RAYMOND DUVAL

LES CONDITIONS COGNITIVES DE L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMÉTRIE : DÉVELOPPEMENT DE LA VISUALISATION, DIFFÉRENCIATION DES RAISONNEMENTS ET COORDINATION DE LEURS FONCTIONNEMENTS

Abstract. Cognitive conditions of the geometric learning : developing visualisation, distinguishing various kinds of reasoning and co-ordinating their running
Geometry is a kind of knowledge area that requires the cognitive joining of two representation registers: on one hand the visualisation of shapes in order to represent the space and on the other hand the language for stating some properties and for deducing from them many others. The troubles of learning first come from the fact these two registers are used in a way which is opposite to their cognitive use apart from mathematics.

The way of seeing a geometrical figure depends on the activity for what it is used. Thus it can run in an iconic way or in a non-iconic way. The non-iconic visualisation involves that the first recognised shapes would be visually deconstructed. There are three kinds of shape deconstruction: deconstruction by using tools in order to construct any figure, the heuristic breaking down in order to solve problems and the dimensional deconstruction. This one is the central process of geometrical visualisation.

The analysis of language in geometry requires that three levels of discursive operations would be separated: verbal designation, property statement and deduction. This separation is important because the relation between visualisation and language changes completely from one level to the other. This variation conceals the most important cognitive phenomenon: the dimensional hiatus. Comings and goings between visualisation and language involve a jump into the number of dimensions in order to recognise the knowledge objects that are represented within each register.

Becoming aware of the dimensional deconstruction of shapes and understanding the process of the various discursive operations are the conditions for succeeding in making the two registers run in synergy. There are the crucial thresholds for learning in geometry. Is that really taken into account in the teaching ?

Résumé. La géométrie est un domaine de connaissance qui exige l'articulation cognitive de deux registres de représentation très différents : la visualisation de formes pour représenter l'espace et le langage pour en énoncer des propriétés et pour en déduire de nouvelles. Les difficultés d'apprentissage viennent d'abord de ce que ces deux registres sont utilisés d'une manière souvent contraire à leur fonctionnement cognitif normal en dehors des mathématiques.

La manière de voir des figures dépend de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. On peut ainsi distinguer une manière de voir qui fonctionne de manière iconique et une manière de voir fonctionnant de manière non iconique. La visualisation non iconique implique que l'on déconstruise les formes déjà visuellement reconnues . Il y trois types de déconstruction des formes : la déconstruction instrumentale pour construire une figure, la décomposition heuristique et la déconstruction dimensionnelle. La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.

ANNALES de DIDACTIQUE et SCIENCES COGNITIVES, volume 10, p. 5 - 53.

Pour analyser le rôle du langage en géométrie, il faut distinguer trois niveaux d'opérations discursives : la dénomination, l'énonciation de propriétés, la déduction. Cette distinction est essentielle car le rapport du langage à la visualisation change complémentaire d'un niveau à l'autre. Cependant, sous cette variation, se cache un phénomène cognitif fondamental : le hiatus dimensionnel. Les passages entre visualisation et discours impliquent en géométrie un changement du nombre dimensions pour reconnaître les objets de connaissance visés dans chacun des deux registres.

La prise de conscience de la déconstruction dimensionnelle des formes et celle de la variété des opérations discursives sont les conditions pour que la visualisation et le discours fonctionnent en synergie malgré leur hiatus dimensionnel. Ce sont là les seuils décisifs dans l'apprentissage de la géométrie.

Mots clés. analyse fonctionnelle, codage, circuit de visualisation, contre-exemple, décomposition heuristique (des figures), déconstruction dimensionnelle (des formes), définition, droite, figure, hiatus dimensionnel, preuve, proposition, reconfiguration, représentation autosuffisante, source de conviction, unité figurale, visualisation iconique, visualisation non iconique.

... ne négliger d'aucune manière la géométrie
République VII, 527c

Parmi tous les domaines de connaissances dans lesquels les élèves doivent entrer, la géométrie est celui qui exige l'activité cognitive la plus complète, puisqu'elle sollicite le geste, le langage et le regard. Là, il faut construire, raisonner et voir, indissociablement. Mais la géométrie est aussi le domaine plus difficile à enseigner et l'un de ceux où, même lorsque les objectifs restent très modestes, les résultats atteints sont décevants. Il suffit de consulter les évaluations nationales au début du Collège, sans même rappeler les difficultés concernant la démonstration, pour constater un état de choses bien connu. Qu'est-ce qui, dans l'activité cognitive sollicitée pour faire de la géométrie, se révèle être trop complexe ou trop insaisissable pour les élèves, construire, raisonner pour justifier ou voir ? Arrêtons-nous un instant sur figures, lesquelles condensent en quelque sorte toutes les modalités de l'activité cognitive.

Voir une figure, en géométrie, exige que l'on dissocie ce qui relève de la grandeur, et donc ce qui dépend de l'échelle de grandeur à laquelle s'effectue l'acte de voir, et ce qui relève des formes discriminées, lesquelles sont indépendantes de l'échelle de grandeur. Le rapport aux figures, c'est à-dire la manière de regarder ce qu'elles donnent à voir, concerne la discrimination de formes et non pas la grandeur ou les changements d'échelle de grandeur. C'est d'ailleurs l'analyse que Poincaré faisait de "l'intuition géométrique" :

" Quand, dans un théorème de géométrie métrique, on fait appel à cette intuition, c'est parce qu'il est impossible d'étudier les propriétés métriques d'une figure en faisant abstraction de ses propriétés qualitatives, c'est-à-dire celles qui sont l'objet propre de l'Analysis Situs....c'est pour favoriser cette intuition que le géomètre a besoin de dessiner les figures, ou tout au moins de se les représenter mentalement. Or s'il fait bon marché des propriétés métriques ou projectives de ces figures, s'il s'attache seulement à leur propriétés purement qualitatives, c'est que c'est là que l'intuition géométrique intervient véritablement " (Poincaré, 1963, p.134-135).

La discrimination de ces "propriétés purement qualitatives" constitue le premier seuil critique pour l'apprentissage de la géométrie. Elle est le seuil peut-être le plus difficile à faire franchir aux élèves dans l'enseignement mais, aussi, le plus décisif pour leur faire comprendre ce qu'est une démarche géométrique.

Une telle affirmation peut surprendre. En effet, la reconnaissance des propriétés "purement qualitatives" semble directement enracinée dans la perception. En outre, le corpus des figures dont les programmes scolaires peuvent demander la connaissance est très restreint, et il correspond à des formes qui sont perceptivement remarquables et culturellement familières. Et, dans l'enseignement, ces figures se retrouvent au carrefour d'une grande variété d'activités : observation, reproduction, construction, description, définition, etc. Pourquoi la source profonde des difficultés auxquelles l'enseignement de la géométrie se heurte devrait-elle être d'abord cherchée dans cette intuition géométrique qui s'appuie sur la perception, celle-ci recouvrant aussi bien l'espace du monde environnant que les différents types de représentation (photos, cartes, plans, schémas, figures) auxquels il donne lieu ?

C'est la perception qui fait problème. Non seulement elle fonctionne en deçà de toute dissociation entre grandeur et discrimination visuelle des formes (Coren et *alii*, 1979), mais surtout elle impose une manière commune de voir qui va à l'encontre des deux manières de voir des figures qui sont sollicitées dans l'enseignement des mathématiques : l'une centrée sur la constructibilité des figures à l'aide d'instruments et l'autre centrée sur leur enrichissement heuristique pour y faire apparaître des formes qui ne sont pas celles que le regard y voit. Et on sait combien le passage du fonctionnement habituel de la perception des formes (Kaniza, 1998) à ces deux manières de voir, surtout à la seconde, peut déjà être difficile pour beaucoup d'élèves. Cependant, ces deux manières de voir ne sont que la manifestation en surface d'une troisième, laquelle constitue le mécanisme cognitif de la visualisation mathématique : la déconstruction dimensionnelle des formes. La construction de figures, ou leur utilisation heuristique, n'ont de sens que dans la mesure où elles s'inscrivent dans ce fonctionnement de la visualisation mathématique. Car, avec cette troisième manière de voir, l'espace n'est plus abordé sous l'aspect grandeur et changement d'échelles de grandeur, ni sous celui des propriétés topologiques et affines discriminant des formes, il est abordé sous l'aspect de ses dimensions et du changement du nombre de ses dimensions. Le changement du nombre de dimensions est au centre du regard géométrique sur les figures.

Mais revenons aux figures, dont Poincaré reconnaissait la nécessité cognitive pour l'"intuition géométrique". Leur principale caractéristique par rapport à ces autres représentation de l'espace environnant que sont les plans, les cartes, ou les modèles, est de ne pas être iconiques, c'est-à-dire de ne pas ressembler à un objet vu et connu dans la réalité. Cela veut dire en fait que la reconnaissance des objets représentés ne dépend pas d'abord de la discrimination visuelle des formes, mais d'hypothèses que l'on s'est donnée et qui vont commander *aussi* le regard sur les figures. Et là c'est un tout autre type d'activité qui se trouve mobilisé : la production discursive d'énoncés que l'on relie entre eux pour justifier, pour expliquer ou pour démontrer. Est-il besoin de rappeler que cela ne peut pas se faire en dehors du langage, mais que, comme pour la visualisation, on n'y fait pas fonctionner le langage de la même manière qu'on l'utilise en dehors des mathématiques ?

Ce sont ces conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie que nous allons analyser en détail dans cet article. Nous montrerons plus particulièrement que la visualisation et la production d'énoncés en géométrie requièrent des fonctionnement cognitifs qui sont différents et plus complexes que ceux mis en œuvre en dehors de la géométrie. C'est pourquoi leur développement et leur coordination doivent être considérés comme des objectifs d'enseignement aussi essentiels que les contenus mathématiques eux-mêmes. Car ici la compréhension des contenus ne peut se construire qu'à partir d'une synergie entre visualisation et langage. Ces conditions cognitives sont en quelque sorte des conditions pour apprendre à apprendre en géométrie.

Nous commencerons par mettre en évidence la spécificité des manières de voir pratiquées en mathématiques. Pour cela nous allons partir d'une idée très simple : c'est la tâche demandée qui détermine le rapport aux figures. La manière de voir une figure dépend de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. Et cela nous permettra de soulever une question essentielle pour l'organisation des apprentissages, et qui est rarement abordée : la manière de voir qu'un type d'activité favorise aide-t-elle à entrer dans les autres manières de voir requises par les autres types d'activité ? Nous aborderons ensuite ce qui constitue le processus central de la visualisation géométrique : la déconstruction dimensionnelle des formes. Aucune des activités classiquement exploitées pour introduire les élèves à la géométrie ne permet vraiment de développer cette manière de voir. Et c'est pourtant la seule qui est requise par le développement des démarches discursives en géométrie : énonciation de propriétés, définitions, déduction d'autres propriétés, théorèmes… Y introduire les élèves exige un tout autre type d'activité pour les élèves que ceux habituellement exploités. Mais, par delà sa mise en oeuvre didactique, c'est le problème plus global de l'articulation entre visualisation et discours géométrique que nous examinerons. En effet, c'est là que se situent non seulement les enjeux éducatifs de la géométrie, enjeux de formation générale comme Platon l'évoquait déjà, mais aussi ses enjeux scientifiques puisque cela concerne les manières mathématiques de prouver.

1. Classification des manières de voir en fonction du rôle des figures dans les activités géométriques proposées aux élèves

Le clavier des activités possibles pour faire travailler les élèves avec des figures de géométrie ou sur des figures de géométrie est extrêmement étendu. Les variations d'activité portent à la fois sur *la tâche à faire* (reproduire une figure selon un modèle ou la construire, ou effectuer des mesures, ou encore la décrire pour la faire reconstruire par un autre élève) et sur *le mode de l'activité demandée* (modalité concrète en utilisant un matériel manipulable, modalité représentationnelle en s'en tenant aux seules productions graphiques, ou modalité technique en imposant certains instruments). Or ce ne sont pas du tout les mêmes manières de voir qui sont sollicitées d'un type d'activité à un autre, même si ce sont les mêmes formes nD (pièces matérielles 3D à manipuler physiquement, figures 2D déjà construites ou proposées à construire, à modifier...) qui sont perceptivement données à voir. En prenant simplement comme critères le type d'opérations sur les formes données à voir et la manière dont les propriétés géométriques sont mobilisées par rapport à ce type d'opérations, on peut distinguer quatre manières de voir. Ces quatre manières de voir sont quatre entrées très différentes dans la géométrie.

	BOTANISTE	ARPENTEUR-géomètre	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR-bricoleur
1. Type d'opération sur les **FORMES VISUELLES,** requis par l'activité proposée	**Reconnaître des formes à partir de qualités visuelles d'un contour :** UNE forme *particulière* est privilégiée comme TYPIQUE	**Mesurer les bords d'une surface :** sur un TERRAIN ou sur un DESSIN (variation d'échelle de grandeur et donc de procédure de mesure)	**Décomposer une forme en tracés constructibles à l'aide d'un instrument** Il faut (souvent) passer par des TRACÉS AUXILAIRES qui n'appartiennent pas à la figure " finale".	**Transformer des formes les unes dans les autres.** Il faut ajouter des TRACÉS REORGANISA-TEURS dans la figure finale pour initialiser ces transformations
2. Comment les **PROPRIETES GEOME-TRIQUES** sont mobilisées **par rapport à ce type d'opération**	Pas de liens entre les différentes propriétés (pas de définition mathématique possible)	Les propriétés **sont des critères de choix** pour les mesures à faire. Elles ne sont utiles que si elles renvoient à *une formule permettant un calcul*	Comme **contraintes d'un ordre de construction** . Certaines propriétés sont obtenues par **une seule opération de traçage**, les autres exigent plusieurs opérations.	Implicitement par renvoi à un réseau plus complexe (une trame de droites pour la géométrie plane ou une trame d'intersections de plans...) que la figure de départ

Figure 1 : Quatre entrées classiques dans la géométrie

Le botaniste. C'est l'entrée la plus évidente et la plus immédiate. Il s'agit d'apprendre à reconnaître et à nommer les formes élémentaires qui sont utilisées en géométrie plane : types de triangles et de quadrilatères, configurations obtenues par les différentes positions de deux droites l'une par rapport à l'autre, éventuellement les formes circulaires et les formes ovales etc. Et il s'agit évidemment d'observer les différences entre deux formes présentant certaines similitudes (un carré et un rectangle) et de remarquer des similitudes entre des formes différentes (entre un carré et un parallélogramme). Ici, les propriétés distinguées sont des caractéristiques visuelles de contour.

En réalité ce type d'activité n'a rien d'une activité géométrique. Elle ne paraît géométrique que dans la mesure où elle porte sur des formes dites “ euclidiennes ”. Mais le même travail d'observation pourrait (et devrait) être fait sur des feuilles d'arbres. Et parmi tous les modèles de formes planes que Piaget (1947, p.70) avait demandé de “copier”, à des enfants de 2 à 7 ans, on aurait pu tout aussi bien glisser une feuille de platane et une feuille de marronnier, la forme d'un sapin et celle d'un épicéa, ou le dessin schématique d'une automobile. Rappelons que dans les observations de Piaget il s'agissait de copier “à main levée” sans utiliser aucun instrument, même pas une règle !

L'arpenteur géomètre. C'est l'entrée historique. Il s'agit d'apprendre à mesurer des longueurs sur un *terrain*, au sol, ou des distances entre deux repères, et à les reporter sur un *dessin* qui prend un statut de plan. *On se situe donc d'emblée à deux échelles de grandeur qu'il s'agit de mettre en correspondance.* Or cette mise en correspondance n'a rien de naturel ou d'évident, car il n'y a pas de procédure commune pour mesurer les distances réelles sur le terrain et pour mesurer les longueurs de tracés d'un dessin. Les tâches spécifiques de cette entrée vont donc consister à proposer des activités exigeant de passer d'une échelle de grandeur à une autre. Le problème du vitrier en est un exemple typique (Berthelot et Salin 94, p.40-41) : combien de mesures effectuer, et lesquelles, pour fabriquer une fenêtre qui rentre dans une ouverture ayant la forme d'un parallélogramme ? La mesure du rayon de la terre par Eratosthène en est un autre exemple célèbre.

Ce type d'activité montre les difficultés que beaucoup d'élèves rencontrent pour mettre en correspondance ce qu'ils voient sur le terrain et ce qui est dessiné sur une feuille. Or cette mise en correspondance exige que l'on privilégie des aspects qui sont essentiels pour la lecture d'un plan ou celle d'une carte de géographie (Berthelot et Salin 2000) : le choix d'objets repères, le choix de points ou d'axes de références pour représenter la position des objets les uns par rapport aux autres, la prise en compte de directions ou d'orientations ... Ces aspects ne sont pas toujours pertinents pour la représentation géométrique. En outre dans ce type d'activité *les propriétés géométriques sont mobilisées à des fins de mesure.*

Le constructeur. C'est l'entrée nécessaire. La particularité des figures géométriques, du moins de celles qui correspondent à des formes euclidiennes élémentaires et à des configurations de formes élémentaires, est *d'être constructibles à l'aide d'instruments*. Les figures géométriques ne se dessinent pas à main levée, elles se construisent à l'aide d'un instrument qui guide le mouvement de la main, ou qui s'y substitue. Pourquoi ? Un instrument permet de produire une forme visuelle ayant une propriété géométrique et cette forme visuelle constitue la primitive de l'instrument, à cause de la régularité qu'il impose au mouvement de traçage, et *donc de l'invariance visuelle qu'il introduit dans le tracé*. Ainsi le trait droit ou le rond régulier, pour les instruments classiques que sont la règle (non graduée) et le compas. Sans l'utilisation d'instruments, il serait impossible de vérifier une propriété sur une figure.

C'est à travers l'utilisation d'un instrument que les élèves peuvent vraiment prendre conscience que les propriétés géométriques ne sont pas seulement des caractéristiques perceptives. En effet, l'utilisation d'un instrument donne la possibilité d'expérimenter, en quelque sorte, les propriétés géométriques comme **des contraintes de construction** : quand une forme visuelle n'est pas directement produite par un instrument, plusieurs opérations de traçage sont alors nécessaires pour l'obtenir et il y a un ordre pour ces opérations. Ne pas en tenir compte rend la construction impossible. Naturellement, tout changement d'instrument entraîne un changement dans les propriétés géométriques qui doivent être explicitement mobilisées.

C'est cette entrée qui a donné lieu aux innovations les plus spectaculaires pour l'enseignement de la géométrie au cours de ces vingt dernières années (Laborde 1994). Des logiciels de construction ont été développés. Leur avantage, outre celui déjà considérable d'exécution automatique des tâches de réalisation comme pour les calculatrices, est de supprimer complètement les approximations compensatrices de la main dans l'utilisation des instruments. Autrement dit, il n'est plus possible de réussir une construction "au juger", sans prendre en compte les propriétés géométriques. Ainsi dans Cabri Géomètre, une figure construite doit pouvoir conserver sa configuration si l'on bouge l'un de ses points

L'inventeur-bricoleur. Pour présenter cette quatrième entrée, il suffit d'évoquer les problèmes classiques du type suivant :

(1) Comment partager, d'un seul coup de ciseau, un triangle de manière à pouvoir assembler les deux morceaux en un parallélogramme ?

(2) Comment construire, à partir d'un carré donné, un autre carré deux fois plus grand (dont l'aire soit le double) ? (Ce problème peut être donné sur du papier quadrillé, ce qui réduit les opérations de mesure à un simple comptage de carreaux)

Ces problèmes ont en commun d'exiger une DÉCONSTRUCTION VISUELLE des formes perceptives élémentaires qui s'imposent au premier coup d'oeil, pour pouvoir obtenir la reconfiguration, ou la figure, demandée. Ces problèmes touchent une capacité fondamentale qui est la condition nécessaire à toute utilisation heuristique des figures : **ajouter des tracés supplémentaires à une figure de départ** (c'est-à-dire celle qui accompagne un énoncé de problème, ou que l'on peut construire à partir d'un énoncé de problème) **afin de découvrir sur la figure une procédure de résolution.** Ce sont ces tracés supplémentaires qui vont permettre une réorganisation visuelle de la figure de départ. Ici, c'est la recherche de ce tracé supplémentaire qui constitue le problème : "comment partager d'un seul coup de ciseau… ?"

Passer d'une manière de voir à une autre constitue un changement profond de regard, qui est trop souvent ignoré dans l'enseignement. Car le fonctionnement cognitif impliqué par chacune de ces quatre manières de voir n'est pas le même, comme nous le montrerons plus loin. Mais on peut déjà souligner que chaque manière de voir induit un type particulier et limité de compréhension. La connaissance développée n'est pas la même selon le regard qu'un élève se trouve être capable, ou incapable, de mobiliser, et cela en présence de la même figure.

	BOTANISTE	ARPENTEUR-géomètre	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR-bricoleur
STATUT ÉPISTEMO-LOGIQUE	CONSTAT perceptif immédiat : "ça se voit sur..."	CONSTAT résultant de la lecture d'un instrument de mesure	RESULTAT *d'une procédure de construction*	RESULTAT *d'une décomposition de la figure de départ en unités figurales que l'on reconfigure autrement*
SOURCE COGNITIVE DE LA CERTITUDE	**Superposition** effectuée à l'œil ou en utilisant un gabarit	**Comparaison** des valeurs numériques qui ont été obtenues empiriquement	**Nécessité interne** à l'enchaînement des opérations de la procédure de construction.	**Invariance** des unités figurales qui sont les référents de la transformation de la figure de départ

Figure 2 : Mode de compréhension et de connaissance lié à chaque manière de voir

La diversité de ces manières de voir soulève les deux questions cruciales pour l'enseignement de la géométrie et pour l'organisation des situations d'apprentissage

(1)La pratique d'une activité favorise-t-elle l'acquisition des manières de voir liées aux autres types d'activité ? Privilégier, par exemple, les activités de construction entraîne-t-il le développement de la capacité heuristique à enrichir et à réorganiser les figures ?

Cette question du transfert, essentielle dans les apprentissages, peut être élargie :

(1bis) Y aurait-il un ordre, et donc une hiérarchie à respecter, pour introduire les activités propres à ces quatre entrées ? Par exemple, l'approche botaniste peut-elle être considérée comme la première étape nécessaire à toute acquisition de connaissances géométriques ?

(2)Quelle manière de voir l'utilisation du langage en géométrie (pour formuler des définitions et des théorèmes, pour les mettre en œuvre dans une raisonnement, pour avancer ou expliquer une conjecture..) requiert-elle ? Est-ce l'une de ces quatre manières de voir ou ne serait-ce pas au contraire une cinquième, totalement différente ?

Cette question nous renvoie à la question fondamentale tant d'un point de vue cognitif que d'un point de vue épistémologique :

(2bis) Comment, et jusqu'où, "voir" et "énoncer" peuvent-ils se rejoindre en géométrie ?

Ces questions sont cruciales parce que la prédominance donnée à l'une de ces quatre entrées, comme la méconnaissance de la complexité de l'articulation entre voir et dire, peuvent créer des obstacles qui, à moyen et long terme, vont se révéler insurmontables pour la progression des élèves. Et, cependant, ces questions sont rarement posées, tellement la réponse "oui " est considérée évidente pour la première, qu'on la prenne dans sa formulation stricte ou dans sa formulation élargie. Quant à la seconde question elle peut paraître bien étrange. Pourtant elle touche le nœud de toutes les difficultés auquel l'enseignement de la géométrie se heurte de manière profonde et récurrente.

2. Deux modes opposés de fonctionnement cognitif : la visualisation iconique et la visualisation non iconique

Rappelons tout d'abord la complexité des processus en jeu dans l'acte de "voir". Voir recouvre toujours deux niveaux d'opérations qui sont différents et indépendants l'un de l'autre, même si le plus souvent ils fusionnement dans la synergie d'un même acte. Ces deux niveaux d'opérations sont **la reconnaissance discriminative de formes** et **l'identification des objets correspondant aux formes reconnues.** Le problème cognitif majeur est celui de savoir comment se fait le passage d'une reconnaissance discriminative de formes à l'identification des objets donnés à voir.

Dans la perception du monde qui nous environne ces deux niveaux d'opération ne semblent pas dissociables puisqu'ils sont simultanés (du moins à l'échelle de notre conscience), l'objet étant immédiatement donné avec la forme qui permet de le distinguer. Cette fusion entre reconnaissance d'une forme et identification d'un objet, base de toute évidence perceptive, est la condition pour des réponses rapides et adaptées à des situations nouvelles et imprévues. En revanche, il n'en va plus de même pour la perception des représentations construites par production de tracés. Il n'y a aucune relation intrinsèque entre les formes reconnues dans un tracé et l'objet que ce tracé " veut " représenter. Comment alors peut s'effectuer le passage de l'un à l'autre ?

Le passage repose sur une “**ressemblance**” entre la forme visuellement discriminée et la forme typique de l ’objet représenté. C’est cette ressemblance qui est généralement considérée comme constitutive de l’image. Ainsi, Pierce en a fait la caractéristique de toutes les représentations iconiques par opposition aux symboles et aux indices. Généralement cette ressemblance suffit pour reconnaître directement, et immédiatement, l’objet représenté, comme dans la perception du monde environnant. Ainsi il n’y a pas besoin de savoir lire pour regarder des bandes dessinées et en suivre le récit. Naturellement, ce mécanisme cognitif d’iconicité n’est pas toujours suffisant. Il faut parfois recourir à une **énonciation** implicite ou explicite. En d’autres termes, il faut parfois un apport verbal d’informations, intégré à l’image comme légende ou comme codage d’un élément figuratif, pour pouvoir identifier ce que les formes discriminées représentent. *Mais ce rôle auxiliaire de l’énonciation ne doit pas nous faire oublier l’importance du mécanisme d’iconicité.* Il continue à s’imposer de manière autonome chaque fois que quelque chose (dessin, figures ou formes de pièces à manipuler) est donné à voir.

Regardons maintenant comment ce passage s’effectue pour les différentes manières de voir sollicitées dans les activités de géométrie ? Pour deux d’entres elles, cela fonctionne comme pour n’importe quelle représentation visuelle en dehors de la géométrie. Mais cela n’est plus du tout le cas pour les deux autres qui, au contraire, exigent la neutralisation du mécanisme d’iconicité. Cependant ce passage n’est pas davantage assuré par un apport verbal d’information. Ce sont les impossibilités et les invariances découvertes dans une séquence de transformations visuelles, effectuées avec ou sans instrument, qui le permettent. Toute figure est générative d’une autre, par extension de sa procédure de construction ou par réorganisation visuelle des formes immédiatement reconnues. Ce processus est intrinsèquement autonome, même si dans le contexte d’un problème il peut être discursivement finalisé, et donc considérablement restreint. C’est l’appréhension opératoire fondée sur ce processus qui fait la fécondité intuitive des figures.

<table>
<tr>
<td colspan="2">VISUALISATION ICONIQUE :
ÇA RESSEMBLE AU profil d’un objet réel, ou à un ensemble d’itinéraires ou de déplacements sur un territoire ou à un modèle type (étalon).
La figure reste un objet indépendant des opérations que l’on effectue sur elle</td>
<td colspan="2">VISUALISATION NON ICONIQUE :
C’est une SEQUENCE d’OPERATIONS qui permet de reconnaître des propriétés géométriques, par l’impossibilité d’obtenir certaines configurations, ou par invariance des configurations obtenues.
La figure est une configuration contextuellement détachée d’un réseau ou d’une organisation plus complexes</td>
</tr>
<tr>
<td>BOTANISTE</td>
<td>ARPENTEUR-géomètre</td>
<td>CONSTRUCTEUR</td>
<td>INVENTEUR-bricoleur</td>
</tr>
</table>

Figure 3 : Deux mécanismes d’identification d’objets à partir de formes visuelles

2.1 Les impasses de la visualisation iconique pour l'apprentissage de la géométrie

La visualisation iconique repose sur une ressemblance entre la forme reconnue dans un tracé et la forme caractéristique de l'objet à identifier. Naturellement la situation n'est pas la même selon que le référent est un objet matériel dans l'espace environnant[1] ou une représentation de sa forme type. Dans le cas de la représentation, la visualisation iconique suppose la connaissance d'une forme type pour chaque objet géométrique à identifier. La comparaison entre les formes à reconnaître et les formes types tolère des écarts plus ou moins grands. Il y a par exemple une forme type du rectangle qui exclut une trop grande disproportion entre longueur et largeur. De même, la forme type d'un triangle requiert que les hauteurs restent situées à l'intérieur. Chaque forme type est associée à un nom qui permet de l'évoquer et qui lui confère ainsi le statut d'objet. Les impasses de la visualisation iconique pour l'apprentissage de la géométrie sont bien connues.

- La reconnaissance étant centrée sur le contour d'une zone ou d'une surface***, une forme c'est d'abord un profil.*** Cela veut dire que toutes les propriétés qui ne sont directement liées au contour caractéristique d'une forme (celles liées aux diagonales les quadrilatères remarquables) restent hors champ et donc moins facilement mobilisables quand les énoncés de problèmes ne les mentionnent pas explicitement. Cela veut dire aussi qu'il y a une résistance à sortir du contour fermé de la figure, en prolongeant par exemple les côtés pour faire apparaître les droites sous-jacentes.

- Les formes apparaissent comme étant ***stables***. Elles ne sont donc pas vues d'une manière qui permette de les transformer en d'autres formes semblables ou, surtout, différentes. Par exemple il est difficile d'apercevoir une superposition de parallélogrammes dans un réseau de droites d'où l'on voit d'emblée se détacher une juxtaposition de triangles. Et cela pourra être d'autant plus difficile que la reconnaissance des formes s'accompagne de l'énonciation, implicite ou explicite, du nom de ce que l'on identifie.

- La dissociation entre les opérations constituant l'acte de voir est d'autant plus nécessaire qu'il peut y avoir conflit entre la reconnaissance des formes par simple ressemblance à un exemple type et l'identification de l'objet auquel correspond la forme reconnue. Car les relations constitutives des objets ne sont pas des propriétés dont la présence peut être décidée d'un

1 Lorsque le référent est l'espace physique environnant ou des objets matériels, l'établissement des correspondances entres les formes reconnues dans un tracé et le référent réel implique la mobilisation du corps de celui qui regarde (sa position, son orientation, ses déplacements ou ses gestes pour manipuler). Les cartes, les plans de ville, les schémas accompagnant des instructions de montage en sont un excellent exemple (Duval 2000)

simple coup d'œil. La vision ne permettant pour les relations entre deux unités figurales qu'une estimation perceptive sujette à illusion et avec des seuils de discernabilité étroits.

Ces tendances lourdes de la visualisation iconique vont contre le développement de ce qui doit devenir le geste réflexe pour faire de la géométrie : **décomposer toute forme**, que l'on reconnaît d'emblée dans un ensemble de tracés ou dans n'importe quelle figure de départ**, en une configuration d'autres unités figurales** du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions.

2.2. La visualisation non iconique ou la déconstruction de formes

La décomposition des formes discriminées, à commencer par celles qui apparaissent être visuellement simples, en unités figurales est le préalable à l'entrée dans le fonctionnement propre à la visualisation non iconique. Or le point essentiel est qu'il existe au moins deux manières radicalement différentes de décomposer une figure de départ en unités figurales. Pour les distinguer, il suffit de prendre comme critère la pratique, spécifiquement mathématique, dans la manière d'utiliser une figure de départ (une figure donnée avec un énoncé de problème ou constructible à partir de cet énoncé) : l'introduction de tracés supplémentaires. On la retrouve dans les deux modes de visualisation non iconique que nous avons distingués mais elle y intervient de manière radicalement différente. Dans un cas elle est imposée et produite par les instruments utilisés pour construire une figure. Dans l'autre, au contraire, elle doit être "imaginée" par celui qui regarde car le choix du tracé supplémentaire permet de voir une procédure de résolution du problème posé. Or cela renvoie à deux types de fonctionnements cognitifs qui n'on rien de commun.

DÉCOMPOSITION d'une figure de départ
en unités figurales

Par introduction de **TRACÉS SUPPLEMENTAIRES**

SANS introduction
(même implicite ou mentale)
de tracés supplémentaires.

AUXILIAIRES
pour constuire une figure

REORGANISATEURS
pour résoudre un problème

?

Cela dépend des instruments utilisés
(Ici nous nous limitons aux instruments producteurs de tracés D1/D2).

Cela est indépendant des instruments utilisés pour construire la figure.

Figure 4 : Deux ou trois modes de visualisation non iconique ?

La caractéristique des figures géométriques, par rapport à tous les autres types de figures est qu'elles peuvent se construire à l'aide d'instruments et principalement d'instruments producteurs de tracés D1/D2[2]. La production de chaque tracé correspond à la fois à une instruction formulable (les " figures téléphonées ") ou formulée (dans le menu d'un logiciel) et à la mobilisation d'une propriété géométrique en relation avec l'instrument utilisée (compas, règle non graduée, règle graduée...). Autrement dit l'activité de construction de figures, presque toujours des configurations de formes 2D/2D ou 3D/2D, repose sur leur déconstruction en tracés 1D/2D et 0D/2D. *Mais dans cette activité de déconstruction toute l'attention porte sur la reconstruction, car la déconstruction des formes 2D/2D est automatiquement faite par l'instrument tandis que la reconstruction exige que l'on se focalise sur l'ordre dans les instructions à donne*r pour les opérations de traçage à faire. Or cette activité conduit à la production de tracés qui n'appartiennent pas à la figure à construire, soit qu'il s'agisse de tracés intermédiaires soit qu'il s'agit de tracés qui vont déborder le contour des formes à tracer : par exemple les droites qui sont les supports des côtés du carré ou du triangle à construire. *Nous appellerons ces tracés intermédiaires ou ces tracés supports des "tracés auxiliaires".* D'ailleurs dans un environnement papier crayon, on peut souvent observer l'habitude désastreuse de les effacer, une fois la figure à construire obtenue.

La situation est totalement autre lorsqu'il s'agit de partir d'une figure pour résoudre un problème. Le problème du partage d'un triangle en un seul coup de ciseau de manière à assembler les deux morceaux en un parallélogramme en est l'exemple typique. Il s'agit de transformer un triangle en un parallélogramme par l'ajout d'un tracé supplémentaire. Il s'agit donc là de la déconstruction d'une forme visuelle de base pour obtenir une autre forme visuelle de base. Et le choix de ce tracé supplémentaire va dépendre de la manière dont les deux parties du triangle obtenues par ce tracé vont permettre de les réassembler sous la forme d'un parallélogramme. Il s'agit évidement d'une déconstruction qui est sans rapport avec la déconstruction impliquée dans la construction des figures. Car le choix de

2 Le "dénominateur" correspond à la prise en compte de l'espace dans lequel les représentations sont produites :

— celui d'objets physiques qu'on peut manipuler physiquement (nD /3D) : maquettes de polyèdres (3D/3D), feuille papier que l'on peut plier ou découper (2D/3D), ficelles que l'on peut tendre (1D/3D) comme avec un géoplan. J'appellerai ces objets "objets maquettes" pour les distinguer des instruments produisant une trace ou un tracé.

— celui d'un support de projection (nD/2D) pour la représentation qui sera alors produite par des tracés ou par des empreintes : sable, papier, écran électronique

Cela permet donc de distinguer les activités géométriques réalisées matériellement et les activités géométriques qui sont réalisées représentativement. Souvent les objets maquettes sont utilisés pour une interprétation iconique des représentations graphiques. Cela apparaît d'ailleurs dans les définitions : la droite comme une ficelle tendue… Et cela stérilise l'ouverture de la représentation.

ce tracé est indépendant de la manière dont le triangle peut être construit et il n'y a rien de commun entre ce tracé supplémentaire à trouver et les tracés auxiliaires. Nous appellerons "tracés réorganisateurs" tous les tracés permettant de réorganiser une figure donnée en vue d'y faire apparaître des formes non reconnaissables dans cette figure donnée. L'utilisation heuristique d'une figure dépend évidemment de la capacité à " voir " les tracés réorganisateurs possibles.

Il faut souligner ici un point fondamental pour comprendre l'importance et la spécificité de l'acte de voir dans l'apprentissage de la géométrie : **la visualisation non iconique est totalement indépendante de toute énonciation explicite ou implicite.** En d'autres termes, elle n'est en rien subordonnée à une connaissance des propriétés géométriques. Cela semble trivial pour les activités de type construction de figures dans la mesure où ce sont les instruments utilisés qui commandent, dirigent ou contrôlent la décomposition visuelle des formes. En revanche cela l'est moins pour l'utilisation heuristique des figures. D'ailleurs, le plus souvent, on accorde accordent un rôle directeur à la connaissance des propriétés pour l'exploration des figures, comme si voir ne pouvait permettre de découvrir avant de savoir. Par exemple, faut-il vraiment connaître le théorème des milieux pour résoudre le problème de la reconfiguration du triangle en un parallélogramme ou, au contraire, une exploration des reconfigurations ne serait-elle pas une voie de résolution ? Et dans ce cas des apprentissages spécifiques pour rendre les élèves capables de "voir " le tracé réorganisateur non seulement pour ce problème mais pour beaucoup d'autres problèmes mathématiquement très différents, ne seraient-ils pas nécessaires ?

Nous reviendrons sur cette question qui touche le rôle heuristique de la visualisation dans la résolution de problèmes de géométrie élémentaire. Mais déjà nous pouvons faire les remarques suivantes : si l'on peut toujours modifier son discours sur des objets, on ne peut pas modifier les formes qui sont d'emblée reconnues dans une figure. Car à la différence de l'énonciation, et donc de la production d'explications ou de justifications, la reconnaissance visuelle de formes échappe à tout contrôle intentionnel. Il y a des lois d'organisation des données visuelles, mises en évidence par la *Gestalttheorie*, qui imposent la reconnaissance de certaines formes ***contre*** la reconnaissance d'autres formes, même si celles-ci sont verbalement évoquées. Cette résistance a conduit parfois certaines recherches didactiques à déplorer que dans la résolution de problèmes de géométrie les élèves observés soient arrêtés par la "perception" de la figure ! En fait, un apprentissage visant à rendre les élèves capables de " voir " le (ou les) tracé réorganisateur à ajouter pour trouver la solution d'un problème doit se faire au niveau de la reconnaissance des formes, et non pas à celui de l'identification des objets représentés qui autrement restera purement verbale.

2.3. Les acquisitions relatives à une manière de voir aident-elles à entrer dans les autres manières de voir ?

Cette question du transfert de ce qui a été acquis dans un type d'activité proposé en classe à un autre type d'activité, est la question cruciale pour l'enseignement de la géométrie au Primaire et au Collège. Vouloir privilégier une entrée comme devant être plus accessible que les autres revient à supposer la transférabilité plus ou moins spontanée, d'une manière de voir aux autres manières de voir.

Or passer de la visualisation iconique, qui est commune à tous les domaines de connaissance, à la visualisation non iconique, qui est spécifique aux mathématiques, exige un retournement complet du fonctionnement cognitif de l'acte de "voir". Cela équivaut à substituer au circuit spontané représenté par les flèches A1-A2 dans le schéma ci-dessous (Figure 5) soit le circuit C1-C2 correspondant à l'exploration réorganisatrice des figures soit le circuit inverse représenté par les fléches B1-B2-B3, considéré comme la démarche " conceptuelle".

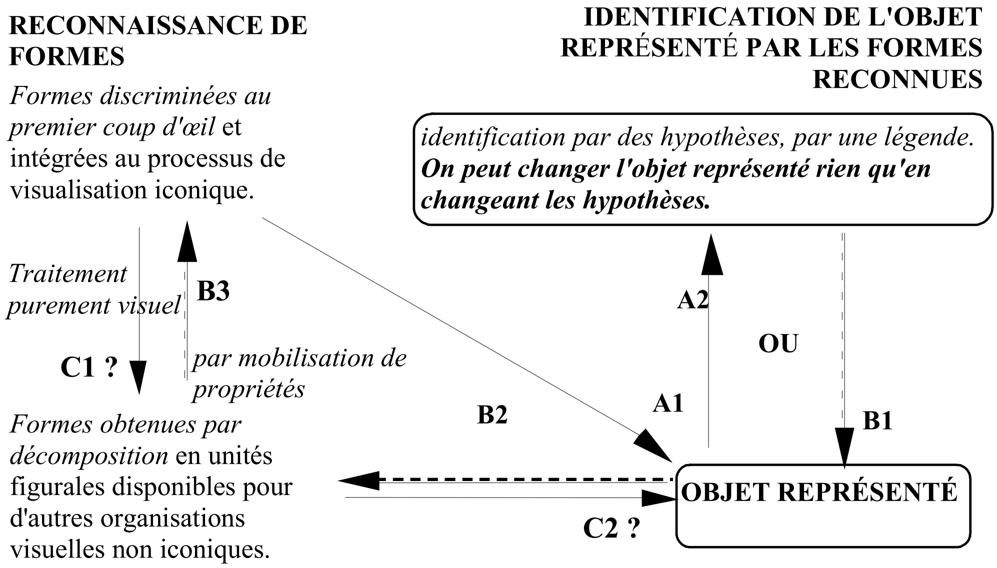


Figure 5 : Deux modes de fonctionnement cognitif pour identifier les objets représentés

Peut-on enseigner la géométrie comme si la grande majorité des élèves, au Primaire et au Collège, allaient découvrir et effectuer d'eux-mêmes un tel renversement, non seulement pour passer d'une visualisation iconique à une visualisation non iconique, mais, à l'intérieur de la visualisation non iconique, pour passer d'une déconstruction instrumentale des formes à une déconstruction heuristique ? Ainsi peut-on considérer que les activités de construction, qui imposent instrumentalement une déconstruction des formes visuellement reconnues, soient suffisantes pour un transfert vers des compétences heuristiques ? Il semblerait que ce soit là une opinion largement partagée, du moins si l'on considère l'importance donnée depuis une trentaine d'année à tout ce qui touche aux activités de construction, même si cela ne semble pas aider la plupart des élèves à dépasser l'évidence perceptive immédiate et à développer des stratégies d'exploration visuelle des figures pour résoudre des problèmes de géométrie.

En fait, pour saisir la complexité cognitive du passage de la visualisation iconique à la visualisation non iconique, il faut oublier la gamme très riche de toutes les activités proposées aux élèves pour établir un pont entre ce qui serait pratique et ce qui serait théorique, ou entre ce qui serait concret et ce qui serait formel, ou entre ce qui serait spatial et ce qui serait proprement géométrique, ou encore entre ce qui serait matériel et ce qui serait “ mental ”. Il faut se poser la question qui est en amont de toutes ces oppositions trop globalisantes : quelle est la manière mathématique de voir que requiert toute démarche discursive en géométrie (énonciation de propriétés, définitions, théorèmes, déduction d'autres propriétés, etc.) ? Est-ce l'une des quatre manières de voir, ou seulement l'un des deux modes de visualisation non iconique ou faut-il en chercher une autre ? Nous retrouvons ici la question que nous avons laissée en suspens (*supra* Figure 4) : existe-t-il deux ou trois manières non iconiques de décomposer les formes ? Et s'il y en a une troisième, quel type d'activité peut y faire entrer les élèves ?

3. La manière de voir requise en géométrie : la déconstruction dimensionnelle des formes

La manière mathématique de voir les figures consiste à décomposer n'importe quelle forme discriminée, c'est-à-dire reconnue comme une forme nD/2D, **en unités figurales d'un nombre de dimensions inférieur à celui de cette forme.** Ainsi la figure d'un cube ou d'une pyramide (**3D/**2D) est décomposée en une configuration de carrés, de triangles, etc.. (unités figurales **2D**/2D). Et les polygones sont à leur tour décomposés en segments de droites (unités figurales **1D**/2D). Et les droites, ou les segments, peuvent être décomposés en “points” (unités **0D**/2D**)** (*infra* Figure 20)**. Notons qu'avec les points nous sortons de toute visualisation.** En effet, les points ne sont visibles que lorsqu'ils apparaissent comme l'intersection d'unités 1D/2D (tracés sécants ou tracés formant un coin (“sommets”, “ angles ”...)). Autrement dit, le marquage d'un point sur un tracé ou hors de ce tracé (par exemple pour fixer les extrémités d'un segment ou son milieu) relève d'un codage symbolique. C'est d'ailleurs à ce codage symbolique que l'on associe généralement des lettres !

Pour bien mettre en évidence le caractère irréductible de cette manière de voir à celles que nous venons d'analyser, et pour montrer qu'elle constitue le premier seuil décisif pour l'apprentissage de la géométrie, il suffit ici de la comparer à la décomposition heuristique des formes.

3.1 La décomposition heuristique par division méréologique des formes reconnues

L'utilisation heuristique d'une figure exige souvent qu'on la regarde comme s'il s'agissait des pièces d'un puzzle. Mais cela suppose que l'on **décompose en unités figurales du même nombre de dimensions que la figure de départ.** Ainsi un triangle (2D/2D) peut être décomposé en d'autres triangles (2D/2D). Mais aussi, un cube matériel (3D/3D) ou n'importe quel autre solide peut être partagé en blocs qui seront aussi des polyèdres (3D/3D). *Ce partage, que nous appellerons une division méréologique (division d'un tout en parties juxtaposables ou superposables), se fait toujours pour reconstruire avec les parties ainsi obtenues une figure souvent très différente visuellement*. Cette décomposition s'inscrit donc dans un processus plus général de ***métamorphose*** **(**pour ne pas dire d'anamorphose, laquelle est une transformation par un processus de déformation continue). La décomposition méréologique des figures est l'une des démarches les plus anciennes dans l'histoire de la géométrie (Edwards, 1979). D'ailleurs, les premières "démonstrations" de la relation de Pythagore ont été fondées sur des opérations de décomposition en vue d'une reconfiguration méréologique (Padilla, 1992). Cette décomposition peut être :

- *strictement homogène* : la décomposition se fait en unités de même forme que la figure de départ. Les quadrillages constituent les figures fond (les "supports" de représentation !) qui souvent guident les premières opérations de décomposition méréologique.

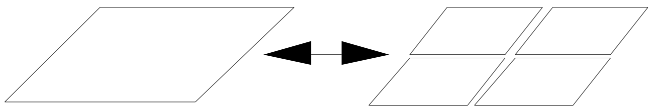


Figure 6

- homogène : la décomposition se fait en unités figurales différentes de la forme de la figure de départ, mais toutes de même forme :

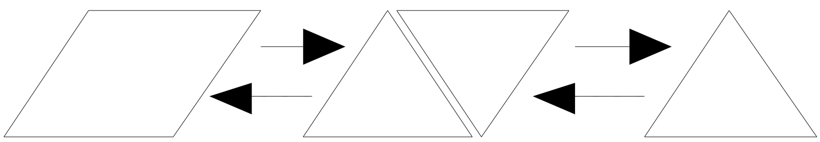


Figure 7

- hétérogène : la décomposition se fait en unités figurales de formes différentes entre elles. Le problème du partage d'un triangle en deux parties pour reformer un parallélogramme implique une décomposition hétérogène de ce type :

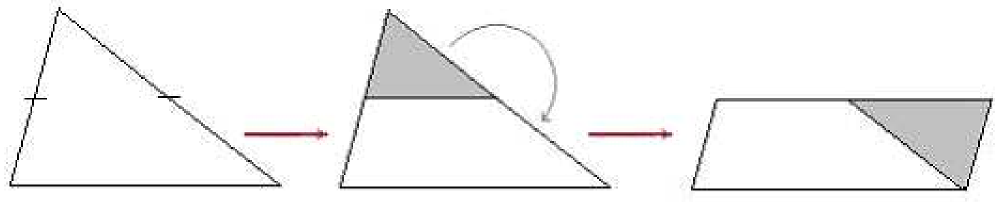


Figure 8

Les décompositions homogènes sont des transformations qui sont visuellement réversibles et qui peuvent être spontanément amorcées à la seule vue de la figure. En revanche, les décompositions hétérogènes ne sont pas visuellement réversibles.

Pour une figure de départ déterminée par un énoncé de problème, il y a évidemment plusieurs décompositions méréologiques possibles, mais toutes ne conduisent pas à la solution du problème. Il arrive même parfois que celles qui y conduisent ne sont pas directement visibles sur la figure. Autrement dit, il y a des situations où la figure aide à voir et d'autres où elle empêche de voir. On peut déterminer les facteurs qui favorisent ou inhibent ces processus de division méréologique et de réorganisation des formes reconnues (Duval, 1995b). Et ces facteurs peuvent être des variables didactiques pour des activités qui visent à faire entrer les élèves dans l'utilisation heuristique des figures.

La décomposition méréologique présente une double particularité :

- elle peut s'opérer **matériellement** (par découpage et réassemblage des pièces obtenues comme pour un puzzle), **graphiquement** (par ajout de ce que nous avons appelé plus haut des tracés réorganisateurs) ou même **simplement du regard** (et non pas " mentalement "). Ces trois modalités sont presque équivalentes à un détail près : quand une partie doit intervenir simultanément dans deux sous-reconfigurations différentes, il faut disposer matériellement de deux pièces pour cette même partie.

- la décomposition par division méréologique est très souvent sans lien direct avec le discours mathématique, et c'est pour cela qu'elle permet l'exploration purement visuelle d'une figure de départ pour détecter les propriétés géométriques à utiliser pour résoudre un problème posé.

3.2. La décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes

La déconstruction dimensionnelle présente deux caractéristiques qui l'opposent non seulement à la décomposition méréologique mais également à la déconstruction instrumentale

Elle se fait nécessairement en articulation avec une activité discursive. On pourrait même dire qu'elle est essentiellement d'ordre discursif. Pour la représenter graphiquement, il faut en quelque sorte transformer les figures géométriques en schémas. Ainsi la seule énonciation des propriétés caractéristiques d'un parallélogramme par exemple implique que l'on déconstruise dimensionnellement une figure simple 2D/2D en une configuration d'unités figurales 1D ou 0D/2D. *Car les propriétés d'un objet 2D/2D (par exemple un parallélogramme représenté par A ci-dessous) sont des relations entre des objets représentés par des unités figurales 1D/2D* (les configurations B et C ci-dessous) ou 0D/2D.

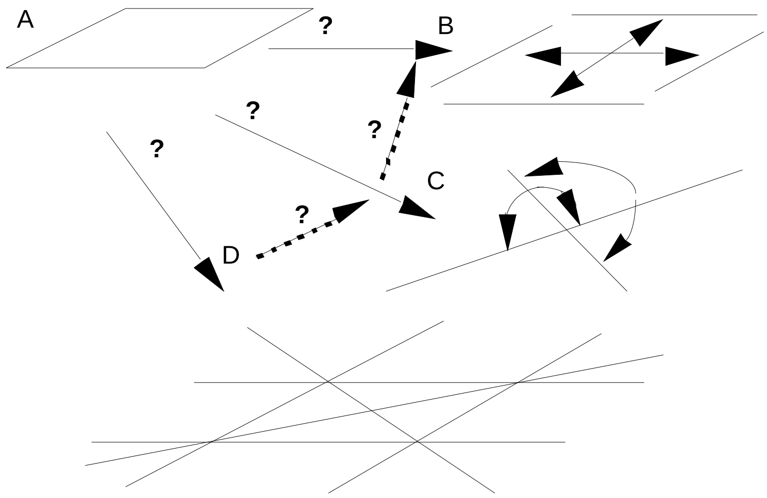


Figure 9 : Décomposition en unités figurales par déconstruction dimensionnelle d'une forme

Cette déconstruction dimensionnelle représente une révolution cognitive pour le fonctionnement spontané de la visualisation iconique ou non iconique. La déconstruction dimensionnelle des formes est une démarche qui va contre tous les processus d'organisation et de reconnaissance perceptive des formes. Ce qui n'est pas le cas de la décomposition de type puzzle : car celle-ci, au contraire, mobilise ce processus tout en cherchant à en dépasser les limitations ou les restrictions immédiates. Et la première loi de l'organisation et de la reconnaissance perceptive des formes est *la priorité immédiate et stable des unités figurales 2D sur les unités figurales 1D.* Cela veut dire non seulement que l'on voit d'abord un parallélogramme avant de voir quatre côtés, mais cela veut dire surtout que tous les tracés que l'on perçoit d'emblée comme formant le contour de la surface restent, d'une certaine manière, non détachables de cette reconnaissance visuelle première. **Les côtés d'un polygone restent les bords non séparables de la surface qu'ils délimitent**. Et cela rend inconcevable et invisible le processus de déconstruction dimensionnelle des formes. Même les activités de construction de figures, où elle est imposée *de facto* par les instruments, restent pratiquement sans effet sur le fonctionnement cognitif qui impose la primauté visuelle des formes 2D sur les formes 1D ou les unités 0D. Car dans les activités de construction de figures, l'attention porte justement la reconstruction d'unités figurales 2D à partir d'unités figurales 1D automatiquement produites par l'instrument. C'est pourquoi la déconstruction dimensionnelle, c'est-à-dire le passage des surfaces aux lignes (les lignes n'étant pas visuellement des bords), représente une révolution cognitive par rapport aux autres types de visualisation. Il est plus difficile à réaliser encore que le passage des solides aux figures planes que l'on peut obtenir avec un plan d'intersection.

Alors que la décomposition méréologique peut être effectuée ou simulée matériellement avec des objets physiques que l'on sépare et que l'on réunit d'une autre manière, la déconstruction dimensionnelle ne peut pas être matérialisée. Elle ne peut même pas être montrée graphiquement, à moins d'introduire un couple de figures reliées entre elles *selon la structure proportionnelle* d'une équivalence ou d'une implication. Dans la Figure 9 ci-dessus le schéma fusionne trois propositions auxquels correspondent respectivement les liens, $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $A \rightarrow D$, ce qui n'est pas la manière habituelle de visualiser pratiquée dans l'enseignement et dans les manuels, celle-ci en restant le plus souvent à la manière de voir du botaniste !

On peut alors voir à la fois la similitude et surtout l'opposition entre division méréologique des formes 3D ou 2D et la décomposition dimensionnelle des formes nD**.** Alors que la division méréologique se fait en vue d'une reconfiguration faisant apparaître de nouvelles formes qui étaient non reconnaissables dans la figure de départ, **la déconstruction dimensionnelle se fait pour une (re)construction déductive des objets représentés.** Autrement dit, la division méréologique reste purement visuelle tandis que la déconstruction dimensionnelle est entièrement subordonnée à un discours axiomatique ou axiomatisable.

3.3. La décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes perçues correspond au fonctionnement profond de la visualisation en géométrie

Quand nous disons "fonctionnement profond", nous signifions par cette qualification que les autres manières de voir sont des manières de voir qui restent en surface. Et cela conduit à modifier la notion de " figure", qu'on entende ce mot dans son sens classique ou qu'on l'entende selon l'opposition entre dessin et figure, opposition qui en fait est celle entre le caractère particulier de toute visualisation réalisée et le caractère général des propriétés de l'objet représenté. Pour qu'une figure donne lieu à une visualisation géométrique elle doit émerger de ce que nous avons appelé ailleurs un "circuit de visualisation" organisé autour d'une trame de tracés 1D/2D, car à partir d**'un réseau de droites** on peut faire apparaître une grande diversité de Formes 2D/2D. La résolution du problème ci-dessous (Figure 10) de la reproduction d'une figure avec une règle non graduée permet de bien mettre en évidence ce processus.

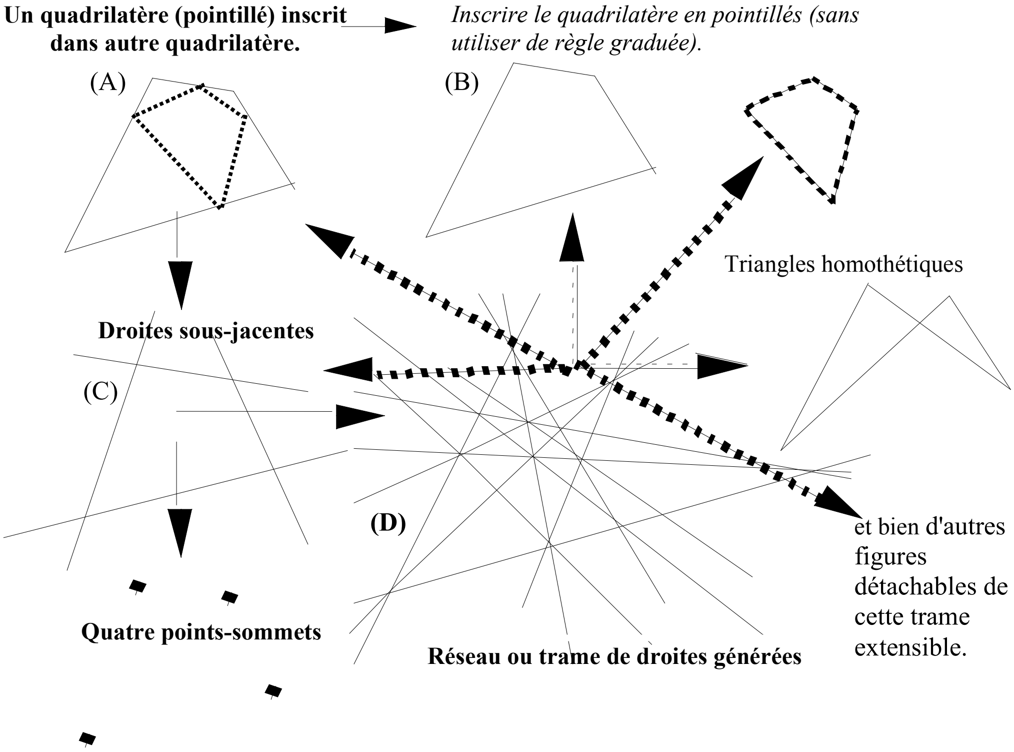


Figure 10 : Circuit de visualisation organisé à partir d'une trame de droites (D)

Pour reproduire dans le quadrilatère (B) le quadrilatère en pointillés qui est inscrit dans le quadrilatère A, il faut commencer par tracer les droites supports du quadrilatère (B). On obtient ainsi un premier réseau de droites qui peut être développé en les prolongeant pour faire apparaître de nouveaux points d'intersection et construire ainsi de nouvelles droites passant par ces points d'intersection. Sur réseau de droites (D) ainsi généré, on peut voir, c'est-à-dire détacher un grande variété de polygones dont ceux correspondant à la configuration initiale (A). C'est cette trame sous-jacente qui permet de passer de passer d'une figure à une autre, et donc de reproduire la figure demandée. Naturellement, pour penser à cette solution, il faut être capable de reconnaître dans ce réseau une grande variété de figures.

Dans la visualisation iconique toute figure tend à être une représentation stable ou non modifiable parce qu'image ou représentation d'un objet. Avec la déconstruction dimensionnelle la figure n'est plus qu'une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe, le détachement d'une figure particulière étant commandé par l'énoncé du problème. Autrement dit toute figure, en géométrie plane, est une configuration transformable en d'autres*, chacune se détachant d'une même trame, au gré des propriétés ou des objets que l'on nomme*.

Deux points sont donc essentiels pour bien comprendre le fonctionnement en profondeur de la déconstruction dimensionnelle des formes.

— (1) Le champ réel du travail sur les figures est constitué par la trame des unités figurales 1D/2D, et non plus par les unités figurales 2D/2D qui sont souvent introduites comme les figures de base. A partir du réseau de droites on peut faire apparaître une grande diversité de formes 2D/2D. Mais cela requiert aussi la reconnaissance des formes non visibles immédiatement, du type de celle qui est requise dans la décomposition méréologique.

— (2) Cette déconstruction dimensionnelle des formes est le pré-requis pour une compréhension effective de toute énonciation des propriétés géométriques et donc pour leur mobilisation effective par les élèves dans la résolution de problèmes.

Pour illustrer ces deux points revenons au problème du reformatage d'un triangle en parallélogramme. La justification de la solution, mais non pas sa découverte qui peut être obtenue au terme de *n* essais de plusieurs reconfigurations, fait appel au théorème des milieux et aux propriétés du parallélogramme**. Mais, à l'inverse, suffit-il de connaître ce théorème pour trouver la solution ?** En d'autres termes, y-a-t-il une stratégie visuelle pour passer de la figure d'un triangle à la reconfiguration IV (Figure 11 ci-dessous) ? Il faut voir le triangle à partager sur le fond du réseau des droites qui en supportent les côtés, ou avoir le réflexe de générer ce réseau de droites (III) sous-jacents à cette figure. Ce réseau contient, parmi d'autres figures possibles, le triangle à partager ET le parallélogramme obtenu par reconfiguration. En outre, parce qu'il contient la figure de départ et la figure cible (le parallélogramme) ce réseau s'articule de manière pertinente et congruente à la justification mathématique.

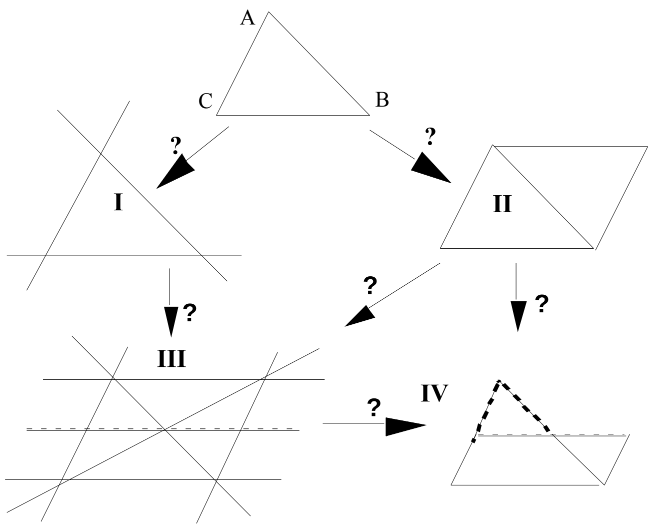


Figure 11 : Déconstruction dimensionnelle du triangle de départ

Un réseau de droites supports, construit à partir d'une figure de départ, contient potentiellement une grande variété de figures 2D que l'on peut faire apparaître au gré des questions que l'on se pose. Et un tel réseau permet donc *de voir le passage mathématique des unes aux autres*, c'est-à-dire les propriétés qui le rendent possible. Ainsi dans l'exemple que nous venons d'examiner, la seule figure qui permet de voir est III, toutes les autres n'étant que des sous-figures visuellement détachables de la configuration III comme dans l'exemple donné plus haut (Figure 10).

D'un point de vue cognitif cela veut dire que deux types de capacités doivent être développées parallèlement chez les élèves pour les faire entrer dans la manière mathématique de voir les figures :

- d'une part la déconstruction dimensionnelle des formes 2D perceptivement prégnantes, y compris celle des figures considérées comme étant des figures de bases, par la construction du réseau de droites dont les formes D2 ne sont que des sous-figures. L'acquisition d'une telle capacité est longue et demande l'organisation de séquences d'activités spécifiques (Godin, 2004),

- d'autre part la reconnaissance de toutes les 2D qui potentiellement peuvent être reconnues dans un réseau de droites où elles ne sont pas d'emblée visibles.

4. Comment, et jusqu'où, "voir" et dire peuvent-ils se rejoindre en géométrie ?

Ce qu'on appelle "figure" en géométrie est un tout dans lequel des hypothèses donnant des propriétés sont combinées avec une représentation visuelle. Concrètement, cela se traduit par le fait que le codage (des lettres codant des points d'intersections ou d'autres points, des marques codant les propriétés données dans les hypothèses) fait partie de la figure. Or une analyse en termes de registre de représentation conduit à ne voir là qu'une association de surface ! En réalité, les figures géométriques dépendent de deux registres de représentation qui sont cognitivement hétérogènes, car ils gardent leurs propres possibilités de traitement, ce qui veut dire qu'ils fonctionnent en parallèle et de manière indépendante. Pour s'en rendre compte il suffit rappeler la double variation suivante :

- pour une même représentation visuelle, on peut avoir plusieurs énoncés différents et donc des "figures géométriques " qui sont différentes du point de vue mathématique,

- pour un même énoncé, on peut avoir différentes représentations visuelles possibles, c'est-à-dire des " images" différentes si l'on tient compte du point de vue psycho-didactique courant et naïf.

Les problèmes spécifiques que pose l'apprentissage de la géométrie ne tiennent donc pas seulement à la complexité de la visualisation non iconique et à la déconstruction dimensionnelle des formes qui la sous-tend, ils tiennent aussi à la manière dont un discours géométrique peut s'articuler avec cette visualisation. Car l'activité géométrique présuppose toujours la synergie entre les fonctionnements propres à ces deux registres de représentation. Or cette articulation est cognitivement plus complexe que l'articulation spontanée entre langage et image, même si l'on prend en compte la diversité des manières de voir que nous venons d'analyser (Figure 1).

Pour en introduire l'analyse nous partirons d'une étude qui peut paraître très ancienne, mais qui a encore aujourd'hui le rare avantage de mettre en œuvre à la fois des variations d'énoncés et des variations de figures dans l'étude des problèmes donnés aux élèves (Dupuis, Pluvinage, 1978). Dans la présentation ci-dessous, nous avons évidemment séparé la figure et son double codage : le codage par des lettres qui a pour fonction de désigner sur la figure les objets dénommés dans l'énoncé, et le codage par des logo et des nombres qui a pour fonction de reporter sur la figure les hypothèses données dans l'énoncé.

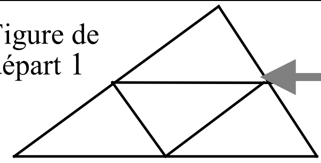
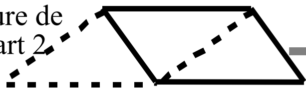
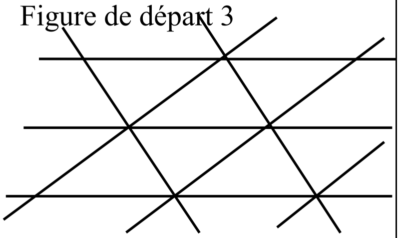
Registre de la visualisation : un jeu de réorganisations visuelles selon la forme ou selon le nombre de dimensions	**ARTICULATION**	**Registre du discours :** mise en œuvre, dans toute formulation, de trois types d'opérations discursives
Figure de départ 1  Figure de départ 2  Figure de départ 3 	*Quels éléments des énoncés permettent* *un ancrage dans la visualisation ?* *Quelle fonction* *remplit la figure par rapport à l'énoncé et à la résolution du problème :* *- illustration ?* *- heuristique ?* *- objet support pour des mesures ?*	Enoncé 1. A'C' et AC sont parallèles A'B' et AB sont parallèles B'C' et BC sont parallèles Prouver que A est le milieu de B'C' Enoncé 2 ABED et BCED sont des parallélogrammes. Prouver que B est le milieu de AC Enoncé 3 .... Enoncés de propriétés à mettre en œuvre... (par exemple, le théorème des milieux)
QUE VOIT-ON ? H1 Quelles sont les possibilités de transformation de la figure prise comme figure de départ qui sont visuellement accessibles ? H2 Quelles sont les organisations qui peuvent faire voir ce qui est cherché ?	*Le double codage suffit-il pour qu'il y ait communication et synergie de fonctionnement entre les deux registres ?*	**QUE FAUT-IL VOIR ?** **A quoi correspondent visuellement :** L1. les termes employés dans les énoncés (quand on pose un problème, quand on formule une conjecture, quand on donne des instructions ...) L2. les propositions (définitions, théorèmes ...) L3. les raisonnements pour justifier, ou prouver (déduction ou réfutation)

Figure 12 : Les deux questions du problème cognitif de l'articulation entre visualisation et discours

Dans cet exemple, les deux énoncés de problème sont comme deux descriptions analogues qui peuvent être faites de l'une des trois figures de départ, car ils donnent les mêmes hypothèses. Pourtant ils ne s'accordent pas de la même manière à chacune de ces trois figures. Les résultats montrent que, d'une page à la suivante, les élèves peuvent ne pas du tout reconnaître le même problème présenté selon deux combinaisons différentes, comme si par exemple il n'y avait absolument rien de commun entre la figure de départ 1 et la figure de départ 2 (Dupuis,Pluvinage 1978, p. 75-79). Cependant l'intérêt de ce travail n'est pas là. Indépendamment de la " compétence" requise pour réorganiser visuellement une figure de départ, la variation même des deux énoncés permet de soulever une question beaucoup plus vaste : quels sont éléments discursifs qui, dans un énoncé, permettent de passer de la formulation des hypothèses à la figure et qui, donc, permettent d'articuler les démarches discursives de la pensée à la *mobilité de réorganisation visuelle de ce que l'on voit* ? Naturellement, dès qu'il est question de langage (et peut-il y avoir des hypothèses sans un langage ?), il est absolument nécessaire de prendre en compte au moins trois niveaux d'opérations discursives (Duval 1995a) : nommer ce dont on parle, en énoncer quelque chose, et mettre en relation ce que l'on dit avec ce qui vient d'être énoncé pour compléter, expliquer, justifier le propos. Ces trois niveaux d'opérations discursives sont sous-jacents à la production, verbale ou écrite, de toute formulation.

4.1. Quels mots pour dire ce qu'il faut pouvoir visuellement discerner sur une figure ?

La géométrie requiert l'utilisation d'un vocabulaire technique relativement lourd. On peut relever très vite dans le curriculum l'introduction d'au minimum une quarantaine de termes, et si nous faisons la somme de celui qui est introduit jusqu'en quatrième nous dépasserions très largement la centaine de termes ! Cependant le plus important n'est pas là, il est dans l'hétérogénéité sémantique de cette terminologie. Toute formulation en géométrie recourt à un vocabulaire qui recouvre au moins quatre types de termes dénominatifs[3]. Pour le faire apparaître, il suffit d'examiner la manière dont le sens de ces termes peut être mis en correspondance avec des unités figurales dans le registre de la visualisation. Une telle entreprise n'a rien d'arbitraire : elle est au cœur des exigences qui ont contribué au développement de la géométrie dans l'histoire. Les 23 définitions qui ouvrent les *Eléments*, et qui précèdent les "demandes" et les "notions communes ",

3 Cette classification peut être affinée en distinguant des termes de relation entre des objets. Par exemple, " tangent" est un terme de relation entre un objet D2 et un objet D1 ou un objet D2. "Sécant" relèverait aussi de cette catégorie. Ces termes sont associés à des configurations particulières. La relation désignée est donc visuellement constatable, mais seulement dans le champ restreint de la feuille ou de l'écran. Au delà, dans le champ perceptif, cela devient indiscernable. Les rails de chemin de fer n'apparaissent pas parallèles ! L'expression " point à l'infini " se réfère à un tel saut. L'apport essentiel d'une telle classification est de mettre en évidence les manières différentes dont les termes géométriques peuvent être mises en correspondance avec des unités figurales et permettre ainsi un ancrage visuel pour la description verbale d'une situation.

constituent l'inventaire du corpus sémantique nécessaire à toute l'entreprise d'Euclide (Euclide, 1990). En ce sens, ces définitions sont tout autant des définitions sémantiques que des définitions mathématiques. Leur fonction est de fonder l'articulation du discours mathématique avec l'organisation de la perception visuelle formes.

1. Termes analytico-descriptifs donnant un statut d'«élément» à un tracé dans l'organisation visuelle de plusieurs tracés **Directement associé à un seul tracé visuel**	**2**. Termes dénominatifs d'objets d'étude : **Associés à une organisation visuelle de plusieurs tracés en une forme typique**	**3**.Termes de propriété caractéristique permettant de classer les objets d'études **Associés à la comparaison de tracés en tant qu'éléments de l'organisation visuelle d'une forme typique**	**4.**Termes de relation entre tracés (éléments) hors toute appartenance à une organisation visuelle **Non décidables visuellement**
Eléments D1 : *côté, diagonale, corde, rayon...* **Eléments D2 :** *sommet, point d'intersection, angle* **Elément D3** *: face, plan d'intersection(?)*	**Objets D1 :** *droite, segment, courbe* **Objets D2 :** *triangle, carré, parallélogramme, polygone, cercle..* **Objets D3 :** *pyramide, tétraèdre, cube, prisme, polyèdre, sphère..*	**Liés à un type d'objets :** *— Milieu, centre* *— Isocèle, équilatéral, rectangle, quelconque* *— Régulier, convexe*	*Parallèle perpendiculaire, symétrique, égal*
(EUCLIDE Livre I) Définitions : 1, 2, 3, 5, 6 , 8, 13, 14, 17	Définitions : 4 ,7, 9, 15, 16, 18, 19, 22	Définitions : 11, 12, 20, 21	Définitions : 10, 23

Figure 13 : Classification de termes géométriques en fonction de leur valeur descriptive d'un donné visuel

Dans les exemples, nous avons pris en compte le vocabulaire concernant les formes en fonction de la variation dimensionnelle, et non pas celui concernant les grandeurs (*longueur, aire, périmètre*...). Car les grandeurs échappent en grande partie à la visualisation, parce qu'elles imposent des seuils étroits d'estimation et qu'elles ne peuvent être appréhendées que par des opérations de mesure et des nombres.

L'important, dans l'analyse du vocabulaire utilisé en géométrie, n'est pas la quantité des termes techniques, mais l'étendue du spectre sémantique qu'il recouvre. En effet, pour décrire ce qu'il faut voir, les mathématiques recourent à deux catégories de termes qu'on ne retrouve pas dans le vocabulaire commun, pourtant plus important, employé en dehors des mathématiques pour décrire ce que l'on voit : les termes analytico-descriptifs et les termes de relations entre tracés considérées indépendamment de leur appartenance à l'organisation visuelle de la forme d'un objet (colonnes 1 et 4). Et ce fait doit être mis rapproché de la caractéristique de la visualisation géométrique, la déconstruction dimensionnelle des formes. On peut d'ailleurs remarquer que 6 des 23 définitions d'Euclide sont uniquement des explicitations de la déconstruction dimensionnelle des formes (définitions 1, 2, 3, 5, 13, 14). La déconstruction dimensionnelle des formes devient l'étape intermédiaire nécessaire entre la reconnaissance perceptive immédiate des formes et l'identification des objets mathématiques correspondant, comme le montre d'ailleurs le simple examen des définitions qui peuvent être données des objets d'étude (colonne 2) ou des propriétés caractéristiques (colonne 3). Autrement dit, l'application d'un terme de dénomination d'objet (colonne 2) à une figure, ou à une sous-figure, implique la prise en compte des termes analytico-descriptifs et des termes de relations entre éléments.

Mais le problème pour l'apprentissage est que ces catégories de termes spécifiques aux mathématiques entrent en concurrence avec un vocabulaire non mathématique qui, lui, n'implique aucune déconstruction dimensionnelle des formes : *trait, ligne, vertical, horizontal, croisement...* Ce vocabulaire courant, essentiellement lié à une pratique graphique et à une pratique de déplacement sur des espaces de jeu (échiquier) ou sur des plans dessinés, a une valeur descriptive plus immédiate dans la mesure où il correspond soit à ce qui est produit par une action de traçage (*trait, ligne*....), soit aux repères physiques du sujet (*horizontal, vertical*...) soit encore à des relations directement perçues et exprimables par des oppositions qualitatives (*se couper /ne pas se couper, se toucher/ ne pas se toucher*.).

Considérons maintenant les termes dénominatifs d'objets (colonne 2). Un certain nombre présentent l'avantage apparent d'appartenir à la fois au vocabulaire mathématique et au vocabulaire courant pour nommer ou décrire des objets ou des formes (architecturales par exemple) de l'environnement. Le choix et la compréhension de ces termes vont dépendre de la manière de voir, iconique ou non iconique, de celui qui regarde les objets de l'environnement ou leur représentation (*supra* II). Pour un sujet fonctionnant en mode iconique de visualisation, les termes analytico-descriptifs et ceux de relation ne sont d'aucune utilité, et peut-être aucun sens, pour dire ce qu'il voit. Ils deviennent au contraire essentiels pour fonctionner en mode non-iconique de visualisation.

4.2. Comment des propositions[4] peuvent-elles être mises en correspondance avec une figure ou être converties en une figure ?

Le rôle du langage n'est pas de "mettre en mots" ce qui serait déjà clairement pensé ou vécu mais de mettre en propositions pour construire la pensée des objets de connaissance, du moins dans le domaines des sciences et des mathématiques. Ce que les propositions énoncent constituent un sens qui est irréductible à celui des mots qu'elles articulent. Cette irréductibilité apparaît avec les problèmes spécifiques que soulèvent aussi bien la production, orale et surtout écrite, que la compréhension des propositions, entendues ou lues : par exemple, la distinction entre une proposition et sa réciproque, bien qu'elles emploient les mêmes mots, ou encore la modification de sens liée à la quantification et à la négation, ou encore son changement de sens en fonction du statut qui lui est donné dans le développement d'un discours. La question de l'articulation entre visualisation et discours se pose alors d'une manière plus précise. Il s'agit de savoir si cette articulation se limite aux ancrages que les termes employés permettent d'établir dans la représentation visuelle ou si, au contraire, elle ne mobilise pas des interactions plus complexes.

L'articulation cognitive entre le registre de la visualisation et celui du langage ne se fait pas au niveau des mots mais à celui des propositions. En effet, la production d'une représentation n'est pas la même selon qu'elle se fait, ou qu'elle ne se fait pas, *en fonction de la production préalable d'une autre représentation dans un autre registre*. Ainsi, une figure peut être produite pour illustrer un énoncé, mais inversement un énoncé peut être produit pour décrire ou pour expliquer une figure. **Ces deux situations sont cognitivement totalement différentes et ne conduisent pas nécessairement aux mêmes productions.** Revenons à l'exemple plus haut (Figure 12) et prenons l'énoncé 1. A partir de cet énoncé 1 on peut construire la figure 3, puis la figure 1 en effaçant les traits qui dépassent pour obtenir un contour fermé. On ne construit pas la figure 2 : celle-ci suppose une réorganisation visuelle des formes reconnues dans les figures 1 ou 3. Cette réorganisation visuelle est la condition pour voir la figure 2 comme une sous-figure de la figure1. Prenons

---

4 Nous prenons le terme "proposition" à la fois dans son sens grammatical large, lequel recouvre toute composition syntaxique comportant un verbe conjugué, et dans son sens logique plus restreint (excluant, par exemple, les questions ainsi que la plupart des actes de parole comme les promesses, les ordres, les demandes...). En mathématique, il faut y ajouter la restriction de l'emploi de ce terme à certains statuts dans l'organisation théorique du discours : celui de théorème. Nous ne pouvons ici que rappeler ce phénomène important pour les apprentissages et aussi pour la communication. Les propositions sont peu discernables à l'écoute d'une parole. Ce qui s'impose à l'écoute ce sont les mots et même ce qu'on appelle les mots clés, ces mots clés variant d'un individu à l'autre selon sa base de connaissances. C'est pourquoi l'expression écrite remplit un rôle spécifique, qui est irréductible à toute expression orale, pour la prise de conscience des raisonnements (Duval , 2001 p.190-195).

maintenant la figure 1. L'énoncé 1 peut être vu comme une description de la figure1 mais non pas la l'énoncé 2, à moins que l'on soit capable de faire spontanément la réorganisation visuelle requise et que l'on pense au théorème à trouver pour résoudre le problème. Or cela est le point de vue du rédacteur de l'énoncé du problème et non pas celui d'un élève pour lequel l'articulation cognitive entre visualisation et langage n'est pas encore mise en place.

On peut ainsi vérifier qu'une figure et un énoncé (linguistique ou symbolique) ne remplissent pas l'un par rapport à l'autre les mêmes fonctions et n'ont donc pas le même statut. C'est pourquoi, lorsque deux représentations sont simultanément mobilisées dans deux registres différents, il devient essentiel de distinguer les statuts de représentation autosuffisante pour l'une et de représentation auxiliaire pour l'autre (Séminaire IUFM, 1999). Ainsi au niveau des propositions l'articulation entre figures et propositions est subordonnée à la fonction que ce qui est produit comme représentation auxiliaire remplit par rapport à ce qui est considéré comme représentation principale. *La formulation d'un énoncé et le choix d'une figure dépendent de la fonction que ce qui, dans un contexte donné, est considéré comme représentation auxiliaire doit remplir par rapport à ce qui est mathématiquement considérée comme représentation autosuffisante.* L'analyse fonctionnelle que présente le tableau suivant en donne une première idée.

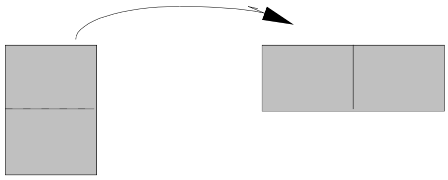
Fonctions que les figures peuvent remplir par rapport aux propositions (considérées comme représentations autosuffisantes)	**Fonctions que les propositions peuvent remplir par rapport aux figures (considérées comme représentations autosuffisantes)**
Illustration ou exemple, comme support «ntuitif»	*Description (d'un état, d'une opération, d'une relation)*
CONTRE-EXEMPLE	*DÉFINITION D'UN OBJET Explicitation par l'apport d'une information ou d'une donnée(les hypothèses)*
Objet quasi-matériel	*Comparaison de grandeurs discrètes ou continues*

Figure 14 : Relation entre une proposition énoncée et une figure

Il suffit donc de changer le statut ou la fonction d'un énoncé pour changer son type de formulation. Voyons maintenant, à titre d'exemple, deux conséquences de cette analyse fonctionnelle de l'articulation entre figure et énoncé, c'est-à-dire de l'articulation entre visualisation et langage au niveau des propositions énoncées : la production d'une figure qui soit un contre-exemple, et les différentes définitions possibles d'une droite.

a. La production d'une figure comme contre-exemple d'une proposition avancée comme conjecture

D'un point de vue mathématique, la production d'un contre-exemple constitue la situation où l'articulation entre visualisation et formulation est la plus significative, puisque la figure est alors un exemple qui prend la valeur mathématique de preuve. *Mais on n'a peut-être pas prêté assez attention au fait que, d'un point de vue cognitif, cette articulation se fait au niveau d'une proposition énoncée et non pas à celui du raisonnement.* Une figure prend valeur mathématique de preuve quand elle est un exemple qui réfute une proposition avancée comme conjecture. La capacité, chez les élèves, à produire un contre-exemple présuppose à la fois le développement de " compétences" concernant la quatrième manière de voir, celle de l'inventaire bricoleur et une coordination déjà forte entre le registre de la visualisation et celui des différents niveaux d'opérations discursives. L'étude de cas faite à propos de la relation entre aire et périmètre (Balacheff 1988) illustre bien ce fonctionnement cognitif complexe qui est sous-jacent à la production d'une figure comme contre-exemple. Il s'agissait ici de discuter la proposition " deux rectangles qui ont la même aire ont le même périmètre". Pour rejeter cette proposition "le schéma ci-dessous "montre" bien cette transformation qui s'appuie sur l'invariance de l'aire par découpage et recollement :



l'aire (ou le produit) est trivialement conservée, quand au périmètre son augmentation résulte de l'inégalité..." (Balacheff 1988, p. 289). Or la production de ce contre-exemple, qui dépend de l'opération visuelle de reconfiguration, ne semble pas avoir été " à la portée des élèves ", ou alors sa production semble avoir pris tellement de temps qu'elle a perdu tout effet de contradiction pour que la valeur épistémique liée à la compréhension immédiate de cette proposition, et associée à une évocation visuelle iconique, ait pu être remise en cause (*ibid.*, p. 299). D'une manière plus générale on pourrait montrer que la capacité à produire une figure comme contre-exemple requiert une pratique spontanée de cette manière de voir propre à l'inventeur-bricoleur. Corrélativement, on pourrait montrer que la visualisation la plus congruente avec des propositions (énoncés de théorème ou de définition) est une séquence de deux figures.

b. Figure et définition : le cas de la droite

Il peut paraître saugrenu de prendre le cas de la droite pour analyser l'articulation entre figure et définition, tellement la visualisation d'une droite semble primitive et évidente : ce serait le trait "droit" tracé à l'aide de cet instrument qu'est une règle. En outre, d'un point de vue mathématique, ce n'est pas *une* droite qui est intéressante mais la relation entre *deux* droites, lesquelles peuvent être parallèles, sécantes, orthogonales, coplanaires ou non coplanaires, etc. Mais revenons à ces tracés censés servir de support immédiatement visible pour les termes de ces différentes relations mathématiques. Comment expliquer ce qu'ils représentent ou comment expliquer le sens du mot "droite" ne serait-ce que pour pouvoir distinguer un tracé "droit" et un tracé " courbe" ou, plus subtilement, une droite et un segment (non orienté) ? Bref comment ne pas confondre la droite et n'importe quelle ligne ou n'importe quel tracé graphique ? Le plus souvent, quand on ne s'en tient pas à l'évidence de l'usage empirique de la règle, on se contente de l'une des quatre types de définition, ou de description, suivants :

(a) On se fait une idée nette de la droite en regardant

- un fil très fin, court (?) et ***bien tendu***
- un rayon de soleil pénétrant par un très petit trou dans une chambre obscure.

(b) " La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. Ce plus court chemin s'appelle la distance des deux points..." (Lepoivre et Poirson 1920 p.2)

(c) " Nous ne pouvons penser une ligne (droite) sans la tracer dans la pensée... le tracé de cette ligne est un mouvement " (Kant, 1976 p. 167).

(d) " Deux points distincts A et B sont éléments d'une droite et d'une seule. On dit " La droite AB "." (IREM 1979 p.164)

La première formulation (a) est iconique. Elle évoque un objet physique qui sert d'étalon en quelque sorte pour ce que l'on va appeler "droite". La deuxième formulation (b) est métrique. Mais cette formulation est visuellement aveugle. Car il ne faut surtout pas lui associer l'une des images de la formulation (a) ou encore l'usage de la règle, car alors on est conduit à un paradoxe dès que l'on est sur la sphère où les droites deviennent des cercles. En réalité cette formulation métrique implique, sans le préciser, le type de surface sur lequel on définit le "plus court chemin". La troisième formulation (c) est dynamique et iconique. Elle se réfère au mouvement qui la produit, *mouvement qui lui confère au moins deux propriétés : le fait que la droite peut toujours être prolongée au delà de son tracé* et le fait qu'elle est continue. La quatrième formulation (d) est affine. Elle s'oppose radicalement aux trois précédentes, puisque, selon le principe de recherche d'économie maximale qui régit la formulation des définitions mathématiques, elle caractérise une droite par seulement deux points sans même recourir à quoi que ce soit qui les rejoigne comme dans les formulations (b) ou (c). Cependant la difficulté de cette formulation n'est pas dans la suppression de la valeur visuelle du trait, car les deux points servent nécessairement d'appui pour tracer une droite. Elle est dans le fait que les points échappent à toute visualisation. Un point n'a pas d'existence visuelle propre, c'est-à-dire ne peut pas constituer une unité figurale identifiable. **Un point est toujours un effet de marquage, c'est-à-dire de codage, soit par une lettre,**

soit par un nombre (graduation d'une droite) pour fixer une extrémité ou une séparation et à ce titre relève du seul discours. La visualisation s'arrête aux tracés de segments qui sont les unités figueraies les plus petites, ou, si l'on préfère une formulation plus physique, qui sont les pixels de toute représentation géométrique. Il y a bien sûr les points " remarquables " qui apparaissent avec deux droites sécantes au avec les sommets des polygones ou des polyèdres. Mais visuellement l'unité figurale est une configuration de deux traits prolongés ou non et, à ce titre, sont intrinsèquement liés à l'élément visuel D2 qu'est un angle (Figure colonne 1). En outre, ces points remarquables ne peuvent être que peu nombreux...

Que retenir de l'analyse de ces quatre types de formulation ? Les trois premières définitions sont en quelque sorte des descriptions d'une caractéristique optique immédiate (a), d'une procédure de mesure physique d'une distance entre deux repères fixés matériellement (b), ou d'un geste utilisant ou non un instrument de traçage (c*). Ces définition-descriptions sont des représentations auxiliaires par rapport à des représentations visuelles,* ou "perceptivo-gestuelle" pour reprendre l'expression proposée par G. Vergnaud, qui elles sont ici les représentations autosuffisantes. Et elles constituent un obstacle intuitif à la quatrième définition qui, elle, se fait en rupture avec toute visualisation. Et comment s'étonner que les élèves soient étrangement déconcertés par tous les problèmes dans lesquels on demande de montrer l'alignement de trois points, alors que sur la figure ils paraissent sur le même tracé ? De manière plus générale, les trois premières définitions sont des définitions pragmatiques et, à ce titre, elles s'opposent radicalement aux définitions mathématiques. Du moins si on s'en tient au fonctionnement cognitif qui est sous-jacent à la production et à la compréhension de ces définitions. Deux exigences, en effet, conduisent à un renversement des démarches cognitives quand on passe de définitions pragmatiques aux définitions mathématiques.

— **La prise en compte des cas possibles** et pas seulement celles des données observables. Toutes les définitions pragmatiques se font à partir d'un corpus de données observables et même, le plus souvent, à partir des données les plus fréquemment observables. Mais, en mathématiques, pour accepter ou pour réfuter une proposition avancée comme conjecture ou même seulement comme définition, un individu ne peut donc pas s'en tenir à la base de connaissances dont il dispose ou que l'expérience concrète lui fournit, il lui faut explorer différents cas possibles. C'est pourquoi la production d'un contre-exemple peut paraître résulter d'une "invention" au regard des connaissances dont un individu disposait.

— **La recherche d'une économie maximale**. Or quand il s'agit de définir les objets dont la connaissance dépend de l'observation et donne lieu à une visualisation iconique, c'est une exigence inverse, celle d'exhaustivité, qui s'impose dans la définition d'un objet. Il s'agit d'énumérer toutes les propriétés comme on énumère tous les détails importants. *Les définitions mathématiques* *résultent, au contraire, d'une démarche de réduction pour obtenir la description minimale* : Parmi une liste de propriétés pouvant être attribuées à un objet, il s'agit de retenir uniquement celles qui suffiront pour retrouver, par déduction, toutes les autres. Naturellement cela ouvre à la voie à plusieurs définitions possibles d'un même objet. Ainsi on peut avoir au moins trois définitions différentes d'un parallélogramme.

4.3. Quels recouvrements entre visualisation et raisonnements pour justifier ou pour démontrer ?

Personne, bien sûr, ne confond l'énonciation de propositions et les démarches discursives par lesquelles on conduit et développe un raisonnement. Mais les choses deviennent plus délicates à distinguer, lorsqu'il s'agit d'expliquer en quoi un raisonnement se distingue d'une description ou d'une explication et, surtout, en quoi un raisonnement qui justifie, comme par exemple dans le cadre d'un débat pour une décision à prendre ou sur une question de société, est différent d'un raisonnement qui prouve comme en mathématiques.

Invoquer la logique, ou la "dérivabilité logique ", est évidemment naïf, lorsqu'il s'agit des raisonnements qui sont faits dans la langue naturelle et avec ses ressources. Car cela ne permet pas de comprendre pourquoi les déductions valides n'ont aucunement force de preuve aux yeux des élèves et comment elles s'inscrivent dans la langue courante. Inutile de rappeler ce mur invisible auquel se heurte l'enseignement de la géométrie à partir du collège. L'utilisation de définitions et de théorèmes pour démontrer la vérité de nouvelles propositions ne génère aucune **conscience de nécessité** dans l'esprit des élèves. En effet, pour que puisse se produire cette conscience de nécessité il faut d'abord avoir compris le mécanisme discursif, très spécifique, par lequel une nouvelle proposition est déductivement produite comme conclusion d'autres propositions (hypothèses et théorème). Et c'est seulement sur la base de cette compréhension que le **transfert du degré de conviction** qui est attaché à une proposition (sa valeur épistémique[5]) peut se faire à une autre proposition, du moins pour celui qui effectue l'opération discursive du pas de déduction. Car les théorèmes ne s'utilisent pas et ne fonctionnent pas du tout comme des arguments. Les théorèmes mobilisent un mécanisme d'expansion discursive qui consiste en une substitution de propositions les unes aux autres, tandis que les arguments procèdent par composition accumulative de propositions les unes avec les autres, comme chaque fois qu'il s'agit de convaincre, ce mécanisme étant d'ailleurs commun à toutes les autres

5 Rappelons que le sens des propositions énoncées n'est pas univoque. Il comporte trois dimensions, selon que l'on considère soit leur contenu, soit leur valeur par rapport à une base de connaissances, soit leur rôle dans l'organisation d'un discours ou dans un acte de communication (Duval 2001 p.198). Tout raisonnement oblige à prendre simultanément en compte ces trois dimensions, ce qui n'est pas le cas pour les récits, les descriptions ou les explications.

formes de discours et à toute pratique de parole (Duval 1995 p. 123-131, 255-266). Et faut-il le rappeler ? personne ne parle en fonctionnant sur le mécanisme discursif de substitution, même pas le mathématicien en dehors des mathématiques ! Ce mécanisme d'expansion discursive par substitution convient mieux aux registres symboliques qu'à celui de la langue naturelle, mais c'est dans le registre de la langue naturelle que les élèves peuvent le mieux prendre conscience de sa spécificité si particulière et de sa force non seulement de preuve mais d'invention.

On voit donc qu'il ne faut pas confondre les raisonnement argumentatifs qui viennent à l'appui d'une proposition avancée comme choix, comme hypothèse (en dehors des mathématiques), ou comme conjecture .... et les raisonnement valides qui permettent de la démontrer. Il ne peut pas y avoir transfert d'apprentissage de l'un à l'autre parce que leurs fonctionnements respectifs sont en quelques sortes opposés et que la pratique des uns est communément répandue tandis que la pratique des autres est exceptionnelle parce que quasiment réduite au champ des mathématiques. On voit également que d'un point de vue didactique, il ne faut pas confondre raisonnement et preuve. Car les contre-exemples ne mobilisent pas du tout les mêmes opérations discursives que les déductions valides ou que le raisonnements par l'absurde. D'ailleurs les possibilités et le choix des démarches de preuve ne sont pas les mêmes selon que la conjecture s'avère être vraie ou fausse. Ce qu'a *priori* on ne peut pas savoir.

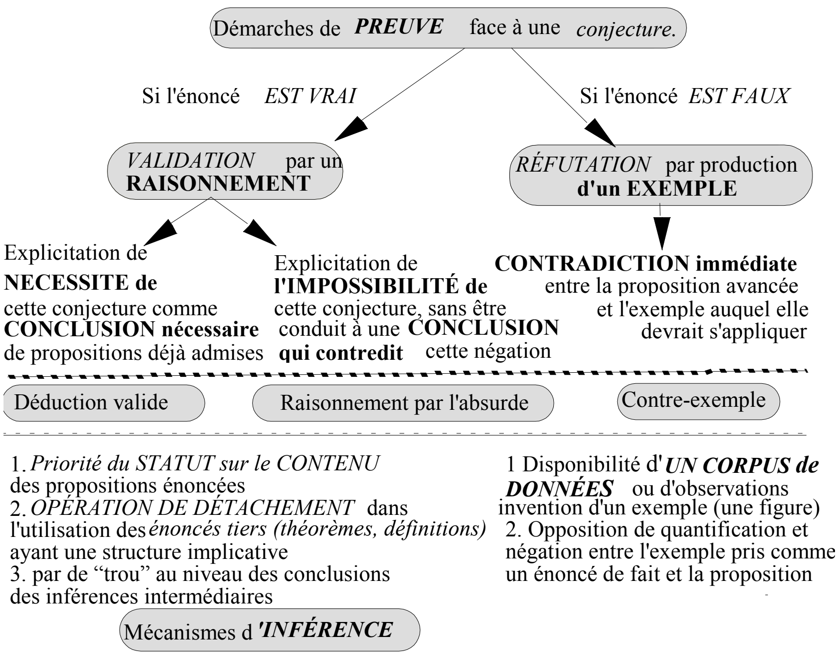


Figure 15 : Classification des démarches de preuve en fonction des processus cognitifs mobilisés

Ces rappels étaient indispensables pour bien poser la question des rapports entre visualisation et raisonnement (et non pas globalement preuve) : quel type de visualisation peut correspondre à une démarche de raisonnement et remplir soit la fonction heuristique qui est habituellement dévolue aux figures pour la résolution de problèmes soit la fonction de justification propre à l'argumentation ? Pour répondre à cette question nous devons distinguer trois situations très différentes. Il y a en effet des raisonnements qui suivent la visualisation, il y a ceux qui viennent compenser le défaut de visualisation, comme par exemple il s'agit de problèmes de géométrie dans l'espace et non plus de problèmes de géométrie plane, et il y a ceux qui au contraire s'affranchissent de toute visualisation.

4.3.1. Les raisonnements qui suivent la visualisation : la visualisation comme argument qui justifie

Nous nous limiterons ici à l'exemple plébiscité (si l'on relève le nombre de fois où il est cité ou mis en avant) : la visualisation donnée pour justifier la relation de Pythagore. Généralement on se limite à une séquence de deux figures, l'une donnant l'état initial et l'autre l'état final de la reconfiguration interne d'un carré en un autre carré (figure 16).

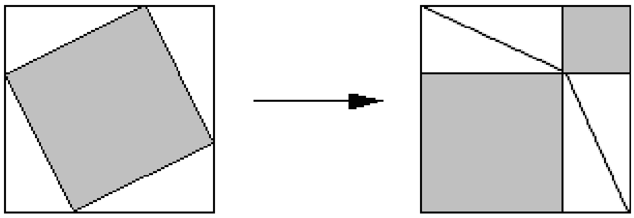


Figure 16 : Reconfiguration globale justifiant la relation de Pythagore

Evidemment, il s'agit là d'une visualisation tronquée qui ne montre pas grand chose et ne peut donc avoir telle quelle un pouvoir de preuve. Tout d'abord, on est supposé voir que le carré en pointillé dans l'état initial représente le carré de l'hypoténuse et que les deux plus petits carrés ombrés dans l'état final représentent la somme des carrés des deux autres côtés. Cette supposition nous renvoie à l'articulation du niveau précédent, entre une proposition (ici une conjecture) et une figure. Mais ici la question se pose à un autre niveau : Comment voir, ou faire voir, l'égalité que l'on veut prouver, parce que la partie en pointillés et les parties ombrées ne sont pas superposables ? *La visualisation est en fait dans la transformation représentée par la flèche.* Il faut donc l'effectuer d'une manière ou d'une autre pour voir.

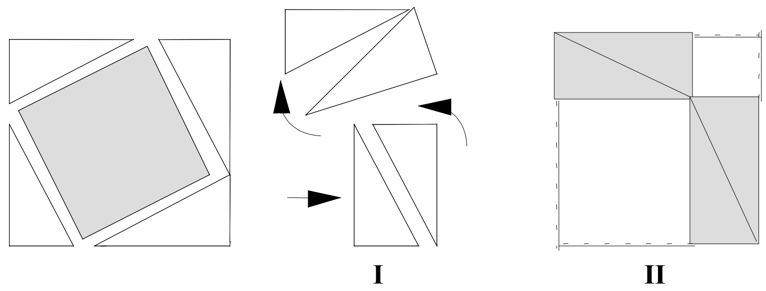


Figure 17 : Transformation combinant deux reconfigurations

Les quatre triangles doivent être reconfigurés en deux rectangles puis ceux-ci doivent être disposés dans le cadre du carré initial de manières à y faire apparaître deux carrés. L'invariance de cette transformation est assurée par le fait que les unités figurales qui ont été déplacées au cours de ces deux reconfigurations sont restées les mêmes. Et elle va permettre d'effectuer un calcul qualitatif. En effet cette transformation visuelle ne permet pas de voir l'égalité, puisqu'il n'y a pas de superposabilité possible. Pour la mettre en évidence, il faut un calcul qui explicite ce qui est invariant dans ces deux reconfigurations (Figure 18). Naturellement, au lieu d'effectuer ce calcul, on peut se contenter d'une description verbale qui prendra alors valeur d'un argument ou d'explication.

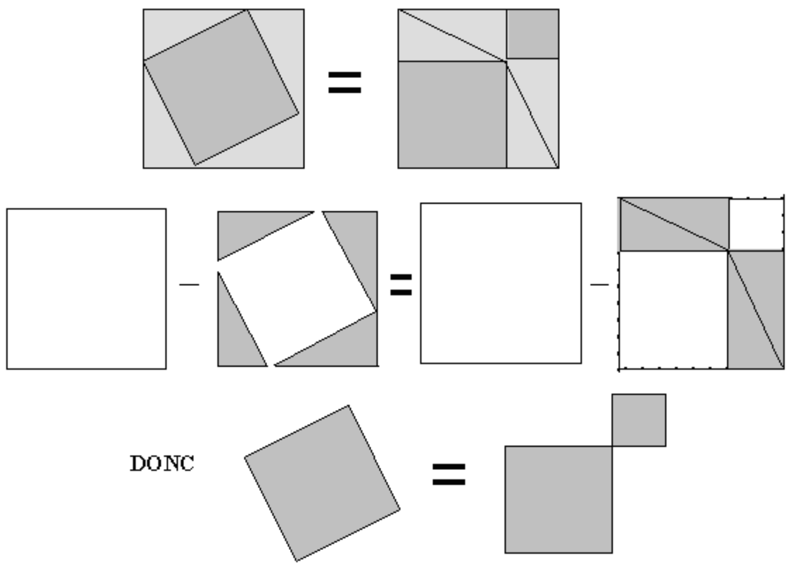


Figure 18 : Mise en évidence de l'égalité entre les aires par un calcul qualitatif

On peut faire trois remarques qui permettent de généraliser cette analyse

— (1)Au niveau de l'articulation entre visualisation et raisonnement, la visualisation consiste non pas dans une figure mais **une séquence d'au moins trois figures.** Et cette s séquence doit correspondre à des opérations visuelles effectuables sur des unités figurales 2D[6], ou s'il s'agit de géométrie dans l'espace, sur des unités figurales 3D/2D ou 3D/3D. **Mais cette visualisation exclut des opérations sur des unités figurales 1D** (et a fortiori la référence à des points).

— (2) La séquence de figures constitue une représentation autosuffisante. L'explication verbale ou symbolique des opérations constitue une représentation auxiliaire.

— (3) Aucun théorème, aucune connaissance de propriété mathématique, n'est mobilisée dans cette séquence et, s'il y a raisonnement, ce raisonnement ne se distingue pas d'une simple démarche descriptive. On pourrait aussi présenter cette description sous la forme d'un syllogisme, mais une telle présentation n'apporterai rien de plus puisqu'elle ne dépasse pas la description d'opérations que l'on peut effectuer par un balayage visuel ou même mettre en scène matériellement avec des pièces de puzzle. De toutes manières ici quelle que soit la forme d'explicitation adoptée, symbolique, descriptive ou syllogistique, elle apparaît seconde par rapport à la séquence visuelle et tombe sous l'adage " un diagramme vaut dix mille mots" !

Pour mieux comprendre l'importance de ces remarques, regardons une autre démonstration de Pythagore, celle d' Euclide (Euclide 1990, p. 282-284 ; IREM de Strasbourg 1986, p. 245-247), qui semble aussi s'appuyer sur une visualisation. Mais, d'un point de vue cognitif, elle fonctionne complètement à l'envers de l'exemple que nous venons d'analyser. Par rapport à notre remarque (1) elle implique la prise en compte des opérations figurales avec des unités 1D et se limite à une seule figure. Par rapport à la remarque (2) il y a inversion des statuts : c'est le discours qui constitue la représentation autosuffisante tandis que la figure est une représentation auxiliaire qui remplit deux fonctions différentes, support descriptif pour certaines parties du discours et support illustratif pour ne confondre les objets d'ancrage des différentes propositions. Par rapport à la remarque (3), elle suppose la mobilisation et l'utilisation de théorèmes. Les remarques (2) et (3) montrent que, pour être compris, le raisonnement d'Euclide suppose la compréhension du mécanisme discursif de substitution sans lequel l'application d'un théorème, c'est-

6 Ces opérations peuvent être faites par un simple balayage du regard (et s'il est fait très rapidement on pourrait être tenté de parler d'activité mentale !) ou par des manipulations de pièces de puzzle (ce qui suppose que l'on puisse disposer de plusieurs pièces pour chaque unité figurale à prendre en compte mais ainsi on introduit subrepticement un problème de représentation sémiotique dans ce qui veut être une manipulation purement matérielle)

à-dire un pas de déduction valide[7], ne peut générer la conscience de nécessité pour la conclusion ainsi obtenue. On pourrait montrer que dans le cas de la démonstration d'Euclide, le lien avec la figure ne se fait pas au niveau du raisonnement mais à celui des opérations discursives inférieures : d'une part le vocabulaire pour ancrer sur certaines unités figurales et d'autre part les propositions énoncées pour focaliser sur la relation existant entre deux unités figurales ainsi identifiées. Au niveau du raisonnement (donc de l'organisation permettant de dériver les propositions les unes des autres) il n'y a plus aucune correspondance avec la figure.

4.3.2. Les raisonnements qui s'affranchissent de toute visualisation

Tout raisonnement fonctionnant avec l'utilisation de définitions et de théorèmes (ceux-ci étant parfois appelés, de manière impropre mais moins théorique, "propriété") est indépendant de toute visualisation et même peut se faire contre toute visualisation. Et cela pour une raison simple que nous avons déjà indiquée. Ce type de raisonnement, à la différence de l'argumentation, dépend d'un mécanisme discursif de substitution de propositions les unes aux autres, et non pas du mécanisme général et spontané de composition accumulative de propositions.

Certes, on peut toujours proposer des problèmes dans lesquels des figures constituent le champ apparent du travail et qui vont servir d'appui pour les raisonnements. Mais dans ce cas, on en reste au type de situation que nous venons d'analyser, celui de la démonstration d'Euclide où la figure ne peut être qu'une représentation auxiliaire : les correspondances ne se font pas au niveau du raisonnement mais à celui des termes désignant des unités figurales et à celui des propositions. Et là la question de la preuve, telle qu'elle a été posée en didactique entre les années 1980 et 1990, reste entière : "C*omment faire pour que la démonstration fonctionne comme preuve pour les élèves, c'est-à-dire pour que les élèves soient convaincus par un résultat mathématique ?*". Cette question a été en fait peu entendue car on l'a réduite trop souvent à cette une autre question pourtant totalement différente : "quelles propriétés ou quels théorèmes utiliser pour démontrer telle conjecture ?". Faire trouver les bons théorèmes pour un problème, toujours lié à un contenu particulier, ne suffit pour faire naître cette conscience dynamique de nécessité qui se développe avec le fonctionnement discursif spécifique s'articulant autour des définitions et des théorèmes. Et sans cette

---

7 Rappelons ici qu'il ne faut pas confondre la validé d'un pas de déduction, laquelle repose sur le mécanisme de substitution, et la validé d'un enchaînement de pas valides laquelle repose sur le fait qu'il n'y a pas de " trou" dans l'enchaînement des pas (qui n'est pas un enchaînement de propositions) parce que chaque conclusion intermédiaire est transformée en prémisse d'un nouveau pas. Ces deux niveaux d'organisation discursive sont rarement distingués dans les travaux didactiques consacrés à l'initiation aux preuves qui *valident* un résultat par un raisonnement *valide* ! Les élèves soupçonnent-ils seulement ce double jeu si étranger à toute pratique de la parole, même dans les débats ?

conscience dynamique de nécessité il ne peut pas y avoir d'expérience des preuves mathématiques.

La très grande majorité des voies explorées se sont repliées sur la visualisation ou sur l'argumentation, laissant entière la question de l'entrée dans la compréhension et de la production des raisonnements valides, lesquels sont souvent disqualifiés par le recours à l'adjectif "formel" dont les connotations sont évidemment très négatives d'un point de vue éducatif. Nous avons, au contraire, essayé de faire découvrir aux élèves comment et POURQUOI l'utilisation d'un théorème rendait nécessaire l'affirmation de la proposition que l'on en tire comme conclusion, et comment une preuve pouvait se construire et s'imposer à partir de plusieurs utilisations successives de théorèmes. Pour cela il nous fallu faire le détour par une visualisation, qui n'avait rien de géométrique mais qui permettait aux élèves d'explorer eux-mêmes les deux niveaux d'organisation déductive qui constituent les raisonnements valides (Duval et Egret 1989). Ce type de visualisation non géométrique était donc présenté aux élèves comme représentation autosuffisante, puis dans une deuxième temps les élèves étaient invités à le décrire librement. Le discours était donc introduit comme une représentation auxiliaire par rapport à la visualisation de l'organisation déductive qu'ils avaient découverte. On a alors a pu observer rapidement cette évolution : la transformation rapide et radicale des discours produits par rapport aux démarches mathématiques attendues. La prise de conscience de l'accès à un nouveau champ d'opérations s'était produite chez les élèves, leur donnant à la fois l'initiative et le contrôle dans l'utilisation des théorèmes et dans la conduite des raisonnements.

Peu importent ici les résultats obtenus ou non obtenus jusqu'à présent, dans chacune des voies explorées, pour répondre à la question : " comment faire pour que la démonstration mathématique fonctionne vraiment comme une preuve pour les élèves ?". Leur diversité permet d'attirer l'attention sur une observation triviale mais trop peu prise en compte. *Il y a plusieurs sources de conviction pour chaque individu et les types de contrôle possibles pour chacune ne sont pas les mêmes.* Nous avons déjà pu le montrer à propos des différentes manières de voir (Figure 2). Mais cette donnée essentielle pour toute analyse des preuves ne se limite pas aux différentes manières de voir. Il y a une source de certitude qui vient du consensus qui s'établit dans un groupe au terme de discussions. Et il y a aussi une conviction qui vient d'un raisonnement valide, effectué dans le contexte d'un corpus de connaissances déjà prouvées et, aussi, bien assimilé par celui qui effectue le raisonnement valide. *Le type de réponse didactique que l'on donne à cette question de la compréhension des preuves en mathématiques revient toujours à privilégier l'une de ces sources de conviction par rapport aux autres.* Ecarter l'entrée de la compréhension du fonctionnement des raisonnements valides, indépendamment de toute visualisation ou de toute argumentation, c'est finalement fermer tout accès à des démarches de preuve dans les situations où la visualisation peut être prise en défaut (ce qui arrive vite en géométrie plane), ou s'avère insuffisante comme pour la géométrie dans l'espace, ainsi que dans les situations où il faut prendre du recul par rapport au consensus que les débats imposent dans un groupe. Ce choix peut être paraître légitime du point de vue d'une éducation mathématique commune, mais c'est un choix dommageable pour la formation générale des individus.

5. Au cœur de l'articulation entre visualisation et discours (*définition, théorème, preuve, explication*) en géométrie : le hiatus dimensionnel

Nous venons de balayer le spectre très large des opérations discursives qui sont mobilisée dans toute formulation faite en langue naturelle, qu'il s'agisse de raconter, de décrire, d'expliquer, d'argumenter dans un débat, de raisonner de manière valide... La complexité du langage n'est pas d'abord celle du vocabulaire mais celle de la diversité des toutes les opérations discursives qui sont mobilisées dans l'expression. Et, en géométrie, comme d'ailleurs dans tous les domaines scientifiques, l'expression ne consiste pas à mettre en mots, à la manière dont on peut apprendre à mettre des mots sur ses émotions et sur ses "vécus", mais à articuler des propositions, dont la richesse de sens est irréductible à celles des mots employés.

Nous avons également vu que, selon le niveau des opérations discursives qui se trouve privilégié, le rapport entre dire et " voir" variait considérablement. Derrière cette variation, dont la complexité est plus grande en géométrie que dans tous les autres domaines, il y a un phénomène cognitif fondamental : le hiatus entre le nombre de dimensions pris en compte pour identifier une unité figurale dans ce qui est visualisé et le nombre de dimensions pris en compte pour nommer les objets et les relations que l'on identifie. Nous avions déjà mentionné ce phénomène du changement du nombre de dimensions à effectuer, dans le sens de l'augmentation lorsqu'on passe du dire au voir et dans le sens de la réduction quand on passe du voir au dire (Duval 1995 p.192). Le tableau ci-dessous en présente une analyse plus détaillée. On peut y voir que l'articulation entre la visualisation et le discours y est représenté par les obliques à double orientation. Mais on peut y voir aussi que cette articulation présuppose la capacité à effectuer la déconstruction dimensionnelle des formes pour ce qui concerne la visualisation (flèches en pointillés descendantes).

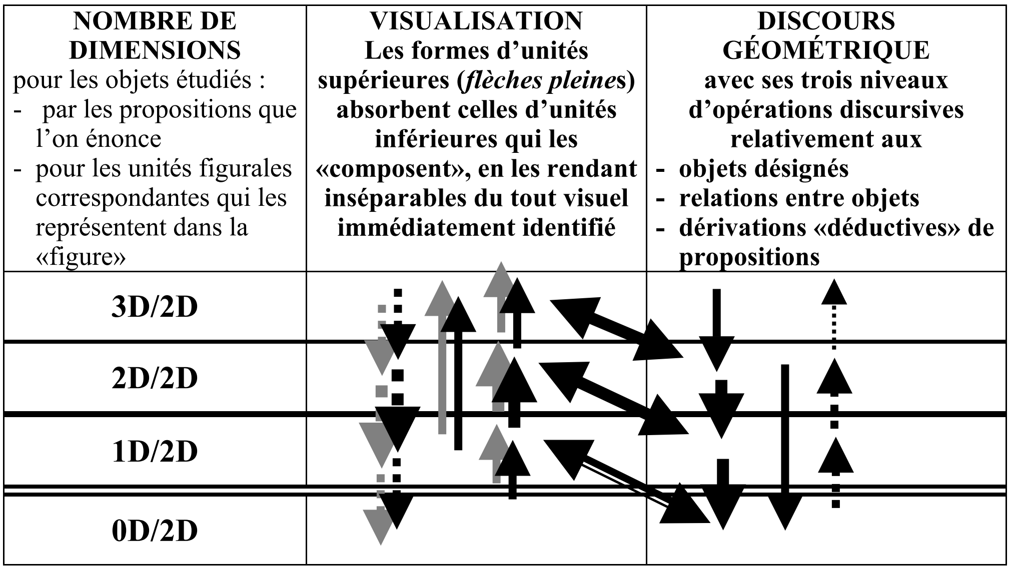


Figure 19 : L'articulation entre visualisation et discours en géométrie

On remarquera d'une part l'opposition entre les flèches montantes et descendantes dans chacun des deux registres de représentation et d'autre part l'existence de flèches obliques correspondant à l'articulation des représentations produites dans chacune des deux registres.

Regardons d'abord les flèches en traits pleins dans chacun des deux registres. Les flèches montantes avec ombre portée représentent le mouvement spontané de la visualisation qui tend à fusionner *les unités figurales de rang inférieur* EN UNE SEULE UNITÉ FIGURALE DE RANG SUPÉRIEUR. C'est d'ailleurs cela qui fait la puissance cognitive de la visualisation. Les flèches descendantes représentent les démarches d'analyse et de raisonnement propres à la géométrie pour établir les définitions, pour établir des théorèmes. L'articulation entre la visualisation et le discours géométrique suppose que l'on aille contre le mouvement ascendant de la visualisation, c'est-à-dire contre cette priorité visuelle des unités figurales de dimension supérieure sur les unités figurales de dimension inférieure.

Regardons maintenant les flèches en pointillés. Les flèches descendantes avec ombre portée représentent la déconstruction dimensionnelle des formes, dont nous avons vu qu'elle constitue le trou noir didactique de toutes les activités faites avec ou à partir des figures. Les flèches noires montantes représentent au contraire **l'ordre didactique d'exposition dans l'introduction scolaire des connaissances.** Toutes les progressions de connaissance semblent organisées selon le même ordre " conceptuel" :

(((points→ droites)→ segments de droites)→ polygones) →polyèdres)

Car la connaissance des propriétés relatives aux différentes configurations possibles que l'on peut former à partir des relations entre des droites et celle des propriétés relatives à la comparaison de deux segments doivent fournir les briques élémentaires avec lesquelles on peut construire les connaissances relatives aux polygones et à toute la géométrie plane (en intégrant bien sûr l'usage du compas et la figure du cercle). **Cela va donc en sens contraire du travail long et nécessaire de déconstruction dimensionnelle pour entrer la compréhension des connaissances géométriques.** Privilégier cet ordre revient à faire comme si la déconstruction dimensionnelle était évidente, alors qu'elle est contraire au fonctionnement normal et intuitif de la visualisation (flèches montantes avec ombre portée). C'est cette contradiction cognitivement paralysante que nous avons esayé de représenter dans le tableau ci-dessous.

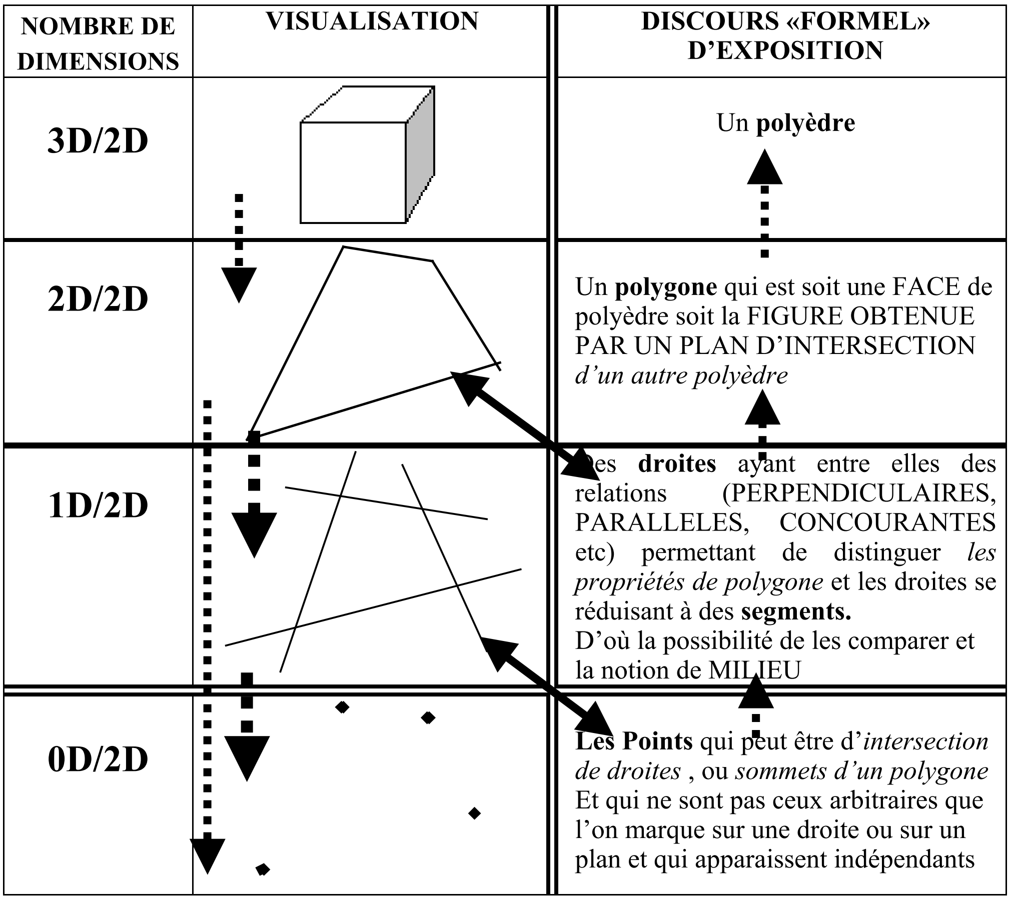


Figure 20 : Contradiction cognitive sous-jacente à l'introduction des connaissances géométriques

Nulle part, en dehors de la géométrie, on ne trouve pareil hiatus dimensionnel entre image et langage, entre visualisation et verbalisation. Et ce hiatus dimensionnel prend, dans l'enseignement de le géométrie, deux formes en quelque sorte inverses : le hiatus dimensionnel qui est intrinsèque aux démarches géométriques et le hiatus dimensionnel didactique résultant de l'organisation de l'acquisition des connaissances, telle qu'on peut l'observer dans les manuels ou dans les programmes.

Les raisons profondes de la deuxième forme du hiatus dimensionnel sont d'une part la déconstruction dimensionnelle des formes, que l'on croit assurée par le seul usage des instruments produisant des tracés droits, et d'autre part l'orientation du discours géométrique, et donc la polarisation de toutes les opérations discursives vers la production de preuves impliquant les raisonnements valides, mais en ne retenant du langage que le premier niveau des opérations discursives, celui qui se traduit par l'emploi de termes pour désigner les objets. Les fonctionnement cognitifs essentiels à construire sont naïvement ignorés ou délibérément rejetés. Comment s'étonner de la réticence que l'enseignement de la géométrie suscite chez beaucoup d'élèves, parfois aussi chez certains enseignants, et par suite de la marginalisation de la géométrie ?

6. Conclusion

Visualisation et discours constituent deux types de fonctionnement cognitif qui ont souvent été opposés, tant d'un point vue pédagogique, psychologique que mathématique. Cependant leur articulation est absolument décisive pour l'apprentissage de la géométrie. Car l'activité géométrique repose sur la synergie cognitive de ces deux registres de représentation. Le problème particulier et récurrent, auquel tout enseignement de la géométrie se heurte, tient au fait que l'articulation entre visualisation et discours y est plus complexe que dans tous les autres domaines de la connaissance, en raison du hiatus dimensionnel inhérent à la démarche mathématique elle-même. Comment en analyser le mécanisme cognitif ?

Il faut prendre en compte deux points de vue : le point de vue fonctionnel et le point de vue structural. Etant donné que l'articulation entre voir et dire mobilise simultanément deux représentations, il faut regarder quelle fonction la représentation prise comme représentation auxiliaire peut remplir par rapport à la représentation prise comme représentation autosuffisante du point de vue mathématique. Et cela peut être, selon les cas, la représentation visuelle ou ce qui est énoncé. Mais comme cette articulation implique que des correspondances de contenu puissent être établies entre les deux représentations, indépendamment de leur statut de représentation auxiliaire ou autosuffisante, il faut aussi regarder la manière dont des unités de sens et des unités figurales peuvent être discernées et organisées dans chacune des représentations mises en synergie cognitive. Là, l'analyse doit devenir plus précise dans la mesure où tout discours met en œuvre trois niveaux d'opérations discursives : c'est à chacun de ces niveaux que l'analyse structurale de mise en correspondance doit être menée. Apparaît alors une grande variation, à la fois fonctionnelle et structurale, selon le niveau auquel on se place.

1. L'ancrage cognitif d'un énoncé sur une figure se fait, au niveau de la désignation d'unités figurales, par l'emploi de termes qui impliquent la déconstruction dimensionnelle des formes visuellement reconnues.

2. L'interaction cognitive entre visualisation et discours ne commence vraiment qu'au niveau des propositions que l'on énonce, quel que soit leur statut (constat, définition, conjecture...) dans le discours produit. Car c'est à ce niveau seulement qu'une figure peut remplir une fonction (illustration, contre-exemple..) par rapport à un énoncé et réciproquement. D'un point de vue structural, cela se traduit par le fait que la visualisation requiert un enchaînement de deux figures qui peuvent être des sous-figures de la figure de départ, ou l'enchaînement de la figure de départ et de l'une des ses transformations visuelles. Le fait que la conversion visuelle d'un théorème conduise à un enchaînement de deux figures a d'ailleurs été souligné depuis longtemps.

3. Une articulation cognitivement productive entre visualisation et discours ne commence qu'au niveau des transformations de représentation qui peuvent être conduites, de manière indépendante, dans chacun des deux registres. Mais ici tout va dépendre du registre que l'on va privilégier pour les demandes de justification ou de preuve.

   - Ou bien l'on privilégie la visualisation avec les invariants d'opérations (méréologiques ou autres) qui sont mises en œuvre, et alors le raisonnement peut être assimilé à une explication descriptive de ces transformations visuelles réellement faites ou verbalement évoquées. La source de la conviction vient alors de la visualisation, celle-ci reposant non pas sur une figure mais sur une séquence d'au moins trois figures dans laquelle les opérations portent nécessairement sur des unités figurales 2D ou 3D.

   - Ou bien l'on privilégie le discours avec ses mécanismes propres de déduction valide et alors la visualisation remplit une fonction heuristique pour "trouver" les théorèmes à mettre en œuvre, ce qui implique que le regard se focalise essentiellement sur des unités figurales 1D. La source de la conviction ne vient plus de la visualisation mais de la compréhension et du contrôle des raisonnements déductifs développés.

Cependant ces deux voies ne peuvent pas du tout être mises sur le même plan. La première est en fait vite limitée. Car il y a beaucoup de situations où les raisonnements doivent compenser un défaut de visualisation ou doivent se faire contre la visualisation. Les seules situations où visualisation et discours se rejoignent, dans une demande de preuve, est la production d'un contre-exemple (sous réserve que son invention ne demande pas des mois ou des années de travail !). Mais là nous redescendons du niveau des raisonnements à celui des propositions énoncées et ce type de production dépend surtout des capacités des élèves à effectuer des transformations visuelles de figures. Autrement dit, selon le type de preuve que l'on demande aux élèves, il peut y avoir convergence locale ou une divergence radicale entre les processus de visualisation et les processus de raisonnement.

C'est dans le champ de cette activité cognitive à la fois très diversifiée, mais aussi complexe, que les connaissances géométriques peuvent se construire. La simplicité des contenus mathématiques que l'on choisit et introduit comme les bases de l'enseignement de la géométrie présuppose en fait des manières de voir et des modes de raisonnements qui s'écartent de ceux qui sont pratiqués en dehors des mathématiques ou qui parfois s'y opposent. Définir des progressions pour l'acquisition des " savoirs " en géométrie, sans prendre en compte les variables correspondant à aux différents fonctionnements cognitifs que nous venons d'analyser ne peut conduire, à moyen ou long terme, qu'en impasse. La simplicité des démarches géométriques est au terme de ces différentes prises de conscience que les élèves doivent faire aussi bien pour la visualisation que pour la production et la compréhension du discours géométrique.

On ne peut donc pas s'attendre à ce que les élèves non seulement prennent conscience de ces fonctionnements cognitifs spécifiques mais aussi mettent en place les coordinations complexes nécessaires à leur synergie, du seul fait qu'on les ferait travailler sur des contenus mathématiques. Et il suffit de se rappeler un fait important. Si on demande une production discursive à des élèves on obtient des textes radicalement différents selon le type de représentation visuelle qui leur sert d'appui. On ne peut pas espérer que les élèves, qui en restent très légitimement aux fonctionnement cognitifs propres à la visualisation iconique, puissent entrer dans la compréhension d'énoncés et de démarches discursives qui s'appuient sur une visualisation non iconique et qui requièrent le réflexe optique de la déconstruction dimensionnelle des formes. D'où l'importance d'un travail long et spécifique pour faire entrer dans ces manières si particulières de voir qui sont propres à la géométrie. Mais on ne peut non plus espérer que les élèves qui seraient essentiellement entraînés aux manières de voir du constructeur ou de l'inventeur bricoleur, c'est-à-dire à une construction instrumentée des figures ou à des justifications par des transformations figurales, puissent entrer dans la compréhension du fonctionnement des déductions valides sans lesquelles il ne peut y avoir de preuves fondées sur des définitions ou des théorèmes. Car le fonctionnement discursif des raisonnements mathématiques est, si l'on ose dire, un fonctionnement "anti-parole".

La méconnaissance de la complexité cognitive impliquée dans toute démarche de géométrie n'est pas seulement dommageable pour l'enseignement, elle l'est également pour les recherches sur les apprentissages de la géométrie. Ainsi on peut s'interroger sur la méthodologie mise en œuvre dans l'analyse des productions "langagières " des élèves, quand elle est conduite essentiellement, sinon exclusivement, en fonction des contenus mathématiques. La complexité des fonctionnement discursifs étant ignorée, l'interprétation du discours des élèves ne relève-t-elle pas alors d'un commentaire libre, propre à chaque chercheur, plutôt que d'une mise en évidence contrôlable (et donc comparable à d'autres corpus de productions "langagières") des observations ou des conclusions qui en sont tirées ? On pourrait aussi de la même manière s'interroger sur l'analyse des tâches proposées en relation avec la visualisation, que celles-ci soient faites dans le cadre d'un manuel, d'une fiche ou d'un logiciel. Un grand progrès sera fait pour l'enseignement de la géométrie, pour lui donner une place éminente dans la formation générale de l'individu, lorsque les contenus mathématiques seront regardés par rapport à l'activité cognitive qu'ils sollicitent et que le développement de cette activité deviendra un objectif indissociable des objectifs mathématiques.

Bibliographie

BALACHEFF N., 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège.* Thèse Université Grenoble 1. Grenoble.

BERTHELOT R., SALIN M-H., 1994, L'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire. *Grand N*, **53**, 39-56.

BERTHELOT R., SALIN M-H., 2000, L'enseignement de l'espace à l'école élémentaire, *Grand N,* **65**, 37-59.

COREN S., PORAC, C., WARD L.M. ,1979, *Sensation and Perception.* New-York: Academic Press.

DUPUIS C., PLUVINAGE F., DuvAl R., 1978, Etude sur la géométrie en fin de troisième in *Géométrie au Premier Cycle*, II, Paris, A.P.M.E.P., 65-10I.

DUVAL R., EGRET M.A., 1989, L'organisation déductive du discours: interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accés à la démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **2**, 41-65.

DUVAL R. , 1995 a, *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

DUVAL R., 1995b, Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processings. **i**n *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematic Education* (Ed. R. Sutherland & J. Mason), 142-157, Berlin : Springer.

DUVAL R., 2000, Costruire, vedere e ragionare in geometria : quali rapporti ?*Bolletino dei docenti di matematica,* **41**, 9-24. Bellinzona.

DUVAL R., 2001, Ecriture et compréhension, dans *Produire et lire des textes de démonstation* (Ed. Barin & alii), p.183-205. Paris : Ellipses.

EDWARDS C.H., 1979, *The historical Development of Calculus*. Berlin : Springer.

EUCLIDE, 1990*, Les Eléments*, volume 1 Livres I à IV, (Tr. B. Vitrac). Paris : PUF.

GODIN M., 2004, De trois regards possibles sur une figure au regard «géométrique», à paraître dans les *Actes du séminaire national de didactique.*

IREM de Strasbourg, 1979, *Mathématiques 4ème,* Istra.

IREM de Strasbourg*, 1986, Mathématiques 2^{e}*, Istra.

KANIZA G.., 1998, *La grammaire du voir* (tr. A. Chambolle). Paris : Diderot éditeur.

KANT E.,1976*, Critique de la raison pure* (tr. Barni). Paris : G.F.

LABORDE C. 1994, Enseigner la géométrie : permanences et révolutions. *Bulletin APMEP,* **396**, 523-548.

LEPOIVRE G. et POIRSON A., 1920, *Cours de Géométrie théorique et pratique*,I . Lille : Janny.

PADILLA V.1992, *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*, Thèse U.L.P.: StrasbourG, 1992.

PEIRCE C.S., 1978, *Ecrits sur le signe* (Choix de textes, tr. G. Deledalle). Paris : Seuil.

POINCARÉ H., 1963, «Pourquoi l'espace a trois dimensions» dans *Dernières pensées*. Paris : Flammarion.

PIAGET J. (1947) 1972, *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : P.U.F.

Séminaire IUFM, 1999, *Conversion et articulation des représentations analogiques* (Ed. R. Duval). IUFM Nord Pas de Calais.

Sites Internet présentant l'évaluation CE2-6^{e} :

pour l'année scolaire en cours : http://evace26.education.gouv.fr/ et pour les années antérieures : http://cisad.adc.education.fr/eval/.