ÉDITORIAL

MATHÉMATIQUES UTILES ET UTILITÉ DES MATHÉMATIQUES

Dans un entretien accordé à l'association des professeurs de mathématiques, M. THELOT, haut fonctionnaire chargé d'organiser le débat national sur l'avenir de l'école, affirme que l'utilité des mathématiques pour la formation du futur citoyen ne va pas de soi et que la démonstration reste à faire. Il précise également que la profession doit s'interroger sur « comment donner du sens aux apprentissages mathématiques ».

Voici donc les enseignants de mathématiques sommés de montrer l'utilité de leur discipline mais aussi incidemment de leur enseignement. Le débat n'est certes pas nouveau mais mérite l'attention une fois écartée la possible mauvaise foi qui le subsume en partie.

Comment sauver les mathématiques de leur possible latinisation c'est-à-dire de leur disparition du champ de l'enseignement par manque de visibilité utilitaire? Ou, autrement dit, comment faire vivre dans l'institution scolaire une matière dont l'intérêt et l'attrait ne sont pas des plus immédiats pour la grande majorité des élèves? La constante allusion à l'honneur de l'esprit humain ne suffit pas car nombre de connaissances qui honorent cet esprit ne sont pas enseignées à l'école et au lycée.

Les membres de la commission inter-IREM sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire et en formation des maîtres proposent d'aborder ce type de questions, dès l'école primaire, en reprenant l'idée de former le futur citoyen. La réflexion sur les mathématiques enseignées s'ouvre alors sur trois grandes perspectives :

— le développement de la rationalité et du raisonnement dans des modèles mis en relation avec la réalité modélisée ;
— le développement de la dimension culturelle des mathématiques en insistant sur le plaisir de chercher mais aussi d'agir sur le monde avec des outils mathématiques ;
— la formation du citoyen et l'aide à son intégration sociale en lui donnant son sens critique et aussi des outils pour préparer son avenir.

Ainsi sommes-nous invités à répondre à la fois à la demande sociale et à l'exigence intellectuelle : la voie est étroite en ces temps de grand consumérisme et elle passe aussi par une réflexion sur la manière d'enseigner.
Dans ce numéro, Daniel Perrin donne les arguments d'un mathématicien parfois bricoleur quand il aménage sa cuisine mais aussi citoyen au sens fort et grave du terme lorsqu'il est propulsé, le temps d'un procès, juré de cour d'assises. Son argumentation rejoint alors celle d'Arnauld de Port-Royal qui, en 1683, dans sa seconde préface à ses éléments de géométrie, inspirés par Pascal, affirmait :

> *« Car outre l'usage que l'on peut en faire dans tous les Arts avec un grand avantage ; un esprit Géométrique est plus juste que celuy qui ne l'est pas, et beaucoup moins sujet à prendre la vray-semblance pour la vérité. »*

Le même Arnauld qui un peu plus tôt fustigeait tous ceux qui s'attachent à une science et à ses connaissances pour elles-mêmes :

> *« Ainsi ceux qui s'y attachent pour elles-mêmes comme à quelque chose de grand & de relevé n'en connaissent pas le vray usage, & cette ignorance est en eux un beaucoup plus grand défaut que s'ils ignoraient absolument ces sciences. »*

Nous voici renvoyés au point de départ mais cette fois, la remarque vise les chercheurs repliés sur leur pré carré et oublieux des choses du monde. Ainsi, le mathématicien doit-il, pour assurer la légitimité sociale de son domaine de recherche, quitter sa tour d'ivoire et intégrer la cité: être citoyen en somme.

Alain KUZNIAK

Commission Internationale pour l'Enseignement des Mathématiques
MÉDAILLE FELIX KLEIN 2003

La première médaille Félix Klein de la Commission Internationale de l'Enseignement des Mathématiques est décernée au professeur Guy BROUSSEAU. Cette médaille récompense la contribution essentielle que Guy BROUSSEAU a apportée au développement de la didactique des mathématiques comme champ de recherche scientifique, à travers les travaux théoriques et expérimentaux qu'il a menés dans ce domaine pendant une quarantaine d'années. Elle récompense aussi les efforts permanents qu'il a déployés tout au long de sa carrière pour que ces recherches contribuent à l'amélioration de la formation mathématique des élèves et des enseignants.

Guy BROUSSEAU, né en 1933, a commencé sa carrière comme instituteur en 1953. À la fin des années 60, après avoir obtenu une licence de mathématiques, il est entré à l'université de Bordeaux. En 1986, il a obtenu un doctorat d'état es sciences et, en 1991, il est devenu professeur d'université à l'IUFM d'Aquitaine qui venait d'être créé, où il a travaillé jusqu'en 1998. Il est actuellement professeur émérite à l'IUFM d'Aquitaine. Il est aussi docteur Honoris Causa de l'université de Montréal.

Dès le début des années 70, Guy BROUSSEAU s'est imposé comme l'un des principaux chercheurs dans le champ tout nouveau de la didactique des mathématiques, et aussi comme l'un des plus originaux, affirmant avec conviction que ce champ devait être développé comme un champ de recherche spécifique, avec à la fois une recherche fondamentale et une recherche appliquée, mais aussi qu'il devait rester proche des mathématiques.

Sa contribution théorique essentielle au champ didactique est la théorie des situations didactiques, une théorie initiée au début des années 70 et qu'il a continué à élaborer avec une énergie sans faille et une exceptionnelle créativité jusqu'à aujourd'hui. À un moment où la vision dominante était une vision cognitive, fortement influencée par l'épistémologie piagétienne, il a affirmé avec force que ce dont le champ didactique avait besoin, ce n'était pas d'une théorie purement cognitive mais d'une construction qui permettrait de comprendre les interactions sociales entre élèves, enseignant et savoirs mathématiques qui se nouent au sein de la classe et conditionnent ce que les élèves apprennent et comment ils l'apprennent. Ce fut l'ambition de la théorie des situations didactiques qui a progressivement mûri pour devenir l'impressionnante et complexe construction qu'elle est aujourd'hui. Cette construction fut bien entendu un travail collectif mais chaque fois qu'il y eut des avancées notables, Guy BROUSSEAU en fut la source.

Cette théorie, visionnaire par la façon dont elle sut intégrer, dès ses débuts, les dimensions épistémologiques, cognitives et sociales de l'apprentissage des mathématiques, a été une source constante d'inspiration pour de nombreux chercheurs, partout dans le monde. Ses principaux concepts, comme ceux de situations a-didactique et didactique, de contrat didactique, de dévolution et d'institutionnalisation, sont devenus largement accessibles, à travers la traduction des principaux articles de Guy BROUSSEAU dans de nombreuses langues et, plus récemment, à travers la parution en 1997 chez Kluwer du livre intitulé *Theory of didactical situations in mathematics* , 1970-1990.

Bien que les recherches que Guy BROUSSEAU a inspirées concernent aujourd'hui l'ensemble des niveaux d'enseignement, de l'école maternelle à l'université, ses contributions personnelles majeures concernent, elles, l'enseignement élémentaire, couvrant à ce niveau tous les domaines, du numérique et du géométrique jusqu'aux probabilités. Elles doivent beaucoup à la structure spécifique qu'est le COREM (Centre pour l'observation et la recherche sur l'enseignement des mathématiques), une structure qu'il a créée en 1972 et dirigée jusqu'en 1997. Le COREM a en particulier permis une organisation tout à fait originale des rapports entre recherche théorique et expérimentale.

Guy BROUSSEAU n'a pas été seulement un chercheur inspiré et exceptionnel dans le champ de la didactique des mathématiques. Il a été aussi une personne qui a dédié sa vie professionnelle à ce champ, travaillant sans relâche à son développement, en France mais aussi dans de nombreux pays, soutenant la création de programmes doctoraux, aidant et dirigeant les travaux de nombreux chercheurs (il a ainsi dirigé plus de 50 thèses), contribuant de façon essentielle au développement des connaissances mathématiques et didactiques des étudiants et des enseignants. Il s'est impliqué fortement jusque dans les années 90 dans les activités de CIEAEM (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques) dont il a été secrétaire de 1981 à 1984. Sur le plan national, il a été, dès ses débuts, à la fin des années 60, un des piliers de l'expérience des IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et il a eu une influence décisive sur les activités et les ressources que ces instituts ont développées, depuis plus de trente ans, pour améliorer la formation mathématique des enseignants de l'école élémentaire.

Pourquoi faut-il enseigner les mathématiques aujourd'hui ?

Daniel Perrin

Introduction

Je remercie la régionale d'Alsace de l'APMEP de m'avoir invité à faire cette conférence.

C'est Jean-Pierre Darou qui m'en a proposé le titre : pourquoi faut-il enseigner les mathématiques aujourd'hui ? J'avoue que, dans un premier temps, je me suis senti un peu démuni face à cette requête et que j'ai demandé à l'infléchir vers une question qui m'est plus familière : pourquoi faut-il enseigner la géométrie ? Mais, en réfléchissant, j'ai perçu dans le choix du thème initial une telle inquiétude des professeurs, par rapport à l'enseignement de leur discipline, que je me suis senti obligé de tenter d'y répondre. Je note que cette inquiétude est relativement nouvelle : je suis convaincu que personne, dans un parterre de profs de maths, ne se serait posé cette question il y a trente ans. Je vais donc essayer de vous rassurer : oui, je suis convaincu qu'il faut continuer à enseigner les mathématiques !

Dire pourquoi est une vaste question et, comme tout mathématicien professionnel, j'ai mes propres réponses et elles sont multiples. Certaines suffisent à me convaincre totalement, par exemple : les mathématiques sont une incomparable école de formation au raisonnement, à la pensée rationnelle, à la rigueur (et je reviendrai sur ce point plus loin), les mathématiques sont un élément essentiel de la culture de l'humanité (Michèle Audin place la connaissance des polyèdres réguliers sur le même plan dans le patrimoine culturel de l'humanité que l'*Odyssée*, les sonates de Beethoven ou les statues de l'île de Pâques), les mathématiques sont belles (je considère que le théorème de Pascal ou la loi de réciprocité quadratique sont parmi les choses les plus belles que je connaisse). Enfin, et c'est peut-être le maître mot que je mettrais en avant pour justifier mon propre désir de faire des mathématiques, les mathématiques permettent de **comprendre**. Comprendre à la fois des phénomènes de la nature, mais aussi les relations entre les concepts (le nombre, la forme) ; comprendre la relation entre les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre, comprendre pourquoi les nombres premiers de la forme $4k+1$ sont sommes de deux carrés et pas les autres, etc. C'est, à la question : pourquoi faire des mathématiques ? la réponse de Jacobi : *pour l'honneur de l'esprit humain* ou encore, celle de Hilbert : *le problème est là, tu dois le résoudre !*

J'espère que ces raisons sont aussi celles qui vous ont motivé pour faire ce métier, mais, même si nous sommes tous ici convaincus par cela, ce ne sont pas de bonnes raisons pour le public, ni sans doute pour certains de nos ministres. Ainsi, Luc Ferry, l'actuel ministre, lorsqu'il était président du CNP se déclarait volontiers sceptique sur la nécessité d'enseigner les mathématiques à tous les élèves du collège et du lycée. Il faut garder en mémoire qu'on disait exactement les mêmes choses à propos du latin (il forme le raisonnement, il a une grande importance culturelle et il comporte des choses magnifiques), ce qui n'a pas empêché sa disparition presque totale.

En revanche, la réponse qui risque d'emporter l'adhésion du plus grand nombre, c'est le fait que les mathématiques sont utiles, à la fois dans les sciences[1] (physique, chimie, biologie, géologie, informatique), les techniques (ingénieur, etc), en économie et en finance, utiles enfin dans la vie courante. Il est donc important d'étudier les mathématiques et, pour cela, sauf à nier la nécessité de tout enseignement, il faut bien les enseigner.

C'est parce que je suis convaincu que c'est ce point que nous devons mettre en avant pour justifier l'importance de notre discipline que je me sentais peu qualifié pour cette conférence car il se trouve que les mathématiques que je pratique, comme chercheur, n'ont pas d'applications – pas encore ? – à ma connaissance et je suis donc mal placé pour développer ce point. Je vais pourtant essayer de donner quelques éléments de réponse qui auront deux origines :

1) l'histoire des sciences,

2) un certain nombre de discussions avec mes collègues.

Ces arguments justifient totalement, à mon avis, la nécessité d'enseigner les mathématiques aux futurs scientifiques, informaticiens, économistes etc. et c'est déjà un point essentiel. Ce sera ma réponse à Claude Allègre, en quelque sorte. J'essaierai ensuite de voir quelle est la nécessité de l'enseignement des mathématiques à tous, de la maternelle à l'université (APMEP oblige !). Cette fois c'est à Luc Ferry que je répondrai par ce moyen.

1 Pourquoi les mathématiques : parce qu'elles sont utiles

Oui, les mathématiques sont utiles. L'histoire nous l'enseigne et l'actualité nous le confirme.

1. Les mathématiques qui existent s'appliquent : l'exemple du régulateur à boules

Il y a un vieil exemple de mathématiques appliquées que j'aime particulièrement, c'est celui du régulateur à boules. J'aime bien cet exemple, parce que les mathématiques y ont permis de résoudre un problème concret, avec une solution assez inattendue.

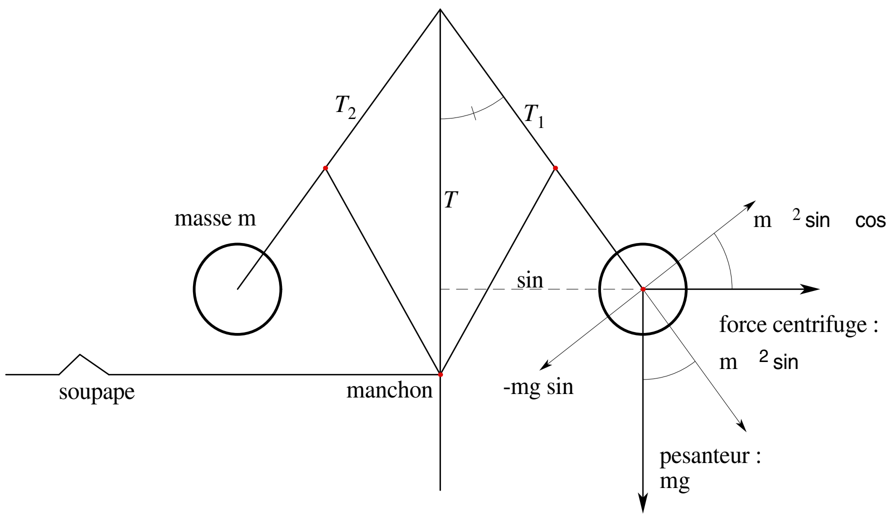
Je raconte brièvement cet exemple, que j'emprunte au livre de Pontrjagin : *Equations différentielles ordinaires* (Editions Mir, 1969).

Vous avez sans doute appris au lycée qu'il existait autrefois un dispositif inventé par Watt au XVIII ème siècle qui servait à réguler le fonctionnement d'une machine à vapeur (il était notamment utilisé pour réguler le mouvement des ascenseurs des mines). Or, si ce dispositif fonctionnait correctement à la fin du XVIII ème siècle et jusqu'au milieu du XIX *e*, son fonctionnement devint alors beaucoup moins satisfaisant, malgré tout le soin apporté à sa fabrication, sans que les ingénieurs ne comprennent quelle était la source des problèmes.

[1]contrairement à l'opinion de Claude Allègre,qui est un scientifique de valeur, mais qui a dit des bêtises sur le sujet

C'est un ingénieur russe nommé Vichnegradski qui résolut le problème en 1876 en utilisant la théorie de Liapounov sur la stabilité des équations différentielles qui venait d'être élaborée.

Voici le problème. On a un régulateur, constitué par une tige T verticale sur laquelle sont fixées deux tiges (de longueur unité) avec deux masses égales à leurs extrémités, et ces tiges T_1, T_2, sous l'effet de la force centrifuge, peuvent s'écarter de la position verticale d'un même angle ϕ, voir la figure ci-dessous. Solidaire des tiges T_1, T_2, il y a un manchon qui coulisse sur T et commande une soupape qui règle le débit de vapeur : plus la vitesse de rotation est grande (donc l'angle ϕ grand), plus la soupape libère de vapeur et donc diminue la vitesse. La condition d'équilibre du système (de manière statique) est évidente : $\omega^2 \cos\phi = g$.



En revanche la dynamique du dispositif est plus compliquée. Elle est régie par l'équation différentielle suivante :

$$m\phi'' = m\omega^2 \sin\phi\cos\phi - mg\sin\phi - b\phi'$$

où m est la masse des boules, ω la vitesse angulaire de rotation et b un coefficient de frottement. En fait, par le dispositif de soupape, la vitesse de rotation ω dépend aussi de ϕ et on a une autre équation : $J\omega' = k\cos\phi - F$ où F est une constante et J le moment d'inertie du volant de la machine.

On a donc un sytème de deux équations, mais, comme l'une est du second ordre, on introduit $\psi = \phi'$ pour se ramener à un système de trois équations du premier ordre :

$$\phi' = \psi \tag{1}$$

$$\psi' = \omega^2 \sin\phi\cos\phi - g\sin\phi - \frac{b}{m}\psi \tag{2}$$

$$\omega' = \frac{k}{J}\cos\phi - \frac{F}{J} \tag{3}$$

On est maintenant en pays de connaissance mathématique. Bien entendu, les équations ne sont pas linéaires (il y a un terme en ω^2 et des sinus et cosinus), mais, si on se place au voisinage de la position d'équilibre[2] $\phi = \phi_0$, $\psi = 0$, $\omega = \omega_0$, on peut développer par la formule de Taylor. On peut alors regarder le système linéaire obtenu en ne conservant que les termes du premier ordre (c'est-à-dire l'application linéaire tangente, définie par une matrice 3×3). Bien entendu, on sait résoudre ce système linéaire (avec l'exponentielle de matrice). De plus, le théorème de stabilité de Liapounov donne une condition suffisante de stabilité qui ne porte que sur le système linéaire et qui est (c'est bien naturel !) que les valeurs propres de la matrice soient de parties réelles négatives (pour n'avoir que des exponentielles décroissantes dans les solutions du système linéaire). On est ramené à un problème qui porte sur le polynôme caractéristique, qui est le polynôme de degré 3 suivant, à coefficients > 0 :

$$P(X) = X^3 + \frac{b}{m}X^2 + \frac{g\sin^2\phi_0}{\cos\phi_0}X + \frac{2kg\sin^2\phi_0}{J\omega_0}$$

.

Le lemme suivant (exercice pour le lecteur, il faut déjà montrer qu'il y a une seule racine réelle) donne la condition cherchée :

Lemme 1. *Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficients réels positifs. Les trois racines de P ont des parties réelles < 0 si et seulement si on a $ab > c$.*

Le calcul donne ici la condition de stabilité : $\frac{bJ\omega_0}{2Fm} > 1$.

Cela permet à Vichnégradski de montrer que, pour renforcer la stabilité il faut :

1) Diminuer la masse.

2) Augmenter le frottement.

3) Augmenter le moment d'inertie J.

4) Augmenter la "non uniformité" $\nu = \frac{\omega_0}{2F}$.

Les conclusions de Vichnégradski permettent d'expliquer le fonctionnement défectueux des régulateurs au XIX ème siècle. En effet, toutes les grandeurs avaient évolué dans le mauvais sens : on utilisait des boules de plus en plus lourdes, l'augmentation des vitesses imposait la diminution du moment d'inertie et surtout ... l'amélioration des techniques d'usinage des pièces diminuait le frottement. C'est ce point que je trouve particulièrement intéressant car il aboutit à une conclusion qui allait dans le sens contraire de l'amélioration apparente de la technologie.[3] On notera que, dans cet exemple, la physique est bien connue (c'est la loi fondamentale de la mécanique), mais que ses conséquences mathématiques ne sont pas évidentes.

Le travail de Vichnégradski devait d'ailleurs permettre de redonner une nouvelle jeunesse au régulateur de Watt, notamment par une augmentation artificielle du frottement.

[2]Caractérisée par $k\cos\phi_0 = F$ et $\omega_0^2\cos\phi_0 = g$.

[3]Cela me rappelle une anecdote qu'on raconte à propos d'un chef d'orchestre qui faisait répéter la sixième symphonie (pastorale) de Beethoven et notamment le passage de l'orage. Il n'était jamais satisfait de la prestation de l'orchestre répétant sans cesse : *non, non, ça ne va pas* et le faisait recommencer perpétuellement, jusqu'au moment où l'un des musiciens excédé lui dit : *mais, maître, nous jouons du mieux que nous pouvons* et le chef de s'écrier, *c'est ça, justement, vous jouez* **trop** *bien.*

Notons aussi, et c'est encore un argument pour enseigner les mathématiques décontextualisées, que la même théorie des équations différentielles que l'on vient de voir s'appliquer en mécanique est tout aussi importante en électricité, en hydraulique, etc.

2. Des exemples plus récents : statistiques

Mon collègue statisticien Pascal Massart m'a donné des exemples d'applications des statistiques relevant de plusieurs secteurs, certains traditionnels, d'autres nouveaux. Dans tous ces domaines, les statistiques jouent un rôle d'aide à la décision. Elles permettent de réfuter un modèle, d'en sélectionner un meilleur parmi plusieurs, de repérer des phénomènes, d'analyser le passé. Voici quelques exemples.

• Parmi les applications traditionnelles des statistiques on peut citer le contrôle de qualité et la fiabilité. Une entreprise (qui fabrique par exemple des semi-conducteurs) souhaite améliorer la qualité de ses produits. Elle leur fait subir des tests extrêmes et relève les durées de vie. Les physiciens de l'entreprise ont en tête plusieurs modèles plausibles pour le comportement des objets en fonction des divers paramètres (par exemple : la durée de vie est inversement proportionnelle à la température, etc.). Les statistiques jouent alors un rôle d'aide à la décision de manière double. Elles permettent de réfuter un modèle (lorsque les statistiques ne concordent pas). Mais elles permettent aussi d'en sélectionner un meilleur parmi plusieurs, en fonction des résultats.

• Un autre domaine, plus récent, où les statistiques interviennent de manière massive, est la génomique, même si leur présence est moins visible que celles de la biologie ou de l'informatique.[4]

L'un des champs d'application est l'analyse des séquences ADN (le codage se fait en écrivant des mots à l'aide des seules quatre lettres A,C,G,T, initiales des protéines qui interviennent). Le travail du statisticien est de repérer des phénomènes (fréquence inhabituelle de telle lettre, de tel groupement de lettres, etc.), à charge ensuite pour le biologiste d'interpréter ces phénomènes. Une application est la réalisation d'arbres phylogéniques (i.e. généalogiques) des espèces et notamment la recherche d'ancêtres communs.

• Dans le même ordre d'idée épistémologique, se trouve le domaine de la prédiction. Par exemple le laboratoire de statistiques d'Orsay a travaillé avec AirParif sur des modèles de prévision à 24 heures de la qualité de l'air en région parisienne. L'outil essentiel de ce travail est l'analyse du passé. Bien entendu, la connaissance d'un certain nombre de phénomènes physiques est essentielle (le rôle du vent, de la température, etc.), mais ce qui est étonnant c'est qu'on n'est pas forcé d'avoir entièrement compris les phénomènes pour les expliquer, voire les prédire[5]. P. Massart a, à cet égard, une formule frappante :

La nature s'est montrée plusieurs fois. Elle a eu tort : on peut maintenant la reconnaître.

---

[4]Le lecteur pourra consulter les articles de F. Muri-Majoube et B. Prum et de G. Didier, I. Laprévotte et M. Pupin dans La Gazette des mathématiciens numéros 89 (juillet 2001) et 92 (avril 2002).

[5]On reverra cette idée à propos de Kepler.

3. Des exemples plus récents : analyse numérique

Dans un autre domaine, mon collègue François Allouges qui est spécialiste d'analyse numérique (et travaille avec le CEA) m'a donné lui aussi plusieurs exemples actuels d'interactions des mathématiques avec les autres disciplines (physique, informatique) pour traiter de vrais problèmes. Je note au passage que la phrase qu'il a utilisée pour résumer sa motivation est "comprendre les choses". Comme quoi ...

Dans les problèmes ci-dessous, le schéma est toujours un peu le même.

1) On a une modélisation qui vient de la physique et consiste le plus souvent en une EDP (équation aux dérivées partielles). En général cette équation est bien connue.

2) Les mathématiciens (purs) essaient de montrer des théorèmes fondamentaux relatifs à cette EDP (existence, unicité, régularité des solutions).

3) En général, on ne sait pas calculer des solutions exactes. Les mathématiciens (appliqués) cherchent donc à construire des solutions approchées en fabriquant des algorithmes (stables).

4) Il reste à programmer ces algorithmes en un temps raisonnable (c'est de l'informatique, mais il y a encore de gros problèmes mathématiques).

Voici quelques exemples précis qui concernent de vrais problèmes appliqués et nouveaux :

• Le président de la république a décidé de l'arrêt total des essais nucléaires français qui doivent être remplacés par des simulations. Or, si les équations aux dérivées partielles qui régissent une explosion nucléaire sont connues, elles sont beaucoup trop compliquées pour être résolues, même numériquement. De plus il y a des facteurs d'échelle qui font que les méthodes utilisées (éléments finis, etc.) ne s'appliquent pas dans le domaine considéré (en gros on saurait faire si l'explosion était confinée à 1 millimètre cube !).

• Un autre sujet d'actualité est la sécurité des centrales nucléaires. Là encore il y a des problèmes très difficiles. Un exemple : un écoulement d'eau bouillante dans un tuyau. L'équation est connue (équation du diphasique), mais on ne sait rien en dire (même pas si elle a des solutions). C'est un cas linéairement instable (contrairement au régulateur) où on subodore que la stabilité vient de la non-linéarité. Or EDF utilise de tels écoulements et veut savoir si ses tuyaux sont adaptés.

• Une autre demande présidentielle, à propos d'essais nucléaires, est de vérifier si les autres pays en font ou pas (la Chine, etc.). Pour cela on installe des sismographes en utilisant le fait qu'il ya des guides d'ondes naturels dans les océans (phénomène lié à la variation de la salinité avec la profondeur). Là encore il y a des problèmes mathématiques fondamentaux (où placer les sismographes pour restituer le signal initial).[6]

Bref, pour conclure sur ce paragraphe : oui les mathématiques sont utiles, et elles sont présentes dans la plupart des domaines de l'activité humaine.

[6] Pour donner une idée du développement de ce type de problèmes, une douzaine de bourses de recherche sont proposées par le CEA de Saclay pour les mathématiques l'an prochain et le CEA est en train de lancer un projet de master "Mathématiques de la modélisation, Simulation et Application en Physique".

2 Les mathématiques qui ne sont pas utiles aujourd'hui le seront un jour

Les derniers exemples d'applications que je viens de donner et qui concernent les bombes nucléaires vous ont peut-être paru bien belliqueux. Certes, et je me souviens de Roger Godement disant de son ton rogue : *au moins quand on travaille sur les groupes d'homotopie des sphères on ne travaille pas pour la bombe atomique.* Voire ! Les mathématiques réservent parfois des surprises quant à leurs applications et je serais plus prudent sur le sujet, comme on va le voir sur deux exemples, l'un historique, l'autre actuel.

1. Kepler et la géométrie

Vous savez que les grecs anciens (Platon, Euclide, etc.) étudiaient (et enseignaient) les mathématiques (*Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre*, disait Platon) et à cette époque bénie, elles étaient étudiées pour des raisons philosophiques, pour la beauté qu'elles recelaient, l'harmonie qui les sous-tendait, la connaissance qu'elles permettaient d'approcher. En revanche, même si elles avaient des applications, ce n'est pas dans cet objectif qu'elles étaient étudiées (Platon se moque des "calculateurs").

Pourtant, certaines de ces mathématiques "pures", comme nous dirions aujourd'hui, ont vu leur position retournée, parfois longtemps après. C'est le cas avec les travaux de Kepler.

Rappelons que Kepler (1571-1630) est connu pour ses célèbres lois concernant le mouvement des planètes. Il vient après Copernic et son système héliocentrique, il est contemporain de Galilée et il précède Newton. Il est le disciple de l'astronome danois Tycho Brahé et bénéficie des observations, d'une précision extraordinaire pour l'époque, de celui-ci.

Kepler est au début astrologue et enseigne les mathématiques (il n'y a pas de sot métier). L'histoire (la légende ?) raconte que c'est en dessinant au tableau la figure formée d'un triangle équilatéral et de ses cercles inscrit et circonscrit qu'il eut une sorte de révélation. *La joie que me donna ma découverte ... je ne saurais jamais la dire.*

Quelle est donc cette découverte ? Kepler remarque que le rapport 2 entre les rayons R et r de ces cercles est aussi celui des rayons[7] A cette époque on pense que les trajectoires des planètes sont des cercles. des orbites de Saturne et de Jupiter et il essaie d'étendre cette constatation aux autres planètes. Il n'y parvient qu'en utilisant des figures à 3 dimensions et là, une évidence merveilleuse le frappe : les 5 intervalles entre les 6 planètes du système solaire correspondent exactement aux polyèdres réguliers (connus depuis Platon et que Kepler connaît parfaitement, il découvrira même deux des polyèdres réguliers étoilés) : le cube entre Saturne et Jupiter, le tétraèdre entre Jupiter et Mars, le dodécaèdre entre Mars et la Terre, l'icosaèdre entre la Terre et Vénus et enfin, l'octaèdre entre Vénus et Mercure. Il publie cette découverte dans le *Mysterium Cosmographicum* en 1596. Voilà comment des mathématiques, réputées pures jusque là (les polyèdres réguliers, sommets de la

[7] 7

géométrie d'Euclide n'avaient pas d'applications) deviennent tout à coup explications du monde : *j'avais résolu le secret de l'Univers* dit Kepler.

Bien. Il est temps de discuter un peu. En fait, tout cela est absolument faux et paraît totalement absurde à nos yeux. D'abord, comme vous le savez, il n'y a pas 6 planètes dans notre système solaire, mais 9 (Uranus, Neptune et Pluton étaient alors inconnues)[8]. Ensuite, contrairement à ce qu'affirme Kepler, les solides ne s'ajustent pas du tout aux orbites (on soupçonne que Kepler triche, plus ou moins consciemment, avec ses données, notamment pour Mercure et Vénus). Mais, il est sincèrement convaincu (et même encore vers la fin de sa vie) d'avoir découvert quelque chose d'essentiel et ce qui fonde cette croyance, c'est l'idée d'un agencement divin de l'univers, qui doit donc trouver son écho dans les mathématiques, autre symbole de perfection.

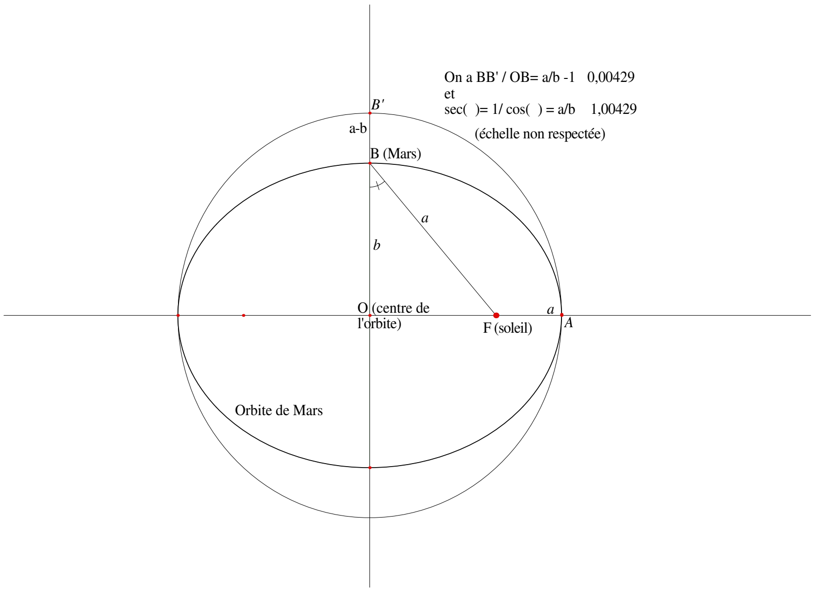
On voit que cette vision métaphysique le mène à une erreur grossière. Pourtant, c'est aussi cette même foi en les mathématiques qui va lui permettre de faire sa découverte principale.

Au départ, il y a le système de Copernic, qui affirme (comme Platon et Ptolémée) que les orbites des planètes sont des cercles, mais de centre le soleil (c'est l'apport de Copernic). Mais Copernic est un piètre expérimentateur et les mesures de Tycho Brahé montrent que le centre des orbites n'est pas exactement le soleil et même, que celles-ci ne sont pas exactement des cercles. Dès le début des années 1600, Kepler est convaincu que les orbites sont des ovales[9], mais ce n'est qu'en 1609 dans l'*Astronomia nova* qu'il énonce sa première loi, avec là encore la conviction profonde que l'explication du monde est dans les mathématiques et notamment dans les travaux des anciens. Le détail qui provoque la découverte est remarquable, Kepler note la coïncidence de deux chiffres relatifs à l'orbite de Mars (la plus elliptique de toutes) : d'une part l'épaisseur de la lunule qui différencie l'orbite d'un cercle et qui est égale à 0,00429 fois le rayon de celui-ci, d'autre part, la sécante (i.e. l'inverse du cosinus) de l'angle de sommet Mars et passant d'une part par le soleil et d'autre part par le centre de la trajectoire, vaut 1,00429 ! Bien entendu cela s'explique en termes d'ellipse, le premier chiffre est $\frac{a-b}{b}$, l'autre est a/b, voir figure ci-dessous, mais c'est ce fait qui a mis Kepler sur la bonne piste.

En effet, il connaît bien les coniques (et notamment les résultats d'Archimède et Apollonius) et reconnaît dans la coïncidence numérique la situation de l'ellipse. Il formule alors :

[8] La même mésaventure est arrivée à d'autres lois empiriques comme la loi de Titius-Bode qui prétendait donner les distances du soleil aux planètes (en fonction de la distance Terre-Soleil) en partant de la suite $0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...$, en ajoutant 4 et divisant par 10. Cette loi ne résista pas à la découverte de Neptune et Pluton.

[9] et cela le perturbe beaucoup : il dit avoir rencontré *une charretée de fumier : l'ovale.* Il dit aussi : *si seulement la forme était une ellipse parfaite, on trouverait toutes les réponses dans Archimède et dans Apollonius.*



Première loi : Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil est un foyer.

Notons que la deuxième loi de Kepler (découverte avant la première) concerne le temps de révolution des planètes. Le paradoxe apparent c'est que le rapport des rayons des orbites de Saturne et Jupiter est de 2, tandis que le rapport des périodes est de 30/12 et non de 24/12 comme on pourrait s'y attendre. Kepler est le premier à penser (avec une autre belle idée géométrique) que les durées sont proportionnelles aux aires balayées et non aux distances parcourues (c'est la deuxième loi).

La troisième loi relie la période à la distance au soleil : le rapport T^2/d^3 est constant.

Je trouve l'histoire de Kepler magnifique, ne serait-ce que comme illustration des voies détournées qu'emprunte souvent la découverte. Mais, au-delà de l'aspect historique, j'en retiens deux faits essentiels.

D'abord, il y a cette mutation d'un domaine (les coniques) qui relevait jusqu'alors essentiellement des mathématiques pures (même si Archimède avait tenté d'incendier la flotte romaine avec un miroir parabolique) et qui, d'un coup, devenaient explications du monde.

Ensuite, ce qui me fascine dans la démarche de Kepler, c'est cette foi extraordinaire (de source essentiellement religieuse) en les mathématiques. Il ne peut penser que Dieu a créé le monde sans référence à la perfection mathématique. On a vu que cette conviction pouvait le conduire à des délires, mais aussi qu'elle est à la source d'une des principales découvertes de l'humanité. Il faut bien comprendre que Kepler n'explique à peu près **rien** du point de vue physique (il a, tout au plus, l'idée d'une force venant du soleil et d'une autre située dans la planète elle-même, mais il est convaincu de l'existence d'une explication) et qu'il n'y a aucune preuve qui corrobore ces intuitions. Ce sera à Newton que reviendra le mérite d'énoncer la loi de la gravitation qui permet de prouver mathématiquement les lois empiriques de Kepler à partir de la loi physique de la gravitation universelle. Ce qui est remarquable dans cet exemple (et on retrouve un peu ce que dit Pascal Massart à propos de l'exemple de la prédiction de la qualité de l'air vu plus haut), c'est justement que les mathématiques permettent de prévoir le déroulement des phénomènes (ici les trajectoires des planètes et leur loi horaire), avant même que l'explication physique n'ait véritablement été obtenue. Au contraire, ici, celle-ci ne viendra qu'après et en s'appuyant sur la description mathématique.

Attention, ma conclusion, à propos de Kepler, n'est pas qu'il faut vouer aux mathématiques un culte quasi-divin,[10] mais cet exemple montre tout de même qu'on peut, de temps en temps, leur faire un peu plus confiance. Pour simplifier à outrance, je dirais que, comme le réel peut se décrire, au moins de manière approchée, à l'aide des mathématiques, celles-ci vont permettre de calculer sur le réel, donc de le prévoir.

2. Un exemple actuel : les nombres premiers et le code RSA

Il y a de nombreux autres exemples de théories mathématiques préexistant à leurs applications :

- les imaginaires et leur utilisation en électricité,
- la géométrie riemannienne et la relativité,
- les espaces de Hilbert et la mécanique quantique,
- la logique et l'informatique,
- le mouvement brownien et la finance, etc.

Bien sûr, il y a beaucoup des mathématiques actuelles qui n'ont pas d'applications et celles que je pratique en sont un exemple. Il faut toutefois être prudent à ce sujet. En effet, si vous m'aviez posé, dans les années 1970, la question de savoir à quoi servaient les recherches mathématiques en théorie des nombres (sur les nombres premiers ou les courbes elliptiques, par exemple) je vous aurais répondu sans hésiter, à rien, c'est pour l'honneur de l'esprit humain (comme dit Jacobi) et j'aurais peut-être ajouté qu'en tous cas elles ne servaient pas à la bombe atomique (comme dit Godement). Et, de fait, à l'époque, les applications de ces belles théories étaient inexistantes. Trente ans plus tard, je suis bien obligé de dire que j'aurais proféré alors une bêtise, puisque depuis l'irruption des nombres premiers en cryptographie, avec le code RSA, ils jouent maintenant un rôle de premier plan dans presque tous les secteurs de la communication, de la finance, etc. et que parmi les plus grand utilisateurs se trouvent justement ... les militaires.

Je demande maintenant aux espions du ministère de sortir de la salle

Maintenant que nous sommes entre nous, je dois dire que les choses ne sont pas tout à fait aussi simples. Je vais évoquer deux points.

Le premier point est le dilemme exact-approché. Vous savez tous construire un hexagone régulier à la règle et au compas. On peut montrer qu'en revanche, l'heptagone régulier n'est pas constructible. Cependant s'il ne l'est pas **exactement**, il l'est, de manière approchée, avec une précision aussi grande que l'on veut (une construction pas si grossière consiste à prendre la moitié du côté du triangle équilatéral comme côté de l'heptagone). Même en imaginant que cette construction ait des applications essentielles, je ne vois pas bien quelle importance pourrait avoir l'impos-

[10] Je serais plutôt, de ce point de vue, sur la longueur d'onde de Laplace : *Dieu ? Je n'ai pas besoin de cette hypothèse.*

sibilité de la construction exacte, dans la mesure où l'on peut réaliser la construction avec une précision plus fine que la taille de la plus petite particule, par exemple.

Le second point est l'importance de la démonstration pour les mathématiciens. Je prends deux assertions de théorie des nombres : le grand théorème de Fermat et la conjecture de Goldbach.[11] Imaginons que ces assertions deviennent, pour une raison ou une autre, essentielles pour les applications. L'une est démontrée (depuis quelques années), l'autre ne l'est pas, mais on l'a vérifiée pour tous les entiers jusqu'à une borne immense. Croyez-vous que, pour les applications, cela fasse une différence ? Sans doute pas, encore que ...

Bref, ceux d'entre vous qui regrettent le temps où les mathématiques étaient extérieures au monde réel peuvent se rassurer : il nous reste des préoccupations qui ne sont pas tout à fait celles des autres !

3 Les mathématiques sont utiles pour tous

Il n'est pas facile, pour répondre à Luc Ferry, de dire pourquoi enseigner les mathématiques à tous. Je pourrais évidemment donner des arguments, des exemples, de bonnes raisons pour cela. Il suffirait que j'invoque la citoyenneté : comment comprendre la profusion de chiffres et de diagrammes dont on nous abreuve en permanence si ce n'est en étudiant les statistiques[12], comment comprendre le mécanisme des tranches de l'impôt sur le revenu[13] si ce n'est en étudiant les fonctions affines par morceaux, comment démonter les contradictions des hommes politiques si ce n'est en étudiant la logique. Je pourrais aussi, s'agissant de la géométrie, parler de la vision géométrique, du repérage, etc. Je pourrais : je l'ai fait dans le rapport d'étape de la commission Kahane auquel je vous renvoie.

Si je fais tout cela, vous serez sans doute partiellement convaincus, mais cela risque de rester abstrait et superficiel. C'est pourquoi j'ai choisi trois exemples personnels, trois fois où je me suis dit : finalement, faire des maths, ce n'est peut-être pas inutile.

1. Bricolages

Il m'arrive (pas très souvent) de faire quelques menus travaux dans ma maison. Je suis ce que les vrais professionnels appellent dédaigneusement un bricoleur, c'est-à-dire que je ne maîtrise vraiment aucune des techniques de base du bâtiment. En revanche, les mathématiques me sont plus familières et il m'est arrivé plusieurs fois de les mettre à profit[14].

[11] l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions entières non triviales pour $n \geq 3$; tout nombre pair ≥ 4 est somme de deux nombres premiers

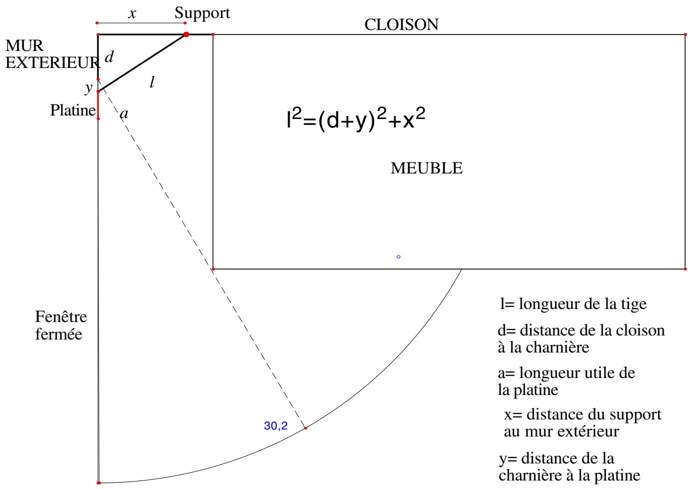
[12] Sur ce sujet, je vous renvoie à la partie *Statistiques* du rapport d'étape de la commission Kahane et à son annexe.

[13] Question pas tout à fait évidente : quand a-t'on intérêt à demander le rattachement de ses enfants majeurs au foyer fiscal ?

[14] avec l'aide de mon épouse, mathématicienne elle aussi !

Le meuble récalcitrant

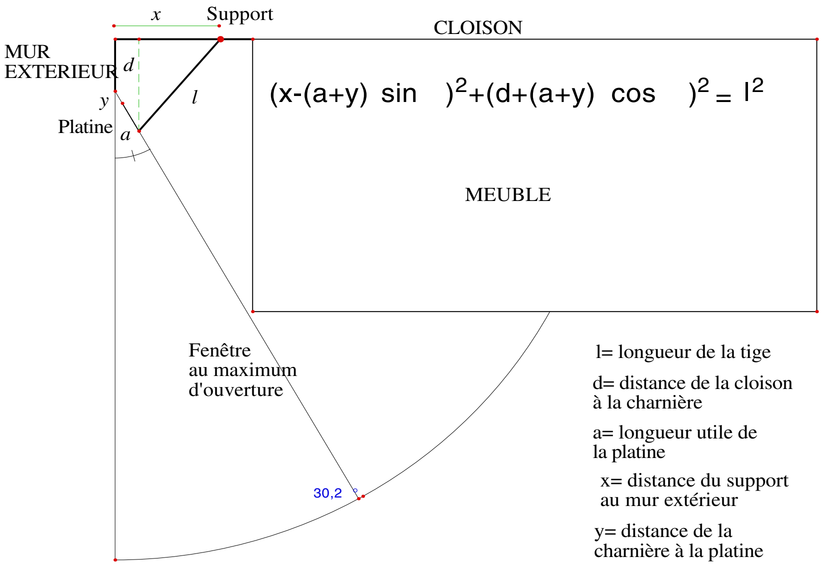
Le premier exemple est très simple. J'ai transporté de ma maison de la région parisienne à celle des Vosges un meuble de séjour très haut. Pour le transporter dans la pièce qui devait le recevoir il fallait le passer par un balcon de façon un peu périlleuse. De plus, la pièce en question était déjà aménagée et je ne voulais pas y faire des travaux salissants. J'ai donc pris la précaution de mesurer le meuble pour voir non seulement s'il tenait en hauteur (c'était le cas), mais aussi s'il pouvait pivoter pour se mettre en place (donc si la hauteur était plus grande que la diagonale, calculée par Pythagore) : ce n'était pas le cas. J'ai donc scié la base du meuble avant de le transporter et tout s'est bien passé.



Le bidule de la cuisine

Il y a une quinzaine d'années j'ai installé moi-même des meubles de cuisine dans ma maison d'Antony. Pas de problème, sauf qu'une fois installés, la fenêtre cognait contre l'un des meubles, au risque de casser la vitre. J'ai fouillé ma cave à la recherche d'une idée de dispositif permettant de bloquer la fenêtre. J'ai trouvé un bidule en deux morceaux, une platine et un support, sans doute un reste d'un entrebâilleur de porte avec chaîne qui venait du précédent propriétaire de ma maison. Heureusement, vieux reste de mes ascendances paysannes, je ne jette rien. J'ai bricolé une tige métallique rigide que j'ai fixée au support et qui coulisse dans la platine, afin de bloquer la fenêtre avant le choc contre le meuble. Le problème qui restait était de déterminer la position de la platine sur la fenêtre (cf. l'inconnue y) et du support sur le mur (cf. l'inconnue x), voir la figure. C'est un véritable problème de mathématiques, du niveau d'un lycéen. On écrit deux équations, l'une correspond à la fenêtre fermée, la tige est à l'extrémité A de la platine, l'autre correspond à l'ouverture maximale (qui fait un angle de $\phi = 30$ degrés), la tige est à l'autre extrémité B de la platine.

Les données sont l'angle ϕ, les longueurs $d = 6,5cm$ (distance de l'axe de la fenêtre au mur), $a = 4cm$ (longueur utile de la platine), $l = 15cm$ (longueur de la tige), les inconnues sont x (distance du support au mur de la fenêtre) et y (distance de la platine à l'axe de la fenêtre).



En mettant les deux ensemble on tire y en fonction homographique de x, en reportant dans la première équation on trouve une équation en x (qui se ramène à une équation algébrique du quatrième degré) :

$$l^2 = \left(d + \frac{2ax\sin\phi - a^2 - 2ad\cos\phi}{2a + 2d(\cos\phi - 1) - 2x\sin\phi} \right)^2 + x^2$$

et on calcule des valeurs approchées de x et y (c'est maintenant immédiat avec une calculatrice un peu perfectionnée ; à l'époque nous avions dû travailler un peu !) On trouve $x = 12,5cm$ et $y = 1,7cm$.

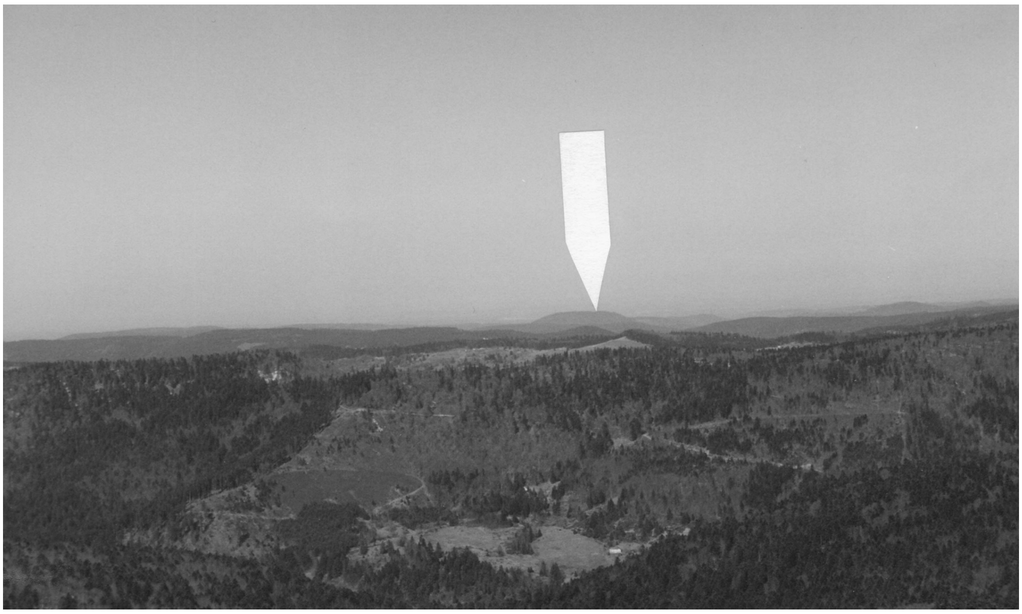
L'expérience que j'ai des menuisiers, plâtriers, charpentiers et autres hommes de l'art me fait penser que la plupart auraient réprouvé mon bricolage. Il tient pourtant toujours le coup, 15 ans après.

2. La montagne mystérieuse

Lors d'une promenade dans les Vosges nous avons découvert, du sommet du Rothenbachkopf, 1316 m, le paysage représenté sur la photo ci-dessous. Nous étions capables d'identifier la plupart des sommets environnants, sauf l'un d'entre eux, une montagne, en forme caractéristique de table. Nous avons donc entrepris une sorte de quête de cette montagne mystérieuse, qui a commencé avec une carte IGN. Il y a deux difficultés. La première est de déterminer la direction de la montagne. Même si nous n'avions pas de boussole, nous avions suffisamment de points de repères connus pour que cette difficulté puisse être surmontée, en particulier une ferme isolée au dessus du hameau du Nol à La Bresse (attention toutefois : une petite erreur d'angle au départ a de graves conséquences 20 kilomètres plus loin).

L'autre difficulté est d'évaluer la distance, ce qui n'est pas du tout évident, d'autant qu'il y a un grand nombre de chaînes intermédiaires entre les deux.

L'intrusion essentielle (et assez minime) des mathématiques, et notamment de la géométrie, est l'idée de représenter la situation sur un dessin. Notre principe a été de tracer une droite sur la carte et d'établir une sorte de coupe en notant les altitudes et les distances des points rencontrés (sommets et vallées). Les mathématiques sont réapparues alors car un dessin à l'échelle s'est avéré illisible. Heureusement, l'affinité conserve l'ordre et l'alignement et nous avons pu augmenter l'échelle sur la verticale.



À partir d'une telle coupe, on détermine alors facilement, en traçant des droites, quels sont les sommets vus depuis le Rothenbachkopf dans la direction prescrite. Avec le nombre de plans intermédiaires et l'aspect des lignes de niveau nous avons pu conjecturer quelle était la montagne en forme de table : l'Ormont, une montagne qui domine Le Thôly, près de Gérardmer, à 20 km du Rothenbachkopf. Ce qui est étonnant c'est que l'Ormont n'est qu'à 829 m seulement bien que cette montagne ne semble pas tellement plus basse que d'autres, connues, qui culminent à plus de 1000 m.

J'ai ensuite entrepris la vérification de la conjecture par une méthode plus fatigante, mais nettement plus sûre : je suis retourné au sommet du Rothenbachkopf et j'ai marché (avec quelques trajets en voiture aussi) dans la direction de la montagne mystérieuse. Pour chaque étape je prenais un point de repère sur la montagne du plan immédiatement suivant. C'est ainsi que je suis passé successivement par la vallée de Vologne à La Bresse, le sommet des Champis, la vallée du Chajoux, puis le Grouvelin (au-dessus de Gérardmer), la tête de Mérelle, la vallée de la Cleurie et enfin le sommet de l'Ormont, avec toutefois une petite déception à l'arrivée : c'était l'été 2000 et le sommet en question n'était qu'un immense enchevêtrement de bois abattus par la tempête de décembre 1999 et il était pratiquement impossible d'y accéder.

3. La cour d'assises

Je voudrais, pour mon dernier exemple, revenir sur un des aspects essentiels des mathématiques, le fait qu'elles contribuent puissamment à la construction de la rationalité et à l'apprentissage du raisonnement. En effet, elles permettent de comprendre la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, elles font le lien entre le général et le particulier (voir le passage de l'arithmétique à l'algèbre, ou en géométrie, le fait de dire des choses générales sur une figure particulière, la possibilité de développer un raisonnement logique qui ne soit pas brouillé par l'affectif ou par la complexité du réel), elles conduisent à organiser la pensée, à catégoriser les problèmes. Jean-Pierre Kahane le dit très bien dans l'introduction du rapport d'étape de la commission qu'il préside :

Elles forcent à expliciter les évidences, à décomposer les difficultés, à enchaîner les résultats, à dénombrer tous les cas possibles : elles sont la logique cartésienne en action.

Pour illustrer cet aspect de l'importance des mathématiques je vais encore une fois raconter un souvenir personnel.

En septembre 1996 j'ai été tiré au sort pour être juré de cour d'assises. Ma première réaction a été d'être furieux de cette corvée. En effet, le moment était particulièrement mal adapté (c'était la rentrée du CAPES) et j'avais le sentiment de n'avoir aucune compétence pour faire ce travail, alors qu'il y a des magistrats dont c'est le métier. J'ai pourtant été obligé de le faire et j'ai donc assisté à deux procès (l'un pour meurtre, l'autre pour vol et viol). Je dois dire que j'ai changé d'avis sur la question et que je trouve cette expérience intéressante et le système de jury populaire pas si mauvais. Sur ce dernier point, j'ai constaté en effet que les jurés prenaient leur tâche très à cœur (ce qui n'est pas toujours le cas des magistrats professionnels) et que la diversité des origines amenait une réflexion souvent très intéressante.

En ce qui me concerne j'ai pu constater à plusieurs reprises que ma formation de mathématicien (et surtout celle de professeur, habitué depuis plus de 25 ans à critiquer les prestations d'élèves des préparations à l'agrégation ou au CAPES) m'a été d'une très grande utilité. En effet, l'habitude de discuter, en mathématiques, des relations de cause à effet, de la logique des affirmations, des enchaînements, de penser une situation de manière globale, m'a permis, à plusieurs reprises de poser des questions (notamment à des témoins, policiers, médecins, etc.) qui ont montré un certain nombre de défaillances de l'enquête ou ont pu préciser certains points. En particulier, dans l'une des affaires, la reconstitution précise de la chronologie n'avait pas vraiment été effectuée soigneusement. Dans l'autre, l'accusation s'appuyait sur une analyse médicale, dont les circonstances montraient clairement qu'elle ne pouvait avoir aucune valeur. Cette faculté de raisonnement a aussi été très utile dans les discussions qui se sont déroulées ensuite entre les jurés et les magistrats.

Bref, je me suis tout à coup senti une vocation de Sherlock Holmes ! D'ailleurs, et c'est un des compliments les plus flatteurs que l'on m'ait jamais fait, l'un des greffiers m'a dit, à la fin : *Ah, je n'aimerais pas être votre élève : vous ne laissez rien passer !*.

Conclusion

J'espère vous avoir un peu rassurés : oui, il est encore nécessaire en ce nouveau millénaire, d'enseigner les mathématiques. Attention toutefois, nous devons écouter ce que nous dit le monde extérieur et essayer de comprendre comment notre discipline a pu, en quelques années, passer d'un statut de discipline reine à celui de matière dont la survie même est contestée.

Il y a sans doute à cela des raisons sociales auxquelles nous sommes essentiellement étrangers : le statut de discipline dominante et de discipline sur laquelle se faisait la sélection a beaucoup nui aux mathématiques. De même, le développement de l'informatique, qui permet de faire sans peine des calculs autrefois réservés aux experts, a pu faire croire que les mathématiques étaient devenues inutiles.

Mais il y a aussi des points qui sont de notre ressort et qu'il est essentiel de prendre en compte. Je voudrais en citer deux.

D'abord, je crois que nous devons prêter plus d'attention que nous ne le faisons aux autres disciplines. Pour montrer que les mathématiques sont utiles, nous devons accorder plus de place dans nos enseignements aux activités de modélisation (et les discuter !). C'est ainsi que nous pouvons convaincre les autres, tous les autres, de l'importance dees mathématiques.

Ensuite, s'agissant de l'apprentissage du raisonnement, il est important de ne pas le réduire à celui de la démonstration qui tourne souvent à l'exercice de style et dans lequel de nombreux élèves ont de la peine à rentrer. Il y a deux conditions pour cela. La première est de ne pas craindre d'étudier des problèmes ouverts (par exemple, en géométrie, les problèmes de lieux ou de constructions). La seconde est de disposer des bons outils pour faire des mathématiques. Par exemple, en géométrie encore, on peut penser que l'outil transformations n'est pas le mieux adapté au niveau du collège et qu'il serait plus pertinent de lui préférer l'usage des invariants et des cas d'isométrie ou de similitude des triangles.

Comme vous le voyez, je n'ai pas pu résister à faire état de mes convictions, voire de mes marottes, en m'écartant un peu du sujet proposé. Je vous prie de bien vouloir m'en excuser et je vous remercie de votre attention.

LA LOGIQUE ET LA VÉRITÉ

Alain CHAUVE

D'après la définition traditionnelle, la vérité est *« la conformité de la pensée avec l'objet »* (Descartes à Mersenne, *lettre du 16 octobre 1639*) ; elle *« consiste dans l'accord de la connaissance avec l'objet »* (Kant, *Logique*, Introduction, VII). Cette définition viendrait d'Aristote, *Métaphysique* Δ, 29 et Θ, 10, et dans la terminologie scolastique on parle d'*« adaequatio »*. Dans une terminologie plus commune on parle d'exactitude : un jugement, une représentation sont vrais s'ils sont exacts. Par exemple, « il pleut » est vrai s'il est exact qu'il pleut, c'est-à-dire si l'on peut vérifier et constater qu'il en est bien ainsi.

Si l'on s'en tient à cette définition traditionnelle, la logique devrait éliminer toute considération de la vérité. La logique concerne en effet *« l'entendement abstraction faite de la diversité des objets auxquels il peut être appliqué »* (Kant, *Critique de la raison pure*, 2ème partie, Introduction). C'est ce qui fait dire que la logique est formelle. En effet, il n'y est pas question de jugements ou de raisonnements qu'il faudrait vérifier pour en établir l'exactitude en s'assurant qu'ils sont bien conformes à des faits que l'on peut constater. La logique ne s'intéresserait pas au contenu des propositions ; elle ne s'intéresserait donc pas à la question de savoir si ce qu'elles disent est vrai.

Aristote semble bien avoir procédé de cette façon lorsqu'il a présenté dans les *Premiers Analytiques « l'art syllogistique »* de lier déductivement des propositions et de tirer des conclusions. Il le présente en effet comme un art mis en œuvre dans tout discours quelle que soit la nature des choses sur lesquelles on raisonne. A ce titre, l'Analytique n'est la *« science d'aucun objet déterminé, c'est pourquoi elle se rapporte à toute chose »*. Elle fait abstraction, dans le discours, de ce que l'on dit pour ne retenir que les formes et les modes des énonciations en tant que telles. Lorsque, par exemple, nous parlons de Socrate pour dire qu'il est mortel, le logicien s'empresse d'éliminer le contenu de la proposition en substituant des lettres aux mots pour ne retenir que la forme attributive S est P, de sorte que pour lui, la question n'est pas de savoir s'il est vrai ou non que Socrate est mortel mais de savoir comment une proposition de cette forme peut être correctement déduite d'une autre proposition, c'est-à-dire *« par un raisonnement qui conclut par la forme de la forme »*, comme disait Leibniz (*Nouveaux Essais*, IV, 17).

Et pourtant les logiciens continuent d'introduire la considération du vrai et du faux au sujet des propositions réduites à des formes. Ils continuent à les considérer comme vraies ou fausses, alors même qu'ils ont fait abstraction de la réalité dont elles parlent. Aristote, par exemple, n'hésite pas à dire que si A est vrai alors non-A est faux ; que A et non-A ne peuvent être vrais en même temps. Comment la logique peut-elle considérer des énoncés comme vrais ou faux là où l'on a fait abstraction de la réalité dont ils parlent ? Et ce n'est pas tout. Il y a des expressions logiques de caractère purement formel qu'il faudra considérer comme des vérités. Par exemple, on peut considérer non seulement que la proposition « Socrate est mortel » est vraie ou fausse, et cela sans s'occuper de savoir ce qu'il en est de Socrate, mais il faudra reconnaître que l'expression « si A implique B et si B implique C, alors A implique C » est une vérité logique (il s'agit de la transitivité de l'implication). De même, par exemple, on considérera que la contraposition est une vérité logique : « si A implique B alors non-B implique non-A ». En revanche, on considérera que « si A implique B alors B implique A » n'exprime pas une vérité logique. La logique envisage donc bien la vérité, mais sans prendre le moins du monde en considération le rapport de la pensée à la réalité. « S'il fait jour, il fait jour » est logiquement vrai qu'il fasse jour ou qu'il ne fasse pas jour. La logique introduirait-elle un autre type de vérité qui ne consisterait plus dans la conformité avec la réalité ?

1. La réponse traditionnelle au problème

Pour rendre compte du vrai et du faux en logique, on a élaboré la notion de « vérité formelle » et on a cherché à fonder cette notion sur une interprétation philosophique de la pensée logique.

On a d'abord distingué la « vérité objective » ou « matérielle », qui consiste dans l'accord avec la réalité, d'un autre type de vérité que l'on rencontre en logique : la « vérité formelle ». On a ensuite rapporté celle-ci à la notion de « vérité nécessaire » qui reste constamment vraie, quand même ce qui pourrait la vérifier dans la réalité ne se produit plus ou ne se produit jamais. On a enfin lié l'idée de nécessité à celle de démonstration : une vérité est nécessaire parce qu'elle est démontrable et non parce qu'elle est vérifiable. Dans une démonstration on aboutit à une proposition vraie en la déduisant d'autres propositions vraies de sorte qu'il y a, comme dit Leibniz à Conring (14 mars 1678), *« résolution d'une vérité en d'autres vérités déjà connues »* sans qu'il soit besoin de faire appel à des observations ou des constatations de faits. Par ce lien déductif *« toute vérité a sa preuve* a priori *»* (Leibniz à Arnauld, 11 juillet 1688). Il n'est pas besoin d'en vérifier l'exactitude ; il faut seulement veiller à n'introduire aucune contradiction car *« ce qui implique contradiction ne saurait être »* (Leibniz à Foucher, 1686). C'est en ce sens que nécessaire renvoie à démontrable : démontrer une vérité, c'est montrer qu'elle est nécessaire, c'est-à-dire qu'il serait contradictoire de la nier, étant entendu que *« si deux contradictoires peuvent être vraies en même temps, tout raisonnement devient inutile »* (Leibniz à Arnauld, juillet 1686). Ainsi la vérité logique ne consiste plus dans l'accord de la proposition avec la réalité mais dans l'accord des propositions entre elles. Il ne s'agit plus de vérifier une proposition mais de la conclure correctement selon des règles dont le principe est de ne pas se contredire.

Une telle conception de la vérité repose sur une interprétation philosophique qui voit dans la logique *« la science des lois nécessaires et universelles de la pensée en général »*. C'est Kant qui fait cette déclaration dans l'Introduction de sa *Logique* et son argumentation met bien en évidence la justification philosophique qui entoure l'idée classique de vérité logique. En logique, nous dit-il, *« nous mettons de côté toute connaissance que nous devons emprunter aux seuls objets »* et *« nous découvrons ces règles qui sont absolument nécessaires à tous égards et sans considération des objets particuliers de la pensée »*, c'est-à-dire *« sans lesquelles nous ne pourrions pas penser du tout »*. Nous aurions donc affaire à la pensée elle-même, en tant que telle, et non à des « objets ». C'est pourquoi la logique est « formelle ». Elle porte en effet sur *« la simple forme de la pensée en général »* puisqu'elle *« fait complètement abstraction de tout objet »*. C'est surtout pourquoi la logique est une science. Elle peut reposer *« sur des principes* a priori *qui permettent de déduire et de démontrer toutes ses règles »*. Celles-ci en effet ne dépendent pas de la connaissance d'un objet, donc *« elles ne sont pas dérivées de l'expérience »* et n'ont rien d'empirique. Elles peuvent être par conséquent établies dans une construction rationnelle pure et former un système constitué *a priori*.

Par exemple, les règles du syllogisme peuvent être dérivées systématiquement d'un principe que les scolastiques avaient appelé le *« dictum de omni et nullo »* qu'Aristote avait énoncé dans les *Premiers Analytiques*, I, 1, 24b, et que Euler présente de la manière suivante dans la lettre XXXVI du 21 février 1761 à une Princesse d'Allemagne : *« le fondement de toutes ces formes se réduit à ces deux principes sur la nature du contenant et du contenu : 1/ Tout ce qui est dans le contenu se trouve aussi dans le contenant ; 2/ Tout ce qui est hors du contenant est aussi hors du contenu ».* Leibniz y avait déjà vu le *« fundamentum syllogisticum »* et avait reconnu en lui une forme du principe de contradiction dont il avait fait le *« seul principe primitif »* des règles syllogistiques (*Nouveaux Essais*, IV, 2, §1).

Voilà une bien curieuse science qui, par son caractère démonstratif est bien une science, mais qui, n'ayant pas d'objet déterminé, n'est la science de rien du tout. Quel est donc ce genre de science ? Elle n'est, dit Kant, *« rien d'autre qu'un canon permettant l'appréciation de la rectitude formelle de notre connaissance »* : la logique est une science normative. En effet, *« le principe logique de la vérité est l'accord de l'entendement avec ses propres lois universelles »*, autrement dit, c'est l'accord de la pensée avec elle-même. Et c'est bien ce que l'on veut dire lorsqu'on invoque le principe de contradiction pour en faire le principe logique de la vérité ; on veut alors dire que notre connaissance indépendamment de ses objets obéit à des règles nécessaires, à des lois sans lesquelles il ne pourrait y avoir de vérité. Ces lois qui sont celles de l'entendement et qui ont pour principe la non contradiction, deviennent celles d'une logique qui *« nous enseigne le droit usage de l'entendement, c'est-à-dire celui qui est cohérent avec lui-même ».* Les lois logiques, considérées comme lois nécessaires de l'entendement, sont *« les conditions de son droit usage ».* Les principes et les lois logiques sont donc des normes de la pensée, et la logique est la *« science »* qui juge de la *« rectitude formelle »* de l'usage de l'entendement. Celui-ci doit être en accord avec lui-même ; il doit être en accord avec les règles logiques qui sont des lois pour l'entendement, lois qui prescrivent à l'entendement d'être en accord avec lui-même. Ainsi, *« en logique, il s'agit […] non de la façon dont nous pensons, mais de la façon dont nous devons penser ».*

En résumé, on voit apparaître le soubassement philosophique de l'idée de « vérité formelle ». Nous avons affaire aux <u>lois de la pensée</u>, lois dont le principe est le <u>principe de contradiction</u>, principe qui est érigé en <u>norme de la pensée</u> de sorte que la logique devient un <u>Canon</u>, une logique normative où la vérité consiste dans la *« rectitude formelle »* du raisonnement.

2. Nouvelle formulation du problème avec les calculs logiques

Avec Frege et Russell, la logique se présente sous les espèces de deux « calculs », le calcul des propositions et le calcul des prédicats. On s'en tiendra au calcul des propositions. Le problème de la vérité logique se pose d'une façon nouvelle qui invalide l'interprétation traditionnelle.

Dans le calcul des propositions on a affaire à des propositions que l'on appelle « élémentaires » et que l'on note par des « lettres de propositions », p, q, r, etc. Ces propositions élémentaires représentent des éléments logiques susceptibles d'être vrais ou faux. Les propositions que l'on trouve dans le langage peuvent être des exemples de ces éléments logiques, étant entendu que la logique considérera les propositions du langage en faisant abstraction de leur contenu, de ce qu'elles disent, pour n'en retenir qu'une seule caractéristique : elles sont soit vraies, soit fausses, et il n'y a rien d'autre à considérer en elles que ces « valeurs de vérité ».

En outre, ces éléments sont reliés entre eux dans le calcul par des articulations logiques que l'on note par des signes de « connecteurs » : $-$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, qu'on appelle négation, conjonction, disjonction, implication. Ces connexions logiques correspondent à peu près aux articulations logiques que le langage exprime par les mots « non », « et », « ou », « si … alors » (ce n'est que dans le langage mathématique que ces mots correspondent strictement et rigoureusement aux connecteurs logiques). A partir de propositions élémentaires on forme avec les connecteurs de nouvelles propositions. Par exemple $(p \Rightarrow q)$ est une proposition « composée » des propositions élémentaires p et q à l'aide du connecteur d'implication.

Où veut en venir le logicien avec ses propositions et ses connecteurs ? A deux choses.

1/ Il veut montrer comment un connecteur détermine la valeur vrai ou faux (les « valeurs de vérité ») d'une formule en fonction des valeurs de vérité des formules qui la composent (le mot « formule » désigne aussi bien une proposition élémentaire qu'une proposition composée). Par exemple, avec p et avec q, on peut construire la disjonction $(p \vee q)$. Cette proposition composée a la valeur vrai quand l'une au moins des propositions a la valeur vrai (elle n'est fausse que si les deux ont ensemble la valeur faux). Si l'on construit la conjonction $(p \wedge q)$, cette proposition aura la valeur vrai quand les deux propositions qui la composent auront ensemble la valeur vrai (il suffit qu'une seule ait la valeur faux pour que la conjonction soit fausse). Le logicien dresse ainsi des « tables de vérité » où, en général, on représente « vrai » par V et « faux » par F, et qui montrent pour chaque connecteur quel résultat V ou F on obtient en composant un V ou un F avec un V ou un F à l'aide de ce connecteur. Dans ce calcul, la vérité ou la fausseté sont déterminées par la seule connexion logique des propositions entre elles. Selon le connecteur, des propositions V ou F formeront une proposition V ou F. On retiendra que le logicien nous met devant une combinatoire de V et de F. La seule question ici est de savoir si du vrai et du faux combinés par tel connecteur avec du vrai et du faux donnera du vrai ou donnera du faux. A cette fin le logicien dispose de tables de vérité correspondant à chaque connecteur et qui sont de véritables règles de calcul sur des V et des F, comparables aux tables d'addition ou de multiplication sur des nombres. Avec ces tables, il peut calculer la valeur V ou F d'une formule à partir des éléments V ou F qui la composent.

2/ Le logicien ne se contente pas d'établir des connexions entre des propositions avec des « et », des « ou », des « si … alors », etc., et de décrire dans une table les cas de vérité ou de fausseté des propositions qu'il compose ainsi. Il veut aussi former des expressions qui ont valeur de lois logiques et qui semblent énoncer des vérités purement logiques. Par exemple, $(p \Rightarrow p)$ semble exprimer une nécessité logique qui s'impose à l'esprit, une vérité nécessaire qui tient à la nature même d'une implication : toute chose s'implique forcément elle-même ; s'il pleut, il pleut. C'est une loi de l'implication (elle est « réflexive »). De même, il y a une nécessité logique qui nous fait passer d'une formule à une autre. Si, par exemple, j'ai $(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)$, alors j'ai nécessairement $(p \Rightarrow r)$. Il y a là encore une loi de l'implication : elle est transitive, et cette loi semble exprimer une vérité logique.

On voit que la notion de vérité intervient dans le calcul logique sous deux aspects différents. Par vérité on entend soit les valeurs de vérité des formules du calcul, soit les vérités logiques qu'on exprime avec les formules du calcul. Que signifient ces deux sens du mot « vérité » dans la logique ? La réponse à cette question va nous éloigner de l'idée que la vérité logique est une vérité formelle et nécessaire. Du même coup, elle va nous obliger à revoir toute l'interprétation philosophique de l'idée de vérité logique.

3. Les valeurs de vérité

Avec la définition classique de la vérité – l'*adaequatio* –, on a dit ce qui rend vraie ou fausse une proposition, à savoir que celle-ci s'accorde ou ne s'accorde pas avec la réalité, avec ce dont elle parle. Si on en reste là, il n'y a plus qu'à préciser comment on doit faire pour s'assurer qu'il y a accord ou désaccord entre une proposition et la réalité, c'est-à-dire comment il faut faire pour vérifier que la proposition est vraie ou fausse. En général, on préconise d'avoir recours à l'expérience et de bien regarder pour savoir si les choses sont comme on l'a dit. Mais lorsqu'on procède ainsi on a laissé quelque chose dans l'ombre. Une question en effet doit être posée et ne pas rester implicite : en quoi consiste considérer une proposition vraie ou fausse ? Poser cette question n'est pas du tout la même chose que de se demander : qu'est-ce qui fait qu'une proposition est vraie ou fausse ?

Prenons un exemple : je dis qu'il pleut. Jusque là il n'y a rien de vrai ou de faux dans ce que je dis. Maintenant je me demande si c'est vrai ou faux, c'est-à-dire si ce que je dis s'accorde ou non avec la réalité. Pour le savoir, je vais à la fenêtre et je vois la pluie qui tombe. Ce que je vois confirme ce que j'ai dit et me permet de décider si c'est vrai ou faux. Tout cela semble bien banal et sans mystère, et pourtant, à la réflexion, quelque chose est passé inaperçu. En effet, je n'ai pas dit seulement « il pleut » pour ensuite aller voir à la fenêtre ; je me suis demandé si en disant « il pleut » je dis vrai, je dis quelque chose de vrai ou de faux, et c'est pour le savoir que je vais regarder à la fenêtre. Avant donc d'aller voir à la fenêtre pour savoir si c'est vrai ou si c'est faux, il m'a bien fallu préalablement mettre en rapport la proposition « il pleut » avec l'idée que c'est vrai ou que c'est faux, avec le vrai et le faux. J'ai envisagé la valeur, vrai ou faux, de la proposition et c'est cette valeur que j'ai en vue lorsque je vais vérifier : lorsque je vais vérifier, c'est pour répondre à la question « est-ce vrai ? ». L'accord avec la réalité me permet de répondre à cette question et me permet de confirmer que ma pensée qu'il pleut est vraie et que j'ai affaire à une vérité. Bref, pour que la conformité avec la réalité puisse venir confirmer que ma pensée est vraie, il faut que ma pensée ait affaire à du vrai ou à du faux.

Il apparaît alors que nos propositions ont pour objets le vrai et le faux et que c'est d'eux, des « valeurs de vérité » qu'il est question dans une proposition que l'on se propose de confirmer ou d'infirmer : il est question de savoir si c'est à du vrai ou à du faux que l'on a affaire. Ainsi, le vrai et le faux sont les objets de nos propositions, mais, pressés de savoir ce qu'il en est, nous nous précipitons pour savoir si c'est vrai et nous n'apercevons pas que le vrai et le faux sont les objets auxquels se réfèrent nos propositions et que c'est d'eux que nous voulons parler lorsque nous exprimons des propositions : « il pleut », « Socrate est mortel », etc. Nous voulons savoir à chaque fois si c'est à du vrai ou à du faux que nous avons affaire, et nous reconnaissons donc par là que ce sont bien les objets des propositions. Certes nos propositions (« il pleut », « Socrate est mortel », « le soleil se lève », etc.) ont des <u>sens</u> différents, mais leur <u>objet</u> est le même et il est à chaque fois question de savoir si avec elles nous avons affaire au vrai ou au faux. Le premier qui s'en est avisé a été Frege qui, dans l'article *Sinn und Bedeutung*, 1892 (traduit par *Sens et dénotation*), fait observer que toutes les propositions ont pour référence les valeurs de vérité : *« la dénotation d'une proposition est sa valeur de vérité »*.

Dans ces conditions, il faut reconnaître que la logique n'est pas aussi formelle et vide de contenu qu'on l'a dit. Le calcul des propositions porte bien sur des objets, le vrai et le faux, et consiste à effectuer sur ces objets des opérations logiques, des calculs qui ne sont pas sans évoquer les opérations d'un calcul mathématique. Mais de quelle sorte d'objets s'agit-il ? Peut-on appeler le vrai et le faux des « objets » alors qu'il ne s'agit pas, on en conviendra, de choses concrètes que l'on peut voir et toucher ? On peut cependant admettre qu'il y a aussi des objets abstraits comme sont, par exemple, les nombres. On peut d'ailleurs pousser cette comparaison. Lorsque le logicien considère des « valeurs de vérité » de propositions, il considère ces valeurs pour elles-mêmes et fait abstraction des propositions dont elles sont les valeurs, exactement comme on fait dans l'arithmétique, par exemple, où l'on ne considère pas 7 hommes et 5 chevaux, mais le 7 et le 5 eux-mêmes, les valeurs numériques : peu importe la nature des choses dont c'est le nombre ; peu importe même qu'il y ait des choses qui ont un nombre. On définit ensuite des opérations sur les nombres et on fixe comment un nombre composé avec un autre par une addition ou par une multiplication donne pour résultat un autre nombre. Il en va de même dans le calcul des propositions avec, par exemple, les opérations de disjonction ou de conjonction sur des valeurs de vérité. Et lorsque le logicien introduit des lettres p, q, r, etc., il veut représenter des valeurs de vérité V ou F – et non des propositions – exactement comme fait le mathématicien avec ses x, y, et z pour représenter des valeurs numériques. Allons même plus loin que cette comparaison. Il n'y a pas de différence entre des valeurs de vérité et des valeurs numériques. Les opérations logiques sur le vrai et le faux ont les mêmes propriétés que les opérations sur 0 et 1. Boole l'avait fait remarquer au milieu du XIXe siècle : calculer avec des valeurs de vérité revient à calculer avec 0 et 1, et, par exemple, la conjonction correspond à une multiplication avec 0 et 1, opération associative, commutative, avec 1 pour élément neutre.

L'apparition du vrai et du faux en logique sous la forme de valeurs de vérité considérées comme des « objets » au même titre que les nombres dans un calcul conduit à reconsidérer l'idée philosophique de vérité en logique. Cette idée repose sur une attitude spontanée. Lorsqu'on dit qu'une proposition p est vraie, on a le sentiment que l'on dit plus que p ; on l'affirme. Cette affirmation n'ajoute rien au contenu de p mais semble dire quelque chose de p ; elle semble dire que c'est vrai, que c'est confirmé, que je considère que c'est conforme à la réalité. Philosophiquement on sera alors tenté de considérer qu'il y a d'abord ma pensée exprimée par des propositions, par mes jugements, et qu'ensuite je me prononce sur leur vérité en les affirmant. Il y aurait ainsi d'une part et d'abord ma pensée et il y aurait d'autre part et ensuite la pensée qu'elle est valable et vaut comme vraie. A la pensée que j'exprime viendrait s'ajouter la pensée que c'est vrai. La valeur de vérité viendrait d'un jugement que l'on porte sur le discours que l'on tient pour lui reconnaître sa valeur de discours vrai. En un mot, pour qu'il y ait du vrai, il faudrait énoncer un jugement et juger ce jugement ; juger de sa valeur pour le juger vrai. Que l'on songe, par exemple, à ce que les Stoïciens voulaient dire lorsqu'ils soutenaient que la vérité relève de l'« assentiment » *(sunkatathesis)* donné aux représentations. Pour qu'il y ait vérité, il faut qu'il y ait un assentiment et non la pure et simple constatation d'un fait, c'est-à-dire qu'il faut une adhésion, un consentement qui fait que non seulement nous avons une représentation mais que sa conformité avec la réalité fait l'objet d'une conviction. Le fou qui dit « il fait jour », même si c'est en plein jour, ne dit pas vrai. Ce qu'il dit ne vaut pas comme vrai, même si ce qu'il dit est exact, parce qu'il le dit sans raison et qu'il n'exprime que ce qui lui passe par la tête sans chercher à dire que c'est vrai, sans vouloir dire vrai, sans lui donner la force d'une conviction. Un autre exemple est l'attitude de Descartes pour qui il n'y a du vrai que là où je suis capable de m'assurer que c'est vrai (*Principes*, I, §30). Cette certitude vient de l'évidence (c'est la première règle de la méthode) ou de ce qui se ramène à des évidences (ce sont les trois autres règles), c'est-à-dire qu'il n'y a de vérité que dans la mesure où je suis un sujet capable d'apercevoir clairement et distinctement ce qui se présente à mon esprit et de le reconnaître comme vrai, de le juger vrai et de le tenir pour vrai. La vérité exige le consentement de celui qui juge *« pourvu que nous ne donnions notre consentement qu'à ce que nous connaissons clairement et distinctement devoir être compris en ce dont nous jugeons »* (*Principes*, I, §33).

Considérer la vérité de propositions supposerait donc un sujet capable de considérer qu'elles sont vraies, de les estimer et de les juger vraies. Ce sujet capable de juger que c'est vrai serait en quelque sorte placé au-dessus des propositions. Il serait le sujet qui juge de ce qu'il pense, qui s'installe dans la position d'un juge qui fait comparaître devant lui ses pensées et à qui il appartient de juger vrai ou faux ce qu'il pense. La logique moderne ne permet plus d'envisager la vérité de cette façon. Considérer, par exemple, qu'une proposition a la valeur V ce n'est pas juger ou reconnaître cette proposition comme vraie. En disant qu'elle a la valeur V, je n'ai pas jugé de sa validité et il n'y a là aucun jugement de valeur, j'ai seulement considéré qu'il y a un cas « vrai », et cela correspond à une « valeur » de la proposition non au sens de ce que sont philosophiquement des valeurs qui font la validité de quelque chose, mais au sens où l'on parle de « valeurs » de variables dans les mathématiques. Par exemple encore, considérer une proposition fausse, ce n'est pas considérer qu'elle est fausse ; ce n'est pas dire qu'on la juge fausse, qu'elle n'a pas de validité et qu'en somme elle n'a pas de valeur logique. Elle en a une au contraire : la valeur F, et, à ce titre, elle fait bien partie des propositions qui ont une valeur logique. Il est clair que si le vrai et le faux, les « valeurs de vérité », sont des « objets » du même genre que le 0 et le 1 du mathématicien, on ne peut plus y voir des valeurs au nom desquelles on juge du vrai et du faux. Les valeurs de vérité dans la logique ne relèvent pas de jugements de valeur. Il faudra admettre qu'en logique, il n'y a pas de jugements ; il n'y a que des calculs.

4. Les vérités logiques

Dans un calcul logique, on ne se contente pas d'établir des connexions entre des propositions à l'aide de « et », de « ou », de « si … alors », etc., on forme aussi à l'aide de ces connecteurs des expressions qui semblent constituer des vérités purement logiques. Ces vérités se présentent sous trois aspects. Il y a d'abord des expressions, comme $(p \Rightarrow p)$, par exemple, qui semblent constituer par elles-mêmes une vérité et énoncer une vérité. $(p \Rightarrow p)$ énonce une vérité de l'implication : celle-ci est « réflexive » ; n'importe quelle proposition s'implique elle-même. Il y a ensuite des expressions dont il nous semble qu'il est vrai qu'on peut toujours les transformer en une autre, par exemple un $(p \wedge q)$ peut toujours s'écrire $(q \wedge p)$: cette propriété s'appelle la commutativité de la conjonction et semble constituer une vérité logique. Enfin il y a des expressions dont on est sûr qu'elles sont liées entre elles de sorte que si l'une est vraie, l'autre l'est aussi (mais pas réciproquement). Ce sont des expressions qui sont telles que la vérité de l'une entraîne la vérité de l'autre. Par exemple, la vérité de ($p \Rightarrow q$) et de ($q \Rightarrow r$) entraîne la vérité de ($p \Rightarrow r$). Ceci s'appelle la transitivité de l'implication. De même la vérité de ($p \wedge q$) entraîne logiquement celle de ($p \vee q$) : si la première est vraie, la seconde ne peut pas être fausse. Dans ces trois cas, le logicien reconnaît qu'il a affaire à une <u>déduction</u> entre des formules : de p, je peux déduire p ; de ($p \wedge q$), je peux déduire ($q \wedge p$) et réciproquement ; de ($p \wedge q$), je peux déduire ($p \vee q$) mais pas réciproquement.

Pourquoi considérons-nous qu'il y a là des vérités purement logiques ? Dans chacun de ces cas nous invoquons la même raison. Devant, par exemple, la proposition « s'il pleut alors il pleut », nous avons le sentiment que cette proposition est « nécessairement » vraie. A quoi tient cette nécessité ? On répond traditionnellement que cette proposition est vraie « en vertu de la forme » de l'implication, ($A \Rightarrow A$) où A est une proposition quelconque, élémentaire ou composée. Qu'est-ce que l'on entend par là sinon que l'implication a une propriété, la réflexivité, indépendante des choses sur lesquelles elle porte et qui appartient à sa nature logique, de sorte qu'elle constitue une vérité logique. De la même façon, on a le sentiment qu'il est nécessairement vrai qu'une conjonction est commutative et que l'on peut toujours transformer un ($p \wedge q$) en un ($q \wedge p$) et vice versa. On voit là une vérité au sujet de la conjonction, vérité qui exprime une propriété de la conjonction et qui vaut pour toute expression de cette forme, autrement dit qui tient à la nature logique de la conjonction. De la même façon enfin, on a le sentiment qu'un lien nécessaire, d'une nécessité logique, rattache une expression à une autre et permet de passer de l'une à l'autre ; de tirer une expression d'autres expressions. Par exemple, de ($p \wedge q$) on peut tirer ($p \vee q$) comme si ($p \vee q$) était lié à ($p \wedge q$) en raison d'une nécessité logique. A quoi attribuons-nous ce pouvoir de lier nécessairement des propositions entre elles ? Là encore, à la forme. Par exemple, dans le cas de ($p \Rightarrow q$), ($q \Rightarrow r$) donc ($p \Rightarrow r$), nous attribuons ce lien nécessaire à la propriété de l'implication d'être transitive, propriété qui semble appartenir à sa nature logique et qui s'impose à l'esprit comme une vérité logique. Pour résumer, nous dirons qu'une <u>vérité purement logique</u> exprimerait une <u>nécessité logique</u> qui s'impose à l'esprit. Cette nécessité tiendrait à sa <u>forme logique</u>, c'est-à-dire qu'elle appartiendrait à la <u>nature des connexions logiques</u> (les connecteurs). Les connecteurs auraient des propriétés logiques qui font qu'une expression se rattache nécessairement à une autre, se transforme nécessairement en une autre, en entraîne nécessairement une autre. On a alors le sentiment qu'il y a des <u>lois logiques</u> auxquelles obéissent les connexions logiques, lois qui commandent des <u>déductions</u>. Ce sont ces lois (commutativité, transitivité, etc.) qui s'imposeraient à l'esprit comme des vérités logiques.

Il y a pourtant quelque chose que l'on ne comprend pas très bien : d'où viennent ces vérités logiques ? Certes, on a dit qu'elles viennent de la forme logique, mais qu'est-ce qui fait qu'il y a dans une <u>forme</u> logique une <u>nécessité</u> logique qui donne ce sentiment qu'une forme logique exprime une vérité logique, absolue, incontournable, qui s'impose à l'esprit ? Cette question, Russell la pose en 1919 dans l'*Introduction à la philosophie mathématique*. A ces formes logiques qui représentent des vérités logiquement nécessaires, il donne le nom de « tautologie », et il avoue : *« pour le moment, je ne sais guère comment définir la tautologie »*. Il se contente de prendre acte que ces tautologies représentent des lois logiques qui commandent la façon dont les formules logiques s'ordonnent entre elles, se rattachent les unes aux autres, se tirent et se déduisent les unes des autres. Dans ces conditions, il faudra admettre que la logique obéit à des lois qu'on pourrait énoncer comme des lois primitives – des axiomes – qui commandent un système logique où les formules logiques s'organisent et se déduisent. Spontanément on verra dans ces lois des vérités premières qui gouvernent la logique et qui s'imposent à l'esprit et au calcul, des vérités qui semblent constituer des principes logiques qui se situent au-dessus du calcul et qui règnent sur lui, bref des vérités logiques sur la logique. Il est clair qu'en envisageant de telles vérités on prétend adopter un point de vue qui domine les expressions du calcul, qui les surplombe et d'où l'on étudie et fixe leurs propriétés en considérant les lois qui président à leur enchaînement. Bref, on prétend adopter un point de vue logique sur la logique. Il y aurait donc une logique de la logique ? Est-ce la même ? En est-ce une autre ? D'où vient-elle ? On voit bien qu'à ces questions on n'aura pas d'autre réponse que celle-ci : ces lois, ces principes logiques, viennent de la pensée pure. Ils sont les principes de la pensée, les lois de la pensée qui dicte ses lois à la logique. Et l'on sera fortement tenté de rattacher ces lois à un principe « ultime » de la pensée, le principe de contradiction.

Or en 1919, au moment même où Russell se posait la question du rapport entre forme logique et vérité logique, la réponse venait d'être donnée et montrait du même coup d'où viennent les vérités logiques. Dans le *Tractatus logico-philosophicus*, Wittgenstein montrait que ces lois logiques, ces vérités logiques, ne viennent que du calcul lui-même et que c'est une illusion philosophique qui nous fait croire qu'il s'agit de lois de la pensée. Les lois logiques où l'on voit des vérités logiques ne sont pas les principes logiques de la logique. Ce ne sont que des expressions logiques particulières que l'on trouve dans le calcul et qui sont engendrées par le calcul : une tautologie est simplement une formule qui a toujours la valeur V dans le calcul quelles que soient les valeurs V ou F des propositions qui la composent. Par exemple, la table de l'implication montre qu'une implication n'a la valeur F que dans un seul cas : lorsque le premier terme a la valeur V et que le second a la valeur F. Il n'y a qu'à appliquer mécaniquement cette clause à la formule $(p \Rightarrow p)$ pour constater qu'il est impossible que cette formule prenne la valeur F. Si $(p \Rightarrow p)$ a ainsi toujours la valeur V, et s'il en va de même pour toute formule de même forme, c'est-à-dire pour toute expression qu'on mettrait à la place de p, cela ne signifie pas qu'il y a derrière ou au-dessus de l'implication, dans un arrière-monde de la pensée pure, un mystérieux principe qui en aurait décidé ainsi et qui en aurait fait une vérité logique au sujet de l'implication. Si l'implication est réflexive, cela tient tout simplement aux résultats que l'on obtient en calculant avec des V et des F sur toute expression de cette forme. Il en va de même pour les déductions. Pourquoi dit-on que $(p \vee q)$ se déduit de $(p \wedge q)$? Nullement parce qu'il y aurait un mystérieux lien de nécessité logique entre ces deux formules et qui ferait que la vérité de $(p \wedge q)$ entraîne la vérité de $(p \vee q)$. A l'inverse, c'est parce que les V et les F se distribuent d'une façon telle qu'on n'obtient jamais une valeur F pour $(p \vee q)$ quand on a une valeur V pour $(p \wedge q)$, que l'on a alors le sentiment qu'il y a un lien nécessaire entre les deux. Ce n'est pas une hypothétique nécessité logique qui explique que la vérité d'une expression entraîne celle d'une autre ; c'est le calcul qui nous montre qu'une expression ne peut avoir la valeur F quand une autre a la valeur V.

Les lois logiques qui nous semblent relever de principes logiques supérieurs parce qu'on y voit des vérités logiques ne sont rien d'autre que des expressions qui sont dans le calcul lui-même et qui sont construites par le calcul. Ce sont des résultats du calcul : des tautologies. Aucune de ces tautologies n'est privilégiée par rapport aux autres ;

aucune n'est première ou n'est une vérité de base, un fondement logique pour les autres et pour les formules : *« Parmi elles, il n'y a ni axiomes, ni propositions dérivées »* (*Tractatus*, 6. 127). Les vérités logiques (commutativité de la conjonction, de la disjonction, réflexivité et transitivité de l'implication, etc.) ne sont pas au-dessus du calcul ; elles sont dans le calcul. D'où cette célèbre déclaration de Wittgenstein : *« Les lois de la logique ne doivent pas être subordonnées elles-mêmes à des lois logiques »* (*Tractatus*, 6. 123).

Conclusion

Il faut renoncer à l'interprétation traditionnelle de la notion de vérité logique. On ne saurait parler à propos des vérités logiques de « lois de la pensée ». On ne trouve pas dans la logique des « lois de la pensée » mais tout simplement des tautologies du calcul. Le principe de contradiction, par exemple, n'est pas un principe qui aurait valeur de principe logique de la logique, ce n'est qu'une tautologie dans le calcul : $\overline{p \wedge \overline{p}}$ [lire : non (p et non p)], au même titre que les autres et qui joue le même rôle.

Sans doute on peut continuer à dire que les tautologies correspondent à des propriétés formelles des connecteurs, mais non parce qu'elles exprimeraient une vérité logique qui s'imposerait comme une exigence logique à la logique. Elles ne font que montrer ce qui se passe dans le calcul et les résultats qu'on y obtient. Par exemple, que l'expression $\overline{p \wedge \overline{p}}$ soit une tautologie montre que p et $\overline{p}$ ne peuvent avoir ensemble la même valeur de vérité. Cela se voit et se constate sur le résultat que l'on obtient en dressant la table de vérité de cette formule. Si l'on voulait aller plus loin et si l'on voulait voir dans cette constatation l'expression d'une vérité logique, on aurait l'illusion d'avoir affaire à une vérité au sujet des propositions alors qu'il ne s'agit que d'un résultat obtenu dans le calcul et par le calcul. Si l'on veut voir dans des résultats de ce genre des vérités qui s'imposent à la logique et qui la gouvernent, on est inévitablement amené à les considérer comme des principes de la logique, et, par là, on en vient à imaginer qu'il s'agit de lois de la pensée. On voudra y voir en effet des vérités logiques qui semblent être des vérités sur la logique, placées au-dessus de la logique. On les fera dépendre d'un sujet dominant la logique, un sujet qui vient les considérer et les juger, et à qui il appartient de reconnaître leur vérité. Il y aurait ainsi, installé en position de juge, muni de ses principes, un sujet qui, en quelque sorte, fait comparaître devant lui les expressions logiques et ses propres pensées pour s'assurer qu'elles sont en accord avec ces principes.

Au contraire, il faut dire que la vérité des formules logiques ne relève pas d'un point de vue supérieur et extérieur d'où l'on prétendrait reconnaître des formules comme vraies ou fausses et juger de leur valeur. Il n'y a pas en logique des vérités qui surplombent la logique, des vérités que je devrais reconnaître et au nom desquelles je jugerais de la validité logique de ce qui est logiquement vrai. En logique, il n'y a pas de sujet ; il n'y a que le calcul.

LE PROBLÈME DE FLAVIUS JOSÈPHE

Jean LEFORT

***Résumé** : Le problème de Flavius Josèphe est, à l'ordre 2, un problème classique de divertissement mathématique. Après avoir rappelé sa résolution dans ce cas, on s'intéresse à l'ordre 3 et l'on propose une formule explicite qui repose sur une certaine constante dont le calcul approché ne peut se faire qu'à partir d'une application brutale de l'algorithme de base. Ceci pose incidemment le problème de ce qu'est une solution effective.*

On connaît plus Flavius Josèphe comme historien juif du premier siècle de notre ère que comme l'initiateur d'un problème de mathématiques. Il serait né à Jérusalem en 37 ou 38. Il passera sa vie à plaider la cause des juifs auprès des instances romaines. C'est ainsi qu'en 64, il alla à Rome défendre des juifs déportés par ordre du procurateur Félix. Il gagna son procès grâce, dit-on, à l'appui que lui prêta Poppée, la femme de Néron. De retour en Judée, il prêcha d'abord la modération à ses coreligionnaires impatients de secouer le joug romain mais finit par participer aux révoltes et fut assiégé avec ses compatriotes dans la forteresse de Jotapata en 67. C'est là qu'apparut, dit-on, le problème qui porte son nom.

La citadelle ayant été prise, il se retrouva bloqué dans une cave avec 40 autres compagnons ; les extrémistes du groupe persuadèrent l'ensemble de se tuer pour ne pas tomber aux mains des Romains. Ne partageant pas ce point de vue mais n'osant s'opposer au groupe, Josèphe proposa que l'on se mette en cercle et que chaque troisième personne soit tuée, la dernière devant se suicider. Se plaçant lors en 31^{e} position, il se retrouva l'un des deux seuls survivants, car bien entendu, il ne se suicida pas et se rendit au Romains avec l'avant dernière personne qui s'était rangée à son avis et qui s'était astucieusement placée au seizième rang.[1]

Prisonnier, il fut conduit devant Vespasien. Il put sauver sa vie en lui prophétisant l'empire au nom de Dieu. Quand Vespasien devint empereur, il rendit la liberté à Josèphe qui en signe de reconnaissance ajouta à son nom le patronyme de son bienfaiteur, Flavius. C'est dans les rangs de l'armée romaine qu'il assista au siège de Jérusalem en 70, servant de traducteur et de parlementaire auprès des assiégés. Une fois la ville prise, il se fixa à Rome écrivant l'essentiel de ses ouvrages historiques. Il meurt aux alentours de l'an 100.

1. Problème de Flavius Josèphe

On considère un ensemble de n personnes placées sur un cercle. Les personnes énoncent dans l'ordre les nombres de 1 à k puis reprennent à 1 et ainsi de suite. Toutes les personnes qui énoncent k sortent du cercle. On veut connaître le rang de la i-ième personne qui sort du cercle et en particulier le rang de la dernière.

[1] Dans son ouvrage relatant les faits, Flavius Josèphe se contente de parler du sort qui l'a heureusement épargné ; on trouvera dans l'annexe à la fin de cet article le passage correspondant. C'est à partir de la Renaissance que ce problème reçu le nom qu'il porte aujourd'hui, mais on le rencontre dans de très nombreuses cultures.

On remarquera qu'il s'agit d'une version généralisée et surtout édulcorée du problème puisque les personnes qui sortent du cercle ne sont pas tuées !

Exemple : Supposons $n = 10$ et $k = 2$. Les personnes sortent du cercle dans l'ordre suivant : 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5.

Nous noterons $J(n,k,i)$ le rang de la i-ième personne qui sort du cercle. Ainsi nous avons $J(10, 2, 6) = 3$.

2. Quelques résultats généraux

Nous avons peu de résultats généraux sur la fonction J. Par exemple, sauf pour $n =$ 2 ou 3 il n'est pas connu de formule explicite donnant directement la valeur de $J(n,k,i)$. Il existe par contre de nombreux résultats et en particulier on connaît des formules de récurrence permettant de calculer plus ou moins rapidement cette quantité.

Dans toute la suite, l'écriture a [mod(m)] signifie a modulo m et on choisit pour a l'une des valeurs de 1 à m .

Théorème 1 — $J(n , k ,1) = k$ [mod(n)].

Résultat évident si on numérote les personnes de 1 à n .

Théorème 2 — $J(n , k , i) = J(n-1 , k , i-1) + k$ [mod(n)] pour $2 \leq i \leq n$.

Quand, dans le problème avec n personnes, la première personne est sortie, il reste évidemment $n-1$ personnes. Tout se passe comme si on commençait à compter avec la personne de rang $k+1$, c'est-à-dire k unité plus loin (modulo n) que la première et que les rangs fussent alors augmentés d'une unité par rapport au problème avec $n-1$ personnes. **cqfd.**

Algorithme 1 : Ces résultats nous donnent les moyens de construire un premier algorithme permettant de calculer les valeurs de $J(n , k , i)$. Il s'agit d'une procédure récursive.

```
J:=proc(n,k,i::integer)
if i=1     then     if modp(k,n)=0
                    then n
                    else modp(k,n)
                    fi;
           else     if modp(J(n-1,k,i-1)+k,n)=0
                    then n
                    else modp(J(n-1,k,i-1)+k,n)
                    fi;
fi;
end:
```

3. Étude du cas $k = 2$

Nous pouvons construire un tableau à double entrée donnant la valeur de $J(n , 2 , i)$ où n est en ligne et i en colonne.

Nous remarquons que tous les numéros pairs sortent d'abord, dans l'ordre, puis les impairs d'abord de 4 en 4, puis de 8 en 8, puis de 16 en 16, etc. Si on veut bien y réfléchir quelques instants, ceci est logique.

1	1																													
2	2	1																												
3	2	1	3																											
4	2	4	3	1																										
5	2	4	1	5	3																									
6	2	4	6	3	1	5																								
7	2	4	6	1	5	3	7																							
8	2	4	6	8	3	7	5	1																						
9	2	4	6	8	1	5	9	7	3																					
10	2	4	6	8	10	3	7	1	9	5																				
11	2	4	6	8	10	1	5	9	3	11	7																			
12	2	4	6	8	10	12	3	7	11	5	1	9																		
13	2	4	6	8	10	12	1	5	9	13	7	3	11																	
14	2	4	6	8	10	12	14	3	7	11	1	9	5	13																
15	2	4	6	8	10	12	14	1	5	9	13	3	11	7	15															
16	2	4	6	8	10	12	14	16	3	7	11	15	5	13	9	1														
17	2	4	6	8	10	12	14	16	1	5	9	13	17	7	15	11	3													
18	2	4	6	8	10	12	14	16	18	3	7	11	15	1	9	17	13	5												
19	2	4	6	8	10	12	14	16	18	1	5	9	13	17	3	11	19	15	7											
20	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	3	7	11	15	19	5	13	1	17	9										
21	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	1	5	9	13	17	21	7	15	3	19	11									
22	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	3	7	11	15	19	1	9	17	5	21	13								
23	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	1	5	9	13	17	21	3	11	19	7	23	15							
24	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	3	7	11	15	19	23	5	13	21	9	1	17						
25	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	1	5	9	13	17	21	25	7	15	23	11	3	19					
26	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	3	7	11	15	19	23	1	9	17	25	13	5	21				
27	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	1	5	9	13	17	21	25	3	11	19	27	15	7	23			
28	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	3	7	11	15	19	23	27	5	13	21	1	17	9	25		
29	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	1	5	9	13	17	21	25	29	7	15	23	3	19	11	27	
30	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	3	7	11	15	19	23	27	1	9	17	25	5	21	13	29
n / i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**

Quand tous les pairs sont sortis il ne reste que les impairs que l'on va prendre de deux en deux donc d'un numéro au suivant il y aura un écart de 4. Il restera ensuite des impairs de 4 en 4 que l'on prendra de 2 en 2, il y aura donc un écart de 8 entre deux éléments successifs et ainsi de suite.

Nous avons fait ressortir ces progressions arithmétiques de raison 2 puis 4 puis 8… à l'aide de hachures différentes. Il est évident que seules les petites valeurs des raisons de ces progressions sont lisibles sur le tableau ci-dessus en raison de la faiblesse des valeurs de n. Cette remarque sur les suites arithmétiques va nous permettre de trouver une formule explicite donnant $J(n, 2, i)$ en fonction de i.

Théorème 3 — Pour $i \geq \dfrac{n+1}{2}$ on a par convention $J(n, 2, 0) = 0$ et

– Si n est pair $J(n, 2, i) = 2 \times J\left(\dfrac{n}{2}, 2, i - \dfrac{n}{2}\right) - 1$

– Si n est impair $J(n, 2, i) = 2 \times J\left(\frac{n-1}{2}, 2, i - \frac{n+1}{2}\right) + 1$

• Si n est pair, on aura le tableau suivant donnant $J(n, 2, i)$ en fonction de i :

i	1	2	3	…	$n/2$	$n/2+1$	$n/2+2$	…
$J(n, 2, i)$	2	4	6	…	n	3	7	…

Donc pour $i > n/2$ tout se passe comme si on travaillait avec $n/2$ éléments numérotés $2p - 1$ pour p variant de 1 à $n/2$. D'où le résultat $J(n, 2, i) = 2 \times J\left(\frac{n}{2}, 2, i - \frac{n}{2}\right) - 1$.

• Si n est impair, on aura le tableau suivant donnant $J(n, 2, i)$ en fonction de i :

i	1	2	3	…	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	…
$J(n, 2, i)$	2	4	6	…	$n-1$	1	5	…

Donc pour $i > \frac{n+1}{2}$ tout se passe comme si on travaillait avec $\frac{n-1}{2}$ éléments numérotés $2p + 1$ pour p variant de 1 à $\frac{n-1}{2}$ d'où la formule $J(n, 2, i) = 2 \times J\left(\frac{n-1}{2}, 2, i - \frac{n+1}{2}\right) + 1$ qui est aussi valable pour $i = \frac{n+1}{2}$ si on fait $p = 0$ et qu'on utilise la convention $J(n, 2, 0) = 0$. **cqfd.**

Théorème 4 — On a la formule explicite : $J(n, 2, n) = 2\, n + 1 - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$, la notation $\lfloor\ \rfloor$ indiquant qu'il faut prendre l'entier inférieur ou égal à l'élément entre crochets.

<u>Remarque</u> : Cette formule est une formule de bon sens quand on observe le tableau donné au début du paragraphe.

<u>Démonstration</u> : Soit $n = 2^p$, alors après le premier tour, il reste 2^{p-1} personnes dont les numéros sont de la forme $2q + 1$. Après le deuxième tour on élimine à nouveau la moitié des personnes, il en reste donc 2^{p-2} dont les numéros sont de la forme $4q + 1$. Et ainsi de suite puisqu'à chaque étape la personne de rang 1 ne sera pas éliminée. On a donc $J(2^p, 2, 2^p) = 1$.

Soit $n = 2^p + m$ avec $m < 2^p$ pour que n soit inférieur à la puissance suivante de 2, alors d'après le théorème 2, $J(n, 2, n) = 1 + 2m$ puisque $m < 2^p \Leftrightarrow 1+2m \leq 2^p + m = n$.

Il est clair que $p = \lfloor \log_2 n \rfloor$ et par suite $m = n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$, ce qui conduit à $J(n, 2, n) = 1 + 2\left(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}\right)$, **cqfd.**

Nous allons maintenant nous intéresser au cas général. Il est clair que si $i \leq n/2$ alors $J(n, 2, i) = 2i$. Nous allons donc nous limiter aux cas $i > n/2$. Or nous avons vu dans la démonstration du théorème 3 que pour n impair égal à $2m+1$ nous avions

$J(2m+1\ ,2\ ,m+1) = 1$. A partir de cette valeur et en utilisant le théorème 2 nous allons pouvoir trouver toutes les valeurs de i et de n donnant $J(n\ ,2\ ,i) = 1$.

Théorème 5 — Soit $n = 2^q\,(2m+1)$, alors $J(n\ ,2\ ,(2^{q+1}-1)m + 2^q\,) = 1$.

Il est clair que tout nombre n se met de façon unique sous la forme $2^q\,(2m+1)$. Or si $J(n\ ,2\ ,i) = 1$, d'après le théorème 2 $J(n+u\ ,2\ ,i+u) = 1 + 2u$ tant que $1+2u \le n+u$ c'est-à-dire tant que $u \le n-1$. Et par suite si $u = n$ on retrouve la valeur 1. On ne retrouve donc 1 qu'en doublant la valeur de n et en augmentant i de n. En partant de $J(2m+1\ ,2\ ,m+1) = 1$ nous obtenons successivement $J(2(2m+1)\ ,2\ ,3m+2) = 1$; $J(4(2m+1)\ ,2\ ,7m+4) = 1$ et en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique il vient le résultat annoncé. **cqfd.**

Il est alors possible de donner une procédure permettant de calculer $J(n\ ,2\ ,i)$ pour tout n et pour tout i . L'idée est d'aller à reculons, toujours en utilisant le théorème 2, de façon à trouver une valeur de u telle que $J(n-u\ ,2\ ,i-u) = 1$. On suppose toujours $i > n/2$.

Théorème 6 — On a la formule explicite : $J(n, 2, i) = 2^{q+2}i - (2^{q+1} - 1)(2n + 1)$ où $q = \left\lfloor \log_2 \dfrac{n}{2(n-i) + 1} \right\rfloor$, la notation $\lfloor\ \rfloor$ indiquant qu'il faut prendre l'entier inférieur ou égal au nombre situé entre les crochets.

Nous commençons par chercher u tel que $J(n-u\ ,2\ i-u) = 1$. Le plus simple est de prendre u tel que :

$\begin{cases} n - u = 2\,m + 1 \\ i - u = m + 1 \end{cases}$ ce qui conduit à $u = 2i - n - 1$. Par suite $J(2n-2i+1\ ,2\ ,n-i+1) = 1$.

A partir de là nous allons doubler la quantité $2n-2i+1$ aussi souvent que possible de manière à ne pas dépasser n . C'est-à-dire que nous cherchons q tel que $2^q\,(2n-2i+1) \le n < 2^{q+1}\,(2n-2i+1)$, soit $q = \left\lfloor \log_2 \dfrac{n}{2(n-i) + 1} \right\rfloor$. Alors $J(2^q\,(2n-2i+1)\ ,2\ ,(2^{q+1}-1)(n-i) + 2^q\,) = 1$. Pour obtenir n il faut augmenter $2^q\,(2n-2i+1)$ de la quantité $n - 2^q\,(2n-2i+1)$ ce qui conduit à $J(n\ ,2\ ,i) = 1 + 2\,(n - 2^q\,(2n-2i+1))$ qui se met facilement sous la forme indiquée.

Remarquons que si $i \le n/2$ alors $q = -1$ et la formule donnée se réduit à $2i$ qui est bien le résultat attendu. De même si $i = n$ on retrouve le théorème 4. **cqfd.**

Algorithme 2 : Le programme Maple suivant permet de calculer $J(n\ ,2\ ,i)$ pour toutes les valeurs de n et de i :

```
J2:=proc(n,i::integer)
    local q ;
    q:=floor(log[2](n/(2*(n-i)+1)));
    2^(q+2)*i(2^(q+1)-1)*(2*n+1);
end :
```

4. Étude du cas $k = 3$

L'essentiel de ce paragraphe est tiré de Halbeisen et Hungerbühler (voir bibliographie en fin d'article)

De la même façon que pour $k = 2$, nous pouvons construire un tableau à double entrée donnant la valeur de $J(n\,,3\,,i)$ où n est en ligne et i en colonne.

1	1																													
2	1	2																												
3	3	1	2																											
4	3	2	4	1																										
5	3	1	5	2	4																									
6	3	6	4	2	5	1																								
7	3	6	2	7	5	1	4																							
8	3	6	1	5	2	8	4	7																						
9	3	6	9	4	8	5	2	7	1																					
10	3	6	9	2	7	1	8	5	10	4																				
11	3	6	9	1	5	10	4	11	8	2	7																			
12	3	6	9	12	4	8	1	7	2	11	5	10																		
13	3	6	9	12	2	7	11	4	10	5	1	8	13																	
14	3	6	9	12	1	5	10	14	7	13	8	4	11	2																
15	3	6	9	12	15	4	8	13	2	10	1	11	7	14	5															
16	3	6	9	12	15	2	7	11	16	5	13	4	14	10	1	8														
17	3	6	9	12	15	1	5	10	14	2	8	16	7	17	13	4	11													
18	3	6	9	12	15	18	4	8	13	17	5	11	1	10	2	16	7	14												
19	3	6	9	12	15	18	2	7	11	16	1	8	14	4	13	5	19	10	17											
20	3	6	9	12	15	18	1	5	10	14	19	4	11	17	7	16	8	2	13	20										
21	3	6	9	12	15	18	21	4	8	13	17	1	7	14	20	10	19	11	5	16	2									
22	3	6	9	12	15	18	21	2	7	11	16	20	4	10	17	1	13	22	14	8	19	5								
23	3	6	9	12	15	18	21	1	5	10	14	19	23	7	13	20	4	16	2	17	11	22	8							
24	3	6	9	12	15	18	21	24	4	8	13	17	22	2	10	16	23	7	19	5	20	14	1	11						
25	3	6	9	12	15	18	21	24	2	7	11	16	20	25	5	13	19	1	10	22	8	23	17	4	14					
26	3	6	9	12	15	18	21	24	1	5	10	14	19	23	2	8	16	22	4	13	25	11	26	20	7	17				
27	3	6	9	12	15	18	21	24	27	4	8	13	17	22	26	5	11	19	25	7	16	1	14	2	23	10	20			
28	3	6	9	12	15	18	21	24	27	2	7	11	16	20	25	1	8	14	22	28	10	19	4	17	5	26	13	23		
29	3	6	9	12	15	18	21	24	27	1	5	10	14	19	23	28	4	11	17	25	2	13	22	7	20	8	29	16	26	
30	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	4	8	13	17	22	26	1	7	14	20	28	5	16	25	10	23	11	2	19	29
n/i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**

Nous avons mis en italique les multiples de 3 qui sortent d'abord puis ensuite en italique gras les valeurs de $J(n\,,3\,,i)$ égales à 1 ou 2 car nous verrons qu'elles jouent un rôle fondamental dans le calcul de $J(n\,,3\,,i)$. Remarquons que dans le cas $k = 2$, la démonstration s'est faite en recherchant d'abord les valeurs de n pour lesquelles nous avions $J(n\,,2\,,n) = 1$. D'une façon générale il faut s'intéresser aux valeurs strictement inférieures à k comme nous le verrons dans le paragraphe qui donne quelques résultats pour $k > 3$. Nous ne nous intéressons dans un premier temps qu'à la valeur de $J(n, 3, n)$ c'est-à-dire au rang de la dernière personne qui sort du cercle. Pour simplifier, nous noterons $J(n, 3, n) = D_n$. Le théorème 2 nous permet de construire la suite suivante :

n	**1**	**2**	**3**	**4**	5	**6**	7	8	**9**	10	11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20
J	**1**	**2**	**2**	**1**	4	**1**	4	7	**1**	4	7	10	13	**2**	5	8	11	14	17	20
n	**21**	22	23	24	25	26	27	28	29	30	**31**	32	33	34	35	36	37	38	39	40
J	**2**	5	8	11	14	17	20	23	26	29	**1**	4	7	10	13	16	19	22	25	28

Les valeurs de n pour lesquelles D_n vaut 1 ou 2 sont notées en gras. Nous appellerons ces valeurs, *valeurs de recommencement*, puisque entre deux telles valeurs successives on passe d'une valeur de D_n à la suivante en ajoutant 3. Notons c_p la p-ième valeur de recommencement. Nous avons $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$, $c_5 = 6$, $c_6 = 9$, etc. et soit x_p la valeur de D_n correspondante, c'est-à-dire que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 2$, etc.

Pour $c_p \leq n < c_{p+1}$, nous avons $D_n = 3(n - c_p) + x_p$.

De plus, si $D_n = n$ ou $n-1$ alors la valeur suivante de n est une valeur de recommencement, c'est-à-dire que $c_{p+1} = n+1$, puisque l'ajout de 3 donne à ce moment là un nombre dépassant $n+1$, nombre qu'il faut donc réduire modulo $n+1$. Pour être plus précis, si $D_n = n$ alors $x_{p+1} = 2$ et si $D_n = n-1$ alors $x_{p+1} = 1$. Finalement la première valeur de n telle que $n \leq 3(n - c_p) + x_p$ donne la valeur de c_{p+1} . D'où $c_{p+1} = \left\lceil \frac{3c_p - x_p + 1}{2} \right\rceil$ où les demi crochets supérieurs signifient que l'on prend la valeur entière supérieure ou égale à la quantité qu'ils enferment. Si $\frac{3c_p - x_p + 1}{2}$ est entier, cela signifie que $D_n = n-1$ et par suite $x_{p+1} = 1$, sinon $x_{p+1} = 2$. On peut donc écrire $x_{p+1} = 2\, c_{p+1} - (3c_p - x_p + 1) + 1$ ce qu'on peut mettre sous la forme $x_{p+1} - x_p = 2\, c_{p+1} - 3\, c_p$.

Un procédé télescopique immédiat conduit à $2c_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} c_i + x_{p+1} + 1$ et comme x_{p+1} vaut 1 ou 2, nous pouvons écrire

$$c_{p+1} = \left\lceil \frac{2 + \sum_{i=1}^{p} c_i}{2} \right\rceil.$$

La formule $x_{p+1} - x_p = 2\, c_{p+1} - 3\, c_p$ montre que la suite c_p est voisine d'une suite géométrique de raison 3/2 puisque en posant $\delta_p = x_{p+1} - x_p = 0$ ou ± 1 :

$$\frac{2\, c_{p+1}}{2\, c_p} = \frac{3c_p + \delta_p}{2\, c_p} = \frac{3}{2} + \frac{\delta_p}{2\, c_p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} \frac{3}{2}$$

Il est donc naturel de comparer c_p et $\left(\frac{3}{2}\right)^p$. Le tableau suivant donne quelques renseignements :

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_p	1	2	3	4	6	9	14	21	31	47
$c_p\left(\frac{2}{3}\right)^p$	0,666 7	0,888 9	0,888 9	0,790 1	0,790 1	0,790 1	0,819 4	0,819 4	0,806 4	0,815 1

Théorème 7 — La quantité $c_p\left(\frac{2}{3}\right)^p$ admet une limite α quand p tend vers l'infini.

Pour démontrer ce résultat nous allons reprendre la formule précédente en l'écrivant : $\frac{2}{3}c_{p+1} = c_p + \frac{1}{3}\delta_p$. Par suite $\left(\frac{2}{3}\right)^2 c_{p+1} = \frac{2}{3}c_p + \frac{1}{3}\frac{2}{3}\delta_p = c_{p-1} + \frac{1}{3}\left(\delta_{p-1} + \frac{2}{3}\delta_p\right)$ puis par récurrence descendante

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} c_{p+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j$. Il est bien évident que le Σ du deuxième membre admet une limite quand p tend vers l'infini puisqu'on obtient une série numérique dont le terme général est, en valeur absolue, inférieur à celui d'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Par conséquent le premier membre admet une limite α . **cqfd.**

Nous allons étudier le reste de la série qui définie α pour trouver une formule explicite pour c_p et calculer une valeur approchée de α . On peut majorer le reste de la série par $\frac{1}{3}\sum_{j=p+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}$ ce qui montre que $\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} c_{p+1}$ est une valeur approchée de α avec q chiffres après la virgule si l'on prend p voisin de 5,679 q $\left(5{,}679 \approx \frac{\ln 10}{\ln 1{,}5}\right)$. On trouve ainsi $\alpha \approx 0{,}811\ 135$. Nous allons affiner le calcul du reste ce qui nous permettra de démontrer le théorème suivant.

Théorème 8 — Quelque soit p , la p-ième valeur de recommencement c_p est l'entier $\left\lceil \left(\frac{3}{2}\right)^p \alpha - \frac{1}{2} \right\rceil$. De plus $x_p = 2$ si $\left(\frac{3}{2}\right)^p \alpha - c_p < 0$ et $x_p = 1$ si $\left(\frac{3}{2}\right)^p \alpha - c_p > 0$.

Remarquons d'abord que $\delta_j = x_{j+1} - x_j$, ce qui prouve que les valeurs non nulles de δ_j sont alternativement 1 et −1. La série $\sum_{j=p+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j$ est donc une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0. On peut alors lui appliquer le théorème général sur les séries alternées et écrire que $\left|\sum_{j=p+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j\right|$ $\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}$. Par conséquent il vient l'inégalité : $\alpha - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} c_{p+1} \leq \alpha + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}$ soit $\left(\frac{3}{2}\right)^{p+1}\alpha - \frac{1}{3} \leq c_{p+1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{p+1}\alpha + \frac{1}{3}$.

Ceci détermine de façon unique la valeur de c_{p+1} qui est l'entier le plus proche de $\left(\frac{3}{2}\right)^{p+1}\alpha$. D'où l'expression donnée dans le théorème.

Considérons maintenant la quantité $\left(\frac{3}{2}\right)^p \alpha - c_p$. Nous pouvons écrire que : $\alpha = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j$. Mais d'autre part $\left(\frac{2}{3}\right)^p c_p = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j$ donc $\left(\frac{3}{2}\right)^p \alpha - c_p = \left(\frac{3}{2}\right)^p \sum_{j=p}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j = \sum_{j=p}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-p}\delta_j$. Nous retrouvons la série alternée précédente et nous sommes assurés que le résultat est du signe du premier terme non nul c'est-à-dire du signe du premier δ_j non nul à partir de $j = p$. Or si $x_p = 1$ le premier δ_j non nul vaudra 1 et si $x_p = 2$ le premier δ_j non nul vaudra -1. **cqfd.**

Remarquons toutefois que ce théorème n'est pas aussi puissant qu'il en a l'air car les calculs précédents ont montré que l'on détermine α en utilisant une valeur de recommencement suffisamment élevée et les valeurs de recommencements sont déterminées à partir de α. Il faudrait donc avoir un moyen de calculer α directement. Une valeur plus précise de α est 0,811 135 251 442 383 657 978 475 491 449 6…

Algorithme 3 : Le programme Maple suivant permet de calculer $J(n, 3, n)$ pour $n < 10^{30}$ (et sans doute un peu au-delà) en raison de la valeur approchée utilisée pour α.

```
> D3:=proc(n::integer)
    local p, alpha, c, x;
    alpha:=0.8111352514423836579784754914496;
    p:=floor(ln((n+1/2)/alpha)/ln(3/2));
    c:=floor(alpha*(3/2)^p+1/2);
    x:=3/2+1/2*sign(c-(3/2)^p*alpha);
  x+3*(n-c);
  end;
```

Tous les résultats que nous venons de démontrer restent valables presque mot pour mot pour calculer $J(n, 3, i)$. L'idée est d'étudier la quantité $J(n, 3, n-l)$ pour un l donné. Nous venons de voir le cas $l = 0$. La seule difficulté (pas très grande) est de calculer la première valeur de recommencement.

Nous appellerons « valeur de recommencement d'ordre l » la valeur de n pour laquelle $J(n, 3, n-l)$ vaut 1 ou 2. Ce qui a été fait précédemment concernait donc les valeurs de recommencement d'ordre 0. Nous noterons $c_m(l)$ la m-ième valeur de recommencement d'ordre l.

Théorème 9 — La première valeur de recommencement d'ordre l est donnée par $c_1(l) = \left\lceil \frac{3l+1}{2} \right\rceil$. De plus, si on pose $x_m(l) = J(c_m(l), 3, c_m(l) - l)$, on a $x_1(l) = 1$ si l est impair ou nul et 2 si l est pair non nul.

Pour calculer la première valeur de recommencement d'ordre l que nous noterons c pour simplifier l'écriture, nous remarquons que $J(c, 3, c-l)$ est la première valeur strictement inférieure à 3 que l'on trouve à partir de $J(l+1, 3, 1) = 3$ si $l+1 \geq 3$ et 1 sinon.

Par suite si $l = 0$ ou 1, $l+1 = 1$ ou 2 est la première valeur de recommencement et on vérifie que la formule donnée dans le théorème est juste.

Si $l \geq 2$ alors $J(c, 3, c-l) = J(l+1, 3, 1) + 3(c - l - 1)$ $[\mathrm{mod}(c)] = 3(c-l)$ $[\mathrm{mod}(c)]$. On cherche donc la plus petite valeur de c telle que $3(c - l) > c$, c'est-à-dire $2c > 3l$. On retrouve bien la formule annoncée.

Remarquons que si l est pair, on pose $l = 2l'$ et alors $c = 3l' + 1$; si l est impair, on pose $l = 2l' + 1$ et alors $c = 3l' + 2$.

Notons $x = J(c, 3, c-l)$. On a $x = 3(c - l)$ $[\mathrm{mod}(c)]$. Nous distinguons alors deux cas suivant la parité de l. Si l est impair, $x = 3(3l' + 2 - 2l' - 1)$ $[\mathrm{mod}(3l' +$

2)] = 1 . Si l est pair non nul, $x = 3(3l' + 1 - 2l')$ [mod$(3l' + 1)$] = 1 . Le cas $l = 0$ se traite immédiatement à part. **cqfd.**

Il est alors clair que les calculs et les résultats sont analogues à ceux trouvés aux théorèmes 7 et 8. Seulement le nombre α dépend de l. On a $\alpha(0) \approx 0{,}811\,135$; $\alpha(1) \approx 1{,}408\,639$; $\alpha(2) \approx 2{,}621\,392$; etc. D'une façon générale $\alpha(l)$ est compris entre l et l+1. En effet le même calcul que celui fait au théorème 7 prouve que :

$$\alpha(l) = \frac{2}{3}\, c_1(l) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j(l) \qquad \text{avec } \delta_j(l) = x_{j+1}(l) - x_j(l)$$

Nous avons vu que si l est pair et vaut $2l'$ alors $c_1(l) = 3l' + 1$ et $x_1(l) = 2$ et par suite le premier terme non nul de la série est négatif et inférieur en valeur absolue à 2/9. D'où la double inégalité :

$$\frac{2}{3}(3l' + 1) - \frac{2}{9} \leq \alpha(l) \leq \frac{2}{3}(3l' + 1) \text{ soit encore}$$

$$l < l + \frac{4}{9} = 2l' + \frac{4}{9} \leq \alpha(l) \leq 2l' + \frac{2}{3} = l + \frac{2}{3} < l + 1$$

De la même façon, si l est impair et vaut $2l'$+1 alors $c_1(l) = 3l'$+2 et $x_1(l) = 1$ et par suite le premier terme non nul de la série est positif et inférieur à 2/9. D'où la double inégalité :

$$\frac{2}{3}(3l' + 2) \leq \alpha(l) \leq \frac{2}{3}(3l' + 2) + \frac{2}{9} \text{ soit}$$

$$l < l + \frac{1}{3} = 2l' + \frac{4}{3} \leq \alpha(l) \leq 2l' + \frac{14}{9} = l + \frac{5}{9} < l + 1$$

En pratique la démonstration précédente donne un encadrement d'amplitude 2/9 que l soit impair ou pair non nul.

Algorithme 4 : Pour calculer J(n , 3 , i) on utilise un algorithme calqué sur celui vu dans le cas J(n , 3 , n) et noté D3 précédemment. On calcule successivement :

```
l := n - i ;
p := floor(ln((n+1/2)/alpha(l))/ln(3/2));
c := floor(alpha(l)*(3/2)^p+1/2);
x := 3/2 + (1/2)*sign(c-alpha(l)*(3/2)^p);
J := x + 3*(n - c);
```

Mais faute de connaître une valeur précise de $\alpha(l)$ cet algorithme n'est pas effectif. En effet si le calcul de p peut être fait avec les seules inégalités que nous avons vues sur $\alpha(l)$ au moins dès que l est assez grand ($l > 2$) il n'en est plus de même pour le calcul de c ou de x. Nous sommes donc obligé de revenir à un algorithme itératif, toutefois les résultats précédents permettent d'accélérer les procédures.

Algorithme 5 : Voici deux procédures itératives Maple utilisant la théorie précédente. La première procédure permet de calculer la m-ième valeur de recommencement ainsi que la valeur de J correspondante (notée x) ; la deuxième donne le calcul de J(n , 3 , i) en utilisant la première procédure.

```
CLX:=proc(m,l::integer)
  local c, xp, x, i;
```

```
    c:=ceil((3*l+1)/2);
   if l=0 or l<>2*floor(l/2) then x:=1 else x:=2 fi;
    for i from 2 to m do
    xp:=x;
    if c<>2*floor(c/2) then x:=3-x fi;
    c:=(3*c+x-xp)/2;
   od;
 [c,x];
 end:
 J3:=proc(n,i::integer)
   local l,m,x;
   if i<n/3 then 3*i else
       l:=n-i; m:=1;
       while op(1,CLX(m,l))<n do m:=m+1 od;
       m:=m-1;
       x:=op(2,CLX(m,l));
       x+3*(n-CL(m,l));
   fi;
 end:
```

Peut-on conclure ?

On trouvera dans l'article de L. Halbeisen, N. Hungerbühler cité en bibliographie l'étude pour $k \geq 4$ et un certain nombre de résultats complémentaires. Mais je voudrais surtout insister sur la différence essentielle que nous venons de reconnaître entre les valeurs $k = 2$ et $k = 3$.

Pour $k = 2$, nous avons un algorithme effectif pour le calcul de $J(n, 2, i)$ qui repose sur le calcul précis d'un logarithme. Encore faut-il admettre que l'on connaît une méthode efficace de calcul desdits logarithmes. C'est le cas mais ce n'est pas évident. On peut se poser la question de la précision nécessaire du calcul pour que le résultat final sur J soit exact.

Pour $k = 3$, le problème est bien différent. Dans leur article Halbeisen et Hungerbühler commencent par un paragraphe sur la définition de ce qu'est une formule effective. Ce genre de définition est purement de circonstance et s'apparente aux définitions que l'on trouve régulièrement dans l'histoire des mathématiques comme la limitation à la règle et au compas pour les constructions géométriques, la résolution par radicaux, la définition des fonctions dites usuelles, etc. Si nous connaissions les valeurs de $\alpha(l)$ nous aurions un algorithme rapide de calcul. Seulement, pour l'instant nous ne savons calculer $\alpha(l)$ qu'à partir des valeurs de $c_m(l)$ ou de la suite $x_m(l)$ pour m assez grand. Il y a là un paradoxe qui ne saura être levé que lorsqu'on aura une méthode de calcul indépendante pour $\alpha(l)$.

Annexe

Voici l'extrait dans lequel Josèphe raconte comment il se tira d'affaire lors du siège de Jotapata : *Josèphe, qui dans cet embarras ne perdit pas sa présence d'esprit, met alors sa confiance dans la protection de Dieu :* « *Puisque, dit-il, nous sommes résolus à mourir, remettons-nous en au sort* *pour décider l'ordre où nous devons nous entretuer : le premier que le hasard désignera tombera sous les coups du suivant et ainsi le sort marquera successivement les victimes et les meurtriers, nous dispensant d'attenter à notre vie de nos propres mains. Car il serait injuste qu'après que les autres se seraient tués il y en eût quelqu'un qui pût changer de sentiments et vouloir survivre.» Ces paroles inspirent confiance, et après avoir décidé ses compagnons, il tire au sort avec eux. Chaque homme désigné présente sans hésitation la gorge à son voisin dans la pensée que le tour du chef viendra bientôt aussi, car ils préféraient à la vie l'idée de partager avec lui la mort. A la fin, soit que le hasard, soit que la Providence divine l'ait ainsi voulu, Josèphe resta seul avec un autre : alors également peu soucieux de soumettre sa vie au verdict du sort ou, s'il restait le dernier, de souiller sa main du sang d'un compatriote, il sut persuader à cet homme d'accepter lui aussi la vie sauve sous la foi du serment.*

Œuvres complètes de Flavius Josèphe, Guerre des juifs, Livre III, chapitre VIII, traduction de René Harmand, 1911. D'après la version numérique de la BNF.

On trouve mentionné le problème chez Abraham ben Ezra (1092-1167) qui raconte que : *Après avoir convenu que chaque troisième personne, en faisant le tour du cercle de façon continue, serait désignée pour être tuée, lui et un compagnon prirent les places 16 et 31 du cercle de 41 personnes. Ceux-ci restèrent les derniers et furent ainsi sauvés.*

Un problème analogue est proposé par Tartaglia (1500 - 1557) sous la forme :

Un bateau qui transporte 15 chrétiens et 15 Turcs est assailli par une tempête. Afin d'alléger le bateau, le capitaine propose de jeter 15 personnes à la mer. Pour choisir les victimes, les passagers sont placés de façon circulaire et, à partir d'un certain point, chaque neuvième homme doit être sacrifié et cela toujours de neuf en neuf. De quelle façon les 15 chrétiens doivent-ils être disposés pour être sauvés ?

Les chrétiens doivent occuper les places de rangs 1, 2, 3, 4, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28 et 29.

On remarquera que ce problème se retrouve dans les cultures musulmanes mais dans l'autre sens, bien entendu. Les variantes sont très nombreuses.

Dans les livres de récréations mathématiques, le problème de Josèphe prend parfois le nom de problème de Caligula ou encore celui de problème d'Yseult.

Bibliographie

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. Volume 9, fascicule 2 (1997). L. Halbeisen, N. Hungerbühler : *The Josephus Problem.*

On peut obtenir la version électronique de cet article sur http://almira.math.u-bordeaux.fr/jtnb. On y trouve les formules explicites permettant de calculer les nombres de Josèphe J(n,2,i) et J(n,3,i) et fournissant une majoration et une minoration explicites de J(n, k, i) qui ne diffèrent que d'au plus $2k-2$ (dans le cas $k = 4$ ces bornes sont même meilleures). À partir de ces estimations les auteurs proposent aussi un nouvel algorithme pour le calcul de ces nombres.

On trouve des renseignements historiques sur le site canadien : http://www.recreomath.qc.ca/index.htm.

On rappelle que l'on peut trouver des informations sur une suite arbitraire d'entiers dont on donne les premiers termes sur le site : http://www.research.att.com/cgi-bin/access.cgi/as/njas/sequences/eishisfr.cgi.

Fiabilité et multimoteurs

Jean Moreau de Saint-Martin [1]

La recherche d'une plus grande fiabilité est une des raisons de mettre plusieurs moteurs sur des appareils tels que des avions, mais cela a pu donner lieu à quelques controverses. Plus il y a de moteurs, plus cela donne de ressources, mais aussi plus cela donne d'occasions de pannes ! Et on peut se trouver devant des résultats un peu paradoxaux, ou du moins inattendus, quand on calcule les probabilités de non-défaillance.

Certes, le bon sens ne perd pas ses droits : de deux avions capables de voler sur un seul moteur, le trimoteur serait plus sûr que le bimoteur ; mais celui-ci est plus sûr qu'un trimoteur qui ne peut pas voler avec deux moteurs en panne (on suppose ici, comme dans toute la suite, que le risque de panne au cours d'un vol est le même pour tous les moteurs). Quant à comparer deux avions (bimoteur et quadrimoteur) pouvant voler avec la moitié de leurs moteurs en panne, le résultat dépend du risque de panne d'un moteur ; s'il est faible (cas normal), le quadrimoteur est plus sûr que le bimoteur ; mais si ce risque dépassait 1/3 (on n'en est heureusement plus là, avec les progrès faits depuis Clément Ader !), l'avantage reviendrait au bimoteur.

Pour étendre les résultats ci-dessus, Edith **Kosmanek** a demandé (dans la revue **Quadrature** de mars-avril 1990) s'il y avait une formule générale pour comparer la fiabilité de deux types d'avion. La réponse est oui, comme on va le voir.

L'avion A va être décrit par la donnée de son nombre m de moteurs, et du nombre minimal f de moteurs dont il a besoin pour pouvoir se maintenir en vol. Les données analogues pour l'avion B sont n et g. La probabilité de panne d'un moteur est p, et je noterai $1 - p = q$.

Le nombre de moteurs de A qui tombent en panne au cours d'un vol est une variable aléatoire X_A suivant la loi binômiale de paramètres m et p.

$$\text{proba}(X_A = k) = C_m^k p^k q^{m-k},$$

d'où la probabilité globale de non-défaillance pour A :

$$F_A = \text{proba}(0 \le X_A \le m - f) = \sum_{k=f}^{k=m} C_m^k p^{m-k} q^k,$$

et de même pour B :

$$F_B = \sum_{i=g}^{i=n} C_n^i p^{n-i} q^i.$$

[1] ancien élève de l'Ecole Polytechnique ; *jean.moreau-de-saint-martin@polytechnique.org*

Il s'agit de comparer F_A et F_B.

Si $m = n$, la comparaison est immédiate, l'une des sommes se réduisant aux termes communs. La différence $F_A - F_B$ a le signe de $(g - f) = (m - f) - (n - g)$; le type le plus sûr est le moins "exigeant" (en nombre minimal f ou g de moteurs en état), ou encore le plus "tolérant" (en nombre maximal $m - f$ ou $n - g$ de moteurs en panne).

Mais nous cherchons une formule générale ; supposons par exemple $m > n$. Quelques transformations vont permettre d'identifier de nouveau des termes communs dans les deux expressions F_A et F_B.

L'expression F_A est un polynôme homogène de degré m en p et q. Donnons à F_B la même propriété en le multipliant par $(p+q)^{m-n}$ qui vaut 1.

$$(p+q)^{m-n} = \sum_{j=0}^{j=m-n} C_{m-n}^{j} p^{m-n-j} q^{j},$$

d'où F_B comme polynôme de degré m :

$$F_B = \sum_{k=g}^{k=m} p^{m-k} q^{k} \sum_{i=g}^{i=n} C_n^i C_{m-n}^{k-i},$$

en admettant que $C_a^b = 0$ si b est extérieur à $[0, a]$.

Mettons maintenant les termes de F_A sous la même forme, grâce à l'identité bien connue

$$C_m^k = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i C_{m-n}^{k-i}$$

(considérer par exemple le développement de $(1+x)^m = (1+x)^n (1+x)^{m-n}$).

$$F_A = \sum_{k=f}^{k=m} p^{m-k} q^{k} \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i C_{m-n}^{k-i}.$$

Si $g \geq f$, tous les termes (i, k) de F_B se trouvent dans F_A. Le type A est le plus sûr, c'est aussi le plus "tolérant" au sens donné plus haut à cette expression, car $n - g < m - f$; en même temps il n'est pas plus "exigeant" car $f \leq g$.

Si $f > g$, les termes communs (i, k) correspondent à $f \leq k \leq m$ et $g \leq i \leq n$, et on obtient pour la différence

$$F_A - F_B = \sum_{k=f}^{k=m} \sum_{i=0}^{i=g-1} p^{m-k} q^{k} C_n^i C_{m-n}^{k-i} - \sum_{k=g}^{k=f-1} \sum_{i=g}^{i=n} p^{m-k} q^{k} C_n^i C_{m-n}^{k-i}.$$

En outre, dans la première somme, les termes non nuls vérifient $k \leq m - n + i \leq m - n + g - 1$ ce qui permet d'écrire, avec $k = g + j$,

$$\frac{F_A - F_B}{p^{m-g} q^{g}} = \sum_{j=f-g}^{m-n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{j} \sum_{i=0}^{g-1} C_n^i C_{m-n}^{g-i+j} - \sum_{j=0}^{f-g-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{j} \sum_{i=g}^{n} C_n^i C_{m-n}^{g-i+j}.$$

Si $m-n > f-g > 0$, le second membre est un polynôme en q/p de degré $m-n-1 (> 0)$, avec un seul changement de signe dans la suite de ses coefficients. Conformément à un théorème de **Descartes**, ce polynôme a exactement une racine positive u (fonction implicite de m, n, f, g).
Il est positif (donc A est le plus sûr) si $q/p > u$, ou $0 < p < 1/(1+u)$.
Il est négatif (donc B est le plus sûr) si $q/p < u$, ou $1/(1+u) < p < 1$.
Un des types (ici A) est alors à la fois le plus "tolérant" et le plus "exigeant".
C'est le seul cas où le résultat dépend de p. En effet, les termes négatifs disparaissent si $m-n \geq 0 \geq f-g$ (A n'est pas moins "tolérant" ni plus "exigeant") ; de même, les termes positifs disparaissent si $f-g \geq m-n \geq 0$ (A n'est pas moins "exigeant" ni plus "tolérant").

On peut résumer le résultat de la discussion par les règles suivantes :
— le plus "tolérant" n'est pas le moins sûr, sauf s'il est aussi le plus "exigeant" et si p dépasse la valeur-limite $1/(1+u)$;
— à "tolérance" égale, le moins "exigeant" est le plus sûr.
Autre formulation équivalente :
— le moins "exigeant" n'est pas le moins sûr, sauf s'il est aussi le moins "tolérant" et si p est inférieur à la valeur-limite $1/(1+u)$;
— à "exigence" égale, le plus "tolérant" est le plus sûr.

La valeur-limite peut être explicitée quand $m-n = 2(f-g) = \pm 2$, cas où le polynôme se réduit au premier degré : $p_{\text{limite}} = (f+g-1)/(m+n)$.

BIOGRAPHIE DE G. W. ZINBIEL

Jean-Louis LODAY

Guillaume William ZINBIEL est né à Zoebersdorf (Alsace) le 29 février 1900. Né d'une mère d'origine gagaouze et d'un père inconnu, il fut élevé dans la famille du boulanger, chez qui travaillait sa mère. À l'âge de 5 ans, perché sur un tabouret derrière le comptoir, il rendait déjà la monnaie. Brillant à l'école il écrivait aussi bien en caractères latins, qu'en gothique ou en grec (alphabet utilisé pour écrire le gagaouze jusqu'en 1958, date à laquelle lui fut substitué le cyrillique). Le maire l'encouragea à poursuivre ses études. Ses sujets de prédilection étaient la musique, la linguistique et les mathématiques.

En musique il préférait Mozart, surtout les premières oeuvres, quand celui-ci signait encore Trazom. Il joua dans l'orchestre symphonique régional (au triangle).

En linguistique, il s'intéressa surtout au dialecte local et ses rapports avec le bas-breton. Il montra que l'isoglosse de la pomme de terre séparant « grumbere » au nord, de « aertpfel » au sud, coïncide avec la route romaine reliant Strasbourg à Saverne. Il précisa le lieu dans les Vosges du point triple de la myrtille, là où se rejoignent les isoglosses séparant « myrtille », « brimbelle » et « heidelbeere ». Il prétendait que l'Alsace n'est pas une variété orientable, car l'intérieur se trouve à l'extérieur.

En mathématique sa référence principale était Leibniz. Dans ses cahiers de notes remplis de dessins et de formules, on trouva, entre autre, la définition et l'étude préliminaire des célèbres algèbres*[1] qui firent sa réputation. Étant suffisamment fortuné (il avait hérité du boulanger) pour ne pas avoir à travailler, il n'éprouva jamais le besoin de prendre une position académique, et donc ne se soucia pas de publier. Son lieu de promenade préféré était le Jesselberg, qu'il arpentait de long en large tout en faisant des maths (d'où probablement son surnom local « d'messchugge », à moins que celui-ci ne soit dû à sa manie d'inventer des canulars). De cette colline il pouvait admirer, d'un côté, la ligne verte des Vosges (celle qui est bleue vue de l'intérieur (« glaz » en breton)), et de l'autre, la plaine d'Alsace. C'est sans doute de ce panorama, c'est à dire la vue des labours, que lui vint la facheuse habitude d'écrire en boustrophédon.

On ne sait que peu de choses de sa vie privée, si ce n'est qu'il était joueur, préférait les dames aux échecs et admirait Oulipo. Ayant dépensé toute sa fortune il ne laissa à ses héritiers que ses cahiers de notes (ceux-ci étant en fait d'une valeur inestimable). Mais, effrayés à la fois par les dessins ambigus (dont des triangles de toutes sortes), et les formules abracadabrantes (qui le firent prendre pour un alchimiste, voire un suppôt du diable) ils enfermèrent ses écrits dans un coffret.

[1] Les algèbres de Zinbiel, qui sont duales, au sens de la dualité de Koszul des opérades, des algèbres de Leibniz, ont une opération binaire $x \,.\, y$ satisfaisant à la relation :

$$(x \,.\, y) \,.\, z = x \,.\, (y \,.\, z) + x \,.\, (z \,.\, y)$$

Puis ils déposèrent celui-ci dans le caveau qui se trouve face à l'horloge astronomique de la Cathédrale de Strasbourg (sous le parking). La plaque de bronze qui le scelle porte la mention « à n'ouvrir que le 23 septembre 3970 ». L'exemple type d'une telle opération est le « demi-battage ».

Jean-Louis LODAY
Institut de Recherche Mathématique Avancée
C.N.R.S. – Université Louis Pasteur – Strasbourg
loday@math.u-strasbg.fr

COMPLÉMENTS SUR L'ARTICLE « UNE PAGE DE CALCUL DE LA CONDAMINE » DE JEAN LEFORT PARU DANS LE NUMÉRO 108 DE L'OUVERT

La page de calcul présentée dans L'OUVERT est extraite du dossier La Condamine déposé aux archives de l' Académie des Sciences. D'autre part, Jean LEFORT a utilisé l'ouvrage de LEVALLOIS « Mesurer la Terre » paru en 1989 aux Presses Nationales de l'École des Ponts et Chaussées.

Jean-Louis LODAY conseille la lecture d'un excellent roman de Florence TRYSTRAM « Le procès des étoiles » (Payot/Seghers). Ce livre présente le voyage au Pérou de savants français autour de LA CONDAMINE.

Enfin, page 16, c'est bien de GIBBS, Mathématicien du XIX^e siècle qui travailla sur un projet de machine à calculer, qu'il s'agit et non de BRIGGS mathématicien anglais du XVII^e et inventeur des logarithmes.

RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 2004

31e ÉDITION

CLASSE DE TERMINALE
10 mars 2004

Exercice 1 — *Le triangle millésimé*

On forme un tableau triangulaire d'entiers de la manière suivante :

$$
\begin{array}{l}
0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ \ldots\ \ \ldots\ldots\ \ \ldots\ \ 2001\ \ \ 2002\ \ \ 2003\ \ \ 2004 \\
\quad 1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ \ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ \ 4003\ \ 4005\ \ 4007 \\
\qquad 4\ \ 8\ \ 12\ \ \ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ \ 8008\ \ \ 8012 \\
\qquad\quad 12\ \ 20\ \ \ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ \ 16020 \\
\qquad\qquad \ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots
\end{array}
$$

Chaque entier du tableau est la somme des deux entiers de la ligne précédente qui « l'encadrent ».

Montrer que les entiers situés au sommet de ce triangle sont tous les trois divisibles par 2004

Exercice 2 — *L'aire minimale*

Deux demi-droites du plan sont perpendiculaires et de même origine O.

On considère un point M dans le quart de plan qu'elles définissent et une droite D passant par M. La droite D coupe les demi-droites en deux points A et B. Comment choisir la droite D pour que l'aire du triangle OAB soit minimale ?

Exercice 3 — *La sphère et les cubes*

Au moyen de 216 petits cubes de 1 cm de côté, on construit un grand cube de 6 cm de côté. On note O son centre.

Combien la sphère de centre O et de diamètre 6 cm contient-elle petits cubes entiers ?

CORRIGÉS DES SUJETS DE TERMINALES

Exercice 1 — *Le triangle millésimé*

Par récurrence, on démontre les deux résultats suivants :

- La ligne de numéro n est une progression arithmétique de raison 2^{n-1}.
- Le premier terme de la ligne numéro n est égal à $(n-1)2^{n-2}$.

En effet la somme des deux termes de rang k et (k+1) d'une progression arithmétique de premier terme a et de raison r, soit a + kr et a + (k+1)r, est égale à 2a + r + k2r (publicité gratuite pour une marque de détachant). On obtient de la sorte le terme de rang k d'une progression de premier terme 2a + r et de raison 2r. La première ligne étant la suite des entiers naturels, progression arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, les résultats énoncés s'en déduisent facilement.

Le premier terme de la ligne de numéro 2005 (attention au coup des arbres et des intervalles !) est par conséquent 2004×2^{2003}. C'est bien un multiple de 2004.

Exercice 2 — *L'aire minimale*

Solution analytique

On définit un repère orthonormé $\left(O;\frac{1}{\|\overrightarrow{OA}\|}\overrightarrow{OA},\frac{1}{\|\overrightarrow{OB}\|}\overrightarrow{OB}\right)$ d'origine le point O, origine commune des deux demi-droites perpendiculaires.

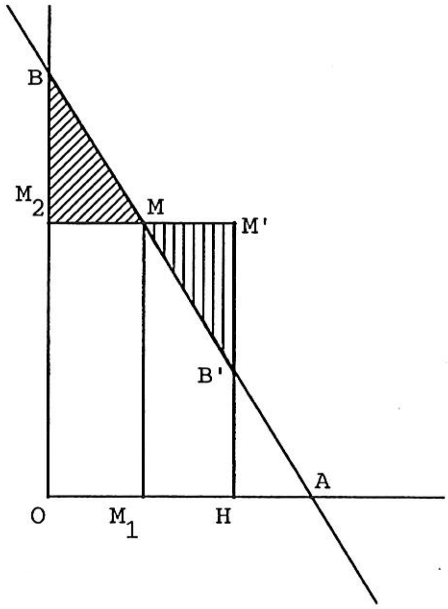
Le point M de coordonnées $(a;b)$ est donné, soient $A\,(p;0)$ et $B\,(0;q)$. On suppose A et B distincts, donc p et q non nuls.

- La droite (AB) passant par M, on détermine q en fonction de p :
$$q=\frac{bp}{p-a}.$$
- On en déduit l'aire du triangle OAB rectangle en O en fonction de p, soit $f(p)$:
$$f(p)=\frac{bp^2}{2(p-a)}$$
- En étudiant les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\infty[$, on en déduit la valeur p_0 de p qui minimise la fonction f. On trouve $p_0=2a$ (puis $q=2b$).

Solution géométrique

On définit les points suivants :

- M_1 et M_2 sont les projetés orthogonaux du point M respectivement sur $[OA)$ et sur $[OB)$.
- B' et M' sont les symétriques respectifs de B et M_2 par rapport au point M.
- H est le projeté orthogonal de M' sur $[OA)$.



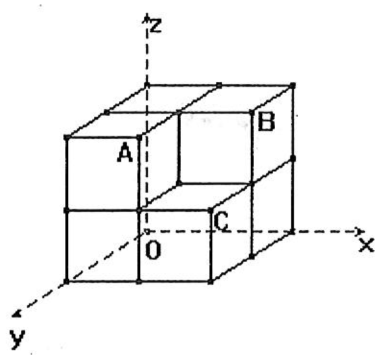
Les triangles MM_2B et $MM'B'$ sont isométriques, ils ont donc la même aire.
Le rectangle $OM_2M'H$ a alors la même aire que le trapèze $OBB'H$.

$$\begin{aligned} aire\,(OAB) &= aire\,(OBB'H) + aire\,(B'HA) \\ &= aire\,(OM_2M'H) + aire\,(B'HA) \\ &= \underbrace{2 \times OM_1 \times OM_2}_{\text{indépendant de la droite } (AB)} + aire\,(B'HA) \end{aligned}$$

L'aire du triangle OAB sera minimale lorsque l'aire du triangle $B'HA$ sera nulle, pour cela il faut placer le point A en H.

Exercice 3 — *La sphère et les cubes*

La sphère de centre O et de rayon 3 est le lieu des points dont la distance à O est égale à 3. Considérons un repère orthonormé de centre O, d'axes parallèles aux arêtes des cubes. On peut restreindre la recherche des cubes entièrement intérieurs à cette sphère à l'octant des points de coordonnées x, y et z toutes positives. Or dans cet octant, trois sommets A, B, C de cubes ont deux coordonnées égales à 2 et une égale à 1. Comme $2^2 + 2^2 + 1^2 = 9 = 3^2$, ces trois sommets sont à une distance de O exactement égale à 3. La figure fait ainsi apparaître 7 cubes intérieurs à la sphère dans l'octant considéré. En multipliant par 8, on obtient le nombre total de cubes intérieurs à la sphère, à savoir 56.



RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 2004

31^{e} ÉDITION

CLASSE DE PREMIÈRE
31 mars 2004

Exercice 1 — *Comment régler l'addition*

On dispose de pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et 50 centimes ainsi que de 1 € en aussi grande quantité que l'on veut.

On suppose qu'il est possible de payer une somme de m centimes avec n pièces.

Est-ce que l'on peut payer une somme de n euros avec m pièces ?

Exercice 2 — *Construction d'un pentagone*

On dispose de 5 points I, J, K, L, M du plan, sommets d'un pentagone convexe, c'est-à-dire tels que 3 sommets parmi les 5 ne sont jamais alignés et tout segment reliant 2 sommets parmi les 5 est contenu dans le pentagone.

Proposer une construction d'un pentagone ABCDE tel que les points I, J, K, L et M soient respectivement les milieux des côtés [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA].

Exercice 3 — *La somme constante*

On numérote les cases d'un échiquier carré de 31 lignes et 31 colonnes par les entiers de 1 à 31^2 en décrivant successivement les 31 lignes de gauche à droite.

On choisit 31 cases en en prenant une seule sur chaque ligne et sur chaque colonne.

Montrer que la somme de leurs numéros est indépendante du choix des cases.

CORRIGÉS DES SUJETS DE PREMIÈRES

Exercice 1 — *Comment régler l'addition*

Considérons une somme quelconque en centimes réalisée par un certain nombre de pièces. Par exemple avec 3 pièces de 5 centimes, 4 de 2 centimes et 2 de 1 centime, soit un total de 9 pièces, on obtient 25 centimes. Remplaçons à présent ces pièces selon le mode d'emploi suivant :

- à chaque pièce de 5 centimes j'associe 5 pièces de 20 centimes,
- à chaque pièce de 2 centimes j'associe 2 pièces de 50 centimes,
- à chaque pièce de 1 centime j'associe 1 pièce de 1 euro (soit 100 centimes).

On a ainsi substitué à chaque pièce de départ la valeur de 1 euro réalisée par un nombre de pièces égal à la valeur en centimes de cette pièce de départ. Dans le cas présent, on aboutira donc à 9 euros, réalisés par un nombre de pièces égal à la somme de départ en centimes, c'est à dire 25.

La procédure est la même pour le cas général : il suffit de compléter l'indication de substitution pour les pièces qui ne figuraient pas dans l'exemple étudié :

- à chaque pièce de 1 euro (100 centimes) j'associe 100 pièces de 1 centime,
- à chaque pièce de 50 centimes j'associe 50 pièces de 2 centimes,
- à chaque pièce de 20 centimes j'associe 20 pièces de 5 centimes,
- à chaque pièce de 10 centimes j'associe 10 pièces de 10 centimes.

La raison de la réussite de l'opération est qu'à chaque valeur de pièce en centimes, il correspond une valeur dont le produit avec la première est égal à 100.

Complément : La réalisation de n euros par m pièces est en général loin d'être unique. La valeur d'une pièce étant d'au moins 1 centime et d'au plus 1 euro, soit 100 centimes, la somme m en centimes que l'on paye avec n pièces est au moins égale à n et au plus égale à $100n$. Or on peut voir que, hormis l'impossibilité de payer une somme de 1 euro avec 3 pièces, il est toujours possible de payer une somme de n euros avec un nombre m de pièces compris entre n et $100n$.

Une idée peut être de partir du plus petit nombre possible de pièces, c'est à dire n pièces de 1 euro chacune, et d'opérer des substitutions pour augmenter ce nombre de pièces. Pour augmenter de 1 le nombre de pièces, on dispose de plusieurs possibilités de base, consistant à remplacer 1 pièce par 2, ou 2 par 3, ou 3 par 4 :

- 1 pièce de 1 euro (ou : 100 centimes) par 2 de 50 centimes,
- 1 pièce de 20 centimes par 2 de 10 centimes,
- 1 pièce de 10 centimes par 2 de 5 centimes,
- 1 pièce de 2 centimes par 2 de 1 centime,
- 1 pièce de 50 centimes et 1 de 10 centimes par 3 de 20 centimes,
- 1 pièce de 5 centimes et 1 de 1 centime par 3 de 2 centimes,
- 3 pièces de 50 centimes par 1 de 1 euro, 2 de 20 centimes et 1 de 10 centimes,
- 3 pièces de 5 centimes par 1 de 10 centimes, 2 de 2 centimes et 1 de 1 centime.

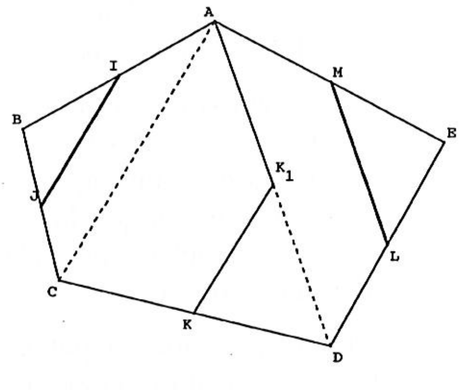
L'éventail des possibilités ainsi offertes permet de résoudre le problème provenant du fait qu'une conversion directe d'une pièce de 50 centimes ou d'une pièce de 5 centimes ne conduit pas à augmenter le nombre de pièces en jeu de 1, mais de 2 (ou plus). Seul le cas où la variété des pièces à disposition serait quasiment inexistante constitue alors un obstacle. Pour un nombre entier d'euros, il n'y a impossibilité que si on est devant un nombre de pièces de 50 centimes inférieur à 3 et s'il n'y pas de pièce de 10 centimes en accompagnement : c'est la situation où l'on est seulement en présence de deux pièces de 50 centimes, que l'on ne pas remplacer par trois pièces totalisant la même valeur.

Comme on ne peut pas payer 3 centimes avec une seule pièce, la seule objection possible disparaît. L'étude générale montre que la convaincante démonstration précédemment faite n'avait finalement qu'un intérêt réduit. En mathématiques et pas seulement dans les arts, pourrait-il parfois y avoir une gratuité de l'esthétique ?

Supplément : Pourrait-on poser le même problème aux Etats-Unis, où le dollar est subdivisé différemment de l'euro (il y a par exemple une pièce de 25 cents = *one quarter*) ?

Exercice 2 — *Construction d'un pentagone*

Partons d'un pentagone ABCDE dont les milieux des côtés seraient les points I, J, K, L et M, et essayons, à partir des milieux de construire l'un des sommets du pentagone.



Déterminons les trois triangles ABC, ACD et ADE.

- Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux des côtés $[BA]$ et $[BC]$, d'après le théorème des milieux, on peut affirmer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.
- Soit K_1 l'image du point K par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donc
$$\overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

- Dans le triangle DAC, K est le milieu de [DC], et $\overrightarrow{KK_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. D'après la réciproque du théorème des milieux, K_1 est le milieu de [DA]. On a la relation $\overrightarrow{K_1A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$
- Dans le triangle EDA, L et M sont les milieux de [ED] et [EA], d'après le théorème des milieux , on a l'égalité : $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

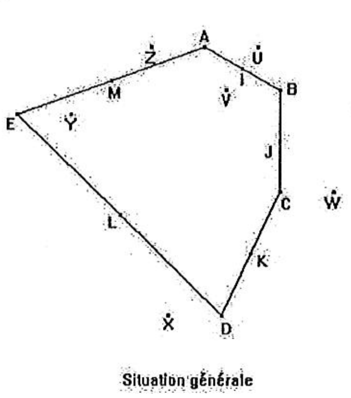
Soit $\overrightarrow{K_1A} = \overrightarrow{LM}$. Le point A est l'image du point K_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{LM}$.

Synthèse

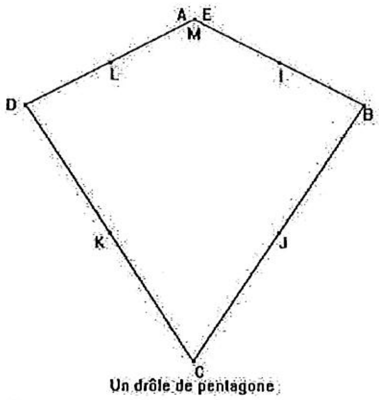
Le point *A* est l'image du point *K* par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{LM}$.

Pour obtenir les autres sommets, il suffit d'effectuer les symétries centrales successives par rapport aux milieux des côtés.

Mais les conditions de l'énoncé ne nous assurent pas d'obtenir toujours un véritable pentagone. Si on considère un parallélogramme IJKL et un point quelconque M, qui peut donc très bien être tel que IJKLM est un pentagone convexe, la composée des symétries respectives par rapport à I, J, K, L et M n'est autre que la symétrie par rapport à M. On tombe en tel cas sur A et E tous deux en M. Le « pentagone » obtenu serait alors ABCDA.



Situation générale



Un drôle de pentagone

Exercice 3 — *La somme constante*

Pour un échiquier 10×10 à cases numérotées de 0 à 99, le résultat serait évident, puisque les colonnes correspondraient aux unités, de 0 à 9, et les lignes aux dizaines, de 0 à 9 également. En prenant 10 cases à raison d'une seule sur chaque ligne et chaque colonne, on obtiendrait toutes les valeurs d'unité de 0 à 9 et toutes les valeurs de dizaine de 0 à 9. La somme des numéros serait donc égale à

$$1\times(0 + 1 + 2 + \ldots + 9) + 10\times(0 + 1 + 2 + \ldots + 9) = 11\times(9\times10/2) = 495.$$

Le cas considéré est de même nature à ceci près que l'on évolue de 31 au lieu de 10 quand on passe d'une ligne à la suivante et que l'on commence à 1 au lieu de 0. On aboutira donc au résultat :

$$1\times(1 + 2 + \ldots + 31) + 31\times(0 + 1 + \ldots + 30) = 31 + 32\times(30\times31/2) = 14911.$$