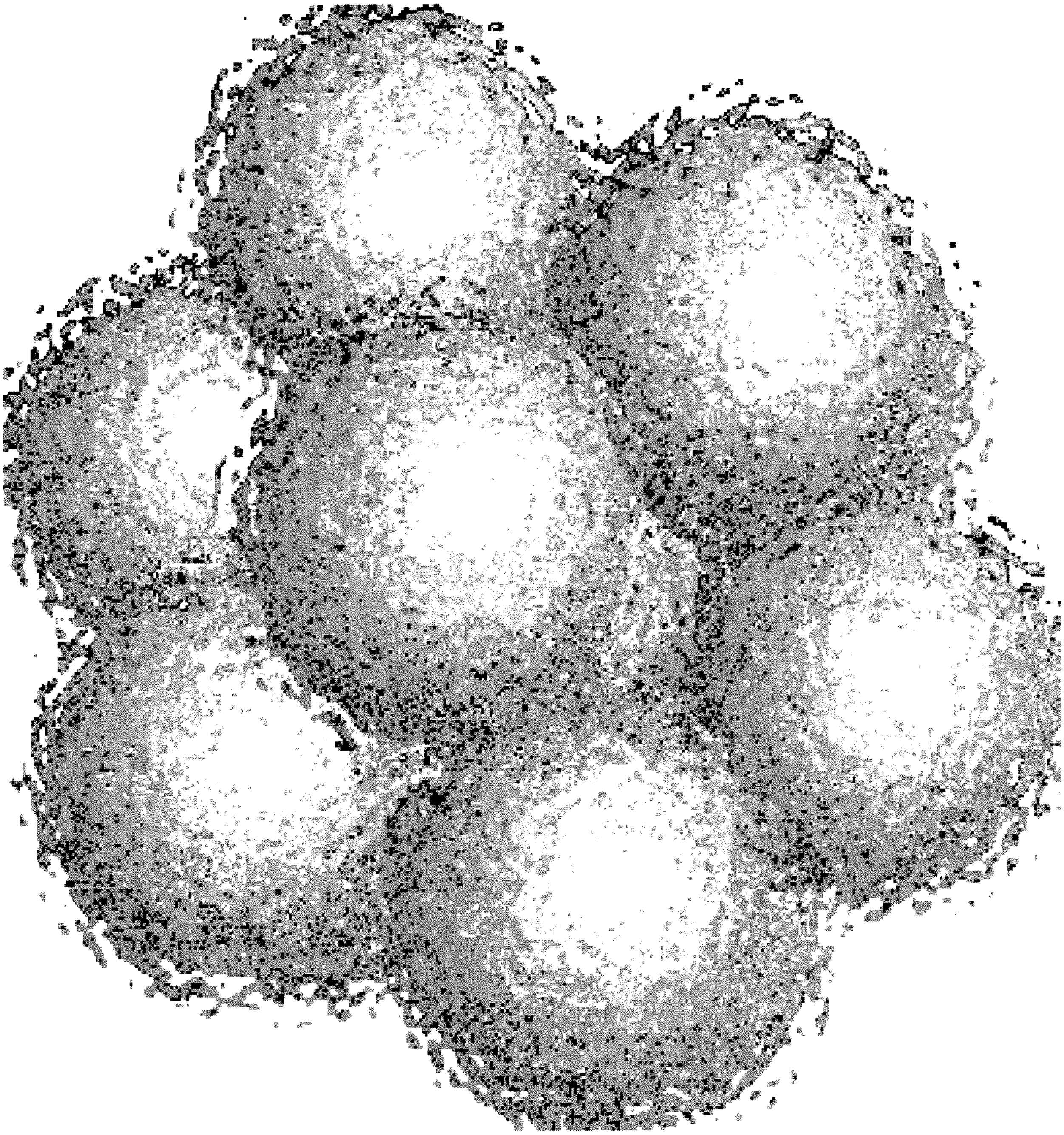
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 104 Novembre 2001 I.S.S.N. 0290 - 0068



ÉDITORIAL

L'OUVERT ET INTERNET

La quête d'informations sur INTERNET a envahi nos vies, au moins celles de ceux qui sont connectés à la vaste toile. Lycéens, étudiants, professeurs et chercheurs, tous sont touchés ; il suffit de voir le nombre de personnes devant leur ordinateur lorsqu'on parcourt les couloirs des laboratoires, le nombre de pages sorties sur imprimante pour les dossiers TPE ou autres travaux scolaires. Tout ce temps passé à butiner se substitue-t-il à la recherche personnelle ou au contraire vient-il l'enrichir ? Voilà une question non tranchée qui dépend sans doute de chaque individu.

Gérard KUNTZ a eu l'idée de s'intéresser à ceux qui abondent le réseau et produisent certaines de ces pages qui vont ensuite se lover parmi les 1 610 476 000 pages utilisées par le moteur de recherche **GOOGLE** en cette fin novembre. Nicole VOGEL et Bernard LANGER présentent leur site personnel, leurs motivations et les choix qu'ils ont faits.

La question de la mise en ligne de pages se pose aussi pour L'OUVERT et le comité de rédaction envisage cette possibilité. Faut-il rendre disponibles tous les articles et ceci gratuitement ou ne présenter sur le site IREM que les sommaires avec des résumés ? La revue en ligne doit-elle remplacer la revue papier ou les deux peuvent-elles coexister ? Voici les deux grandes questions en suspens et sur lesquelles tous les avis sont les bienvenus.

SOMMAIRE

N° 104 - NOVEMBRE 2001

L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

◇ *Responsable de la publication* : Richard CABASSUT
◇ *Rédacteur en chef* : Alain KUZNIAK
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur — Bibliothèque de l'I.R.E.M.
7, rue René Descartes — F - 67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 03 90 24 01 61 — Fax : 03 90 24 01 65
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr — http://irem.u-strasbg.fr
◇ *Prix de l'abonnement :*
110 F/1 an —180 F/2 ans pour les membres A.P.M. d'Alsace (*).
140 F/1 an — 240 F/2 ans dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.
Merci de bien vouloir indiquer votre e-mail éventuel.
◇ (*) Comme la Régionale d'Alsace subventionne l'impression de '*L'Ouvert*', les adhérents du Bas-Rhin et du Haut-Rhin ont droit à une réduction.
◇ *Prix du numéro* : 35.- F.

PASCAL

Quelques aspects de son œuvre mathématique

Lorsqu'en 1666, COLBERT crée « l'Académie des Sciences »[1], il ne fait qu'institutionnaliser des réunions de savants qui se tiennent régulièrement depuis 1635, d'abord chez le Père Marin MERSENNE[2] où Etienne PASCAL, le père de Blaise, emmène son fils afin que celui-ci s'initie aux mathématiques, puis chez LE PAILLEUR après la mort de MERSENNE en 1648 et enfin chez Habert de MONTMOR qui prend le relais à la mort de LE PAILLEUR en 1654. Le caractère beaucoup plus mondain d'Habert de MONTMOR explique sans doute le décret de COLBERT.

Ces réunions scientifiques rassemblent la fine fleur des savants de l'époque : GASSENDI, BOUILLAUD, PASCAL, ROBERVAL, DESARGUES, CARCAVI, DESCARTES (jusqu'à sa mort en 1650),... et à l'occasion des étrangers comme HUYGENS, et on y lit la correspondance de provinciaux comme celle de FERMAT, magistrat à Toulouse[3].

C'est donc dans ce milieu que PASCAL va développer son œuvre scientifique dont on analyse ici que quatre points d'ordre mathématique, mais il faudrait aussi parler des travaux de physique bien que ces deux disciplines n'aient pas été séparées au XVII^{e} siècle.

1. La géométrie projective

Il ne faut pas prendre trop au sérieux les dires de Gilberte PASCAL, la future madame PERIER, sur le génie précoce de son frère ; cependant, il faut noter que c'est dès l'âge de 16 ans que le jeune Blaise découvre une propriété fondamentale des coniques, ce qui deviendra le théorème de PASCAL sur l'hexagone inscrit, propriété tellement importante qu'il sera conduit à publier très rapidement l'*Essay pour les coniques* (1640). C'est plus un programme de travail de quelques pages avec des idées qui montrent qu'il est peut-être le seul de ses contemporains à avoir compris l'intérêt du célèbre essai de géométrie projective de DESARGUES : *le brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan* (1639). Notons que DESARGUES écrit dans un style archaïque, en utilisant un vocabulaire déroutant et en refusant les notations algébriques. PASCAL lui-même rend hommage à DESARGUES dans son *Essay*.

Grâce à PASCAL, la géométrie projective, qui jusqu'alors a surtout été développée par les artistes : ALBERTI (1404-1472), Léonard de VINCI (1452-1519), DURER (1471-1528),... pour la représentation perspective des tableaux, va devenir une branche particulière des mathématiques, permettant d'unifier en une même théorie les propriétés des cercles, des ellipses, des hyperboles et des paraboles, ces courbes que l'on baptise coni-

---

[1] On sait que COLBERT voulait avoir son Académie à l'exemple de RICHELIEU, mais que l'Académie Française s'insurgea contre la création d'une concurrente. Le Roi s'inclina en limitant la nouvelle Académie aux sciences. Les statuts définitifs ne furent promulgués qu'en 1699.

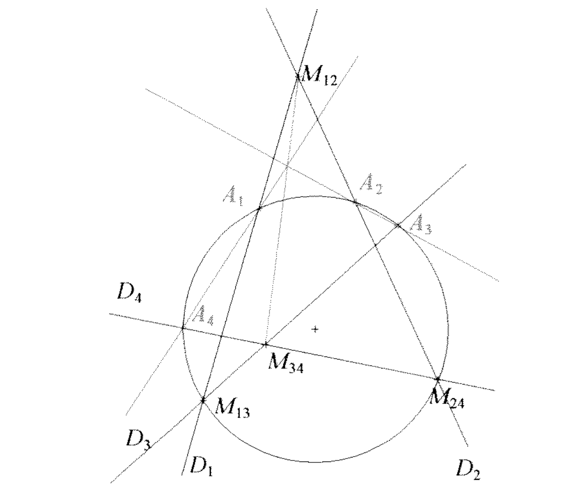
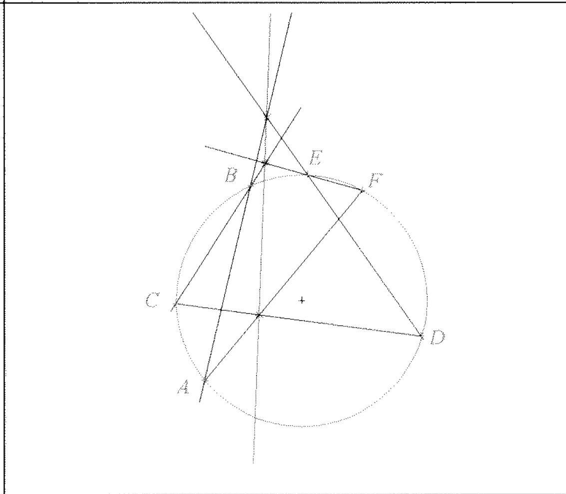
[2] Les mathématiciens connaissent les nombres de MERSENNE qui sont de la forme $2^p - 1$ où p est premier. Ces nombres ont de fortes chances d'être premiers et font l'objet de recherches toujours actuelles.

[3] FERMAT est réputé pour ses travaux en arithmétique ; en particulier, sa célèbre conjecture : « $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution en x, y, z entiers non nuls pour n > 2 » a défié les mathématiciens jusqu'à ces dernières années. Après l'avancée spectaculaire obtenue par FALTINGS en 1989, elle a été démontré par WILES en 1995.

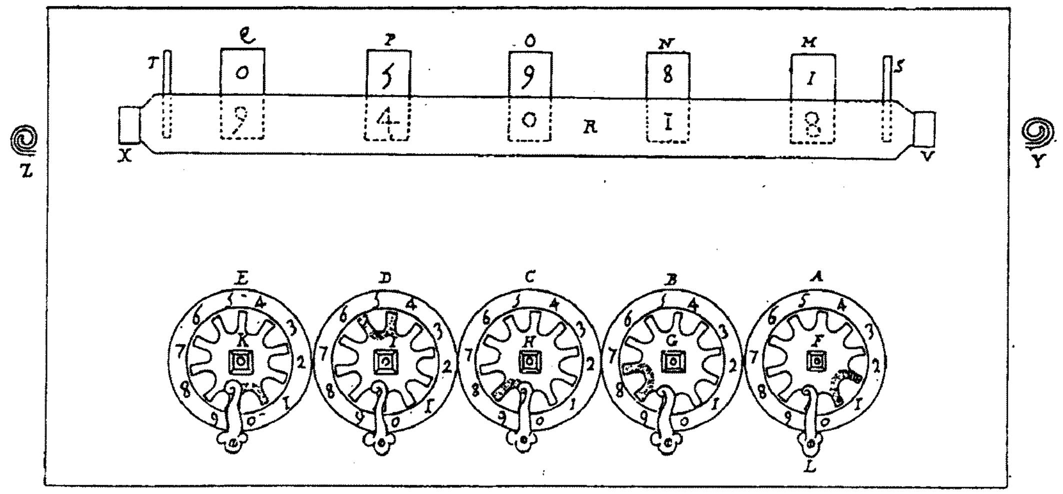
ques car elles sont l'intersection d'un cône et d'un plan. Ce passage du plan à l'espace est à la base même de l'enseignement moderne de la géométrie projective.

Le théorème de l'hexagone inscrit sera dénomme par PASCAL **« L'hexagramme mystique »** (peut-être d'après le fameux pentagramme kabbalistiques). DESARGUES, rendant par là un vibrant hommage à son découvreur, l'appellera **« La Pascale »**. Ce théorème sera le point de départ de deux ouvrages de Blaise PASCAL : l'*Introduction à la géométrie* et le *Traité des coniques*, œuvres inachevées qui seront commentées par LEIBNIZ en 1676 et en partie publiées par ce dernier. Malheureusement certains chapitres en sont perdus et peut-être à jamais.

1. L'hexagramme mystique

Version initiale avec un vocabulaire moderne	Version moderne du théorème de Pascal
	
Si D_1, D_2, D_3, D_4 forment un quadrilatère complet et si M_{ij} est l'intersection des droites D_i et D_j, un cercle passant par M_{13} et M_{24} recoupe les droites D_i en A_i tels que les droites A_1 A_4 et A_2 A_3 se coupent sur la droite M_{12} M_{34}	Si A, B, C, D, E, F sont six points d'une conique (ici un cercle), les droites AB et DE, BC et EF, CD et FA se coupent en trois points alignés.

2. La machine arithmétique



Dessin de Belair représentant la machine de Pascal, vue de dessus

Vers 1623 SCHICKARD de l'université de Tübingen construit une machine à roues dentées qui « calcule à partir de nombres donnés d'une manière instantanée et automatique, car elle ajoute et retranche, multiplie et divise »[4]. En fait, multiplication et division ne sont pas instantanées. Ce qui est important, c'est le mécanisme de report des retenues qui s'effectue grâce à une roue à une seule dent qui engrène sur une roue à dix dents la faisant tourner d'un dixième de tour. Malheureusement, la machine de Schickard est détruite très tôt dans un incendie et il n'en fera plus mention. Il est donc plus que probable que PASCAL n'en a pas entendu parler. Disons seulement que l'idée d'une machine était dans l'air du temps. Les principes mécaniques mis en œuvre par PASCAL sont d'ailleurs tout à fait différents. Le mécanisme de report des retenues est assez compliqué, il fait intervenir la pesanteur (la machine doit donc être horizontale), il n'est pas réversible ce qui fait qu'on ne peut effectuer la soustraction que par la méthode de l'addition du complément qui est facilitée par la création d'une double numérotation sur chaque roue, chacune des numérotations apparaissant selon le besoin grâce au déplacement d'une réglette mobile.

La construction de sa machine d'après ses conceptions théoriques fut plus difficile qu'il ne l'avait cru et PASCAL faillit y renoncer. C'est sur l'insistance de ses amis qu'il se remit à la tâche faisant réaliser divers prototypes. La roue *pascaline*, comme elle fut baptisée par ses contemporains, fut construite en petite série à partir de 1645 et c'est ROBERVAL qui en assura l'exploitation commerciale. Un privilège royal garantissait à PASCAL la propriété de son invention et ce ne fut pas une garantie sans objet car PASCAL aura à se battre contre des imitations fort médiocres au demeurant mais qui sont suscitées par la cherté de sa machine arithmétique : 100 livres.

Il est intéressant de noter que cette calculatrice suscitera parmi ses contemporains des réflexions qui sont du même ordre que celles que suscitent aujourd'hui les ordinateurs et l'intelligence artificielle. PASCAL lui-même écrit : « La machine arithmétique fait des effets qui approchent plus de la pensée que tout ce que font les animaux, mais elle ne fait rien qui puisse faire dire qu'elle a de la volonté comme les animaux »[5]. LEIBNIZ aura une réflexion encore plus moderne a ce sujet.

Il reste actuellement huit exemplaires de la *pascaline* et malgré l'antériorité de SCHICKARD, il est indéniable que PASCAL fut le premier à assurer la diffusion d'une machine arithmétique mécanique, le premier d'une série de savants ou d'ingénieurs comme LEIBNIZ (en 1673), Thomas de COLMAR avec l'arithmomètre (en 1820), Dorr E. FELT avec la *comptometer* (en 1884), Léon BOLLEE avec sa calculatrice à multiplication directe (en 1888), William S. BURROUGHS avec la fameuse *Adding and Listing Machine* (en 1893) et enfin Kurt HERZSTARK du Lichtenstein avec la célèbre *Curta* (en 1948) qui ne sera détrônée que par l'avènement des calculatrices à microprocesseurs qui prendront la relève des machines tant mécaniques qu'électromécaniques.

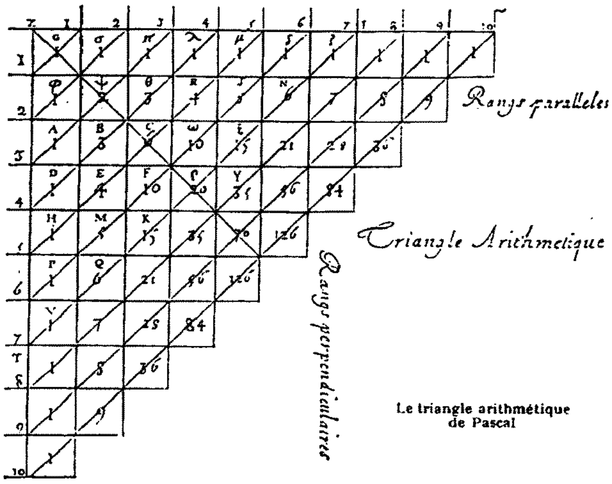
2. Le triangle arithmétique

Si on demande à un lycéen ce qu'il connaît de l'œuvre mathématique de PASCAL, il citera le *triangle de Pascal*, persuadé que c'est PASCAL lui-même qui l'a inventé. Ce

[4] Correspondance de SCHICKARD à KEPLER.

[5] Lettre dédicatoire à Monseigneur le chancelier (1645).

triangle est construit de proche en proche de façon que chaque nombre soit la somme des deux nombres immédiatement supérieurs.



Le triangle arithmétique de Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

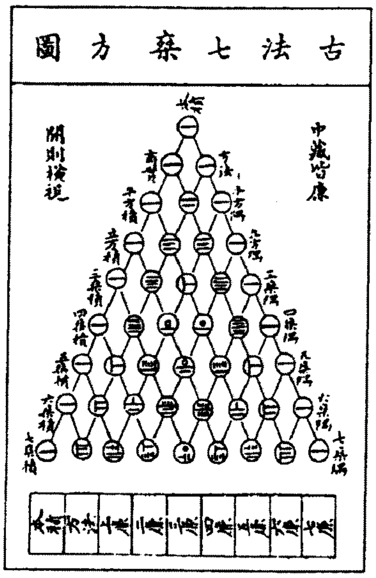
1 4 + 6 4 1

1 5 = $\boxed{10}$ 10 5 1

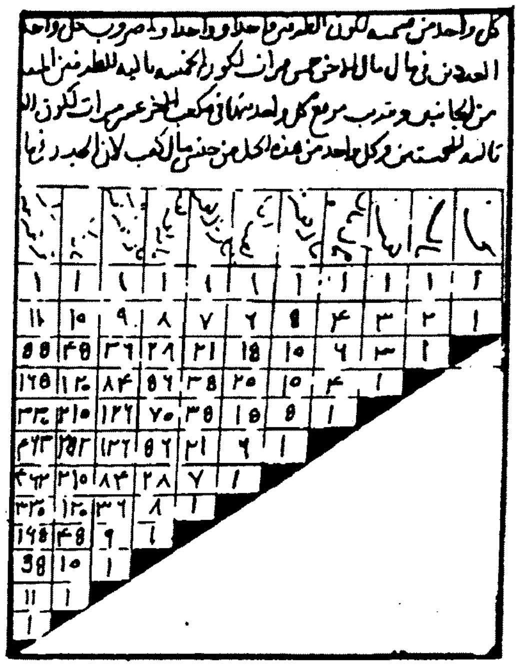
1 6 15 20 15 6 1

PASCAL n'est pour rien dans son invention puisque ce triangle est connu des arabes au moins depuis le XI[e] siècle comme l'atteste l'œuvre d'AL-KARAJI et est connu des chinois depuis au moins 1303 où on le trouve dans le traité de ZHU SHI JIE (prononcez Tchou chi k'ié)

Le miroir de jade des quatre éléments.



Page extraite de l'ouvrage publié en 1303 par Zhu Shi Jie



Page extraite d'un manuscrit arabe du XII[e] siècle

En fait les propriétés de ce triangle sont bien connues, par exemple – la somme des termes de chaque ligne est le double de la somme des termes de la ligne précédente –, ou bien – la somme alternée des termes d'une ligne est nulle–,… Mais, jusqu'à l'époque de Pascal, aucune démonstration rigoureuse de ces faits n'avait été donnée ; on se contentait de remarquer que ça marchait !

Or ce tableau triangulaire va prendre beaucoup d'importance car outre son intérêt en arithmétique pour le calcul des puissances de (a + b), il apparaît dans le calcul des probabilités qui naît à l'époque de Pascal, essentiellement à travers l'échange de correspondance que celui-ci aura avec Fermat à propos du problème posé par le Chevalier de MERE[6].

L'apport de Pascal est décisif pour deux raisons : d'une part il montre l'utilité de ce triangle en dehors de l'arithmétique, d'autre part il va démontrer toutes les propriétés connues à son époque[7] et cela grâce au raisonnement par récurrence qu'il invente, sans doute au cours du seul mois d'août 1654 quand il rédige le *Traité du triangle arithmétique*. Pascal appelle sa méthode **induction**, mais on prendra garde de confondre avec les autres acceptions que les philosophes modernes donnent à ce mot. Il évite une infinité de raisonnement pour démontrer une infinité de propositions grâce au schéma suivant :

* la proposition $P(n)$ qui dépend de l'entier n est vraie pour $n = 1$;

* si la proposition $P(n)$ est vraie pour l'entier n alors elle est vraie pour le successeur $n + 1$;

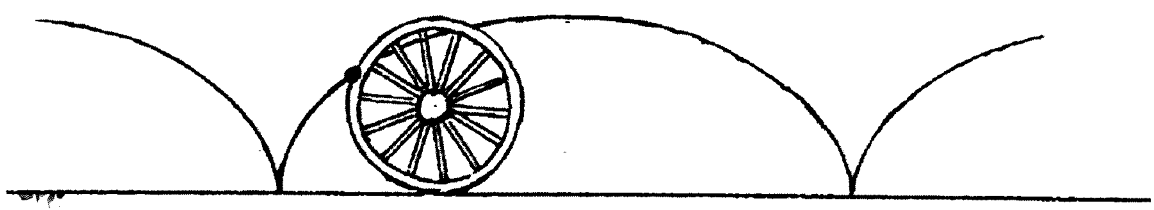
* la proposition $P(n)$ est alors vraie pour tout entier.

Il est donc naturel que le monde entier attribue depuis le nom de Pascal à ce triangle arithmétique.

3. La roulette et le calcul infinitésimal

C'est peut-être Cavalieri qui ouvre la voie du calcul infinitésimal avec son ouvrage en latin sur *La géométrie des continus indivisibles* (1635). Il y compare des longueurs, des aires ou des volumes infiniment petits. Pascal va rapidement exceller dans le calcul infinitésimal, maîtrisant parfaitement les ordres de grandeurs, mais il appliquera davantage sa pensée à ce que nous nommons le calcul intégral, plutôt que ce que nous nommons le calcul différentiel. Malgré l'usage d'une définition de la notion de fonction bien supérieure à celle de Descartes, Pascal ne parlera guère des tangentes (on disait *touchantes* à l'époque) mais calculera des aires, des volumes, des centres de gravité...

Sûr, peut-être même un peu trop sûr d'avoir mis au point une méthode générale lui permettant de résoudre toute une classe de problèmes, Pascal va lancer en juin 1658, dans l'anonymat le plus complet (ce qui prouve qu'il se méfie quand même), un concours sur la roulette avec une échéance au 1er octobre de la même année.



[6] Comment répartir la mise entre deux joueurs qui décident de se quitter sur un certain score sans aller jusqu'au bout du jeu. Ce problème est toujours présenté dans l'enseignement des probabilités aux élèves de lycée.

[7] Des propriétés assez simples sont encore découvertes de nos jours, par exemple par Gregor BERG en 1984 : "*Entdeckungen am Pascaldreieck*,, ou par P. GOETGHELUCK en 1987 : "*Computing binomial coefficients*".

Au XVII^e^ siècle, tout le monde savant sait ce qu'est une roulette, même si certains l'appellent trochoïde ou cycloïde, mais c'est ce dernier nom qui survivra à l'époque moderne. La roulette ou cycloïde est tout simplement la trajectoire décrite par un clou fiché dans la roue d'un chariot quand celui-ci en avançant fait tourner celle-là.

Un jury a été réuni sous la présidence de CARCAVY (futur premier directeur de l'Académie des Sciences) qui a toute la confiance de Pascal qui lui a fait remettre les 40 + 20 pistoles correspondant aux deux prix mis au concours.

Seulement la roulette passionne ses contemporains ; tous la courtisent au point qu'on l'a surnommée « la belle Hélène de la géométrie » et Pascal est contraint de modifier, de préciser et d'affiner à plusieurs reprises les questions de son concours. Il apprendra en particulier que Roberval a répondu à certaines questions avant qu'il ne les pose, bien que Roberval n'ait rien publié sur le sujet (sans doute parce que ses travaux remontent à l'époque de la Fronde et qu'il s'est intéressé à d'autres thèmes par la suite). C'est Roberval qui a démontré que l'aire de l'arche de cycloïde vaut trois fois l'aire du cercle générateur.

Pascal devra admettre l'antériorité de Roberval. De plus c'est Wren qui calculera le premier la longueur de l'arche de cycloïde (quatre fois le diamètre du cercle générateur). Cependant Pascal gardera une courte avance sur ses concurrents malgré l'intense activité intellectuelle qu'il aura favorisée en cet été 1658.

Il pourra donc publier en octobre de la même année son *Histoire de la roulette* suivie en janvier 1659 par le *Traité général de la roulette.* Mais preuve que Pascal se méfie toujours, il publié sous le pseudonyme d'Amos DETTONVILLE[8] ce qui lui permettra de régler leur compte à deux mauvais joueurs: Wallis qui prétexte de son éloignement pour exiger un long délai supplémentaire et surtout le Père LALOUERE qui nonobstant ses calculs faux avait de plus le tort d'être jésuite !

Signalons que la cycloïde est à la fois la courbe brachystochrone[9] comme le montrera Bernoulli en 1696 et la courbe tautochrone[10] ce qui permettra à Huygens de construire son pendule cycloïdal en 1676 assurant ainsi la régularité de la marche des horloges sur les navires en mer.

Conclusion

Ce très, voir trop rapide survol, d'une partie de l'œuvre scientifique et mathématique de Pascal aura, espérons-le, montré combien il existe d'aspects méconnus dans les écrits d'un homme illustre.

Chaque époque se construit sa culture. La nôtre se veut au carrefour de l'humanisme, des sciences et des techniques. Depuis une quinzaine d'années, la culture scientifique, grâce au développement des musées, a acquis droit de cité. N'oublions pas la culture n'est pas ce qui reste quand on a tout oublié mais tout simplement la capacité à s'adapter à la société et au monde qui se fait, pour être armés à s'adapter au monde de demain.

[8] Les connaisseurs y retrouveront l'anagramme de LOUIS DE MONTALTE, l'auteur des Provinciales.

[9] Ce qui veut dire que c'est le long d'une cycloïde retournée que doit se mouvoir un point pour mettre le temps le plus bref pour aller de A en B.

[10] Ce qui veut dire que quel que soit le lieu de départ d'un point mobile le long d'une cycloïde retournée, il met le même temps pour aller jusqu'au fond.

Terminons sur un sujet d'actualité : il s'agit des recherches sur le chaos et plus particulièrement sur ce que l'on appelle l'***effet papillon*** : le battement des ailes d'un papillon quelque part au Mexique influe sur le temps en Europe quelques semaines ou mois plus tard. Dans ses pensées Pascal écrit : **« Le nez de Cléopâtre, s'il eut été plus court, toute la face de la Terre aurait été changée »**[11]. Voyons le commentaire qu'en a fait le mathématicien Ivar EKELAND[12] : « Si la flotte d'Antoine se débande à la bataille d'Actium, alors que la victoire était à sa portée, c'est qu'on voit le vaisseau amiral fuir le champ de bataille, à la poursuite de la galère de Cléopâtre qui abandonne un combat trop rude. Un monde romain où Antoine aurait régné plutôt qu'Auguste aurait-il été fort différent ? On peut en douter, mais on peut estimer aussi que la floraison intellectuelle qui a marqué le siècle d'Auguste était très liée à la personnalité de celui-ci et de son ami Mécène, et que, sans cet accident, nous n'aurions aujourd'hui ni Virgile, ni Horace, ni tant d'autres créateurs qui ont profondément marqué notre civilisation ». Ce qui nous ramène à la culture classique !

4. Bibliographie

L'œuvre scientifique de Pascal, Préface de René TATON (PUF) 1964.

Histoire universelle des chiffres, G. IFRAH (Seghers).

Nombre, mesure et continu Épistémologie et histoire, Jean DHOMBRES (Cédic).

La démonstration mathématique dans l'histoire I.R.E.M. de Lyon

Panorama de la culture scientifique, technique et industrielle en Alsace, 1989 (Cestim)

Au hasard, Ivar EKELAND (Seuil).

[11] *Pensées*, fragment 180.

[12] Dans *Au hasard : la science, la chance et le monde* aux éditions du Seuil. Ivar EKELAND reçut le prix D'ALEMBERT de vulgarisation mathématique pour cet ouvrage.

Arrangements de boules dans l'espace

Pierre Baumann [1]
CNRS Strasbourg

Origines historiques

En 1611, l'astronome et mathématicien Johannes Kepler écrivit à l'attention de son protecteur Johannes Matthäus Wackher von Wackenfels un petit opuscule dans lequel il tentait d'expliquer la forme en étoile des flocons de neige et méditait sur diverses autres configurations géométriques. Kepler affirmait notamment qu'il n'était pas possible de trouver un empilement de boules (pleines) toutes de même rayon plus serré que l'empilement que nous appelons de nos jours « cubique à faces centrées », et qui est celui selon lequel les marchands de fruits entassent les oranges. Cet énoncé constitue la conjecture de Kepler[2].

De l'autre côté de la Manche, une controverse opposa en 1694 Isaac Newton et David Gregory[3]. Gregory pensait qu'il était possible de se débrouiller pour placer dans l'espace 14 boules de même rayon sans qu'elles ne s'interpénètrent et de sorte que l'une d'entre elles soit en contact avec les 13 autres. En effet, si l'on dessine sur une sphère les 12 sommets d'un icosaèdre régulier auquel elle est circonscrite, si l'on positionne 12 autres boules de sorte qu'elles touchent la sphère en ces points, on s'aperçoit que ces 12 boules ne se touchent pas. Mieux, il y a assez d'espace entre elles pour qu'on puisse les permuter comme on veut en les faisant rouler sur notre sphère de départ. Peut-être ainsi y a-t-il assez de place pour qu'on puisse mettre une treizième boule au contact de la sphère centrale. Newton pensait au contraire que cela n'était pas possible.

Kepler et Newton avaient-ils raison?

Même les plus grands font des erreurs bien sûr, mais en ce qui concerne ces problèmes, Kepler et Newton avaient vu juste. Il a fallu attendre longtemps pour en être certain.

Théorème (Schütte et van der Waerden, 1953): Étant donnée une boule dans l'espace euclidien de dimension 3, on ne peut placer à son contact 13 autres boules de même rayon que la première sans que ces dernières ne s'interpénètrent.

Théorème (Hales et Ferguson, 1998): Tout empilement de sphères dans l'espace euclidien de dimension 3 a une densité au plus égale à la densité $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ de l'empilement cubique à faces centrées.

---

2. Une autre source indique que Kepler formula cette conjecture dès la fin du XVI^{e} siècle dans une réponse à une lettre que lui avait adressée le mathématicien anglais Thomas Harriot.

3. David Gregory (1659-1708) fut par ailleurs un fervent défenseur de Newton et enseigna ses théories à l'université d'Edimbourg dès 1683, alors qu'à Cambridge, on continuait à enseigner la vieille philosophie naturelle grecque.

Expliquons l'énoncé du théorème de Hales et Ferguson. Un *empilement de sphères* est une famille de boules de même rayon ne s'interpénétrant pas. Appelons X la réunion de ces boules, c'est-à-dire l'ensemble des points qui sont à l'intérieur d'une des sphères de l'empilement. La *densité de l'empilement* est la limite (la limite supérieure pour être précis) de la portion de volume $\mathrm{vol}(X \cap C)/\mathrm{vol}(C)$ occupée par les boules à l'intérieur d'un cube C dont la taille tend vers l'infini. Le théorème de Hales et Ferguson signifie donc que si X est la réunion des boules d'un empilement et si α est un nombre strictement supérieur à $\pi/(3\sqrt{2})$, alors il y a un nombre R tel que pour tout cube C dont l'arête est de longueur plus grande que R, on ait $\mathrm{vol}(X \cap C) < \alpha\, \mathrm{vol}(C)$. Répétons encore : si on cherche à remplir un très grand cube par de toutes petites oranges sphériques de même rayon, alors le volume occupé par les oranges sera au plus égal à $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \times 100\%$ du volume total du cube.

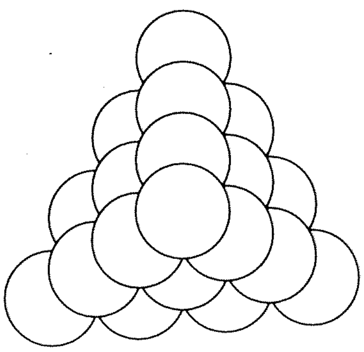
Quelques définitions

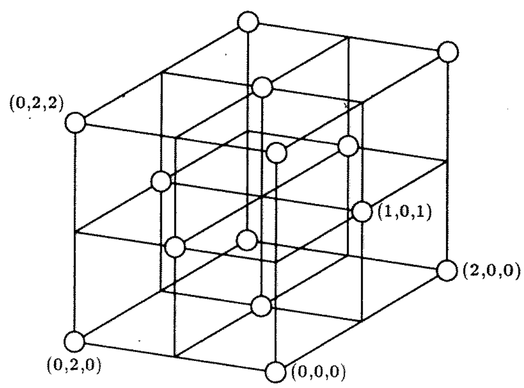
Avant d'aller plus loin, introduisons quelque terminologie. Nous considérons un ensemble de boules ne s'interpénétrant pas et de même rayon. Se donner un tel ensemble revient à se donner l'ensemble P de leurs centres ; la distance entre deux points de P est toujours supérieure ou égale au diamètre des boules.

L'ensemble de boules présentera une certaine régularité si les points de P sont périodiquement répartis. Une condition encore plus forte est d'exiger que P soit un *réseau*, c'est-à-dire un ensemble discret de points satisfaisant aux deux conditions suivantes :

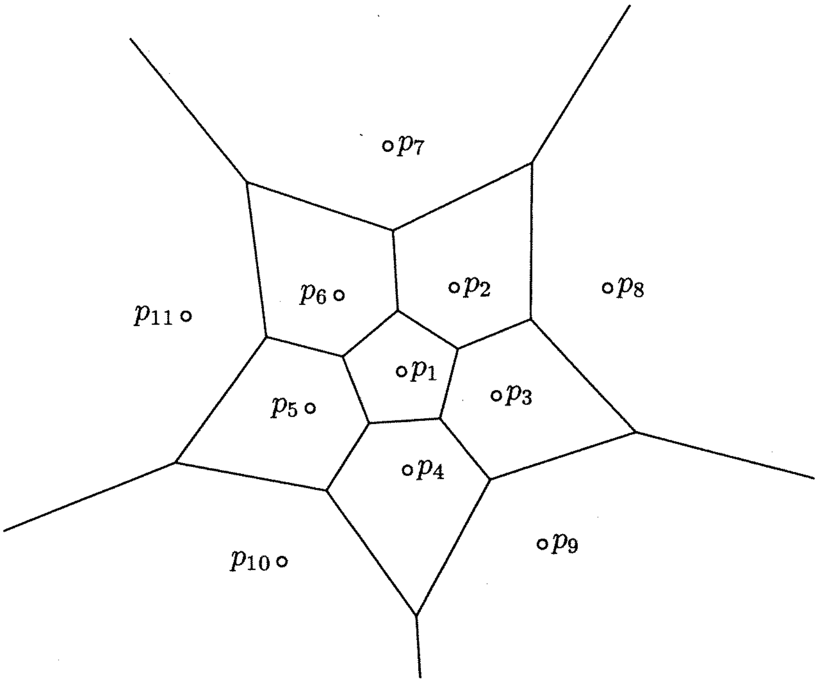
- les points de P ne sont pas tous contenus dans un même plan ;
- pour tous points non-alignés p, q, r appartenant à P, le point s tel que $pqrs$ soit un parallélogramme appartient à P.

Par exemple, les points dont les trois coordonnées sont entières forment un réseau. L'ensemble des points dont les trois coordonnées sont entières et de somme paire est aussi un réseau. Ce dernier est représenté ci-dessous de deux façons différentes et s'appelle *réseau cubique à faces centrées.*

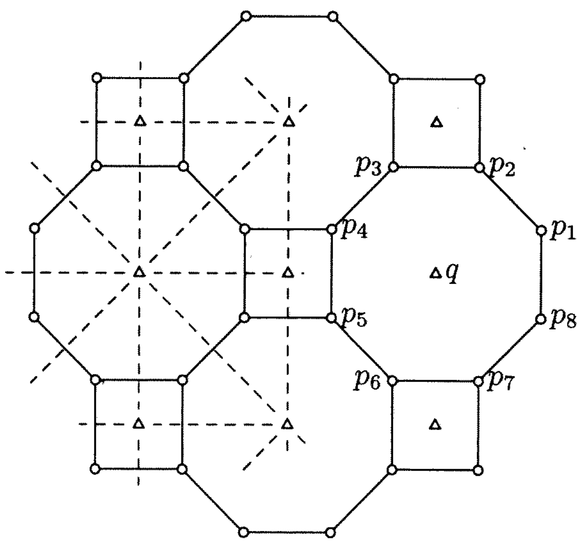




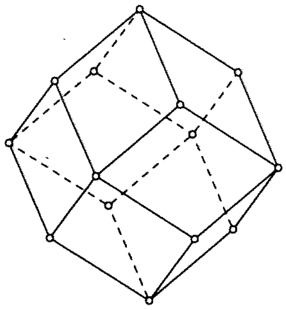
Revenons au cas d'un ensemble P discret quelconque, a priori sans régularité. La *cellule de Voronoï* d'un point p de P est le lieu des points de l'espace qui sont plus proches de p que d'aucun autre point de P. (Les physiciens parlent de zones de Brillouin ou encore de cellules de Wigner-Seitz.) C'est une partie de l'espace limitée par des faces planes. Les cellules de Voronoï pavent l'espace. La figure suivante représente les cellules de Voronoï pour l'ensemble $P = \{p_1, \dots, p_{11}\}$ de points dans le plan (la définition marche aussi bien dans le plan que dans l'espace).



Un autre pavage de l'espace est réalisé par les *cellules de Delaunay.* À un sommet q d'une cellule de Voronoï, on associe sa cellule de Delaunay qui est le polyèdre convexe dont les sommets sont les points de P les plus proches de q. La figure ci-dessous représente (dans le plan pour plus de clarté) les cellules de Delaunay pour l'ensemble P formé des petits ronds ; les cellules de Delaunay sont en traits pleins, les pointillés représentent quelques unes des cellules de Voronoï, et les petits triangles sont les sommets des cellules de Voronoï.



Si P est un réseau, les cellules de Voronoï se déduisent les unes des autres par translation. Pour le réseau cubique à faces centrées, les cellules de Voronoï ressemblent à ceci.



Ce polyèdre a deux types de sommets : ceux d'où partent trois arêtes et ceux d'où en partent quatre. Le réseau cubique à faces centrées a deux sortes de cellules de Delaunay : des tétraèdres et des octaèdres réguliers.

Vers la preuve de la conjecture de Kepler

La densité de l'empilement cubique à faces centrées est facile à calculer. En effet, le cube de volume 8 dont les sommets sont les points dont les trois coordonnées valent 0 ou 2 est une brique élémentaire dont les translatées pavent l'espace. Ce cube contient une demi-boule au centre de chacune de ses six faces et un huitième de boule en chacun de ses huit sommets, soit quatre boules au total. Les boules centrées aux points de coordonnées (0,0,0) et (1,0,1) se touchent, donc les boules ont pour rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour volume $\frac{\pi\times\sqrt{2}}{3}$. La densité de l'empilement est donc $\frac{1}{8}\times 4\times\frac{\pi\times\sqrt{2}}{3}=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

En 1831, le grand mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss démontra que tous les empilements de sphères donnés par des réseaux satisfaisaient à la conjecture de Kepler, et que seul le réseau cubique à faces centrées réalisait la densité maximale $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$. Mais on était encore loin du compte : non seulement les empilements donnés par les réseaux ne donnent pas toutes les configurations périodiques, mais encore il faut tenir compte des empilements qui n'ont aucune périodicité.

En 1958, Claude Ambrose Rogers démontra que la densité d'un empilement de sphères était au plus égale à la portion de volume que recouvrent dans un tétraèdre régulier de longueur d'arête 2 des boules de rayon 1 centrées en ses sommets. Malheureusement, la borne ainsi obtenue vaut $\sqrt{2}\,[3(\arccos\frac{1}{3})-\pi]\approx 0{,}780$ et est donc moins bonne que celle donnée par la conjecture de Kepler, $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\approx 0{,}740$. Rogers exprima son désarroi de manière laconique : « Many mathematicians believe, and all physicists know, that the density cannot exceed $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$. »

Une méthode plus efficace avait été proposée par László Fejes Tóth dès 1943. Supposons que P soit l'ensemble des centres d'un empilement de sphères de rayon 1. Alors chaque cellule de Voronoï contient une sphère de rayon 1. Si l'on réussit à minorer le volume d'une cellule de Voronoï, alors on pourra majorer la proportion de volume occupée dans la cellule par la boule qu'elle contient. On peut ainsi espérer pouvoir majorer la densité de l'empilement de sphères. Fejes Tóth a de fait conjecturé le résultat suivant.

Conjecture du dodécaèdre: Le volume d'une cellule de Voronoï d'un empilement de sphères de rayon 1 est toujours supérieur ou égal à $10\sqrt{130-58\sqrt{5}}$.

Si Fejes Tóth avait su démontrer sa conjecture, il aurait obtenu une meilleure borne que celle de Rogers, à savoir $\frac{4\pi}{30\sqrt{130-58\sqrt{5}}} \approx 0{,}755$. Mais le problème que Fejes Tóth s'était posé est très difficile, et sa résolution récente nécessite le recours à l'ordinateur, la masse de calculs à effectuer étant trop importante pour l'homme. Le principe de la preuve de la conjecture du dodécaèdre est toutefois intéressant :

- Il ne coûte rien de supposer que l'empilement est maximal, c'est-à-dire que l'on ne peut pas rajouter de boule à l'empilement.
- Dans ces conditions, la cellule de Voronoï d'un point p de P est incluse dans la boule de centre p et de rayon 2, donc la forme de la cellule est déterminée par les points de P dont la distance à p est inférieure ou égale à 4.
- Il n'est donc pas nécessaire de considérer tous les empilements de sphères, mais seulement les configurations de points à distance mutuelle plus grande que 2 dans la sphère de centre p et de rayon 4.

On a ainsi ramené un problème qui dépendait d'une infinité de paramètres (les coordonnées des points de P) à un problème à un nombre fini de paramètres (les coordonnées des points de P dont la distance à p est inférieure ou égale à 4). Le travail n'est bien sûr pas fini, car le problème qui reste appartient à la classe des « problèmes d'optimisation non-linéaire », et c'est là que s'était arrêté Fejes Tóth.

La preuve de Hales et Ferguson

La méthode de Hales et Ferguson repose sur un principe analogue à celle de Fejes Tóth. Elle est toutefois sensiblement plus compliquée : il ne suffit pas de considérer les cellules de Voronoï, mais il faut utiliser un pavage hybride entre celui de Voronoï et celui de Delaunay ; et la fonction qu'il s'agit d'étudier n'est plus le volume de la cellule mais une certaine valeur appelée « score ». Thomas Hales, professeur de mathématiques à l'université du Michigan, a mis dix ans à trouver cette preuve. Cette dernière totalise environ 300 pages, dont certaines ont été écrites en collaboration avec son étudiant Samuel Ferguson. Ces deux auteurs se ramènent à traiter une centaine de problèmes d'optimisation non-linéaire, lesquels sont convertis en problèmes d'optimisation linéaire, traitables de façon exacte sur ordinateur (les erreurs d'arrondis sont prises en compte par les programmes). C'est ainsi que 3 gigaoctets de fichiers informatiques, représentant la solution de quelques 100 000 problèmes d'optimisation linéaire en 100 à 200 variables avec 1 000 à 2 000 contraintes constituent *in fine* la preuve de la conjecture de Kepler.

À quoi ça sert ?

Les questions reliées aux empilements de sphères ont des applications dans la vie quotidienne. Des problèmes semblables à celui de Newton interviennent dans l'étude des agrégats, qui sont des arrangements compacts d'une dizaine ou d'une centaine de corpuscules (atomes, molécules, ...). On constate expérimentalement que des agrégats stables existent pour certains « nombres magiques » de corpuscules, nombres pour lesquels existent des configurations géométriques qui maximisent l'énergie de liaison totale.

D'autres retombées concernent les codes correcteurs utilisés pour supprimer les erreurs commises par les lecteurs de disques compacts ou encore les erreurs causées par des perturbations dans les réseaux de transmission de données numériques. On veut ici transmettre ou stocker une suite de bits, c'est-à-dire une suite de 0 et de 1, mais de temps en temps, il y a des erreurs. L'idée est de rendre le message redondant. Par exemple, une langue humaine est redondante, car si quelques lettres manquent dans les phrases d'un article de presse, le lecteur peut rectifier de lui-même et reconstituer le texte original. Au contraire, une modification de quelques chiffres dans un nombre change ce dernier de façon non-corrigible. Il faut donc étudier quelles sont les manières les plus efficaces pour rendre un message redondant sans trop l'allonger. Dans le langage des lecteurs de CD, les « mots » qui ont un sens sont répertoriés dans un « dictionnaire », les mots lus par le système optique comportent des « fautes d'orthographe », et le système de correction doit déterminer le mot du dictionnaire le plus proche du mot lu.

La théorie mathématique développée pour comprendre les empilements de sphères est pertinente ici : les mots du dictionnaire correspondent aux centres des sphères, les mots qu'on peut écrire correspondent aux points de l'espace, et le système de correction attribue à chaque point de l'espace le centre de la cellule de Voronoï à laquelle ce point appartient. Pour optimiser l'efficacité du système, il faut rendre les cellules de Voronoï les plus rondes possibles. Il n'est pas correct de dire que les mathématiques font marcher les lecteurs de CD ou les réseaux de transmission de données numériques, mais il est vrai que pour optimiser leurs techniques, les concepteurs ont étudié les solutions que leur proposaient les mathématiciens.

Enfin, la théorie des empilements de sphères possède aussi des applications à l'intérieur des mathématiques, puisqu'elle est reliée à la fois à la théorie des nombres (plus précisément à l'étude des fonctions theta et des fonctions modulaires) et à la théorie des groupes (par exemple l'étude du réseau de Leech, qui est un réseau remarquable dans l'espace de dimension 24, est reliée aux phénomènes du clair de lune et au groupe monstrueux de Fischer-Griess).

Bibliographie

J. H. CONWAY et N. J. A. SLOANE : *Sphere packings, lattices, and groups*, 3rd ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 290, Springer-Verlag (1999).

J. OESTERLÉ : *Densité maximale des empilements de sphères en dimension 3 [d'après Thomas C.* HALES *et Samuel P.* FERGUSON*]*, Séminaire Bourbaki n° 863, Astérisque 266 (2000), pp. 405-413, Société Mathématique de France.

P. A. GRIFFITHS : *Mathematics at the turn of the millennium*, American Mathematical Monthly 107 (2000), pp. 1-14, Mathematical Association of America.

Notes rédigées en octobre 2000 à l'occasion de la Fête de la Science par Pierre BAUMANN, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, F-67084 STRASBOURG CEDEX

Mél : baumann@math.u-strasbg.fr

DESCARTES : LE TEMPS DE LA CONSTRUCTION DU SAVOIR

Alain MERCIER
École Nationale de Formation Agronomique

Exposé des motifs

On peut penser que le projet cartésien décrit dans les *Regulæ ad directionem ingenii* est une tentative de reproduire volontairement les conditions qui ont produit les découvertes mathématiques de DESCARTES. Le texte des *Regulæ* contient la description d'une organisation nouvelle du savoir dont l'auteur affirme la nécessité et la force ; et nous avons, au titre de démonstration, un exposé des découvertes dont DESCARTES cherche à reproduire les conditions d'existence dans le texte de *La Géométrie* (écrit en 1637, et qui constitue le troisième Essai de la méthode). DESCARTES annonce en effet dans *Le Discours de la méthode* que cette réorganisation est à l'origine de la production qu'il publie. Il expose ainsi comment la méthode qu'il décrit a été son guide dans les études qu'il a entreprises après la fin de sa scolarité (au Collège de La Flèche jusqu'en 1614, puis à l'université de droit de Poitiers jusque vers 1616). Le *Discours* peut donc être considéré comme la préface à une première publication des résultats de ce projet, qui s'y énonce par quatre préceptes en forme d'axiomes (ces préceptes permettent de reconstruire le contenu des *Regulæ* – que l'auteur ne cite pas –, c'est un texte inachevé, à usage privé).

L'intention **autodidactique** de DESCARTES – dans un premier temps, les *Regulæ* exposent la méthode à l'intention de leur auteur –, l'a amené en effet à mettre en doute les savoirs qui lui ont été enseignés, pour « revenir aux sources de l'intuition » et imaginer une reconstruction complète qui enchaînerait seulement les certitudes qu'il a pu en retirer, en se nourrissant de son propre fonds. Nous l'avons montré en 1987, avec Yves CHEVALLARD, (*Sur la formation historique du temps didactique*, IREM d'Aix-Marseille) DESCARTES affirme ainsi que le changement, qui amènera la production scientifique à quitter le terrain des pratiques scolastiques, consiste dans le développement d'un corpus scientifique, libéré de l'accumulation encyclopédique par **le travail de la rationalité interne de son exposé** ; il poursuit aussitôt en proposant que l'enseignement suive ce même précepte. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'il critique le projet de COMENIUS : *« Outre qu'il est souvent très malaisé de bien juger de ce que les autres ont écrit et d'en tirer le meilleur sans rien prendre avec cela de mauvais, les vérités particulières qui sont par cy par là dans les livres sont si détachées et si indépendantes les unes des autres, que je croy qu'il serait besoin de plus d'esprit et d'industrie pour les assembler en un corps bien proportionné et bien en ordre, suivant le désir de l'auteur (Comenius), que pour composer un tel corps de ses inventions.»* (Lettre à MERSENNE, cité par MANDROU, 1973, *Des humanistes aux hommes de science*, Seuil, p.164).

Le travail sur le savoir que DESCARTES propose est très précisément celui que la théorie de la transposition didactique décrit comme l'effet de l'intention d'enseigner. Ce travail de transposition produit *«... l'ordre et l'arrangement des objets sur lesquels il faut faire porter la pénétration de l'intelligence... nous y resterons soigneusement fidèles si... partant des (propositions les) plus simples de toutes, nous tâchons de nous élever par les mêmes degrés... »* Ce temps, fondé sur la description rationnelle du savoir, est très précisément le temps didactique.

Mais ce temps, produit par l'exposition ordonnée du savoir, ne permet semble-t-il qu'une forme de recommencement, une reprise et une réorganisation des savoirs déjà connus. Pour produire du nouveau sur l'élan de cette reconstruction, il faut supposer que le nouveau puisse sortir de l'ancien, ce qui ne mène pas loin celui qui ne sait pas déjà beaucoup, ou qui avance sans maître. Car, chaque fois que la déformation professionnelle d'un enseignant lui fait confondre l'organisation du savoir qu'il expose avec l'organisation du savoir quand il vient d'être produit, c'est-à-dire, chaque fois qu'un enseignant oublie l'existence d'une transposition didactique, Guy BROUSSEAU le rappelle sous cette forme : *« les raisons de l'exposé du savoir* (qui produisent le texte du savoir enseigné) *ne sont pas des causes de l'invention du savoir* (ces causes sont les problèmes, que le savoir permet de résoudre) *»*.

On ne s'étonnera donc pas des multiples remarques sur ce point : ce que DESCARTES expose est d'abord une remise en ordre, disent en substance de nombreux historiens. La question : « Cette remise en ordre accompagne-t-elle un travail de production de savoirs nouveaux ? » est alors posée, et chacun peut retrouver, dans les éléments de l'organisation nouvelle, des matériaux reconnaissables dont la paternité n'est pas cartésienne : nous trouvons là les limites de tout exposé à usage didactique, qui ne nomme pas ses emprunts et semble toujours, comme un bricolage, réalisé avec des matériaux que l'auteur du montage n'a pas pensés depuis leur origine, par lui-même, des matériaux qui gardent la trace de leur origine .

Cependant, *La Géométrie*, annexée au *Discours*, montre un visage que la description précédente ne nous avait pas fait imaginer : car DESCARTES y suit ses préceptes en commençant par un problème qui, s'il doit être considéré comme relevant de l'évidence première, suppose du lecteur une culture scolaire complète relative à la géométrie ancienne ; et les moyens par lesquels il attaque ce problème sont les savoirs algébriques les plus développés parmi ceux dont disposent les mathématiciens de son époque. Ainsi, DESCARTES s'appuie sur le travail des problèmes donnés par la culture ancienne pour avancer avec sûreté dans la voie de la certitude. Cette remarque n'est pas fréquemment posée, parce que la théorie de la transposition didactique ne fait pas partie des outils de l'historien.

De ce fait, *La Géométrie* – considérée comme texte scientifique – est rarement associée au *Discours de la méthode* – considéré comme texte didactique –, alors que le travail d'invention mathématique sur les questions de *La Géométrie* donne très probablement à DESCARTES, comme le montre la tentative inachevée des *Regulæ ad directionem ingenii*, l'occasion d'imaginer le « projet d'une science universelle » et le lieu d'expérimentation d'une « méthode » capable de produire une telle science à partir des sciences existantes.

Mon exposé s'appuie en particulier sur l'analyse de Vincent JULLIEN, qui a montré (dans les pages 35 à 50 de *Descartes, La Géométrie de 1637*, Coll. Philosophies, PUF) l'intérêt de la mise en rapport de ces trois textes. C'est donc le paradoxe apparent produit par la mise en rapport de *La Géométrie* avec *Le Discours de la méthode*, que je voudrais travailler ici pour montrer comment il relève d'un paradoxe didactique connu, que les interprétations constructivistes ne peuvent résoudre parce que l'objet de la méthode n'est pas la connaissance dans son état natif, mais l'exposé à usage didactique des savoirs culturellement donnés, dont DESCARTES montre, en particulier dans le cas de *La Géométrie*, la productivité scientifique. Je vais donc tenter d'examiner la méthode comme une description des ***principes des stratégies gagnantes***, ainsi que JULLIEN l'énonce (p. 18) : *« Si l'on comparait l'acquisition de connaissances certaines à un jeu, la méthode ne fournirait pas les "règles du jeu", mais plutôt les principes (ou règles) des stratégies gagnantes »*, en s'appuyant sur une note de J. BRUNSCHWIG dans sa traduction des *Regulæ* (Garnier-Flammarion, note 2, p. 92).

Introduction

Je considère ici que le *Discours* introduit, à l'intention des lecteurs, le « Projet d'une science universelle qui puisse élever notre nature à son plus haut degré de perfection », puisque c'est sous ce titre que DESCARTES voulait d'abord publier. Cependant, le travail privé de ce projet s'est inscrit dans les *Regulæ*. DESCARTES y a pris, pour fondement et modèle, les règles de l'étude et les produits de l'instruction mathématique, parce qu'il les pense avec plus de précision et qu'il les met en œuvre avec plus de succès.

Je commencerai par un commentaire de la règle IV, où le projet d'une *Mathesis universalis* s'énonce. *Matanein*, c'est d'abord, selon le *Robert historique*, ce qui peut être enseigné ; c'est-à-dire, le savoir considéré comme discipline d'enseignement : ainsi PLATON débat-il, dans le dialogue du *Ménon*, de la question : « *La vertu est-elle* **enseignable** *?* », et c'est à cette occasion qu'il montre que les mathématiques, pour leur part, sont **enseignables**. Même si SOCRATE pense qu'il ne transmet pas à l'esclave un savoir qui aurait été une possession préalable de SOCRATE, il montre que l'esclave peut, bien questionné, se ressouvenir des mathématiques ; tandis que la vertu n'est pas un objet de réminiscence. Lorsque DESCARTES écrit les *Regulæ*, il expose dans cette règle (Librairie Vrin, 1970, p.27), que le nom de *Mathesis universalis*, qu'il prend alors pour nommer la méthode, vient d'une autre propriété du terme : *«... il n'est presque personne, pourvu qu'il ait seulement touché le seuil des écoles, qui ne distingue facilement parmi ce qui se présente à lui, ce qui appartient à la Mathesis et ce qui appartient aux autres disciplines. En y réfléchissant avec plus d'attention, il me parut enfin clair de rapporter à la Mathesis tout ce en quoi seulement on examine l'ordre et la mesure, sans avoir égard si c'est dans des nombres, des figures, des astres, des sons, ou n'importe quel autre objet, qu'une pareille mesure soit à chercher. Il en résulte qu'il doit y avoir une science générale (je souligne) qui explique tout ce qu'on peut chercher concernant l'ordre et la mesure, sans les appliquer à une matière spéciale... »* Ainsi, DESCARTES affirme que les disciplines que sont l'Astronomie, la Musique, l'Optique, la Mécanique, ne sont que des noms de *matières* auxquelles s'applique la *Mathesis Universalis*, *« ce qui leur a fait donner le nom de parties des mathématiques. »* c'est pour cela, conclut-il, que *«... conscient de ma faiblesse, j'ai décidé d'observer obstinément un tel ordre dans la recherche des connaissances que, débutant toujours par les objets les plus simples et les plus faciles, je ne passe jamais à d'autres sans qu'il me semble que les premiers ne me laissent plus rien à désirer. C'est pourquoi j'ai cultivé jusqu'ici cette Mathesis Universalis, autant qu'il était en moi, en sorte que je crois pouvoir dans la suite traiter de sciences plus élevées, sans m'y appliquer prématurément. »* La *Mathesis Universalis* est la plus simple des sciences, parce qu'elle est dégagée de la complexité supplémentaire amenée par les objets particuliers des autres sciences.

Les *Regulæ* apparaissent ainsi comme une tentative pour énoncer la *mathesis*, les règles par lesquelles DESCARTES étudie les sciences dans l'ordre qui convient à cette entreprise pour progresser dans les certitudes qui les caractérisent, tandis que les quatre règles du *Discours de la Méthode*, exposent brièvement l'essentiel de ce que nous devons en connaître, pour entrer à sa suite dans le projet de nous instruire en ces sciences nouvelles où la *mathesis* se réalise. Suivant en cela G. ISRAËL je considérerai alors *La Géométrie* comme l'exemple premier du travail de production de la *Mathesis Universalis*, un savoir que, selon DESCARTES, les anciens ont sans doute connu mais qu'ils ont tenu secret : pour lui, la tâche consiste à mettre au jour (à inventer) ce savoir, comme il l'a fait d'abord dans le cas de la géométrie. Ainsi, *La Géométrie* démontre l'efficacité et l'assurance que donne la méthode, et elle en est comme la pierre de touche.

Je ne fais donc pas œuvre d'historien, mais je m'appuie sur la connaissance historique d'un cas et plus précisément, sur une part, relative aux mathématiques, de la biographie didactique d'un élève remarquable. Dans le rapport de DESCARTES aux mathématiques, j'essaierai d'étudier ce qui a formé « la méthode » c'est-à-dire, les gestes **autodidactiques** d'enseignement et d'étude des mathématiques qu'il a lui-même décrits. Qu'on me comprenne bien : j'adhère à l'idée cartésienne, selon laquelle cette méthode ne fait pas discipline, et je ne considère donc pas que la méthode soit un objet d'enseignement possible. La méthode peut seulement faire l'objet d'un discours. Mais *le discours de la méthode expose une connaissance didactique : c'est cette connaissance que je cherche à identifier.*

Première partie

Je me propose donc de commencer par parcourir les *Regulæ*, pour y étudier les effets d'une intentionnalité didactique qui est d'abord relative à des objets mathématiques : je suivrai ici le travail réalisé avec Yves CHEVALLARD en 1987.

Le premier mouvement consiste à poser, comme je l'ai déjà signalé ici, que le savoir qu'il convient de construire doit suivre **un ordre à part**, pur de toute importation incontrôlée à partir du savoir ambiant. Le doute méthodique est le moyen de ce **recommencement absolu**. Il installe la construction à venir **en un lieu où nul autre discours ne peut venir en contrarier la marche**. Voici ce qu'en dit la Règle II : *« Aussi vaut-il mieux ne jamais étudier que de s'occuper d'objets tellement difficiles, que, sans pouvoir distinguer le vrai du faux, nous soyons forcés d'admettre pour certain ce qui est douteux... En conséquence... nous déclarons qu'il faut se fier seulement à ce qui est parfaitement connu et dont on ne peut douter... »* et la règle III énonce : *« Pour ce qui est des objets considérés, ce n'est pas ce que pense autrui ou ce que nous conjecturons qu'il faut rechercher, mais ce que nous pouvons voir par intuition avec clarté et évidence... »*

DESCARTES commente : *«... par* intuition*, j'entends... le concept que l'intelligence pure et attentive forme avec tant de facilité et de distinction qu'il ne reste absolument aucun doute sur ce que nous comprenons... et dont la certitude est plus grande, à cause de sa plus grande simplicité, que celle de la déduction elle-même... »* L'intuition correspond semble-t-il à ce que les mathématiciens, dans les exposés, nomment des « évidences ». Car tous **les préceptes développés dans les huit premières règles servent à se prémunir contre ce qui pourrait annuler le chemin parcouru**, soit en invalidant un élément initial, soit en invalidant une production intermédiaire, soit en invalidant la direction un moment suivie. Ainsi, et c'est la règle IV, *« Toute la méthode consiste dans l'ordre et l'arrangement des objets... nous y resterons soigneusement fidèles, si nous ramenons graduellement les propositions compliquées et obscures à des propositions plus simples, et ensuite si... nous tâchons de nous élever par degrés à la connaissance de toutes les autres. »* puis, règle VII, *«... il faut passer en revue une à une toutes les choses qui se rattachent à notre but par un mouvement de pensée continu et sans nulle interruption... »* au point que la règle VII précise qu'il ne faut jamais poursuivre au delà d'un point *«... que notre* *entendement ne puisse assez bien voir par intuition...»*

Les règles IX et X précisent la nécessité d'un exercice systématique de la méthode, et DESCARTES poursuit par la règle XI : *« Après l'intuition de quelques propositions simples, quand nous en tirons une autre conclusion, il est utile de parcourir les mêmes conclusions dans un même mouvement continu et nulle part interrompu de la pensée, de réfléchir à leurs rapports mutuels, et d'en concevoir distinctement plusieurs à la fois, autant qu'on le peut...»* et la règle XII indique comment cette intuition productrice de liaisons pertinentes doit être développée. En quelque sorte, il s'agit, en tout point de l'étude, de construire une plate forme de départ, une *intuition* suffisamment proche pour que la certitude soit conservée, et suffisamment vaste pour que la stabilité de la progression à venir soit assurée. *L'intuition apparaît ainsi comme l'expression d'une certitude instruite.*

Les règles XIII et suivantes portent sur les moyens d'utiliser les mathématiques dans une modélisation en posant convenablement les « questions », c'est-à-dire, en identifiant les problèmes de mesure, en utilisant un modèle géométrique intermédiaire, en définissant des notations algébriques simples, en centrant la réflexion sur les relations des grandeurs entre elles plutôt que sur la connaissance de leurs valeurs, en réduisant les relations aux quatre opérations arithmétiques, qu'il faut se garder de chercher à effectuer prématurément, et en exprimant les grandeurs cherchées de plusieurs façons différentes, pour obtenir « des comparaisons entre des choses égales », suite à quoi il sera possible de chercher à réduire les équations ainsi obtenues.

Les *Regulæ* sont inachevées, soit parce qu'elles débouchent en fait sur La Géométrie, soit parce que DESCARTES n'y aboutit pas à l'identification de la *mathesis*, dans la mesure où l'approfondissement des notions impliquées dans le travail scientifique (la grandeur, la pluralité, l'étendue, la mesure, les figures, les notations que l'on peut en faire et les opérations simples sur ces objets dont les notations permettent de rendre compte, etc.) aboutit au mieux à une **algébrisation**. Alors même qu'il démontre l'efficacité de l'**algébrisation** comme système de production de raisonnements, DESCARTES semble avoir hésité à réduire la *Mathesis universalis* à ce qu'en démontre la modélisation algébrique du raisonnement géométrique qu'au même moment il réalisait pourtant avec le succès que l'on sait : comme s'il avait pensé qu'à l'évidence, l'usage absolu de sa méthode allait lui interdire l'intégration des réponses aux questions philosophiques dans le domaine des savoirs constructibles avec certitude, et qu'il avait reculé devant cette découverte.

Deuxième partie

Je me propose maintenant d'interroger le texte des *Regulæ* à la lumière des théories de la transposition et, plus particulièrement, de la description du temps didactique.

La première idée générale que l'on peut tirer de la visite rapide que nous venons d'en faire, c'est que <u>l'ordre du savoir</u>, que construit l'étude menée selon la méthode, <u>doit être pur</u> de toute concession au savoir déjà connu. C'est **une première fiction propre au jeu didactique** : *le savoir parle de lui-même, il ne s'autorise de personne, il est imperméable aux discours extérieurs.* Nul besoin de références, il est indifférent, hostile à tout éclectisme.

Tel que la théorie de la transposition le définit, le « texte du savoir » produit au terme du processus de transposition didactique possède nécessairement ces propriétés.

Il est absolument linéaire, parfaitement segmentaire. Le texte du savoir s'organise selon la linéarité des raisons internes à un exposé du savoir, et cette linéarité ne suppose ni hésitation ni faille, elle se doit de parcourir exhaustivement le domaine considéré sans laisser aucun lieu dans l'ombre, pour se garantir d'être absolue.

Les difficultés doivent être, par principe, divisibles autant qu'il est nécessaire pour que celui qui franchit chacun des seuils partiels ait de ce fait réalisé toute la progression nécessaire sur ce sujet. C'est **une deuxième série de fictions, propre au jeu didactique** : *l'étude du savoir commence à son début et progresse sans accrocs ni failles, elle produit ainsi des acquis partiels définitifs.* C'est à cette seule condition que le texte du savoir peut trouver son autorité en lui-même, du premier coup.

La nature du texte du savoir est un effet du « contrat didactique » usuel, qui prévaut parce qu'il permet de résoudre pratiquement un paradoxe connu dès l'antiquité, celui de l'injonction faite à l'élève « d'apprendre ce qu'il ne connaît pas et qui par conséquent ne peut pas lui être nommément désigné ». L'organisation didactique du savoir permet à tout moment au professeur de démontrer à l'élève qu'il peut trouver par lui-même ce qu'il ignore, puisque cela se déduit de ce que l'élève sait déjà. Le nouveau provient toujours de l'ancien. Cela suppose que les obstacles puissent toujours être réduits en une suite de degrés telle, que chaque degré nouveau soit une conséquence naturelle des degrés précédents. Ainsi, les degrés déjà franchis ne sont jamais remis en question.

Cependant, la méthode exposée dans les *Regulæ* est réaliste. L'exposé du texte du savoir est sans doute linéaire, mais sa lecture suppose, pour être adaptée à la linéarité de l'organisation, que l'intuition initiale soit à tout moment reconstruite afin de fournir un point d'appui pour la construction à venir. *Les fictions institutionnelles du temps didactique sont porteuses d'injonctions didactiques bien précises, qui renvoient à l'action personnelle de l'élève ce que l'enseignement ne peut prendre en charge.* C'est une définition par défaut. **La solution tient dans l'étude et dans son lieu**, qui est nécessairement extérieur, mais qui doit pourtant veiller à rester complémentaire à la l'enseignement proprement dit.

Les règles IX à XII décrivent les gestes de l'étude, par lesquels, en lien avec l'enseignement mais sous sa responsabilité personnelle, l'élève peut « suivre » le « cours » du texte du savoir qui se déroule en classe. Tel est, pour moi, le sens didactique du travail renouvelé de l'intuition auquel DESCARTES s'astreint en suivant la règle XI, qui termine sur un exemple remarquable de ce que peut être l'intuition… du degré d'un problème **algébrisé** : *« Par exemple, supposons que je parcoure quelques grandeurs continuellement proportionnelles, voici tout ce à quoi je réfléchirai. C'est par un concept semblable… que je reconnais le rapport qui existe entre la première et la seconde, entre la seconde et la troisième… Mais je ne puis concevoir aussi facilement quelle est la dépendance de la seconde à l'égard de la première et de la troisième à la fois… car cela ne peut se faire qu'à l'aide d'un concept enveloppant à la fois deux des précédents. Étant donné seulement la première et la quatrième, il me sera encore plus difficile de voir par l'intuition les deux moyennes, parce qu'il y a ici trois concepts impliqués… »*

Le *Discours* reprend les conséquences de ces intuitions premières, en un résumé saisissant de cela seul, qui doit être retenu par le lecteur des travaux cartésiens pour profiter au mieux de l'exposé qui en est publié.

Le premier précepte donne le point de départ de l'exposé : *« ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle. »* Une attitude qui ne prédispose guère à reconnaître une filiation historique, à se référer à une œuvre : *le savoir cartésien n'a pas de passé.* Ce précepte donne une règle de jugement de la qualité du point choisi : ***« ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute »***.

Le second précepte garantit une progression régulière. DESCARTES organise celle-ci en supposant qu'il est toujours possible de ***« diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre »***. Le discours tenu dans ces conditions se déploie selon une ligne absolument singulière et ne revient jamais sur ses pas. De ce fait, *le discours tenu ne s'autorise de personne que de son organisation propre.*

Le troisième précepte décrit le mouvement par lequel un chemin de cette sorte peut être tracé : ***« conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples... à connaître, ... jusques à la connaissance des plus composés ; ... supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement »***. C'est une garantie nécessaire à qui vient d'affirmer qu'il ne s'autorisera désormais que de lui-même. Mais *cette attitude interdit l'irruption d'un nouveau* qui pourrait annuler le chemin parcouru : tout nouveau procède donc nécessairement de l'anciennement connu.

Le quatrième prévient contre les lacunes, qui pourraient hypothéquer le cheminement vers la vérité : ***« faire partout des dénombrements si entiers, ... que je fusse assuré de ne rien omettre. »*** Il pourrait être interprété comme le signe d'un fantasme d'exhaustivité, mais il est évident qu'il n'est lui aussi que la conséquence incontournable du second. C'est encore en effet *une garantie contre la possible irruption d'un nouveau qui imposerait de tout reprendre du début.*

Car pour DESCARTES, *étudier le savoir, c'est d'abord se l'exposer à soi-même.* Il ne pense pas que tout élève doive agir ainsi, puisqu'il reproche à ses professeurs leur carence sur ce point. Le dernier exemple en date d'une attitude semblable à celle de DESCARTES est naturellement celui de Nicolas BOURBAKI, dont le traité « reprend les mathématiques à leur début », parce que l'enseignement qui lui était proposé posait les constructions nouvelles sur les fondations anciennes. Remarquons à ce propos que le coût énorme d'une reconstruction menée avec la rigueur cartésienne impose que son auteur se fasse l'idée que, au moins, le travail entrepris sera définitif. Or on sait, aujourd'hui, que beaucoup d'autres ont, depuis DESCARTES, entrepris de reprendre la tâche et qu'ils ont tous dû imaginer que leur reconstruction serait, enfin, définitive.

Ainsi, l'élève DESCARTES est obligé de s'exposer à lui-même le savoir selon ses raisons. L'expression est de Gaston Bachelard, qui semble avoir pratiqué cet exercice à son usage personnel tant il emploie ce terme comme si tous les élèves procédaient de cette manière, DESCARTES « repasse son cours ». Certains parmi vous se souviennent sans doute avoir eu ce projet, et l'avoir réalisé avec plus ou moins de fermeté et de rigueur. C'est le **projet de s'enseigner soi-même, tel qu'il peut se former après qu'un premier enseignement ait présenté les objets sur lesquels l'effort autodidactique doit porter**.

On peut alors considérer que le projet cartésien est une sorte de théorie de l'enseignement. Mais l'étude des conditions de production de cette théorie, que nous avons esquissée ici, montre ce qu'en seront les limites, puisque *cet enseignement suppose que l'élève connaisse déjà ce qui lui sera enseigné selon la raison.* Nous terminerons alors cet exposé en recherchant ce que nous pouvons en apprendre, et ce qu'il nous restera à connaître.

Troisième partie

DESCARTES a décrit précisément ce que Yves CHEVALLARD a appelé le temps didactique. La théorie en a été exposée pour la première fois en 1980, dans le chapitre 8 de *La Transposition Didactique,* et nous en avons exposé la genèse historique dans un ouvrage publié par l'IREM d'Aix-Marseille en 1987.

C'est, depuis deux siècles, le temps scolaire ordinaire ; ce fut d'abord le temps de l'instruction des enfants qu'imagina COMENIUS dans *« la Grande Didactique »* ; ce fut, après DESCARTES, le temps de l'enseignement des sciences ; c'est surtout devenu, progressivement, le temps de toutes les écoles « à l'occidentale », qui organisent l'enseignement progressif des enfants selon leur âge, en commençant par des savoirs élémentaires produits spécialement à l'usage didactique : « B.A.-BA ». Le temps didactique est progressif, fondé sur un exposé du savoir qui se présente comme la lecture d'un texte. L'exposé didactique part du certain, se fonde sur la division des difficultés, mène du simple au composé, et se prémunit contre toute nécessité de retour en arrière en prétendant construire des acquis définitifs. Ainsi, l'avenir se trouve aussi étranger à la construction scolaire moderne (ou à la construction cartésienne) que le passé : nombreux sont les historiens qui ont remarqué à quel point l'auteur de La Géométrie pensait en avoir définitivement terminé avec ce domaine, nombreux sont les élèves et même, les professeurs, qui pensent que, sur les questions qu'ils enseignent, tout a été dit et qu'il n'y a rien de plus à dire, mais surtout qu'il n'y a plus rien à chercher : que dire, encore, des techniques de la division ? Ramené systématiquement à l'ancien, le nouveau n'est pas pensé en tant que tel. L'existence de l'inconnu s'en trouve niée. Le plus souvent, c'est cela qui interdit la réussite de l'organisation linéaire, régulière, irréversible, de la progression : du nouveau émerge, qui n'était pas prévu. Le travail demandé par DESCARTES doit être repris sans cesse, par chaque cohorte d'élèves, par chaque génération de mathématiciens.

Je reviendrai rapidement sur le *Discours de la méthode*, pour en mettre l'interprétation didactique à l'épreuve de l'étude exposée dans le troisième essai, *La Géométrie.*

Car la première lecture de *La Géométrie* étonne le lecteur prévenu, qui s'attend à y voir le travail mathématiques « repris du début », selon l'expression de Nicolas BOURBAKI. Il est vrai que l'on apprenait aussitôt que pour BOURBAKI, le début se trouvait exactement à l'aboutissement des études universitaires : il consistait dans la culture de la Licence de Mathématiques !... Or, voilà que *La Géométrie* commence par un problème qui termine la géométrie grecque et où elle achoppe, et voilà que l'auteur y met en œuvre d'emblée une technique algébrique nouvellement mise au point.

Si l'on considère que le *Discours de la méthode* met la méthode des *Regulæ* à l'épreuve de la réalité d'une étude mathématique, et que *La Géométrie* en expose l'essai, cela semble relever d'une aimable fiction. DESCARTES a pourtant, dans les *Regulæ*, annoncé le travail qui aboutit à la solution du problème de PAPPUS : il présente ainsi, dans *La géométrie*, la manière dont il démontre sa solution : *«... l'équation qui sert à déterminer les points cherchés, ne monte jamais que jusques au carré ; il est évident que la ligne courbe où se trouvent ces points est nécessairement quelqu'une de celles du premier genre ; à cause que cette même équation explique le rapport qu'ont tous les points des lignes du premier genre à ceux d'une ligne droite.../... Au reste, à cause que les équations* *ne montent que jusques au carré, sont toutes comprises en ce que je viens d'expliquer* ... le problème des anciens en trois et quatre lignes est icy entièrement achevé.* » Or, j'ai cité la règle XI, dans laquelle DESCARTES concluait : *«... Mais je ne puis concevoir aussi facilement quelle est la dépendance de la seconde (proportionnelle) à l'égard de la première et de la troisième à la fois... car cela ne peut se faire qu'à l'aide d'un concept enveloppant à la fois deux des précédents... »* et il est vrai que ce concept est une équation de degré deux : le degré de l'équation mesure, en quelque sorte, le nombre d'objets pris ensemble dans la pensée de leur interrelation. L'équation exprime cette interrelation de telle manière qu'on peut obtenir, en interrogeant les caractères de l'équation, des informations sur l'interrelation. Ces informations portent en particulier sur le nombre d'objets en interrelation, donc sur la difficulté des raisonnements qui peuvent produire une solution du problème.

Car, et c'est l'autre savoir que j'ai appris du rapprochement des *Regulæ* avec *La géométrie* (et, il faut le dire, du travail d'analyse de Vincent JULLIEN), les opérations algébriques sont considérées par DESCARTES comme des modèles du raisonnement géométrique, qui ne porte pas sur des nombres mais sur des grandeurs (des objets mesurables), nommées de la manière la plus simple possible (par une simple lettre) tandis que les opérations élémentaires sur ces grandeurs sont nommées par les opérations élémentaires $+$ et $\times$. C'est un raisonnement qui produit normalement l'analyse du problème, et cette analyse aboutit à l'énoncé des interrelations entre les objets qui participent à la définition du problème. Le travail consiste ensuite à démêler l'inconnu du connu, en reprenant à partir de l'inconnu maintenant bien identifié. Ce travail d'analyse/synthèse, le calcul algébrique le prend en charge, et le degré des équations selon les inconnues donne la complexité du raisonnement qui permet de démêler l'inconnu du connu[1]. C'est ainsi que DESCARTES peut annoncer superbement, au bout de quatorze pages, avoir « résolu complètement » (en cinq pages) le « problème de PAPPUS en trois, quatre, ou cinq lignes », dans toute sa généralité, puisque c'est un problème de degré deux. DESCARTES poursuit La géométrie par l'exposé de la question de la recherche des moyennes proportionnelles pour exposer la question du degré. Mon hypothèse sur le fait que le travail de l'intuition exposé dans les *Regulæ* permet à l'étudiant de suivre, et même d'imaginer quelque anticipation, semble donc recevoir ici un fondement sérieux. c'est ce point que je voudrais étudier maintenant, pour finir.

La description du temps didactique, mise à l'épreuve de la réalité d'une classe de mathématiques, apparaît comme un texte de didactique-fiction dans la mesure où les élèves qui apprennent sont justement ceux qui trouvent un peu d'espace où agir librement, ceux qui ne se soumettent pas absolument aux fictions didactiques de la progression sans retour dans la suite échelonnée des raisons d'un texte qui contiendrait tout le savoir. Ces fictions, qui semblent être les savoirs des acteurs d'un système didactique, des savoirs pratiques relatifs à l'enseignement et à l'apprentissage d'une discipline scientifique, correspondent pourtant à des fictions institutionnelles étonnamment efficaces. J'en vois deux raisons.

Premièrement, elles permettent de donner des règles de comportement aux acteurs d'un système qui est fondé sur une injonction paradoxale si nette, qu'elle est relevée par tous les auteurs d'études sur l'enseignement, depuis SOCRATE et le dialogue du *Ménon*,

[1] Josep GASCON a bien étudié cette question dans un numéro récent de (RDM......).

que j'ai cité en introduction. Je l'ai montré en étudiant précisément le texte des *Regulæ*.

Deuxièmement, elles ne rendent pas compte de l'efficacité didactique des comportements qu'elles produisent. Pour des développements, je renverrai l'auditeur intéressé aux travaux que j'ai menés sur ce point depuis maintenant cinq ans (et plus particulièrement à l'article du numéro spécial « didactiques » de la Revue de l'Éducation XXII, à paraître en décembre). ***La Géométrie*** **montre comment l'idée du travail permanent de l'intuition permet à celui qui étudie, au terme de ses études scolaires, de poser comme des problèmes scolaires les questions sur lesquelles ses professeurs ont buté.** Cela étonne toujours les moralistes de l'éducation, les innovateurs de l'enseignement direct des problèmes ou des méthodes, qui voudraient contourner par un côté ou par l'autre la réalité de la transposition didactique des savoirs, mais c'est un fait observable : **l'enseignement de savoirs mathématiques transposés peut produire des élèves qui posent avec assurance des questions nouvelles, dès lors que ces élèves ont appris les gestes de l'étude des œuvres qui leur sont ainsi enseignées.**

Conclusion

Quel est, alors, le problème de l'enseignement ? C'est d'aider les élèves à réaliser, chacun pour soi-même mais chaque fois, au profit de tous, l'injonction cartésienne. Cela suppose sans doute un professeur conscient des problèmes difficiles qu'il affronte. Mais la conscience ou la connaissance, en ces matières comme en d'autres, ne suffisent pas.

DESCARTES a expliqué dans les règles IX à XIII les préceptes que peut suivre un élève, mais le problème du professeur est celui de la direction d'une étude qui comprendrait la réalisation de ces préceptes. Certaines études didactiques récentes ont commencé de montrer la voie d'une solution possible.

Deux directions de travail se proposent aujourd'hui : l'une consiste à organiser l'étude, par les élèves eux-mêmes, en dehors des heures de classe, à long terme, de certains **« grands problèmes des mathématiques »** : ainsi en est-il par exemple des fractions à l'École Élémentaire, des systèmes de nombres au Collège, des problèmes linéaires et de la linéarisation des problèmes non linéaires au Lycée, etc. Le professeur peut choisir certaines des questions produites, qu'il juge potentiellement plus productives, et les donner comme sujets d'une étude collective plus systématique, les solutions proposées peuvent alors être exposées à intervalles réguliers, elles participent à la progression dans le savoir. **Il s'agit, en parallèle au déroulement du temps didactique ordinaire pour conserver une articulation forte avec la progression scolaire, de faire du professeur un directeur d'étude, sur une partie bien délimitée des savoirs à étudier .**

L'autre consiste à **reprendre, officiellement, au niveau scolaire $n+p$, les savoirs étudiés au niveau n, pour tenter de les approfondir en utilisant les outils mathématiques forgés entre temps**. C'était il n'y a guère une pratique courante, qui était même systématique à l'entrée dans un nouveau cycle d'études (Brevet Élémentaire, Troisième, Maths Sup.). C'est aujourd'hui une pratique perdue[2], j'en veux

[2] De ce fait, je peux quotidiennement constater que le jeune certifié a encore tout à apprendre, sur les mathématiques qui lui ont été enseignées et qu'il devra bientôt transmettre, parce que jamais ses études ne lui ont donné l'occasion de revenir sur ce qu'il savait pour le reconstruire, l'occasion de l'examiner selon la méthode : car souvent il ne sait, des mathématiques de l'école, que ce qu'il savait en « passant de classe ». En particulier, il ne sait pas toujours « faire les exercices » qu'il voudrait poser : il arrive même assez souvent qu'il n'ait jamais su, concernant la trigonométrie, ou la combinatoire, la géométrie dans l'espace ou les statistiques, le calcul

pour exemple cet enseignant universitaire, qui, en réponse à la question : « Que sait un élève qui sort du DEUG A ? » s'était écrié : « Dans le meilleur des cas, juste assez pour suivre en Licence sans trop de casse ! » Quel que soit le niveau, la réponse est la même.

Il s'agit dans les deux cas, de **donner aux élèves des moyens personnels aptes à ouvrir leur avenir à l'irruption du nouveau et pour cela, de leur donner une certaine maîtrise de leur passé**. Le travail que nous venons de réaliser en étudiant la méthode d'un élève remarquable montre la pertinence de ces éléments didactiques de réponse.

---

barycentrique, la rectitude des droites ou la résolution des équations polynomiales, que ce qu'il faut pour être un élève moyen de la classe où de telles questions sont abordées.

PROBABILITÉS, RÉALITÉS ET... PESANTEUR(S)[1]

Il est rare qu'un problème économique et social d'envergure puisse être éclairé de façon décisive par le recours à des mathématiques du niveau de Terminale S. Actuellement éditorialiste de l'Express, Claude ALLEGRE en propose un exemple, lumineux au premier abord, qui pourrait être soumis aux élèves. Dans son « Éphéméride » du n° 2591 (1 au7 mars 2001), il écrit :

> *« Prenons pour exemple une maladie rare qui atteint, disons 1 individu sur 10 000 (ce peut être le Sida ou la maladie de la vache folle). On met au point un test pour détecter si un individu est infecté par la maladie. Ce test donne des résultats fiables dans 99,9% des cas. C'est donc a priori un excellent test. Supposons à présent qu'on pratique le test sur un individu pris au hasard et que ce test soit positif. Quelle est la probabilité que l'individu ainsi testé soit effectivement infecté ? Le calcul des probabilités nous répond sans hésiter 10% (9% exactement). Autrement dit, alors que le test est positif, l'individu a 90% de chances d'être sain ! ».*

Et il poursuit :

> *« Si dans notre exemple la maladie atteignait 1% des individus, le test positif sur un individu pris au hasard l'informerait qu'il a plus de 90% de chances d'être infecté ».*

J'avoue ma stupéfaction et mon incrédulité à la première lecture. J'ai pris mon stylo et j'ai transformé le texte en arborescence avec des probabilités conditionnelles. Dans le premier cas, la probabilité d'être infecté sachant le test positif est de 9,08% ! Dans la seconde hypothèse, cette probabilité passe à 90,98%. ! Les résultats sont irréfutables.

Les tests sont-ils utiles ? demande Claude ALLEGRE. Il déduit des résultats obtenus que :

> *« Les tests de dépistage ne sont efficaces que pour les maladies fréquentes ou les épidémies. Dans le cas des maladies rares, contrairement à ce que disent les bons esprits, (« le test n'est pas parfait, mais ça vaut mieux que rien »), il faut que les tests soient parfaits. »*
>
> *« Si on applique un tel test (excellent mais imparfait) pour dépister la maladie de la vache folle et qu'on abatte les vaches testées positives, on va déclencher un massacre bovin généralisé, ruineux et inutile. »*

Aucune des personnes auxquelles j'ai soumis le problème n'a eu l'intuition du résultat qu'un élève de Terminale S, armé d'un stylo et formé aux probabilités du baccalauréat, est capable de vérifier. « La connaissance scientifique est l'inverse du bon sens. Croire que l'on peut comprendre le monde avec comme seul bagage le bon sens, même appuyé sur l'intelligence, est une erreur ». L'instrument qui défie le bon sens, infirme (même armé d'intelligence et de beaucoup d'ordinateurs) face à la réalité

[1] Ce texte doit beaucoup à Henri LOMBARDI, dont la critique sévère de la première version m'a obligé à affiner une pensée un peu approximative. Le débat permet de progresser.

complexe du monde, s'appelle les Mathématiques. Le journaliste Claude ALLEGRE rappelle ce que le ministre avait si violemment (et si stupidement) contesté…

À y regarder de plus près cependant, l'exemple proposé n'est pas aussi limpide qu'il y paraît au premier abord. Il exige une double prise de distance : que signifie « un test fiable à 99,9% ? ». Mais alors, quelles décisions prendre si, lorsqu'on pratique les tests, on obtient les résultats décrits ?

Sans doute Monsieur ALLEGRE considère-t-il que la probabilité d'être sain sachant que le test est positif (**P**(S/P)) est égale à celle d'être malade sachant que le test est négatif (**P**(M/N)) et que leur valeur commune est de 0,001. Or il n'y a aucune raison biologique pour que les deux probabilités soient égales. Il serait prudent de les distinguer. Soit y = **P**(S/P)) et z = **P**(M/N). Soit enfin x la probabilité d'être malade : x = **P**(M) . Ces trois nombres sont voisins de 0 (x car la maladie est rare, y et z car le test est réputé excellent. Le calcul fait dans ces hypothèses montre qu'à peu de choses près, la probabilité **P**(M/P) d'être malade sachant que le test est positif est de $\frac{1}{1+\frac{z}{x}}$. La probabilité **P**(M/N) d'être malade sachant que le test est négatif est de l'ordre de xy (ce qui est une excellente nouvelle). On mesure la grande sensibilité de z/x aux variations d'ordre de grandeur de z et x, d'autant **qu'il faut s'interroger sur la façon de les obtenir et sur leur fiabilité.**

Comment connaître précisément la proportion x de bêtes malades sachant que l'incubation se fait silencieusement et qu'on n'a pas de tests permettant de conclure ? Et si on se trompait d'ordre de grandeur ? Pour déterminer z faut-il abattre des bêtes réputées saines et analyser leurs tissus cérébraux, au risque d'affoler le consommateur si z n'est pas aussi négligeable qu'on le suppose ? Les choses sont loin d'être simples.

La décision liée à l'application du test (même pratiqué dans les conditions de l'exemple proposé) est loin d'être indiscutable ! La probabilité d'être testé positif est de l'ordre de 1,1 millièmes. Sur une population de 10 000 individus, on peut s'attendre à obtenir 11 tests positifs. On va donc sacrifier 10 bêtes probablement saines sur 10 000. L'hécatombe annoncée est ramenée à de justes proportions. Peut-on payer ce prix pour la sécurité alimentaire de la population (et/ou sa quiétude psychologique) ? La question est d'autant plus pertinente que la probabilité d'être malade avec un test négatif est de l'ordre du dix millionième ! Le test ne laisse échapper (dans les conditions décrites) aucune vache malade (un millième de vache sur 10 000 pour les puristes !)

La décision est politique et mérite débat. La science permet simplement de calculer l'ordre de grandeur du coût de la décision (abattre toutes les bêtes testées positives). À comparer avec le coût de l'analyse des tissus cérébraux de toutes les bêtes (réputées saines) abattues. La science ne saurait trancher à la place des citoyens informés du coût de leurs décisions

Il n'est en revanche point besoin de mathématiques pour réfuter une assertion imprudente (et fausse dans sa généralité) dans laquelle Claude Allègre s'enferre depuis de longs mois et qu'il répète dans le même éditorial : « Tous les corps tombent dans le vide avec la même vitesse, et c'est vrai aussi dans l'air en première approximation pour des trajets de quelques mètres. Tout le monde aujourd'hui a admis cela, sauf quelques journalistes du Canard enchaîné qui, il y a deux ans évoquaient l'effet de la résistance de l'air exactement comme l'évoquaient les collègues scolastiques de Galilée opposés à sa théorie et insensibles à l'expérience. » On retrouve la légendaire morgue et le mépris de l'ancien ministre pour tous ceux qui ne partagent pas ses avis, même clairement erronés.

Il n'est évidemment pas vrai que dans l'air, même en première approximation, deux objets quelconques tombent à la même vitesse. Voici **deux ballons sphériques de même rayon**, l'un de basket, l'autre publicitaire pour enfant, gonflé à la bouche. La résistance de l'air est la même pour les deux objets. Qui croira qu'ils tombent à la même vitesse ? Qui croira qu'un parachutiste tombe à la même vitesse, parachute ouvert ou fermé ? On discerne dans ces contre-exemples simples l'erreur de raisonnement de Monsieur Allègre. La résistance de l'air peut être considérable selon la forme de l'objet, et conduire à un mouvement de chute uniforme (parachute ouvert), alors que l'objet de même poids (et de forme compacte) tombe de manière uniformément accélérée. La masse de l'objet a (et elle seule) une influence décisive dans le premier exemple. **Masse et forme jouent évidemment un rôle dans la chute des objets non ponctuels dans l'air.**

Les mathématiques mettent en évidence les paramètres pertinents de la chute des corps dans l'air. Si l'on suppose que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse (cas des vitesses pas trop importantes), à la forme de l'objet (k est le Cx) et à l'aire de la projection de l'objet sur le plan perpendiculaire au déplacement (S) on obtient l'équation différentielle $mx''(t) + kSx'(t) - mg = 0$ dont la solution (avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$) est : $x(t) = g\left(\frac{m}{kS}\right)^2 \times \left(e^{\frac{-kSt}{m}} - 1\right) + \frac{mgt}{kS}$

Dans le cas où $\frac{kSt}{m}$ est voisin de 0 (mais alors seulement), le développement de Taylor à l'ordre 2 de x(t) restitue : $x(t) = 0{,}5\ gt^2$. Le paramètre pertinent est $u = \frac{kSt}{m}$. Si u est grand, le mouvement observé ne coïncidera avec le mouvement dans le vide que dans un intervalle infinitésimal, et non sur quelques mètres[2]. On voit en particulier que la masse joue un rôle, comme le confirme l'expérience.

Les mathématiques peuvent éclairer certains problèmes économiques et scientifiques. Elles évitent à l'esprit honnête de répéter durant des années les mêmes erreurs. Mais elles ne peuvent rien pour qui décide d'avoir raison contre l'évidence.

G.KUNTZ

[2] Prenons $g = 10\ m.s^{-2}$ et $t = 1$ s. Les distances parcourues en mètres sont 4,98 (u = 0,01), 4,84 (u = 0,1), 3,67 (u = 1), 1,6 (u = 5), 0,9 si u = 10. À comparer avec les 5 mètres parcourus dans le vide.

Sujets du Rallye Mathématique d'Alsace 2001 - Classes de première

1. De Fromentine à l'Ile d'Yeu

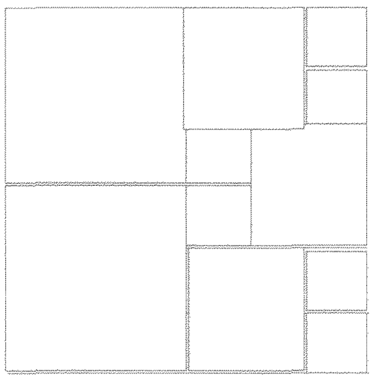
Deux bacs partent en même temps, l'un, l'Amporelle, de Fromentine vers l'Ile d'Yeu, l'autre, l'Insula Oya, de l'Ile d'Yeu vers Fromentine. L'Amporelle navigue plus rapidement que l'Insula Oya. Ils se croisent à la hauteur d'une bouée indiquant que l'Ile d'Yeu est à 7 km.

Une fois arrivés à destination, les deux bateaux s'arrêtent à quai pour débarquer et prendre leurs passagers, l'Amporelle restant à quai un peu plus longtemps que l'Insula Oya. Puis ils repartent pour leur point de départ et se croisent à nouveau à la hauteur d'une bouée indiquant que Fromentine est à 16,5 km.

Sachant qu'au moment de leur deuxième rencontre l'Insula Oya a navigué trois fois plus longtemps que l'Amporelle, quelle distance sépare Fromentine de l'Ile d'Yeu ?

2. Carré n-carrelable

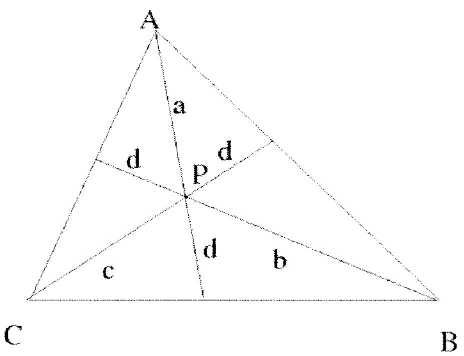
Un carré qui peut être exactement recouvert sans chevauchement par n carrés de tailles quelconques, dont les côtés sont parallèles à ses côtés, est dit n-carrelable. Par exemple, ce carré est 11-carrelable.



On se donne un carré. Pour quelles valeurs de n est-il n-carrelable ?

3. Dans un triangle

Trois droites issues des trois sommets d'un triangle ABC sont concourantes en P, intérieur au triangle. On note a, b, c, d les longueurs des segments issus de P comme indiqué sur la figure.



Sachant que a + b + c = 43 et d = 3, calculer le produit abc.

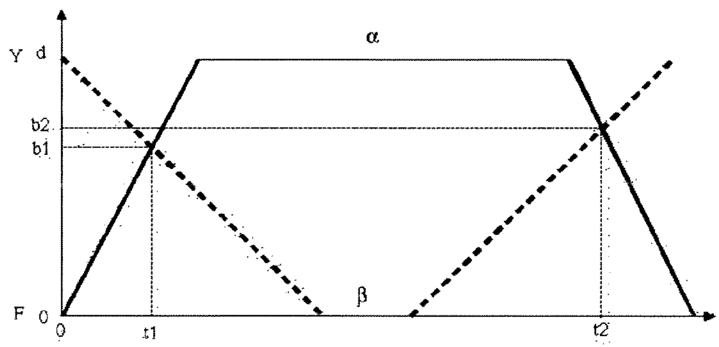
Réponses

Sujet 1. La distance Fromentine - Ile d'Yeu est de 22 km.
Sujet 2. Pour tout n entier positif autre que 2, 3 ou 5, un carré est n-carrelable.
Sujet 3. Le produit abc est égal à 441.

Solutions

Sujet 1

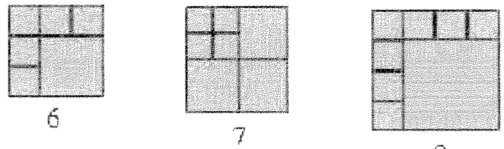
Un graphique temps-distances permet de représenter la situation décrite par l'énoncé. Sur l'axe des temps, en abscisse, on a indiqué les instants de croisement t1 et t2. Sur l'axe des distances (Fromentine étant placée à l'origine 0 et Yeu à la distance d à trouver), on a indiqué par b_1 et b_2 les emplacements des bouées. *Note à l'intention de ceux qui sont déjà allés ou se rendront à Port-Joinville : on ne peut apercevoir de telles bouées indiquant des distances, qui plus est en kilomètres plutôt qu'en milles, que si l'on est candidat à un Rallye Mathématique !* Sur le graphique, les trajets de l'Amporelle, dont on notera V_1 la vitesse, sont représentés par un trait continu épais et ceux de l'Insula Oya, de vitesse V_2, par un trait discontinu également épais. Sur le graphique, les durées d'accostage sont désignées par la lettre grecque α pour l'Amporelle et par la lettre grecque β pour l'Insula Oya.



Le croisement des bateaux à l'instant t_1 permet d'écrire la relation : $V_1(d - b_1) = V_2\, b_1$, soit $7\, V_1 = (d - 7)\, V_2$. À l'instant t_2, la distance parcourue par l'Amporelle est :
$V_1(t_2 - \alpha) = d + (d - b_2) = 2d - b_2$. Au même instant t_2, la distance parcourue par l'Insula Oya est : $V_2(t_2 - \beta) = d + b_2$. L'énoncé indique : $t_2 - \beta = 3(t_2 - \alpha)$.
D'où : $d + b_2 = 3V_2(t_2 - \alpha) = 21V_1\frac{t_2 - \alpha}{d - 7}$. Il en résulte : $d + b_2 = 21\frac{2d - b_2}{d - 7}$, soit :
$(d - 7)(d + 16{,}5) = 21(2d - 16{,}5)$ et, après multiplication par 2 :
$(d - 7)(2d + 33) = 21(4d - 33)$. Cette équation s'écrit aussi : $2d^2 - 65d + 462 = 0$, ou encore : $(d - 22)(2d - 21) = 0$. La valeur (en km) $d = 22$ est bien une réponse au problème, alors que la valeur 10,5 est à rejeter (les bacs ne dépassant pas l'île).

Sujet 2.

Il est immédiat de partager un carré en quatre, grâce aux médiatrices de ses côtés. On remarque que, si un carré était au départ n-carrelé et si l'on a partagé ainsi en quatre l'un quelconque des morceaux du carrelage, le carré considéré est alors (n + 3)-carrelé.



6 7 8

On voit sur la figure un 6-carrelage, un 7-carrelage (qui utilise le partage en quatre) et un 8-carrelage. Grâce à la remarque ci-dessus, qui permet une **récurrence** de 3 en 3, il en résulte qu'un carré est n-carrelable pour tout $n > 5$. Pour achever l'étude, il convient d'établir que 2, 3 et 5 ne conviennent pas pour carreler. Nous ne détaillons pas ici, nous contentant d'indiquer une piste pour une démonstration rigoureuse : considérer le ou les sommets que le carré considéré et un carreau du carrelage devraient avoir en commun.

Sujet 3.

D'une manière générale, notons XYZ l'aire du triangle de sommets X, Y et Z. Des rapports d'aires pour des triangles de même base sont égaux à des rapports de longueurs :

$$\frac{CPB}{ABC} = \frac{d}{d+a}, \frac{APC}{ABC} = \frac{d}{d+b}, \frac{APC}{ABC} = \frac{d}{d+c}.$$

Il en résulte que $d \times \left[\frac{1}{d+a} + \frac{1}{d+b} + \frac{1}{d+c}\right] = 1$.

Après réduction au même dénominateur $(d + a)(d + b)(d + c)$ et développement, on obtient la condition : $2d^3 + (a + b + c)d^2 = abc$.

La substitution des valeurs de l'énoncé conduit alors à $abc = 441$.

Mais cela ne nous dit pas si un triangle donnant lieu à ces valeurs existe effectivement…

Sujets du Rallye Mathématique d'Alsace 2001 - Classes de Terminale

1. Millésime et Parties Entières

Combien de nombres parmi les 2001 premiers entiers strictement positifs peuvent s'écrire sous la forme $E(2x) + E(4x) + E(6x) + E(8x)$

où x est un nombre réel et E (z) désigne la partie entière de z, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à z (par exemple $E(3,2) = 3$ et $E(-3,2) = -4$) ?

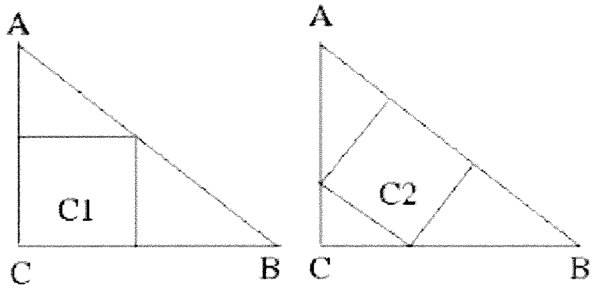
2. le Vieux Magnéto

Un magnétophone ancien nécessite 8 minutes pour rembobiner totalement une cassette ; la vitesse de rotation de l'axe de la bobine est constante. Après lecture, la bande se trouve intégralement sur une bobine et l'on procède au rembobinage.

On désire estimer le temps nécessaire au rembobinage du premier quart de la bande. Emile prétend qu'il faudra environ 3 minutes et Claire pense que 4 minutes seront nécessaires. Qu'en pensez-vous ? On pourra négliger le rayon de l'axe des bobines et assimiler chaque spire à un cercle.

3. Histoires d'Aires

On dispose d'un triangle ABC rectangle en C. Deux carrés C 1 et C 2 sont inscrits dans le triangle comme indiqué sur la figure.



Déterminer la longueur AC + CB sachant que C 1 et C 2 ont pour aire respective 441 cm^2 et 440 cm^2.

Réponses.

Sujet 1. Parmi les entiers de 1 à 2001, on obtient les 1201 entiers dont l'écriture décimale se termine par l'un des chiffres 0, 1, 2, 4, 5 ou 6.

Sujet 2. Dans les conditions indiquées par l'énoncé, 4 minutes sont nécessaires.

Sujet 3. La longueur AC + CB est égale à 462 cm.

Solutions.

1. Sujet 1

Posons $f(x) = E(2x) + E(4x) + E(6x) + E(8x)$. Une périodicité s'observe sans difficulté, à savoir : $f(x + 1/2) = f(x) + 10$. Il suffit alors de connaître les entiers que l'on obtient lorsque x est choisi dans l'intervalle $[0, 1/2]$, puis de décaler de 10 en 10 ces entiers.

La fonction $E(x)$ a un saut au passage de chaque entier, donc $E(2x)$ a un saut aux passages de demis et de même pour les autres termes de $f(x)$. En réduisant au même dénominateur les fractions pour lesquelles se produisent des sauts, on est amené à envisager celles de dénominateur 24. On obtient : $f(0) = 0$, $f\left(\frac{3}{24}\right) = f\left(\frac{1}{8}\right) = 1$, $f\left(\frac{5}{24}\right) = 2$, $f\left(\frac{6}{24}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 4$, $f\left(\frac{8}{24}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 5$, $f\left(\frac{11}{24}\right) = 6$, $f\left(\frac{12}{24}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 10$.

Les résultats ci-dessus permettent d'affirmer que les valeurs atteintes par f sont toutes les valeurs entières dont l'écriture décimale ne se termine ni par 3, ni par 7, par 8 ou par 9. Cela fait 6 nombres par dizaine (pour la première dizaine, 0 est à exclure, mais cela est compensé par la présence de 2000), donc 1200 nombres de 1 à 2000, auxquels il convient d'adjoindre 2001.

Sujet 2

Désignons par e l'épaisseur de la bande magnétique. La surface visible de bande enroulée a une aire A qui peut être calculée de deux façons : soit $A = e \times l$, où l est la longueur de bande enroulée, soit $A = \pi \times r^2$, où r est le rayon de bobine obtenu pour cette longueur enroulée. Il en résulte $l = \frac{\pi \times r^2}{e}$. Lorsque toute la bande est enroulée, on obtient $L = \frac{\pi \times R^2}{e}$. Ainsi, pour $l = \frac{L}{4}$, il vient $l = \frac{\pi \times \left(\frac{R}{2}\right)^2}{e}$, d'où $r = \frac{R}{2}$. Autrement dit, le quart de la longueur donne lieu au rayon moitié.

Et la rotation uniforme que cite l'énoncé, où en est il question dans ce qui précède ? Nulle part, mais il suffit maintenant d'observer que le rayon de bobine obtenu lors de l'enroulement augmente à chaque tour de l'épaisseur e. Ainsi le rayon de la bobine sera une fonction linéaire du temps : un rayon moitié est atteint à l'issue d'un temps moitié. Il faut donc donner raison à Claire.

Mais alors, le légendaire Émile se serait-il pour une fois hasardé à tenir des propos infondés ? Ce serait mal le connaître : il avait été surpris un chronomètre à la main en train d'observer le défilement de bandes de cassettes. S'il a dit environ 3 minutes, il convient de lui faire ce crédit et c'est donc que le modèle consistant à négliger le rayon r_0 *de l'axe des bobines ne doit pas être tout à fait correct. Si vous souhaitez approfondir la réflexion, cherchez une valeur du rapport* $\frac{R}{r_0}$ *qui soit compatible avec l'évaluation d'Émile.*

Sujet 3

Considérons un repère dont l'axe des x soit porté par CB et l'axe des y par CA. En posant selon l'usage fréquent CB = a et CA = b, on obtient pour équation de la droite (AB) : $bx + ay = ab$.

Puisque la racine carrée de 441 est 21, la droite (AB) passe par le point D de coordonnées (21 ; 21). On en déduit qu'une condition qui lie a et b est $21(a + b) = ab$.

Désignons par rac(x) la racine carrée d'un nombre positif x. Considérons l'homothétie de centre C et de rapport $k = \text{rac}[440/(a^2 + b^2)]$. Elle transforme AB en un segment A'B' de longueur rac(440).

Le carré C2 aura bien le segment A'B' comme un de ses côtés si la distance du point B' à la droite AB est égale à $\sqrt{440}$.

L'équation de (AB) s'écrivant $bx + ay - ab = 0$, la distance à (AB) d'un point quelconque M de coordonnées (x, y) est $d(M, AB) = \frac{|bx + ay - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. En particulier, pour B de coordonnées (ka, 0), on obtient $d(B', AB) = \frac{|kab - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab(1 - k)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. En reportant la valeur de k, il vient $d(B', AB) = ab\,\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{440}}{a^2 + b^2}$

Introduisons la variable $u = a + b$, qui conduit à écrire $ab = 21(a + b) = 21u$ et $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = u^2 - 42u$. L'équation $d(B', AB) = \text{rac}(440)$ s'écrit alors :

$21u\frac{\sqrt{u^2 - 42u} - \sqrt{440}}{u^2 - 42u} = \sqrt{440}$ d'où en simplifiant : $21[\sqrt{u^2 - 42u} - \sqrt{440}] = \sqrt{440}\,(u - 42)$.

On en déduit : $21\sqrt{u^2 - 42u} = \sqrt{440}\,(u - 21)$ d'où, en élevant au carré :

$u^2 - 42u - 440 \times 441 = 0$, dont le discriminant réduit est 441^2. L'équation s'écrit donc $(u + 420)(u - 462) = 0$. Seule la solution positive $u = 462$ convient.

À partir de la somme $S = a + b = 462$ et du produit $P = ab = 21 \times 462$, l'équation $X^2 - SX + P = 0$ fournit les valeurs de a et b, qui, tous calculs faits, sont : $21(11 + \sqrt{99})$ et $21(11 - \sqrt{99})$. Des valeurs approchées sont 439,95 et 22,05. L'écart de tailles fait que la représentation géométrique précise de la situation serait peu lisible !

ENSEIGNER AVEC LE MULTIMEDIA.

Plusieurs collègues de l'Irem de Strasbourg ont créé un site mathématique personnel. J'ai posé à deux d'entre eux, Nicole Vogel et Bernard Langer les questions suivantes, en leur demandant d'y répondre en deux pages.

Pourquoi as-tu créé ce site? À qui s'adresse-t-il? Quelles sont, dans les grandes lignes, les contenus mathématiques du site? Peut-on l'utiliser en classe? À quel niveau? Comment? Quels sont les liens principaux vers d'autres sites? Quel message souhaites-tu faire passer à travers ce site aux visiteurs? Autre réponse à une question que je n'ai pas posée...

Ils ont répondu avec précision et de façon très personnelle. Ils livrent d'intéressants aspects de l'univers mental des enseignants créateurs de sites. Ils offrent des services à un très large public. Ils parlent de gratuité, de beauté et de mouvement.

Gérard KUNTZ (*g.kuntz@libertysurf.fr*)

Le plaisir et le mouvement

J'ai créé **`http://perso.wanadoo.fr/nvogel`** *par curiosité, pour voir comment créer un site et pour m'amuser.*

J'avais suivi un stage de création de pages pour la toile *en me jurant que c'était uniquement pour apprendre* et que je n'y passerai pas trop de temps. Mais j'ai réalisé une ou deux choses amusantes et je me suis prise au jeu... Des objets que l'on peut mettre en tous sens, voilà qui change des pages de bouquins figées ! Moi qui ai toujours pensé les maths en mouvement, j'ai trouvé là une dimension supplémentaire qu'il fallait exploiter. *L'aspect dynamique est sans doute le plus grand apport de l'informatique à l'enseignement des maths.*

Je trouve souvent les pages Internet assez laides ou alors d'une esthétique très « pub branchée » ou encore très masculine. J'avais envie de réfléchir à ce que pouvait être pour moi une page de maths *agréable à regarder.*

J'avais un peu de contenu dont je ne savais que faire, par exemple les brouillons d'articles de Repères et d'autres revues, qui dormaient sur mon disque dur. J'ai pensé que ça pouvait être intéressant de les rendre accessibles. Mais je me suis rendu compte à l'usage qu'il était difficile de mettre une page de maths écrite en Word sur la toile (à cause des formules). Du coup, plusieurs brouillons d'articles restent en souffrance.

Je m'intéresse aux questions de *perspective* depuis fort longtemps. J'avais commencé à écrire pour mon usage personnel, histoire de me rappeler certaines choses. J'ai pensé qu'avec des illustrations interactives, ça pouvait peut-être servir à d'autres.

De même, j'avais envie de récupérer mes anciens travaux sur les polyèdres. Au début des années 80, alors qu'il n'y avait encore aucun écran graphique, je rêvais déjà de pouvoir faire tourner les polyèdres sur un écran (c'était l'époque des Logabax 64 Ko, avec sortie sur table traçante). Alors un rêve — fût-il (et futile ?) de polyèdres — qui peut se réaliser, c'est toujours bon à prendre !

Il me semble que ce site s'adresse aux collègues et aux élèves, aux miens d'abord. Je voudrais qu'ils y fassent un tour en se disant : « Tiens, les maths c'est joli, drôle et même intéressant » ! S'ils pouvaient repartir avec une ou deux questions ou l'envie d'en savoir un peu plus sur un des aspects évoqués, je serais comblée.

Je ne cherche pas du tout l'efficacité : la consultation de mes pages, au moins à l'ouverture, peut prendre un peu de temps...

Et voici le contenu mathématique

– **Des courbes,** en particulier paramétriques, dans les *« balades surprises ».*

Je n'ai pas voulu mettre trop d'informations sur ces courbes, je voulais dire et montrer juste ce qu'il faut pour inciter à chercher plus loin. Dans ces balades, il y a aussi des curiosités, comme le vélo à roues carrées.

– **Tous les polyèdres réguliers et archimédiens.** Ils existent tous en fil de fer, en petit et en grand, et pour les polyèdres réguliers, aussi en opaques. On peut tous les faire tourner avec la souris.

On les trouve dans *« balades dans l'espace »*.

– J'ai commencé très récemment une rubrique **« problèmes dans le plan ».** J'y mets des situations classiques où l'informatique a un certain intérêt. C'est une rubrique en devenir, à étoffer.

– Ensuite, il y a une rubrique **« perspective »**. Le contenu représente déjà beaucoup de travail, mais le plan de la rubrique, les explications et la forme ne sont pas très au point. Je manque un peu de motivation, la perspective figure très peu dans les programmes. Je m'y suis un peu remise car il y en a un peu au programme optionnel des Terminales L. Si je savais qu'il y a des gens intéressés, je m'y remettrais peut-être. *Ceci dit, la rubrique telle qu'elle est fournit des informations et des explications qu'il n'est pas évident de trouver ailleurs.*

– Il y a enfin quelques **« articles »** dont j'ai parlé plus haut. Il y a en particulier un texte sur l'invention des logarithmes par Neper et une page sur la date de la Pâque orthodoxe, dont j'avais cherché en vain le calcul sur Internet. Ces articles n'étaient pas du tout écrits au départ pour la toile, ils manquent donc de liens et d'organisation interactive. C'est la partie la plus primitive en ce qui concerne la présentation, le but étant simplement d'en rendre les contenus accessibles.

J'ai mis des liens vers d'autres pages qui m'ont plu ou semblé intéressantes, et qui vont dans le même sens, *« montrer des maths »*. Mais c'est difficile de trier, et en plus, il faudrait recommencer tous les jours.

Je ne sais pas si on peut utiliser ce site en classe. Pour la partie *espace*, je pense que oui, en particulier pour *« montrer » les polyèdres.* Pour le reste, j'ai plutôt envie d'y envoyer les élèves pour trouver une information, un complément ou une explication supplémentaire. J'aurai un groupe de Terminale L en option math à la rentrée. D'où, sur le site, le *pentagone de Dürer* et *la perspective d'un carrelage*… Mais franchement, je n'ai jamais pensé à faire de la pédagogie avec ce truc ! Ce n'est pas du tout pour cela que j'ai créé le site.

J'avais envie, en me lançant un peu malgré moi dans l'aventure, *de montrer des maths belles et ludiques.* Il faut énormément de temps pour faire ça, et bien sûr j'en manque comme tout le monde. Mes ambitions, inexistantes au départ, sont aujourd'hui très limitées. Je me disais : « ça m'amuse, ça ne mange pas de pain, ça ne fait de tort à personne. Ca encombre peut-être un peu la toile. Mais elle est pleine de choses tellement plus nulles encore... » Je me suis alors lancée sans complexe. Et quand j'ai vu que ça plaisait à quelques-uns, ça m'a fait plaisir de continuer un peu à mon tour. Avec les défauts que j'ai signalés : ça met parfois un peu de temps à charger

Mais je m'adresse aux flâneurs, alors tant pis pour les speedés.

Nicole VOGEL

@romath

Le travail coopératif en Mathématiques sur le Net

L'explosion des sites « personnels » consacrés à l'enseignement des mathématiques constitue un phénomène nouveau, non prévu lorsqu'on songe à la somme de travail nécessaire à la gestion d'un site Internet. Phénomène de mode ? Engouement passager ? Pas seulement…

Dans leur grande majorité, ces sites réalisés par des enseignants sont axés autour de leur travail quotidien : ils proposent des thèmes et des activités souvent originales autour des programmes scolaires officiels. Les technologies utilisées (applets Java, figures dynamiques, calculateurs formels en ligne, etc.) ainsi que la qualité des documents proposés témoignent d'un savoir-faire certain. Une part de narcissisme est sans doute nécessaire pour se lancer dans l'aventure mais elle n'explique pas tout. Les carences de l'Administration y sont sans doute pour beaucoup. L'Institution a beaucoup de mal à accepter l'Internet tel qu'il est, tel qu'il fonctionne, tel qu'il évolue.

L'éparpillement des textes et des documents officiels sur les serveurs gouvernementaux et les sites académiques constitue un véritable parcours du combattant pour qui est à la recherche d 'une information pertinente et actuelle. Paradoxalement cette situation « anarchique » conduit à accentuer le désordre, en incitant à vouloir « faire mieux ». Cette situation est source d'émulation et donc, sans doute, de progrès.

À l'heure actuelle chaque Internaute ayant quelques compétences informatiques est en mesure d'afficher ses idées, ses démarches au même titre, *avec la même audience potentielle*, avec des moyens techniques équivalents et souvent plus performants grâce, notamment, aux « hébergeurs » gratuits qui sont légion.

Le site **`http://www.aromath.net`** relève de cette démarche.

Les objectifs poursuivis

- **Encourager le travail coopératif**. Tous les professeurs font le même métier, s'acquittent des mêmes tâches pratiquement au même moment… Pourquoi ne pas mettre l'expérience des « anciens » au profit des plus jeunes ? Pourquoi ne pas partager exercices, cours, devoirs, idées quand on songe au travail (pas toujours gratifiant) nécessaire à la rédaction d'un document en utilisant les outils informatiques ?

- **Permettre à tous de publier sur le Web.** Il est de bon ton de vanter les vertus pédagogiques des TIC ou plus simplement de l'informatique. Mais où en sont véritablement les établissements, les enseignants, les élèves dans leur intégration de ces technologies que l'on ne peut plus qualifier de nouvelles. *Aromath* souhaite faciliter à chacun, élève ou professeur, la conception de documents en particulier de textes mathématiques où formules et graphiques abondent.

- **Promouvoir l'usage des nouvelles technologies** grâce à la fabrication aisée de documents « dynamiques » et interactifs.

- **Accueillir les innovations pédagogiques** sous toutes leurs formes.

- **Promouvoir les mathématiques** sous leurs aspects scolaires ou ludiques, sans viser à l'élitisme tout en garantissant la rigueur scientifique.

- **Proposer un choix de documents ou de liens** récoltés sur le Net illustrant ou prolongeant les activités proposées.
- **Aider les élèves dans leur apprentissage.**
- **Favoriser les échanges sans but lucratif.**

L'originalité du site

Aromath est construit sur la plate-forme de développement **Ovinet** disponible sous licence GNU. Ce système permet la gestion complète d'un site Internet sans compétences techniques exagérées. Il est entièrement construit autour d'outils gratuits et de surcroît très performants issus du « monde libre » (Serveur Apache – bases de données MySQL – langage de script PHP4). Ces outils peuvent être installés sur un ordinateur personnel, localement dans un établissement scolaire doté d'un réseau local ou sur un serveur du réseau mondial. Le site *Aromath* a permis de développer ces outils et les tester in-situ.

Sans entrer dans les détails techniques, une documentation séparée décrit l'ensemble des fonctionnalités, signalons cependant que la rédaction d'une page du site est possible à partir de tout ordinateur connecté à l'Internet en ne nécessitant aucune installation : le seul navigateur permet la gestion complète et à distance du site. Pour publier une page, il suffit de réaliser une opération de copier/coller à partir d'un traitement de textes tel que Word par exemple. Images, formules et textes sont transférées vers le serveur en conservant la présentation du document initial. Cette façon de mettre l'information en ligne incitera, je l'espère, bon nombre de collègues à franchir le pas…

Il est également possible d'intégrer une figure dynamique réalisée avec GéoplanW ou une figure Cabri-Géomètre à toute page du site par une simple opération de copier/coller. Aucune manipulation de code n'est nécessaire.

La « gestion des rédacteurs » garantit un minimum de sécurité (contre les effacements accidentels, les modifications intempestives, etc.) et propose plusieurs niveaux d'utilisation allant du « rédacteur débutant » au « rédacteur confirmé ». Un moteur de recherche, au fonctionnement automatique, facilite la recherche de l'information.

@Aromath n'est qu'une pierre dans l'édifice qui se construit. Aura-t-il une durée de vie éphémère ? Grandira-t-il ? Dans ce domaine, comme dans bien d'autres, seule l'audience ainsi que l'acharnement et la résistance des animateurs seront loi.

Bernard LANGER

QUELQUES PHÉNOMÈNES CURIEUX
EN PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Michel ÉMERY[1]
C.N.R.S. et U.L.P. Strasbourg

L'espérance n'est qu'un charlatan
qui nous trompe sans cesse.

CHAMFORT, *Maximes et pensées.*

J'ai plaisir à remercier la Mission Culture Scientifique et Technique de l'U.L.P., qui a accueilli cette conférence le 11 janvier 2001 dans le cadre du Jardin des Sciences, ainsi que L'Ouvert *qui accepte d'en publier la version écrite.*

Cette conférence se compose de quatre parties, consacrées à quatre questions différentes. Les trois premières peuvent être lues indépendamment, la quatrième s'appuie sur la troisième. Chacune se présente sous la forme d'un jeu, qui ne présenterait pas le moindre intérêt en tant que jeu proprement dit, mais sert à mieux mettre en évidence la situation mathématique considérée.

1 Le paradoxe de Simpson

Mis en évidence par le statisticien britannique E.H. Simpson [2] voici un demi-siècle, c'est parfois une source de difficultés dans l'interprétation des tableaux de corrélations statistiques. Si j'ai choisi d'aborder ce thème, c'est que je le croyais peu connu; je remercie Richard Cabassut qui m'a détrompé et documenté : ce sujet figure au programme de mathématiques des classes de première [3], et, sous le nom d'*effet de structure,* fait l'objet d'exercices dans les manuels correspondants [4].

Nous allons utiliser des jeux de cartes usuels, dans lesquels nous ne garderons que des deux, des trois, des dames et des rois; les deux et les trois seront des cartes *perdantes,* et les dames et rois seront des cartes *gagnantes.* Au moyen d'un jeu de cartes à dos bleus et d'un jeu de cartes à dos noirs, formons deux paquets de onze cartes chacun, selon la composition suivante (N signifie dos noir, B dos bleu, G carte gagnante, P carte perdante) :

	B	N
G	1	2
P	3	5

Paquet n° 1

	B	N
G	5	3
P	2	1

Paquet n° 2

[1]© L'OUVERT 104 (2001)

[2]E.H. Simpson. The interpretation of interaction in contingency tables. *J. Roy. Stat. Soc.* Ser. B **13**, 238–241 (1951).

[3]Il est prévu des travaux pratiques sur « les paradoxes apparents des pourcentages ».

[4]Voir les travaux pratiques n° 11 dans le manuel 1998 de mathématiques de 1re ES chez Nathan; voir aussi le manuel de mathématiques de 1re L chez Hachette (programme de 1993) page 19.

Étalons sur une table, dos visibles et faces cachées, les onze cartes du premier paquet, préalablement battu. Le jeu consiste à retourner l'une des cartes : si c'est une carte G, on a gagné, si c'est une P on a perdu. Les chances de gagner sont $1/4$ si l'on prend une carte à dos bleu, $2/7$ pour une carte à dos noir et $3/11$ si l'on prend une carte sans tenir compte de la couleur du dos. Puisque $\frac{1}{4} < \frac{3}{11} < \frac{2}{7}$, on a évidemment intérêt, pour maximiser les chances de gagner, à choisir une carte à dos noir.

Si l'on joue au même jeu avec le second paquet, comme $\frac{5}{7} < \frac{8}{11} < \frac{3}{4}$, la meilleure stratégie consiste, là encore, à choisir une carte noire.

Regroupons maintenant nos deux paquets en un seul jeu de vingt-deux cartes, battons-le, et jouons de même avec ce nouveau paquet. Sa composition est obtenue en additionnant termes à termes les deux tableaux précédents :

	B	N
G	6	5
P	5	6

Réunion des deux paquets

Puisque $\frac{6}{11} > \frac{11}{22} > \frac{5}{11}$, c'est cette fois-ci la première colonne du tableau qui offre les meilleures chances, et l'on a donc intérêt à choisir une carte à dos bleu, contrairement aux cas précédents où l'on jouait avec l'un des deux paquets pris individuellement.

D'un point de vue mathématique, ce phénomène n'a rien de mystérieux; c'est simplement la remarque que la somme de deux matrices 2×2 à déterminant négatif peut avoir un déterminant positif. Pour le statisticien, qui peut être amené à interpréter ces matrices comme des tableaux de corrélations, cela peut être plus embarrassant.

Imaginez par exemple que vous vous intéressez à la corrélation entre la gravité des accidents de la route et le port ou non de la ceinture de sécurité; supposez que vous disposez d'une statistique sur 220 accidents, répartis comme suit selon la gravité, le port de la ceinture, et le lieu de l'accident (B = ceinture bouclée, N = ceinture non bouclée, G = grave, P = pas grave) :

	B	N
G	10	20
P	30	50

110 accidents en agglomération

+

	B	N
G	50	30
P	20	10

110 accidents hors agglomération

=

	B	N
G	60	50
P	50	60

220 accidents au total

J'ai simplement recopié les trois tableaux précédents, en multipliant tous les nombres par 10 — ceci ne change pas les pourcentages mais rend ces données statistiquement plus significatives (bien qu'elles restent parfaitement fictives et tout à fait fantaisistes). Qu'observe-t-on sur ces tableaux? La comparaison des deux tableaux de gauche montre qu'en agglomération les accidents sont moins graves, mais les ceintures moins souvent attachées. Le premier tableau met en évidence un effet bénéfique du port de la ceinture en agglomération, et le second, également un effet bénéfique du port de la ceinture hors agglomération : les accidents avec ceinture sont, dans chacun des deux cas, moins souvent graves que les accidents sans ceinture. Et cependant, le troisième tableau, somme des deux premiers, manifeste un effet inverse, puisque les accidents avec ceinture y sont plus souvent graves que les accidents sans ceinture! Qu'en conclure? Faut-il la boucler?

La discussion pourrait faire intervenir l'adaptation des comportements aux dangers perçus, et, en toute généralité, la difficulté d'interpréter des corrélations en termes de causes et d'effets [5]. Elle serait de toutes façons oiseuse, puisque nos données, fabriquées *ad hoc,* ne correspondent à aucune réalité; je ne la mènerai pas ici, passant à un autre jeu.

2 Dites : « Rouge! »

Nous allons encore utiliser des cartes à jouer, pour nous intéresser à un petit problème dû au mathématicien et prestidigitateur américain P. Diaconis; ce problème m'a été communiqué par P. Artzner, et *L'Ouvert* en a déjà fait mention (problème 46 dans le numéro 66 de mars 1992).

Prenez un jeu ordinaire de 52 cartes (26 rouges et 26 noires); battez-le, posez-le devant vous faces non visibles, puis retournez les 52 cartes une à une. À un moment que vous choisissez à votre gré, juste avant de retourner une carte, dites : « Je parie que la prochaine carte sera rouge ». Vous gagnez si elle est effectivement rouge (cœur ou carreau), vous perdez si elle est noire (pique ou trèfle). Vous devez parier une fois et une seule durant le déroulement du jeu : si vous n'avez pas parié sur les 51 premières cartes, vous devez parier sur la dernière (et vous savez alors si vous avez ou non gagné sans avoir besoin de la retourner, puisque vous avez déjà vu passer toutes les autres). Si vous aviez le droit de choisir entre parier sur « rouge » ou sur « noir », vous gagneriez à coup sûr en attendant la dernière carte; mais la règle de Diaconis vous impose de parier sur « rouge ». Quelle est la stratégie optimale, et quelle probabilité de gain donne cette stratégie?

Il est clair que cette probabilité est au moins 50 %, qui représentent vos chances de gagner si vous décidez à l'avance de parier par exemple sur la 31^{e} carte (ou la première, ou la dernière) sans tenir compte des couleurs des cartes déjà retournées. La question de Diaconis est donc de comprendre comment utiliser au mieux ces informations (les couleurs des cartes) au fur et à mesure de leur arrivée, et de quantifier le gain qu'elles peuvent apporter.

[5] Les lits sont des endroits dangereux. La preuve : c'est là que survient la plupart des décès.

La réponse de Diaconis est extrêmement simple : *toutes les stratégies donnent une chance sur deux de gagner* ; vous ne pouvez pas faire mieux que les stratégies stupides décrites au paragraphe précédent — ni moins bien, d'ailleurs : aucune tentative pour parier « rouge » au moment le plus défavorable ne parviendra à réduire vos chances de gain.

Diaconis en donne une démonstration très courte, dans le cadre de la théorie des filtrations et des temps d'arrêt ; voici comment on peut s'en convaincre de façon élémentaire. Imaginons un gigantesque tableau

R♠	9♣	2♡	....	3♣	3♡	V♣	6♠	....	8♢ R♡	4♣
2♣	8♠	R♢	....	9♠	3♣	1♢	10♠	....	5♣ 1♡	R♠
3♡	V♠	1♡	....	5♣	4♠	10♠	R♠	....	D♣ 7♣	10♣
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
⋮										⋮
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
6♢	1♠	7♠	....	5♠	8♢	9♢	9♣	....	10♣ D♠	5♣
6♣	5♣	V♠	....	9♢	1♠	7♢	6♡	....	5♠ 4♡	R♣

obtenu en dressant la liste de toutes les façons possibles d'ordonner les 52 cartes : chaque ligne fait apparaître les 52 cartes dans un certain ordre, et il y a autant de lignes que d'ordres possibles. Le nombre des lignes est colossal (c'est un nombre de 68 chiffres) ; l'ordre des lignes elles-mêmes n'a aucune importance, ce qui compte est seulement que chaque ligne possible (chacun des ordres possibles pour les 52 cartes) figure exactement une fois dans le tableau[6].

Considérons maintenant une stratégie de jeu, fixée une fois pour toutes (par exemple : vous attendez la première carte qui soit un sept noir ou un quatre de cœur, puis vous pariez sur la 3[e] carte qui suit). Toute règle de ce type, si compliquée soit-elle, définit une stratégie ; la seule contrainte est que la décision, à chaque instant, de parier ou non, ne dépende que des cartes déjà retournées[7].

[6]Les habitués de la théorie des probabilités ont reconnu dans ce tableau une figuration de l'*univers* Ω associé à l'expérience aléatoire qu'est le battage du jeu de cartes.

[7]Et non de la vitesse du vent ou de l'humeur du moment. Le résultat resterait vrai pour ces stratégies plus générales, mais le raisonnement serait plus abstrait : il faudrait remplacer notre énumération de tous les cas possibles par le formalisme des filtrations et des temps d'arrêt.

Pour chaque ordre possible des cartes, c'est-à-dire pour chaque ligne du tableau, la stratégie détermine l'instant où vous pariez que la prochaine carte sera rouge. On peut matérialiser la stratégie en insérant dans chaque ligne du tableau une barre ▌juste avant la carte sur la couleur de laquelle vous pariez ; cela donne quelque chose comme ça :

R♠ 9♣ ▌2♡ . . . . 3♣ 3♡ V♣ 6♠ . . . . 8♢ R♡ 4♣
2♣ 8♠ R♢ . . . . 9♠ ▌3♣ 1♢ 10♠ . . . . 5♣ 1♡ R♠
3♡ V♠ 1♡ . . . . 5♣ 4♠ 10♠ R♠ . . . ▌ . . D♣ 7♣ 10♣
. . . . ▌ . . . .
⋮
. . . . ▌ . . . .
6♢ 1♠ 7♠ . . . . 5♠ 8♢ 9♢ 9♣ . . . . 10♣ D♠ ▌5♣
6♣ 5♣ V♠ . . . . ▌ . 9♢ 1♠ 7♢ 6♡ . . . . 5♠ 4♡ R♣

Une ligne est gagnante (pour la stratégie considérée) si dans cette ligne la carte juste après la barre est rouge, et perdante si cette carte est noire. La probabilité de gagner en appliquant cette stratégie n'est autre que la proportion de lignes gagnantes dans le tableau.

À toute ligne ℓ du tableau, associons une autre ligne ℓ' obtenue à partir de ℓ en échangeant la carte juste après la barre et la dernière carte de la ligne. Par exemple, si ℓ est la deuxième ligne

2♣ 8♠ R♢ . . . . 9♠ ▌3♣ 1♢ 10♠ . . . . 5♣ 1♡ R♠

du tableau de tout à l'heure, ℓ' sera la ligne

2♣ 8♠ R♢ . . . . 9♠ R♠ 1♢ 10♠ . . . . 5♣ 1♡ 3♣ ;

et si ℓ est l'avant-dernière ligne

6♢ 1♠ 7♠ . . . . 5♠ 8♢ 9♢ 9♣ . . . . 10♣ D♠ ▌5♣ ,

où la barre est juste avant la dernière carte, alors ℓ' sera la ligne ℓ elle-même.

Remarquons que toute la partie de la ligne ℓ située avant la barre n'est pas modifiée par cette opération ; donc, puisque la stratégie décide à chaque instant de parier ou non au vu des seules cartes déjà retournées, la barre est placée au même endroit dans les deux lignes ℓ et ℓ' (juste après le 9♠ et la D♠ dans les deux exemples qui précèdent). En conséquence, *si l'on répète l'opération à partir de la ligne obtenue ℓ', on retrouve la ligne initiale ℓ.* Ainsi, nous pouvons associer les lignes par paires, deux lignes d'une même paire étant échangées par l'opération décrite ci-dessus ; seules les lignes pour lesquelles on parie sur la dernière carte, telles l'avant-dernière du tableau, ne sont pas membres d'une paire : ces lignes célibataires seront considérées comme associées à elles-mêmes.

Il ne reste qu'à observer que si une ligne est gagnante, la ligne qui lui est associée finit par une carte rouge et réciproquement ; et si une ligne est perdante, la ligne qui lui est associée finit par une carte noire et réciproquement. En raisonnant séparément sur les lignes célibataires et les autres, on en déduit qu'il y a exactement autant de lignes gagnantes que de lignes finissant en rouge. La proportion des lignes gagnantes dans la liste est donc aussi la proportion des lignes finissant par une carte rouge, et la probabilité de gagner est ainsi égale à la probabilité pour que la dernière carte tirée soit rouge. Comme cette probabilité-là vaut évidemment un demi, la probabilité de gagner vaut aussi un demi. Nous avons fait le raisonnement pour une stratégie particulière ; il est bien entendu valable pour toutes les stratégies : la probabilité de gain est toujours égale à un demi.

3 Deux enveloppes (première version)

Nous venons de voir un jeu où, en dépit des apparences immédiates, la probabilité de gagner ne dépasse pas 50 %. Voici maintenant, à l'inverse, une situation où, bien qu'il semble à première vue impossible de faire mieux que de gagner une fois sur deux, on peut néanmoins y parvenir.

J'écris deux nombres différents (positifs ou non, entiers ou non) chacun sur une feuille de papier, je les mets sous enveloppe sans vous les montrer, et je vous remets les deux enveloppes. À vous de deviner laquelle des deux contient le nombre le plus grand. Une stratégie évidente, n'utilisant qu'une pièce de monnaie, vous donne une chance sur deux de gagner : choisissez au hasard celle des deux enveloppes sur laquelle vous pariez.

Pour rendre le jeu plus intéressant, modifions la règle : vous avez maintenant le droit, avant de parier, de prendre connaissance du contenu de l'une des deux enveloppes, celle que vous voulez. Cette nouvelle règle vous est-elle plus favorable que la précédente ? En d'autres termes, pouvez-vous tirer parti de la connaissance de l'un des deux nombres pour augmenter, si peu que ce soit, vos chances de gagner ?

Un argument de symétrie (ou de simple bon sens) semble dire que non : celui des deux nombres dont vous prenez connaissance a exactement une chance sur deux d'être le plus grand ; le connaître ne vous donne donc aucun avantage supplémentaire. Cet argument, que nous développerons un peu dans la remarque 1 plus loin, est faux : nous allons voir qu'en réalité vous pouvez mettre à profit l'information supplémentaire qu'est la valeur numérique du nombre lu.

Il vous suffit pour cela de disposer d'une machine à fabriquer du hasard, qui produise un nombre aléatoire x ayant les deux propriétés suivantes :

(1) si a est n'importe quel nombre donné à l'avance, la probabilité pour que x soit exactement égal à a est nulle;

(2) si a et b sont deux nombres différents donnés à l'avance, la probabilité pour que x tombe entre a et b n'est pas nulle.

Dans les propriétés (1) et (2), l'expression « donné à l'avance » signifie précisément : connu avant que la machine ne commence à fabriquer x. Par exemple, la propriété (2) serait évidemment impossible à satisfaire si l'on s'autorisait à prendre $a = x + 1$ et $b = x + 2$.

Un nombre aléatoire x vérifiant (1) et (2) pourrait par exemple être obtenu en demandant à la touche RANDOM d'une calculatrice un nombre aléatoire y entre 0 et 1, puis en posant

$$x = \frac{2y-1}{y(1-y)}\,, \qquad \text{ou bien encore} \qquad x = \tan(\pi y)\ ;$$

mais en raison de la précision limitée de la calculatrice, les deux propriétés ne seront satisfaites qu'approximativement : la calculatrice choisit en fait y parmi un ensemble *fini* (bien que très grand) de nombres, chacun avec probabilité non nulle, et les chances qu'a y de tomber strictement entre deux de ces nombres sont rigoureusement nulles. Pour les lecteurs soucieux de rigueur, nous reviendrons plus bas sur ce point (remarque 2). Notons pour les spécialistes qu'une variable aléatoire tirée selon une loi normale (ou une loi de Cauchy comme c'est le cas pour $\tan(\pi y)$, etc.) vérifie les deux propriétés requises.

Voici une recette permettant d'accroître vos chances de gain :

- Tirez au sort l'une des deux enveloppes et prenez connaissance du nombre z qu'elle renferme.
- Actionnez ensuite votre machine à fabriquer un nombre au hasard pour obtenir un nombre x; ce nombre x est différent de z en raison de la propriété (1).
- Si z est plus grand que x, pariez que z est aussi plus grand que le nombre caché dans l'autre enveloppe.
- Si au contraire z est plus petit que x, pariez que z est aussi plus petit que le nombre caché dans l'autre enveloppe.

L'estimation de vos chances de gain si vous suivez cette recette n'est pas difficile (en tous cas pas difficile pour moi, qui connais les deux nombres cachés). Appelons a le plus petit des deux nombres mis sous enveloppe, et b le plus grand. Trois cas sont possibles, selon que le nombre x produit par votre machine est plus petit que a, tombe entre a et b, ou est plus grand que b; appelons p, q et r leurs probabilités respectives (elles vérifient $p + q + r = 1$ et, en raison de la propriété (2), $q > 0$). En tenant compte des deux éventualités que z soit égal à a ou à b, cela fait six possibilités en tout, résumées dans le tableau ci-dessous.

	$x<a$ (probabilité : p)	$a<x<b$ (probabilité : q)	$b<x$ (probabilité : r)
$z=a$ (probabilité : $\frac{1}{2}$)	Vous perdez (probabilité : $\frac{p}{2}$)	Vous gagnez (probabilité : $\frac{q}{2}$)	Vous gagnez (probabilité : $\frac{r}{2}$)
$z=b$ (probabilité : $\frac{1}{2}$)	Vous gagnez (probabilité : $\frac{p}{2}$)	Vous gagnez (probabilité : $\frac{q}{2}$)	Vous perdez (probabilité : $\frac{r}{2}$)

La probabilité de chacun des six cas est obtenue en multipliant la probabilité du comportement de z (égale à $\frac{1}{2}$) par celle du comportement de x (égale à p, q ou r). Ceci exprime l'indépendance entre les deux tirages au sort (d'abord, choix de l'enveloppe avec une chance sur deux, ensuite, choix de x avec probabilités p, q et r pour les trois cas). Puisque les six cases épuisent toutes les possibilités, votre probabilité de gagner est la somme des probabilités des quatre cases gagnantes, c'est-à-dire $\frac{p}{2}+\frac{q}{2}+\frac{q}{2}+\frac{r}{2}$, ou encore $\frac{1+q}{2}$. Et puisque q n'est pas nulle, c'est mieux qu'une chance sur deux.

Évidemment, vous qui connaissez la valeur de z mais pas les valeurs de a et b, vous ne connaissez pas non plus q et vous n'avez aucune idée de vos chances $\frac{1+q}{2}$. Vous pourrez les connaître *a posteriori,* une fois le jeu terminé et la seconde enveloppe ouverte, mais leur valeur aura alors perdu toute signification : le jeu sera fini, vous aurez gagné ou perdu, vos chances de gain seront devenues 1 ou 0, et estimer rétrospectivement ce qu'elles étaient au moment du pari sera dénué d'intérêt. Mais, bien que vous ne puissiez donc pas estimer quantitativement vos chances de gagner [8], il reste le fait brut que le jeu vous est favorable. Cette affirmation a d'ailleurs un contenu empirique (sans quoi elle n'aurait pas de sens) : imaginez un très grand nombre d'opérateurs, chacun dans une salle équipée d'un générateur aléatoire du même type que le vôtre, et recevant chacun deux enveloppes qui contiennent les mêmes nombres a et b. Chacun, utilisant sa machine, va parier, et gagner ou perdre; ils ne peuvent pas estimer leurs chances de gain mais ils savent qu'*ils seront plus nombreux à gagner qu'à perdre* pourvu qu'ils soient en nombre suffisant. C'est en ce sens que le jeu vous est favorable. (Et moi qui connais q, je peux en plus prédire la proportion des gagnants $\frac{1+q}{2}$.)

Remarque 1. — Si les deux nombres que j'ai écrits sont

$$a = 173\,261\,372\,804 \times 10^{766\,146\,459\,801} + 0{,}109\,085\,028\,871 \times 10^{-172\,754\,358\,235}$$

et

$$b = 173\,261\,372\,804 \times 10^{766\,146\,459\,801} + 0{,}109\,085\,028\,872 \times 10^{-172\,754\,358\,235},$$

il est fort vraisemblable que la machine à hasard que vous choisirez donnera à x une probabilité q évanescente de tomber entre a et b. Le bénéfice apporté par le droit d'ouvrir une des deux enveloppes est donc homéopathique, et la discussion ci-dessus

[8] Sauf à adopter un point de vue bayésien en mettant une loi de probabilité *a priori* sur la façon dont j'ai choisi mes deux nombres. Nous reviendrons sur cet aspect des choses dans la quatrième partie.

purement académique, vous ne pourrez en tirer aucun avantage pratique. Son seul intérêt, tout théorique, réside dans le fait que, si infinitésimal que soit votre gain, sa non-nullité réfute l'argument de symétrie évoqué plus haut. Une fois formalisé, cet argument de symétrie dit ceci : pour vous empêcher de gagner, je pourrais moi aussi recourir à un générateur aléatoire, et fabriquer mes deux nombres au hasard, indépendamment l'un de l'autre, de façon telle que, pour tout a donné à l'avance, chacun des deux ait une chance sur deux d'être plus grand que a et une chance sur deux d'être plus petit. Si j'opérais ainsi, une fois la première enveloppe ouverte il y aurait exactement une chance sur deux pour que l'autre nombre soit plus grand que le nombre lu, et vous n'auriez aucun avantage. Bien sûr, cet argument ne tient pas, car il n'existe aucune loi de probabilité sur la droite possédant la propriété requise (pour n'importe quel nombre $a > 0$, mon nombre aléatoire devrait avoir 50 % de chances d'être plus grand que a et 50 % de chances d'être plus petit que $-a$, donc aucune chance d'être entre $-a$ et a).

Remarque 2. — La recette pour améliorer vos chances nécessite un générateur aléatoire; et nous avons remarqué tout à l'heure qu'utiliser brutalement les nombres aléatoires fournis par une calculatrice n'est pas pleinement satisfaisant. Voici, parmi mille autres, une méthode possible pour engendrer un nombre aléatoire x vérifiant les propriétés (1) et (2).

Jouez à pile ou face de façon répétée jusqu'à obtenir pour la première fois pile; ceci nécessite un certain nombre $n \geqslant 1$ de lancers. Tirez maintenant au sort, d'abord un signe $+$ ou $-$, puis, au moyen d'une roulette à dix cases numérotées de 0 à 9, une série de chiffres que vous écrivez à droite du signe, en plaçant une virgule après le n-ième chiffre. C'est tout! Si vous souhaitez connaître x exactement, cette opération demandera un temps infini, et vous avez sans doute mieux à faire; mais rappelez-vous qu'au moment où vous fabriquez x, vous connaissez déjà z et que la seule chose qui vous importe est de savoir si x est plus petit ou plus grand que z; vous pouvez donc arrêter la procédure au bout d'un nombre fini (aléatoire) d'étapes. (Connaître n, le signe, et le premier chiffre non nul sera suffisant dans l'immense majorité des cas.) Bien entendu, tous ces tirages au sort pourraient être simulés par une calculatrice, et la procédure est entièrement automatisable; mais je n'en vois pas l'intérêt : tout ceci n'est qu'une expérience de pensée, un tel « jeu » n'amuserait évidemment personne.

4 Deux enveloppes (seconde version)

Voici pour finir un autre jeu à deux enveloppes, beaucoup plus connu [9], semble-t-il, que le précédent.

Je mets sous enveloppe deux chèques à votre nom, le montant de l'un étant le double de l'autre. Vous tirez au sort l'une des deux enveloppes, vous l'ouvrez, puis vous devez choisir celui des deux chèques que vous allez toucher. Vous ne connaissez donc que le montant m de l'un des chèques, et vous savez que l'autre vaut le double ou la moitié de m. Quel choix faites-vous?

---

[9] Il est également discuté par J.-P. Delahaye dans l'intéressant article Désespérante espérance, *Pour la Science* 205 (1994).

La présentation faite de ce problème est souvent accompagnée de la discussion suivante, en deux points :

1. Appelons c le chèque de valeur m que vous avez trouvé en ouvrant l'enveloppe, et i le chèque de montant inconnu $2m$ ou $\frac{m}{2}$ qui est dans l'autre enveloppe. Si vous choisissez i, vous avez une chance sur deux d'encaisser le montant $2m$ et une chance sur deux d'encaisser $\frac{m}{2}$. Votre espérance de gain est alors $\frac{1}{2} \times 2m + \frac{1}{2} \times \frac{m}{2}$, c'est-à-dire $\frac{5}{4}m$. Cette quantité est toujours supérieure à m ; ainsi, en choisissant i plutôt que c, vous augmentez votre espérance de gain, ceci quelle que soit la valeur de m lue.
2. La conclusion ci-dessus est manifestement absurde. La stratégie préconisée au point précédent — tirer au sort l'une des enveloppes, l'ouvrir, puis, quel que soit son contenu (donc, en fait, sans même avoir à l'ouvrir !), choisir systématiquement l'autre enveloppe — n'est qu'un procédé un peu détourné pour tirer au sort, avec chances égales, celle des enveloppes qui sera choisie. Mais c'est aussi ce que fait la stratégie qui consiste à toujours choisir c ; la stratégie proposée en 1, systématiquement choisir i, n'est donc finalement pas meilleure que de choisir systématiquement c.

Ces deux arguments démontrent une chose et son contraire. Où est le vrai ? À quel endroit y a-t-il une erreur ?

Tout d'abord, une remarque s'impose à propos du premier argument. Il y est implicitement admis qu'entre deux stratégies, celle qui procure la plus grande espérance de gain est préférable. Non seulement ceci n'a rien d'évident, mais c'est en fait contredit par de nombreuses théories ou observations. Comme ce qui nous intéresse ici est l'aspect mathématique, nous allons esquiver cette difficulté en décidant *a priori* du critère de choix et en remplaçant la question initiale « Quel choix faites-vous ? » par « Quel choix maximise votre espérance de gain ? » Malheureusement l'énoncé perd alors en signification ce qu'il gagne en précision : prononcer le mot *espérance* ne suffit pas à lui donner un sens. L'espérance est obtenue en pondérant les gains possibles par les probabilités de ces gains ; on est ainsi ramené à la question du sens à donner, dans l'argument 1, aux probabilités $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ de trouver $2m$ et $\frac{m}{2}$ à l'ouverture de la seconde enveloppe. La discussion du jeu précédent a justement mis en évidence (dans une situation différente, mais c'est vrai ici aussi) qu'une fois connu le contenu d'une enveloppe, on ne peut plus affirmer que l'autre a une chance sur deux d'être plus grand.

Dès lors, deux attitudes sont possibles. Vous pouvez déclarer que les probabilités en cause ne sont pas quantifiables, que maximiser l'espérance est donc vide de sens, et que vous ferez votre choix selon d'autres critères (rationnels ou non). C'est une position parfaitement tenable, parce qu'il n'est pas possible de donner un sens objectif à ces probabilités. C'est l'attitude sécuritaire : vous êtes dans une position retranchée, très facile à défendre contre toute critique.

Plus hasardeuse (c'est le cas de le dire !), mais aussi plus constructive, l'autre attitude permet de faire avancer la discussion, par le calcul d'une espérance de gain qui vous servira de critère de choix. C'est la méthode appelée *bayésienne* ; elle consiste à admettre que le choix fait par moi des montants inscrits sur les chèques est assimilable au résultat d'une expérience aléatoire, dont vous connaissez les probabilités des résultats. Concrètement, avant même d'ouvrir la première enveloppe, vous dressez la liste [10] de tous les montants couplés $(x, 2x)$ que je pourrais avoir choisis, vous affectez à chacun une probabilité [11] $p(x, 2x)$ de façon que la somme des probabilités sur toute la liste fasse 1, et vous admettez que mes chèques sont rédigés par un générateur aléatoire qui écrit x et $2x$ avec probabilité $p(x, 2x)$. Il ne reste qu'à résoudre le petit exercice suivant : une paire aléatoire $(x, 2x)$ étant produite par ce générateur, on tire ensuite au sort entre x et $2x$ pour obtenir un montant (doublement) aléatoire m. Une fois observée la valeur de m, quelles sont les probabilités [12] p' et p'' pour que l'autre nombre de la paire soit respectivement $\frac{m}{2}$ ou $2m$? Le calcul est élémentaire et la réponse bien intuitive :

$$p' = \frac{p(\frac{1}{2}\,m, m)}{p(\frac{1}{2}\,m, m) + p(m, 2m)} \;; \qquad p'' = \frac{p(m, 2m)}{p(\frac{1}{2}\,m, m) + p(m, 2m)}$$

(en posant $p(x, 2x) = 0$ si $(x, 2x)$ ne figure pas dans la liste, ce qui se produit par exemple lorsque x est le plus grand ou $2x$ le plus petit des montants admissibles). En reprenant l'argument 1 ci-dessus avec les probabilités p' et p'' au lieu de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, votre espérance de gain se calcule immédiatement, et, en la comparant à m, il est finalement avantageux, indifférent, ou désavantageux de choisir i selon que $p(m, 2m)$ est supérieur, égal, ou inférieur à $\frac{1}{2}\,p(\frac{1}{2}\,m, m)$. La stratégie optimale ainsi obtenue fait explicitement intervenir le montant observé m. Dans cette situation, le dilemme entre les arguments 1 et 2 s'évanouit : il n'est pas vrai que choisir i soit toujours préférable à choisir c, comme le prétendait l'argument 1; et l'argument 2, qui prenait comme prémisse cette conclusion, n'a plus de raison d'être, rien ne permettant d'affirmer que les deux choix i et c soient indifférents — cela n'est vrai que lorsque le montant m observé se trouve vérifier l'égalité $p(m, 2m) = \frac{1}{2}\,p(\frac{1}{2}\,m, m)$. Le point de vue bayésien est puissant et séduisant; sa faiblesse réside dans la nécessité de choisir préalablement les $p(x, 2x)$, choix dont dépendra ensuite la stratégie suivie, et qui prête le flanc à une critique : pour calculer les probabilités p' et p'', on part d'autres probabilités $p(x, 2x)$, que l'on a au préalable estimées. Mais tant qu'à estimer des probabilités, on pourrait attendre d'avoir lu le premier chèque, et estimer à ce moment là directement les chances p' et p'' pour que l'autre chèque soit moitié ou double. L'avantage de la méthode bayésienne sur l'estimation directe de p' et p'' est qu'elle évite tout paradoxe du type arguments 1 et 2 ci-dessus, ce qui n'est pas le cas de l'estimation directe (en prenant par exemple $p' = p'' = \frac{1}{2}$ sans tenir compte de la valeur de m, on retomberait évidemment en plein dans le paradoxe précédent).

[10] Cette liste est finie parce que le montant de mes chèque est un nombre entier de cents ou de centimes, et que mon compte en banque n'est pas illimité.

[11] Appelée probabilité a priori.

[12] Appelées probabilités a posteriori.

IREM DE PICARDIE

ANALYSE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR :

de l'intuition aux concepts.

48

EDITION : I.R.E.M. DE STRASBOURG
7, rue René Descartes
F - 67084 STRASBOURG Cedex
Pour les brochures : Bibliothèque
Tél. : 03 90 24 01 61
Fax : 03 90 24 01 65
E.mail : bibirem@math.u-strasbg-fr
http://irem.u-strasbg.fr

UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR STRASBOURG

Titre	**ANALYSE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR De l'intuition aux concepts**
Brochure A4	88 pages
Auteur	Groupe "Ordres de Grandeur" de l'IREM de Picardie
Mots-clés	Analyse, limite, dérivation, aire, intégrale, ordres de grandeur, entier, réel, très grand, très petit, intuition, démonstration
Date	Septembre 2001
Editeur	I.R.E.M. de Strasbourg (**S. 182**)
ISBN	2-911446-17-8
Public concerné	Professeurs de mathématiques
Résumé	Depuis plusieurs années, un groupe de professeurs répartis dans toute l'académie d'Amiens a expérimenté une initiation aux notions fondamentales de l'Analyse au moyen des ordres de grandeurs absolus. Il s'agit de montrer que l'intuition peut être formalisée par une réflexion sur les nombres réels qui redonne aux élèves les moyens de raisonner avec les repères nécessaires pour que ces raisonnements aient du sens. Cette brochure présente des activités et des leçons qui ont été testées dans des sections très diverses. Elle propose ensuite des leçons plus approfondies destinées aux sections scientifiques et aux professeurs puis termine par une justification épistémologique et logique des concepts dont la première partie constitue la transposition didactique.
Prix	50 F (+ port).

UNIVERSITÉ DE HAUTE ALSACE

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Pôle Haut-Rhin

Regards et perspectives sur l'enseignement de l'analyse

Au lycée et dans les formations universitaires de base

Mulhouse, 8 et 9 mars 2002

Thèmes

Évolutions et perspectives

Approche heuristique

Approche en termes d'ordres de grandeur

Colloque organisé par

Alain KUZNIAK, Robert Nacer MAKHLOUF et Étienne MEYER pour l' Université de Haute- Alsace et le pôle haut-rhinois de l'IREM de Strasbourg, l'inspection pédagogique régionale de mathématiques, l'IUFM d'Alsace et l'IREM de Strasbourg.

PRÉSENTATION DU COLLOQUE

Depuis huit ans le pôle haut-rhinois de l'IREM de Strasbourg poursuit un travail de recherche sur l'enseignement des bases de l'Analyse mathématique en explorant de nouvelles méthodes fondées sur les progrès de la logique au 20e siècle. Ce travail de recherche a conduit la rédaction d'un ouvrage édité par l'APMEP en 1996 :

Fondement pour un enseignement de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur : les réels dévoilés
par R. LUTZ, A. MAKHLOUF, É. MEYER

Cet ouvrage a suscité l'intérêt de nombreux enseignants et la mise en place de deux groupes de recherche, l'un en Alsace, l'autre en Picardie, qui ont collaboré à des expérimentations de cette nouvelle approche. Le travail des deux groupes a fait l'objet d'une récente publication :

Analyse en termes d'ordres de grandeur : De l'intuition aux concepts
Édité par L'IREM de Strasbourg (50 F + port)
7 rue René Descartes F 67084 Strasbourg Cedex

L'objectif du colloque est d'insérer ce travail dans une réflexion comparative globale en compagnie de spécialistes ayant expérimenté d'autres approches

Des communication et des ateliers permettront à des points de vue divers de s'exprimer. Des actes du colloque seront publiés.

Trois thèmes principaux seront développés dans ce colloque :

Exposé sur l'évolution et les perspectives de l'enseignement de l'Analyse
Michèle ARTIGUE, Paris VII

Présentation d'une approche heuristique de l'Analyse
Groupe AHA de l'Université de Louvain :
Micheline CITTA, Marysa KRYSINSKA, Maggy SCHNEIDER

Réflexion sur l'approche en termes d'ordres de grandeur
Robert LUTZ, Mulhouse

Colloque sur l'enseignement de l'Analyse mathématique au lycée et dans les formations universitaires de base organisé à la Faculté des Sciences et Techniques de Mulhouse

Les 8 et 9 mars 2002