
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 106 Octobre 2002

I.S.S.N. 0290 - 0068



Émilie LE TONNELIER DE BRETEUIL,

marquise DU CHÂTELET (1706-1749)

Femme de lettres et de sciences, fille d'un notable de la cour de LOUIS XIV, épouse du marquis DU CHÂTELET LOMOND, lieutenant général des armées du roi, Madame DU CHÂTELET a publié :

Institution de physique (1740), ouvrage dans lequel elle expose la doctrine newtonienne,

Dissertation sur la nature et la propagation du feu (1744), mémoire qui concourut pour un prix de l'Académie des Sciences.

Elle est également l'auteur d'une traduction des *Philosophiae naturalis principia mathematica* de NEWTON, qui parut en 1759 sous le titre *Principes mathématiques de Newton* et qui comprend un éloge historique de Madame DU CHÂTELET par VOLTAIRE.

Cette traduction, la première en langue française, contribua largement à la diffusion de la doctrine newtonienne en Europe.

d'après : Lucienne MAZENOD, Ghislaine SCHOELLER
Dictionnaire des femmes célèbres
coll. Bouquins, Éd. Laffont, Paris, 1992.

GEORGES GLAESER, IN MEMORIAM

Le nom de Georges Glaeser est aujourd'hui tellement lié à l'IREM que l'on doit parfois démentir qu'il en ait été le créateur. Et pourtant, il y a une trentaine d'années de cela, quand il avait été question qu'il succède pour la direction de l'IREM de Strasbourg à son fondateur qui était le professeur Jean Frenkel, il y avait eu débat autour de sa candidature. Dans un *Récit de Vie* qui résulte d'entretiens avec Georges Glaeser et qui vient d'être publié par l'IREM de Strasbourg, le projecteur se trouve braqué sur des périodes antérieures à cette époque ; il n'est pas inutile par conséquent de resituer l'arrivée de Georges Glaeser à l'IREM.

Les IREM avaient essentiellement été créés dans l'objectif de diffuser *la mathématique* (d'aucuns disaient *les mathématiques modernes*) à tous les niveaux d'enseignement. Les instituteurs et les professeurs dont l'activité professionnelle était consacrée en tout ou partie à l'enseignement mathématique, avaient ainsi été amenés à suivre comme *stagiaires* des actions dites de *recyclage*. Il s'agissait de leur présenter l'édifice mathématique, tel qu'ils allaient être amenés eux-mêmes à le professer moyennant les transpositions ad-hoc : un socle de théorie des ensembles (avec l'axiomatique de Zermelo - Fraenkel), sur lequel s'arriment les structures comme groupes, anneaux et corps. Cette vision globale formelle des mathématiques s'opposait à une approche dite *traditionnelle*, beaucoup plus émiettée car issue de l'ancrage primitif des mathématiques sur le monde sensible (réalité physique, vie courante), et sa diffusion recevait la caution des psychologues de l'école piagetienne.

Pendant Jean Frenkel, convaincu du bien fondé d'une réforme de l'enseignement mathématique, avait eu la clairvoyance d'imaginer qu'une vision par trop dogmatique risquait de se heurter à la réalité du fonctionnement scolaire. Les idées que Georges Glaeser exposait dans son ouvrage intitulé « *Mathématiques pour l'élève-professeur* » avaient ainsi retenu son attention, peut-être justement parce que certaines s'écartaient du schéma de présentation alors en vogue. Ainsi, Georges Glaeser considérait que l'exposé mathématique doit être subordonné à l'activité mathématique et non l'inverse. Il n'allait pas jusqu'à adhérer au *learning by doing* cher au célèbre pédagogue américain John Dewey (1859-1952), car il considérait pour sa part l'acquisition d'une solide culture comme un objectif majeur de l'enseignement mathématique ; mais il ne perdait pas une occasion de dénoncer les propos relevant de la *pédagogie sans élève*, selon une expression qui lui était chère. A certains égards donc, il se montrait iconoclaste vis à vis d'idées du courant dominant, qui renversait souvent l'adage bien connu « *Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement* » en sa réciproque.

Élu directeur de l'IREM, Georges Glaeser allait effectivement lui donner des impulsions dans le sens de ses idées forces sur la culture mathématique et la place du problème dans l'apprentissage mathématique. Une simple armoire allait rassembler

pour commencer un florilège de quelques ouvrages de mathématique pure, mais aussi de méthodologie, comme le classique « *Comment poser et résoudre un problème* » de Georges Polya, ainsi que de psychopédagogie. Ces ouvrages proposés à la consultation des animateurs et de leurs stagiaires provenaient de sources diverses, dont des dons de Georges Glaeser lui-même. Cette armoire est aujourd'hui devenu un ensemble de trois salles constituant la bibliothèque de l'IREM, avec des milliers d'ouvrages parmi lesquels il faut procéder à des tris pour pouvoir accueillir les indispensables nouveautés. Pour la promotion du problème dans l'enseignement mathématique, trois initiatives furent prises : l'organisation de séances de travail autour de l'*heuristique*, la mise en chantier du *Livre du Problème* et le lancement d'une compétition ouverte aux lycéens, le *Rallye mathématique d'Alsace*.

D'autres que moi pourront parler des groupes d'heuristique, auxquels je n'ai pas eu l'occasion d'assister. Faut-il y voir les prémices de travaux didactiques conduits ultérieurement par Georges Glaeser ? Ils ont contribué quoi qu'il en soit à alimenter ses réflexions sur la didactique des mathématiques. On peut s'en rendre compte à la lecture de son ouvrage, paru en 1999 aux éditions de la Pensée Sauvage, *Introduction à la Didactique expérimentale des mathématiques*, où la présence de références historiques est également un élément fort. Pour sa part, le *Livre du Problème* a donné lieu à une petite série d'opuscules, dont certains sont tout à fait remarquables. Il faut dire que ce chantier avait pu compter sur des collaborateurs talentueux. Je songe par exemple au couple Diener, aujourd'hui professeurs à l'Université de Nice, qui avaient été les principaux artisans d'un véritable bijou de cette collection, le fascicule intitulé « *Autour d'un thème mathématique : la parité* ». Ceux qui n'ont pas vu ce fascicule n'imaginent sans doute pas toute la richesse qu'un thème en apparence aussi simple, j'allais dire aussi pauvre, peut receler. Quant au Rallye mathématique d'Alsace, son succès ne se dément pas au fil des années. Certes, l'équipe dynamique qui l'organise doit être saluée, car elle a dans ce succès un rôle déterminant, mais elle s'appuie sur une formule qui plait incontestablement : possibilité pour les candidats de concourir en binômes, à chacun desquels une salle est attribuée pour la durée de l'épreuve. Le pari que Georges Glaeser avait ainsi lancé de *favoriser l'élitisme de masse* s'est ainsi avéré largement gagnant.

Il n'était guère possible de donner dans cet éditorial ne serait ce qu'un aperçu très fragmentaire des travaux de Georges Glaeser. Nous invitons le lecteur curieux à consulter son importante bibliographie en se rendant sur le site de l'IREM <<http://irem.u-strasbg.fr>>. Pour sa part, le Comité de Rédaction de l'Ouvert envisage la publication, dans le courant de la présente année universitaire, d'un numéro spécial consacré à l'héritage que Georges Glaeser nous transmet.

François PLUVINAGE

TRAVAUX PERSONNELS ENCADRÉS (PREMIÈRE S) : IMAGES

IMAGERIE MÉDICALE : LE SCANNER

Jean-Michel KANTOR

Institut Mathématique de Jussieu et IREM Paris 7

1. TPE : réflexions préalables

Le document qui suit est destiné aux professeurs de première S et aux amateurs de tous bords. Il a pour but de traiter un exemple de TPE mathématiques/physique autour du thème des images, ici de l'imagerie médicale, sans aborder les questions liées aux SVT (interprétation anatomique). C'est l'occasion de montrer que contrairement au discours répandu chez les non-spécialistes par a priori idéologique (voir les fadaïses dignes de Monsieur Homais sur la « réalité insaisissable » [1]), les mathématiques ont un lien crucial avec le monde, qui ne se limite pas à des mots-valises comme « modèle » qu'on place à toutes les sauces. À l'heure de progrès colossaux en physique, en biologie et en mathématiques exploitant des fertilisations croisées il est urgent de montrer aux élèves ces relations étroites entre les sciences, et sous un jour moderne (voir [4], [3'])

Que ceux qui en doutent s'engagent à ne jamais passer au scanner !

De ce point de vue l'initiative des TPE est excellente.

Citons un spécialiste :

“ Mathematics is not subordinate to natural science. But it is fair to say that Mathematics is the language of science in a deep sense... and just as language of true literacy not only specifies and expresses thoughts and processes of thinking but also creates them in turn, so does mathematics not only specify, clarify and make rigorously workable concepts... but at certain crucial instances it is an indispensable constituent of their creation and emergence as well.”

S. BOCHNER : *The role of mathematics in the rise of science*, Princeton University Press, 1981.

Cette fécondation mutuelle ne peut que profiter aux enseignants et aux élèves des autres disciplines. L'exemple de l'imagerie médicale (scanner) permet aussi de montrer des développements récents des mathématiques et des technologies nouvelles. De plus l'exemple choisi permet d'envisager les sérieuses difficultés qui peuvent se rencontrer et qui ne peuvent être résolues que par un véritable travail pluridisciplinaire. Par exemple, dans le cas qui nous intéresse, le seul article en français que nous ayons trouvé sur les mathématiques de l'imagerie médicale [4] mélange allègrement les fondements, les détails techniques et les apports des sciences physiques et des mathématiques.

2. Limites, frontières et historique

Nous précisons les limites de l'imagerie médicale, car les sujets voisins sont nombreux. Le terme technique qui prétend tout recouvrir dans le langage mathématique appliqué est **contrôle non-destructif** (cf. [5,6]). Par exemple aujourd'hui on peut avec des ondes sonores vous vendre un camembert sans blanc sans avoir pressé le doigt dessus.

On trouve ainsi le contrôle non-destructif en acoustique, en recherche pétrolifère, en stéréométrie mais il y a aussi recoupement avec la morphologie mathématique. Ces sujets ne seront pas abordés ici, ni non plus la magnifique géométrie intégrale qui prétend retrouver par exemple un convexe par ses projections (cf. [7]).

Commençons donc par le vocabulaire :

- scanner (anglais *to scan* : examiner, scruter) ;
- tomographie (grec *tomos* : « morceau coupé ») ;
- scanner CT *computerized tomography*, tomographie numérique.

À la fin des années 60 l'ingénieur Hounsfield imagine la situation suivante :

On envoie un mince faisceau parallèle F de rayons X sur un objet (un cerveau), avec l'idée de faire varier la direction. Pour une direction donnée l'intensité du rayon recueilli fournit une information sur les tissus traversés.

Le manque d'information obtenue par la technique de rayons classique peut se représenter grâce au schéma suivant :

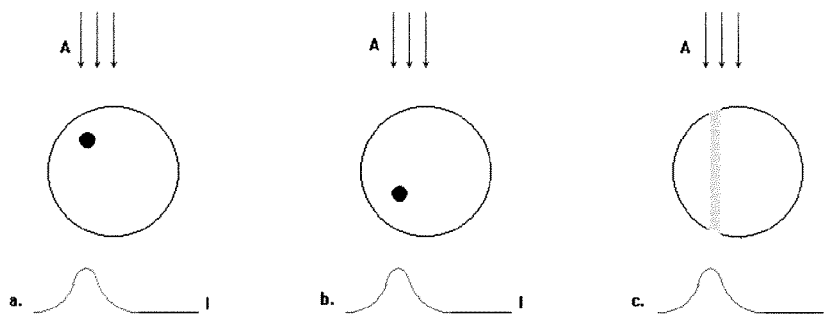
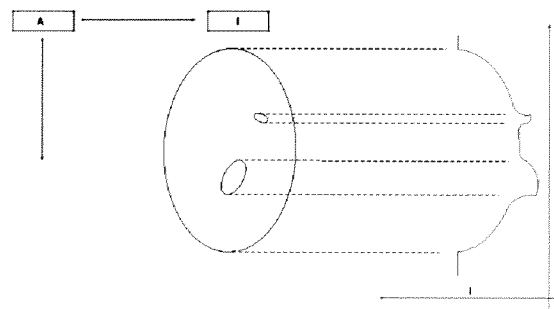


FIGURE 1

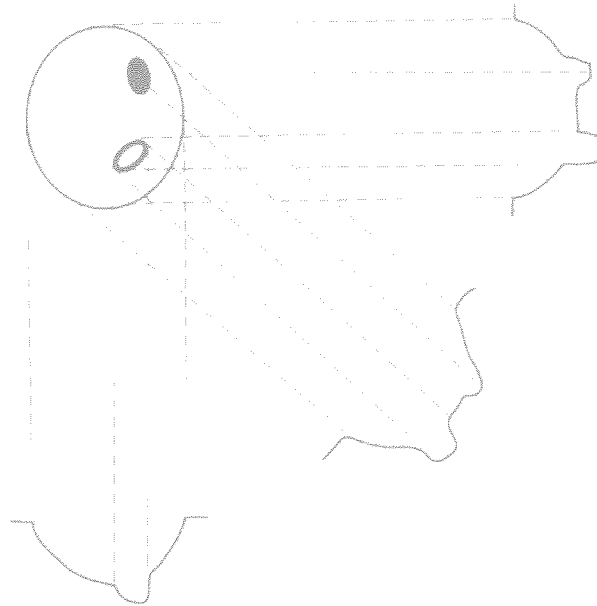
On a le même résultat (intensité obtenue I) selon les deux différentes positions de la tache (a ou b) ou même avec une tache diffuse (cas c).

La tache T à l'intérieur concentrée ou non, donne la même information quand on mesure l'atténuation dans une seule direction et on ne peut distinguer les deux positions en a et b. On renouvelle la mesure sous différents angles d'un plan donné, il faut encore « recoller l'information » obtenue par les multiples « clichés » à l'aide d'un ordinateur qui reconstitue la vue d'une tranche du corps. On peut espérer résoudre le problème. Par exemple à la figure 2 on distingue déjà les positions de la tache.



enregistrement de l'atténuation du faisceau au cours d'un balayage d'un crâne

FIGURE 2([4])



Plus facile à dire qu'à réaliser ! Il faudra plus de dix ans de travail. Les premiers essais pratiques utilisent 28 800 clichés à partir desquels 24 000 points de trame sont calculés. Neuf jours d'enregistrement et une nuit de calcul sont nécessaires... Mais l'ambition de Hounsfield ne se limite ni à énoncer une théorie, ni à créer un système de calcul. Il veut créer un produit commercialisable. En 1979, il sera récompensé du prix Nobel avec le physicien Allan McLod Cormak, de l'université Tufts (Massachusetts). Ce dernier est l'auteur des travaux théoriques.

Quelques années plus tard Mc Cormack découvre par hasard en bavardant à Harvard que ses calculs à la base de la tomographie ont été faits, en 1929, sous le nom de transformée de Radon (il s'agit en fait d'une interprétation géométrique de la transformation de Fourier). Belle leçon d'humilité pour les mathématiciens démiurges : oui, on peut arriver à se passer de nous !

Le principe est simple : le passage de rayons X dans une seule direction ne suffit pas, de multiples passages dans des directions différentes vont permettre de reconstituer le paysage (ici une section plane d'un cerveau).

Essayons de comprendre le processus qui donne l'intensité I à partir de l'intensité initiale A et des tissus traversés.

D'abord comme dans toute approximation numérique chaque quantité dépendant de paramètres continus est discrétisée. Pour les images on remplace par exemple les points d'une photo par une grille de 100×100 . De plus à chaque case est attaché un nombre qui tient compte de l'intensité de couleur (ou plus simplement 0 ou 1 suivant qu'il s'agit de noir ou blanc). Dans le cas de l'imagerie médicale imaginons qu'un rayon traverse une bande de n cases

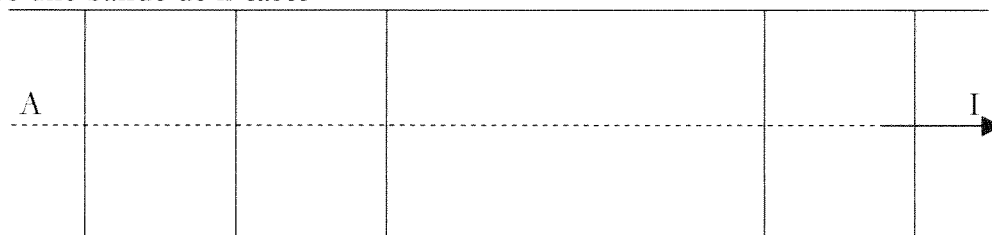


FIGURE 3

et que dans chaque case le rayon soit atténué d'un facteur $f(i)$ qui dépende de la case i , et qui mesure les capacités d'absorption de la matière présente.

À la sortie le rayon a une intensité :

$$I = A \cdot f(1) \dots f(n)$$

$$\log I = \log A + \sum \log f(i).$$

Autrement dit, le passage aux logarithmes est secondaire ; connaissant A on connaît la somme des $g(i)$ où $g(i) = \log f(i)$.

Pour se représenter le problème, on va imaginer une grille carrée de N cases, d'abord pour de très faibles valeurs de N , qui conduisent à l'idée de solution approchée (étudiée en Appendice 1).

Le rayon X soit traverse la case (i, j) soit ne la traverse pas ; quand il la traverse il est absorbé selon un facteur $f(i, j)$, et à la sortie il ne reste qu'une portion de l'intensité du rayon initial.

L'objet à deux dimensions que nous devons analyser par la tomographie est quadrillé en général par une grille $80 \times 80 = 6400$ cases.

3. Exemples miniatures

Pour comprendre le principe, examinons des exemples très simples. Examinons d'abord un carré de deux mailles ; on considère l'opération suivante : on trace un rayon et on ajoute les nombres qui sont dans les cases que le rayon traverse.

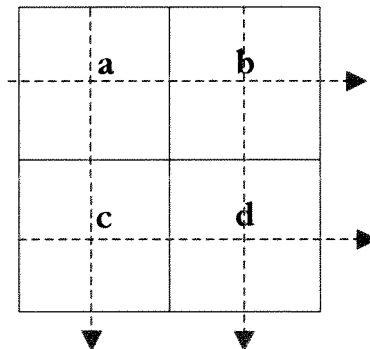


FIGURE 4

1. Les quatre sommes associées à la figure 4 nous permettent-elles de reconstituer les nombres (a, b, c, d) ?
2. Fixez l'un des nombres et cherchez les autres. Conclusions ?
3. On ajoute deux rayons diagonaux correspondant aux sommes U et V .

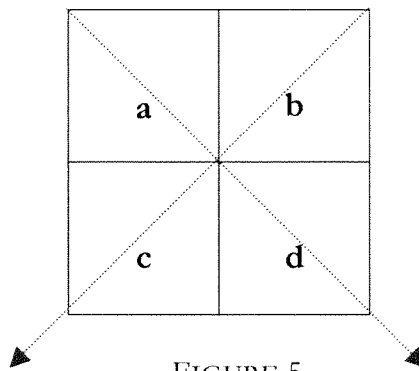


FIGURE 5

Peut-on résoudre ?

4. En général les conditions expérimentales ne donnent que des données approchées. Voici un exemple :

$$\begin{aligned} X &= a + b = 4 \\ Y &= c + d = 6 \\ Z &= a + c = 5 \\ T &= b + d = 5 \\ U &= a + d = 7 \\ V &= c + b = 3 \end{aligned}$$

Si on remplace les première et quatrième équations par les suivantes :

$$\begin{aligned} X &= a + b = 4,01 \\ Y &= b + d = 5,02 \end{aligned}$$

On constate que le système n'a plus de solutions.

La méthode du pivot de Gauss permet d'écrire les conditions de compatibilité. Même si on part d'un système qui possède une solution (ou une infinité) les données approchées peuvent conduire à un système impossible à résoudre.

Le système précédent représente en miniature le problème du scanner discrétisé (il faudra remplacer le carré par une grille de côté N). Même pour le carré de côté 2, il n'y a pas de système naturel qui possède de solution unique et bien déterminée, c'est là la difficulté intrinsèque. Regardons par exemple la question 4 de l'exercice précédent : on a six équations linéaires dans un espace vectoriel de dimension quatre : pas de solutions en général, il y a des conditions de compatibilité.

On généralise avec 3×3 : FIGURE 6

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Peut-on généraliser ? Comment ?

Montrer qu'avec le choix des seules horizontales et diagonales on ne peut trouver les variables, mais que le choix de certaines directions supplémentaires le permet. Rappelons que cette méthode doit être étendue à 80×80 pour s'appliquer à la tomographie

Évidemment il n'est pas question d'étudier solutions et solutions approchées en général ; on renvoie soit aux cours d'algèbre linéaire soit aux cours d'analyse numérique. Cependant le point commun à tous ces exemples, ainsi que celui du scanner, c'est qu'il s'agit de systèmes linéaires d'équations, qui sont plus nombreuses que le nombre d'inconnues. En général de tels systèmes n'ont pas de solutions ! Il faut que des conditions de compatibilité soient satisfaites.

Considérons un système de trois équations à deux inconnues qui résume l'essence de la difficulté du problème : dans le plan des coordonnées (x, y) les équations sont représentées par des droites.

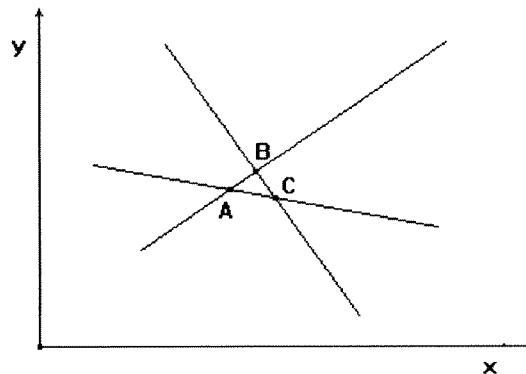


FIGURE 7

Si elles sont concourantes on a une unique solution A on peut d'ailleurs écrire la condition de compatibilité sous forme de la nullité d'un déterminant sinon il n'y a que des solutions approchées qu'on peut représenter par le triangle ABC , qui est une sorte de « solution généralisée ». Dans le cas général où il y a 80 variables, on utilise une méthode de résolution approchée que j'explique ci-dessous en dimension deux.

4. Résolutions approchées de systèmes surdéterminés d'équations linéaires

On étudie le cas de trois équations à trois inconnues. Considérons un système (coordonnées x, y)
$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \\ ex + fy = w \end{cases}$$
. On ne connaît pas dans la pratique les six coefficients, mais on sait que le système possède une solution ; on se donne un nouveau système proche et connu (l'erreur est due aux conditions physiques, au bruit...).

Étant donné un point $P(p_1, p_2)$ et une droite L d'équation $ax + by = c$, on note Q la projection orthogonale de P sur L puis $\vec{A} = (a, b)$, $\vec{p} = (p_1, p_2)$ et $\vec{q} = (q_1, q_2)$. Alors :

$$\vec{q} = \vec{p} + \left(\frac{c - \vec{A} \cdot \vec{p}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} \right) \vec{A}.$$

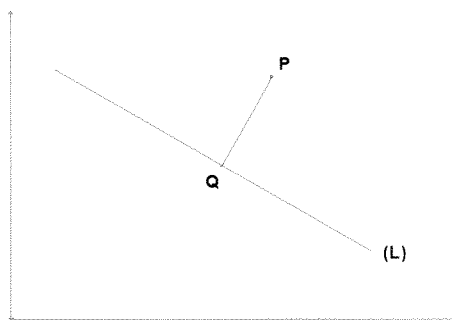


FIGURE 8

Étant donné les trois droites L_i dont on ne connaît pas les intersections deux à deux on part d'un point P_0 quelconque et on définit :

$$\begin{array}{rcl} P_1 & P_4 & = & P'_1 \\ P_2 & P_5 & = & P'_2 \\ P_3 & P_6 & = & P'_3 \end{array}$$

... où P'_1 est la projection de P_0 sur L_1 , P'_2 celle de P_1 sur L_2 ... et on recommence.

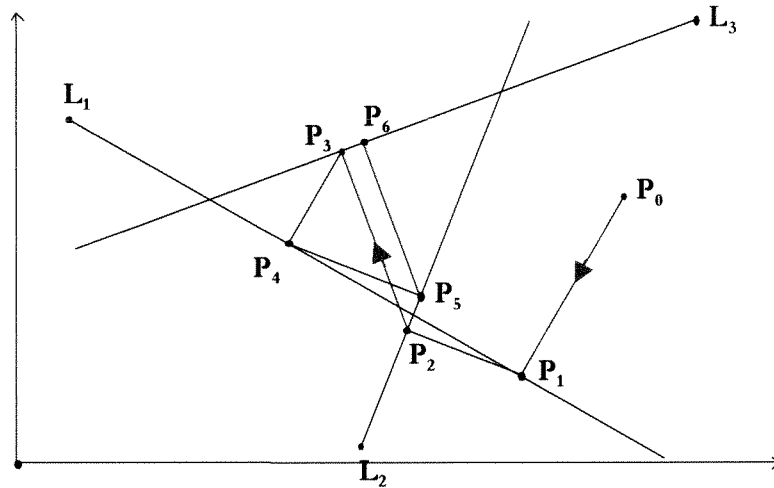


FIGURE 9

Exemples

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 3 \\ x + 4y & = & 4 \\ 3x - y & = & -1 \end{array}$$

Exercice : Partez de $A_0 = (2, 3)$ et appliquez la construction précédente, par exemple avec une calculatrice programmable que remarquez-vous ?

On peut montrer qu'en partant d'un point arbitraire on obtient ainsi trois suites qui convergent vers trois points des côtés du triangle, et que Ces points-limite ne dépendent pas du point de départ (à condition que les trois droites ne soient pas parallèles).

L'un des intérêts de cette méthode est le suivant : si on part d'un système avec N équations et environ N inconnues la méthode de résolution classique utilise environ N^3 opérations de multiplication ou division, celle-ci environ N^2 seulement.

Exemple : on considère le cas

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 06 \\ x_3 + x_4 & = & 12,02 \\ x_1 + x_3 & = & 07,9 \\ x_2 + x_4 & = & 10 \\ x_2 + x_3 & = & 09,94 \\ x_1 + x_4 & = & 08,12 \end{array}$$

On peut construire l'analogue de la situation précédente : les droites sont remplacées par des hyperplans de \mathbb{R}^4 , l'analogue de la formule permet de construire un algorithme et trois suites de points par exemple partant de $(0, 0, 0)$ on obtient :

P_0	0,00	0,00	0,00	0,00
P_1	3,00	3,00	0,00	0,00
P_2	3,00	3,00	6,01	6,01
P_3	2,44	3,49	5,45	6,01
P_4	2,44	3,49	5,45	6,51
P_5	2,44	3,99	5,95	6,51
P_6	2,03	3,99	5,95	6,19
P_1	2,02	3,98	5,95	6,09
P_2	2,02	3,98	5,94	6,08
P_3	1,99	3,95	5,91	6,08
P_4	1,99	3,95	5,91	6,05
P_5	1,99	3,99	5,95	6,05
P_6	2,03	3,99	5,95	6,09
P_1	2,02	3,98	5,95	6,09
P_2	2,02	3,98	5,94	6,08
P_3	1,99	3,98	5,91	6,08
P_4	1,99	3,95	5,91	6,05
P_5	1,99	3,99	5,95	6,05
P_6	2,03	3,99	5,95	6,09

On peut encore montrer que l'algorithme détermine six suites qui convergent séparément vers six points de chaque hyperplan de l'espace \mathbb{R}^4 . Dans la technique de l'imagerie on choisit (avec des critères complémentaires) l'un des points comme solution approchée et donne un point de l'image.

En conclusion, précisons que l'imagerie médicale est un immense domaine où peuvent se rencontrer des sujets raisonnables de TPE (mathématiques, SVT, sciences physiques) et d'autres qui le sont beaucoup moins, prendre garde !

5. La transformation de Radon

Nous avons évoqué les mathématiques discrètes de l'imagerie médicale, plus précisément du scanner, sur des mini-exemples (les méthodes numériques utilisent par exemple des matrices ayant des dizaines de milliers de lignes).

Nous allons traiter l'analogue continu de ce qui a été vu sous la forme discrète. Historiquement c'est l'aspect continu qui est apparu le premier.

Essayons de voir quel serait l'analogue continu de la méthode discrète (3. Exemples miniatures). On considère une fonction f à support compact dans l'espace numérique, à deux dimensions ici, et on lui associe la fonction F qui à toute droite ℓ associe

$$(1) \quad F(\ell) = \int_{\ell} f(x) dx$$

Il s'agit de définir ce que cela signifie, voir ensuite si l'on peut récupérer f à partir de la connaissance de F . Ce problème est un type de *problème inverse* en ce sens qu'il s'agit de récupérer une donnée inconnue f à partir de sa transformée F par une certaine opération effectivement calculable.

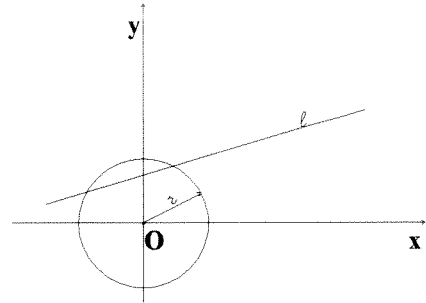
Exercice 1. Montrez qu'on peut écrire la droite ℓ sous la forme $x \cos \varphi + y \sin \varphi = p$, $p \geq 0$, (φ défini modulo 2π) et que dans ce cas

$$(2) \quad F(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (p \cos \varphi - s \sin \varphi, p \sin \varphi + s \cos \varphi) ds.$$

Et donc il s'agit de déterminer f connaissant F .

Exercice 2. On imagine f valant m dans une petite boule de rayon r centrée à l'origine et nulle en dehors.

FIGURE 10



a. Montrer qu'on a à peu près

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(p, \varphi)}{2\sqrt{r^2 - p^2}} d\varphi, \quad p \leq r.$$

b. On suppose que f a son support dans une boule de rayon R mais en fait est nulle en dehors de la boule de rayon $A < R$.

Faire un dessin approximatif du graphe de F en tant que fonction de la distance à l'origine. En général on considère la valeur moyenne de la fonction F sur toutes les droites situées à la distance fixée PO du point P (disons $P =$ l'Origine)

$$(3) \quad F_p(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(p_0, \varphi) d\varphi.$$

On a alors : **Théorème de Radon** (1917)

Si f est assez régulière on a :

$$f(P) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dF_p(q)}{dq}$$

Dès 1917 Radon a vu l'intérêt et la puissance potentielle de ces résultats. En particulier il a énoncé :

- a) Le caractère linéaire de l'opérateur $f \mapsto F$. Rappelons que l'œuvre de Banach, qui marque le début de la théorie des opérateurs linéaires date des années vingt.
- b) Le caractère intrinsèque de ces notions. La transformation de Radon commute au groupe des déplacements, et c'est ce caractère qui permet une démonstration rapide de la formule car on peut dès lors se limiter aux fonctions radiales. Ce caractère d'invariance est aussi remarqué dans un autre contexte par Poincaré.

Le rapport avec Fourier : on note :

$$(4) \quad \hat{f}(\xi) = \int e^{-2i\pi \langle x, \xi \rangle} f(x) dx$$

la transformée de Fourier de f , avec les notations habituelles à une ou plusieurs variables.

Exercice 3

Montrez qu'en intégrant par parties dans la formule (4) d'abord à

$x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n = \langle \xi, x \rangle = \text{Constante}$, la transformation de Radon peut être considérée comme l'image par la transformation de Fourier à une variable (qui est un isomorphisme) de la transformation de Fourier à n variables. Pour voir une étude détaillée très intéressante, consulter [8]

6. Plus récemment

La transformation de Radon a connu un nouveau développement à partir des années soixante :

1) méthodes numériques pour l'imagerie (voir première partie), et pour d'autres applications en radioastronomie ;

2) on peut évidemment chercher des extensions en dimension supérieures. Radon avait compris que les dimensions paire et impaire ont un comportement radicalement différent. Pour les dimensions impaires on a une formule d'inversion de nature locale : la valeur de f au point P peut être obtenue si on connaît seulement les intégrales de f sur les hyperplans passant par P ou voisins de P . C'est faux en dimensions paires !

Dimension 3 : Si on note la moyenne sur les plans passant par P

$$F_p(q) = \int_{S^2} F(\langle \omega, x \rangle, \omega) d\omega$$

où $d\omega$ est l'intégrale sur S^2 (l'ensemble des hyperplans à distance q est identifié à S^2), on a :

$$f(P) = C \times \left. \frac{\partial^2 F_p}{\partial q^2}(q) \right|_{q=0}$$

(C constante) ce qui montre que la valeur en P de f peut être récupérée si on connaît seulement les intégrales de f sur les hyperplans voisins de P .

3) généralisations (liées à d'autres domaines des mathématiques, en particulier à la théorie des groupes : travaux de l'école russe autour de Gelfand)

Le point de vue actuel est le suivant : on considère trois espaces X , Y et Z , où Z est une partie de $X \times Y$.

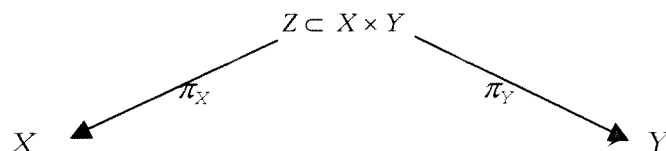


FIGURE 11

La fonction f sur X donne par composition une fonction sur $X \times Y$, donc sur Z par restriction, à laquelle on associe une image sur Y , obtenue *par intégration sur les fibres*. La question est de décrire les fonctions obtenues et de refaire le chemin dans l'autre sens pour récupérer f .

Exemple 1 : X est \mathbb{R}^2 , Y est l'ensemble des droites affines de \mathbb{R}^2 et Z est formé des couples (x, ℓ) où x est un point de ℓ . Z définit la relation d'incidence des points et des droites. L'ensemble Y est assez simple.

Exercice 4.

a) Décrire Y .

b) Dans \mathbb{R}^n on considère l'ensemble Y des hyperplans affines ; décrire Y (on pourra considérer le vecteur normal définissant l'hyperplan).

Remarque : l'ensemble $G(k)$ des sous-espaces vectoriels de dimension k a une structure plus compliquée.

Exercice 5. On se propose de décrire l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de \mathbb{R}^4 . Essayez de décrire l'ensemble des plans de dimension 2 dans l'espace de dimension 4. On peut identifier l'ensemble des plans à une quadrique dans un espace projectif. C'est en fait

la théorie de Plücker (coordonnées pluckériennes) qui fut le premier essai de décrire ces espaces.

Exemple 2. On donne un exemple différent :

On considère la sphère S^2 et les fonctions continues ou dérivables sur la sphère.

1. Montrer qu'on peut décomposer de manière unique toute fonction en somme d'une partie paire et d'une partie impaire.

2. À chaque grand cercle C de S^2 on associe l'intégrale de f sur C :

$$F(C) = \int_C f(x) d\gamma_C$$

Montrer, en utilisant 1., que l'application $f \mapsto F$ n'est pas injective. En 1927 Funk a montré que si f est paire la donnée de F permet de déterminer f .

Références

A

- [1] Repères, n° 86, juil. 1999.
- [2] Edward BENDER, *An introduction to mathematical modeling*, Dover 2000.
- [3] The UMAP journal of undergraduate mathematics and its Applications, *Mathematics made visible*, Vol. 21 n° 1, 2000 ainsi que toutes les publications du Consortium of mathematics and applications (COMAP), Boston (USA).
- [4] A. AMSALEM, *Bases physiques et mathématiques du scanner aux rayons X (exploration tomodensitométrique)* Bulletin APMEP, 563, Déc. 1988.
- [5] J. SERRA, *Image analysis and mathematical morphology*, Academic Press 1982
- [6] Sur le contrôle non-destructif :
 - a. M. FINK *et al.* : La Recherche n°291, oct. 1996. *Ultrasons, remonter le temps malgré le désordre.*
 - b. R. HALMSHAW : *Non destructive testing*, Ed. E. Arnold London, 1991.
 - c. R. HALRNSHAW : *Industrial radiology, theory and practice*, Applied Science London and New Jersey, 1982.
 - d. G. DEVEY, P. WEFLS : *Ultrasound in medical diagnosis*, Scientific American, mai 1978, pp98-112.
- [7] GARDINER, *Geometric tomography*, Cambridge University Press.
- [8] Études fondamentales :
 - a. L. SANTALO & M. KAC, *Integral geometry and geometric probability*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Addison-Wesley, 1976.
 - b. W. SWINDELL & H. FLARRETT, *Computerized tomography*, Physics Today, déc. 1977.
- [9] G.T. HERMAN : *Image reconstruction from projections, the fundamentals of computerized tomography*, New York, Academic Press.

B

- [1'] Michael ATIYAH : *Geometry of yang-Mills fields*, Pisa Accademia dei lincei 1979.
- [2'] R.N. BRACEWELL, A.C. RIDDLE : *Inversion of fan-beam scans in radio astronomy*, Astrophysics Journal, vol. 150, pp. 427-434, nov. 1967.
- [3'] Simeon GINDIKIN : *75 Years of Radon transform*, International press 1994.
- [4'] Sigurdur HELGASON : *The Radon transform*, Birkhäuser, Boston 1999.
- [5'] D. MUMFORD : *Algebraic geometry I*, Complex projective varieties p.172, Springer 1976(1995).
- [6'] RADON : *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten*, 1917.
- [7'] SANTALO : *Integral geometry and geometric probability*, Addison-Wesley, 1976.
- [8'] Alain YGER , *Signaux, CAT-Scanner, Quelques aspects du rôle des mathématiques dans d'autres sciences*, Fête de la science, Bordeaux, Octobre 2000.

À l'occasion de l'Assemblée Générale
de l'association *femmes et mathématiques*

COLLOQUE FEMMES EN MATHS 2002

vendredi 22 et samedi 23 novembre 2002

Avec la participation de :

Fatiha Alabau, Université de Metz
Petra Wittbold, Université Louis Pasteur
Alessandra Carbone, IHES
Ariane Lançon, Université Louis Pasteur
Mireille Bougeard, Université de Lyon
Viviane Ehrhard, administration du canton de Bâle.

Et une table-ronde "**Entrée des femmes dans les professions masculines**"
le vendredi 22 novembre de 16h à 18h

Colloque ★ à l'IRMA, 10 rue du Général Zimmer à Strasbourg, le vendredi matin à partir de 9h30
★ à l'Observatoire, 11 rue de l'Université à Strasbourg, le vendredi après-midi et le samedi

Le programme et le résumé des exposés peuvent être consultés à l'adresse suivante :
<http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/seminaires/autres/femmath.shtml>

Organisatrices : Florence Lecomte lecomte@math.u-strasbg.fr
Raphaële Supper supper@math.u-strasbg.fr



Inscriptions : Secrétariat de l'IRMA (Mme Claudine Orphanides)
7, rue Descartes - 67084 STRASBOURG Cedex
Tél. : 03 90 24 01 29
e-mail : irma@math.u-strasbg.fr
Fax : 03 90 24 03 28



Avec le soutien de la Mission culture scientifique et technique de l'ULP pour l'exposition :
« Femmes en maths... Pourquoi pas vous? ».

CENT ANS DE TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

par Christian KASSEL ¹

“ On peut déjà prédire sans grand risque
d’erreur que le XX^e siècle restera dans
l’histoire des mathématiques comme
le siècle de la Topologie, ... ”

J. Dieudonné [D1]

Considérons la famille d’ellipses E_a définies dans un repère orthonormé d’un plan euclidien par l’équation

$$x^2 + y^2/a^2 = 1,$$

où $a > 0$ (voir la figure 1). Si $a \neq a'$, les ellipses E_a et $E_{a'}$ sont deux objets géométriques différents (considérez les longueurs du petit axe et du grand axe de E_a).

Par contre pour un topologue, elles sont équivalentes. En effet, la transformation f du plan dans lui-même donnée par $f(x,y) = (x, a'y/a)$ est une bijection continue qui envoie l’ellipse E_a sur $E_{a'}$, et son inverse $(x,y) \mapsto (x, ay/a')$ est également continue. Une telle bijection “bicontinue” est ce que les topologues appellent un *homéomorphisme*.

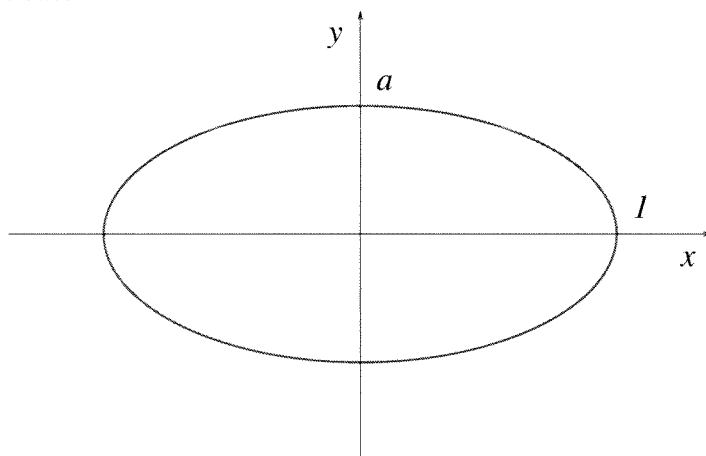


Figure 1. L’ellipse E_a

Le but de la topologie est de classer les figures géométriques à homéomorphisme près. Intuitivement, un homéomorphisme transforme une figure sans la déchirer, ni l’écraser. Ainsi un carré (plein) est homéomorphe à un disque, un cube à une boule, mais un carré n’est homéomorphe ni à un cube, ni à un segment. Cantor⁽⁵⁾ a bien découvert en 1877 des bijections entre segment, carré et cube, mais de telles bijections ne peuvent être des homéomorphismes, comme l’a démontré Brouwer⁽⁴⁾ autour de 1910.

Comment démontrer qu’il existe ou qu’il n’existe pas d’homéomorphisme entre deux figures données?

1. © L’OUVERT 106 (2002)

Cette question, parmi d'autres, a donné naissance à la fin du XIX^e siècle à ce que l'on appelle maintenant la topologie algébrique. Ce domaine des mathématiques, désormais centenaire, mériterait d'être aussi familier au public éclairé et aux lycéens que l'algèbre, la géométrie ou l'analyse, mais il faut attendre le deuxième, voire le troisième cycle universitaire pour qu'un étudiant apprenne les premières notions de topologie algébrique ; même un ouvrage aussi vaste que le Dictionnaire des Mathématiques de l'Encyclopædia Universalis [EU] ne consacre aucune rubrique à la topologie algébrique.

Pourtant au cours du vingtième siècle, cette dernière a radicalement changé la face des mathématiques, introduisant des concepts et des techniques nouvelles qui non seulement ont permis des résultats spectaculaires en topologie, mais sont également devenus indispensables dans d'autres domaines, au point que de nombreux mathématiciens pensent comme Dieudonné que « le XX^e siècle restera dans l'histoire des mathématiques comme le siècle de la topologie. » Le but de cet article est de donner une idée de ce qu'est la topologie algébrique et de mentionner quelques travaux actuels et des problèmes ouverts. Il n'est pas question ici d'esquisser une histoire de la topologie, pour laquelle il existe d'excellentes références comme [D2], [HT], [P2]. Contentons-nous de signaler que le mot "topologie" a été créé par Listing⁽¹⁶⁾ en 1836, mais n'a guère été utilisé avant 1920. Auparavant on utilisait l'expression *analysis situs* par opposition à *analysis magnitudinis*, l'analyse des grandeurs mesurables, c'est-à-dire la géométrie. Si la géométrie remonte à l'Antiquité grecque, il a fallu attendre la fin du XVII^e et le début du XVIII^e siècle pour que l'on attaque des problèmes géométriques dans lesquels la mesure des éléments qui les constituent ne joue aucun rôle, mais où seule importe la position des uns par rapport aux autres. On estime parfois que le célèbre "problème des ponts de Königsberg" posé et résolu par Euler⁽¹⁰⁾ autour de 1735 est le point de départ de la topologie, mais ce problème relève plutôt de la théorie des graphes.

Le texte fondateur de la topologie algébrique est le mémoire intitulé *Analysis Situs* et publié par Poincaré⁽¹⁸⁾ en 1895 ([P1], pp. 193–288). En une centaine de pages magistrales, Poincaré introduit le concept d'homologie, les nombres de Betti, le groupe fondamental, la caractéristique d'Euler-Poincaré, et établit ce que l'on appelle maintenant la dualité de Poincaré (on retrouvera ces concepts fondamentaux dans les pages qui suivent).

Le but poursuivi par Poincaré est d'appliquer son *analysis situs* à l'étude qualitative des équations différentielles, à celle des fonctions algébriques à deux variables, et à la recherche des groupes finis dans ce que nous appelons aujourd'hui les groupes de Lie.

1 La caractéristique d'Euler-Poincaré

Considérons chacun des cinq polyèdres réguliers, et notons s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces (voir le tableau ci-dessous). On voit que pour chaque polyèdre la formule suivante, découverte en 1750 par Euler, est vérifiée :

$$s - a + f = 2. \tag{1}$$

	s	a	f
<i>Tétraèdre</i>	4	6	4
<i>Cube</i>	8	12	6
<i>Octaèdre</i>	6	12	8
<i>Dodécaèdre</i>	20	30	12
<i>Icosaèdre</i>	12	30	20

Si les polyèdres réguliers relèvent de la géométrie au sens le plus primitif, celui de la science des longueurs et des angles, un instant de réflexion montre qu'il n'en est rien de la formule (1). En effet, un allongement ou un raccourcissement des arêtes, une déformation du polyèdre ne modifient pas les entiers s , a , f et, par conséquent, la somme alternée $s - a + f = 2$ reste constante au cours de ces transformations. À vrai dire, la formule (1) est davantage une propriété de la sphère que des polyèdres réguliers. En effet, projetons un polyèdre à partir de son centre de gravité sur la sphère qui le circonscrit. On obtient un dessin sur la sphère constitué de f faces séparées par a arêtes courbes reliant s points qui jouent le rôle de sommets. Nous pouvons raffiner cette subdivision de la sphère en coupant certaines faces par de nouvelles arêtes. Si l'on coupe une face par une arête reliant deux sommets existants, on augmente à la fois le nombre d'arêtes et le nombre de faces d'une unité ; la somme alternée $s - a + f$ reste, elle, constante. Si cette arête part du milieu d'une autre arête jusqu'à un sommet existant, le nombre de sommets et le nombre de faces ont été augmenté d'un, mais le nombre d'arêtes de deux, ce qui entraîne également que $s - a + f$ reste constante. C'est là un fait général. Chaque fois que l'on raffine une subdivision, l'entier $s - a + f$ ne varie pas. Si maintenant on a deux subdivisions polygonales distinctes Σ et Σ' de la sphère, quitte à les bouger un tout petit peu, on voit qu'il existe une subdivision polygonale (c'est la superposition de Σ et de Σ') qui raffine à la fois Σ et Σ' . De l'analyse précédente, il résulte que la valeur de $s - a + f$ est la même pour Σ et pour Σ' . Cette valeur identique pour toutes les subdivisions polygonales de la sphère \mathbf{S}^2 est appelée la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de \mathbf{S}^2 , et notée $\chi(\mathbf{S}^2)$. On a $\chi(\mathbf{S}^2) = 2$ comme conséquence de (1).

Le raisonnement que nous avons fait pour une sphère marche pour n'importe quelle surface S ; celle-ci possède une caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(S)$ qui est la valeur de $s - a + f$ pour n'importe quelle subdivision polygonale de S :

$$\chi(S) = s - a + f. \quad (2)$$

Un homéomorphisme d'une surface S sur une autre surface S' transporte une subdivision polygonale de S en une subdivision polygonale de S' avec le même nombre de faces, d'arêtes et de sommets. Il en résulte que deux surfaces homéomorphes ont même caractéristique d'Euler-Poincaré : $\chi(S) = \chi(S')$.

On sait qu'une surface arbitraire connexe (c'est-à-dire d'un seul tenant), compacte et sans bord, plongée dans \mathbf{R}^3 , s'obtient à homéomorphisme près en rajoutant un nombre fini d'anses à une sphère. Rajouter une anse à une surface S , c'est d'abord découper deux disques dans S , ce qui crée une surface trouée dont le bord est l'union disjointe de deux cercles, puis recoller bord à bord un cylindre avec la surface trouée (voir la figure 2). Soit S' la surface ainsi obtenue. En prenant des subdivisions po-

lygonales adaptées à la découpe, on voit que

$$\chi(S') = \chi(S) - 2. \quad (3)$$

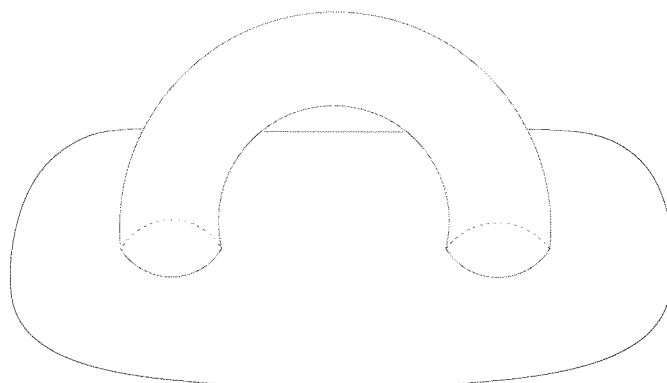


Figure 2. Recollement d'une anse

Il résulte de (3) que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface \mathbf{S}_g obtenue à partir d'une sphère en lui rajoutant g anses vaut

$$\chi(\mathbf{S}_g) = 2 - 2g, \quad (4)$$

ce qui montre que \mathbf{S}_g n'est pas homéomorphe à $\mathbf{S}_{g'}$ si $g \neq g'$. Le cas $g = 1$ est celui du tore $\mathbf{T} = \mathbf{S}_1$ ("chambre à air" représentée dans la figure 8) pour lequel on a $\chi(\mathbf{T}) = 0$.

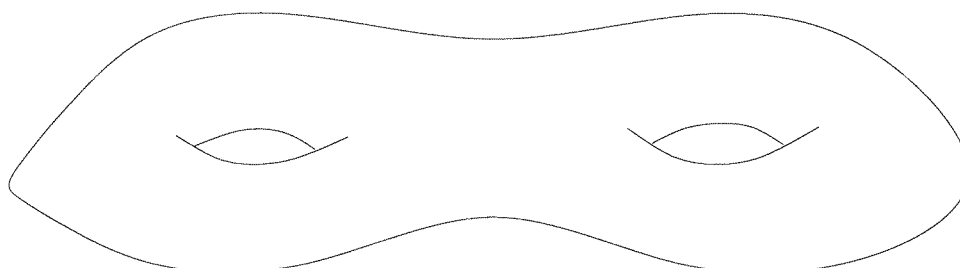


Figure 3. Exemple de surface \mathbf{S}_2

2 Type d'homotopie

La caractéristique d'Euler-Poincaré définie plus haut est ce que l'on appelle un *invariant topologique* des surfaces, c'est-à-dire une façon d'attacher un nombre à une surface de telle manière que ce nombre soit le même pour deux surfaces homéomorphes. On verra plus loin que l'on peut construire d'autres invariants de surfaces qui ne sont plus des nombres, mais des objets algébriques tels des espaces vectoriels ou des groupes.

La caractéristique d'Euler-Poincaré, comme d'autres invariants topologiques considérés plus bas, a une propriété d'invariance plus forte encore ; c'est un invariant du type d'homotopie. Pour expliquer ce qu'est le type d'homotopie d'une surface ou d'un espace topologique, il nous faut d'abord introduire la définition suivante : on dit que deux applications continues $f, f' : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques sont *homotopes* s'il existe une famille d'applications continues $h_t : X \rightarrow Y$ dépendant

continûment d'un paramètre $t \in [0,1]$, telle que pour $t = 0$ et $t = 1$ on a : $h_0 = f$ et $h_1 = f'$. La famille h_t est appelée une homotopie. Par exemple la famille d'applications de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^n définies pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $t \in [0,1]$ par $h_t(x) = (1-t)x$ est une homotopie entre l'identité de \mathbf{R}^n et l'application constante nulle.

Étant donné deux espaces topologiques X et Y , on dit qu'ils ont le même *type d'homotopie* s'il existe des applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que les applications composées $g \circ f : X \rightarrow X$ et $f \circ g : Y \rightarrow Y$ soient homotopes à l'identité. Deux espaces homéomorphes ont évidemment le même type d'homotopie, mais deux espaces peuvent avoir le même type d'homotopie sans être homéomorphes. Ainsi l'homotopie donnée quelques lignes plus haut montre que tout espace topologique homéomorphe à \mathbf{R}^n a le même type d'homotopie qu'un point, alors que \mathbf{R}^n et l'espace réduit à un point ne sont pas en bijection, *a fortiori* ne sont pas homéomorphes. On peut de même montrer qu'un cylindre a le même type d'homotopie que sa base ; plus généralement, un espace que l'on peut "écraser" continûment sur un autre a le même type d'homotopie que lui.

Un invariant topologique est dit *homotopique* s'il prend la même valeur sur des espaces qui ont le même type d'homotopie. La caractéristique d'Euler-Poincaré étant un invariant homotopique (on verra pourquoi au § 4), on voit que deux surfaces S_g et $S_{g'}$ n'ont le même type d'homotopie que si $g = g'$.

3 Les nombres de Betti

Ce sont des invariants homotopiques plus fins que la caractéristique d'Euler-Poincaré. Pour une surface S il y a trois nombres de Betti : $\beta_0(S)$, $\beta_1(S)$ et $\beta_2(S)$; ce sont des entiers naturels qui vérifient la relation

$$\chi(S) = \beta_0(S) - \beta_1(S) + \beta_2(S). \quad (5)$$

En comparant (5) et (2), on pourrait penser que $\beta_0(S)$ est le nombre de sommets d'une subdivision polygonale de la surface, $\beta_1(S)$ le nombre d'arêtes et $\beta_2(S)$ le nombre de faces, mais on sait que ces nombres varient d'une subdivision à l'autre. Une définition rigoureuse des nombres de Betti requiert l'introduction des premiers éléments de ce que l'on appelle *l'algèbre homologique*.

Si Σ est une subdivision polygonale d'une surface S , notons $C_0(\Sigma)$ (resp. $C_1(\Sigma)$, resp. $C_2(\Sigma)$) l'espace vectoriel réel dont une base est formée par tous les sommets (resp. par toutes les arêtes, resp. par toutes les faces) de Σ . Un élément de $C_0(\Sigma)$ est une combinaison linéaire formelle finie $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ de sommets v_1, \dots, v_k de Σ , les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ étant des nombres réels. De la même façon les éléments de $C_1(\Sigma)$ (resp. de $C_2(\Sigma)$) sont des combinaisons linéaires à coefficients réels d'arêtes (resp. de faces) de Σ . Les dimensions de ces espaces vectoriels sont égales au cardinal de leurs bases respectives, ce qui donne

$$\dim C_0(\Sigma) = s, \quad \dim C_1(\Sigma) = a, \quad \dim C_2(\Sigma) = f,$$

où s (resp. a , resp. f) est le nombre de sommets (resp. d'arêtes, resp. de faces) de Σ . Nous allons maintenant définir deux applications linéaires $d_1 : C_1(\Sigma) \rightarrow C_0(\Sigma)$ et

$d_2 : C_2(\Sigma) \rightarrow C_1(\Sigma)$. Munissons au préalable chaque arête et chaque face d'une orientation. Pour définir d_1 , il suffit de donner la valeur de d_1 sur chaque élément de la base de $C_1(\Sigma)$, c'est-à-dire sur chaque arête A : si l'arête orientée A va du sommet v_0 vers le sommet v_1 , on pose

$$d_1(A) = v_1 - v_0.$$

On définit d_2 en donnant sa valeur sur chaque face F de Σ : si le bord de F est composé des arêtes A_1, \dots, A_k , on pose

$$d_2(F) = \varepsilon(F, A_1) A_1 + \dots + \varepsilon(F, A_k) A_k,$$

où $\varepsilon(F, A_i) = +1$ si les orientations de F et de A_i sont compatibles et $\varepsilon(F, A_i) = -1$ sinon.

Il est facile de voir que $d_1(d_2(F)) = 0$ pour toute face F de Σ . La suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$\{0\} \xrightarrow{0} C_2(\Sigma) \xrightarrow{d_2} C_1(\Sigma) \xrightarrow{d_1} C_0(\Sigma) \xrightarrow{0} \{0\} \quad (6)$$

est ce que l'on appelle un *complexe*, à savoir une suite d'applications linéaires telle que la composée de deux applications consécutives de la suite soit nulle. De cette dernière condition il résulte que l'image d'une application de la suite est contenue dans le noyau de la suivante. Les nombres de Betti $\beta_i(\Sigma)$ associés à la subdivision polygonale Σ sont par définition égaux à la différence — positive — des dimensions du noyau et de l'image contenue dans ce noyau. Dans notre cas, cela donne

$$\begin{aligned} \beta_0(\Sigma) &= \dim C_0(\Sigma) - \dim \text{Im}(d_1), \\ \beta_1(\Sigma) &= \dim \text{Ker}(d_1) - \dim \text{Im}(d_2), \\ \beta_2(\Sigma) &= \dim \text{Ker}(d_2) - \dim \{0\}. \end{aligned}$$

On a utilisé ici la notation Im pour l'image d'une application linéaire et Ker pour le noyau (cette dernière notation renvoie au mot allemand *Kern*). L'espace vectoriel $C_0(\Sigma)$ intervient dans la définition de $\beta_0(\Sigma)$ car c'est le noyau de l'application nulle $C_0(\Sigma) \rightarrow \{0\}$. De la relation $\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$ qui est valide pour toute application linéaire $f : E \rightarrow F$, on déduit

$$\begin{aligned} \beta_0(\Sigma) - \beta_1(\Sigma) + \beta_2(\Sigma) &= \dim C_0(\Sigma) - \dim C_1(\Sigma) + \dim C_2(\Sigma) \\ &= s - a + f = \chi(S). \end{aligned} \quad (7)$$

On voit ainsi que la somme alternée des entiers $\beta_i(\Sigma)$ ne dépend pas de la subdivision polygonale Σ choisie. Poincaré a conjecturé, et Alexander⁽¹⁾ a démontré vers 1915, que chaque entier $\beta_i(\Sigma)$ est indépendant de la subdivision polygonale et des orientations choisies, ce qui permet de définir les nombres de Betti de la surface S par $\beta_i(S) = \beta_i(\Sigma)$ pour $i = 0, 1, 2$. La relation (5) est alors conséquence de (7). On montre aisément que $\beta_0(S)$ est le nombre de composantes connexes de S (donc $\beta_0(S) = 1$ si S est connexe).

Ce procédé marche pour n'importe quel espace topologique raisonnable. Considérons par exemple un disque \mathbf{D}^2 . Comme le montre la figure 4, le disque possède

une subdivision polygonale Σ avec une seule face F , à savoir le disque tout entier, une seule arête A , qui est le bord du disque, et un seul sommet v sur le bord. Dans ce cas les espaces vectoriels $C_i(\Sigma)$ ($i = 0,1,2$) sont tous unidimensionnels. On vérifie que l'on a

$$d_2(F) = A \quad \text{et} \quad d_1(A) = v - v = 0.$$

Il en résulte que $\text{Ker}(d_2) = \{0\}$, que $\text{Ker}(d_1) = \text{Im}(d_2)$ et que $\text{Im}(d_1) = \{0\}$. Par conséquent,

$$\beta_0(\mathbf{D}^2) = 1 \quad \text{et} \quad \beta_1(\mathbf{D}^2) = \beta_2(\mathbf{D}^2) = 0. \quad (8)$$

Si l'on enlève la face F au disque \mathbf{D}^2 , il reste un cercle, que nous noterons \mathbf{S}^1 . Dans ce cas, $C_2(\Sigma) = \{0\}$, les applications d_2 et d_1 sont nulles, et donc

$$\beta_0(\mathbf{S}^1) = \beta_1(\mathbf{S}^1) = 1 \quad \text{et} \quad \beta_2(\mathbf{S}^1) = 0. \quad (9)$$

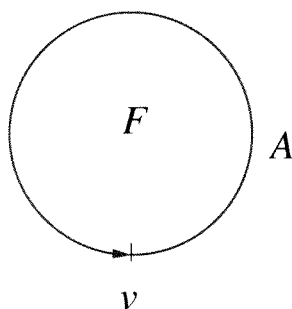


Figure 4. Une subdivision polygonale d'un disque

4 Les groupes d'homologie

Un grand pas a été franchi lorsqu'au lieu de considérer les nombres de Betti qui sont des entiers naturels, on a considéré des espaces vectoriels dont ils sont les dimensions. En reprenant les notations du § 3, on définit les espaces vectoriels quotients

$$H_0(\Sigma) = C_0(\Sigma)/\text{Im}(d_1), \quad H_1(\Sigma) = \text{Ker}(d_1)/\text{Im}(d_2), \quad H_2(\Sigma) = \text{Ker}(d_2)/\{0\}.$$

Puisque leur dimension $\beta_i(\Sigma)$ est indépendante de Σ , il en est de même (à isomorphisme près) des espaces vectoriels $H_i(\Sigma)$. On pose $H_i(S) = H_i(\Sigma)$. Les espaces vectoriels $H_i(S)$ sont appelés les *groupes d'homologie* de S .

Qu'a-t-on gagné à remplacer les nombres de Betti par un objet plus compliqué, à savoir les espaces vectoriels dont ils sont les dimensions alors qu'un espace vectoriel de dimension finie est entièrement déterminé par sa dimension? C'est que les groupes d'homologie peuvent être caractérisés par quatre axiomes qui ne pourraient que difficilement s'exprimer à l'aide des nombres de Betti. Nous allons énoncer ces axiomes, qui ont été dégagés dans les années 1940 par Eilenberg⁽⁹⁾ et Steenrod⁽¹⁹⁾, et montrer comment en déduire les groupes d'homologie de la sphère et, plus généralement, de la sphère n -dimensionnelle \mathbf{S}^n définie comme le sous-ensemble des points (x_0, x_1, \dots, x_n) de \mathbf{R}^{n+1} vérifiant $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

- (a) Le premier axiome énonce la *naturalité* (ou encore la *fonctorialité*) des groupes d'homologie. Il signifie qu'on associe à tout espace topologique X des espaces

vectoriels réels $H_i(X)$ ($i \in \mathbf{N}$) et à toute application continue $f : X \rightarrow Y$ des applications linéaires $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ de manière que, si f est l'application identité d'un espace topologique X , alors f_* est l'application identité de $H_i(X)$, et que, si $g : Y \rightarrow Z$ est une autre application continue, on a $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Il en résulte aussitôt que $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme.

- (b) Le second axiome énonce que, si f et $g : X \rightarrow Y$ sont deux applications continues *homotopes*, alors $f_* = g_*$. Les axiomes (a) et (b) ont pour conséquence que les groupes d'homologie sont des invariants homotopiques.
- (c) Le troisième axiome considère le cas où X est un espace topologique recouvert par deux sous-espaces U et V . Alors, sous certaines conditions naturelles que nous ne précisons pas, les groupes d'homologie de X , de U , de V et de l'intersection $U \cap V$ sont reliés par une longue suite exacte d'applications linéaires

$$\cdots \rightarrow H_i(U \cap V) \rightarrow H_i(U) \oplus H_i(V) \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_{i-1}(U \cap V) \rightarrow H_{i-1}(U) \oplus H_{i-1}(V) \rightarrow \cdots$$

où l'on dit qu'une suite est *exacte* si l'image de chaque application linéaire de la suite est égale au noyau de la suivante.

- (d) Le dernier axiome est un axiome de *normalisation*. Il affirme que pour un espace réduit à un point P on a

$$H_0(\{P\}) = \mathbf{R} \quad \text{et} \quad H_i(\{P\}) = \{0\} \quad \text{pour tout } i > 0.$$

Lorsque X est une variété de dimension n , c'est-à-dire un espace topologique dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à la boule n -dimensionnelle \mathbf{D}^n de centre $P = (0, \dots, 0)$ et de rayon 1, autrement dit, au sous-ensemble des points (x_1, \dots, x_n) de \mathbf{R}^n vérifiant $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$, alors les espaces vectoriels $H_i(X)$ sont tous de dimension finie et $H_i(X) = \{0\}$ pour tout $i > n$. Dans ce cas, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X)$ de X est bien définie et on a la généralisation suivante de (5) :

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i(X)$$

où $\beta_i(X) = \dim H_i(X)$. Jointe à l'axiome (b), cette formule entraîne que la caractéristique d'Euler-Poincaré est un invariant homotopique.

Pour une variété X de dimension n Poincaré a également établi l'existence d'un isomorphisme entre l'espace vectoriel $H_i(X)$ et le dual de l'espace vectoriel $H_{n-i}(X)$ (pour $0 \leq i \leq n$). Cette dualité entraîne l'égalité $\beta_i(X) = \beta_{n-i}(X)$ entre nombres de Betti.

Utilisons maintenant les axiomes (a), (b) et (d) pour montrer que pour la boule \mathbf{D}^n on a

$$H_0(\mathbf{D}^n) = \mathbf{R} \quad \text{et} \quad H_i(\mathbf{D}^n) = \{0\} \quad \text{pour tout } i > 0. \quad (10)$$

Soit p la projection de \mathbf{D}^n sur le centre P de la boule et q l'inclusion de P dans \mathbf{D}^n . L'application composée $p \circ q$ est l'application identité id du singleton $\{P\}$, ce qui implique $p_* \circ q_* = \text{id}_*$ au vu de l'axiome (a). Par ailleurs, la composée $q \circ p$ est reliée à

l'application identité de \mathbf{D}^n par l'homotopie suivante : h_t est l'application de la boule dans elle-même définie par $h_t(x_1, \dots, x_n) = (tx_1, \dots, tx_n)$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{D}^n$ et $t \in [0, 1]$ (il est clair que $h_0 = q \circ p$ et $h_1 = \text{id}$). Par conséquent, d'après (b), on a $q_* \circ p_* = \text{id}_*$. Nous venons donc d'établir que q_* est un isomorphisme de $H_i(\{P\})$ sur $H_i(\mathbf{D}^n)$ pour tout $i \geq 0$. On conclut avec (d).

Montrons à l'aide de l'axiome (c) que les groupes d'homologie de la sphère \mathbf{S}^n sont donnés pour $n \geq 1$ par

$$H_i(\mathbf{S}^n) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } i = 0 \text{ ou } n, \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11)$$

Si $n = 1$, alors (11) est une conséquence de (9). Si $n > 1$, supposons les formules (11) vérifiées pour \mathbf{S}^{n-1} et montrons-les pour \mathbf{S}^n . Soit U et V les deux hémisphères de \mathbf{S}^n définis respectivement comme les points (x_0, x_1, \dots, x_n) de \mathbf{S}^n tels que $x_0 \geq 0$ (resp. $x_0 \leq 0$). Ces hémisphères sont tous deux homéomorphes à la boule \mathbf{D}^n . Par ailleurs, l'intersection $U \cap V$ est homéomorphe à \mathbf{S}^{n-1} . En appliquant l'axiome (c) et (10), on obtient pour tout $i \geq 2$ la suite exacte

$$\{0\} \rightarrow H_i(\mathbf{S}^n) \rightarrow H_{i-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \rightarrow \{0\}.$$

Le lecteur montrera que ceci implique que les espaces $H_i(\mathbf{S}^n)$ et $H_{i-1}(\mathbf{S}^{n-1})$ sont isomorphes pour tout $i \geq 2$. Il reste à traiter les cas où $i = 0, 1$; c'est à peine plus compliqué.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème d'invariance de Brouwer, qui énonce que deux boules \mathbf{D}^m et \mathbf{D}^n ne peuvent être homéomorphes que si $m = n$ (m et n sont des entiers ≥ 1). Observons d'abord qu'en contractant le bord de la boule \mathbf{D}^m en un point, on obtient un espace homéomorphe à \mathbf{S}^m . Par conséquent, un homéomorphisme $f : \mathbf{D}^m \rightarrow \mathbf{D}^n$ induit par contraction du bord un homéomorphisme $\tilde{f} : \mathbf{S}^m \rightarrow \mathbf{S}^n$. En passant à l'homologie, on obtient un isomorphisme d'espaces vectoriels $\tilde{f}_* : H_m(\mathbf{S}^m) \cong H_m(\mathbf{S}^n)$. Comme $H_m(\mathbf{S}^m) = \mathbf{R}$ d'après (11), l'isomorphisme $H_m(\mathbf{S}^n) \cong \mathbf{R}$, joint à (11), force l'égalité $m = n$. Notons pour finir que \mathbf{D}^1 est un segment, que \mathbf{D}^2 est homéomorphe à un carré et \mathbf{D}^3 à un cube. Nous avons ainsi établi qu'un segment, un carré et un cube ne sont pas homéomorphes. Cette application des groupes d'homologie et des propriétés qu'ils vérifient illustre bien la puissance des techniques de topologie algébrique.

5 L'algèbre homologique, un langage universel

Donnons une idée des techniques d'algèbre linéaire cachées derrière les groupes d'homologie. Nous avons vu au § 3 comment associer un complexe à une surface munie d'une subdivision polygonale. Plus généralement, à un espace topologique X on sait associer un complexe (qui peut être infini)

$$\dots \xrightarrow{d_4} C_3 \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \rightarrow \{0\}$$

composé d'espaces vectoriels $(C_i)_{i \geq 0}$ et d'applications linéaires $(d_i : C_i \rightarrow C_{i-1})_{i > 0}$, appelées *différentielles*, telles que $d_i \circ d_{i+1} = 0$ pour tout $i > 0$. On définit les groupes

d'homologie $H_i(X)$ de l'espace topologique X comme les espaces vectoriels quotients

$$H_i(X) = \frac{\text{Ker}(d_i : C_i \rightarrow C_{i-1})}{\text{Im}(d_{i+1} : C_{i+1} \rightarrow C_i)}.$$

Une application continue $f : X \rightarrow Y$ donne naissance à un *morphisme de complexes* entre les complexes (C_i, d_i) et (C'_i, d'_i) respectivement associés aux espaces X et Y , c'est-à-dire à une famille d'applications linéaires $(f_i : C_i \rightarrow C'_i)_{i \geq 0}$ telle que l'on ait

$$f_{i-1} \circ d_i = d'_i \circ f_i \tag{12}$$

pour tout $i \geq 1$. C'est à partir de la famille $(f_i)_{i \geq 0}$ que l'on construit les applications linéaires $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ prévues par l'axiome (a) du § 4. En effet, la condition (12) implique que f_i envoie $\text{Ker}(d_i : C_i \rightarrow C_{i-1})$ dans $\text{Ker}(d'_i : C'_i \rightarrow C'_{i-1})$, et $\text{Im}(d_{i+1} : C_{i+1} \rightarrow C_i)$ dans $\text{Im}(d'_{i+1} : C'_{i+1} \rightarrow C'_i)$.

Une homotopie entre deux applications continues $f, f' : X \rightarrow Y$ donne naissance à une *homotopie algébrique*, c'est-à-dire à une famille d'applications linéaires $(h_i : C_i \rightarrow C'_{i+1})_{i \geq 0}$ telle que

$$f'_i - f_i = d'_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d_i \tag{13}$$

pour tout i . Établissons l'axiome (b) du § 4 à partir de (13). Un élément ω de $H_i(X)$ est la classe modulo $\text{Im}(d_{i+1})$ d'un élément x du noyau de $d_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$. D'après (13) on a

$$f'_i(x) - f_i(x) = d'_{i+1}(h_i(x)) + h_{i-1}(d_i(x)) = d'_{i+1}(h_i(x)).$$

Par conséquent, $f'_i(x)$ et $f_i(x)$ diffèrent par un élément de l'image de $d'_{i+1} : C'_{i+1} \rightarrow C'_i$, ce qui implique $f'_*(\omega) = f_*(\omega)$.

Illustrons les définitions précédentes sur le complexe $(C_i, d_i)_i$ utilisé à la fin du § 3 pour calculer les nombres de Betti du disque \mathbf{D}^2 . Les espaces vectoriels C_0, C_1 et C_2 sont unidimensionnels, engendrés respectivement par le sommet v , l'arête A et la face F . Les différentielles d_i sont toutes nulles, à l'exception de $d_2 : C_2 \rightarrow C_1$ qui est donnée par $d_2(F) = A$.

Considérons un autre complexe $(C'_i, d'_i)_i$ défini par $C'_i = \{0\}$ et $d'_i = 0$ pour tout $i > 0$, et $C'_0 = C_0 = \mathbf{R}v$ où v est le même point que précédemment. Ce complexe donne l'homologie de l'espace réduit au point v .

L'inclusion q de v dans \mathbf{D}^2 donne lieu à un morphisme de complexes $(q_i : C'_i \rightarrow C_i)_{i \geq 0}$ qui est l'identité sur $C'_0 = C_0$ et nul ailleurs; en d'autres termes $q_0 = \text{id}$ et $q_i = 0$ si $i > 0$. De même la projection p qui écrase \mathbf{D}^2 sur v donne lieu en sens inverse à un morphisme de complexes $(p_i : C_i \rightarrow C'_i)_{i \geq 0}$ qui est également l'identité sur $C'_0 = C_0$ et nul ailleurs. Il en résulte que les composés $p_i \circ q_i$ et $q_i \circ p_i$ sont tous deux l'identité en degré 0 et nuls en degré > 0 . Mais, comme morphismes de complexes, $(p_i \circ q_i)_i$ et $(q_i \circ p_i)_i$ sont différents. En effet, $(p_i \circ q_i : C'_i \rightarrow C'_i)_i$ est le morphisme identité du complexe $(C'_i, d'_i)_i$ (l'endomorphisme nul d'un espace vectoriel nul est évidemment aussi l'identité de cet espace). Par conséquent, l'application $p_* \circ q_*$ induite sur les groupes d'homologie est l'identité de $H_i(\{v\})$ pour tout $i \geq 0$.

Par contre, le morphisme de complexes $(q_i \circ p_i : C_i \rightarrow C_i)_i$ n'est pas le morphisme identité du complexe $(C_i, d_i)_i$. Cependant, si on définit la famille d'applications linéaires $(h_i : C_i \rightarrow C_{i+1})_{i \geq 0}$ par $h_i = 0$ si $i \neq 1$ et $h_1(A) = F$, alors un calcul rapide montre que la relation (13) est vérifiée avec $f'_i = \text{id}$ et $f_i = q_i \circ p_i$; autrement dit, $(h_i)_i$ est une homotopie algébrique entre le morphisme de complexes $(q_i \circ p_i)_i$ et le morphisme identité. Comme nous l'avons vu plus haut, ceci implique que $q_* \circ p_* = \text{id}_*$ sur les groupes d'homologie, ce qui démontre à nouveau que le disque \mathbf{D}^2 a la même homologie qu'un point.

Ce que nous venons de présenter en détail, c'est un exemple très élémentaire de la machinerie algébrique sophistiquée que les topologues (notamment Eilenberg⁽⁹⁾, Mac Lane⁽¹⁷⁾, H. Cartan⁽⁷⁾) ont développée à partir des années 1940 et 1950 et qu'ils ont appelée *l'algèbre homologique*; avec elle la topologie, de combinatoire qu'elle était au début du vingtième siècle (pensons aux subdivisions polygonales des §§ 1–3), est rapidement devenue algébrique.

On s'est aperçu dans les années 1950–60 que ces techniques s'appliquaient à d'autres domaines que la topologie, comme l'analyse, la géométrie algébrique ou la théorie des nombres. En analyse elles permettent d'étudier les propriétés globales des équations différentielles. Depuis plus récemment, la physique mathématique et l'informatique théorique font également appel à l'idée d'homologie. Des concepts et des termes comme "catégorie", "foncteur", "cohomologie", "fibré", "revêtement", "classes caractéristiques", "suite exacte", "suite spectrale", introduits par les topologues sont maintenant utilisés dans de nombreux domaines mathématiques.

6 Nœuds

Dans les paragraphes qui suivent nous présentons quelques recherches contemporaines en topologie algébrique.

Le problème de base de la topologie qui est de classer les espaces topologiques à homéomorphisme près peut être étendu aux paires (X, K) où K est un sous-espace de X . Si X est fixé, on dira que K et $K' \subset X$ sont *isotopes* s'il existe un homéomorphisme f de X dans lui-même tel que $f(K) = K'$. Au tout début du vingtième siècle, Schönflies a montré que tous les plongements du cercle dans le plan \mathbf{R}^2 sont isotopes, autrement dit on peut toujours transformer n'importe quelle courbe continue fermée sans points multiples du plan dans le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ par une déformation continue du plan.

Il en va différemment si l'on considère des *nœuds*, c'est-à-dire des courbes continues fermées sans points multiples plongées dans l'espace euclidien \mathbf{R}^3 (voir les figures 5 et 6). Intuitivement, on sent qu'il existe des nœuds qui ne se "dénouent" pas et qui donc ne sont pas isotopes au nœud trivial formé par les points d'un cercle standard. Classifier les nœuds, c'est établir une liste de nœuds telle que tout nœud soit isotope à un nœud de la liste et que deux nœuds distincts de la liste ne soient pas isotopes. Pour l'instant, on ne dispose pas d'une telle liste; on sait seulement qu'elle ne peut pas être finie.

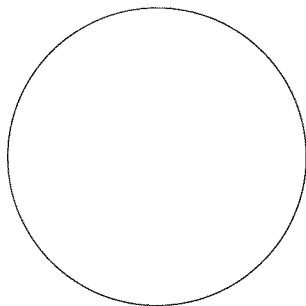


Figure 5. Un nœud trivial

Comment montrer que deux nœuds ne sont pas isotopes ou qu'un nœud n'est pas trivial? Une des méthodes les plus efficaces dont on dispose pour répondre à ces questions est de construire un *invariant de nœuds*. Un tel invariant associe à chaque nœud un nombre, ou plus généralement un objet algébrique, de façon que le nombre (ou l'objet algébrique) soit le même pour deux nœuds isotopes. *A contrario*, si l'invariant prend des valeurs différentes pour deux nœuds donnés, c'est que ces nœuds ne sont pas isotopes.

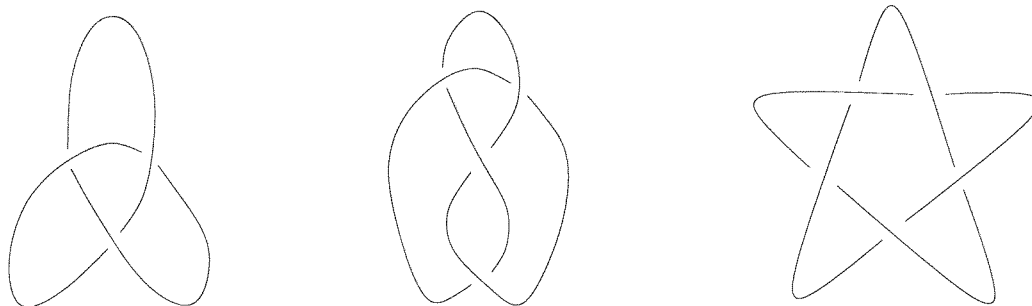


Figure 6. Trois nœuds non isotopes entre eux

Construire un invariant de nœuds n'est pas une tâche facile. Pendant longtemps, on a essentiellement disposé d'un invariant, construit par Alexander⁽¹⁾ dans les années 1920, qui associe à tout nœud K un polynôme $P_K(z)$ à coefficients entiers.

Voici comment on peut calculer le polynôme d'Alexander $P_K(z)$ d'un nœud K . Tout d'abord on oriente K , c'est-à-dire on choisit un sens de parcours. Ensuite on le projette sur un plan de telle manière que la projection n'ait que des points doubles à tangentes transversales. La courbe plane orientée ainsi obtenue a deux sortes de croisements, les croisements positifs et les croisements négatifs (le dessin de gauche de la figure 7 représente un croisement positif et celui du milieu un croisement négatif; les flèches indiquent le sens de parcours). Etant donné un croisement positif, on obtient un nouveau nœud K' en remplaçant ce croisement par un croisement négatif. En éliminant le croisement comme dans le dessin de droite de la figure 7, on obtient un nouvel objet que nous noterons K'' : c'est une courbe à une ou deux composantes. La règle qui relie les polynômes d'Alexander de K , K' et K'' est la suivante :

$$P_K(z) - P_{K'}(z) = zP_{K''}(z). \quad (14)$$

Cette règle, jointe à l'axiome qui impose au polynôme d'Alexander d'être invariant par isotopie, permet de supprimer les croisements les uns après les autres. Il reste à fixer la valeur du polynôme d'Alexander pour un cercle et pour une union disjointe

de cercles : $P_K(z) = 1$ si K est un cercle et $P_K(z) = 0$ si K est une union de plusieurs cercles.

Ces règles permettent de calculer facilement les polynômes d'Alexander de nœuds simples. J'encourage le lecteur à vérifier que pour le nœud de trèfle T (à gauche dans la figure 6) on a $P_T(z) = z^2 + 1$, démontrant ainsi que T n'est pas un nœud trivial. Ce qui est moins évident, c'est de montrer que le polynôme d'Alexander ne dépend pas des choix ci-dessus et qu'il définit bien un invariant de nœuds.

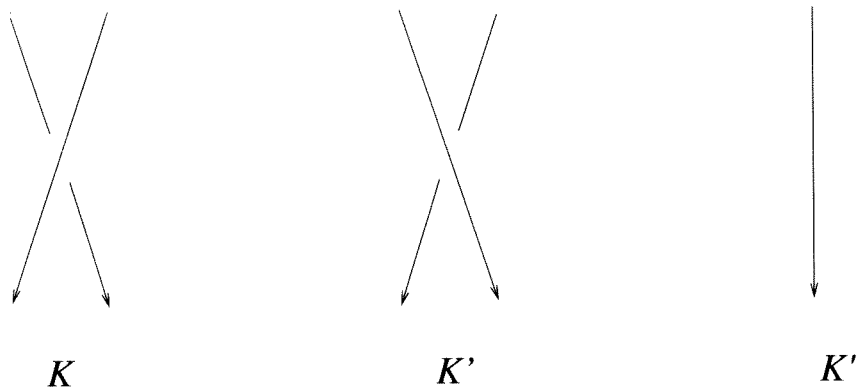


Figure 7

Le polynôme d'Alexander date des années 1920. Il a fallu attendre 1984 pour que Vaughan Jones⁽¹²⁾ découvre un nouvel invariant polynomial qui permet de distinguer des nœuds pour lesquels le polynôme d'Alexander prend les mêmes valeurs. Sa découverte a créé une grande excitation dans le monde mathématique et donné un nouvel essor à la théorie des nœuds. Une des raisons à cela a été la nouveauté de cet invariant ; une autre, plus importante encore, est venue des méthodes utilisées par Jones pour construire son invariant (étude de certaines algèbres d'opérateurs sur un espace de Hilbert) et des liens inattendus qui ont pu être établis entre cet invariant et la mécanique statistique (modèles exactement calculables de systèmes de particules en interaction disposées sur un réseau) ainsi qu'entre l'invariant de Jones et la théorie des *groupes quantiques*, une théorie algébrique nouvelle fondée au début des années 1980 par Drinfeld⁽⁸⁾ sous l'influence de physiciens soviétiques. La théorie des groupes quantiques est une généralisation audacieuse, "non commutative", de la théorie des groupes de Lie dont les fondateurs sont Lie⁽¹⁵⁾, Killing⁽¹³⁾, E. Cartan⁽⁶⁾. Ces liens inattendus et spectaculaires entre la topologie, la physique et l'algèbre illustrent une fois de plus l'unité des mathématiques et la fécondité de la méthode qui consiste à approcher un objet mathématique de côtés très différents. Ils ont attiré un grand nombre de mathématiciens désireux de comprendre ces nouvelles relations. Deux ou trois années après la découverte de l'invariant de Jones, une myriade de nouveaux invariants de nœuds ont été découverts, tous construits à partir des groupes quantiques (on pourra feuilleter [KRT] pour en apprendre plus sur ce sujet).

Ces nouveaux invariants de nœuds appartiennent tous à une classe d'invariants de nœuds qui a été dégagée en 1989–90 par Vassiliev. Peu de temps après, Kontsevich⁽¹⁴⁾ a construit un invariant de nœuds qui a deux particularités étonnantes : d'une part l'invariant de Kontsevich prend ses valeurs dans une étrange algèbre combinatoire dont les éléments sont des combinaisons linéaires de graphes trivalents (c'est-à-dire

tels que de chaque sommet partent trois arêtes), et d'autre part la connaissance de cet invariant est équivalente à la connaissance de tous les invariants de Vassiliev réunis. On conjecture que cet invariant prend des valeurs distinctes pour deux nœuds quelconques non isotopes.

7 Le groupe fondamental

Le polynôme d'Alexander d'un nœud orienté K peut se calculer à partir des groupes d'homologie du complémentaire $\mathbf{R}^3 - K$ du nœud dans \mathbf{R}^3 . Il existe un invariant topologique plus fin que l'homologie qui permet de distinguer certains nœuds dont le polynôme d'Alexander est le même. C'est le groupe fondamental introduit par Poincaré⁽¹⁸⁾ dans son "*Analysis Situs*" pour montrer que des variétés dont l'homologie est la même ne sont pas nécessairement homéomorphes.

Donnons-nous un espace topologique X et fixons un point $x \in X$ (on pourra songer au cas où X est une surface). Définissons un lacet comme une application continue f de l'intervalle $[0,1]$ dans X telle que $f(0) = f(1) = x$. Un lacet est donc une courbe fermée dans X commençant et aboutissant au point x (voir la figure 8).

Lorsqu'on a deux lacets f et g , on en obtient un troisième, que l'on notera fg , en parcourant d'abord le lacet f , puis le lacet g . On peut définir de manière précise le lacet fg comme l'application donnée pour tout $t \in [0,1]$ par

$$(fg)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La composition des lacets met sur l'ensemble de tous les lacets de X une opération binaire qui possède des propriétés rappelant celles d'un groupe. En effet, étant donné trois lacets f , g et h , alors, bien que les lacets $(fg)h$ et $f(gh)$ ne soient pas les mêmes, il sont cependant homotopes.

De même, si u désigne le lacet constant, c'est-à-dire l'application définie par $u(t) = x$ pour tout $t \in [0,1]$, alors les trois lacets f , fu et uf sont homotopes. Enfin, si l'on définit $\bar{f} : [0,1] \rightarrow X$ par $\bar{f}(t) = f(1 - t)$ pour tout t , alors on obtient un lacet \bar{f} tel que $\bar{f}f$ et $f\bar{f}$ soient homotopes au lacet constant u . Par conséquent, la composition des lacets induit une structure de groupe sur l'ensemble $\pi_1(X)$ des classes d'homotopie de lacets de X . Le groupe $\pi_1(X)$ est appelé le *groupe fondamental* de X . C'est un invariant qui ne dépend que du type d'homotopie de X .

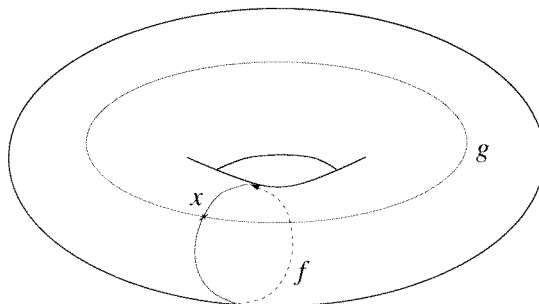


Figure 8. Lacets sur un tore

Pour le cercle, la classe d'homotopie d'un lacet est entièrement déterminée par le nombre de tours qu'il fait, ce qui donne $\pi_1(\mathbf{S}^1) \cong \mathbf{Z}$. Pour le tore, on a $\pi_1(\mathbf{T}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

Pour la sphère \mathbf{S}^2 et, plus généralement, pour les sphères \mathbf{S}^n de dimension $n \geq 2$, on montre que $\pi_1(\mathbf{S}^n)$ est le groupe trivial à un seul élément ; intuitivement, tout lacet sur \mathbf{S}^n se "contracte" en le lacet constant. Rappelons à ce sujet la célèbre conjecture de Poincaré qui reste l'un des grands problèmes ouverts en mathématiques : toute variété compacte de dimension trois dont le groupe fondamental est trivial est homéomorphe à la sphère \mathbf{S}^3 .

Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{R}^3 - K)$ du complémentaire $\mathbf{R}^3 - K$ d'un nœud est un invariant de nœuds. Il permet de caractériser les nœuds triviaux. En effet, un nœud K est trivial si et seulement si $\pi_1(\mathbf{R}^3 - K) \cong \mathbf{Z}$. Pour les nœuds non triviaux, les groupes fondamentaux sont non abéliens et il est généralement très difficile de déterminer si deux d'entre eux sont isomorphes ou non. Cela fait du groupe fondamental du complémentaire d'un nœud un invariant important, mais difficilement maniable.

Le groupe fondamental appartient à une série infinie de groupes $(\pi_i(X))_{i \geq 1}$ que l'on appelle les *groupes d'homotopie* de X . Ces invariants homotopiques ont été définis en 1935 par Hurewicz⁽¹¹⁾ qui a construit en même temps des homomorphismes naturels de groupes de $\pi_i(X)$ vers $H_i(X)$. Les groupes d'homotopie sont difficile à calculer ; ainsi le problème de calculer les groupes d'homotopie d'une sphère \mathbf{S}^n est encore largement ouvert.

8 Tresses

Suspendons n brins de ficelle à n clous alignés horizontalement, croisons-les et considérons l'objet ainsi obtenu dans un plan vertical. Pour le maintenir on fixe les n extrémités inférieures des brins à autant de clous alignés horizontalement plus bas, à l'exacte verticale des clous supérieurs. On a ainsi une réalisation concrète d'une tresse mathématique (voir la figure 9).

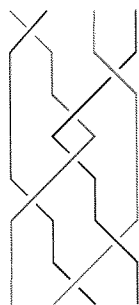


Figure 9. Une tresse à quatre brins

En coupant une tresse par un plan horizontal qui se meut du haut vers le bas, on obtient un lacet dans l'espace $C(n; \mathbf{R}^2)$ de toutes les configurations formées par n points dans le plan. Réciproquement, tout lacet de $C(n; \mathbf{R}^2)$ provient d'une tresse à n brins. L'ensemble $\pi_1(C(n; \mathbf{R}^2))$ des classes d'homotopie de lacets de $C(n; \mathbf{R}^2)$ a une structure de groupe que nous avons décrite au § 7. Au niveau des tresses, la loi de groupe associe à deux tresses la tresse obtenue en raboutant les extrémités inférieures de la première aux extrémités supérieures de l'autre. Ce groupe, noté B_n , a été introduit par Artin⁽²⁾ autour de 1925. C'est un groupe non abélien si $n \geq 3$ (si $n = 2$, alors $B_n \cong \mathbf{Z}$).

Artin a montré que B_n est engendré comme groupe par $n-1$ éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ soumis aux deux familles de relations

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{si } |i - j| = 1, \quad (15)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i - j| > 1. \quad (16)$$

Une des manières les plus efficaces d'étudier un groupe est de construire des représentations du groupe, c'est-à-dire des homomorphismes du groupe vers le groupe $GL_N(\mathbf{C})$ des matrices inversibles de taille N à coefficients complexes; autrement dit, on fait agir ce groupe sur \mathbf{C}^n *via* des endomorphismes linéaires inversibles. Pour construire une représentation du groupe B_n , il suffit de trouver $n-1$ matrices $M_1, \dots, M_{n-1} \in GL_N(\mathbf{C})$ satisfaisant les relations obtenues à partir de (15-16) en remplaçant σ_i par M_i .

Voici un exemple célèbre de représentation de B_n , découvert par Burau dans les années 1930. La représentation $\rho_B : B_n \rightarrow GL_n(\mathbf{C})$ en question dépend d'un paramètre complexe transcendant t ; elle est déterminée par les valeurs $\rho_B(\sigma_i) = M_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) où M_i est la matrice carrée (de taille $n \times n$) suivante :

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & \dots & & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1-t & t & & \\ & & 1 & 0 & & \\ \vdots & & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & \dots & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la matrice M_i le coefficient $1-t$ se trouve sur la ligne i et dans la colonne i .

On a longtemps pensé que la représentation de Burau était fidèle, c'est-à-dire que l'homomorphisme de groupes $\rho_B : B_n \rightarrow GL_n(\mathbf{C})$ était injectif. L'avantage de disposer d'une représentation fidèle d'un groupe, c'est qu'elle permet de vérifier à l'aide de matrices si deux éléments du groupe sont égaux ou non. Ce n'est que depuis les années 1990 que l'on sait que la représentation de Burau n'est pas fidèle pour $n \geq 5$. Par contre, elle est fidèle si $n = 2$ ou 3 ; la question reste ouverte pour $n = 4$ (avis aux amateurs!).

Nœuds et tresses sont intimement liés à travers l'opération de fermeture des tresses. On ferme une tresse en reliant chaque clou supérieur au clou inférieur situé à sa verticale par une ficelle qui passe à l'extérieur du plan de la tresse, par exemple à l'arrière de ce plan. Alexander⁽¹⁾ a montré qu'à isotopie près tout nœud orienté dans \mathbf{R}^3 s'obtient par fermeture d'une tresse, à condition d'utiliser un nombre suffisamment grand de brins. La correspondance ainsi obtenue entre tresses et nœuds n'est pas bijective car deux tresses différentes peuvent donner deux nœuds isotopes. Cependant, on connaît les relations exactes qui existent entre deux tresses dont les fermetures sont isotopes. Cette connaissance donne une méthode pour construire des invariants de nœuds à partir des tresses.

Voici comment. Supposons que l'on dispose d'une famille d'applications $f_n : B_n \rightarrow \mathbf{C}$ indexée par les entiers $n \geq 2$, à valeurs complexes, vérifiant les trois

conditions suivantes :

$$f_n(gh) = f_n(hg), \quad f_{n+1}(g\sigma_n) = f_n(g), \quad f_{n+1}(g\sigma_n^{-1}) = f_n(g) \quad (17)$$

pour tout entier $n \geq 2$ et tout couple (g, h) d'éléments de B_n . Alors on obtient un invariant I_K pour un nœud orienté K comme suit : on choisit une tresse $g \in B_n$ dont la fermeture est K , et on pose $I_K = f_n(g)$, où n est l'indice du groupe B_n auquel appartient la tresse g . On peut montrer que cette définition de I_K ne dépend pas de la tresse g et définit un invariant de nœuds.

Les invariants quantiques mentionnés au § 6 s'obtiennent tous de cette manière. La théorie des groupes quantiques produit naturellement des familles de représentations $\rho_n : B_n \rightarrow GL_N(\mathbf{C})$. Prenons la trace des matrices données par la représentation et posons $f_n(g) = \text{tr}(\rho_n(g))$ pour tout $g \in B_n$. La famille d'applications $f_n : B_n \rightarrow \mathbf{C}$ ainsi obtenue vérifie les conditions (17). La première de ces conditions est conséquence de la propriété bien connue de la trace d'un produit de deux matrices: $\text{tr}(MM') = \text{tr}(M'M)$. Par contre, la vérification des deux autres, qui portent à la fois sur f_n et sur f_{n+1} , découle de propriétés non triviales des groupes quantiques.

À l'heure actuelle les groupes de tresses continuent de susciter l'intérêt des chercheurs. Comme on l'a dit plus haut, la représentation de Burau n'est pas fidèle, contrairement à ce que l'on a longtemps pensé. Tout récemment, en 1999, le mathématicien néerlandais Daan Krammer a construit le premier exemple de représentation fidèle pour les groupes de tresses à plus de trois brins (voir [T]).

En 2001 des mathématiciens de l'Université de Caen et des ingénieurs de France Télécom ont déposé un brevet pour utiliser les groupes de tresses en cryptographie. Leur idée est fondée sur le fait que la résolution de certaines équations, pourtant très simples, dans B_n dépasse de loin les capacités actuelles des ordinateurs les plus puissants.

Pour terminer nous recommandons la lecture du livre [S] de Sossinsky, qui est une merveilleuse vulgarisation de la théorie des nœuds et des tresses.

REMERCIEMENTS. Je remercie P. Baumann pour avoir lu très soigneusement ce manuscrit et pour m'avoir appris à faire les figures avec *xfig*. Je suis également reconnaissant à A. Kuzniak et C. Mitschi pour leurs excellents conseils.

Notes

- ¹ James Waddell ALEXANDER (1888–1971), professeur à l’Institute for Advanced Study de Princeton.
- ² Emil ARTIN (1898–1962), mathématicien allemand, professeur à l’Université de Hambourg jusqu’en 1938, année où il émigre aux États-Unis, professeur aux États-Unis, notamment à Princeton.
- ³ Enrico BETTI (1823–1892), professeur à l’Université de Pise.
- ⁴ Luitzen BROUWER (1881–1966), professeur à l’Université d’Amsterdam, très connu pour avoir développé l’intuitionnisme.
- ⁵ Georg CANTOR (1845–1918), mathématicien allemand, un des fondateurs de la théorie des ensembles.
- ⁶ Élie CARTAN (1869–1951), professeur à la Sorbonne.
- ⁷ Henri CARTAN, né à Nancy en 1904, fils d’Élie Cartan, professeur à l’Université de Strasbourg dans les années 1930 et de 1945 à 1947, puis à l’École Normale Supérieure de Paris et à l’Université Paris-Sud.
- ⁸ Vladimir DRINFELD, né en 1954, a obtenu la Médaille Fields en 1990. Professeur à l’Université de Chicago.
- ⁹ Samuel EILENBERG (1913–1998), professeur à l’Université Columbia de New York, un des pères de l’algèbre homologique.
- ¹⁰ Leonhard EULER, né en 1707 à Bâle et mort en 1783 à Saint-Pétersbourg, a abordé tous les domaines des mathématiques dans son œuvre colossale.
- ¹¹ Witold HUREWICZ (1904–1956), mathématicien polonais émigré aux Etats-Unis.
- ¹² Vaughan JONES, mathématicien néo-zélandais né en 1952, a obtenu la Médaille Fields en 1990. Professeur à l’Université de Californie à Berkeley depuis 1985.
- ¹³ Wilhelm KILLING (1847–1923), professeur à l’Université de Münster en Westphalie.
- ¹⁴ Maxim KONTSEVITCH, né en 1964, a obtenu la Médaille Fields en 1998. Professeur à l’Institut de Hautes Etudes Scientifiques de Bures-sur-Yvette depuis 1995.
- ¹⁵ Sophus LIE (1842–1899), mathématicien norvégien, professeur à l’Université de Leipzig.
- ¹⁶ Johann Benedikt LISTING (1808–1882), élève de Gauss, professeur de physique à l’Université de Göttingen.
- ¹⁷ Saunders MAC LANE, né en 1909, professeur à l’Université de Chicago, un des pères de l’algèbre homologique.
- ¹⁸ Henri POINCARÉ (1854–1912), mathématicien et physicien, professeur à l’Université de Caen, puis à celle de Paris à partir de 1881, considéré comme le fondateur de la topologie algébrique.
- ¹⁹ Norman STEENROD (1910–1971), professeur à l’Université de Princeton.

Certaines des informations biographiques précédentes sont tirées de [HS], [HT] et du site Web [M].

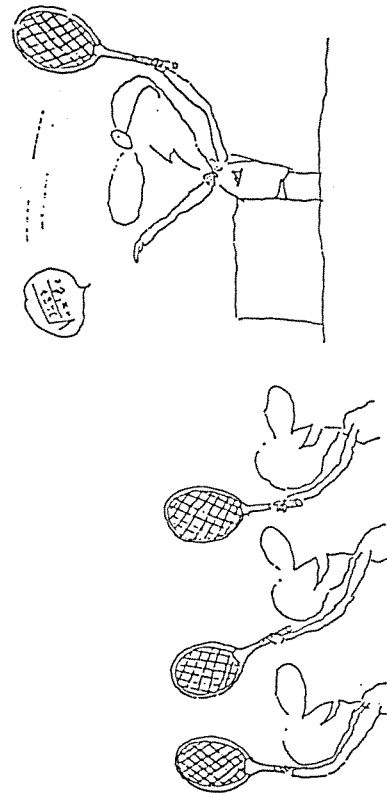
Références bibliographiques

- [D1] J. DIEUDONNÉ, *Panorama des mathématiques pures, Le choix bourbachique*, Gauthier-Villars, Paris, 1977.
- [D2] J. DIEUDONNÉ, *A history of algebraic and differential topology 1900-1960*, Birkhäuser, Basel, 1989.
- [EU] *Dictionnaire des Mathématiques, Algèbre, Analyse, Géométrie*, Encyclopædia Universalis, Albin Michel, Paris, 1997.
- [F] W. FULTON, *Algebraic topology, a first course*, Grad. Texts in Math., vol. 153, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [HS] B. HAUCHECORNE, D. SURATTEAU, *Des mathématiciens de A à Z*, Ellipses, Paris, 1996.
- [HT] *History of topology*, ed. I. M. James, Elsevier, Amsterdam, 1999.
- [KRT] C. KASSEL, M. ROSSO, V. TURAEV, *Quantum groups and knot invariants*, Panoramas et Synthèses, vol. 5, Soc. Math. France, Paris, 1997. ISBN 2-85629-055-8, ISSN 1272-3835.
- [M] *The MacTutor History of Mathematics Archive* :
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html>
- [P1] H. POINCARÉ, *Œuvres*, vol. 6, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [P2] J.-C. PONT, *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presses universitaires de France, Paris, 1974.
- [S] A. SOSSINSKY, *Nœuds, genèse d'une théorie mathématique*, Éditions du Seuil, Paris, 1999.
- [T] V. TURAEV, *Faithful linear representations of the braid groups*, Séminaire Bourbaki n° 878 (juin 2000), Astérisque, vol. 276, Soc. Math. France, Paris 2002, pp. 389–409.

Christian KASSEL
 Institut de Recherche Mathématique
 Avancée
 C.N.R.S. - Université Louis Pasteur
 7 rue René Descartes
 67084 Strasbourg Cedex, France
 E-mail: kassel@math.u-strasbg.fr
 Fax: +33 (0)3 90 240 328
<http://www-irma.u-strasbg.fr/~kassel/>

LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES AU TRAVERS D'UN RÉCIT DE VIE

Entretiens avec
Georges Glaeser



Titre LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES AU
TRAVERS D'UN RÉCIT DE VIE
ENTRETIENS AVEC GEORGES GLAESER

Brochure A4 135 pages

Auteurs Jean-Claude REGNIER et Françoise PERRIER

Mots-clés didactique - biographie

Editeur I.R.E.M. de Strasbourg (S. 184)

Date Juillet 2002

ISBN 2-911446-19-4

Public concerné Professeurs de mathématiques - Chercheurs en
didactique des mathématiques

Résumé Le récit de vie se distingue d'une biographie en ce
qu'il cherche moins à répertorier les faits, mais
qu'il vise à identifier des facteurs décisifs pour les
orientations d'une existence. Pourquoi un
mathématicien en est-il venu à se consacrer à
cette discipline ? Dans le cas de Georges Glaeser,
on verra qu'il s'agissait presque d'une nécessité.
Par ailleurs, l'époque qu'il a traversée, avec les
événements de l'histoire et l'évolution de la
pensée mathématique se trouve reflétée avec
intensité et précision dans ce récit de vie.

Prix 10 € (+ 3,05 € de frais d'envoi)

L'illustration de couverture est extraite de "Mathématiques pour l'élève
professeur", Georges Glaeser, copyright Hermann, Paris, 1971.

Jean-Claude Régnier
Françoise Perrier

LETTRE... OUVERTE

MICHÈLE AUDIN

Institut de Recherche Mathématique Avancée, U.L.P. Strasbourg

Cher OUVERT,

C'est avec plaisir⁽¹⁾ que j'ai vu que tu avais publié un article [4] sur quelques théorèmes sur les cercles dans ton numéro 105 d'avril 2002.

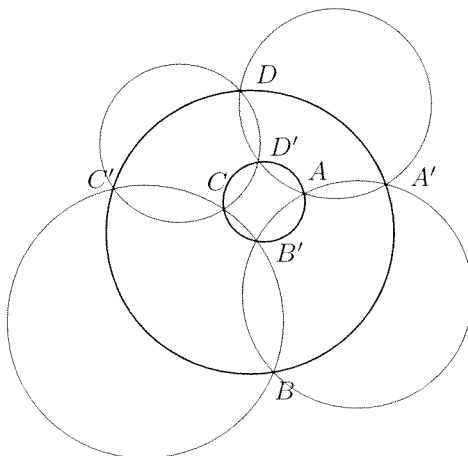


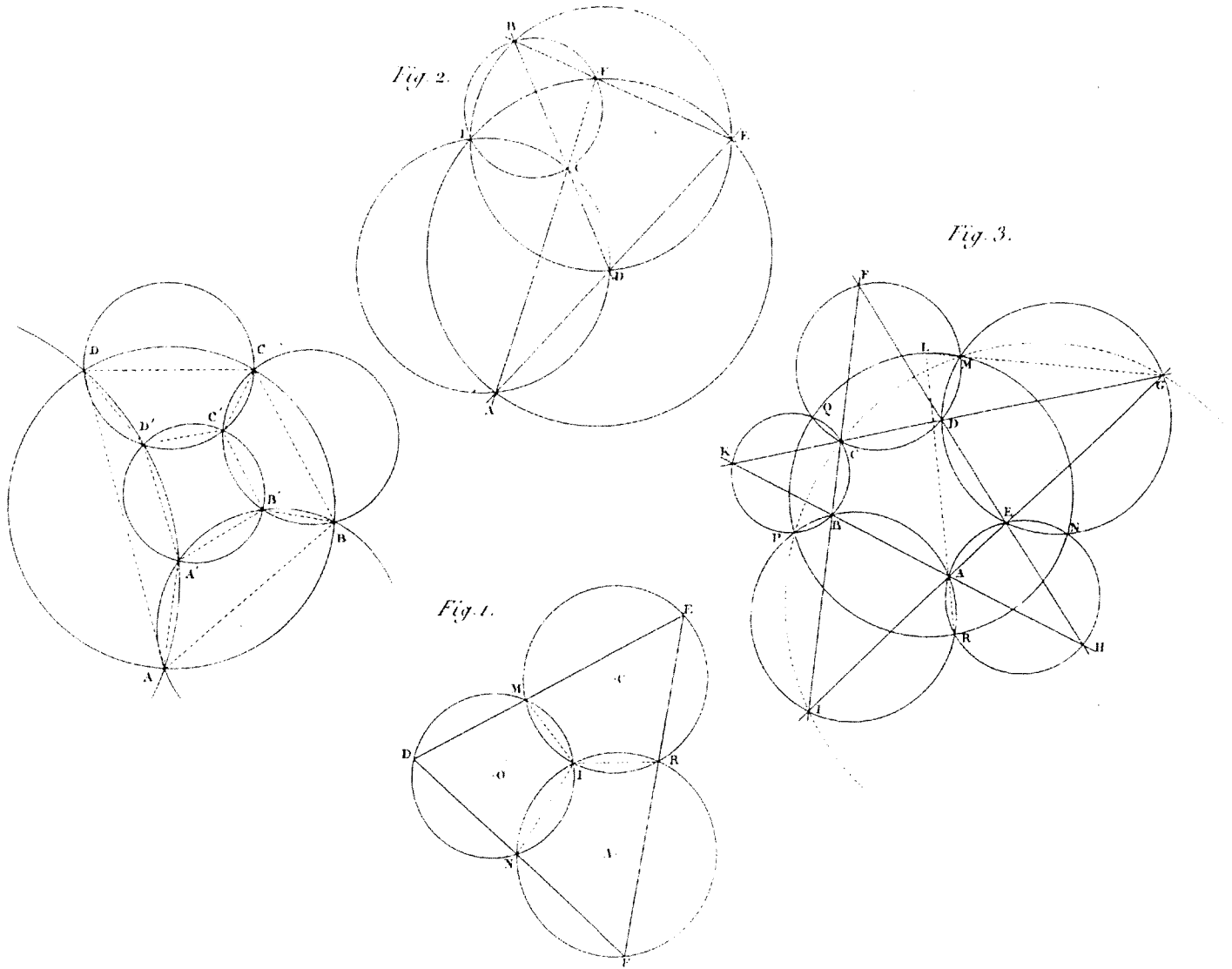
FIGURE 1

C'est une erreur commune⁽²⁾, puisqu'on la trouve même dans l'excellent livre [5] (BERGER [3, 10.9.7.2], lui, ne commet pas l'erreur) que de citer le théorème résumé par la figure 1 sous le nom de « théorème de MIGUEL ». Il s'agit en fait d'AUGUSTE MIQUEL, avec un « Q », comme me l'a fait remarquer DANIEL PERRIN avant la publication de [1] (heureusement!), dont ledit théorème fait, si j'ose dire, la « une ».

Le théorème de MIQUEL est un des résultats d'un des trois articles publiés par AUGUSTE MIQUEL, régent à Nantua, dans le troisième volume du *Journal* de LIOUVILLE en 1838 (il y a aussi, dans ce volume quelques articles de JACOBI, LIOUVILLE et d'autres mathématiciens dont l'histoire a choisi de garder les noms). Voici des reproductions des figures qui accompagnent ces articles (tu y verras sans doute, cher OUVERT, que les figures qu'on publiait en 1838 sont plus belles que les tiennes — même si le « scannage » des planches pour la BNF, que j'ai utilisé pour ne pas détériorer les volumes de la bibliothèque de l'IRMA, a été fait de façon désastreuse).

⁽¹⁾Mais je ne te félicite pas pour la qualité de la reproduction des figures!

⁽²⁾Presque aussi commune que celle de confondre SIMSON (1687–1768) — à qui PONCELET attribue à tort la droite qui porte désormais son nom, mais aurait été découverte par WALLACE — et SIMPSON (1710–1761), inventeur d'une méthode d'intégration.



LES FIGURES DE MIQUEL

Bon, trêve de critiques (pour l'instant). Je t'écrivais surtout pour ajouter mon grain de sel aux « ouvertures possibles » de [4]. Je rebondis sur le point à l'infini mentionné dans la partie sur les cercles « de CEVA ». Comment passe-t-on du théorème de MIQUEL à celui du « pivot » (figure 2 ci-dessous et la FIG. 1 de MIQUEL)) ? On « envoie » un des points à l'infini, disons D' avec les notations de la figure 1. Les cercles passant par D' deviennent les droites $AB'C$, $BC'A$ et $CA'B$, les trois autres cercles restent des cercles et passent par D , le pivot. On peut bien sûr considérer l'expédition de D' à l'infini comme l'application d'une inversion de pôle D' et ainsi éviter de prononcer le nom de ce point à l'infini.

L'avoir nommé laisse à penser... que ce type de problème gagnerait à être traité à sa place véritable, dans C (le plan euclidien !) auquel on a ajouté un point à l'infini,

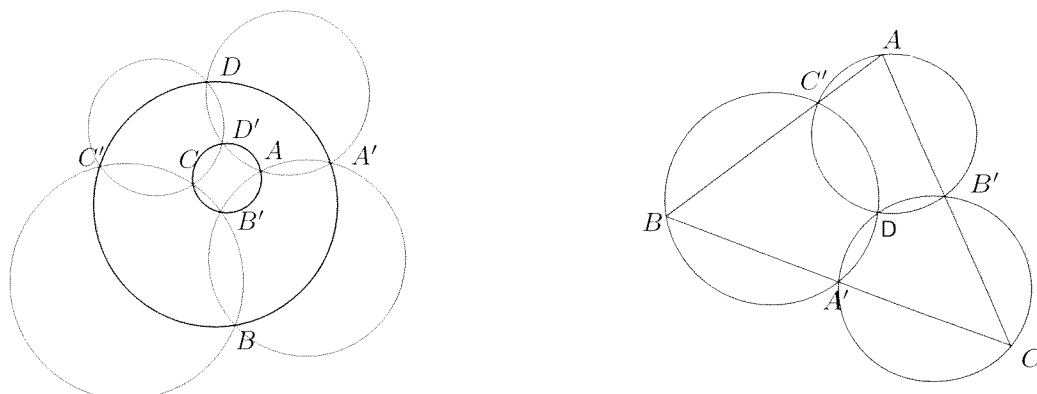


FIGURE 2

en d'autres termes, au choix, dans la sphère (par projection stéréographique) ou la droite projective complexe (ces diverses façons de décrire la sphère sont explicitées dans [1, Chap. V]).

Ce qu'on gagne ? Mon cher OUVERT, tu l'as compris, les théorèmes présentés dans [4] sont des théorèmes de cocyclicité, ils se démontrent à grands coups d'égalités d'angles (inscrits). Mais, puisqu'on est dans \mathbf{C} , il y a une façon élégante, tu le sais bien, d'exprimer la cocyclicité de quatre points : quatre points (distincts) A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{C - A}{C - B} \Big/ \frac{D - A}{D - B} \in \mathbf{R}$$

(une manière de dire qu'un argument de ce nombre vaut 0 modulo π). Ce (bi-)rapport se note $[A, B, C, D]$... ajoutons que rien n'empêche un des points d'être à l'infini. Le birapport est une notion projective.

Et alors ? Je te sens impatient. J'en viens à nos moutons, c'est-à-dire à nos théorèmes. DANIEL PERRIN (encore lui) m'a appris que si $A, B, C, D, A', B', C', D'$ sont huit points de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, on a :

$$[A, B, C, D'] [B, C, A, D'] [C, A, B, D'] [A', B', C', D] [B', C', A', D] [C', A', B', D] = 1$$

(vérification immédiate). Appelons ce résultat « théorème des six birapports de PERRIN ». Il a des conséquences spectaculaires, simplement parce que, si cinq de ces birapports sont réels, le sixième l'est aussi. J'ai ainsi démontré MIQUEL et le pivot.

Pourquoi je te parle de ça ? Eh bien parce que, dans [4], il y avait MIQUEL, le pivot, même le pentagone des figures de MIQUEL, le point de CLIFFORD, mais il y manquait un théorème. Un célèbre, un facile, un que tout le monde connaît et dont le théorème de PERRIN nous révèle qu'il est de la même nature. Je te laisse le découvrir, mais je t'aide un peu : tu appliques le truc du haut au cas où A', B' et C' (il n'y a pas de faute de frappe) sont les projetés orthogonaux d'un point D' sur les trois côtés d'un triangle ABC' . Je t'ai mis une indication au début de cette lettre. En désespoir de cause, tourne la page, regarde la figure 3 et retourne-toi pour trouver une autre indication.

Bien ouvertement à toi,

Michèle

P.S. Ma dernière critique : comme j'ai déjà eu l'occasion de te le dire, je ne suis pas sûre que tu relises les articles avec beaucoup de soin. Autrement, t'aurait-il échappé que le M. CLAUDE MITCHI mentionné au tout début de [4] est ma collègue (Madame) CLAUDE MITSCHI ? et qu'elle était bien jeune, en 1971, pour avoir pu donner des exercices aux auteurs de [4] ?

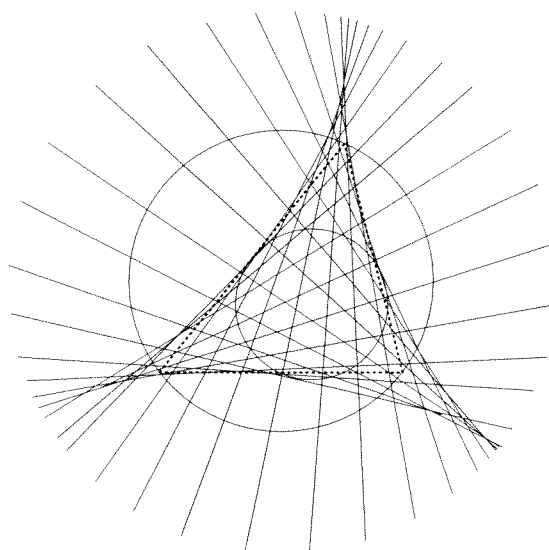


FIGURE 3

Références

- [1] M. Audin. *Géométrie*. Espaces34 et Belin, 1998.
- [2] M. Audin. *Geometry*. Springer, 2002.
- [3] M. Berger. *Géométrie*. CEDIC, 1977. Réédition Nathan, 1990.
- [4] C. Comparon and R. Voltz. Point de Clifford. *L'Ouvert*, 105 :29–35, 2002.
- [5] J.-C. Sidler. *Géométrie projective*. InterÉditions, 1993.

Le théorème célèbre, c'est la droite de SIMSON ! — une famille de droites dont la figure 3, copiée dans [2], montre l'enveloppe.

Rallye mathématique d'Alsace 2002

Classe de Première

Exercice 1

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[AC]$. Soit M un point quelconque de $[IC]$.
Où placer le point P sur $[AB]$ pour que (MP) partage le triangle ABC en deux parties de même aire ?

Exercice 2

Trois pirates ont dérobé une cassette remplie de louis d'or. Ils attendent le lendemain matin pour se partager le butin.

Durant la nuit, l'un des pirates se lève sans bruit, ouvre la cassette, jette à la mer un louis d'or pour honorer Lucile, Sainte Patronne des Pirates, et peut partager le reste en trois parties égales. Il empoche la sienne et remet les deux autres dans la cassette. Les deux autres pirates reproduisent tour à tour le même scénario.

Au lever du jour, nos trois compères ouvrent ensemble la fabuleuse cassette, offrent un louis d'or à Lucile et se partagent le butin restant en trois parts égales.

Quel est le nombre minimum de louis d'or contenus initialement dans la cassette ?

Exercice 3

On décompose un entier naturel non nul N en somme d'entiers naturels. On effectue le produit des termes intervenant dans la somme.

Par exemple, pour $N = 10$, les décompositions $10 = 5 + 4 + 1$ et $10 = 4 + 3 + 2 + 1$ donnent respectivement les produits :

$$5 \times 4 \times 1 = 20 \quad \text{et} \quad 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Proposer pour N quelconque une décomposition donnant le produit le plus grand possible.

Rallye mathématique d'Alsace 2002

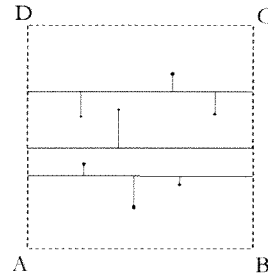
Classe de Terminale

Exercice 1

Dans un parc carré $ABCD$ d'un kilomètre de côté sont placées 288 statues.

On construit dans ce parc un réseau de la manière suivante :

1. On construit un certain nombre de chemins parallèles à (AB) allant de $[CD]$ à $[BC]$.
2. On construit d'autre part des chemins secondaires perpendiculaires aux précédents, partant de chacune des 288 statues et aboutissant aux chemins principaux (voir la figure).



Montrer qu'on peut ainsi construire un réseau de telle sorte que sa longueur

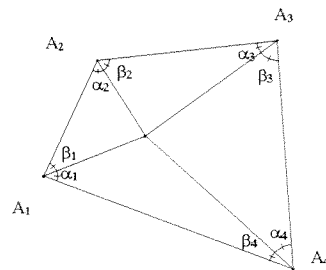
totale soit inférieure à 24 kilomètres (la largeur des chemins est négligeable).

Exercice 2

On se donne un quadrilatère convexe $\{A_1A_2A_3A_4\}$ et M un point quelconque intérieur à ce quadrilatère.

On définit les angles géométriques $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, comme indiqué sur la figure.

Montrer l'existence de i entre 1 et 4 tel que : $\alpha_i \leq \beta_i$.

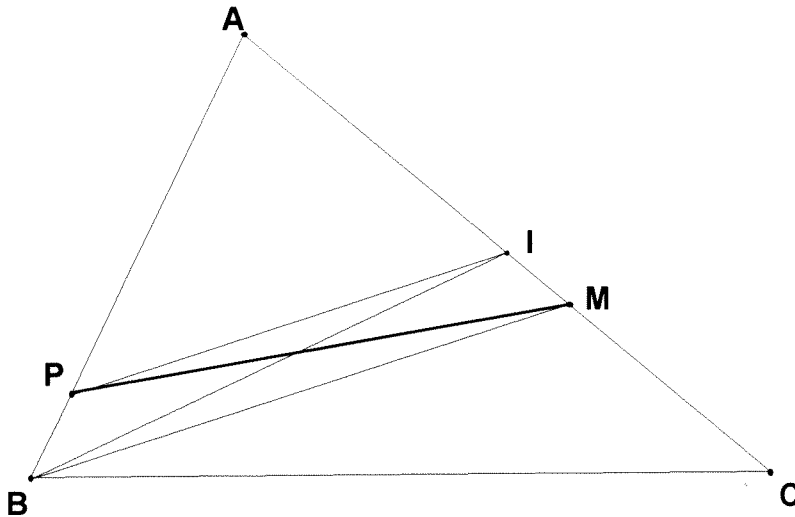


Exercice 3

Quels entiers sont somme d'au moins 2 entiers strictement positifs, tous consécutifs ?

CORRIGÉ RALLYE MATHÉMATIQUE 2002 CLASSE DE PREMIÈRE

Exercice 1



Menons par I la parallèle à la droite (MB). Elle rencontre le côté AB en un point P. Le triangle APM est réunion des triangles API et IPM (en particulier, l'aire de APM est la somme des aires de API et IPM). Et l'aire du triangle IPM est elle-même égale à l'aire du triangle IPB {les deux triangles ont la même base IP et leurs sommets M et B sont situés sur une parallèle à (IP)}. Or la réunion des triangles API et PIB constitue le triangle ABI. Et puisque I est le milieu de [AC], l'aire du triangle ABI est la moitié de celle du triangle ABC. Finalement, l'aire du triangle APM est la moitié de celle du triangle ABC.

Exercice 2

L'ultime somme contenue dans la cassette est de la forme $1 + 3x$, où x est un nombre entier supérieur ou égal à 1. À partir de là, remontons le temps pour reconstituer les étapes successives de l'évolution subie par le contenu de la cassette.

- Le contenu que le pirate 3 avait trouvé était $1 + (1 + 3x) \times 3/2$, c'est-à-dire en réduisant : $(5 + 9x)/2$.
- Le contenu que le pirate 2 avait trouvé était $1 + [(5 + 9x)/2] \times 3/2$, c'est-à-dire en réduisant : $(19 + 27x)/4$
- Le contenu initial, trouvé par le pirate 1, était $y = 1 + [(19 + 27x)/4] \times 3/2$, c'est-à-dire en réduisant :

$$y = (65 + 81x)/8.$$

Ce contenu initial y doit être entier. Nous sommes ainsi conduits à l'équation en entiers (on dit aussi *équation diophantienne*) :

$$8y - 81x = 65.$$

Remarquant que $8 \times 10 - 81 = -1$, nous obtenons (en multipliant par -65) la solution particulière suivante de l'équation :

$$y = -650 \text{ et } x = -65,$$

à partir de laquelle la solution générale s'écrit :

$$y = -650 + 81k \text{ et } x = -65 + 8k.$$

Cette résolution a été envisagée jusqu'à présent pour les entiers relatifs sans considération de signes. Il convient à présent de prendre en compte le fait que l'on cherche des entiers positifs. La plus petite valeur de k qui convienne pour cela est $k = 9$, qui conduit à $x = 7$ et $y = 79$, qui est la réponse cherchée.

Pour avoir l'esprit parfaitement tranquille, on peut vérifier : au départ, la cassette contient 79 louis d'or. Le premier pirate jette un louis et prend le tiers des 78 restant, soit 26 ; il en reste alors 52. Le second pirate jette un louis et prend le tiers des 51 restant, soit 17 ; il en reste alors 34. Le troisième pirate jette un louis et prend le tiers des 33 restant, soit 11 ; il en reste alors 22. Enfin, les trois pirates ensemble jettent un louis et se partagent les 21 restant, à raison de 7 pour chacun.

Exercice 3

On remarque tout d'abord que $4 = 2 + 2$, et 2×2 est égal à 4, puis que $5 = 3 + 2$, et 3×2 est plus grand que 5. Les entiers plus grands s'écrivent soit sous la forme $2p$ s'ils sont pairs, soit sous la forme $2p + 1 = p + (p + 1)$ s'ils sont impairs, avec $p > 2$.

Alors $p \times p > 2p$ et $p \times (p + 1) > 2p + 1$. Autrement dit, un entier a plus grand que 4 s'exprime comme somme de deux entiers dont le produit est plus grand que a . Et 4 lui-même peut être remplacé par $2 + 2$, dont le produit est égal à 4.

Il en résulte que quand un entier N sera exprimé comme somme de termes donnant lieu au plus grand produit possible, ces termes pourront tous être pris plus petits que 4. Les valeurs à considérer pour les termes dans ces conditions sont donc 1, 2 et 3.

La valeur 1 ne peut pas apparaître plus d'une fois, car $1 + 1 = 2$, et $2 > 1 \times 1 = 1$.

La valeur 2 ne peut pas apparaître plus de deux fois, car $2 + 2 + 2 = 6 = 3 + 3$

$$\text{et } 2 \times 2 \times 2 = 8 < 9 = 3 \times 3.$$

À partir de là, on est conduit à des répétitions du terme 3, ce qui conduit aux valeurs suivantes pour le maximum que le produit puisse atteindre :

- Si $N = 3n - 1$, $n > 1$, le terme 3 peut être répété $(n - 1)$ fois et il reste alors 2 ; le produit maximal obtenu est ainsi $3^{n-1} \times 2$.
- Si $N = 3n$, le terme 3 peut être répété n fois et le produit maximal obtenu est ainsi 3^n .
- Si $N = 3n + 1$, il convient de comparer le produit obtenu en répétant n fois le terme 3, après quoi il reste 1, et le produit obtenu en ne répétant que $(n - 1)$ fois le terme 3, après quoi il reste $4 = 2 + 2$. Dans le premier cas, on obtient comme

précédemment 3^n et dans le second, on obtient $3^{n-1} \times 4$. C'est le second produit qui l'emporte et qu'il convient donc de préférer.

CORRIGÉ RALLYE MATHÉMATIQUE 2002 CLASSE DE TERMINALE

Exercice 1

Traçons une famille de a parallèles à (AB) équidistantes, la première étant située à la distance $1/2a$ de (AB) . La distance des parallèles entre elles est alors égale à $1/a$ et la dernière est à la distance $1/2a$ de (CD) . De la sorte, la distance d'une statue au chemin qui lui est le plus proche est au plus égale à $1/2a$. Traçant alors depuis chaque statue un chemin qui suit ce parcours le plus court, nous obtiendrons un réseau dont la longueur totale sera au plus égale à :

$$a + 288/2a = a + 144/a,$$

puisque la longueur en km de chacun des a premiers chemins est égale à 1.

Nous souhaitons établir qu'en choisissant convenablement la valeur de a , nous pouvons ne pas dépasser une longueur totale de 24 km, ce qui signifie réaliser l'inégalité :

$$a + 144/a \leq 24,$$

$$\text{ou : } a^2 - 24a + 144 \leq 0.$$

Or $a^2 - 24a + 144 = (a - 12)^2$. Donc la seule possibilité d'obtenir une valeur négative ou nulle s'obtient en prenant $a = 12$.

Vérification : On trace 12 chemins principaux, régulièrement espacés, auxquels les statues sont reliées chacune par un chemin de liaison allant droit au chemin principal le plus proche. La longueur, exprimée en km, de ces chemins de liaison est ainsi au plus égale à $1/24$. Le réseau construit de la sorte a au total une longueur en km majorée par $12 + 288/24 = 12 + 12 = 24$.

Prolongements de cet exercice : Le principe de tracé pour le réseau, par des parallèles équidistantes, permet de répondre à la question posée ; en revanche, des emplacements des statues étant supposés donnés, ce principe ne serait guère satisfaisant pour atteindre la longueur totale la plus courte possible. Cette question peut être étudiée en prolongement de l'exercice.

Il est facile de simuler des emplacements aléatoires pour les statues, en utilisant par exemple les ressources du site [Mathematikos](#) de Jean-Paul Quelen. Ayant ainsi placé 288 points, on peut avoir l'idée de considérer des segments mobiles parallèles à AB et de travailler sur la considération d'effectifs. Par exemple, pour le premier segment, on peut le faire progressivement monter jusqu'à ce qu'il passe par l'un des points et en laisse un certain nombre, disons 12 pour fixer les idées, en dessous de lui. Puis on trace alors un second segment, en le faisant monter depuis le niveau atteint par le premier, jusqu'à ce qu'il passe par l'un des points et en laisse 24 (le double de l'effectif précédemment fixé) entre le premier segment et lui. Et ainsi de suite pour obtenir les chemins principaux, parallèles à AB . Ensuite, on achève le réseau comme précédemment par la liaison de chaque statue avec le chemin principal le plus proche.

Il serait intéressant d'avoir une idée de la longueur que l'on peut ainsi espérer atteindre pour ce réseau ; c'est certainement nettement moins de 24 km. Autre étude

possible : quelle disposition des emplacements de statues nécessite-t-elle le plus long réseau ?

Exercice 2

Projetons orthogonalement M en H_1 sur A_1A_2 , H_2 sur A_2A_3 , H_3 sur A_3A_4 , H_4 sur A_4A_1 .

L'inégalité $MH_1 > MH_2$ équivaut à $a_2 > b_2$.
 De même $MH_2 > MH_3$ équivaut à $a_3 > b_3$,
 $MH_3 > MH_4$ équivaut à $a_4 > b_4$ et
 $MH_4 > MH_1$ équivaut à $a_1 > b_1$.

Par transitivité de la relation d'ordre, trois des inégalités précédentes entre les MH_i ($i = 1, 2, 3, 4$) excluent la quatrième.

Exercice 3

De l'identité $0 + 1 + \dots + (n - 1) + n = n(n + 1)/2$, n entier, $n > 0$, on déduit pour p entier quelconque :

$$p + (p + 1) + \dots + (p + n - 1) + (p + n) = (n + 1)(n + 2p)/2.$$

Soit N un entier. Écrire N comme somme d'entiers consécutifs, en nombre au moins égal à deux, revient ainsi à trouver $n > 0$ et p tels que :

$$2N = (n + 1)(n + 2p).$$

Les deux facteurs qui apparaissent au second membre sont de parités différentes. La question devient d'écrire $2N$ comme produit d'un nombre pair et d'un nombre impair plus grand que 1.

Cela sera possible, en mettant dans N autant de fois que possible 2 en facteur, si et seulement s'il subsiste alors un facteur impair plus grand que 1. Par exemple, si $N = 20$, on écrira $2N = 5 \times 8$ et on pourra ainsi prendre $n = 4$ et $p = 2$.

$$\text{(vérification : } 20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$$

Tous les entiers supérieurs à 1 sauf les puissances de 2 sont dans ce cas. Mais si N est une puissance de 2, comme 2 lui-même, puis 4, 8, 16 et ainsi de suite, il n'est pas possible de l'exprimer comme somme d'entiers consécutifs.

« Femmes en maths... pourquoi pas vous ? » et pourquoi pas dans votre établissement ?

L'association *femmes et mathématiques* a réalisé en mai 2001 une exposition
« Femmes en maths... pourquoi pas vous ? »
destinée à circuler dans les établissements secondaires intéressés. Pour l'Alsace, la mission de Culture Scientifique et Technique de l'Université Louis Pasteur, en a acquis un exemplaire.

Constituée de neuf panneaux plastifiés munis d'œillets et de format 70 cm × 100 cm, elle est facile à transporter et à accrocher.

À travers seize portraits de femmes ayant des itinéraires variés après des études de mathématiques, cette exposition a de multiples objectifs, parmi lesquels :

- montrer la richesse des possibilités de carrière auxquelles mènent ces études ;
- combattre les stéréotypes tenaces qui accompagnent les mathématiques ;
- donner aux jeunes, filles et garçons, l'audace de faire des mathématiques en leur présentant des modèles accessibles.

Les femmes qui ont accepté de témoigner pour cette exposition vivent et travaillent dans différentes régions de France. Elles occupent des postes dans des domaines très divers : cryptologie, aéronautique, banque, industrie, bio-génétique, enseignement et recherche, informatique, conseil en stratégie, télécommunications, santé.

Cette variété de débouchés n'est pas spécifique aux formations purement mathématiques : toute filière scientifique offre actuellement une palette comparable.

Cette exposition a obtenu le soutien du CNRS, du Ministère de la Recherche, du Fonds Social Européen, du Secrétariat d'État aux Droits des Femmes et à l'Égalité et a permis à l'association *femmes et mathématiques* de recevoir le prix Irène Joliot-Curie attribué par le Ministère de la Recherche en novembre 2001.

En marge du colloque FEMMES EN MATH 2002 des 22 et 23 novembre 2002, cette exposition sera installée dans le hall de l'Institut Le Bel du 14 au 25 octobre 2002 (4 rue Blaise Pascal, campus de l'Esplanade).

Si vous souhaitez faire venir l'exposition dans votre établissement, contactez :

Florence LECOMTE ou Raphaële SUPPER

lecomte@math.u-strasbg.fr
supper@math.u-strasbg.fr

La théorie des nœuds et des tresses à la Fête de la Science 2001

par Marc WAMBST ¹

L'an 2000 proclamé « année mondiale des mathématiques » par l'U.N.E.S.C.O. et l'Union Mathématique Internationale a marqué le début d'un plus grand intérêt des mathématiciens strasbourgeois pour la vulgarisation de leur discipline. À Strasbourg, c'est à l'occasion de cette « année mondiale » que les mathématiques ont fait leur entrée à la « Fête de la Science ». Cette manifestation nationale organisée par le Ministère de la Recherche a pour but de promouvoir les connaissances scientifiques et techniques. Elle se concrétise par une semaine (en octobre pour ce qui est de 2001) de manifestations centrées sur la vulgarisation scientifique. Traditionnellement, se tient, place Kleber, durant trois jours, le « Village des Sciences » qui est un chapiteau à entrée libre où des instituts de recherche publics ou privés, des associations, des entreprises « communiquent » sur des thèmes scientifiques. L'organisation du Village est prise en charge par la « Boutique de Sciences² ».

Jusqu'à l'automne 2000, alors que de nombreux laboratoires universitaires ou du C.N.R.S. participaient à la « Fête », les mathématiques n'y étaient pas représentées. L'année 2000 a vu fleurir de nombreuses manifestations autour des mathématiques. En Alsace, l'I.R.E.M. de Strasbourg a piloté l'organisation de la plupart d'entre elles: expositions, journées au C.R.D.P., participation des établissements scolaires. . . Dans ce climat favorable à la vulgarisation, l'I.R.M.A.³ s'est chargé de tenir un stand au Village des Sciences. Nous⁴ avons décidé de présenter et de commenter des affiches du concours d'affiches de l'année mondiale des mathématiques ainsi que des affiches de l'I.R.E.M. qui reprenaient des couvertures de *l'Ouvert*. Quelques textes distribués aux visiteurs commentaient certaines d'entre-elles: la courbe du dragon, le nombre de spirales du tournesol, les empilements de sphères, les polyèdres réguliers, les pavages du plan, les carrés latins. . .

L'année 2001, nous nous sommes restreint à un seul thème. Notre choix s'est porté sur la théorie des nœuds et des tresses qui présente l'avantage de reposer sur des problèmes concrets.

Ce texte a pour but de présenter le matériel élaboré à cette occasion et de décrire le déroulement de la manifestation.

Le matériel

Notre stand avait une dizaine de mètres carrés. Nous disposions de tables, de chaises, de panneaux d'affichage, d'un tableau blanc, d'un téléviseur et d'un magné-

1. © L'OUVERT 106 (2002)

2. La Boutique de Sciences est une association à but non lucratif, subventionnée sur projet, qui se charge de la diffusion de la culture scientifique et technique au niveau départemental

3. L'Institut de Recherche Mathématique Avancée est une unité mixte de recherche de l'Université Louis Pasteur et du C.N.R.S. et est le laboratoire qui réunit la plupart des mathématiciens strasbourgeois.

4. Le *nous* désigne un petit comité constitué de personnes volontaires et de bonne volonté.

toscope. Nous avons réalisé des affiches d'une ou deux pages de format A2 présentant chacune un aspect de la théorie des nœuds ou des tresses. Les titres des affiches étaient les suivants : *L'analysis situs ou la topologie*, *Les problèmes en théorie des nœuds*,

Les mouvements de Reidemeister, *Comment différencier les nœuds? Tresses et groupes des tresses*, *Arithmétique des nœuds*, *Les espaces hyperboliques*, *Les nœuds dans les sciences*. Un alpiniste nous avait gracieusement fourni des cordes qui nous ont permis de réaliser des nœuds aisément manipulables. Nous offrions au public de petits questionnaires sur les nœuds et les tresses ainsi que des bandes de papier destinées à reproduire le « thêta tressé » (voir annexe). Aux personnes plus intéressées, nous avons également distribué des copies de la table des nœuds premiers, une bibliographie et les textes des affiches. Le téléviseur passait en boucle deux courts films tirés de la cassette *Video Math-Festival at ICM '98* (édité par H.-Chr. Hege et K. Polthier, ISBN 3-540-92634-8). Le premier s'intitulait *Meditation on Homotopy* et montrait comment un personnage dessiné se déformait homotopiquement. Le second s'intitulait *Knot energies* et montrait des images modélisant des nœuds flottant dans l'espace et soumis à des interactions énergétiques à leur surface. Enfin, nous avons apporté des copies d'articles de recherche mathématique destinées à « montrer » la production d'un mathématicien aux visiteurs.

Certains documents cités ci-dessus sont reproduits dans l'annexe. Nous invitons le lecteur à la feuilleter avant de poursuivre. La plupart des documents sont en couleur. Nous n'en donnons ici que des reproductions en noir et blanc.

Le déroulement

La manifestation se déroulait les 19, 20 et 21 octobre 2001, c'est-à-dire un vendredi, un samedi et un dimanche, de 9h à 19h. Des collègues de l'I.R.M.A. ont tenu des permanences de deux heures. Il y avait toujours au moins deux animateurs sur le stand.

L'attention des visiteurs était d'emblée attirée par les modèles en corde que nous avons disposés sur une table devant nous. Grâce à ces objets et aux petits questionnaires, nous pouvions amorcer le dialogue. Des gens de tout âge se sont prêtés au jeu et ont essayé de répondre aux problèmes du questionnaire ou à celles que nous leur posions directement comme : *Peut-on défaire ce nœud? Ces nœuds (par exemple le nœud de trèfle droit et le nœud de trèfle gauche) sont-ils les mêmes?*

Aux personnes moins « réceptives » ou aux jeunes enfants, nous proposons de réaliser le « theta tressé ». Les questions étaient volontairement très simples, leurs réponses, en revanche, pouvaient se trouver soit à l'aide de quelques manipulations simples, soit à l'aide de la théorie des invariants. Nous justifions ainsi le recours aux mathématiques.

Une fois le problème de la différenciation des nœuds posé et compris, il nous était possible de parler de mathématiques et d'esquisser le concept d'invariant à l'aide duquel on expliquait que le nœud de trèfle droit n'est pas isotopes au nœud de trèfle gauche.

À l'occasion, nous pouvions faire passer l'idée que l'impossibilité d'une chose peut se démontrer. Par ailleurs, nous parlions aussi de classification et de nœuds

premiers et montrions la table de ces nœuds. Il ne nous restait alors qu'à répondre à l'habituelle question *À quoi ça sert?*

Apparemment, les visiteurs ont apprécié la forme ludique du dialogue qui s'instaurait, mais étaient malheureusement peu enclins à lire le texte des affiches ou même à regarder les films. De plus, les quelques personnes qui ont lu les affiches nous ont rarement demandé des explications complémentaires. Néanmoins, un dialogue plus approfondi s'est quelque fois instauré avec des lycéens, des étudiants ou des personnes de formation scientifique.

Conclusion

En guise de conclusion, nous remarquons que le dialogue entre les visiteurs et les animateurs du stand n'a pu s'instaurer que grâce au support matériel des modèles de nœuds en cordage. Ce support, son aspect ludique de « casse-tête » et la simplicité de la problématique de départ ont contribué à ce que le public se pose des questions. Il était ensuite possible de lui présenter les aspects théoriques de la solution. Le thème choisi a permis ce biais d'approche, mais tous les thèmes de la recherche mathématique actuelle ne présentent pas cet avantage. En fait, peu d'entre nous étaient spécialistes de la théorie des nœuds et nous pouvions nous trouver frustrés de vulgariser un domaine des mathématiques qui n'est pas le nôtre. Pour la réalisation des affiches, nous avons largement utilisé du matériel existant déjà (textes, sites internet, dossiers spéciaux de magazines, . . .), nous trouvant parfois dans la situation de faire de la vulgarisation de vulgarisation.

De plus, certains d'entre nous auraient aimé donner l'idée de la nature de la recherche en mathématique en soulignant qu'elle est actuellement en train de se faire et qu'elle résulte du travail d'individus. C'est la raison pour laquelle chaque affiche reproduit le portrait d'un mathématicien et que nous avons apporté des articles de recherche. Hélas, le public était peu curieux de ces articles et de la qualité⁵ des personnes animant le stand.

Il reste que l'expérience du contact avec « le grand public » fut très agréable. L'I.R.M.A. devrait continuer à participer à la fête et vous invite à visiter son stand en 2002.

5. Au sens de profession.

BIBLIOGRAPHIE

Des ouvrages de vulgarisation en relation avec le thème des nœuds

- *La science des nœuds*, dossier de Pour la Science, (1997).
- Alexei Sossinsky, *Nœuds, Genèse d'une théorie mathématique*, Seuil, (1999).
- Jean-Pierre Petit, *Le topologicon, les aventures d'Anselme Lanturlu*, (bande dessinée), Belin (1980).
- Ian Stewart, *Ah les beaux groupes, les chroniques de Rose Polymath*, (bande dessinée), Belin (1982).

Un ouvrage sur les nœuds marins :

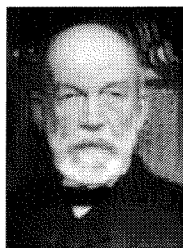
- Geoffrey Budworth, *Le livre des nœuds*, De Vecchi Poche, (1993).

Des ouvrages plus mathématiques mais abordables sur les nœuds (en anglais):

- C. Livingston, *Knot theory*, Carus Mathematical Monographs no. 24 The Mathematical Association of America, (1993).
- E. Flapan, *When topology meets chemistry (a topological look at molecular chirality)*, Cambridge University Press/The Mathematical Association of America, (2000)

Des sites internet sur le thème

- David Eppstein, *The Geometry Junkyard Page on Knot Theory*, Site de l'Université de Californie, Irvine.
<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/knot.html>
- Serge Mehl, « Notions sur la théorie des nœuds », In *Petite Chronologie des Mathématiques*, site de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille.
<http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/LudoMath/ThNoeud.html>
- Center for the Popularization of Mathematics, *Exhibition of knots*, Site de l'Université du Pays de Galles, Bangor,
<http://www.cpm.informatics.bangor.ac.uk/exhib/menu.htm>
- Depart. of Computer Science, *The knot plot site*, Site de l'Université de Colombie Britannique, Vancouver,
<http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/KnotPlot.html>
- Peter Suber, *Knots on the Web*, Site d'Earlham College, Richmond, Indiana,
<http://www.earlham.edu/~peters/knotlink.htm>



Peter G. Tait
(1831–1901)

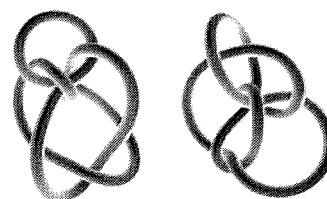


LES PROBLEMES EN THEORIE DES NŒUDS

Dans la vie courante, un nœud peut toujours être dénoué s'il n'est pas trop serré : il suffit de faire passer une extrémité libre de la ficelle dans les différentes boucles pour le défaire.

La théorie des nœuds s'intéresse à un problème légèrement différent : il n'est pas permis de trop serrer les nœuds (il y a une façon précise de dire cela) mais pour que le nœud ne se défasse pas, on raboute l'une à l'autre les deux extrémités de la ficelle.

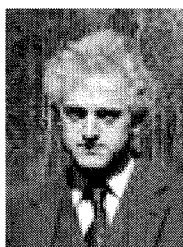
Le problème central de la théorie des nœuds est de savoir dire si deux nœuds sont « isotopes », c'est-à-dire si on peut arriver à l'un en déformant l'autre. Pour des nœuds peu complexes, l'intuition s'avère être un guide fiable. Et pourtant... en 1974 Kenneth Perko (un avocat New-Yorkais) remarqua que les nœuds ci-contre sont isotopes, alors qu'ils avaient été considérés comme différents dans plusieurs travaux antérieurs.



Le premier mathématicien à s'être intéressé sérieusement à la théorie des nœuds est Johann Benedict Listing en 1847 ; ses contributions sont aujourd'hui oubliées. Trente ans plus tard, Peter Guthrie Tait commençait à publier des tables de nœuds : il s'agissait de dresser une liste des nœuds, classés par complexité croissante. Ni Tait ni ses successeurs, T. P. Kirkman et C. N. Little, n'avaient de méthode systématique ; ils se sont arrêtés là où la complexité combinatoire du problème a excédé les capacités de leur intuition. Cette étude a été prolongée par Morwen Thistlethwaite au début des années 1980 avec l'aide d'ordinateurs.

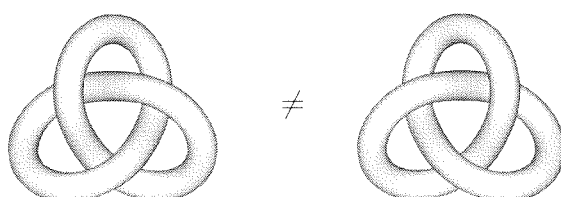


Johann Listing
(1808–1882)



Morwen
Thistlethwaite

La théorie des nœuds s'est beaucoup développée au XX^e siècle. Un des premiers résultats fut obtenu par Max Dehn en 1914 : les nœuds de trèfle gauche et droit ne sont pas isotopes.

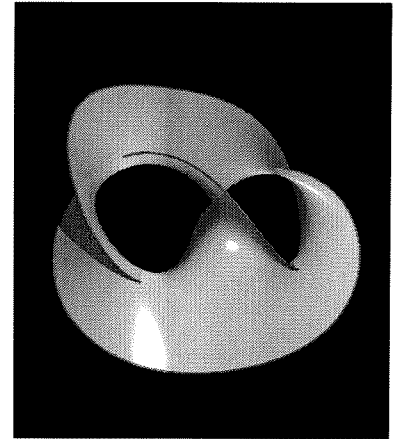


Max Dehn
(1878–1952)



Karl Seifert
(1907–1996)

En 1934, Karl Seifert montra pourquoi l'étude des surfaces orientées dont le bord est un nœud apporte des informations sur ce nœud ; c'est en utilisant de telles méthodes géométriques que Horst Schubert démontra en 1949 que les nœuds peuvent être décomposés en morceaux élémentaires, appelés « nœuds premiers ». Ce sont ces nœuds premiers dont les tables donnent la liste. Toutefois, même aujourd'hui, on ne connaît pas de méthode générale qui permette de savoir si un nœud est premier ou non.

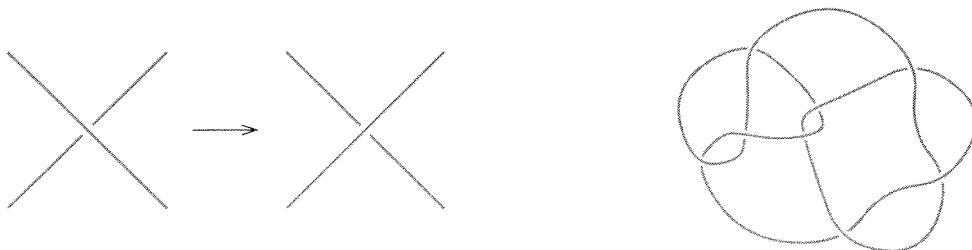


D'autres problèmes sont ouverts. Par exemple, étant donné un nœud, on peut vouloir le dessiner de la façon la plus simple possible, avec le plus petit nombre possible de croisements. Par exemple, on dessine le nœud de trèfle par des diagrammes avec 3 croisements, car on ne peut pas faire moins.

Le problème est qu'on ne connaît pas de méthode générale pour calculer ce nombre minimal de croisements, bien que dans les tables, les nœuds soient rangés selon ce nombre. Autre question ouverte : combien existe-t-il de nœuds (premiers) à nombre minimal de croisements donné ? On connaît la réponse pour les petites valeurs (dans le tableau ci-dessous, on n'a pas fait la distinction entre un nœud et son image dans un miroir) :

Nombre de croisements	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nombre de nœuds	1	1	2	3	7	21	49	165	552	2 176	9 988	46 972	253 293

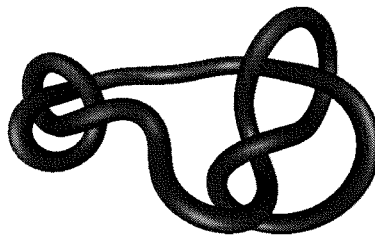
En guise de conclusion, voici un dernier thème de problème. Prenons un nœud. Impossible de le dénouer sans ciseaux. Autorisons-nous donc ciseaux et colle, mais avec une règle précise : entre le moment où on coupe et le moment où on recolle, on n'a le droit de ne faire passer qu'une seule fois un brin de ficelle dans la brèche ainsi ménagée.



Question : combien d'opérations sont-elles nécessaires pour arriver à dénouer complètement le nœud ? On ne connaît pas de méthode qui permette d'évaluer ce nombre pour n'importe quel nœud. Sauriez-vous montrer qu'on ne peut pas résoudre le nœud dessiné ci-dessus avec moins de 3 échanges ?

ARITHMETIQUE DES NŒUDS

Un nœud peut être constitué de plusieurs nœuds mis côte-à-côte sur une même corde, comme on le voit ci-dessous où l'on reconnaît le nœud de trèfle à gauche et le nœud en 8 à droite. A partir de plusieurs nœuds, on peut créer un nœud plus compliqué en les réunissant sur une même corde.

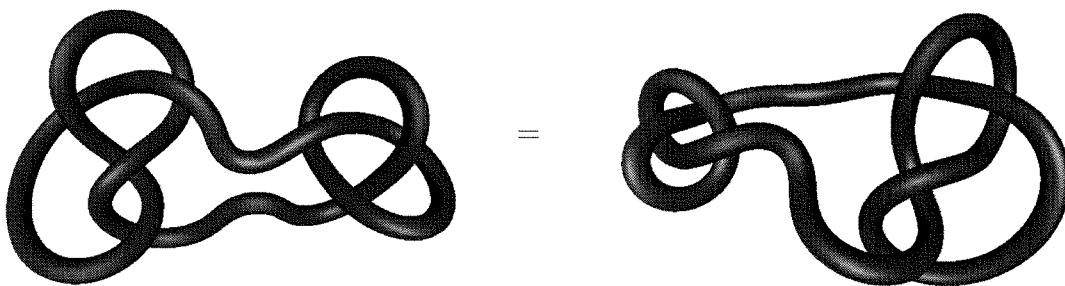


On définit ainsi une opération sur les nœuds, qui a des propriétés comparables à celles de la multiplication des nombres entiers et qu'on appelle **composition des nœuds**. Mentionnons certaines de ces propriétés.

• **La commutativité** : lorsque l'on multiplie des entiers, peu importe l'ordre dans lequel on effectue le produit

$$3 \times 4 = 4 \times 3 \quad \text{ou plus généralement} \quad a \times b = b \times a \quad .$$

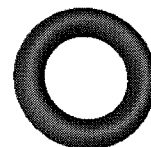
La composition des nœuds a la même propriété : le nœud produit ne dépend pas de l'ordre des deux nœuds de départ.



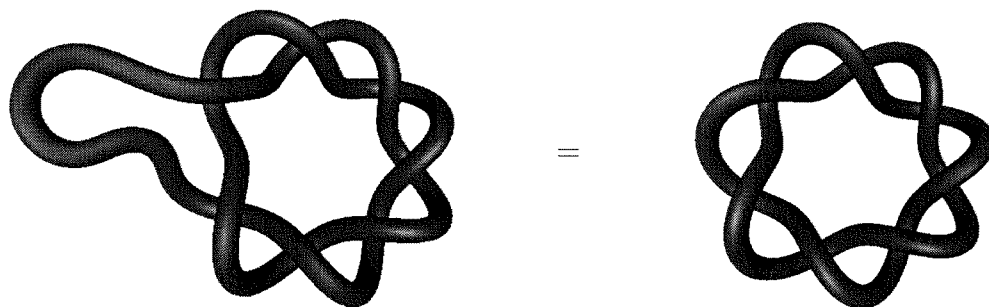
• **Le nœud trivial** : il existe un nœud qui joue le même rôle que 1 pour les entiers, c'est-à-dire

$$1 \times a = a \times 1 = a \quad \text{pour n'importe quel entier } a ;$$

c'est le nœud trivial.



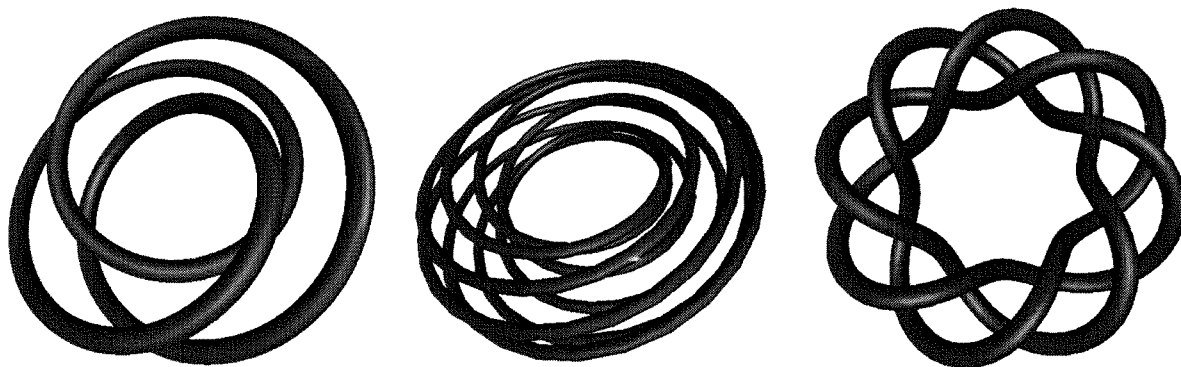
Si l'on compose un nœud avec le nœud trivial, le nœud obtenu reste le nœud de départ.



• **Les nœuds premiers** : on connaît bien les nombres premiers qui sont des nombres entiers ne pouvant pas se décomposer en un produit de nombres entiers distincts d'eux-mêmes ou de 1, comme 17, 3, 101, etc... Les mathématiciens ont constaté que certains nœuds ne pouvaient pas se décomposer en produit de plusieurs nœuds ; on les appelle les **nœuds premiers**.

Par exemple, le nœud de trèfle, le nœud de 8, le nœud représenté ci-dessus sont des nœuds premiers. Le fait de savoir si un nœud est premier est un problème délicat et important car il est lié à la classification des nœuds.

• De même qu'il existe une infinité de nombres premiers, il existe une infinité de nœuds premiers. Pour démontrer ce résultat, une famille infinie de nœuds, dont tous les éléments sont des nœuds premiers a été construite. Ces nœuds sont obtenus en enroulant une corde sur une chambre à air et sont appelés les **nœuds toriques**. Le nœud de trèfle appartient à cette famille, ainsi que les nœuds suivants :



• **La décomposition en nœuds premiers** : tout nombre entier est le produit de nombres premiers ; par exemple

$$35 = 5 \times 7, \quad 189 = 3 \times 3 \times 3 \times 7, \quad \text{etc...}$$

Tout nœud se décompose en un produit de nœuds premiers (c'est un théorème qui a été démontré en 1949). Ce résultat est très important, car il indique qu'il suffit de classer les nœuds premiers pour connaître les autres nœuds.

• Et pour finir, de même qu'en multipliant deux entiers différents de 1, on n'obtient jamais 1, il n'est pas possible de retrouver le nœud trivial en multipliant des nœuds ; en termes mathématiques, les nœuds ne forment pas un groupe et c'est l'une des raisons pour lesquelles on s'intéresse aux tresses.

SOMMAIRE

N° 106 – OCTOBRE 2002

◇ <i>Notre couverture : Madame du Châtelet</i>	
◇ <i>Editorial : Georges Glaeser, in Memoriam</i> par F. PLUVINAGE	i
◇ <i>Imagerie médicale : le scanner</i> J.M. KANTOR	1
◇ <i>Cent ans de topologie algébrique</i> par C. KASSEL	13
◇ <i>Lettre ... ouverte</i> par M. AUDIN	33
◇ <i>Rallye Mathématique d'Alsace 2002</i> <i>Enoncés et corrigés</i>	37
◇ <i>La fête de la science</i> par M. WAMBST	43

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Richard CABASSUT
- ◇ *Rédacteur en chef* : Alain KUZNIAK
- ◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur — Bibliothèque de l'I.R.E.M.
7, rue René Descartes — F - 67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 03 90 24 01 61 — Fax : 03 90 24 01 65
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr — <http://irem.u-strasbg.fr>
- ◇ *Prix de l'abonnement (3 numéros/an)*
16 Euros/1 an — 28 Euros/2 ans pour les membres A.P.M. d'Alsace (*),
20 Euros/1 an — 36 Euros/2 ans dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (7,60 Euros port compris).
- ◇ Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.
- ◇ Merci de bien vouloir indiquer votre e-mail éventuel.
- ◇ (*) Comme la Régionale d'Alsace subventionne l'impression de 'L'Oouvert'
les adhérents du Bas-Rhin et du Haut-Rhin ont droit à une réduction.
- ◇ *Prix du numéro* : 8 Euros.