EDITORIAL

En décembre 2004, Xavier HASCHER et moi-même avons organisé à Strasbourg un colloque dont le thème était « Mathématiques et Musique », qui a été soutenu par l'Université Marc Bloch (Département de Musicologie) et l'Université Louis Pasteur (Institut de Recherche Mathématique avancée et Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). Les conférences de ce colloque ont été suivies par plus de soixante participants, ce qui montre (si besoin en est) que le sujet intéresse un large public à Strasbourg. Les articles dans ce numéro sont les textes écrits de ces conférences.

Je ne vais pas présenter ici la relation Mathématiques/Musique ; je pense qu'on pourra s'en rendre compte en parcourant ce numéro, dont les articles présentent divers points sur cette alliance, en abordant des sujets tels que la théorie de la musique, l'analyse musicale, l'histoire et la philosophie.

Je voudrais profiter ici de cette occasion pour dire quelques mots sur l'enseignement de Mathématiques et Musique à l'Université Louis Pasteur. Un cours sur un tel sujet a été proposé ces dernières années par l'ULP, sous forme d'« Enseignement d'ouverture », que j'ai donné pendant 6 ans. Il a été suivi chaque année, comme unité d'enseignement optionnelle, par des étudiants des diverses UFR de cette université, ainsi que par quelques étudiants en Musicologie de l'Université Marc Bloch. Par ailleurs, les étudiants de l'UFR de Mathématiques et Informatique ont eu la possibilité de faire leurs mémoires de maîtrise ou de DEA sur ce sujet, et deux des auteurs de ce numéro, Myriam FISCHER et Rachel TACQUARD, ont fait respectivement leur mémoire de DEA et de maîtrise dans ce domaine. Depuis la rentrée 2005-2006, et avec l'application de la réforme LMD, ce cours a pris un statut plus officiel puisqu'il fait partie intégrante du cursus des étudiants de Musicologie de l'Université Marc Bloch, ainsi que de celui des étudiants de Mathématiques et de Physique de l'Université Louis Pasteur. C'est l'un des rares cours (peut-être le seul ?) qui associe des enseignants de ces deux universités et qui réunit dans une même salle et de manière officielle des étudiants des deux universités. L'idée de faire ce cours commun est née chez Xavier HASCHER et elle a été accueillie très favorablement par Jacques FRANCHI, Directeur du Département de Mathématiques de l'ULP. Je tiens ici à les remercier vivement tous les deux. Les physiciens ont ensuite inclus ce cours dans leurs cursus.

Je termine par un mot sur les auteurs : Moreno ANDREATTA est chargé de recherche au CNRS et travaille à l'IRCAM (Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique, Paris), Myriam FISCHER est professeur agrégée au collège Pierre de Brossolette de Bondy, Xavier HASCHER est maître de conférences et directeur du Département de Musicologie à l'Université Marc Bloch, Athanase PAPADOPOULOS est chargé de recherche au CNRS et travaille à l'IRMA et Rachel TACQUARD est professeur agrégée au lycée Le Corbusier à Illkirch.

Xavier HASCHER a eu la gentillesse d'inclure à la fin de son article un lexique des mots musicaux techniques, et les lecteurs de l'Ouvert lui seront certainement reconnaissants.

Athanase PAPADOPOULOS

Quelques Aspects Théoriques d'une Approche Algébrique en Musique

Moreno Andreatta

Résumé : Nous reprenons ici quelques éléments que nous avons développés dans le cadre d'une thèse en musicologie computationnelle intitulée « Méthodes algébriques en musique et musicologie du XX^{e} siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels » [6]. Au-delà d'une étude historique, qui vise à retracer l'émergence du concept de structure algébrique en musique et musicologie du XX^{e} siècle, la thèse analyse également quelques problèmes théoriques en musique susceptibles d'intéresser aussi bien les musicologues et les compositeurs que les mathématiciens et les informaticiens. À la différence de l'approche traditionnelle dans l'étude des rapports entre mathématiques et musique, consistant à discuter l'application d'outils mathématiques au domaine musical, nous avons choisi de partir de quelques problèmes mathématiques posés par la théorie de la musique, l'analyse musicale et la composition afin d'essayer de mettre en évidence la place singulière des méthodes algébriques dans la musicologie du XX^{e} siècle. Nous en analysons ici quelques aspects.

Introduction

L'utilisation des méthodes algébriques en musique met en œuvre trois aspects qui sont souvent étroitement liés : aspects théoriques, analytiques et compositionnels. Dans notre travail, nous avons proposé de les séparer afin de mettre en évidence leurs propres modes de fonctionnement, à la fois musical et musicologique. Mais nous avons également insisté à plusieurs reprises sur le caractère très limitatif d'une telle catégorisation qui prétendrait définir les champs possibles d'application de toute méthode algébrique à la musique ou à la musicologie. Il est bien connu qu'au XX^{e} siècle, théorie musicale, analyse et composition sont des disciplines qui s'influencent mutuellement. Toute tentative de séparer ces trois domaines se heurte à des difficultés qui sont particulièrement frappantes dans le cas de l'approche algébrique.

Une analyse historique de l'émergence de l'approche algébrique en musique met en évidence la place centrale occupée par certains compositeurs/théoriciens qui n'ont pas hésité à proposer des applications analytiques de leurs démarches théoriques et compositionnelles. Trois compositeurs/théoriciens sont emblématiques en ce qui concerne la réflexion théorique sur la musique, non seulement dans ses ramifications analytiques et compositionnelles, mais aussi dans son caractère éminemment algébrique. Milton Babbitt aux Etats-Unis, Iannis Xenakis en Europe et Anatol Vieru en Europe de l'Est représentent une « trinité » de compositeurs/théoriciens, l'algèbre étant l'élément unificateur de leur pensée théorique, analytique et compositionnelle. Tous les trois sont arrivés, presque au même moment et d'une façon indépendante, à la découverte du caractère algébrique du tempérament égal. Plus précisément, ils ont mis en évidence la notion mathématique de *groupe* en tant que concept unificateur de leur pensée théorique.

Ces trois démarches théoriques ont eu également des influences directes dans l'analyse musicale. Aux Etats-Unis, les idées de Milton Babbitt sont à la base de la *Set Theory*, une démarche analytique dont certains développements récents, notamment autour de la « théorie transformationnelle » de David Lewin, ont poussé la formalisation algébrique très loin des idées originaires. Dans le cas d'Anatol Vieru, les ressemblances avec la *Set Theory* ont été mises en évidence par le compositeur lui-même qui a discuté à plusieurs reprises l'importance d'une démarche algébrique en théorie et analyse musicale [30].

À la différence des deux compositeurs précédents, une application analytique des théories algébriques proposées par Iannis Xenakis à partir de la « théorie des cribles », change radicalement la notion d'analyse musicale en ouvrant le champ à ce que l'on appelle désormais « l'analyse musicale assistée par ordinateur » (AAO). Plus récemment, l'implémentation de nombreux outils théoriques d'aide à l'analyse musicale dans un langage de programmation visuelle tel qu'*OpenMusic*[1] ouvre le problème de la calculabilité d'une théorie musicale et transforme, progressivement, la nature même de la musicologie en tant que discipline relevant (principalement) des sciences humaines. L'approche algébrique, et son implémentation en *OpenMusic*, ajoute l'élément computationnel au caractère « systématique » de la musicologie, telle qu'elle s'est constituée vers la fin du XIX[e] siècle. En particulier, les méthodes algébriques permettent de résoudre, d'une façon très élégante, certains problèmes classiques concernant l'énumération et la classification des structures musicales, en généralisant à toute division égale de l'octave les tables de classification d'accords existantes. Ces techniques peuvent également se généraliser à d'autres paramètres que les hauteurs (en particulier les structures rythmiques). Cela correspond aussi à une préoccupation majeure des trois compositeurs/théoriciens précédents qui ont tous proposé des lectures algébriques différentes de la relation existant entre l'espace des hauteurs et l'espace des rythmes. Cet aspect sera developpé dans la section 4.

Toutes ces approches reposent sur des cadres conceptuels relativement élémentaires d'un point de vue mathématique car la structure algébrique sous-jacente est fondamentalement une structure de *groupe* (cyclique, dihédral, affine, symétrique). Cependant, des méthodes catégorielles développées par le mathématicien et théoricien suisse Guerino Mazzola offrent à la musicologie computationnelle un énorme pouvoir d'abstraction et de formalisation. Et si la généralisation de la *Set Theory* américaine par David Lewin et le modèle théorique proposé par Guerino Mazzola se rejoignent en postulant la primauté de la notion de « transformation » sur celle d'« objet musical », ce changement de perspective, qui est implicite dans toute démarche algébrique, est riche de conséquences philosophiques, car il ouvre une question fondamentale sur le rapport entre « objets mathématiques » et « structures musicales »: Nous reviendrons dans la partie conclusive sur ces considérations philosophiques qui semblent dessiner un nouveau paysage pour la recherche « mathémusicale » contemporaine.

1. Formalisation et représentation des structures musicales

À partir des propositions théoriques de Milton Babbitt, Iannis Xenakis et Anatol Vieru, il est possible de placer le problème de la formalisation et représentation des structures musicales à l'intérieur d'une discussion sur la musicologie systématique. Cela offre la possibilité de mieux montrer la double portée musicale et musicologique de la démarche algébrique. En effet, l'étude des aspects théoriques des méthodes algébriques en musique et musicologie soulève une double question. Tout d'abord, d'un point de vue musicologique, une telle

[1]Ce langage de programmation, développé par l'Equipe Représentations Musicales de l'Ircam [7], était initialement conçu pour la composition assistée par ordinateur mais il est de plus en plus employé comme outil analytique, comme nous aurons l'occasion de montrer en présentant l'approche paradigmatique en ce qui concerne la classification d'accords et des rythmes développée dans la librairie *OMGroups*.

réflexion demande une enquête autour de la nature systématique de la discipline. Il s'agit donc de remonter aux sources d'une telle démarche en musicologie, aussi bien en Europe [2] qu'aux Etats-Unis [29]. Deuxièmement, il est possible de discuter l'articulation entre musicologie et réflexion théorique sur la musique, en particulier autour de la naissance, aux Etats-Unis, du concept de théorie de la musique au sens moderne (*music theory*).

Cette réflexion s'avère nécessaire pour comprendre la portée musicologique du problème de la formalisation algébrique des structures musicales et de leurs représentations. Les deux figures suivantes montrent deux exemples de représentation algébrique du système tempéré traditionnel : la représentation circulaire et la représentation toroïdale. Les deux représentations sont équivalentes d'un point de vue mathématique (Théorème de Sylow) mais elles n'ont pas été intégrées au même titre dans les propositions théoriques développées au cours du XX^{e} siècle. Dans le cas de la représentation circulaire, l'hypothèse sous-jacente est celle qui permet de formaliser tout accord musical (dans une division de l'octave musicale en un nombre n de parties égales) comme un sous-ensemble d'un groupe cyclique d'ordre n. Tout accord de m notes (distinctes, modulo l'octave) peut donc se représenter d'un point de vue géométrique comme un m-polygone inscrit dans un cercle et l'on peut lui associer de façon unique une suite de nombres entiers qui comptent les intervalles successifs dans l'accord (*structure intervallique*). Une telle structure est un *invariant* qui permet d'identifier de façon unique un accord et ses transpositions (musicales), celles-ci étant des rotations du polygone inscrit dans le cercle d'un multiple de $\frac{2\pi}{n}$ (où n est l'ordre du groupe cyclique). La représentation circulaire et la structure intervallique de l'accord de *do* majeur sont données en figure 1.

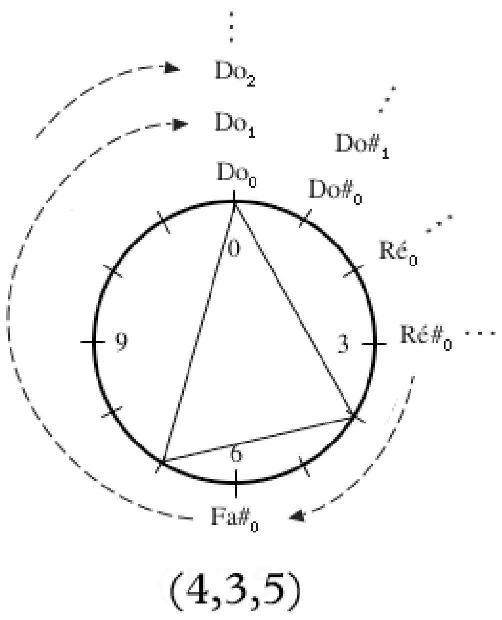

Fig. 1 – Représentation circulaire et structure intervallique

Une représentation géométrique alternative de l'espace tempéré à douze degrés est donnée par le tore, une structure qui utilise, comme nous l'avons mentionné, un théorème de décomposition du groupe cyclique $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ dans le produit de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. La construction de la représentation toroïdale du tempérament est décrite en figure 2.

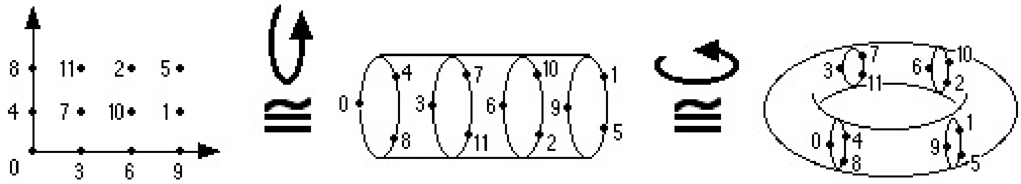

FIG. 2 – Représentation toroïdale de $\mathbf{Z/12Z}$

La discussion sur l'articulation entre la notion de formalisation et celle de représentation met en évidence une singularité de la démarche algébrique par rapport à d'autres approches formalisées en théorie musicale. Traditionnellement, la représentation précède la formalisation, au sens que l'on formalise ce que l'on sait déjà représenter. Dans le cas de la démarche algébrique, la représentation circulaire aussi bien que la représentation toroïdale sont plutôt les résultats d'une formalisation qui montre la possibilité d'associer de façon naturelle à toute division bien tempérée de l'octave une structure algébrique de groupe cyclique à laquelle on peut appliquer des théorèmes d'algèbre qui permettront d'aboutir à d'autres types de représentations[2].

2. Autour de l'idée de « structure » en mathématiques et en musique

Une enquête parallèle autour de certaines étapes de la pensée algébrique en mathématiques s'avère donc nécessaire pour bien articuler la réflexion sur le rapport entre formalisation et représentation des structures musicales. En même temps elle permet de mieux comprendre la place des trois compositeurs/théoriciens étudiés, par rapport au problème de l'émergence de l'idée de structure algébrique en musique. En effet, l'histoire des mathématiques montre que, presque à la même époque que la réflexion de Guido Adler sur le caractère systématique de la recherche musicologique, les mathématiciens ouvraient une réflexion qui dépassera largement le cadre de leur propre discipline.

Notre regard rétrospectif sur les étapes de la pensée algébrique en mathématiques a mis en évidence certains éléments qui ont représenté, historiquement, le point de départ d'une réflexion théorique sur les fondements algébriques de la musique, une réflexion que l'on peut articuler autour de la formalisation et des représentations des structures musicales. Pour cela, nous avons d'abord analysé l'évolution du concept de structure algébrique à partir du *Programme d'Erlangen* de Felix Klein (1872) jusqu'aux développements les plus récents sur la théorie mathématique des catégories, en passant par l'axiomatique hilbertienne et l'expérience Bourbakiste, deux moments de la pensée mathématique contemporaine qui ont influencé de façon décisive la naissance et l'évolution de la théorie de la musique au sens moderne. Cela permet notamment de comprendre la nature algébrique de certaines orientations formelles en analyse musicale, en particulier en ce qui concerne la *Set Theory* américaine (en tant que discipline musicologique issue des idées des théoriciens tels que Milton Babbitt, Allen Forte et David Lewin). Nous allons en reprendre quelques aspects computationnels liés à la formalisation algébrique des structures micro-intervalliques dans la prochaine section.

[2]Le théoricien américain Robert Peck a récemment proposé une représentation topologique du *Tonnetz* à l'aide de la bouteille de Klein qui ouvre des applications musicales tout-à-fait nouvelles. Voir [25].

Notons cependant que, d'un point de vue historique, l'utilisation des méthodes algébriques en musique concerne tout d'abord la théorie de la musique et la composition, l'application analytique n'ayant pris un caractère systématique, de façon explicite qu'avec la théorie transformationnelle de David Lewin. Citons a ce propos l'un des problèmes musicaux qui a le plus fasciné à la fois théoriciens de la musique, compositeurs et mathématiciens : celui de la classification des séries dodécaphoniques tous-intervalles. Ces séries ont la propriété remarquable de contenir tous les intervalles entre les notes successives (sauf l'intervalle 0 qui n'est pas autorisé car une série dodécaphonique n'admet pas de répétition de notes). Généralement, on considère l'ouvrage *Grundlagen der musikalischen Reihentechnik* d'Herbert Eimert [12] comme la première étude systématique des propriétés des séries dodécaphoniques tous-intervalles, car il contient le catalogue complet des 1928 séries ayant cette propriété remarquable. Cependant, au-delà de l'exhaustivité, la démarche d'Eimert ne semble pas donner une indication précise sur la stratégie employée dans l'établissement d'un tel catalogue. Les recherches menées presque à la même époque par André Riotte en France puis par Robert Morris et Daniel Starr aux Etats-Unis ont permis de mieux comprendre le caractère algébrique sous-jacent à un tel problème théorique, tout en gardant l'aspect « computationnel » de la démarche telle que Eimert l'avait envisagée. Cependant, contrairement à ce que l'on pense habituellement, le problème d'établir des séries tous-intervalles n'est pas lié à l'origine à la technique dodécaphonique. Le traité de modulation du compositeur danois Thorvald Otterström [23] offre en effet un catalogue exhaustif des séries tous-intervalles établies à partir de considérations algébriques sur la nature combinatoire du système tempéré, mais sans aucune référence à la technique sérielle. L'analyse des stratégies théoriques développées dans cet ouvrage nous offre un bon exemple de formalisation algébrique d'un problème musical qui a émergé de considérations différentes de celles qui s'imposeront par la suite dans la recherche musicale.

3. Aspects *set-théoriques* : la place des méthodes algébriques dans l'analyse musicale au XX^{e} siècle

Dans cette section nous allons expliciter un peu plus en détail quelques aspects analytiques des méthodes algébriques en musicologie, dans leurs articulations profondes avec les aspects théoriques mentionnés brièvement dans la section précédente. Nous proposons une typologie minimale des approches analytiques formalisées au XX^{e} siècle qui devrait permettre de mieux comprendre la place des méthodes algébriques en analyse musicale. Cette typologie identifie quatre catégories de la pensée analytique ayant donné une place centrale à la notion de formalisation des structures musicales : approches informationnelles, sémiotiques, génératives et algébriques. Au-delà du caractère limitatif d'une telle typologie, qui ne prétend pas recenser toutes les approches formelles en analyse musicale, cela présente néanmoins l'avantage de dégager certaines catégories majeures de la pensée analytique au XX^{e} siècle et d'offrir quelques éléments pour comprendre la singularité d'une démarche analytique de type algébrique. À l'intérieur de l'approche algébrique en analyse musicale, deux théories ont acquis une place considérable dans la réflexion analytique contemporaine : la *Set Theory* et l'analyse transformationnelle.

À la différence des présentations traditionnelles de la *Set Theory*, comme celle d'Allen Forte [13], la théorie des ensembles de classes de hauteurs se prête très bien à être intégrée dans une approche algébrique qui utilise pleinement les potentialités de la représentation circulaire du tempérament égal. En outre, une formalisation algébrique des concepts de base de cette approche offre des perspectives théoriques nouvelles sur l'analyse musicale assistée par ordinateur. L'implémentation réalisée en *OpenMusic*, conçue en collaboration avec Carlos Agon (informaticien et chercheur à l'IRCAM) et Killian Sprotte (compositeur) se déploie dans une architecture « paradigmatique » basée sur l'action de certains groupes « mathémusicaux » sur l'espace tempéré (le groupe cyclique en tant qu'ensemble dépourvu de structure algébrique). L'implémentation permet à l'analyste de choisir son propre critère d'équivalence entre structures d'accords en utilisant comme « paradigmes » d'analyse les différents groupes que l'on peut choisir de faire opérer sur l'ensemble des notes. En particulier, nous avons implémenté les relations d'équivalence (donc les catalogues d'accords) induites par l'action de quatre groupes sur l'ensemble des notes d'un tempérament musical choisi : le groupe cyclique (ou paradigme de l'équivalence à une transposition musicale près), le groupe dihédral (paradigme de la *Set Theory*, i.e. équivalence à une transposition et une inversion musicale près), le groupe affine (équivalence à une multiplication près) et groupe symétrique (équivalence à une permutation près). L'architecture paradigmatique de cet environnement est décrite dans la figure suivante qui montre les représentations circulaires et les structures intervalliques associées aux différentes classes d'équivalence d'un même accord (figure 3).

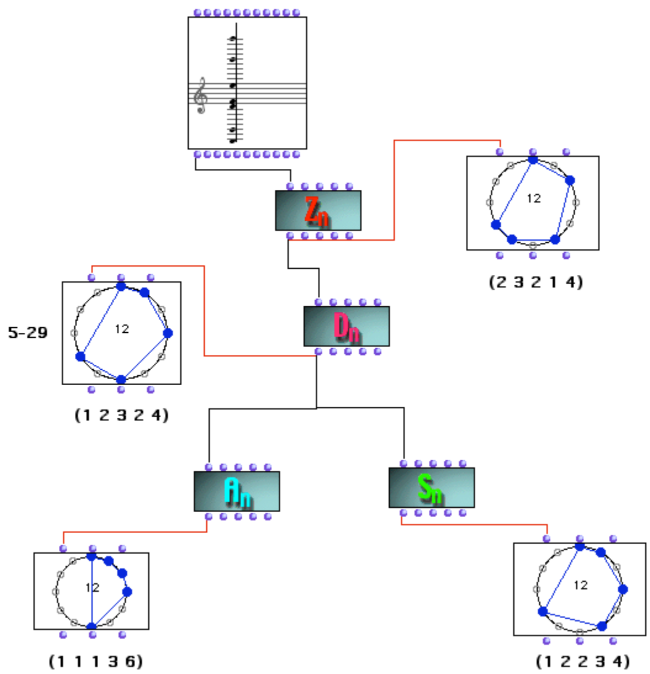

Fig. 3 – Architecture « paradigmatique » de la librairie *OMGroups*. Un accord est réduit progressivement et visualisé selon des relations d'équivalence induites par quatre groupes différents.

L'énumération des classes d'équivalence d'accords (à une transposition et une inversion près) dans le système tempéré à 12 et 24 degrés est donnée en figure 4. Notons le caractère symétrique dans la distribution des orbites, une caractéristique que l'on retrouve dans la distribution des orbites sous l'action du groupe cyclique et affine mais que l'on perd dans le cas du groupe symétrique S_n.
La démarche algébrique permet d'introduire également les concepts de base de l'analyse transformationnelle, telle que David Lewin l'a conçue à partir notamment d'une mathématisation des outils de base de la *Set Theory*. À la différence de l'approche « set-théorique »

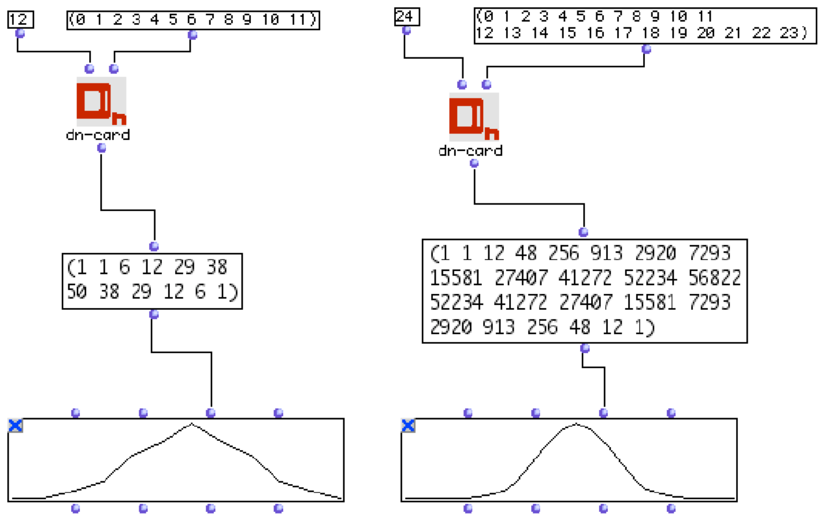

Fig. 4 – Distribution du nombre d'orbites sous l'action du groupe dihédral **Dn** dans le cas de la division de l'octave en 12 et en 24 parties égales.

classique, l'analyse transformationnelle consiste à segmenter une partition de musique à travers un recouvrement de sous-ensembles qui sont liés par des opérations musicales de transposition et d'inversion [5]. Elle permet ainsi de créer un espace abstrait de relations de transposition et d'inversion entre les accords qui peut décrire le déroulement temporel de la pièce (progression transformationnelle) ou bien une organisation « hors temps », pour reprendre la terminologie de Iannis Xenakis, des transformations algébrico/musicales (réseau transformationnel). La figure 5 montre un exemple d'une démarche transformationnelle dans le cas de l'analyse du *Klavierstück III* de K. Stockhausen par David Lewin [17], une analyse qui est ici reprise en utilisant la représentation circulaire pour mettre en évidence les transformations musicales qui permettent de décrire la partition à partir d'une même structure de pentacorde. Ces transformations ne changent pas la nature « ensembliste » du pentacorde, car les cinq formes sont « équivalentes » à une transposition ou une inversion près (ou une combinaison des deux opérations).

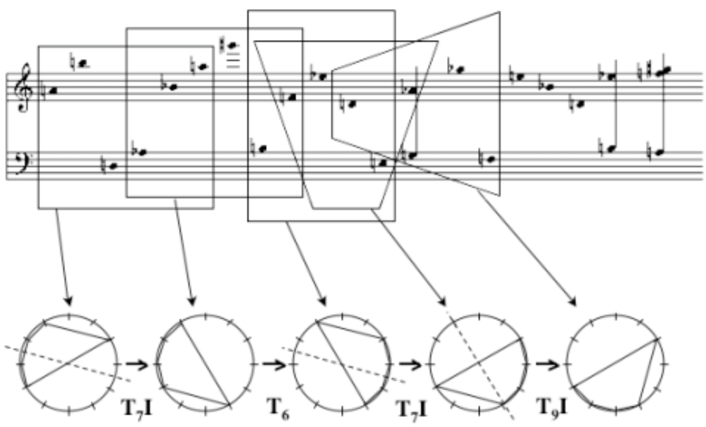

Fig. 5 – Segmentation de la pièce par des transformations d'un même pentacorde

Ces outils informatiques ouvrent des questions nouvelles sur l'analyse assistée par ordinateur et, dans le même temps, offrent aux compositeurs la possibilité de mettre en relation les propriétés combinatoires d'un espace tempéré à n degrés (i.e. une division de l'octave musicale en n parties égales) avec l'étude des structures rythmiques périodiques. La théorie des canons rythmiques de pavage, dont nous allons décrire quelques aspects dans la prochaine section, représente un aspect de cette analogie structurale.

4. Théorie des groupes et isomorphisme hauteur/rythmes

Les trois compositeurs/théoriciens, dont nous avons souligné la démarche algébrique dans la partie introductive, ont tous proposé des applications compositionnelles de l'isomorphisme naturelle entre l'espace tempéré et le domaine des rythmes (périodiques).

4.1. Milton Babbitt : une démarche algébrique pour le sérialisme intégral

Dans le cas de Milton Babbitt la correspondance entre univers des hauteurs et univers rythmique s'établit à la fois à partir d'une technique compositionnelle relevant du sérialisme généralisé et en s'appuyant sur la notion mathématique de « partition », en tant que recouvrement d'un ensemble avec des sous-ensembles disjoints.
Les musicologues semblent parfois hésiter sur la possibilité de parler, dans le cas du compositeur américain, des « combinatoires hauteurs-durées », le problème étant « l'indépendance que [le compositeur] entend donner au processus des durées » [11]. Pourtant, l'indépendance n'est qu'un épiphénomène par rapport à la nature algébrique qui soutient aussi bien l'univers des hauteurs que le domaine des rythmes. Ces idées avaient déjà trouvé une application dans la pratique compositionnelle de Babbitt dès la deuxième moitié des années quarante, en particulier dans les *Trois compositions pour piano* (1947-48). Il s'agit d'un moment important dans l'histoire de la musique du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle car, dans la même période, Olivier Messiaen « crée l'événement », pour reprendre une expression de Célestin Deliège, avec la pièce *Mode de valeurs et d'intensités* (1949). Cette pièce a eu une influence considérable sur toute une génération de compositeurs auxquels on doit le début de la réflexion en Europe sur la série généralisée. Nous proposons une hypothèse d'influence directe de Babbitt sur la conception même de cette troisième pièce des *Quatre études de rythme*, dont l'audace semble contredire le caractère pondéré du compositeur français [11]. Cette hypothèse est corroborée par une conversation que nous avons eue avec Milton Babbitt qui nous a confirmé avoir participé aux cours de composition tenus par Olivier Messiaen à Tanglewood en 1948, donc avant la réalisation de la pièce *Mode de valeurs et d'intensités.* En effet, les deux premières études de rythmes ont été composées aux Etats-Unis, comme le frontispice de la partition l'indique. L'indication « Darmstadt - 1949 » sur la partition de *Mode de valeurs et d'intensités* confirme que la pièce a été effectivement composée après la rencontre entre Messiaen et Babbitt.

4.2 Iannis Xenakis : théorie des cribles et groupe des rotations du cube dans l'espace

Une deuxième application compositionnelle des théories algébriques, sans doute influencée par les idées de Messiaen (et indirectement par la combinatoire de Babbitt, si nous acceptons l'hypothèse précédente) est offerte par la pièce *Nomos Alpha* pour violoncelle solo (1966) de Iannis Xenakis. La pièce fait usage de la théorie des cribles pour établir des structures hors-temps de hauteurs n'ayant aucune sorte de régularité interne. Examinons une de ces structures, celle qui est utilisée au tout début de la pièce. Il s'agit d'une gamme non-octaviante (i.e. dont la période n'est pas un multiple de 12) obtenue à travers des opérations ensemblistes (union, intersection, passage au complémentaire) sur des structures régulières de périodicité 11 et 13). Le processus ensembliste qui engendre une telle structure est détaillé en figure 6.

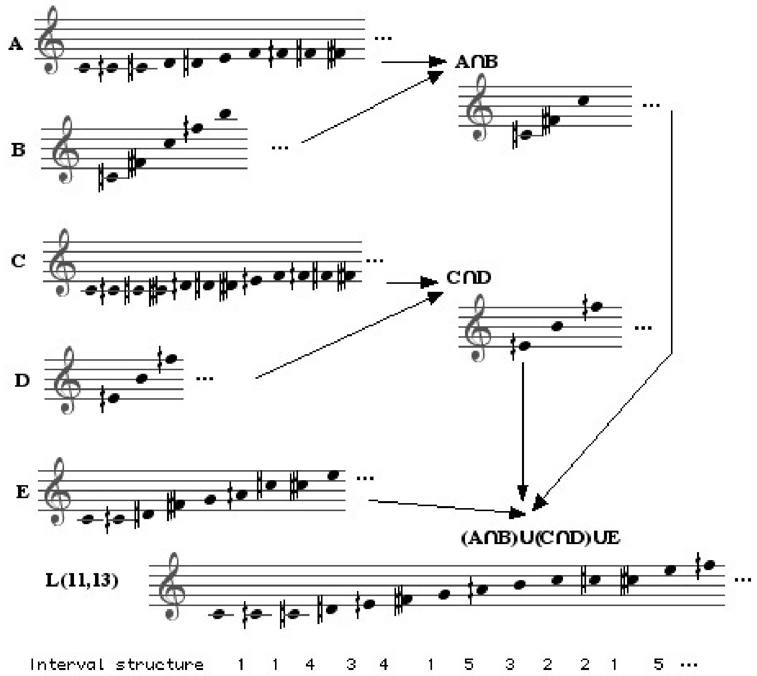

Fig. 6 – Suite d'opérations ensemblistes pour obtenir un des cribles utilisés dans *Nomos Alpha*

En ce qui concerne l'isomorphisme algébrique entre les hauteurs et les durées, Xenakis a souvent insisté sur la possibilité d'utiliser la théorie des cribles pour simuler l'aléatoire à partir des structures rythmiques localement régulières. En effet, comme dans le cas des hauteurs, à l'aide des trois opérations logiques de base (union, intersection, complémentarité), « on peut construire [...] des architectures rythmiques très complexes qui peuvent même aller jusqu'à la distribution simil-aléatoire de points sur une droite si la période est suffisamment longue » [34]. En outre, comme Xenakis l'avait prévu [33], la théorie est computationnelle et donc implémentable dans un langage de programmation pour l'analyse et la composition assistées par ordinateur :
« La théorie des cribles est très générale et par voie de conséquence on peut l'appliquer à toute caractéristique qui est pourvue d'une structure d'ordre total, comme les intensités, les attaques, les densités, les degrés d'ordre, la vitesse, etc. [...]. De plus, dans le futur immédiat nous assisterons à l'exploration de cette théorie et ses multiples utilisations à l'aide d'ordinateurs, car elle est complètement implémentable. »

La modélisation informatique permet dans ce cas de mettre en évidence un aspect peu étudié dans la recherche musicale contemporaine, à savoir l'articulation entre théorie et analyse du processus compositionnel. L'implémentation des méthodes algébriques utilisées par Iannis Xenakis dans *Nomos Alpha* montre l'intérêt musicologique de la modélisation du processus compositionnel, une stratégie analytique qui permet d'étudier l'ensemble des potentialités d'une œuvre parmi les plus riches du répertoire contemporain (sans doute en ce qui concerne les aspects mathématiques). La modélisation informatique de *Nomos Alpha* permet également de mettre en évidence certaines propriétés du processus de Fibonacci que Xenakis utilise dans le groupe des rotations du cube, propriétés dont les retombées musicologiques sont très significatives. En effet, les chaînes engendrées par un processus de Fibonacci appliqué aux 24 rotations du cube ont toujours un comportement cyclique duquel il n'est pas évident de donner a priori la période (longueur) ni le nombre d'éléments différents (degré ou « taux de recouvrement »). Pourtant, une implémentation montre que dans un espace de 576 possibilités, les boucles de Fibonacci ayant une longueur maximale (égale à 18) et le plus grand taux de recouvrement (égal à 13) représentent un sous-ensemble suffisamment riche, car il contient 216 éléments (c'est-à-dire le 37,5% du total). Xenakis a choisi ses boucles de Fibonacci à l'intérieur de ce sous-ensemble et c'est précisément ce choix qui détermine la forme globale de la pièce, divisée en 18 parties, chaque partie correspondant à un élément du groupe des rotations i.e. à une permutation des huit sommets du cube (donc à une suite bien définie d'objets musicaux que le compositeur appelle complexes sonores). La suite de Fibonacci de longueur et degré maximaux utilisée par le compositeur est représentée en figure 7 selon la notation adoptée par Xenakis. Notons que la modélisation informatique permet d'obtenir d'autres variantes de la pièce simplement en utilisant des séries cycliques de Fibonacci différentes mais ayant les mêmes propriétés structurales. Ces séries de Fibonacci sont représentées en figure 7, toujours dans la notation proposée par Xenakis.

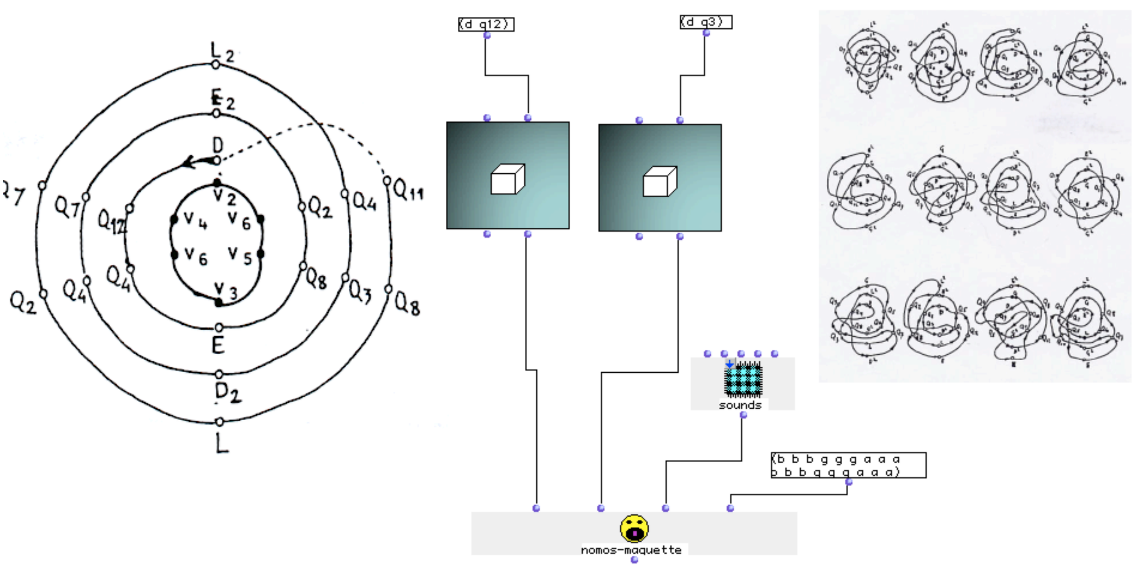

Fig. 7 – Processus de Fibonacci sur le groupe des rotations du cube induisant une permutation des huit sommets du cube dans l'implémentation réalisée en *OpenMusic* et série des variantes proposées par le compositeur.

Cette démarche a également un intérêt d'un point de vue musicologique car le compositeur a souvent souligné la possibilité d'utiliser d'autres séries de Fibonacci. Une étude mathématique des séries de Fibonacci généralisées (i.e. à valeurs dans un groupe) reste un sujet ouvert de recherche musicale qui a, selon nous, un véritable intérêt d'un point de vue mathématique. Il pourrait également avoir des applications musicales tout à fait

nouvelles notamment via l'informatique, d'où l'intérêt d'implémenter ce processus dans un environnement d'aide à l'analyse et à la composition assistées par ordinateur.
L'implémentation permet de créer de multiples variantes de la pièce, variantes qui dépendent des transformations initiales utilisées pour engendrer le processus de Fibonacci sur le groupe des rotations du cube. L'informatique devient ainsi un élément fondamental pour pouvoir étudier le degré de perceptibilité du processus compositionnel utilisé par le compositeur. C'est une question qui est tout à fait transposable à d'autres stratégies compositionnelles utilisées par plusieurs théoriciens dont nous avons commencé à analyser quelques aspects dans le travail de thèse. Cela nous a convaincu de la nécessité d'aborder ce type de questions en essayant d'établir une articulation permanente entre recherche mathématique et implémentation des résultats théoriques dans un environnement d'aide à l'analyse et à la composition assistées par ordinateur.

4.2 Anatol Vieru : suites modales et canons rythmiques mosaïques

Dans le cas du compositeur roumain Anatol Vieru, deux théories différentes concernent directement l'isomorphisme entre espace des hauteurs et espace des rythmes : le calcul des différences finies sur des suites périodiques à valeurs dans un groupe cyclique (*suites modales*) et la théorie des canons rythmiques ayant la propriété de paver l'axe du temps (*tiling rhythmic canons*). Par définition, une suite modale est une application f de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z/nZ}$. Une suite est périodique s'il existe un entier m tel que $f(x) = f(x+m)$ pour tout entier x. Le plus petit m satisfaisant cette propriété est appelé la « période » de la suite. Deux sont les opérateurs de base de toute suite périodique : l'opérateur « différence » D et l'opérateur « translation » T. Si GZ est l'ensemble des suites à valeurs dans le groupe G, les opérateur D et T sont définis de GZ à valeur dans GZ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Df(x) &= f(x+1) - f(x) \\ Tf(x) &= f(x+1) \end{aligned}$$

Une suite est donc périodique s'il existe un entier m tel que, si l'on note T^m la réitération m fois de l'opérateur translation T, on a l'équivalence formelle :

$$T^m(f) = f$$

De même, on notera D^m la réitération m fois de l'opérateur différence D. Le but d'une formalisation algébrique de la théorie des suites modales est de caractériser les rapports entre une suite f, ses opérateurs T et D et le groupe dans lequel une telle suite prend ses valeurs. En particulier, on peut montrer que deux familles de suites (les suites *réductibles* et les suites *reproductibles*) sont nécessaires et suffisantes pour caractériser toute suite à valeur dans un groupe cyclique quelconque [32].

Définition
Une suite f est *réductible* s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $D^k f = 0$.

Exemple
Soit $f = (2\ 0\ 3\ 3\ 2)$ une suite de période 5 à valeurs dans $\mathbf{Z}_5$. En réitérant l'opérateur 4 fois, on arrive à la séquence zéro :

$$\begin{aligned} D^1 &= (3\ 3\ 0\ 4\ 0) \\ D^2 &= (0\ 2\ 4\ 1\ 3) \\ D^3 &= (2\ 2\ 2\ 2\ 2) \\ D^4 &= (0\ 0\ 0\ 0\ 0) \end{aligned}$$

En figure 8, la suite f est interprété comme une séquence d'intervalles dans un accord. Pour tout $D^i(f)$ nous avons un nouvel accord jusqu'au singleton final.

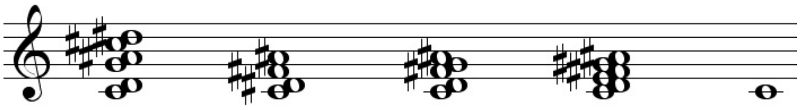

FIG. 8 – Réduction d'une séquence intervallique interprétée comme un accord.

Notons que, plus généralement, étant donnés deux nombres entiers m et k et un nombre premier p, toute sequence de période p^m en $\mathbf{Z}_{p^k}$ est une séquence réductible[3].
Toujours en utilisant l'opérateur différence, on peut introduire une deuxième famille, celle des suites *reproductibles*.

Définition
Une suite f est *reproductible* si elle vérifie l'équation $D^k f = f$ pour un entier $k \geqslant 1$.

Exemple
Soit $f = (2\ 5\ 6\ 3\ 4\ 1)$ une séquence de période 6 en $\mathbf{Z}_7$. Cette séquence se reproduit après 6 itérations de l'opérateur différence :

$$\begin{aligned}
D^1 &= (3\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1)\\
D^2 &= (5\ 3\ 4\ 3\ 4\ 2)\\
D^3 &= (5\ 1\ 6\ 1\ 5\ 3)\\
D^4 &= (3\ 5\ 2\ 4\ 5\ 2)\\
D^5 &= (2\ 4\ 2\ 1\ 4\ 1)\\
D^6 &= (2\ 5\ 6\ 3\ 4\ 1)
\end{aligned}$$

La figure 9 montre une séquence d'accords correspondants au processus de différences précédents.

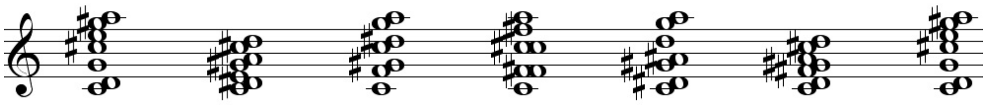

FIG. 9 – Reproduction d'une séquence intervallique après six réiterations du processus de différences successives.

Notons que, plus généralement, l'on peut montrer que toute séquence de $p-1$ éléments distincts en $\mathbf{Z}_p$ est une séquence reproductible[4].

Le processus de différences successives doit parfois être itéré un nombre très élevé de fois pour retrouver la suite initiale ou bien pour la réduire à 0. En outre, il y a des suites qui ne sont ni réductibles ni reproductibles, d'où l'intérêt d'aborder le problème d'un point de vue algébrique. En effet, une formalisation algébrique du problème permet de dégager des critères de réductibilité (ou d'irréductibilité) pour une suite périodique sans effectuer tous les calculs de différences finies. Le résultat central de la théorie modale est un théorème de décomposition qui affirme la possibilité de décomposer (de façon unique) toute suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique $\mathbf{Z/nZ}$ en une somme d'une suite réductible

[3]Pour une preuve par induction sur m, voir [32].
[4]Voir [32] pour des théorèmes de caractérisation des séquences reproductibles.

et d'une suite reproductible et permet de calculer explicitement cette décomposition. Dans le cadre de la thèse nous avons analysé l'utilisation de la théorie des suites modales dans deux pièces d'Anatol Vieru : la *Symphonie n. 2* et *Zone d'oubli*. La figure 10 montre un exemple d'utilisation des suites modales dans l'affectation des paramètres musicaux (hauteurs, durées, intensités, modes de jeu...) de la pièce *Zone d'oubli* pour alto solo.

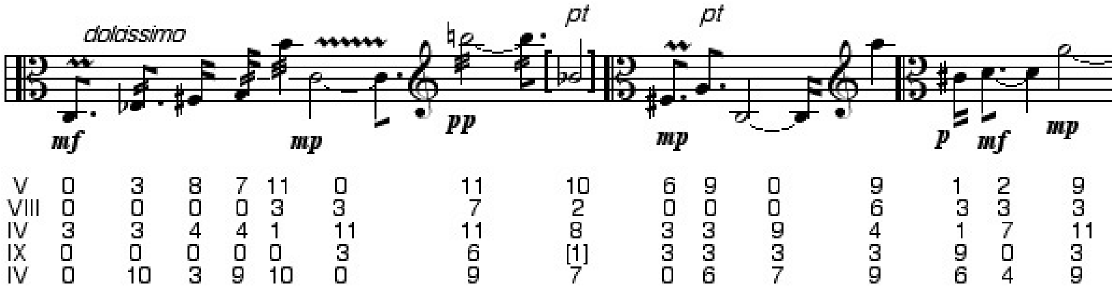

Fig. 10 – Sérialisation des paramètres musicaux via la théorie des suites modales

Le deuxième exemple de correspondance hauteurs/rythmes que nous allons décrire maintenant concerne le problème de la construction de canons rythmiques ayant une propriété globale de pavage de l'espace rythmique. Ce problème, qui avait également intéressé Olivier Messiaen et qui avait été formalisé et généralisé à partir des années 1980, a constitué pour nous le point de départ d'un travail de collaboration avec le compositeur George Bloch. Ce travail offre un bon exemple de la « relation oblique » entre une approche compositionnelle et une formalisation algébrique. En effet, la théorie de Vuza offre la possibilité de trouver explicitement des factorisations pour un groupe n'ayant pas la propriété de Hajós, mais elle ne s'intéresse pas à l'espace combinatoire des solutions.
Nous avons donné une classification exhaustive des solutions dans le cas de la factorisation du groupe cyclique $\mathbf{Z/72Z}$ en deux sous-ensembles non périodiques, cet ordre étant le plus petit pour un groupe n'ayant pas la propriété de Hajós[5]. Cette classification a été établie par rapport à l'action de trois groupes différents sur le groupe cyclique d'ordre 72, considéré comme ensemble : le groupe cyclique, le groupe dihédral et le groupe affine. Dans le premier cas, la famille des sous-ensembles R et S comprend respectivement 6 et 3 solutions, pour un total de 18 canons rythmiques différents. Le nombre de canons rythmiques de pavage se réduit à 9 si l'on considère l'action du groupe dihédral sur $\mathbf{Z/72Z}$, les familles des sous ensembles R et S ayant trois éléments chacune. Dans le cas du groupe affine opérant sur $\mathbf{Z/72Z}$, l'espace des solutions pour R et S se réduit à un seul sous-ensemble. On obtient ainsi le résultat surprenant qui affirme l'existence d'un seul canon rythmique de pavage (à une application affine près). La classification paradigmatique, ainsi que le canon rythmique correspondant à la solution unique (à une application affine près) est donnée en figure 11.
Comme nous l'avons déjà mentionné, le travail de recherche mené avec le compositeur George Bloch est emblématique en ce qui concerne les directions parfois très inattendues qu'une recherche théorique peut prendre lorsqu'elle est soumise à la primauté de la pensée compositionnelle. Dans la thèse, nous avons discuté trois problématiques que le compositeur a posées autour du modèle formel et qui sont à la base de trois compositions : le *Projet Beyeler* (2001), le *Projet Hitchcock* (2001) et le *Projet Reims* (2002). Ces problématiques,

[5]Un groupe (cyclique) possède la propriété de Hajós si pour toute factorisation en deux sous-ensembles R et S, au moins l'un des deux est périodique (où un ensemble R est périodique s'il existe un élément g du groupe, différent de l'élément neutre, tel que $g + S = S$).

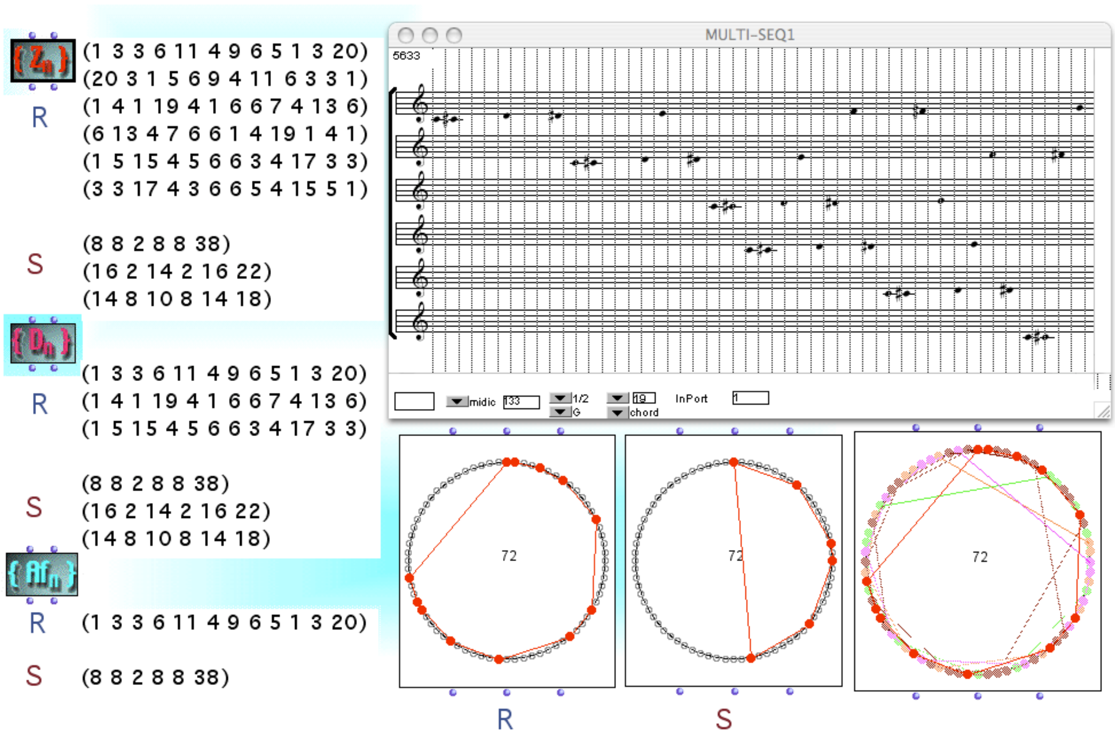

FIG. 11 – Classification paradigmatique, factorisation unique (à une transformation affine près) du groupe cyclique $\mathbf{Z}/72\mathbf{Z}$ en somme de deux ensembles périodiques et représentation musicale sous la forme d'un canon rythmique de pavage (notons que R et S correspondent à la structure intervallique des deux sous-ensembles qui factorisent le groupe cyclique).

étroitement liées, concernent l'organisation métrique d'un canon rythmique de pavage, la réduction d'un canon rythmique de pavage à une collection de sous-canons auto-similaires et la modulation (métrique) entre des canons rythmiques de pavages différents[6].

À conclusion de cette partie, reprenons quelques éléments mathématiques liés à la théorie des canons rythmiques de pavage. Pour cela il faut remonter à une célèbre conjecture en théorie des nombres de la fin du XIX^{e} siècle (Conjecture de Minkowski) et à sa résolution algébrique par le mathématicien hongrois G. Hajós. La conjecture a été proposée par Hermann Minkowski dans *Geometrie der Zahlen* [21] sous la forme d'un problème d'approximation simultanée de plusieurs nombres réels par des nombres rationnels. Minkowski a exprimé la conjecture sous une forme géométrique une dizaine d'années plus tard dans l'ouvrage *Diophantische Approximationen* [22]. Dans cette deuxième forme, la conjecture suggère que dans un pavage simple [simple lattice tiling][7] d'un espace à n dimensions par

[6]Ne pouvant pas faire ici une analyse de ces trois problèmes théoriques par rapport au travail compositionnel fait par George Bloch dans son *Projet Beyeler*, nous renvoyons au troisième chapitre de la thèse. Notons simplement ici que cette collaboration nous a permis de mettre en évidence une différence fondamentale entre la formalisation théorique et les stratégies compositionnelles. Aucune des trois problématiques soulevées par le compositeur n'est une conséquence directe du modèle formel. La théorie algébrique des canons rythmiques de pavage offre d'abord un catalogue des solutions qui sert essentiellement à stimuler l'imaginaire du compositeur. À partir du catalogue, le travail compositionnel consiste à essayer de dégager des stratégies pour adapter le modèle formel, parfois très contraignant, à une exigence précise, par exemple la limitation du nombre d'instrumentistes par rapport aux résultats prévus par le modèle.

[7]Par un pavage simple d'un espace à n dimensions, nous entendons une collection de cubes congruents qui recouvrent l'espace de telle façon que ces cubes n'ont pas d'intersection (autre que la frontière) et que

des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$. Dans le cas particulier de l'espace à trois dimensions, la conjecture exprime le fait que dans un pavage avec des cubes unités, on trouvera toujours un couple de cubes ayant en commun une de leurs faces. La figure suivante (figure 12) montre le cas bidimensionnel que Minkowski pensait pouvoir généraliser facilement à toute dimension n.

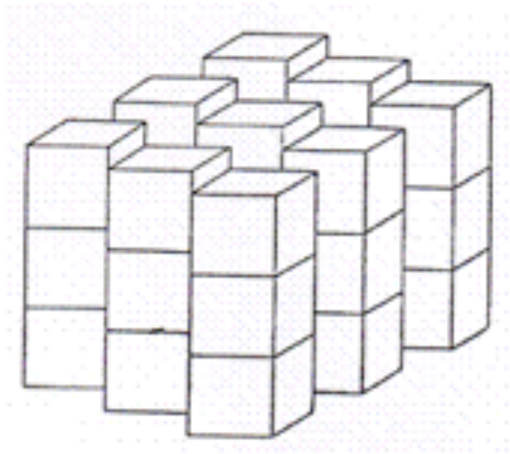

Fig. 12 – Pavage de l'espace tridimensionnel par des cubes unité (figure tirée de l'ouvrage *Diophantische Approximationen*, p. 74)

L'histoire de la conjecture de Minkowski et de ses métamorphoses musicales nous semble paradigmatique en ce qui concerne les multiples applications entre un problème posé par la musique (construction des canons rythmiques ayant une propriété rythmique singulière) et les différents domaines en mathématique susceptible d'apporter une réponse au probléme (théorie des nombres, géométrie, algèbre, ...). Ce qui nous semble encore plus surprenant c'est la possibilité, à partir d'un problème posé par la musique, de remonter à des conjectures mathématiques qui sont toujours ouvertes. C'est le cas, par exemple, de la Conjecture de Fuglede (ou conjecture spectrale), un problème que l'on peut désormais approcher en s'appuyant sur la représentation des structures rythmiques susceptibles d'engendrer le pavage de l'axe du temps, en termes de polynômes à coefficients 0 et 1[8].

5. Quelques ramifications philosophiques de l'approche algébrique en musique

Dans une perspective traditionnelle, l'approche algébrique en sciences humaines renvoie à un paradigme structuraliste dont on connaît désormais assez bien les aspects les plus problématiques [26], et cela en dépit du fait qu'il soit parfois proposé à nouveau comme le paradigme dominant de tout discours philosophique [9]. Cependant, la musique représente un terrain sur lequel on pourrait arriver à concilier certaines instances structuralistes avec d'autres orientations philosophiques, en particulier la phénoménologie husserlienne. C'est une hypothèse que l'on peut avancer à partir, par exemple, des écrits d'Ernst Cassirer

leurs centres forment un treillis. Ce treillis est appelé « simple » pour le distinguer du cas (multiple) dans lequel les cubes ont plusieurs points d'intersections (autres que les frontières).

[8] Pour une description des liens entre la théorie des canons rythmiques et la Conjecture spectrale, voir [4].

dont certaines considérations algébriques sur la mélodie musicale semblent bien s'inscrire dans une démarche qui reste ancrée sur le terrain de la phénoménologie [8]. En outre, l'articulation entre l'objectal et l'opératoire, que l'épistémologue Gilles-Gaston Granger avait suggérée à partir de la fin des années quarante comme étant le fondement de la notion du concept philosophique [14], semble toucher un aspect qui, selon les trois compositeurs/théoriciens sur lesquels nous avons concentré cette étude (Milton Babbitt, Iannis Xenakis et Anatol Vieru), peut être considéré comme la dualité à la base de la théorie musicale : l'articulation entre le *son* et l'*intervalle*. Cette considération ouvre également à des questions qui touchent plus précisément les rapports entre méthodes algébriques, perception et cognition musicale auxquels nos travaux n'ont pas su donner, jusqu'à maintenant, une réponse satisfaisante. Ces types de problématiques demandent une remise en question des ramifications philosophiques de certaines théories algébriques, en particulier la théorie des catégories et des topoï, appliquées à la musique. À partir de réflexions des mathématiciens sur la portée phénoménologique de l'activité mathématique contemporaine [24], et en comparant ces auteurs avec d'autres orientations plus épistémologiques sur la portée cognitive de la réflexion phénoménologique [27], le théoricien de la musique d'aujourd'hui pourrait ainsi arriver à constituer un cadre conceptuel nouveau à l'intérieur duquel certains problèmes mathématiques posés par la musique ont des implications importantes pour la perception et soulèvent des questions philosophiques auxquelles la philosophie toute seule n'aurait peut-être jamais pensé.

Remerciements

Je remercie Athanase Papadopoulos et Xavier Hascher pour m'avoir invité à participer à cette première Journée Mathématique/Musique à Strasbourg organisée par l'Institut de Recherche Mathématique Avancée et le Département de Musique et avoir sollicité cette contribution. Merci à Odile Schladenhaufen pour sa lecture attentive de l'article. Cette étude étant un résumé des résultats contenus dans mon travail de thèse, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé à mener à bien mes recherches. Je remercie tout particulièrement deux amis, car sans eux la thèse n'aurait tout simplement pas vu le jour : Carlos Agon et Jean Carrive. Je ne saurais trop remercier Carlos pour la disponibilité et la générosité inconditionnelle dont il a fait preuve à tout moment. Mais il n'y aurait également pas eu de thèse sans la lecture patiente de Jean qui a accepté de poser momentanément son violon et de partir pour un voyage dans les orbites de la musicologie computationnelle. Merci.

Références

[1] C. AGON, M. ANDREATTA, G. ASSAYAG, S. SCHAUB (2004), *Formal Aspects of Iannis Xenakis' Symbolic Music : A Computer-Aided Exploration of Compositional Processes*, Journal of New Music Research, **33/2**, 145-159.

[2] C. ADLER (1885), *Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft*, Vierteljahresschrift für Musikwissenschaft, **1**, 5-20.

[3] E. AMIOT (2004), *Why rhythmic Canons are interesting*, Perspectives in Mathematical Music Theory, (G. Mazzola, E. Puebla et T. Noll éd.), EpOs, Université d'Osnabrück.

[4] E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon (2005), *Tiling the (musical) line with polynomials : some theoretical and implementational aspects*, Proceedings of the International Computer Music Conference, Barcelona.

[5] M. Andreatta et S. Schaub (2003), *Une introduction à la Set Theory : les concepts à la base des théories d'Allen Forte et de David Lewin*, Musurgia, **X/1**, 73-92.

[6] M. Andreatta (2004), Méthodes algébriques en musique et musicologie du XXᵉ siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels , *Thèse, EHESS.*

[7] G. Assayag, C. Agon, M. Laurson, C. Rueda (1999), *Computer Assisted Composition at Ircam : Patchwork and OpenMusic*, Computer Music Journal, **23(3)**.

[8] E. Cassirer (1944), *The concept of group and the theory of perception*, Philosophy and Phenomenological Research, **V/1**, 1-36.

[9] P. Caws (1988), *Structuralism. A Philosophy for the Human Sciences*, Contemporary Studies in Philosophy and the Human Sciences, Humanities Press, New Jersey.

[10] M. Chemillier (1990), Structure et Méthode algébriques en informatique musicale, *Thèse, L.I.T.P., Institut Blaise Pascal.*

[11] C. Deliège (2003), Cinquante ans de modernité musicale : de Darmstadt à l'Ircam. Constribution historiographique à une musicologie critique, *Mardaga*, Bruxelles.

[12] H. Eimert (1964), Grundlagen der musikalischen Reihentechnik, *die Reihe*, Universal éd.

[13] A. Forte (1973), The Structure of Atonal Music, *New Haven, Yale University Press.*

[14] G.-G. Granger (1994), Formes, opérations, objets, *Librairie Philosophique J. Vrin*, Paris.

[15] G. Hajós (1942), *Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter*, Math. Zeit., **47**, 427-467.

[16] Y. Hellegouarch (1999), *Gammes naturelles*, Gazette des mathématiciens, **81-82**.

[17] D. Lewin (1993), Musical Form and Transformation : 4 Analytic Essays, New Haven, *Yale University Press.*

[18] S. MacLane (1998), Categories for the Working Mathematician, Second Edition, *Springer.*

[19] G. Mazzola (1985), Gruppen und Kategorien in der Musik, *Helderman*, Berlin.

[20] G. Mazzola (2003), Topos of Music, *Birkhäuser Verlag.*

[21] H. Minkowski (1896), Geometrie der Zahlen, Leipzig, 1896.

[22] H. Minkowski (1907), Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie, *Chelsea Publishing Company*, New York.

[23] T. Otterström (1935), A Theory of modulation, *The University of Chicago.*

[24] F. PATRAS (2005) : *Phénoménologie et théorie des catégories*, dans L. Boi (éd.) : New Interactions of Mathematics with Natural Sciences and the Humanities, Springer.

[25] R. PECK (2003), Klein-Bottle *Tonnetze*, *Music Theory Online*, **9(3)**.

[26] J. PETITOT (1985), Morphogenèse du sens, *PUF*, Paris.

[27] J. PETITOT, F. J. VARELA, B. PACHOUD, J.-M. ROY (2002), Naturaliser la phénoménologie. Essais sur la phénoménologie contemporaine et les sciences cognitives, *CNRS Editions*, Paris.

[28] A. SANDS (1957), *On the factorization of finite abelian groupes*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 65-86.

[29] C. SEEGER (1977), Studies in Musicology (1935-1975), *University of California Press.*

[30] A. VIERU (1980), Cartea modurilor, 1 (Le livre des modes, 1), *Ed. muzicala*, Bucarest.

[31] D.T. VUZA (1991), *Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons (in four parts)*, Perspectives of New Music, **29(2)**, 22-49.

[32] D.T. VUZA ET M. ANDREATTA (2001), *On Some propertis of periodic sequences in Anatol Vieru's Modal Theory*, Tatra Mt. Math. Publ. **23**, 1-15.

[33] I. XENAKIS (1985), Arts/Sciences - Alloys, *Stuyvesant : Pendragon Press.*

[34] I. XENAKIS (1988), Redécouvrir le temps, *Éditions de l'Université de Bruxelles.*

[35] I. XENAKIS (1992), Formalized Music, (Revised Edition), *Pendragon Press*, Stuyvesant NY.

Moreno ANDREATTA
IRCAM/CNRS UMR 9912
Moreno.Andreatta@ircam.fr

Leonhard euler et la musique

Myriam Fischer

Résumé : Leonhard Euler, célèbre pour son travail dans le domaine des mathématiques pures, a également effectué de nombreuses recherches dans le domaine de la musique. C'est en 1739, lors de son séjour à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg qu'Euler écrivit son premier ouvrage traitant de la musique, "Tentamen novae musicae". Plus tard, dans les "Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie", publiées en 1768, Euler y expose en particulier son point de vue sur la musique qu'il avait déjà établie en 1739. Il désire expliquer la véritable origine des sons employés dans la musique et montrer que les principes de l'Harmonie se réduisent à des nombres. Euler propose une échelle musicale en utilisant uniquement les nombres 2, 3 et 5. De plus, il s'interroge sur les raisons fondamentales de tout ce qui peut amener une sensation agréable dans le mélange et la superposition des tons. Considérer une théorie de la musique entraîne inévitablement la question de la réalisation concrète à savoir l'accord des instruments.

Introduction

Bien que rangée aujourd'hui parmi les disciplines "littéraires", il fut un temps où la musique était considérée comme une science mathématique : arithmétique, astronomie, géométrie et musique constituaient le "quadrivium", carrefour des quatres voies de la connaissance. L'illustre Leonhard Euler, célèbre pour ses découvertes dans le domaine des mathématiques pures, a également effectué de nombreuses recherches dans le domaine des sciences appliquées, en particulier la musique. Il est certain que pour lui la musique faisait partie des mathématiques.

Après une brève biographie d'Euler, nous exposerons une partie de sa théorie musicale. Celle-ci nous amènera alors à nous intéresser de plus près à la réalisation concrète à savoir la question de l'accord des instruments. Puis, dans un quatrième chapitre, nous exposerons son point de vue sur les particularités de la musique dite "moderne" à l'époque.

1. Leonhard Euler : sa vie, son oeuvre.

1.1. Sa jeunesse à Bâle (1707-1727)

Leonhard Euler naquit à Bâle le 15 avril 1707. Il reçut sa première instruction de son père, Paul Euler, qui lui enseigna les mathématiques dès qu'il fut en âge de les comprendre, non pas qu'il eut voulu faire de son fils un mathématicien, loin de là, il le destinait à la théologie.

Le 29 octobre 1723, suivant le désir de son père, Euler s'inscrivit à la faculté de théologie de l'Université de Bâle. Parallèlement, il suivait les cours de Jean Bernoulli.

On persuada rapidement Paul Euler que son fils était né pour prendre dignement la succession du Grand Bernoulli dans les sciences mathématiques et non pour mener une vie contemplative d'un pasteur de campagne. Leonhard Euler pouvait donc continuer à consulter Jean Bernoulli. Il remporta un 2ème prix au concours de l'Académie des sciences de Paris en 1727 alors qu'il n'avait que 20 ans. Ce prix est le commencement d'une longue série de concours où Euler fut quatorze fois lauréat !

1.2. Premier séjour à Saint-Petersbourg (1727-1741)

Vers la même époque, le tsar Pierre 1er voulut avoir dans sa ville de Saint-Petersbourg une Académie des Sciences comparable à celle de Paris. Daniel et Nicolas Bernoulli y furent appelés et

Fig. 1 – Portrait d'Euler

promirent à leur ami Euler de lui procurer une place convenable à l'Académie russe. Ainsi, le 5 avril 1727, Euler partit de Bâle pour Saint-Petersbourg où il fut nommé adjoint de la classe de mathématiques de l'Académie impériale des sciences.

Le 27 décembre 1733, Euler épousa Catherine Gsell de Sainte Gall. De cette union, Euler eut treize enfants dont huit moururent en bas âge. En 1733, Daniel Bernoulli quitta Saint-Petersbourg, départ qui éprouva vivement Euler.

La musique constituait également un centre d'intérêt pour Euler. Quand il se mettait au piano, son esprit géométrique ne l'abandonnait pas. En savourant les sensations agréables de l'harmonie, il en approfondissait la cause : la perception de quelque chose de parfait fait naître un sentiment de plaisir. Or, l'ordre étant une des perfections qui causent à l'âme des sensations agréables, le plaisir que nous éprouvons à écouter une belle musique consiste dans la perception des rapports que les sons tiennent entre eux, particulièrement lorsque ces rapports sont exprimés par des nombres entiers (rapports dans la fréquence des vibrations aériennes). Le fruit de ces méditations dans ses moments de repos donna lieu au "Tentamen novae musicae" c'est à dire "Essai d'une nouvelle théorie de la musique". Sa rédaction fut terminée en 1731, du temps où son ami Daniel Bernoulli travaillait encore à ses cotés, mais cet ouvrage ne parut qu'en 1739. Il est rempli d'idées neuves et contient un grand nombre d'indications dont les compositeurs et les fabricants d'instruments pouvaient tirer profit, non sans quelques critiques comme celles de Nicolas Fuss qui dit en 1783 : "Cet ouvrage n'eut pas un grand succès apparemment pour la seule raison qu'il renferme trop de mathématiques pour le musicien et trop de musique pour le mathématicien". Cet ouvrage fut enrichi par la parution en 1764 de deux articles intitulés "Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique moderne" [2] et "Du véritable caractère de la musique moderne" [3].

1.3. Euler à Berlin (1741-1766)

En 1741, le roi de Prusse, Frédéric II proposa à Euler de venir à Berlin afin de donner des leçons de mathématiques et de physique aux Princes de Wurtemberg. Le 25 juillet 1741, Euler arriva à Berlin avec sa famille. En 1744, fut établie "l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse", divisée en quatres classes : Physique ou philosophie expérimentale, mathématique, philosophie spéculative et Belles-Lettres. Euler devint directeur de la classe de mathématique et occupa ce poste durant tout le reste de son séjour à Berlin.

L'activité scientifique d'Euler fut prospère les années suivantes. On peut mentionner par exemple la "Théorie du mouvement des planètes et des comètes", des ouvrages traitant des principes de l'artillerie... De plus, le roi prescrivit des travaux destinés à être publiés dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse.

La renommée d'Euler, sa science encyclopédique, ses dons mathématiques extraordinaires lui valurent à Berlin une estime unanime. Parmi les princes de la Maison royale, le Margrave règnant au Brandebourg-Schwedt l'estimait particulièrement et le pria d'instruire ses deux filles. Plus tard, il continua à donner des leçons par écrit et c'est ainsi qu'il fut ammené à rédiger les lettres adressées à la future princesse d'Anhalt-Dessau. Les "Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de Physique et de Philosophie" [1] furent publiées en 1768 par l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg. Cet ouvrage eut un succès retentissant : il est en effet à la portée de toute personne cultivée. Il nous interresse ici car Euler y traite en particulier des consonnances, des dissonances, des douze tons du clavecin...

En 1756, Maupertuis, président de l'Académie, quitta Berlin pour des raisons de santé. Pendant cette absence, Euler le remplaça jusqu'à son départ de Berlin en 1766.

Néanmoins, de nombreuses tensions avaient lieu entre Euler et le roi de Prusse. Celui-ci n'était pas satisfait de la façon dont Euler dirigeait les finances de l'Académie. De plus, le roi ne reconnaissait pas toute la valeur d'Euler et lui reprochait fréquemment le fait qu'il ne s'intéressait pas assez à la poésie, domaine de prédilection du roi philosophe.

Ainsi, de nombreux différends amenèrent Euler à quitter Berlin et à retourner à Saint-Petersbourg où on lui offrait la direction de l'Académie des Sciences.

1.4. Deuxième séjour à Saint-Petersbourg (1766-1783)

A peine installé à Saint-Petersbourg, Euler fut atteint d'une cataracte à l'oeil gauche (il avait déjà perdu l'oeil droit en 1735, suite à trois jours de calculs acharnés) ce qui lui fit perdre la vue définitivement. Mais la prodigieuse mémoire et sa volonté peu commune lui permirent de continuer son activité : ses fils et ses élèves écrivaient sous sa dictée le texte de ses mémoires.

En 1771, un terrible incendie éclata à Saint-Petersbourg et les flammes gagnèrent la maison d'Euler. Un Bâlois nommé Pierre Grimm se précipita à travers les flammes, chargea Euler sur ses épaules et le sauva au péril de sa propre vie.

Malgré sa cécité, l'activité scientifique d'Euler fut abondante. Voici ce que raconte un de ses arrière petit-fils, Paul-Henri Fuss : "Pour faire de tête les calculs les plus compliqués, il lui fallait moins de temps qu'à un autre la touche à la main ; et encore ne se trompait-il que rarement". Sa facilité pour calculer de tête était portée à un degré qu'on croyait à peine. Tourmenté d'insomnie, il calcula une nuit les six premières puissances de tous les nombres entiers inférieurs à 100 et il récitait quelques jours après le tableau numérique entier !

Leonhard Euler mourut le 18 septembre 1783 pendant qu'il s'entretenait à table avec un certain M.Lexell venu expressément le voir pour discuter de la "nouvelle planète", à savoir Uranus, découverte en 1781.

2. "Lettres à une princesse d'Allemagne" : construction mathématique des 12 tons

Les "Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de la physique et de philosophie" ([1]) furent publiées en 1768 par l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg. Lors de cette correspondance, Euler consacre plusieurs lettres à la musique dont voici les titres :

– Des consonnances et des dissonances.
– De l'unisson et des octaves.
– Des autres consonnances.
– Des 12 tons du clavecin.
– Sur les agréments d'une belle musique.
– Sur les merveilles de la voie humaine.

Euler y expose en particulier sa théorie de la musique qu'il avait déjà établie en 1739 dans "Tentamen novae musicae". Il désire expliquer la véritable origine des sons employés dans la musique et montrer que les "principes de l'Harmonie se réduisent à des nombres". Euler écrira dans une des lettres que "ce n'est pas la Théorie qui a conduit les musiciens à la connaissance de tous les tons : ils en sont plutôt redevables à une force cachée de la véritable Harmonie, qui a opéré si efficacement sur leurs oreilles, qu'elles ont été forcées de recevoir les tons qui sont actuellement en usage".

2.1. Notions élémentaires : le son, l'accord, l'octave

Lorsque un son est produit, notre oreille perçoit une suite de "coups" ou vibrations. Le nombre de vibrations produit en une seconde est appelé *fréquence*. La différence principale entre un son aigu et un son grave réside dans la fréquence de ces derniers. Autrement dit, plus un son est aigu, plus sa fréquence est élevée. On appelle *accord* un mélange de plusieurs sons.

On considère d'abord la situation où l'on produit deux sons. Si ces sons ont même fréquence, on dit qu'on a un *unisson* : c'est l'accord le plus simple en musique !

Néanmoins, lorsque ces deux sons possèdent des fréquences différentes, f_1 et f_2 respectivement, la situation la plus simple après celle de l'unisson est celle où $f_1 = 2f_2$. De plus, l'expérience confirme que ceci est agréable à l'oreille.

Ainsi, Euler définit les notions suivantes :
– Quand l'oreille découvre aisément un rapport qui règne entre deux sons, leur accord est nommé *consonance*.
– Quand ce rapport est très difficile à découvrir ou même impossible, l'accord est nommé *dissonance*.
– La consonance où le son aigu achève précisément deux fois plus de vibrations que le son grave est appelée *octave*.

Personne n'ignore par exemple que la voix humaine est faite de telle manière que les hommes chantent une octave plus grave que les femmes. En réalité, l'octave est la consonance que toute oreille humaine est capable de distinguer et, en chantant, toute personne peut aisément passer d'un son à une octave plus aigue ou plus grave. Ainsi, l'octave est vraiment caractérisée par le rapport de 1 à 2 qui règne dans les sons. Euler affirme même : "Plus une proportion est simple ou exprimée par des petits nombres, plus elle se présente distinctement à l'entendement et y excite un sentiment de plaisir...la proportion de 1 à 2 est sans doute la plus simple, et c'est celle qui fournit l'accord d'une octave."

On utilisera la notation d'Euler, qui note par la même lettre les sons qui diffèrent d'une octave. Plus précisément, on écrit C, c, $\bar{c}$, $\bar{\bar{c}}$... les octaves successives. Autrement dit, si la fréquence du son C est 1, celle de c sera 2, celle de $\bar{c}$ sera 4 ...

2.2. D'autres consonances : la quinte et la quarte

En considérant uniquement le chiffre 2, on construit l'octave, la double octave, la triple octave puisque ces consonances renferment des proportions de 1 à 2, 1 à $2 * 2$, 1 à $2 * 2 * 2$...Ces sons, trop simples, ne permettent pas de produire de véritable musique, ce qui nous amène à introduire le chiffre 3.

On considère la situation où un son a une fréquence trois fois plus élevée qu'un autre, autrement dit, il y a une proportion de 1 à 3 qui règne entre deux sons. Si la fréquence du son F est 1, celle de f sera 2 et celle de $\bar{f}$ sera 4. Le son cherché, dont la fréquence est 3, sera donc plus aigu que le son f, mais plus grave que le son $\bar{f}$. On note ce son $\bar{c}$ et on appelle *quinte* un intervalle entre deux sons dont les proportions sont de 2 à 3.

En ne considérant que les chiffres 2 et 3, on obtient le tableau suivant :

F	f	$\bar{c}$	$\bar{f}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{f}}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$
1	2	3	4	6	8	12

La quinte est la consonance la plus simple après l'octave. Ceci est dû, non seulement à la simplicité du rapport qui existe entre les fréquences, mais également à la facilité que possède tout musicien à accorder une quinte.

On définit alors un intervalle nommé *quarte* qui consiste en un rapport de 3 à 4 entre les fréquences des deux sons. Les intervalles de $\bar{c}$ à $\bar{f}$, de $\bar{\bar{c}}$ à $\bar{\bar{f}}$ par exemple sont des quartes. Grâce au chiffre 3, on a donc pu définir la quinte et la quarte.

On considère à présent le chiffre $3*3$, c'est à dire 9. Il y a un rapport de 2 à 3 entre 9 et la fréquence du son $\bar{\bar{c}}$. Ainsi, le son cherché, à savoir le son de fréquence égale à 9, est la quinte de $\bar{\bar{c}}$, c'est à dire $\bar{\bar{g}}$. Afin de pouvoir définir les fréquences des octaves inférieures des sons $\bar{c}$, $\bar{f}$ et $\bar{g}$ avec des valeurs entières, on est amené à donner la valeur 9 à la fréquence du son G. Les proportions entre les différents sons demeurant identiques, on obtient le tableau suivant :

C	F	G	c	f	g	$\bar{c}$	$\bar{f}$	$\bar{g}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{f}}$	$\bar{\bar{g}}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$
6	8	9	12	16	18	24	32	36	48	64	72	96

2.3. Une autre espèce d'accord : les dissonances

A partir du tableau précédent, on considère l'intervalle de F à G. On a un rapport de 8 à 9 entre les fréquences et on appelle cet intervalle *seconde* ou *ton majeur*.

D'autre part, l'intervalle de G à f, qui renferme une proportion de 9 à 16 est nommé *septième*. Comme ces proportions sont exprimées avec des nombres relativement grands, ces deux intervalles ne sont plus considérés comme des consonances : on les appelle *dissonances*.

A présent, on considère le nombre $3 * 3 * 3$, c'est-à-dire 27. On a $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$. Par conséquent, le son de fréquence égale à 27 est la quinte de g qui est donc le ton $\bar{d}$. Comme 27 est un nombre impair, on donne la valeur 27 à la fréquence de D. Grâce aux différents rapports entre les fréquences des sons que l'on a établi précédemment, on construit le tableau suivant :

C	D	F	G	c	d	f	g	$\bar{c}$	$\bar{d}$	$\bar{f}$	$\bar{g}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{d}}$	$\bar{\bar{f}}$	$\bar{\bar{g}}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$
24	27	32	36	48	54	64	72	96	108	128	144	192	216	256	288	384

A partir de là, on définit la *tierce mineure* qui consiste en un intervalle où le rapport entre les fréquences des sons est de 27 à 32 et lorsque celui-ci est de 16 à 27, on nomme cet intervalle une *sixte majeure*. L'intervalle D à F est donc une tierce mineure alors que l'intervalle de F à d est une sixte majeure. Il est évident que ces intervalles sont également des dissonances.

2.4. Les 12 tons de la musique

On introduit à présent le chiffre 5 et on cherche le son qui aura cinq fois plus de vibrations en une seconde que le son F. En se référant au tableau précédent, on constate que le son cherché (de fréquence égale à 160) se situe entre $\bar{g}$ et $\bar{\bar{c}}$. Le son cherché est le ton $\bar{a}$. On définit alors la *tierce majeure*, intervalle dont le rapport entre les fréquences est de 4 à 5. L'intervalle de $\bar{f}$ à $\bar{a}$ est une tierce majeure et on constate en outre que cette consonance est très agréable à l'oreille.

Par ailleurs, $\bar{a}$ et $\bar{\bar{c}}$ forment un intervalle dont les proportions sont de 5 à 6. Cette consonance est également appelée *tierce mineure*, les rapports de $\frac{27}{32}$ et $\frac{5}{6}$ étant très proches.

On considère alors les tierces majeures de G, c et d ce qui nous donne les sons $\bar{\bar{h}}$, $\bar{\bar{e}}$ et $\bar{\bar{fs}}$. Afin de transporter ces sons dans la première octave, on est ammené à donner la valeur 135 à la fréquence de Fs. Les rapports entre les fréquences étant identiques à ceux du tableau de la partie précédente, on obtient :

C	D	E	F	Fs	G	A	H	c
96	108	120	128	135	144	160	180	192

On remarque donc que les tons de la gamme diatonique ne résultent que des nombres 2, 3, 3^2, 3^3 et 5. On est amené à définir le *ton mineur* qui consiste en un intervalle où le rapport est de 9 à 10. L'intervalle D-E par exemple est un ton mineur.

Enfin, en itérant le procédé précédent, on trouve les tierces majeures des quatres nouveaux tons A, E, H et Fs. Si la fréquence de C est 96, on aura alors pour les fréquences 200, 150, 225 et 168.75 pour les sons cs, Gs, ds et B respectivement. La fréquence de C est donc $96 * 4 = 384$. Le tableau ci-après fournit tous les tons de la première octave, exprimés par des nombres entiers, tous multiples de 2, 3 ou 5.

C	$2^7 * 3$	384
Cs	$2^4 * 5^2$	400
D	$2^4 * 3^3$	432
Ds	$2 * 3^3 * 5$	450
E	$2^5 * 3 * 5$	480
F	2^9	512
Fs	$2^2 * 3^3 * 5$	540
G	$2^6 * 3^2$	576
Gs	$2^3 * 3 * 5^2$	600
A	$2^7 * 5$	640
B	$3^3 * 5^2$	675
H	$2^4 * 3^2 * 5$	720
c	$2^8 * 3$	768

TAB. 1 – Nombres correspondant à chaque ton

On constate donc que la différence entre chaque ton n'est pas identique. On appelle *demi-ton majeur* un intervalle dont les rapports sont de 15 à 16 et *demi-ton mineur* un intervalle dont les proportions sont de 24 à 25. Ainsi, les douze tons communément utilisés sont simplement tirés des nombre 2, 3 et 5 ! Euler expose cette construction avec une clarté impressionnante et les différentes lettres dans lesquelles ceci est rédigé ont toutes été écrites le 3 mai 1760 !

2.5. Qu'est ce qu'une belle musique ?

Euler se pose la question suivante "Pourquoi une belle musique excite en nous un sentiment de plaisir ?" Cette interrogation est certes sans réponse puisque une pièce peut être appréciée par telle personne alors que cette même musique déplait à telle autre. Euler propose cependant une explication qui se base sur sa théorie de la musique. Selon lui, "le plaisir que l'on sent en entendant une belle musique consiste dans la perception de l'ordre qui y règne...lorsqu'on comprend les rapports ou les proportions que les vibrations de tous les tons tiennent entre eux. Ce jugement étant plus ou moins fin, il est clair pourquoi la même harmonie est perçue par l'un, et point du tout par l'autre, surtout quand les proportions entre les tons sont exprimées par des nombres un peu grands". En outre, la mesure, c'est-à-dire la durée de chaque ton est également un élément significateur d'ordre.

Par conséquent, une compréhension des rapports entre les vibrations des différents tons ainsi qu'une appréciation des durées conduiraient seuls à l'appréciation d'une musique ? Ceci est absurde et Euler avoue en effet : "il faut quelque chose de plus que personne n'a encore développé". Il écrit la phrase merveilleuse : "Le plaisir vient de ce qu'on devine des vues et des sentiments du compositeur, dont l'exécution, en tant qu'on la juge heureuse, remplit l'esprit d'une agréable satisfaction."

A cette époque, bon nombre de musiciens improvisaient plus qu'ils n'interprétaient les oeuvres de compositeurs. Néanmoins, Euler, très avangardiste pour son temps, avait déjà compris ce que recherche un musicien-interprète : il est sans cesse en quête d'authenticité, il cherche à exécuter les oeuvres de la manière la plus proche de celle désirée par le compositeur. Il parviendra ainsi à traduire les sentiments et les émotions de celui-ci afin de les faire partager à ses auditeurs.

Déjà en 1731, dans une lettre à Jean Bernoulli écrite en allemand ([5]), Euler qui n'avait alors que 24 ans expose sa théorie de la musique. Lors de cette correspondance, Euler résume de manière très concise tout ce qu'il rédigera en 1760 à la princesse d'Anhalt-Dessau, à savoir la caractérisation d'un accord pour permettre une belle harmonie ainsi que les raisons fondamentales de tout ce qui peut amener une sensation agréable dans le mélange et la superposition des tons. Par ailleurs, ce dernier fait allusion à son étude dans "Tentamen novae theoricae musicae" des conditions nécessaires pour avoir une sonorité agréable quand il s'agit de plusieurs accords qui se suivent. Euler va jusqu'à établir une formule permettant le calcul d'une quantité nommée "degré de complaisance". Selon lui, ce nombre indique le degré de plaisir que procure une pièce !

Dans sa réponse, Jean Bernoulli félicite Euler pour sa nouvelle théorie musicale : il se réjouit en particulier du fait que les mathématiques sont capables d'expliquer toutes les sciences. Cependant, il a un avis très réservé au sujet des agréments d'une belle musique. A partir du moment où l'on définit une notion universelle, il faut établir ce qu'on entend par "agréable à l'oreille". Il admet par exemple que les règles établies par Euler au sujet de la valeur d'une pièce sont valables pour un maître de la musique qui prête plus d'attention aux enchainements qu'à l'effet produit. Celui-ci va se divertir s'il voit la partition écrite et qu'il remarque en l'examinant dans le détail qu'elle a été composée selon les règles. Peut-être plus réaliste, Jean Bernoulli sait que la plupart des pièces de musique sont exécutées devant des auditeurs n'ayant pas l'oreille formée et ces derniers apprécieront une musique si elle correspond à un type de sonorité à laquelle les oreilles sont habituées.

2.6. Les mystères de la voix humaine

Dans une dernière lettre écrite le 16 juin 1761, Euler entretient sa destinataire au sujet de la diversité des sons et des articulations qui peuvent être produits par la voix humaine. Cette particularité est telle que "quelques oiseaux qui apprennent à imiter la voix humaine, ne sont jamais capables de prononcer distinctement les différentes voyelles et ce n'est qu'une imitation très imparfaite."

Euler signale au passage que certaines orgues possèdent un jeu nommé "voix humaine". Celle-ci est un jeu d'anche[1], à corps court et cylindrique dont l'extrémité est fermée aux deux tiers. Comme

[1] le son est produit par le battement d'une languette de laiton sur une anche et amplifié par un résonnateur

son nom l'indique, ce jeu est censé imiter la voix humaine. La voix humaine est toujours utilisée avec le tremblant ce qui lui donne un certain lyrisme.

Dans l'orgue classique français, ce jeu se trouve au Grand Orgue. Dans le *Dialogue sur la voix humaine* de la Messe des couvents (1690) de François Couperin par exemple, celle-ci est tantôt en taille, tantôt en dessus, ceci pour imiter le chant d'un ténor et d'une soprano.

Néanmoins, dans l'orgue romantique, elle se trouve au récit et l'utilisation de la boite expressive [2] procure alors des sonorités absolument saisissantes ! Ceci a inspiré le grand facteur d'orgue parisien Aristide Cavaillé-Coll et certains compositeurs du XIX^{eme} siècle. Dans le deuxième choral de César Franck (1822-1890) par exemple ou dans les *Scènes pastorales et orages* de Louis Lefébure-Wely (1817-1869), la voix humaine imite un choeur de jeunes filles ! Une situation tout à fait particulière a lieu à l'orgue Callinet de Masevaux où la voix humaine est au quatrième clavier. Les tuyaux de l'écho se trouvant dans le bas de l'instrument (quasiment sous la tribune), l'utilisation de la boite expressive procure alors une sonorité merveilleuse ! Cet effet magique à l'orgue de Masevaux est connu mondialement.

3. Au sujet des tempéraments

Pour comprendre ce qu'est un tempérament, il convient d'établir une série de constats. Grâce à certaines expériences simples, on peut établir empiriquement que la justesse en musique n'existe pas. Cette curieuse réalité sera expliquée dans ce chapitre ainsi que les solutions envisagées pour accorder un instrument à sons fixés tel l'orgue ou le clavecin.

3.1. Les mathématiques des commas

Effectuons l'expérience suivante : A partir du do$_3$ du clavier, parcourir les douzes quintes pures ascendantes. Etant donné que la longueur du clavier et la nature de la quinte ne permettent pas de cumuler autant de quintes de façon consécutive, on procède en alternant quintes et quartes ce qui permet de rester à l'intérieur de la même octave. Arrivé en bout de course, placer le si$^\sharp$, quinte pure de mi$^\sharp$, sur la touche do$_4^\sharp$ et accorder do$_4$ à l'octave du do$_3$ de départ. Résultat : en jouant les touches do$_4^\sharp$ et do$_4$, on se rend compte que le si$^\sharp$ sonne plus haut que le do. En effet, on a si$^\sharp$= $\frac{3}{2}^{12}$ = 129.746...et do$_8$= 2^7 = 129 On voit donc que le si$^\sharp$ est légèrement trop haut par rapport au do et cette différence, quoique faible est nettement perceptible par l'oreille. On définit alors l'intervalle nommé *comma pythagoricien* comme étant la différence entre le si$^\sharp$ des "quintes" et le do.

A partir du do$_3$ du clavier, accorder les intervalles suivants en prenant soin de placer le dernier mi$_2$ des quintes pures sur la touche fa$_2$. En jouant les touches mi$_2$ et fa$_2$, on s'apperçoit que le mi des quintes pures sonne plus haut que le mi de la tierce pure do-mi. En effet, on a mi$_3$=$\frac{3}{2}^4$ = 5.0625 et le nombre correspondant au mi des "tierces pures" est 5. On définit alors le *comma syntonique*, intervalle défini comme étant la différence entre le mi des "quintes" et le mi.

Ainsi, douze quintes consécutives et acoustiquement pures ne peuvent donner l'octave et font apparaître le comma pythagoricien alors que quatre quintes consécutives et acoustiquement pures ne peuvent donner la tierce majeure et font apparaître le comma syntonique. Ce constat oblige à effectuer un choix pour l'accord des instruments à sons fixés, en particulier le clavier.

Le *tempérament* est comme son nom l'indique, un compromis visant par des moyens empiriques à constituer une échelle musicale susceptible de s'accomoder à toutes les combinaisons de sons qu'on voudrait lui faire supporter. La solution adoptée par les musiciens est de répartir l'un ou l'autre de ces commas sur plusieurs intervalles afin d'en amortir l'impact. Selon les régions ou les époques, ils ont préféré privilégier certains intervalles au détriment d'autres, le problème essentiel revenant à effectuer un choix concrèt de système d'accords pour une littérature donnée.

[2]Ensemble de volets mobiles en bois qui ferme les tuyaux du récit. Ces volets, commandés par une pédale d'expression, s'ouvrent et se ferment pour permettre un effet ***pp*** → ***ff***

3.2. Exemples classiques

Mode de représentation

La représentation la plus commode du cycle des douze quintes d'un système d'accords est le cercle. Nous représentons ici la quinte pure par un "0" et la quinte altérée par un nombre précédé de "+" ou "-" indiquant la proportion de comma dont la quinte est altérée par rapport à sa valeur pure.

Le système pythagoricien

Durant tout le moyen-âge jusqu'à la fin du XV^{eme} siècle, c'était le système pythagoricien qui était utilisé. La pureté de la quinte est la caractéritique des musiques médiévales.

Le tempérament mésotonique

L'évolution du statut de la tierce dans la musique va amener l'accord des instruments du système pythagoricien au tempérament mésotonique. Le mésotonique aura une longue carrière devant lui puisqu'on le trouve encore dans des campagnes reculées en Italie au XIX^{eme} siècle. Il a été couramment utilisé en France jusqu'à la révolution alors qu'en Allemagne, il a été abandonné dès la fin du XVII^{eme} siècle. L'orgue Garnier de l'église Saint Paul à Strasbourg, accordé au tempérament mésotonique, possède un levier horizontal permettant à l'organiste de choisir entre ré dièse et mi bémol, et un autre levier entre sol dièse et la bémol. Par cette spécificité, il fait sonner à merveille la musique des XVI^{eme} et XVII^{eme} siècles.

Les tempéraments de transition

Les données historiques démontrent que l'évolution vers des systèmes moins limités du point de vue tonal a commencé très tôt en Allemagne tels en témoignent les tempéraments et le répertoire. En fait, les musiciens ont le souci d'accéder facilement aux tonalités éloignées.

Le tempérament égal

L'adoption du tempérament égal est en étroite relation avec la Révolution Française et la création du système métrique. Ainsi, au XIX^{eme} siècle, le tempérament égal s'est installé plus ou moins rapidement selon les régions dans toute l'Europe.

Voici un schéma sommaire résumant l'évolution de l'accord :

système pythagoricien→	← mésotonique →	tempéraments ← de transition →	← tempérament égal

Dans l'évolution de la manière d'accorder, comme dans tout autre domaine, les changements d'une époque à l'autre ne se sont évidemment pas produits de façon radicale. Il y a toujours des périodes de transistion chevauchant les passages d'une tendance à l'autre, pendant lesquelles on reconnaît au travers des modifications et des changements apportés aux systèmes précédents la tendance et la structure des systèmes à venir. Euler, en particulier, a vécu dans cette période de transition où les musiciens préconisaient de plus en plus le tempérament égal. En effet, Euler bien conscient du problème écrit : "Plusieurs musiciens les [demi-tons] font égaux, quoique cela soit contraire aux principes de l'Harmonie : car de cette façon, aucune quinte ni aucune tierce n'est juste...Cependant, ils avouent eux-mêmes que la même pièce étant jouée du ton C ou d'un demi-ton plus haut Cs, change considérablement de nature, d'où il est clair, que tous les demi-tons ne sont effectivement pas égaux."

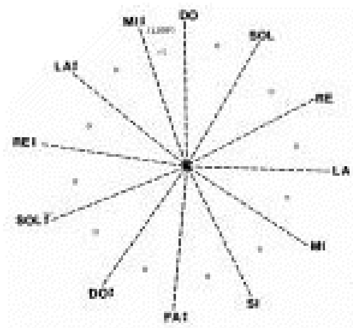

Fig. 2 – tempérament pythagoricien

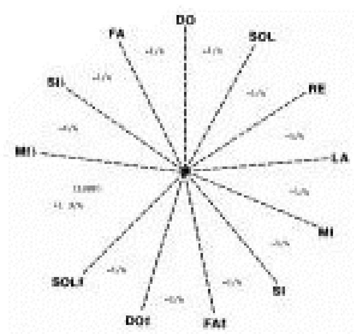

Fig. 3 – Tempérament mésotonique

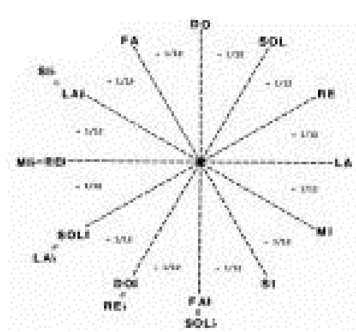

Fig. 4 – Tempérament égal

4. La musique moderne : ses caractéristiques, ses particularités

L'article "Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique" [2] vit le jour en 1764. Euler y expose de manière assez retenue voire imprécise une idée à propos de l'emploi des accords appelés aujourd'hui "septième de dominante". Ce type d'accords a vu le jour à la Renaissance, période charnière entre la musique modale et tonale. En réalité, ce type d'accords a simplement été établi par les musiciens de manière empirique ; seul le jugement de l'oreille a permis de le valider. Cependant, en 1764, Euler écrit un deuxième article intitulé "Du véritable caractère de la musique moderne" [3] où il expliquera réellement à l'aide de sa théorie de la musique pourquoi cet accord n'est absolument pas en contradiction avec les principes de l'Harmonie.

4.1. La sensibilité auditive

En réalité, l'oreille humaine est loin d'être parfaite : elle ne perçoit les proportions que renferment les sons que de manière approximative. Ainsi, sur un instrument accordé au tempérament égal, aucune quinte n'est pure mais l'oreille en est à peine affectée. En effet, la quinte y est exprimée par la proportion de 1 à $2^{\frac{7}{12}}$ et ceci est très proche de $\frac{2}{3}$.

Reprenons la Table 1 page 14. Le tempérament correspondant à ces proportions entre les tons est appelé *tempérament harmonique*. L'intervalle de B à f contient la proportion $\frac{675}{1024}$ et pourtant l'oreille la distingue à peine d'une véritable quinte. Ainsi, les proportions perçues par les sens sont souvent différentes des proportions réellement contenues dans les sons. Euler dit : "l'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour une proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi imperceptible'". Ceci est vrai sauf pour les octaves qui sont toujours pures.

En entendant l'accord de septième sur le ton G, une oreille traditionnelle essayera donc de substituer un rapport plus simple. Les nombres correspondant à G, H et d seront conservés car ils renferment un accord parfait. Cependant, Euler pense que les oreilles "substitueront à la place du dernier 64 celui de 63, afin que les rapports de nos quatre sons soient exprimés par les nombres 4, 5, 6, 7". De plus, à l'écoute, même une oreille très fine ne perçoit aucune différence entre ces deux accords. Ainsi, l'oreille substitue au son f un son un peu plus grave et la différence entre ces deux sons est un intervalle dont les proportions sont de 63 à 64. Pour résumer, Euler écrit : "l'oreille ne juge pas si sévèrement les sons qu'elle entend ; mais, pourvu qu'ils ne s'écartent point trop sensiblement des justes proportions, elle substitue quasi sans y penser les véritables proportions pour en retirer les sensations agréables".

Dans "Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique", Euler est très prudent et exprime seulement de manière retenue ses idées au sujet de l'emploi de l'accord de septième. Il fait brièvement référence aux travaux de d'Alembert.[3] Celui-ci pense que l'emploi de ces accords est bien fondé pour la raison suivante : l'accord de septième est uniquement utilisé lorsqu'il est sur le 5ème degré d'une tonalité majeure ou mineure et cette dissonance permet simplement de bien marquer la tonalité. Dans l'exemple précédent, l'accord de septième sur G est seulement employé dans une pièce dont la tonalité est C (majeur ou mineur) et ceci "fixe l'attention des auditeurs à ce ton, afin qu'ils ne s'imaginent pas que la composition ait passé au ton G". d'Alembert avait donc déjà compris que cet accord est simplement une signature tonale. Mais, Euler réfute cette explication, trop empirique à son gout : il souhaite découvrir la vraie raison du paradoxe énoncé précédemment.

Ce n'est qu'à la fin de son article, après avoir longuement argumenté à propos de la perception approximative des rapports pour une oreille humaine traditionnelle, qu'Euler suggère l'introduction du nombre 7. Il écrit alors "le grand Leibnitz a remarqué que dans la musique on n'a pas encore appris à compter au-delà de 5, mais si ma conjecture a lieu, on peut dire que dans la composition, on compte dejà jusqu'à 7...c'est un nouveau genre de musique ...c'est une perfection dans la

[3]D'ALEMBERT, *Eléments de musique théorique et pratique suivant les principes de M.Rameau*, Paris, 1752

composition”. Il développera réellement cette théorie dans l’article “Du véritable caractère de la musique moderne”.

4.2. Construction des 12 tons de la musique moderne

Etudions à présent les intervalles caractéristiques de la musique moderne. Nous avons vu que ceux-ci résultaient du nombre 7. L’intervalle qui servira de base à tous les autres est celui qui renferme un rapport de 4 à 7. Supposons que le ton C réponde au nombre 4 et on cherche alors le ton renfermant le nombre 7. On a :

$$\tfrac{3}{5} < \tfrac{4}{7} < \tfrac{9}{16}.$$

Le son cherché se trouve donc entre A et B : on le note B^* puisqu’il se rapproche plus de B que de A. Ainsi, c’est la simplicité des nombres 4, 5, 6, 7, 8 caractérisant l’accord C, E, G, B^*, c qui explique sa sonorité agréable. Euler écrit de plus : “Le nouveau son B^* qu’on ajoute à l’accord parfait lui procure une grâce toute particulière, à laquelle il faut attribuer les avantages de la musique moderne”. Bien entendu, en pratique, on peut employer cet accord dans sa position fondamentale ou considérer un des ses trois renversements.

renversements	suites de nombres
position fondamentale	4 : 5 : 6 : 7
1^{er} renversement	5 : 6 : 7 : 8
2^{eme} renversement	6 : 7 : 8 : 10
3^{eme} renversement	7 : 8 : 10 : 12

On reprend le tableau 1. On note y le nombre d’un ton principal. Par définition du ton marqué d’une étoile dont le nombre est noté x, on a la relation suivante :

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{7}.$$

Ainsi pour chaque ton principal, on peut donc construire le son marqué d’une étoile dont le rapport avec le ton principal est de 4 à 7. On obtient de cette manière douze autres tons, appelés *tons étrangers* qui sont employés dans la musique moderne. Le calcul est résumé dans le tableau suivant qui fournit tous les tons principaux et étrangers de la première octave, exprimés par des nombres entiers. (pour n’avoir que des nombres entiers, on a tout multiplié par 4) :

tons principaux		tons étrangers	
C	1536	B^*	2688
Cs	1600	H^*	2800
D	1728	C^*	3024
Ds	1800	Cs^*	3150
E	1920	D^*	3360
F	2048	Ds^*	3584
Fs	2160	E^*	3780
G	2304	F^*	4032
Gs	2400	Fs^*	4200
A	2560	G^*	4480
B	2700	Gs^*	4725
H	2880	A^*	5040

Ce sont réellement ces accords qui caractérisent la musique moderne. Euler écrit : “Il n’y a aucun doute que tous ces accords produiraient un meilleur effet, si l’on pouvait exprimer exactement sur les instruments les sons étrangers qui y entrent, la musique pourrait aussi de ce coté être portée à un plus haut degré de perfection, si l’on pouvait doubler le nombre des tons sur les clavecins.” Cependant, pour les instruments à sons fixes tels le clavecin ou l’orgue, le musicien est dans l’obligation d’employer le ton ordinaire qui se rapproche le plus du son marqué ici d’une étoile. De plus, cet accord sera encore d’une certaine beauté à cause de la perception approximative des rapports pour une oreille humaine traditionelle.

En ce qui concerne le ton à utiliser à la place du ton étoilé, Euler manque un peu de clarté. Dans la pratique, pour le son B^* par exemple, plus proche de B que de A, les musiciens emploient alors le ton B.

Conclusion

La musique se distingue du bruit par un certain ordre qui règne dans le phénomène sonore. Ceci résume à merveille toute la théorie musicale de Leonhard Euler. Malgré des propos parfois imprécis car novateurs pour l’époque, ce savant mathématicien a pu aider les artistes musiciens à comprendre ce qu’ils font. En réalité, depuis la Renaissance, on suit facilement des évolutions parallèles entre arts et sciences. Ceux-ci cheminent ainsi de concert, les uns devançant parfois les autres, certes, mais sur une voie commune.

Bibliographie

[1] Leonhard EULER (1761), Lettres à une princesse d’Allemagne sur divers sujets de la physique et de la philosophie,dans *Œuvres complètes*, Ser. Tertia, volumes XI et XII .

[2] Leonhard EULER (1764), Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique, dans *Œuvres complètes*, Ser. Tertia, volume I.

[3] Leonhard EULER (1764), Du véritable caractère de la musique moderne, dans *Œuvres complètes*, Ser. Tertia, volume I.

[4] Gustave DU PASQUIER (1927), Leonhard Euler et ses amis, Librairie scientifique HERMANN, Paris.

[5] (1988), Leonhard Euler Briefwechsel, volumes II et V, *Birkhaeuser.*

[6] Hugues GENEVOIS, Yann ORLAREY (1997), Musique et mathématiques, *Aléas, Lyon.*

[7] Pierre Yves ASSELIN (1985), Musique et Tempéraments, théorie et pratique de l’accord à l’ancienne, *Costallat, Paris.*

[8] Dominique DEVIE, Le Tempérament musical, Philosophie, histoire, théorie et pratique, *Société de musicologie du Languedoc, Béziers.*

Myriam Fischer
Professeur agrégée de mathématiques
fischer_myriam@yahoo.fr

Famille cordique, Relation de similarité, et Uniformité maximum

Xavier Hascher

Résumé : On définit, pour un accord générateur appartenant à la classe des accords parfaits majeurs ou mineurs, sa famille dans la classe inverse lorsqu'il existe une relation de proximité maximale entre les éléments des accords composant cette famille et ceux de l'accord générateur. On définit une famille restreinte de cet accord lorsque sa structure d'ordre est préservée dans les membres de sa famille. La définition de famille cordique pour les accords tonals est ensuite généralisée aux collections de classes de hauteurs de l'espace chromatique. Elle est comparée à la relation de similarité de la théorie musicale des ensembles d'Allen Forte, et à la définition d'uniformité maximum chez Lewin.

N.B. Le lecteur trouvera en fin d'article (p. 44–46) un lexique des termes musicaux employés.

Introduction

La théorie musicale et analytique contemporaine fait de plus en plus fréquemment appel à des formalisations mathématiques, à la suite des travaux pionniers de l'école américaine (Milton Babbitt, Allen Forte, David Lewin, Richard Morris, John Rahn) et ceux d'Anatol Vieru et Guerino Mazzola en Europe. Aujourd'hui, ces recherches sont devenues une ramification particulière au sein de la musicologie internationale, et des séances spécifiques leur sont consacrées lors des congrès d'analyse musicale, et même parfois dans des rencontres de mathématiques comme celles de l'American Mathematical Society (AMS).

Se développant à partir de la théorie de la musique sérielle, puis s'étendant à l'analyse de l'ensemble de la musique atonale pour fournir à celle-ci les outils qui lui faisaient défaut, les approches mathématiques se sont intéressées par la suite au répertoire modal et tonal. Elles ont permis d'établir des passerelles entre ces différents langages musicaux, alors que les cloisons qui séparaient certains d'entre eux semblaient hermétiques aux musiciens eux-mêmes.

Dans l'étude qui va suivre, on aborde la notion de famille d'un accord, puis d'une collection de classes de hauteurs, dans une classe cordique donnée. Rappelons qu'une classe de hauteurs (en abrégé c.h.) est l'ensemble de toutes les notes en équivalence d'octave, soit toutes les notes de même nom, mais pouvant appartenir à des registres différents. La notation numérique associe à chacune des douze c.h. dans le tempérament égal, rangées dans l'ordre chromatique, une valeur de 0 à 11 :

$$\begin{array}{cccccccccccc} \textit{do} & \textit{do}\sharp & \textit{ré} & \textit{mi}\flat & \textit{mi} & \textit{fa} & \textit{fa}\sharp & \textit{sol} & \textit{la}\flat & \textit{la} & \textit{si}\flat & \textit{si} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}$$

Une classe cordique est une classe d'équivalence pour la transposition, ou pour la transposition et l'inversion, considérées comme des lois de composition internes sur l'ensemble des c.h. On réserve le nom d' « accord » aux seules collections de classes de hauteurs particulières au système tonal. Au sein de ce dernier, tous les accords majeurs, par exemple, sont bien équivalents par transposition et appartiennent à une même classe, que l'on désigne par $[K^+]$. L'intérêt d'une telle notion de famille cordique est d'ordre à la fois théorique, analytique, et pratique (c.-à-d. compositionnel).

Les mathématiques auxquelles il est fait appel ici relèvent essentiellement de la théorie des ensembles et de la théorie des groupes. Dans la mesure du possible, on a rappelé brièvement les définitions des éléments de théorie musicale employés lorsqu'ils ne sont pas d'usage courant.

1. La transformation de mode dans le système tonal

1.1. Soit T une tonalité quelconque, majeure ou mineure, et T-PAR sa tonalité parallèle (c.-à-d. la tonalité ayant la même tonique, mais de mode opposé). Ces deux tonalités sont parallèles l'une de l'autre, de sorte que la tonalité parallèle de T-PAR n'est autre que T. Pour chacune de ces tonalités, on considère l'ensemble des accords parfaits majeurs et mineurs diatoniques lui appartenant, en négligeant par conséquent l'altération de sensible pour la tonalité mineure. On exclut, de même, l'accord diminué (du degré VII en majeur et II en mineur).

Si l'on compare l'accord occupant un degré harmonique donné dans une de ces tonalités avec celui occupant le même degré dans la tonalité parallèle, on constate que ces deux accords sont de mode opposé (à l'exception de II en majeur et de VII en mineur qui n'ont pas de pendant puisqu'il s'agit de l'accord diminué). Néanmoins, la transformation à effectuer sur chaque accord de T pour obtenir l'accord du degré correspondant dans T-PAR est différente selon les cas. Elle dépend du degré harmonique auquel appartient cet accord. Il s'agit :

Pour les accords des degrés I, IV et V, de la transformation PAR, qui affecte la tierce de l'accord en modifiant le signe de celui-ci, laissant la fondamentale et la quinte intactes ;

Pour les accords des degrés III et VI, de la transformation DOPPL, qui affecte la fondamentale et la quinte de l'accord et laisse la tierce intacte ; l'accord est transformé en l'accord de signe opposé placé au demi-ton inférieur ou supérieur, et ayant la tierce pour note commune.

Ainsi, le premier degré de *do* majeur C^+ se transforme-t-il en premier degré de *do* mineur C^- par PAR. Mais le sixième degré de *do* majeur, A, se transforme par DOPPL en sixième degré de *do* mineur, à savoir $A\flat^+$. Dans un cas c'est bien la tierce qui glisse d'un demi-ton en descendant, dans l'autre ce sont la quinte et la fondamentale qui glissent parallèlement alors que la tierce de l'accord, la note *do*, reste immobile. Inversement, l'application de PAR à C^- et de DOPPL à $A\flat^+$ restitue C^+ et A^- respectivement. Les mêmes transformations s'appliquent aux accords des autres degrés (fig. 1.1).

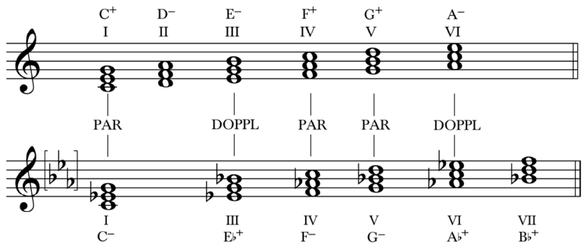

FIG. 1.1

1.2. Dans l'espace de la tonalité élargie, chromatique, il est possible d'appliquer PAR aux accords des degrés III et VI, aussi bien à partir du majeur que du mineur. Il devient également possible d'appliquer DOPPL aux degrés I, IV et V. Si bien que quelque soit le degré d'un accord, il est également susceptible d'être transformé par PAR ou DOPPL. On peut donc abandonner la référence au degré d'appartenance, et énoncer que chaque accord parfait K de cet espace, y compris le degré II en majeur et VII en mineur, est relié par glissement chromatique, soit de la tierce (gardant la quinte et la fondamentale inchangées), soit parallèlement de la quinte et de la fondamentale (gardant la tierce inchangée), avec deux accords parfaits de signe opposé. Ces deux accords réalisent une transformation de mode de K, tout en conservant leur fondamentale à proximité maximum de la fondamentale de celui-ci (c.-à-d. à une distance inférieure ou égale à un demi-ton). Ainsi, à partir de C^+, on obtient les accords C^- et $C\sharp^-$ (fig. 1.2.1) ; à partir de C^-, les accords C^+ et B^+ ($C\flat^+$) (fig. 1.2.2). Toutes les transpositions de ces figures donneront naturellement des résultats équivalents.

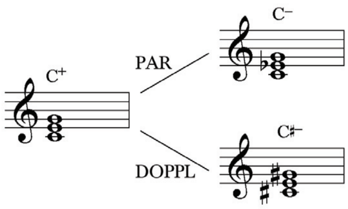

FIG. 1.2.1

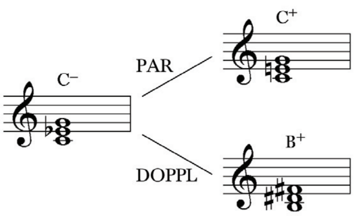

FIG. 1.2.2

2. Famille cordique et famille cordique restreinte d'un accord parfait (majeur ou mineur)

2.1. Cherchons à présent, pour tout accord parfait K majeur ou mineur, à établir quel est l'ensemble des accords reliés à lui par déplacement semitonal de une, deux, ou trois notes. Pour éliminer le cas trivial de la simple transposition, on pose la condition que l'accord résultant de la transformation doit être de signe opposé à K. À partir de l'accord majeur, les transformations qui permettront d'obtenir un accord appartenant à cet ensemble sont : PAR, DOPPL, PAR∘D, LT et POL. À partir de l'accord mineur, il s'agit de : PAR, DOPPL, PAR∘S, LT et POL.

Remarque. — D transforme un accord parfait K majeur ou mineur en dominante de l'accord résultant. S transforme K en sous-dominante de l'accord résultant. Comme D et S conservent le signe de K, elles doivent être composées avec PAR pour obtenir le changement de mode. LT (*Leittonwechsel*) échange la fondamentale d'un accord majeur contre la note située à son demi-ton inférieur, et la quinte d'un accord mineur contre la note placée à son demi-ton supérieur. POL transforme K en accord « polaire » de l'accord résultant, c'est-à-dire l'accord de signe opposé, sans note commune, dont chaque note est située à un demi-ton d'une note de l'autre accord. Nous ne revenons pas sur PAR (parallèle) et DOPPL (*Doppelterzwechsel*) qui ont été vues ci-dessus.

Comme précédemment, on recherche une modification minime, où l'accord résultant constitue une approximation aussi étroite que possible de K, au changement de sonorité près entraîné par l'échange de mode. Étant donné une conduite des voix où chaque note de l'accord résultant est relié à une note de K par l'intervalle le plus petit possible, ces deux notes sont à proximité maximum l'une de l'autre (leur distance est inférieure ou égale à un demi-ton). On verra plus loin que les accords résultants peuvent être classés en fonction du nombre de déplacements semitonals qu'ils impliquent, et donc de leur degré de différence avec K (« valeur d'écart », section 6.2).

À partir de C^+, on obtient l'ensemble des accords suivants : $\{C^-, E^-, F^-, A\flat^-, C\sharp^-\}$ (fig. 2.1.1). À partir de C^-, l'ensemble des accords suivants : $\{C^+, A\flat^+, G^+, E^+, B^+\}$ (fig. 2.1.2). Ici encore, toute transposition de chaque figure sera équivalente à celle-ci.

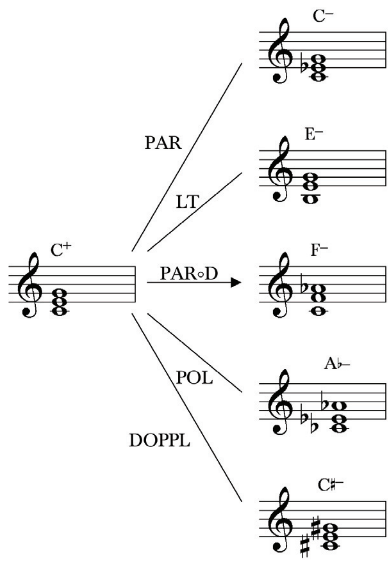

FIG. 2.1.1

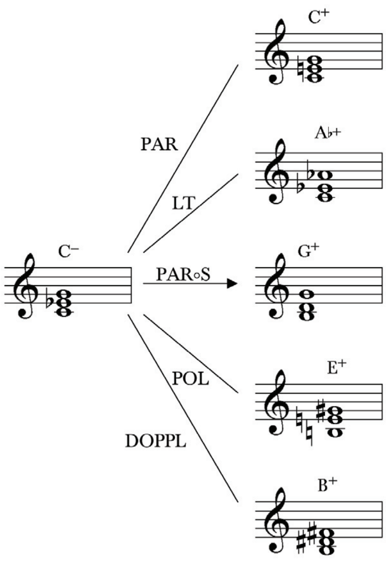

Fig. 2.1.2

2.2. Soit **K** l'ensemble des accords parfaits majeurs et mineurs. Soient I et $J \in$ **K**. Une famille cordique d'un accord générateur I est l'ensemble des J vérifiant la relation binaire $\mathcal{F}$ sur **K** définie par :

$I\mathcal{F}J \Leftrightarrow J$ est de signe opposé à I et chaque élément de J peut être ramené à une distance d'un demi-ton au maximum d'un élément de I. L'intervalle entre les éléments de I et de J appartient donc à la classe 0 ou 1.

On définit $\mathcal{F}(I)$:

$$\mathcal{F}(I) = \{J \in \mathbf{K} \mid I\mathcal{F}J\}. \qquad 2.2.1$$

Remarque. — Le codomaine de $\mathcal{F}$ est $\mathbf{K}^-$ lorsque I est majeur ; il est $\mathbf{K}^+$ lorsque I est mineur. En conséquence, la famille de I appartient à $\mathbf{K}^-$ lorsque I est majeur, à $\mathbf{K}^+$ lorsque I est mineur. $\mathcal{F}$ est symétrique ($J \in \mathcal{F}(I) \Leftrightarrow I \in \mathcal{F}(J)$), non réflexive ($I \notin \mathcal{F}(I)$), et non transitive.

2.3. Si l'on récrit numériquement les accords obtenus à partir des transformations semitonales définies ci-dessus (section 2.1), on obtient les résultats suivants, composant les familles cordiques respectives des accords générateurs :

- à partir de $\mathrm{C}^+ = (0, 4, 7)$,

$$(0,3,7), (11,4,7), (0,5,8), (11,3,8), (1,4,8)$$

dont l'ensemble forme $\mathcal{F}(\mathrm{C}^+)$;

- à partir de $\mathrm{C}^- = (0, 3, 7)$,

$$(0,4,7), (0,3,8), (11,2,7), (11,4,8), (11,3,7)$$

dont l'ensemble forme $\mathcal{F}(\mathrm{C}^-)$.

Les seuls accords de ces familles à respecter la structure d'ordre des accords parfaits, c'est-à-dire isomorphes à $(0,3,7)$ ou $(0,4,7)$, sont ici le premier et le dernier de chaque liste. Les autres accords sont permutés (ils ne sont pas musicalement en « position fondamentale ») et présentent par conséquent des types d'ordres différents. Comme l'ordre de l'accord mineur est inverse de l'accord majeur, et que les accords constituant la famille cordique d'un accord donné sont de signe opposé à celui-ci, on dit que parmi ces accords ceux dont l'ordre est anti-isomorphe à celui de l'accord générateur appartiennent à la *famille restreinte* de ce dernier. On définit la famille restreinte de $I \in \mathbf{K}$:

$$\hat{\mathcal{F}}(I) = \{J \in \mathbf{K} \mid I\mathcal{F}J \wedge (I;\preccurlyeq) \cong (J;\succcurlyeq)\}. \qquad 2.3.1$$

On limite ainsi la famille cordique d'un accord aux seuls accords dont la fondamentale est distante d'un demi-ton au maximum de celle de l'accord générateur, soit les accords définis en 1.2.

Si l'on suppose une conduite des voix par proximité maximum V_{pmax} entre I et J de signe opposé tels que $J \in \hat{\mathcal{F}}(I)$, alors il ne peut y avoir plus d'un demi-ton de distance entre la fondamentale, la tierce et la quinte de I et la fondamentale, la tierce et la quinte de J respectivement. En effet, si l'on considère V_{pmax}, on a soit

$$(p_J, t_J, q_J) = (p_I + 1, t_I, q_I + 1) \;\vee\; (p_J, t_J, q_J) = (p_I, t_I - 1, q_I),\; I \in \mathbf{K}^+,$$

soit

$$(p_J, t_J, q_J) = (p_I - 1, t_I, q_I - 1) \;\vee\; (p_J, t_J, q_J) = (p_I, t_I + 1, q_I),\; I \in \mathbf{K}^-$$

(voir fig. 2.3).

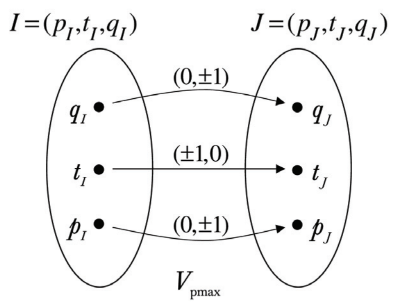

FIG. 2.3

3. Famille cordique d'un accord de cardinal > 3

3.1. On se propose d'étendre la notion de famille cordique à des accords de cardinal supérieur à 3, en restant comme précédemment dans l'espace de la tonalité élargie. Tout comme ci-dessus pour les accords majeurs et mineurs, inverses l'un de l'autre, on choisit de définir cette famille dans la classe des inverses de l'accord générateur.

Ainsi, si l'on prend pour accord générateur un accord de la classe $[K^{+}_{\flat 7}]$ (accord de septième « de dominante »), les accords de la famille cordique correspondante appartiendront normalement à la classe $[K^{0}_{\flat 7}]$ (accord de septième mineure et quinte diminuée). À partir de $\mathrm{C}^{+}_{\flat 7}$, on obtient donc la famille suivante :

$$\mathcal{F}(\mathrm{C}^{+}_{\flat 7}) = \left\{\mathrm{C}^{0}_{\flat 7}, \mathrm{C}\sharp^{0}_{\flat 7}, \mathrm{A}^{0}_{\flat 7}, \mathrm{A}\sharp^{0}_{\flat 7}, \mathrm{F}\sharp^{0}_{\flat 7}, \mathrm{G}^{0}_{\flat 7}, \mathrm{D}\sharp^{0}_{\flat 7}\right\}$$

(voir fig. 3.1).

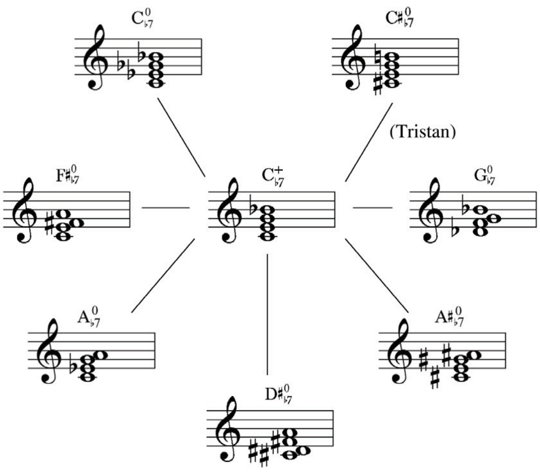

FIG. 3.1

Remarque. — La transformation $\mathrm{C}^{+}_{\flat 7} \mapsto \mathrm{C}\sharp^{0}_{\flat 7}$ constitue la récurrence, à la transposition près, de la succession de l' « accord de Tristan » (« motif du Désir »).

3.2. Afin de déterminer une famille restreinte, on a intérêt dans l'exemple précédent à renommer les accords $(0,3,7,9)$ et $(1,4,8,10)$ $\mathrm{C}^{-}_{(6)}$ et $\mathrm{C}\sharp^{-}_{(6)}$ respectivement, au lieu de $\mathrm{A}^{0}_{\flat 7}$ et $\mathrm{A}\sharp^{-}_{\flat 7}$. Ce faisant, on passe de la classe $[K^{0}_{\flat 7}]$ à la classe $[K^{-}_{(6)}]$ (accord parfait mineur et sixte ajoutée majeure). Or, les membres de ces deux classes sont identiques du point de vue de leurs éléments, mais diffèrent par leur structure d'ordre, qui est dépendante de celle de l'accord initial. En effet, soit l'on considère les accords de septième comme totalement (ou linéairement) ordonnés avec p (prime) plus petit élément et s (septième) plus grand élément, soit l'on considère un ordre partiel où q (quinte) et s sont tous deux éléments maximaux. Cette distinction n'a pas d'importance dans le cas général, où l'on peut considérer indifféremment l'une ou l'autre classe comme inverse de $[K^{+}_{\flat 7}]$.

L'inversion de l'ordre linéaire conduit, pour un accord appartenant à la classe $[K^{0}_{\flat 7}]$, à considérer s comme plus petit élément et p comme plus grand élément ; en revanche, l'inversion de l'ordre riemannien donne q comme plus petit élément, et p et s comme éléments maximaux. Conformément à la notation originelle de Riemann, où l'on écrit g^{VII} et gis^{VII} respectivement pour $\mathrm{C}^{-}_{(6)}$ et $\mathrm{C}\sharp^{-}_{(6)}$, la septième inférieure est ici calculée à partir de q, représentée, dans cet exemple, par la classe de hauteurs 7 (*sol*) dans l'accord générateur $\mathrm{C}^{+}_{\flat 7}$.

Cette distinction vaut pour l'ensemble des accords de septième lorsque l'on étend à ceux-ci la définition de la famille restreinte donnée en 2.3.1. On doit donc définir à quel type d'ordre (linéaire ou riemannien) on se réfère pour établir un anti-isomorphisme d'accords.

Pour $C^{+}_{\flat 7}$, sa famille restreinte comprend dès lors $C^{0}_{\flat 7}$ et $C\sharp^{0}_{\flat 7}$ si l'on se réfère à l'ordre linéaire, $C^{-}_{(6)}$ et $C\sharp^{-}_{(6)}$ si l'on se réfère à l'ordre riemannien. Cette dernière définition présente l'avantage d'être conséquente avec celle de la famille cordique restreinte de C^{+}, composée de C^{-} et de $C\sharp^{-}$. Là où $C^{+}_{\flat 7}$ constitue une extension de C^{+}, qui inclut ce dernier, les membres de la famille restreinte riemannienne incluent les membres de la famille restreinte de C^{+}, dont ils constituent des extensions. On a bien, en effet, $C^{-} \subset C^{-}_{(6)}$ et $C\sharp^{-} \subset C\sharp^{-}_{(6)}$. Cette continuité disparaît lorsqu'on considère la famille restreinte linéaire.

4. Famille cordique d'une c.c.h. chromatique

4.1. On tente à présent de généraliser la définition de famille cordique à l'ensemble des collections de classes de hauteurs (c.c.h.) chromatiques équivalentes par transposition (mais non par inversion), et non plus seulement à l'ensemble des accords classés tonals de trois ou quatre sons.

Remarque. — Une classification communément utilisée telle que la table de Forte [1] doit donc être modifiée afin de distinguer les c.c.h. de leurs inverses.

On a jusqu'ici défini la famille cordique dans la classe inverse de l'accord générateur. Ce choix se justifie pour des raisons de pertinence analytique dans le contexte tonal. Il est néanmoins possible d'étendre la définition de famille cordique à n'importe quelle classe d'accord équipotente à la classe de l'accord générateur. Pour éviter le cas trivial de la transposition, on maintient néanmoins la condition que la classe source soit différente de la classe but (pour la transposition).

Définition 4.1.1. Une famille cordique généralisée d'une collection de classes de hauteurs I donnée se définira donc comme l'ensemble des c.c.h. J vérifiant les propriétés suivantes :

- I et J ne sont pas équivalents par transposition ;
- $\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(J)$;
- $\forall\, j \in J, \exists\, i \in I$ tel que $d(i,j) \leq 1$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dira que $J \in \mathcal{F}(I)$, ou que $I \mathcal{F} J$. Comme il peut y avoir plusieurs familles pour une même c.c.h. génératrice, on doit donc préciser la classe dans laquelle on définit la famille.

Dans le cas où $[J] = \mathrm{inv}([I]) = [I]$, on ne peut définir de famille cordique dans cette classe.

Remarque. — Étant donné la difficulté d'établir des relations d'ordre sur les c.c.h. dans le contexte atonal, on réserve la possibilité de définir une famille restreinte.

4.2. L'appartenance à une famille cordique constitue une particularité analytiquement intéressante dans le contexte atonal puisqu'elle limite le nombre de c.c.h. en relation en sélectionnant leurs niveaux de transposition. Une famille cordique constitue un sous-ensemble de la classe d'équivalence dans laquelle elle est définie.

Exemple 4.2.1. On cherche à déterminer la famille cordique de la collection $I = \{0,6,11\}$ d'une part dans sa classe inverse $[0,1,6]$, d'autre part dans la classe $[0,10,5]$. Les intervalles de transposition concernés sont dans le premier cas t_0 et t_{11} (fig. 4.2.1.1) ; dans le deuxième cas, t_0 et t_1 (fig. 4.2.1.2).

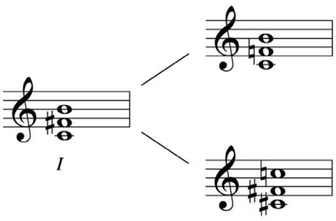

FIG. 4.2.1.1

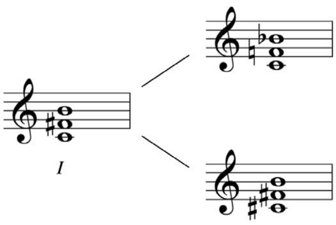

FIG. 4.2.1.2

Exemple 4.2.2. La *Pièce pour piano* op. 19/1 de Schœnberg se termine par une succession de trois c.c.h. I, J, et K (mes. 17). La collection I appartient à la classe $[0,1,3,5,7]$, la collection J à la classe $[0,1,2,5,7]$, et la collection K à la classe $[0,1,2,4,8]$. Il suffit d'appliquer t_3 à chacune de leurs formes normales pour retrouver le contenu des collections I, J, K. On voit donc directement que chaque c.c.h. est reliée par $\mathcal{F}$ à chacune des deux autres, lesquelles appartiennent à la famille cordique de cette c.c.h. dans la classe concernée (fig. 4.2.2).

FIG. 4.2.2

Remarque. — Lorsque l'on passe de I à J dans l'exemple 4.2.2, on ne déplace qu'une seule note par mouvement chromatique, les autres notes étant communes aux deux collections et formant une sous-collection $S = I \cap J$. Non seulement les collections I et J vérifient la relation $\mathcal{F}$, mais elles vérifient également la relation R_h.

5. La relation de similarité R_h Famille de classe

5.1. On définit, d'après Allen Forte [1], une relation de similarité R_h entre deux c.c.h. E_1 et E_2 de même cardinal n :

$$R_h(E_1, E_2) \Leftrightarrow \exists\, E_3 \text{ de cardinal } n-1, \text{ tel que } E_3 \subset E_1 \wedge E_3 \subset E_2.$$

Cette relation est donc différente de celle d'appartenance à une famille cordique, mais vient à coïncider avec elle lorsque la distance entre $a \in E_1 \backslash E_2$ et $b \in E_2 \backslash E_1$ est égale à 1. Dans ce cas, R_h et $\mathcal{F}$ sont toutes deux vérifiées, et le couple $(E_1, E_2) \in R_h \cap \mathcal{F}$. Cette propriété est intéressante du point de vue musical.

En effet, alors que pour une c.c.h. donnée il existe fréquemment un nombre important de collections vérifiant R_h, le nombre de collections vérifiant à la fois R_h et $\mathcal{F}$ est plus réduit. Ceci est d'autant plus significatif que, pour R_h, les niveaux de transposition respectifs de E_1 et E_2 maintiennent le nombre maximum de classes de hauteurs communes entre les deux collections.

Lorsque, au contraire, en fonction des niveaux de transposition choisis pour E_1 et E_2 on a $\operatorname{card}(E_3) < n-1$, alors la relation R_h est faible.

5.2. On peut également affaiblir la définition de $\mathcal{F}$ en l'étendant à tous les représentants des classes canoniques d'équivalence pour la transposition de deux collections I et J, lorsque ces collections elles-mêmes vérifient $\mathcal{F}$:

$$I\,\mathcal{F}J \Rightarrow \forall I' \in [I], \forall J' \in [J]\; (I'\,\mathcal{F}J'). \qquad 5.2.1$$

On a alors intérêt à parler de famille de classe, dont l'appartenance est définie par

$$[J] \in \mathcal{F}([I]) \Leftrightarrow \forall I \in [I], \forall J \in [J]\; (I\,\mathcal{F}J). \qquad 5.2.2$$

6. Famille cordique et relation d'uniformité maximum

6.1. Dans sa forme faible aussi bien que dans sa forme stricte, la relation d'appartenance à une famille cordique implique l'existence d'une conduite des voix bijective maximalement uniforme au sens de Lewin [2]. On rappelle les définitions d'une telle conduite des voix :

Définition 6.1.1. Étant donné deux collections de classes de hauteurs A et B, de cardinal égal ou différent, une conduite des voix V de A vers B sera dite maximalement uniforme si elle diffère aussi peu que possible d'une transposition littérale ;

Définition 6.1.2. Soit une conduite des voix maximalement uniforme d'une c.c.h. A vers une c.c.h. B. L'indice de pseudo-transposition n de V est le nombre (positif ou négatif) de demi-tons par lequel B peut être considéré comme « presque une transposition » de A ;

Définition 6.1.3. La valeur de déport de V est le nombre absolu de demi-tons (ascendants ou descendants) par lesquels V diffère d'une transposition littérale $t_n(A)$. Si cette valeur est nulle, on a $B = t_n(A)$.

Définition 6.1.4. Étant donné deux collections équipotentes de classes de hauteurs A et B, une conduite des voix bijective V de A vers B sera dite maximalement uniforme si elle diffère d'une transposition littérale de A vers $t_n(A)$ par la plus petite valeur de déport possible parmi toutes les conduites des voix bijectives de A vers B.

S'il existe une conduite des voix bijective maximalement uniforme d'une c.c.h. A vers une c.c.h. B, on dit que B est en relation d'uniformité maximum avec A, ou que B est maximalement uniforme à A.

Remarque. — Une conduite des voix est surjective quand chaque classe de hauteurs de B est l'image d'une classe de hauteurs de A ; lorsque A et B sont de même cardinal, une conduite des voix est bijective si et seulement si elle est surjective.

6.2. Si $B \in \mathcal{F}(A)$ dans $[B]$, alors il existe une conduite des voix bijective maximalement uniforme de A vers B. Mais l'inverse n'est pas toujours vérifié : $B = V_n(A)$ n'implique pas que $B \in \mathcal{F}(A)$. Néanmoins, il existe toujours au moins un indice de pseudo-transposition tel que $V_n(A) \in \mathcal{F}(A)$. En effet, on a $V_0(A) \in \mathcal{F}(A)$.

Pour la définition faible et la définition de famille de classe, on vérifie simplement que pour tout $A \in [A]$ et pour tout $B \in [B]$ entre lesquels existe une conduite des voix bijective maximalement uniforme, $A \mathcal{F} B$.

6.3. À chaque membre de $\mathcal{F}(A)$ strictement définie peut être attribuée une valeur d'écart, correspondant à la somme des valeurs absolues des déplacements de demi-tons de A vers B. Contrairement à la valeur de déport pour la relation d'uniformité maximum, la valeur d'écart ne peut jamais être nulle.

Exemple 6.3.1. On considère à nouveau les collections de l'exemple 4.2.1.1 avec $I = \{0,6,11\}$, et les deux membres de $\mathcal{F}(I)$ dans la classe [0,1,6], $J = \{0,5,11\}$ et $J' = \{0,1,6\}$. Ces deux c.c.h. sont maximalement uniformes à A avec $J = V_0(I)$ et $J' = V_1(I)$, et un déport invariant de 1 demi-ton. En revanche, la valeur d'écart, qui est égale à 1 pour J, est de 2 pour J'.

7. Famille cordique diatonique Élargissement de la définition de famille cordique

7.1. Dans le contexte de la tonalité diatonique, il peut être intéressant de définir des familles cordiques d'accords générateurs correspondant aux fonctions harmoniques principales. On définit ainsi, en maintenant une valeur d'écart de 1 (ton ou demi-ton diatonique), la famille cordique des accords des degrés I, IV et V dans la classe des accords de signe opposé réunie à la classe des accords diminués (c'est-à-dire dans l'ensemble complémentaire, dans la tonalité, de l'ensemble formé par les accords des degrés I, IV, V).

Une telle famille comprend :

- pour I, les accords des degrés VI et III, soit

$$\mathcal{F}(\mathrm{I}^+) = \{\mathrm{III}^-, \mathrm{VI}^-\} \; ; \mathcal{F}(\mathrm{I}^-) = \{\mathrm{III}^+, \mathrm{VI}^+\} \; ;$$

• pour IV, les accords des degrés II et VI, soit

$$\mathcal{F}(\mathrm{IV}^+) = \{\mathrm{II}^-, \mathrm{VI}^-\}\ ;\ \mathcal{F}(\mathrm{IV}^-) = \{\mathrm{II}^0, \mathrm{VI}^+\}\ ;$$

• pour V, les accords des degrés III et VII, soit

$$\mathcal{F}(\mathrm{V}^+) = \{\mathrm{III}^-, \mathrm{VII}^0\}\ ;\ \mathcal{F}(\mathrm{V}^-) = \{\mathrm{III}^+, \mathrm{VII}^+\}.$$

On relie ainsi chaque accord d'un degré principal, soit à ses deux accords relatifs (relatif et contre-relatif), soit, pour V en majeur et IV en mineur, à son relatif et les accords diminués sur VII et II respectivement (soit les accords correspondants de septième et septième duale sans fondamentale). On crée de ce fait, pour chaque accord générateur, un groupe cordique mono-fonctionnel réunissant cet accord aux membres de sa famille.

7.2. On peut modifier la définition de $\mathcal{F}$ telle qu'elle est donnée en 4.1.1 de façon à composer une famille dans une classe de cardinal différent de la collection génératrice. De telles familles ne sont pas examinées ici.

Bibliographie

[1] Allen FORTE (1973), The Structure of Atonal Music, *Yale University Press*.

[2] David LEWIN (1998), *Some Ideas About Voice-Leading between Pcsets*, Journal of Music Theory 42.1, 15–72.

Xavier HASCHER
Université Marc-Bloch (Strasbourg-II)
xavier.hascher@umb.u-strasbg.fr

LEXIQUE DES TERMES MUSICAUX

Accord : collection ordonnée de classes de hauteurs possédant certaines propriétés intervallaires. Les accords classés appartiennent au vocabulaire spécifique de la musique tonale. Ils sont nommés d'après les intervalles diatoniques entre la fondamentale (ou prime, plus petit élément dans les accords parfaits majeurs, plus grand élément dans les accords parfaits mineurs) et les autres éléments de l'accord, les intervalles de tierce et de quinte étant le plus souvent sous-entendus par commodité. L'accord est nommé d'après sa fondamentale.

Altération : déplacement d'un demi-ton, ascendant ou descendant selon la pente de l'altération, d'une note diatonique.

Atonal : système musical chromatique, sans référence à une tonique, et utilisant un matériau excluant a priori les accords du système tonal, mis en œuvre dans la première moitié du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle, notamment par les compositeurs de la Seconde École de Vienne.

Chromatique : 1. **Espace chromatique :** espace musical pouvant être représenté sur une horloge arithmétique à douze chiffres. 2. **Tonalité chromatique** (ou **tonalité élargie**) : système tonal dont le matériau est l'union des matériaux diatoniques d'une tonalité majeure et de la tonalité mineure parallèle (c.-à-d. la tonalité de même nom, mais de signe opposé).

Collection de classes de hauteurs (c.c.h.) : ensemble non-ordonné de classes de hauteurs ; les c.c.h. ayant la même forme normale appartiennent à une même classe d'équivalence pour la transposition et l'inversion (classe canonique).

Cordique : relatif aux accords ou, au sens large, aux c.c.h.

Degré : ordinal, exprimé en chiffres romains de I à VII, associé à chaque note de la gamme diatonique, servant à désigner la fondamentale des accords, et, par simplification, ces accords eux-mêmes.

Diatonique : espace musical dont les éléments sont ceux de la gamme majeure (*do*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*) ou de la gamme mineure (*la*, *sol*, *fa*, *mi*, *ré*, *do*, *si*) sans altération, et les gammes équivalentes pour la transposition.

Diminué (*accord*) : accord obtenu par altération descendante de la quinte d'un accord parfait mineur, ou par altération ascendante de la fondamentale d'un accord parfait majeur. On associe à l'accord diminué le signe 0.

Fondamentale (*position*) : disposition musicale d'un accord où la fondamentale se trouve à la basse.

Hauteur : autre désignation pour *note.*

Hauteurs (*classe de*) : ensemble des notes en relation d'octave (c.-à-d. dont le rapport des fréquences fondamentales est une puissance entière de 2) ; on associe à chacune des douze classes de hauteurs une valeur modulo 12 correspondant à l'intervalle entre ces classes et une classe de référence, par convention la classe *do.*

Intervalle : distance entre deux notes, mesurée soit en nombre de degrés diatoniques ou d'heures sur une horloge arithmétique à sept chiffres (en comptabilisant la note de départ), soit en nombre de demi-tons.

Inversion : opération qui a une classe de hauteurs h et pour une valeur fixe m (l'indice de l'inversion), associe la classe de hauteurs dont l'intervalle avec la classe de référence est $i_m(h) = m - h$ modulo 12. L'inversion est une réflexion dans l'espace musical.

Majeur : 1. **Accord parfait majeur**, composé d'une tierce majeure et d'une quinte juste au dessus de la fondamentale (on associe à l'accord parfait majeur le signe +) ; c.c.h appartenant à la classe [0,4,7] et munie d'une relation d'ordre. 2. **Tonalité majeure***,* système tonal où les accords parfaits de tonique, dominante et sous-dominante sont majeurs.

Mineur : 1. **Accord parfait mineur**, composé d'une tierce mineure et d'une quinte juste au-dessus de la fondamentale (on associe à l'accord parfait mineur le signe −) ; c.c.h appartenant à la classe [0,3,7] dont l'ordre est anti-isomorphique à celui de l'accord majeur. 2. **Tonalité mineure***,* système tonal où les accords parfaits de tonique, dominante et sous-dominante sont mineurs.

Normale (*forme*) : la forme normale d'une c.c.h. correspond à la permutation, éventuellement combinée à une inversion, permettant de présenter cette c.c.h. sous sa forme la plus compacte possible (intervalle minimum entre les notes extrêmes, plus petit intervalle de la première à la deuxième note, de la première à la troisième note, etc.), puis transposée pour commencer sur la classe de hauteurs 0.

Parfait (accord) : accord dérivé de la tranche harmonique basse (harmoniques 1, 3, 5) de la résonance naturelle, obéissant au principe de consonance. Les accords parfaits peuvent être majeurs ou mineurs.

Mode : dans le contexte de la tonalité, qualité majeure ou mineure d'un accord ou d'un système tonal ; pour éviter toute ambiguïté avec les systèmes modaux, il est préférable de parler de signe (+ ou −).

Note : son de hauteur mesurable (en hertz), désigné par une syllabe (*do*, *ré*, etc.) ou une lettre (C, D, etc.) éventuellement suivie d'une altération, et d'un indice précisant l'octave à laquelle ce son appartient. Lorsqu'on assimile toutes les notes de même nom sans référence à leur octave, on parle de *classe de hauteurs*.

Sensible : tierce majeure de l'accord placé à la quinte supérieure de la tonique ; dans une tonalité mineure, cette tierce doit être altérée pour devenir majeure, et prendre le nom de sensible.

Septième (*accord de*) : accord de cardinal 4 (fondamentale, tierce, quinte, septième) obtenu par extension d'un accord parfait ou diminué. Dans la notation des accords de septième, on désigne la septième mineure par $\flat 7$ et la septième majeure par $\sharp 7$.

Sixte ajoutée (*accord de*) : accord de cardinal 4 (fondamentale, tierce, quinte, sixte) obtenu par extension de l'accord parfait majeur ou mineur.

Système tonal : voir *tonalité*.

Tonalité : Système musical complexe, à plusieurs niveaux hiérarchiques, défini en référence à une classe de hauteurs et à un accord parfait majeur ou mineur dont la fondamentale (la tonique) appartient à cette classe, et constituant un langage muni de règles et de contraintes variables historiquement, applicables à :

a) un vocabulaire harmonique constitué d'accords « classés » et de syntagmes fonctionnels, eux-mêmes définis en référence à l'accord parfait de tonique et aux accords parfaits ayant pour fondamentale la quinte supérieure et la quinte inférieure de la tonique respectivement ;
b) la relation entre la partie supérieure (ou principale) et la basse ;
c) la répartition des accents et l'ordre de succession des événements musicaux (dont les modulations).

Sans qu'ils participent strictement à sa définition, la tonalité est également associée à :

a) des principes de conduite des voix d'un accord vers son successeur (contrepoint) ;
b) un langage rythmique, dont les règles sont également variables historiquement.

Le matériau diatonique de la tonalité est l'ensemble des notes contenues dans les accords de tonique, dominante et sous-dominante, et des accords pouvant être formés à partir de ces notes. Du point de vue historique, la tonalité (dans la musique occidentale savante) correspond par simplification à une plage allant du XVIIe siècle à la fin du XIXe siècle.

Tonalité de (*nom de note, signe*) : système tonal ayant pour tonique la classe de hauteurs désignée par cette note. Toutes les tonalités d'un même signe étant équivalentes à une transposition près, il n'existe que deux types historiques de systèmes tonals, le majeur et le mineur. On peut en imaginer d'autres (systèmes duals).

Tonalité élargie : voir *chromatique* (*tonalité*).

Transposition : opération qui à une classe de hauteurs h et un intervalle n associe la classe de hauteurs dont l'intervalle avec la classe de référence est $t_n(h) = n + h$ modulo 12. La transposition est une translation dans l'espace musical.

Consonance musicale et complexité mathématique

Athanase Papadopoulos

Résumé : La consonance musicale est un sujet passionnant et vaste, et son étude fait intervenir des domaines aussi variés que les mathématiques, la physique, la physiologie, l'esthétique, la psychologie, la numérologie, et il y en a certainement d'autres. J'aborderai ce sujet dans cet article sous des points de vue différents, en mentionnant des idées formulées par Euclide, Ptolémée, Descartes, Huygens, Galilée, Kepler, Mersenne, Sauveur, Rousseau, d'Alembert, Euler et Birkhoff. Je dégagerai ensuite certaines théories sur la consonance qui font intervenir des notions qui relèvent du domaine de la complexité mathématique.

Introduction

Pourquoi est-ce que certains intervalles musicaux (tels qu'une octave ou une quinte) sont consonants et d'autres pas ? Par exemple, pourquoi est-ce que la double quinte et la double quarte ne sont pas consonants, alors que la double octave l'est ?

De telles questions, ainsi que d'autres du même genre, font partie de la liste de problèmes ouverts d'Aristote ([4], Livre XIX Problèmes 35, 36, 41, etc.).

Kepler, dans son *Harmonie du monde*, se pose les mêmes questions, en utilisant d'autres mots : "Pourquoi certaines proportions définissent-elles des intervalles suaves et consonants ; pourquoi les autres proportions définissent-elles des intervalles dissonants, abhorrés par les oreilles, inusités ?" ([17] p. 85).

On peut enfin mentionner Galilée qui, dans ses *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, décrit la question de la consonance comme un "problème merveilleux" ([13] p. 80), et où à travers l'un des protagonistes, il déclare : "Le vieux problème des deux cordes tendues à l'unisson, et où l'une en résonnant fait vibrer et résonner l'autre, est toujours pour moi sans solution, comme ne sont pas très clairs les différents aspects des consonances, et d'autres détails" ([13] p. 80) et, un peu plus loin : "Ayant longuement réfléchi sur les consonances, je n'ai jamais su dire pourquoi celle-ci me plaît plus que celle-là, ni pourquoi certaines non seulement ne me charment pas, mais m'irritent au plus haut point l'oreille". ([13] p. 78).

Des tentatives de réponses à ces questions s'étalant sur une période de 25 siècles ont été faites par des esprits brillants tels qu'Euclide, Ptolémée, Descartes, Huygens, Galilée, Kepler, Mersenne, d'Alembert et Euler (pour ne mentionner que des mathématiciens). Certaines des réponses qui ont été données à ces questions peuvent paraître aujourd'hui convaincantes et d'autres moins, mais l'intérêt d'une question ne réside-t-il pas dans les théories dont elle a suscité la naissance et dans les outils qui ont été développés pour la résoudre ?

Dans les paragraphes qui suivent, je vais présenter certaines conceptions de la consonance, en m'appuyant sur des textes choisis dans les oeuvres d'auteurs ayant vécu à des époques différentes entre la période de l'Antiquité grecque et le XX$^{\text{e}}$ siècle, et qui, pour la plupart, étaient mathématiciens, en tentant de dégager certains points de vue qui font intervenir des notions qui relèvent de la théorie de la complexité mathématique. Il est toujours bon de voir comment les mathématiques peuvent être utiles en musique.

Même si mon sujet ici est la consonance, je n'ai pas tenté dans cet article de donner des listes de consonances à telle ou telle période ; de telles listes auraient chargé inutilement le texte. Je n'ai pas non plus suivi un ordre historique, et je n'ai pas pu éviter certaines répétitions. Enfin, je vais surtout parler de consonance d'intervalles (accords de deux sons), mais plusieurs des considérations peuvent s'appliquer aux accords de trois sons et plus.

1.Qu'est-ce que la consonance ?

Etymologiquement, la consonance est le résultat de plusieurs sons joués simultanémént. Les Grecs avaient pour cela les mots "armonia", qui veut dire "joindre ensemble", et "symphonia", qui est plus proche du latin *consonantia* (et qui, bien sûr, a été fabriqué d'après le grec). Parmi les diverses significations qui ont été données à ce mot, il y en a une que je trouve particulièrement éclairante, et qui est proche du sens étymologique. Elle est utilisée par Platon dans le *Timée* 80b ([18] p. 211), par Euclide dans sa *Section du Canon* (cf. [11] p. 193) et par Aristote à divers endroits. Elle consiste à dire que deux sons sont consonants s'ils peuvent se combiner pour ne former qu'un son unique. Plus généralement, Aristote, dans son traité *De la sensation et des objets sensibles* 447b10 et 448a9 ([5] p. 97 et 99), dit qu'il n'est pas possible de perçevoir simultanément et avec le même sens deux objets, à moins que ces deux objets ne soient combinés en un seul, et il donne comme exemples les consonances d'octave et de quinte, qui d'après lui sont perçues comme un son unique. Notons au passage que l'on comprend mieux, avec cette définition, pourquoi le mot *dissonance*, dans lequel on trouve la racine *di* (deux), est parfois utilisé comme une négation de la consonance : un accord de deux sons est dissonant si, quand ces notes sont émises simultanément, il en résulte non pas un mélange qui donne l'impression d'un son unique, mais deux sons distincts.[1] Il existe une explication rationnelle de ce phénomène de deux sons qui se combinent en un seul ; elle utilise la décomposition du son en fondamental et harmoniques, et je vais en parler au §2 ci-dessous.

Mais il y a d'autres points de vue sur la consonance, et l'une des raisons qui rendent ce sujet intéressant est précisément le fait qu'il est à l'intersection de plusieurs domaines de la science. Je vais faire maintenant une liste d'approches différentes de la consonance, avec quelques commentaires, dont certains seront développées dans les paragraphes qui suivent.

1.— Approche mathématique : La consonance a été considérée par l'école pythagoricienne comme une certaine propriété arithmétique des valeurs numériques associées aux intervalles musicaux, et en ce sens, son étude faisait partie des mathématiques (théories des proportions, des moyennes, etc.). Il est vrai que peu après les Pythagoriciens des VI^e et V^e siècles av. J. C. (et en tous les cas depuis Aristote) des facteurs extérieurs à la théorie des nombres (en particulier, des facteurs acoustico-physiques, sensoriels et psychologiques) sont intervenus dans l'étude de la consonance. Mais le point de vue arithmétique est resté prédominant entre la période de la Grèce antique et le Moyen-âge, c'est-à-dire pendant toute la période où la musique était considérée comme une des sciences du *quadrivium* mathématique. Cette situation perdura dans certaines universités européennes, jusqu'au

[1] Pour Rameau, la dissonance est tout simplement le contraire de la consonance : "tout ce qui n'est pas *consonance*, est *dissonance* (*Nouveau système de musique théorique*, [21] Volume II p. 5). Ceci n'est pas vrai pour d'autres auteurs, cf. l'Appendice à la fin de cet article.

XVII^{e} siècle. On peut à ce propos citer Kepler qui, dans le texte mentionné ci-dessus, écrit : "On alla pendant deux fois mille ans dans cette opinion que les causes de la consonance étaient à rechercher à partir des propriétés des proportions elles-mêmes" ([17] p. 85).

2.— Approche physique et acoustique : Comme on l'a déjà mentionné, la consonance est reliée à la décomposition d'un son en fondamental et harmoniques, et je développerai ce point de vue au §2 ci-dessous. On verra aussi comment, toujours depuis l'Antiquité, la consonance a été liée à l'observation d'un phénomène appelé "résonance" ou "vibration sympathique" de certaines cordes dans des instruments de musique, c'est-à-dire à l'observation des cordes qui, quand on en excite d'autres qui émettent un son plus grave et différant d'une octave, ou d'une quinte, etc., se mettent aussi à vibrer sans qu'on les ait touchées. Aristote parle déjà de ce phénomène dans son Problème 24, Chapitre XIX ([4] p. 106). Descartes mentionne le même phénomène dans son *Abrégé de musique* ([9] p. 64) : "Si l'une des cordes d'un luth est touchée, celles qui sont plus aigues d'une octave ou d'une quinte tremblent et résonnent spontanément". On citera ci-dessous d'autres auteurs sur ce sujet. Enfin, on verra comment Galilée a placé l'étude de la consonance dans un cadre physique plus général, celui des phénomènes périodiques. Dans ses *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles* (1638), Galilée, en discutant du phénomène de résonance sympathique observe que, plus généralement, "en se propageant dans l'air, l'ondulation meut et fait vibrer non seulement les cordes, mais n'importe quel corps apte à trembler et à vibrer avec la même période". Il mentionne des expériences faites avec un fragment de soie attaché à l'instrument, ainsi qu'avec un verre aux parois minces et polies que l'on a posé à proximité ([13] p. 80-81). L'intérêt de se placer dans ce cadre général n'est pas purement théorique, mais il permet de raisonner par analogie et de faire des conjectures. Ainsi, Galilée dit que "comme il est impossible de compter les vibrations d'une corde en raison de leur grande fréquence, on aurait continué à ignorer s'il est vrai que, dans un accord d'octave, la corde la plus aiguë présente dans le même temps un nombre de vibrations double de la corde la plus grave, si précisément les ondes renouvelables à volonté que l'on obtient en faisant résonner et vibrer un verre, ne nous avaient pas directement montré comment à l'instant même où le ton monte d'une octave pour l'oreille, on voit surgir d'autres ondes plus petites qui, avec une infinie netteté, partagent en deux chacune des ondes précédentes".

3.— Approche par les théories physiologiques et sensorielles : Comme tout ce qui concerne le son, la consonance est liée à la morphologie de l'oreille, à la structure du système auditif et nerveux de l'homme, à la façon dont notre cerveau reçoit les informations sonores à partir de notre organe auditif, etc. Dans ses *Principes généraux d'acoustique*, Diderot écrit ([10] p. 87) : "L'air agit sur le tympan et lui communique des pulsations que le tympan transmet aux nerfs auditifs. C'est ainsi que se produit la sensation que nous appelons son". La question est de savoir pourquoi est-ce que certaines excitations du tympan sont reçues avec plus de plaisir que d'autres. Galilée, dans ses *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, comme d'autres scientifiques du XVII^{e} sciècle, a associé ce plaisir au caractère régulier de ces excitations. On parlera de cela au §5 ci-dessous.

Dans le même cadre physiologique, on peut étudier des phénomènes de "correction" par l'oreille, avant la transmission de la consonance à notre cerveau, et comme illustration, on peut citer Euler qui, dans son article *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* ([12] Sér. III Vol. I p. 511), écrit : "Il faut bien distinguer les proportions que nos oreilles aperçoivent actuellement de celles que les sons exprimés en nombres renferment. Rien n'arrive plus souvent dans la musique que ce que l'oreille sent une proportion bien différente de celle qui subsiste effectivement par les sons". Euler présente comme argument l'exemple du tempérament égal, dont les intervalles peuvent être perçus comme étant exacts. Ce phénomène de correction peut aussi être considéré comme une conséquence du manque de précision dans les informations captées par notre oreille, et dans le même article, un peu plus loin (p. 513), Euler écrit : "Si les hommes avaient le jugement de leur oreille si exact qu'ils puissent distinguer les plus petites aberrations, c'en serait fait de toute la musique".

Enfin, toujours à propos des théories sensorielles, on peut rappeler qu'Aristote, dans le chapitre 3 de son traité *De la sensation et des sensibles*, établit une analogie entre les sons et les couleurs, dans laquelle les consonances (à travers les proportions qui leur sont associées) correspondent à des mélanges de couleurs qui sont plus purs que d'autres (cf. [5] p. 73 et suivantes). Dans le même ordre d'idées, le mathématicien Jérôme Cardan (1501-1576), dans son *Livre des proportions* et dans son *Livre sur la variété des choses* établit des correspondances entre les consonances, les saveurs et les odeurs.[2]

4.— Approches esthétiques : La consonance a été souvent reliée à une sensation de plaisir ou de plénitude. Dans ce contexte, son étude fait partie des théories esthétiques, et en premier lieu celles que l'on peut désigner par "esthétique des proportions". Aristide Quintilien traite de ce sujet dans le Livre III de son traité *La musique* [3], considéré comme l'encyclopédie musicale de l'Antiquité grecque. Les grands architectes et théoriciens de l'art de la Renaissance tels que L. B. Alberti (1404-1472), dont Michel-Ange s'est inspiré, ont considéré que la valeur esthétique d'un édifice dépend des proportions qui régissent sa structure, et que les plus belles proportions sont celles qui définissent les consonances musicales.[3] On peut aussi citer Diderot qui, dans ses *Principes généraux d'Acoustique* (cf. [10] p. 84), inclut l'étude du plaisir causé par les sons dans un cadre plus général : "Le plaisir musical consiste dans la perception des rapports des sons [...] Cette origine n'est pas particulière au plaisir musical. Le plaisir, en général, consiste dans la perception des rapports. Ce principe a lieu en poésie, en peinture, en architecture, en morale, dans tous les arts et dans toutes les sciences. Une belle machine, un beau tableau, un beau portique ne nous plaisent que par les rapports que nous y remarquons [...] La perception des rapports est l'unique fondement de notre admiration et de nos plaisirs [...] Le plaisir doit varier avec les rapports et les rapports les plus simples se saisissent avec plus de facilité que les autres". Descartes, par contre, fait une distinction entre les rapports simples et ceux qui causent du plaisir. Dans sa lettre à Marin Mersenne de Janvier 1730 (cf. [8] Vol. I p. 108), il discute de la classification des consonances en termes de simplicité des rapports numériques associés, puis il écrit "Tout ce calcul sert seulement pour montrer quelles consonances sont les plus simples, ou si vous voulez, les plus douces ou parfaites, mais non pas pour cela les plus agréables [...] Pour déterminer ce qui est plus agréable, il faut supposer la capacité de l'auditeur, laquelle change comme le goût, selon les personnes". De la même manière, Leonhard Euler place la question de la consonance dans un contexte d'esthétique des proportions qui est plus large que celui de la musique, mais il considère,

[2] Par exemple : douce = octave, grasse = quinte, salée = quinte, etc.

[3] Par exemple, Alberti, dans son *Art d'édifier*, Livre IX Chapitre V ([1] p. 443), écrit : "Les nombres qui ont le pouvoir de rendre l'harmonie des sons agréable à nos oreilles sont exactement les mêmes que ceux qui comblent nos yeux et notre esprit d'un plaisir merveilleux". Un peu plus loin dans le même traité, (p. 444), il écrit, à propos des rapports définissant les consonances musicales : "Les architectes utilisent tous ces nombres de la façon la plus appropriée [...] en faisant correspondre la hauteur (des édifices publics) selon les lois de l'harmonie musicale". On peut d'ailleurs trouver des théories analogues chez Aristote, dans son *Traité de l'âme* 426a27 à 426b8, [6] p. 117-158.

contrairement à Descartes, que plus les rapports sont simples plus le plaisir qui leur est associé est grand. Dans sa *Lettre à une Princesse d'Allemagne* datée du 3 Mai 1760 ([12] (Sér. III Vol. XI p. 15), il écrit : "Plus une proportion est simple ou exprimée par des petits nombres, plus elle se présente distinctement à l'entendement, et y excite un sentiment de plaisir. Les architectes observent aussi très soigneusement cette maxime, en employant partout dans les bâtiments des proportions aussi simples que les autres circonstances le permettent. Dans les portes et fenêtres, ils font ordinairement la hauteur deux fois plus grande que la largeur, et partout ils tâchent d'employer des proportions exprimables en des petits nombres, puisque cela plaît à l'entendement. Il en est donc de même dans la musique, où les accords ne plaisent qu'en tant que l'esprit y découvre la proportion qui règne entre les sons, et cette proportion s'aperçoit d'autant plus aisément, qu'elle est exprimée par de petits nombres".

Plus proche de nous, le mathématicien G. D. Birkhoff a tenté de bâtir une théorie mathématique de l'esthétique qui inclut des domaines variés tels que la musique, le dessin géométrique, et la poésie et même la morale, et qui s'applique en particulier à la consonance. Le fil conducteur de cette théorie est un paramètre quantitatif qu'il appelle "mesure esthétique". On parlera de cela dans la dernière partie de cet article.

5.— Autres théories : On peut aussi étudier la consonance à travers les théories cognitives, l'ethnomusicologie, la biologie, la neurochimie, la psychologie et le rôle de l'inconscient, les approches numérologiques (nées chez les Pythagoriciens), les approches métaphysiques (on pense à l'approche allégorique de Platon qui, dans le *Timée* ([18] Tome X p. 41 et suivantes), décrit la création de l'âme du monde et celle de l'âme humaine à partir de proportions associées aux consonances musicales, ce qui expliquerait pourquoi l'âme recherche ces proportions. Aristide Quintilien en parle dans son traité *La musique* [3]. Cette approche a été reprise aussi par Kepler ([17] p. 86 et suivantes), et il y en a certainement d'autres encore.

2.Consonance et harmoniques : les théories de Rameau

Dans ce paragraphe, je rappelle brièvement ce que sont les harmoniques d'un son, et je décris ensuite deux points de vue sur la classification des consonances utilisant les harmoniques.

On sait qu'une note musicale est le résultat d'une vibration périodique, par exemple, une variation locale périodique de la pression de l'air (ou de l'espace ambiant), et que la hauteur de cette note est déterminée par la fréquence de la vibration. Par exemple, on convient aujourd'hui qu'un mouvement de 440 cycles par minute est celle du premier *la* qui se trouve à droite du milieu d'un clavier de piano. On a observé, depuis l'antiquité, qu'une note produite par un instrument de musique, par une voix humaine ou encore par la nature (sifflement continu du vent, etc.) est presque toujours accompagnée d'une suite d'autres notes, dont les fréquences dépendent de celle de la note initiale, suivant la règle suivante : si f est la fréquence de la première note (qui est celle que l'on entend principalement, et qui est appelée *fréquence fondamentale*), alors les fréquences des notes qui l'accompagnent sont des multiples entiers $2f, 3f, 4f, \ldots$, et on les appelle les *fréquences harmoniques.* Remarquer que ces harmoniques sont compatibles avec le son initial en ce sens que leur période est un diviseur entier de celle de ce son ; elles vibrent donc avec la même période que celle du son initial. La vibration initiale est en fait une somme de vibrations de fréquences $f, 2f, 3f, \ldots$. Les amplitudes des sons harmoniques dépendent de l'instrument ou de la voix qui émet le son ; c'est cette suite d'amplitudes qui caractérise le timbre de l'instrument ou de la voix en question. Même si l'existence des harmoniques a été observée depuis l'antiquité, leur explication n'a été obtenue que grâce aux expériences acoustiques et aux travaux de plusieurs mathématiciens du XVIII^e^ siècle, sur les équations différentielles régissant la production et la propagation du son et sur les séries de Fourier.[4]

Quelle relation y a-t-il entre les harmoniques et la consonance ? Je vais commencer par exposer le point de vue adopté dans l'article CONSONANCE de l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert [14]. On sait que c'est Diderot lui-même qui a écrit cet article. C'est un point de vue très simple (et même simpliste), mais il est représentatif des théories en vogue au XVIII^e^ siècle, grâce en particulier aux écrits théoriques de Jean-Philippe Rameau (1683-1764), qui considèrent que toute la musique devrait pouvoir être expliquée par ce qu'on a appelé communément la "résonance naturelle des corps sonores", c'est-à-dire, par le phénomène des harmoniques. De ce point de vue, le plaisir que l'on a à écouter les consonances provient de l'habitude qu'a notre oreille à écouter les harmoniques. En particulier, la classification des intervalles en fonction de leur degré de consonance devrait s'appuyer sur la décomposition du son en fondamental et harmoniques. Diderot écrit dans cet article qu'une oreille (même médiocre) peut entendre facilement les cinq premiers harmoniques d'un son, c'est-à-dire les intervalles dont les valeurs numériques sont 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 et 5/6. [5]Pour un son donné, ce sont les intervalles qui séparent le son fondamental de ses harmoniques successifs, c'est-à-dire les intervalles d'octave, quinte, quarte, tierce majeure et tierce mineure. Dans la suite infinie des harmoniques, ce sont les premiers intervalles qu'une oreille bien attentive peut entendre. Ces intervalles constituent aussi, d'après Diderot, les consonances. Les intervalles suivants, dont les valeurs sont 6/7 (tierce diminuée) et 7/8 (qui n'a pas de nom déterminé), se trouvent entre la consonance et la dissonance, et l'intervalle de ton, de valeur 8/9, fait sur l'oreille, toujours d'après Diderot, "une impression qui lui déplaît sensiblement". Diderot écrit : "Plus le rapport des deux tons approche du rapport d'égalité, plus la dissonance devient sensible. Elle commence à se faire sentir dans l'accord de 8/9, et de là elle continue à devenir de plus en plus désagréable. Celle de 8/9 l'est moins que celle de 9/10, celle-ci est encore plus supportable que l'accord de 15/16 [...] L'intervalle 99/100 et plus encore celui de 999/1000 produit une discordance insupportable ; mais qui se résoud dans la plus agréable des consonances aussitôt qu'on parvient à l'unisson [...] Les limites qui séparent les consonances des dissonances tombent sur les intervalles 6/7 et 7/8, car l'accord de 8/9 fait une dissonance bien marquée et celui de 5/6 est une consonance gracieuse".

C'est une première classification des consonances, grossière il est vrai, mais somme toute assez logique puisqu'elle correspond à l'ordre naturel sur les nombres entiers, et de plus, elle rapporte le degré de consonance à un phénomène naturel : l'oreille s'habitue aux intervalles qu'elle entend le plus souvent.

Il y a une façon de relier la consonance aux harmoniques qui est plus complexe mais que je trouve intéressante et plus convaincante, et qui est plus dans le style des écrits de Rameau. Je vais la présenter maintenant.

---

[4]Il est bon de rappeler que le développement de nombre de ces théories importantes a été motivé par des questions provenant de la musique.

[5]Dans ce texte de Diderot, contrairement à la tradition des textes de l'Antiquité grecque, les intervalles sont représentés par des fractions dont la valeur est plus petite que 1 (c'est-à-dire que l'on prend le rapport de la fréquence de la note grave sur celle de l'aiguë).

Rameau, comme on l'a déjà dit, a développé la théorie selon laquelle la consonance dérive du phénomène des harmoniques. Dans sa *Génération harmonique* ([21] Vol. III p. 39), il écrit : "L'harmonie d'un corps sonore donne toutes les consonances", et dans son *Nouveau système de musique théorique*, le chapitre intitulé *Faits d'expérience qui servent à ce système* (cf. [21] Vol. II p. 27) commence par ces mots : "Une seule corde fait résonner toutes les consonances", ce qui veut dire encore que les consonances découlent des harmoniques.

Pour expliquer le point de vue de Rameau, considérons une note donnée de fréquence f_1 suivie de ses harmoniques, c'est-à-dire suite

$$f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, \ldots,$$

et considérons la suite analogue associée à la note qui est une octave plus haut que la précédente, c'est-à-dire de la suite

$$2f_1, 4f_1, 6f_1, 8f_1, \ldots.$$

La seconde suite est une sous-suite de la première. Par conséquent, quand on écoute les deux sons simultanément, il est théoriquement possible d'avoir la sensation d'un son unique, de fréquence fondamentale f_1, mais avec un timbre différent de celui du premier son, puisque les amplitudes des fréquences harmoniques du premier son ont été modifiées par l'addition de celles du second son. Ainsi, une octave (de même, une octave multiple) est assimilable à un unisson. D'ailleurs, dans des écrits comme la *Génération harmonique* ([21] Vol. III), Rameau, en citant la suite des harmoniques, écrit 1, 1/3, 1/5, etc., c'est-à-dire qu'il omet les octaves et les octaves mulitples, parce qu'il les considère comme l'unisson.[6] Prenons un second exemple.

Si au lieu d'un intervalle d'octave on considère un intervalle de quinte, on doit prendre les suites

$$f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, \ldots$$

et

$$\frac{3}{2}f_1, 2 \times \frac{3}{2}f_1, 3 \times \frac{3}{2}f_1, 4 \times \frac{3}{2}f_1, \ldots$$

Cette fois-ci, la seconde suite n'est pas une sous-suite de la première, mais les deux suites sont des sous-suites de la suite d'harmoniques d'une troisième note, de fréquence $f_1' = f_1/2$. On peut alors considérer que c'est cette note "virtuelle", ayant cette nouvelle fréquence, que l'on entend. On peut d'ailleurs rendre cette note réelle quand on écrit de la musique orchestrale. En ajoutant la note de fréquence $f_1/2$ à l'accord $(f_1, 3f_1/2)$, on obtient un accord de trois notes $(f_1/2, f_1, 3f_1/2)$, dont la note ajoutée, qui est la plus grave des trois, est une sorte de base pour cet accord.

On voit comment on peut généraliser ces considérations, et c'est par des raisonnements de ce type, appliqués à des accords de trois notes et plus, que Rameau a développé sa

[6] Remarquons que pour un intervalle de deux sons, ce sont toujours les harmoniques du son aigu qui renforcent celles du son grave. On peut penser ici au problème No. 13 Livre XIX d'Aristote : "Pourquoi est-ce que dans la consonance d'octave, la note aiguë existe dans la note grave, mais pas *vice versa*?" De même Descartes, dans son *Abrégé de musique* ([9] p. 64) : "De deux termes qu'on suppose être en consonance, le plus grave est de beaucoup le plus puissant et contient l'autre en quelque façon. (Rappelons que le phénomène des harmoniques n'était pas encore expliqué du temps de Descartes.) Rameau dit la même chose dans son *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels* : "Dans chaque son, tous les aigus sont contenus dans le grave, mais pas réciproquement ([21] Vol. I p. 33). (Cette fois-ci, ce phénomène pouvait être expliqué par les harmoniques.)

théorie de la "basse fondamentale" qui s'appuie entièrement sur la décomposition du son en fondamental et harmoniques. C'est ainsi, je crois, qu'il faut comprendre Rameau quand il écrit dans son *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels* ([21] Vol. I p. 35) : "L'harmonie des consonances ne peut être parfaite si ce premier son ne règne au-dessous d'eux, comme étant la *base et le fondement*". (Les italiques sont de Rameau.)[7] On peut interpréter de la même manière certains raisonnements d'Euler qui consistent à prendre le plus petit commun multiple d'une suite de nombres entiers représentant des (rapports de) fréquences d'un accord ; c'est ce plus petit commun multiple qui permet de trouver la base de l'accord.[8] Il y a cependant un problème, c'est que si les rapports numériques représentant les intervalles dont on est parti ne sont pas très petits (comme les rapports $1/2$ et $3/2$ dans les exemples considérés ci-dessus), la fréquence de la note grave que l'on trouve par ce raisonnement est trop basse, et la note ayant cette fréquence se trouve vite en dehors du registre de l'instrument de musique donné, ou même en dehors du champ audible. Cette limite pourrait certainement définir une sorte de frontière entre consonance et dissonance.

3.Deux résumés sur la consonance : Théon de Smyrne et Jean-Jacques Rousseau

Les auteurs qui ont traité de la consonance l'ont généralement abordée à partir de plusieurs points de vue à la fois. A titre d'exemple, je vais présenter deux textes sur la consonance qui sont comparables, malgré le fait qu'ils aient été écrits à des époques très éloignées. Le

[7]La théorie de la basse fondamentale de Rameau, telle qu'elle est développée dans son *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels* (1722) ou dans son *Nouveau système de musique théorique* (écrit en 1726, et dont le principal objectif est précisément d'expliquer comment les consonances et le principe de la basse fondamentale dérivent de la théorie des harmoniques), est plus évoluée que celle qui est suggérée dans cet exemple. Elle s'applique à des accords de deux sons et plus, mais aussi à des mélodies (pas seulement des accords), pour lesquels il faut *sous-entendre* des accords. (Le terme sous-entendre, d'après Rameau, veut justement dire que "les sons auxquels on l'applique peuvent être entendus dans des accords où ils ne se trouvent point ; et même, à l'égard du son fondamental, il faut s'imaginer qu'il devrait être pour lors entendu au-dessous des autres sons, lorsqu'on dit qu'il est sous-entendu, etc." (cf. [21] Tome I p. 27). En fait, le principal usage de la basse fondamentale en musique est de mettre en valeur la tonalité instantanée dans laquelle on se trouve. Je crois qu'une étude purement arithmétique de cette notion reste à développer. Rameau n'ayant pas la formation nécessaire, son exposé, qu'il voulait "mathématique", est noyé dans des définitions parfois inutiles (les différents types de suites, les nombres premiers, etc.) et sa présentation ne met pas en valeur les idées mathématiques qu'il y a derrière ses théories, qui permettent cette application universelle de la théorie de la décomposition du son en fondamental et harmoniques à tout les domaines de la musique (solfège, composition, accompagnement, etc.). Le mathématicien d'Alembert, qui était censé écrire, à la demande de l'Académie des Sciences, une présentation des théories de Rameau, était plus intéressé en étudiant les écrits de Rameau, par la musique qu'on y trouve plutôt que par les théories mathématiques, et dans ses *Eléments de musique suivant les principes de M. Rameau* (1752) [2], il a tenté de réduire au minimum le formalisme mathématique qui, il est vrai, n'y était pas indispensable. Il semble même que d'Alembert se soit donné pour tâche de vider complètement l'oeuvre de Rameau de son contenu mathématique. Mais les mathématiciens ont des goûts et des objectifs différents, et on pourrait très bien reprendre les théories de Rameau d'un point de vue purement mathématique. Notons d'un autre côté que les traités musicaux de Rameau contiennent moins de mathématiques que n'importe quel texte sur la musique de la période de l'Antiquité grecque.

[8]Dans son article *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* [12] (Sér. III Vol. I p. 509), Euler "exprime en nombre" les accords de plusieurs sons. Par exemple : G, H, d, f (j'utilise ici, comme Euler, la notation allemande pour le nom des notes) s'exprime comme $36, 45, 54, 64$. Le plus petit commun multiple est $2^6 \times 3^5 \times 5$, qu'Euler appelle l'"exposant de cet accord", et "par lequel, dit-il, on doit juger de la facilité dont l'oreille peut comprendre cet accord". L'accord H, d, f, g qui s'exprime en nombres par $45, 54, 64, 72$, a le même exposant.

premier se trouve dans un traité de Théon de Smyrne (IIe siècle ap. J. C.), et le second est de J. J. Rousseau, tiré de son *Dictionnaire de Musique*. Les deux textes sont intéressants parce que les auteurs y résument plusieurs opinions de leurs contemporains.

Théon de Smyrne, dans son *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* ([23] p. 85), écrit que les Pythagoriciens faisaient une distinction entre les intervalles musicaux (accords de deux sons) qui donnent lieu à du bruit et ceux qui émettent de vrais sons, et que cette différence dépend du rapport des vitesses de mouvements qui produisent ces sons (c'est-à-dire, de ce que l'on appelle, depuis le XVIIIe siècle, le rapport des fréquences de ces sons, et que dans l'Antiquité on pouvait assimiler à des rapports de longueurs de cordes, des longueurs de flûtes, etc.). Théon précise que si ces vitesses sont sans rapport entre elles, les intervalles sont dissonants, et que dans ce cas "le mot son ne leur convient pas, on les appelle plus justement bruit". On doit regarder comme vrais sons, dit-il, les intervalles dont le rapport des vitesses est "de nombre à nombre", c'est-à-dire un rapport de nombres entiers. "Parmi ces intervalles, il y en a, dit-il qui sont seulement *concordants* ($`\eta\rho\mu o\sigma\mu\epsilon\nu o\iota$), et d'autres qui sont consonants. Les sons consonants sont ceux dont les rapports numériques sont les multiples et les superpartiels les plus connus". On a donc ici une définition assez précise de la consonance, qui est basée sur une propriété mathématique, même si Théon ne rappelle pas ici quels sont les "rapports multiples et les superpartiels les plus connus". Il caractérise ensuite les sons consonants par la propriété physique suivante : "Quand un son est produit par une des cordes d'un instrument, les autres cordes résonnent par l'effet d'une certaine affinité, d'une sorte de sympathie". Enfin, Théon donne une troisième caractérisation de la consonance, qui contient en même temps l'idée de son unique et celle de plaisir produit : "Deux sons sont consonants quand étant produits en même temps, il en résulte un son mixte qui a une douceur et un charme tout particuliers", et il donne l'exemple des intervalles de quarte, de quinte et d'octave. D'autres consonances dit-il, ont été trouvées ultérieurement, elles sont obtenues en ajoutant entre elles les consonances précédentes, comme les intervalles de onzième (octave + quarte), douzième (octave + quinte), double octave, double octave et quarte et ainsi de suite, "tant, dit-il, que le son peut être produit et est perceptible à l'oreille".

De même, dans son *Dictionnaire de Musique* (publié à Genève en 1768), à l'article CONSONNANCE[9] (voir [22] p. 724), Rousseau résume certaines opinions de ses prédécesseurs directs et de ses contemporains sur la question. Il définit la consonance comme un "intervalle formé par deux sons, dont l'accord plaît à l'oreille". Il distingue les consonances simples, qui, pour lui, sont la tierce et la quarte, et les composées, dont il donne comme exemples la quinte (composée de deux tierces), et la sixte (composée d'une tierce et d'une quarte).[10] Il parle ensuite du caractère physique de la consonance, qu'il associe, comme Théon l'avait fait 16 siècles avant lui, au frémissement des cordes. "Si, dit-il, deux cordes forment entre elles un intervalle d'octave, ou de douxième, ou de dix-septième majeure, et si l'on fait sonner la plus grave, l'autre frémit ou résonne". Notons que les intervalles qu'il mentionne ici font partie des harmoniques d'un son donné. Les intervalles de sixtes majeures et mineures, de tierce mineure, de quinte, de tierce majeure et de quarte sont d'après lui des consonances

[9] On écrivait "consonnance" et non pas "consonance".

[10] Le fait de partir d'un certain nombre de consonances simples et de considérer toutes les autres comme obtenues à partir de celles-là par certaines opérations est l'amorce d'une notion de "complexité" dont on va parler plus loin. Mais cette théorie n'est pas basée sur la complexité des valeurs numériques des intervalles. Par exemple, ici, la quinte (3/2) est considérée comme étant décomposée en une somme d'intervalles plus simples, la tierce majeure (5/4) et la tierce mineure (6/5), ce qui veut dire que 3/2 est considéré comme le produit des deux éléments "plus simples" 5/4 et 6/5.

parce que ce sont des combinaisons et des renversements des consonances considérées précédemment. “Elles se trouvent, dit-il, entre les diverses cordes qui frémissent au même son”. Rousseau appelle cette combinatoire la “génération de consonances”, le mot *génération* ayant déjà été utilisé dans un sens similaire par Rameau (cf. la *Génération harmonique*) [21] Vol. III). Roussseau passe en revue ensuite plusieurs théories physiques qui tentent d’expliquer le plaisir produit par les consonances, mais il considère que “toutes ces explications sont conjecturales et que l’on leur trouve peu de solidité quand on les examine de près”. Parmi les théories qu’il rejette, il y a celle de Descartes, qui, d’après Rousseau, explique le plaisir causé par les consonances par la simplicité des rapports que font entre eux les sons qui les produisent,[11] “plaisir, dit-il, qui diminue à mesure que ces rapports deviennent plus composés, et quand l’esprit ne les saisit plus, ce sont de véritables dissonances”. Rousseau écrit : “Quoique cette hypothèse s’étende même à d’autres phénomènes dans les beaux-arts, il n’est pas possible de s’en contenter”. Par exemple, cette théorie, dit-il, n’est pas capable d’expliquer pourquoi la dissonance qui résulte du rapport 90/89 n’est pas plus choquante que celle qui résulte du rapport 13/12. La seule théorie scientifique qui lui paraît satisfaisante est celle de Pierre Estève,[12] qui explique les consonances par les harmoniques. “Les harmoniques qui accompagnent un son, dit Rousseau, font sa douceur. Toutes les fois que ces harmoniques sont renforcées et mieux développées, les sons sont plus mélodieux, et l’oreille y est plus sensible [...] et les consonances ont cette propriété que les harmoniques de chacun des deux sons concourant avec les harmoniques de l’autre, ces harmoniques se soutiennent mutuellement, deviennent plus sensibles, durent plus longtemps, et rendent ainsi plus agréable l’accord des sons qui les donnent”. Ainsi, dans la théorie d’Estève, “plus entre deux sons il y a d’harmoniques concourant, plus l’accord en sera agréable”. Notons aussi que dans l’article BATTEMENT du même *Dictionnaire*, Rousseau mentionne l’explication du phénomène de consonance par les battements, émise par le mathématicien Joseph Sauveur,[13] mais il la déclare non soutenable.[14]

Finalement, à travers la référence aux harmoniques, Rousseau, de même que son contemporain Rameau, fait référence à la nature comme source des consonances : “La nature qui a doué les objets de chaque sens de qualités propres à le flatter, a voulu qu’un son quelconque fût toujours accompagné d’autres sons agréables, comme elle a voulu qu’un rayon de lumière fût toujours formé des plus belles couleurs”.

4.Complexité I : Les Pythagoriciens

Ptolémée (IIe siècle ap. J. C.) dans son *Harmonique* (voir [20] p. 287) et Porphyre (IIIe

---

[11] On citera plus loin certains textes de Descartes dans lesquels il dissocie le plaisir de la simplicité des rapports numériques.

[12] Né en 1720, mathématicien puis physiologiste et théoricien de l’art.

[13] J. Sauveur (1653-1716) est considéré comme le premier à avoir pu expliquer le phénomène des battements et calculer des fréquences absolues (grâce à l’écoute des battements). Il a donné une explication des harmoniques indépendante de celle de J. Wallis (qui l’avait fait avant lui), en introduisant des mots tels que *noeuds* et *ventres* des cordes vibrantes. De plus, Sauveur a introduit une généralisation de la notion d’harmoniques (des harmoniques d’harmoniques). Il est aussi l’inventeur du mot *acoustique*, en tant qu’étude générale du son (et non pas seulement du son “agréable”). Ses premiers travaux importants sont contenus dans son mémoire *Principes d’acoustique et de musique, ou système général des intervalles et des sons*, Mémoire de l’Acad. Royale des Sciences, Paris 1701, p. 297-347.

[14] On peut rappeler ici que la théorie qui est considérée comme la plus complète, et qui est à la base des théories modernes de la consonance, est celle de Hermann von Helmholtz (1821-1894), et qu’elle fait intervenir en même temps les harmoniques et les battements.

siècle. ap. JC), dans son *Commentaire sur les Harmoniques de Ptolémée*,[15] (cf. [19] p. 529) rapportent que les Pythagoriciens établissaient une classification des intervalles suivant les rapports numériques qui les représentent, "afin de mettre en évidence ceux qui étaient les mieux consonants". Porphyre nous dit que, plus précisément, ces Pythagoriciens associaient à chaque consonance (représentée, rappelle-t-il, par un rapport *multiple*, c'est-à-dire de la forme $n/1$, ou bien *superpartiel*, c'est-à-dire de la forme $(n+1)/n$, où n est un entier positif), une quantité appelée *nombre de non-semblable*, et que plus l'accord est harmonieux, plus ce nombre est petit. Les indications de Porphyre sur ce nombre de non-semblable ne permettent pas de le connaître en général, mais il nous dit que pour les trois premières consonances, l'octave (de rapport $2/1$), la quinte (de rapport $3/2$) et la quarte (de rapport $4/3$), ce nombre est respectivement 1, 3 et 5. Ainsi, ce nombre de non-semblable, pour le cas particuler des trois consonances en question, est obtenu en ajoutant le numérateur au dénominateur et en ôtant 2 au résultat, cf. [19] p. 529.

Ce qui semble clair ici est que plus les deux entiers de la fraction réduite qui représente l'intervalle musical sont petits, plus le degré de consonance de cet intervalle est considéré comme grand. C'est l'idée de simplicité des rapports, que l'on a déjà mentionnée en citant Descartes, et qui apparaît aussi dans une formule d'Euler que nous allons voir au §7.

5.Complexité II : La théorie de la coïncidence des coups (Galilée, Descartes, Huygens et Euler)

Dans ses *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, Galilée s'interroge sur la consonance musicale, au cours d'une digression sur la vibration des cordes. Il inclut cette étude dans un discours plus large concernant le pendule ([13]] p. 80-88), et on peut dire tout de suite que le fait d'étudier la vibration sonore en même temps que le pendule contient déjà une approche nouvelle et intéressante du sujet musical, parce qu'on le place dans le cadre de phénomènes vibratoires plus généraux.[16]

Galilée émet dans ce texte une théorie de la consonance qui a été reprise par plusieurs physiciens du XVII^e^ siècle, que l'on appelle parfois "théorie des coups". Cette théorie mesure la consonance en termes du degré de la coïncidence de certains vibrations, et elle peut être considérée d'un point de vue formel comme une ébauche rudimentaire de la théorie de la consonance par le degré de la coïncidence des harmoniques dont on a parlé ci-dessus. Galilée écrit ([13] p. 84) : "Les ondes, en se propageant dans l'air, viennent frapper le tympan de l'oreille en le faisant vibrer aux mêmes intervalles de temps. Ce point étant établi, peut-être pourrons-nous déterminer pour quelle raison précise certains couples de sons, même dans des tons différents, sont reçus avec un grand plaisir par notre *sensorium*, et d'autres avec un plaisir moindre, tandis que d'autres enfin nous frappent très désagréablement ; ce

[15] On peut rappeler ici que la première traduction complète en latin de l'*Harmonique* de Ptolémée, ainsi que celle des *Commentaires sur l'Harmonique de Ptolémée* par Porphyre, sont l'oeuvre d'un mathématicien, John Wallis (1616-1703). Ces deux traductions constituent, au même titre que des traductions de l'*Harmonique* du musicologue byzantin Manuel Bryennius, accompagnés d'appendices écrits par Wallis sur la musique, ainsi que des traductions de certaines oeuvres d'Archimède, d'Eudoxe, de Pappus et d'Aristarque de Samos, le volume III des oeuvres complètes de Wallis (éditées en trois volumes à Oxford, 1693-1699).

[16] On peut noter à ce propos que l'idée de comparer la propagation du son à celle des ondes créées à la surface de l'eau par une pierre que l'on jette dans un étang remonte à l'antiquité. Boèce (480-524) qui l'a certainement trouvée chez les Pythagoriciens, en parle dans son *Institution musicale*. Mais l'idée de combiner l'étude des cordes vibrantes avec celle du pendule semble apparaître pour la première fois dans les écrits de Galilée.

qui revient encore à fournir la raison des consonances plus ou moins parfaites et des dissonances. Le désagrément de ces dernières, à mon avis, provient des vibrations discordantes de deux notes différentes frappant le tympan hors de toute proportion rationnelle, et l'effet de la dissonance sera particulièrement pénible quand les fréquences des vibrations seront incommensurables [...] Formant consonance, et reçues avec plaisir, seront au contraire les couples de notes qui viennent heurter le tympan avec une certaine régularité [...] Ainsi, la première et la plus agréable consonance sera celle de l'octave, puisqu'à chaque stimulation du tympan due à la corde la plus grave correspondent deux stimulations provoquées par la corde la plus aiguë : à l'occasion d'une vibration sur deux de la corde la plus aiguë les effets viendront donc se conjuguer, en sorte que la moitié des stimulations au total battront l'oreille ensemble." Galilée considère ensuite les exemples de l'unisson, de la quinte, de la quarte et de la seconde. Par exemple, dans ce dernier, de rapport 9/8, "une pulsation seulement sur neuf de la corde la plus aiguë atteint l'oreille en même temps qu'une pulsation de la corde la plus grave". Par rapport aux intervalles qu'il cite, il dit que "tous les autres sont discordants, affectent désagréablement le tympan, et sont donc jugées dissonants par l'oreille".

Galilée conclut ce discours par la description d'une expérience analogue à celle de la coïncidence des vibrations sonores, mais réalisée avec des pendules, "pour montrer, dit-il, la façon dont l'oeil, pas moins que l'oreille, peut encore prendre plaisir aux mêmes jeux". L'expérience consiste à suspendre plusieurs boules de plomb identiques à des fils de longueurs différentes, faisant entre elles les mêmes proportions que celles des consonances. (Plus précisément, il prend trois fils de longueurs respectivement seize, neuf et quatre unités.) En écartant ces fils de la verticale et en les lâchant au même instant, il observe les pendules se rejoindre du même côté à des moments précis et réguliers, de la même façon que les rencontres régulières des vibrations sonores prévues par la théorie des coups.

Parmi les auteurs qui ont repris l'explication de la consonance par la coïncidence des coups, il y a Descartes, Christian Huygens et Euler, et je vais dire quelques mots sur chacun d'eux.

Descartes est probablement, parmi les auteurs mentionnés dans les écrits de Rameau, celui qui est cité avec le plus de respect. Il traite de la consonance dans son *Compendium musicae* (Abrégé de musique, écrit en 1618), qui est son premier écrit (Descartes avait 22 ans), et qui n'a été édité qu'en 1650 (l'année de sa mort). C'est un livre sur la théorie de la musique (intervalles, gammes, modes, etc.) mais contenant aussi, dans la tradition des autres traités musicaux de la Grèce antique, des considérations philosophiques, sensorielles et psychologiques, sur la réception des objets musicaux. Descartes traite aussi de la consonance dans sa correspondance avec Marin Mersenne et Constantin Huygens, et dans d'autres écrits, comme son *Traité de l'homme* (1664). Il écrit : "sans l'oreille il est impossible de juger de la bonté d'aucune consonance, et lorsque nous jugeons par raison, cette raison doit toujours supposer la capacité de l'oreille" (Lettre à Mersenne, 18 décembre 1629, [8] Vol. I p. 88). Plus loin dans cette même lettre (p. 100 et suivantes), Descartes explique les consonances par la simplicité des valeurs numériques qui sont associées aux longueurs des cordes vibrantes, "ce qui fait que les sons se mêlent mieux et font une douce harmonie".[17] Mais comme on l'a déjà noté plus haut, Descartes fait une distinction entre

[17]Dans cette même lettre, on trouve cette remarque intéressante de Descartes : "Pour la musique des anciens, je crois qu'elle a eu quelque chose de plus puissant que la nôtre, non pas parce qu'ils étaient plus savants, mais parce qu'ils l'étaient moins : d'où vient que ceux qui avaient un grand naturel pour la musique, n'étant pas assujettis dans les règles de notre diatonique, faisaient plus par la seule force de l'imagination que ne peuvent faire ceux qui ont corrompu cette force par la connaissance de la théorie. De

les choses qui sont perçues le plus facilement et celles qui sont reçues de la façon la plus agréable. Dans un passage tiré de son *Abrégé de musique*, passage qu'il recopie aussi pour Mersenne dans sa lettre du 18 Mars 1730 ([9] Vol. I p.58), il écrit : “Parmi les objets des sens, celui-ci n'est pas le plus agréable à l'âme qui est le plus facilement perçu par le sens, ni celui qui l'est le plus difficilement ; mais c'est celui qui n'est pas si facile à parcevoir que le désir naturel qui porte les sens vers les objets ne soit pas entièrement comblé, ni également si difficile qu'il fatigue les sens”.

Ce qui nous intéresse plus particulièrement ici est le fait que Descartes ait adopté un point de vue assimilable à celui de la théorie des coups de Galilée. Dans sa lettre à Mersenne datée d'Octobre 1631, il lui décrit ce phénomène avec un dessin à l'appui, que l'on a reproduit dans la figure 1 ci-dessous.

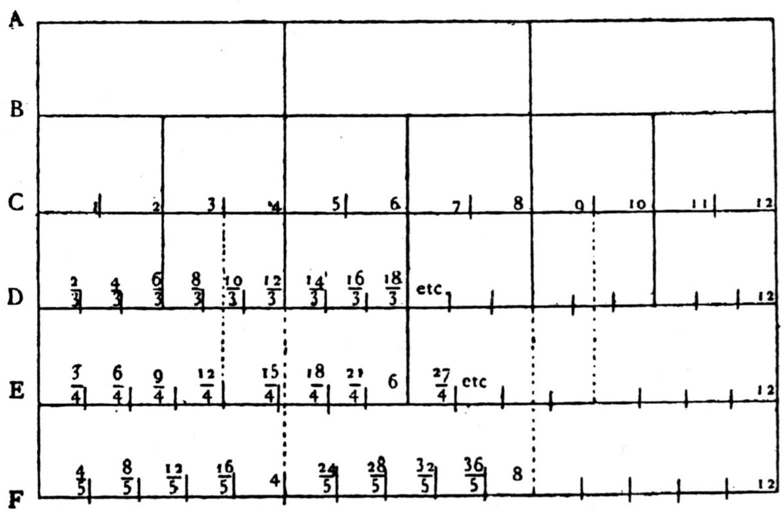

Fig. 1 – Descartes illustre par ce dessin, tiré d'une lettre à Marin Mersenne ([8] Vol. I p. 225), la théorie de la consonance par celle de la coïncidence des coups. La ligne A représente les vibrations d'une note qui est une octave plus bas que la note de la ligne B, la ligne C représente une note qui est une octave plus haut que la note de la ligne B, la ligne D représente une une note qui une une quinte au-dessus de C, la ligne E fait une quarte au-dessus de C et la ligne F une tierce au-dessus de C.

Christiaan Huygens (le fils de Constantin, mentionné ci-dessus et avec qui Descrates était en correspondance) parle de la consonance dans son *Traité de la consonance*, et il en donne une explication qui est proche de celle de Galilée : “On trouve que des consonances les unes sont plus agréables que les autres, et que ce sont celles qui plaisent le plus dont les battements se rencontrent le plus fréquemment ensemble, excepté pourtant l'unisson dont tous les battements se rencontrent et qui pour cela ne fait autre effet qu'un son tout seul ; et encore l'octave et ses répliques parce qu'elle ressemble à l'unisson”. Il donne comme exemple la douxième (octave + quinte), “dont la proportion est de 3 à 1, de sorte, dit-il qu'à chaque battement de l'air du son grave, l'aigu en fait trois, ce qui fait que la douxième est plus agréable que la quinte, car dans la quinte, les trois battements du ton aigu ne se

plus, les oreilles des auditeurs n'étant pas accoutumées à une musique si réglée, comme les nôtres, étaient beaucoup plus aisées à surprendre” ([8] Vol. I, p. 101).

rencontrent que avec les deux battements du ton grave". (cf. [15] Tome XX p. 34)

Pour terminer ce paragraphe, on peut rappeler qu'Euler utilise des raisonnements proches de ceux de la théorie des coups, quand il explique la consonance à la princesse d'Allemagne avec laquelle il était en correspondance, même s'il avait déjà élaboré, trente ans plus tôt, une théorie mathématique de ce sujet qui est plus évoluée et que l'on présentera au §7 ci-dessous. Il lui écrit : "En entendant un son simple en musique, notre oreille est frappée d'une suite de coups également éloignés entre eux, dont le nombre produit en un certain temps cause la différence qui règne entre les sons graves et les sons aigus" et il représente cela par une suite de points également espacés sur une ligne droite. Il considère ensuite un accord de deux sons que l'on entend simultanément. "On aperçevra un mélange de deux suites de coups [...] Un tel mélange peut être représenté aux yeux par deux suites de points rangés sur deux lignes *ab* et *cd*". Il en dessine deux exemples, d'abord celui où les rapports des fréquences est de 12/11 et ensuite l'exemple où le rapport est de 3/2 (voir figure 2). A propos du premier exemple, il dit que " les yeux, en regardant la figure, n'y découvrent presque point l'ordre, et il en est de même pour les oreilles. [..] Mais dans le second cas, ci-dessous, on découvre du premier coup d'oeil que la ligne d'en haut contient deux fois plus de points que celle d'en bas. C'est sans doute le cas le plus simple après l'unisson, où l'on peut aisément découvrir l'ordre dans les deux suites de points [...] Maintenant, quand l'oreille découvre aisément un rapport qui règne entre deux sons, leur accord est nommé une *consonance*, et quand le rapport est très difficile à découvrir ou même impossible, l'accord est nommé *dissonance*. (lettre du 29 Avril 1760, [12] Sér. III Vol. XI p. 13). De même : "la proportion de 1 à 3 nous présente deux sons, dont l'un rend trois fois plus de vibrations que l'autre en même temps, etc." (lettre du 3 Mai 1760, [12] Sér. III Vol. XI p. 17).

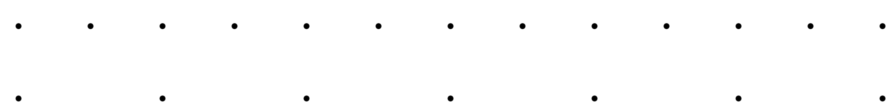

FIG. 2 – Euler illustre par ce dessin, contenu dans une de ses lettres à la Princesse d'Allemagne ([12] Sér. III Vol. XI p. 13) la théorie de la consonance expliquée par la coïncidence des coups.

6.Complexité III : Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) occupe une place particulière dans l'histoire de la consonance. Avec lui, l'accent est mis sur la géométrie et non plus sur l'arithmétique. Le premier chapitre du Livre III de son *Harmonie du monde*, écrit en 1619, est intitulé "Des causes des consonances". Ce n'est pas un chapitre indépendant du reste de l'ouvrage, et pour le comprendre il faut le relier aux précédents chapitres, qui sont purement mathématiques. Dans le Livre I du traité, Kepler fait une étude approfondie de la contructibilité des polygones réguliers par la règle et le compas, propriété qu'il appelle "scibilité". Dans le Livre III, il compare la scibilité des polygones réguliers à la consonance des intervalles musicaux, en faisant des raisonnements que l'on va décrire maintenant. On va considérer les polygones réguliers dans l'ordre, suivant leur nombre de côtés. Considérons d'abord le diamètre d'un cercle, que l'on regarde comme un polygone dégénéré (ayant deux côtés). Ce polygone est bien sûr constructible par la règle et le compas, et il divise son cercle circonscrit en deux parties égales. Le rapport du périmètre du cercle à la longueur de chaque arc de cercle ainsi découpée est égal à 2/1, qui est le rapport numérique associé à l'intervalle d'octave. Considérons maintenant le triangle équilatéral. Il découpe son cercle circonscrit en trois arcs de même longueur. Le rapport entre le périmètre du cercle et la longueur d'un arc découpé est de 3/1, qui est la valeur numérique de l'intervalle de douxième, et on trouve également dans cette division du cercle par le triangle équilatéral le rapport 3/2 (quinte), qui est le rapport du périmètre du cercle à celui de la réunion de deux arcs découpés. Pour le carré, on trouve les rapports 4/1 (quinzième, ou double octave), 4/2=2/1 (octave) et 4/3 (quarte). Pour le pentagone, on trouve 5/1 (dix-septième), 5/2 (dixième majeure), 5/3 (sixième majeure), 5/4 (diton) et ainsi de suite. Par contre, un rapport tel que 7/6, qui n'est pas une consonance, se retrouve dans le découpage du cercle par l'heptagone régulier, qui n'est pas constructible par la règle et le compas. Jusqu'à maintenant, il faut considérer cela comme une simple analogie. Il faut pousser plus loin le raisonnement de Kepler pour trouver une relation plus profonde entre les polygones réguliers et la consonance, et on va décrire cela à présent.

Dans son étude sur la constructibilté des polygones réguliers à l'aide de la règle et du compas (chapitre I de l'*Harmonie du monde*), Kepler introduit une notion de *degré de scibilité*. C'est une mesure du degré de complexité de la construction. En réalité, on peut définir cette complexité de plusieurs manières, qui ne donnent pas toutes les mêmes résultats, mais des résultats qui sont équivalents en un certain sens précis. (C'est une équivalence modulo des modifications sur des sous-suites de longueur uniformément bornée, quand on dresse une liste des polygones suivant leur degré de scibilité). Par exemple, on peut définir le degré de scibilité comme le nombre minimal d'étapes nécessaires pour construire un polygone à l'aide de la règle et du compas (c'est-à-dire le nombre de fois où l'on doit lever la main), en partant de son cercle circonscrit. On peut aussi considérer le nombre minimal d'étapes nécessaires pour faire la construction en partant du cercle inscrit. On peut d'autre part définir une complexité à partir de la formule donnant la longueur d'un côté du polygone à partir du diamètre du cercle circonscrit (ou, de nouveau, de celui du cercle inscrit). La complexité de la formule est dans ce cas le degré (comme nombre algébrique) de cette longueur exprimée en fonction du diamètre du cercle. On peut aussi s'intéresser à la complexité de la formule donnant l'aire du polygone au lieu de son côté. Kepler mentionne plusieurs de ces points de vue. Le parallèle entre la consonance d'un intervalle musical et la construction d'un polygone par la règle et le compas permet maintenant de transporter dans le domaine musical les diverses notions de "degré de scibilité" pour les polygones.

Il faut mentionner ici que l'on peut trouver dans certains textes de l'antiquité grecque une référence à la relation entre les constructions à l'aide de la règle et du compas et la mesure des intervalles musicaux. Par exemple, dans sa *Vie de Pythagore*, Jamblique (IIIe siècle ap. J. C.), décrivant le moment précis où Pythagore eut l'idée de la correspondance entre les intervalles musicaux et les nombres, écrit : "Alors qu'il (Pythagore) était plongé dans la réflexion et dans le calcul, cherchant à découvrir quelque instrument qui apporterait à l'ouïe un secours solide et infaillible, comme dans le cas de la vue qui a le secours du compas, de la règle ou du dipotre ..." ([16] p. 66). Je pense que la mention de la règle et du compas n'est pas une coïncidence, et j'ai une explication personnelle pour cette relation. Je crois que les figures géométriques qui sont constructibles à la règle et au compas sont exactement celles dont on peut vérifier à l'oeil nu si elles sont correctement dessinées ou non (disons, par une personne ayant un organe visuel moyennement constitué). Cela vient du fait que l'on peut mentalement dessiner des cercles et des lignes droites, et comparer avec ce que l'on voit. C'est la raison pour laquelle l'oeil humain est sensible à certaines proportions (raison double, triple, section dorée, etc.), qui sont toutes constructibles à la règle et au compas, par un petit nombre d'étapes. Un autre exemple : Nous sommes sensibles aux symétries, qui sont aussi vérifiables à la règle et au compas. Venons-en maintenant aux intervalles consonants. Je dis que les intervalles musicaux considérés comme les plus consonants (l'unisson, l'octave, la douxième, la quinte et la quarte) sont exactement ceux dont notre oreille peut reconnaître la justesse de façon presque parfaite. C'est l'une des raisons pour lesquelles les instruments à cordes tels que le violon sont accordés de telle manière que les cordes adjacentes forment des intervalles de quintes (dans le cas de la guitare, des quartes et une tierce majeure). Un violoniste, lorsqu'il doit accorder son instrument, commence par accorder une note (en général la note *la* de la seconde corde à vide), et ensuite il accorde les autres cordes en écoutant des quintes. Un claveciniste, lorsqu'il accorde son instrument, commence par accorder une note (en général, un *la* aussi) à l'aide d'un diapason. Ensuite, il accorde les autres cordes par un algorithme qui fait intervenir l'écoute d'unissons, d'octaves, de quintes et de quartes, et seulement de tels intervalles, ceci précisément parce que ce sont ceux à la justesse desquels son oreille est sensible.(Il doit par ailleurs *affaiblir* certaines quintes et *renforcer* certaines autres, suivant le tempérament qu'il utilise, mais ceci est une autre histoire.)[18] A propos de la justesse de cette écoute, on peut citer Euler, qui, dans son article *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* ([12] Sér. III Vol. I p. 512) écrit : "L'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour une proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi-imperceptible. Or, plus une proportion est simple, plus notre sentiment est aussi sensible et distingue de plus petites aberrations ; c'est la raison pourquoi on ne saurait supporter presque aucune aberration dans les octaves et on prétend que toutes les octaves soient exactes et qu'elles ne s'écartent point du tout de la raison double". Un peu plus loin, sur le même sujet, Euler écrit (p. 513) "Quand la proportion actuelle entre les sons qu'on entend est assez simple, comme de 2/3 ou 3/4 ou 4/5 etc., la proportion aperçue est aussi la même pour toutes les oreilles. Mais quand la proportion actuelle est fort compliquée, de sorte pourtant qu'elle approche beaucoup d'une proportion simple, alors l'oreille aperçevra cette proportion simple, sans remarquer la petite aberration de l'actuelle".

7.Complexité IV : Euler

Leonhard Euler (1707-1783) a commencé très jeune à travailler sur une théorie mathéma-

[18]En fait, il est logique de considérer, comme Euler le fait, que dans la classification des consonances, après l'octave, la douxième (octave + quinte) précède la quinte, et que l'oreille est plus sensible aux douxièmes qu'aux quintes. Comme le dit Euler, le rapport 3/1 est plus simple que le rapport 3/2, ce qui fait que l'intervalle 3/1 "est plus sensible à l'oreille que l'intervalle 3/2". (cf. la *Lettre à une princesse d'Allemagne*, 3 Mai 1760 ([12] Sér. III Vol. XI p. 17). Mais l'explication par les harmoniques est plus convaincante. On entend naturellement la douxième et non pas la quinte comme seconde harmonique. Dans cette même lettre, Euler écrit : "Les musiciens donnent à la quinte le second rang parmi les consonances, et l'oreille en est si agréablement affectée qu'il est fort aisé d'accorder une quinte. Ainsi, sur les violons, les quatre cordes montent par des quintes, et chaque musicien les met aisément d'accord par l'oreille seule. Cependant une quinte ne s'accorde pas si aisément qu'une octave, mais la quinte au-dessus de l'octave est plus sensible qu'une simple quinte, et l'on sait aussi par expérience, qu'ayant fixé le son C, il est plus aisé d'y accorder la quinte supérieure g que la simple G". Descartes, dans sa lettre de Janvier 1630 à Mersenne (cf. [8] Vol. I p. 108) écrit la même chose "la douxième est plus simple que la quinte", mais il précise : "Je dis plus simple, non pas plus agréable".

tique des fondements de la musique. En 1727, à l'âge de 20 ans, il présente à l'Université de Bâle un mémoire en Acoustique, intitulé *De sono* ([12] Sér. III Vol. I pp. 181-196). En 1731, il termine d'écrire un essai de 230 pages sur la musique, intitulé *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* (Essai d'une nouvelle théorie musicale, exposéee avec clarté selon les principes de l'harmonie les plus sûrs) [12] Sér. III Vol. I pp. 197-428. Cet essai est publié en 1739 à St. Petersbourg, et il attend encore, pour le lecteur moderne (comme d'ailleurs plusieurs autres textes musico-mathématiques du même genre), une traduction et un commentaire faits par de vrais mathématiciens. Dans une lettre à Daniel Bernoulli datée du 25 Mai 1731 ([12] Sér. IV A Vol. II p. 146), Euler écrit que ce mémoire a pour but d'étudier la musique comme une partie des mathématiques, en utilisant des déductions logiques à partir de principes premiers et infaillibles". C'est presque mot à mot ce que dit Rameau dans l'Introduction de son *Traité de l'Harmonie réduite à ses principes naturels* ([21] Vol. I). A part ce Traité, Euler a écrit près de 30 articles ou mémoires sur la musique (théorie, acoustique, propagation du son, etc.), sans compter ses *Lettres à la Princesse d'Allemagne* et sa correspondance avec Daniel Bernoulli.

Nous allons nous intéresser ici à une fonction définie dans son *Tentamen*, qui est associée aux intervalles musicaux. Elle mesure quelque chose qu'Euler appelle "suavitatis gradus" (degré de suavité) et que l'on pourrait aussi traduire, dans ce contexte, par "degré de consonance" (en ajoutant un sens de plus aux divers sens du mot consonance).[19] Euler commence par considérer les intervalles multiples (on rappelle que ce sont ceux dont la valeur numérique est de la forme $n/1$). Sa fonction associe à un tel intervalle de valeur numérique $n/1$, un entier noté $f(n/1)$. Encore une fois, le degré de consonance d'un intervalle de la forme $n/1$ sera grand quand le nombre $f(n/1)$ que la fonction lui attribue est petit. Pour comprendre la formule pour f, on commence par regarder sa valeur sur les premiers termes de la suite. Cette valeur tient compte du fait que plus le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir l'intervalle musical considéré à partir des consonances d'octave, de quinte et de quarte est petit, plus le degré de consonance de cet intervalle est élevé, et donc, plus la valeur que la fonction lui associe est petite. Il est évident que cela a un sens pour les petites valeur de n seulement, vu que pour n grand, le son n'est plus dans la limite des sons audibles. Revenons à la définition de la fontion f. Pour commencer, on considère l'unisson (que l'on peut en un sens considérer comme l'intervalle le plus consonant), de valeur numérique $1/1$; Euler lui associe le degré 1 ($f(1/1) = 1$). A l'intervalle d'octave, et que l'on peut considérer comme la première consonance après l'unisson, et dont la valeur est $2/1$, Euler associe le nombre 2 ($f(2/1) = 2$). La valeur suivante à considérer est $3/1$. C'est celle de l'intervalle de douxième, et on peut l'obtenir en juxtaposant deux intervalles consonants, l'octave et la quinte (on a $\frac{3}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2}$). Euler lui associe le nombre 3 ($f(3/1) = 3$), parce qu'on a besoin dans ce cas de 2 consonances de base, et d'une opération. La double octave (de valeur $4/2$) est un intervalle qui n'est pas plus compliqué à obtenir que l'intervalle de douxième : il suffit de juxtaposer deux intervalles d'octave (on a $\frac{4}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{1}$). La valeur $f(4/1)$ sera donc aussi égale à 3. Plus généralement, à un intervalle de valeur $2^n/1$. Euler associe la valeur $f(2^n/1) = n + 1$. En raisonnant par analogie, il définit la valeurs $f(n/1)$ pour n entier quelconque > 1 de la manière suivante. Si n est un nombre premier, alors $f(n/1) = n$. Si n est de la forme p^k avec p premier et k entier, alors $f(n/1) = k(p-1)+1$.

[19]Le terme "suavité", appliqué à un intervalle musical, est déjà utilisé par Kepler, dans son *Harmonie du monde*, Livre III, Chapitre 1, Axiome II, cf. [17] p. 95.

Plus généralement si n est de la forme $p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$, où $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers et $k_1, \dots, k_r$ des entiers positifs, on prend $f(n/1) = k_1(p_1 - 1) \dots k_r(p_r - 1) + 1$. On voit facilement que si l'on pose $g(n) = f(n/1) - 1$, on a la formule $g(mn) = g(m) + g(n)$ pour tout m et n. Cet aspect logarithmique de la fonction g reflète l'origine musicale qui a motivé la définition, c'est-à-dire le fait que la valeur numérique de la somme (juxtaposition) de deux intervalles musicaux est le produit des valeurs numériques de ces intervalles.

Au-delà des applications musicales (qui, rappelons-le encore, n'ont un sens que pour les petites valeurs de n), on se retrouve avec une fonction f qui décrit, en un sens précis de ce terme, la "complexité" d'un nombre entier, en fonction de sa décomposition en nombres premiers. Il n'y a aucun mal à considérer qu'indépendamment de ces applications musicales, cette formule, comme d'autres proposées par Euler, possède un intérêt purement mathématique, et en tant que mathématiciens, on peut se réjouir du fait que la musique fournit un prétexte à des définitions abstraites et purement mathématiques, comme celles de fonctions aux propriétés intéressantes et esthétiquement satisfaisantes pour des esprits orientés vers l'abstraction.
Comme on l'a mentionné ci-dessus, Euler considère ensuite des accords de deux sons quelconques, c'est-à-dire des intervalles qui ne sont pas nécessairement multiples, et, plus généralement, des accords de plus de deux sons. La définition de la complexité consiste alors à prendre le plus petit multiple commun m des entiers représentant l'intervalle ou l'accord, et à se ramener ensuite au cas précédent en prenant $f(m/1)$. La justification de la formule générale fait intervenir la décomposition du son en fondamental et harmoniques et une telle discussion dépasserait le cadre de cet exposé.

Notons que Christiaan Huygens introduit dans son *Traité de la consonance* une notion de *degré de consonance*, qui lui aussi mesure une certaine complexité, et qui s'apparente à celui d'Euler et à celui de Rameau, qui est basé sur la décomposition du son en fondamental et harmoniques. Ici, les intervalles les plus consonants sont ceux dont les valeurs numériques (représentés par des fractions irréductibles) sont de la forme p/q, avec p et q entiers ($p > q$) et où q de est la forme 2^n. Ceci est relié à la décomposition d'un son en fondamental en harmoniques, puisque les nombres de la forme $p/2^n$ sont les valeurs numériques des intervalles de la suite des fréquences harmoniques $f, 2f, 3f, \dots$ à l'addition d'une octave près (on rappelle que cette dernière opération correpond à la division par une puissance de 2). Parmi les intervalles de valeur $p/2^n$, plus n est petit, plus le degré de consonance est élevé. D'après cette théorie, l'intervalle le plus consonant est l'octave mais, par exemple, la tierce majeure (de rapport 5/4) est plus consonante que la quinte (de rapport 4/3).

8.Esthétique mathématique : la théorie de Birkhoff

Dans sa communication au Congrès International des Mathématiciens de Bologne (1928) et dans une série d'articles qui ont suivi (voir [7] Vol. 3), G. D. Birkhoff a élaboré une théorie esthétique quantitative, applicable à des champs aussi divers que la poésie, les polygones, les réseaux dans le plan, les formes des vases, le rythme, l'harmonie, la mélodie et la morale. Cette théorie est dans la pure tradition platonicienne, où le beau se mesure en termes de symétrie, d'équilibre et de proportions. Elle fait intervenir une notion de *complexité*, qui est mesurée par une quantité que Birkhoff note C, et une notion d'*ordre*, qui est mesurée par une quantité qu'il note O et qui tient compte des symétries de l'objet que l'on perçoit, de facteurs qu'il appelle "externes", c'est-à-dire indépendants du milieu ambiant, ainsi que des facteurs psychologiques. La *mesure esthétique* est alors le rapport

$$M = O/C.$$

Dans le cas particulier de la classe d'objets constituée par les accords de deux sons, la complexité C est considérée comme constante, et on a donc $M = O$. Si on se restreint à la sous-classe d'accords dont l'étendue ne dépasse pas une octave, le fait de prendre l'accord complémentaire (par rapport à l'octave)[20] est considéré comme une symétrie, et par conséquent un accord et son complémentaire ont même mesure esthétique. Ainsi, l'unisson et l'octave ont même mesure esthétique, de même qu'une seconde mineure et une septième majeure. Birkhoff décrit la mesure esthétique M, dans le cas des accords de deux notes, comme un “degré de consonance”. La classification qu'il obtient (pour les accords d'amplitude ne dépassant pas une octave), par valeurs décroissante de M, est la suivante :

1. tierces majeure et mineure,
2. quinte diminuée et quarte augmentée,
3. sixtes majeure et mineure,
4. quarte, quinte, unisson et octave,
5. seconde majeure et septième mineure,
6. seconde mineure et septième majeure.

Ce tableau considère les intervalles en dehors de tout contexte particulier. Mais comme Birkhoff le dit, on peut développer des théories plus fines en introduisant des paramètres, et la classification en fonction du degré de consonance peut en être modifiée. Par exemple, on peut tenir compte du fait que l'oreille qui écoute l'accord donné est habituée ou non à la gamme diatonique occidentale. On peut aussi supposer que les intervalles ne sont pas pris tout seuls, mais en référence à une tonalité ambiante. Ainsi, certains accords consonants, quand ils sont joués dans une tonalité qui leur est étrangère, peuvent devenir dissonants.[21]

Appendice : Sur la dissonance

Dans cet article, j'ai parlé surtout de consonnance, mais j'aurais pu aussi bien parler de dissonance, sujet sur lequel il y a une littérature abondante. De même qu'il y a une théorie de la complexité pour les consonances, il y en a pour les dissonances. Diderot écrit dans l'article CONSONANCE de l'*Encyclopédie* [14] : “La propriété principale de toutes

[20] ce que Descartes appelle l'*ombre*, dans son *Abrégé de musique*. Par exemple, la quarte est l'ombre de la quinte. Rameau a utilisé aussi cette terminologie.

[21] On peut à ce propos mentionner Descartes qui, dans une lettre à Mersenne (Octobre 1631 ([8] Vol. I p. 223), écrit : “Touchant la douceur des consonances, il y a deux choses à distinguer : à savoir, ce qui les rend plus simples et accordantes, et ce qui les rend plus agréables à l'oreille. Pour ce qui rend les consonances plus agréables, cela dépend des lieux où elles sont employées, et il se trouve des lieux où même les fausses quintes et autres dissonances sont plus agréables que les consonances, de sorte qu'on ne saurait déterminer absolument qu'une consonance soit plus agréable que l'autre. On peut bien dire toutefois que, pour l'ordinaire, les tierces et les sixtes majeures sont plus agréables que les quartes, que dans les chants gais les tierces et sixtes majeures sont plus agréables que les mineures, et le contraire dans les tristes [...] Mais on peut dire absolument quelles consonances sont les plus simples et plus accordantes ; car cela ne dépend que de ce que leurs sons s'unissent davantage l'un avec l'autre, et qu'elles s'approchent plus de la nature de l'union”. On peut aussi mentionner Huygens, qui écrit dans une note à sa *Théorie de la consonance*, cf. [15] p. 35 : “Il faut distinguer entre la beauté des consonances étant entendues seules ou accompagnées d'autres ou suivies ou précédées d'autres, on peut faire entendre la sixte en tel lieu ou après tel autre accord qu'elle ne paraîtra nullement consonante”.

les consonances c'est de satisfaire l'oreille et de produire des repos. Les dissonances au contraire inquiètent l'ouïe, et font dévier des tons qui ramènent au repos". Même si, comme on l'a déjà vu, pour Rameau, "tout ce qui n'est pas *consonance*, est *dissonance*", d'autres auteurs n'ont pas considéré la dissonance comme le contraire de la consonance. On peut se nouveau citer Euler qui, dans son article *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* ([12] Sér. III Vol. I p. 508), écrit : "Les dissonances ne diffèrent des consonances que parce que celles-ci sont renfermées en des proportions plus simples, qui se présentent plus aisément à l'entendement, pendant que les dissonances renferment des proportions plus compliquées et partant plus difficiles à comprendre. Ce n'est donc que par degré que les dissonances diffèrent des consonances ; et il faut que les unes et les autres soient perceptibles à l'esprit. Plusieurs sons qui n'auraient aucun rapport perceptible entre eux feraient un bruit confus absolument intolérable dans la musique. De là il est certain que les dissonances que j'ai en vue contiennent des proportions perceptibles, sans quoi on ne les saurait admettre dans la musique". Il convient de noter d'ailleurs que la dissonance occupe en théorie de la musique une place prépondérante par rapport à la consonance. Ainsi, les traités de composition de la musique classique occidentale (Zarlino, Jean des Murs, Rameau, etc.) contiennent généralement des règles de dissonance (préparation des dissonances, résolution des dissonances, etc.) plutôt que des règles de consonance. La raison est facile à comprendre, c'est que, comme Rousseau l'écrit, dans son *Dictionnaire de Musique*, "Si les dissonances sont employées dans l'harmonie, elles ne le sont qu'avec des précautions dont les consonances, toujours agréables par elles-mêmes, n'ont pas également besoin". Et plus loin, à l'article DISSONANCE, sur l'utilité de celle-là : "choquez l'oreille pour la flatter ensuite plus agréablement" ([22] p. 772). On peut parler de va-et-vient entre consonance et dissonance, et sur ce sujet, on peut de nouveau citer Diderot qui, dans ses *Principes généraux d'acoustique* ([10] p. 84), écrit : "On est quelquefois forcé d'user de rapports composés, tantôt pour faire valoir les rapports simples, tantôt pour éviter la monotonie, tantôt pour ajouter à l'expression, et c'est de là que naît en musique l'emploi que nous faisons de la dissonance ; emploi plus ou moins fréquent, mais presque toujours nécessaire : mais la dissonance, selon les musiciens, veut ordinairement être pratiquée et sauvée ; ce qui, bien entendu, ne signifie rien autre chose que, si l'on a de bonnes raisons d'abandonner les rapports simples pour en présenter à l'oreille de composés, il faut revenir sur-le-champ à l'emploi des premiers". Les dissonances peuvent procurer autant de plaisir que les consonances, et on peut aussi citer, à propos de cet équilibre entre consonance et dissonance, le passage suivant du *Traité de l'homme* (1664) de Descartes ([8] Vol. XI p. 151) : "Ce ne sont pas absolument les choses les plus douces qui sont les plus agréables aux sens, mais celles qui les chatouillent d'une façon mieux tempérée : ainsi que le sel et le vinaigre sont souvent plus agréables à la langue que l'eau douce. Et c'est ce qui fait que la musique reçoit les tierces et les sixtes, et même quelquefois les dissonances, aussi bien que les unissons, les octaves et les quintes".

Terminons cette parenthèse sur la dissonance par une citation du mathématicien et philosophe Jésuite L. B. Castel, dans un recensement du *Traité de l'Harmonie réduite à ses principes naturels* de Rameau : "Il est vrai qu'une harmonie toute composée d'accords consonnants serait insipide par trop de douceur ; on a donc recours aux dissonances..." et un peu plus loin : "C'est la dissonnance, qui dégrade heureusement la musique d'une perfection si defectueuse, les ombres dans la peinture réchauffent les couleurs, les dissonnances font de la musique le même effet à l'égard des consonances. C'est par leur moyen que le génie prend son essor hors de la modulation, et se fraye de nouvelles routes, ..." (Journal de Trévoux (1722), cf. [21] Vol. I, p. XLI).

Références

[1] L. B. Alberti, De l'art d'édifier (De re aedificatoria), traduction, préface et notes par Pierre Caye et Françoise Choay, Seuil, 2004.

[2] J. Le Rond d'Alembert, Eléments de musique suivant les principes de M. Rameau, 1752 (édition remaniée 1779), Collection Les Introuvables, Editions d'Aujourd'hui, Plan-de-la-Tour, 1984.

[3] Aristide Quintilien, *La musique*, Traduction F. Duysinx, Bibliothèque de la Faculté de philosophie et lettres de l'université de Liège No. 276, éd. Librairie Droz, Genève, 1999.

[4] Aristote, Problèmes (en deux Tomes), texte établi et traduit par P. Louis, Paris, les Belles Lettres, 1993.

[5] Aristote, Petits traités d'histoire naturelle (Parva naturalia), traduction et présentation par P. M. Morel, GF Flammarion, Paris 2000.

[6] Aristote, de l'Âme, traduction et notes J. Tricot, Librairie J. Vrin, Paris, réédition 1992.

[7] G. D. Birkhoff, Collected Mathematical Papers, Volume III (The four color problem, Miscellaneous papers), American Mathematical Society, 1950, reprinted by Dover, N. Y. 1968.

[8] R. Descartes, Oeuvres, publiées par Ch. Adam et P. Tannery, Nouvelle édition, Librairie J. Vrin, Paris, 1996.

[9] R. Descartes, Abrégé de musique (Compendium musicae), traduction, présentation et notes par F. de Buzon, Presses Universitaires de France, Paris, 1987.

[10] D. Diderot, Oeuvres complètes, Vol. IX (Mathématiques, physiologie, etc.), Garnier Frères, Paris, 1875.

[11] Euclide, La Section du canon, traduction anglaise dans Greek musical writings, Vol. II, p. 190-208, edited by Andrew Barker, Cambridge University press, 1989.

[12] L. Euler, Opera Omnia (Oeuvres complètes), publiées par l'Académie des Sciences Suisse, ed. Teubner, Leipzig & Berlin, (près de 80 volumes déjà publiés), 1911 etc.

[13] Galilée (Galileo Galilei) Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles, traduction Maurice Clavelin, Librairie Armand Colin, Paris, 1970.

[14] Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une Société de gens de lettres, Mis en ordre et publié par M. Diderot, et, quant à la partie mathématique, par M. d'Alembert, Paris, Briasson, 1751-1780.

[15] Christiaan Huygens, Oeuvres Complètes, publiées par la Société Hollandaise des Sciences, Tome XX (Musique et mathématiques, musique, mathématiques de 1666 à 1695), La Haye, ed. Martinus Nijhoff, 1940.

[16] Jamblique, Vie de Pythagore, Introduction, traduction et notes par L. Brisson et Ph. Segonds, Paris, les Belles Lettres, 1996.

[17] J. Kepler, L'Harmonie du monde, traduction Jean Peyroux, Librairie A. Blanchard, Paris, 1977.

[18] Platon, dans Oeuvres Complètes, traduction et Notes A. Rivaud, éd. Belles Lettres, Paris 1963.

[19] Les Présocratiques, édition établie par J. P. Dumont, textes traduits par J.P. Dumont, D. Delattre et J.L. Poirier, Bibliothèque de la Pleiade, éd. Gallimard 1988.

[20] Ptolémée (Claudius Ptolemaeus), Harmonique, traduction anglaise dans Greek musical writings, Vol. II, p. 271-371, edited by Andrew Barker, Cambridge University Press, 1989.

[21] J. Ph. Rameau, Complete Theoretical Writings (6 volumes), ed. Erwin J. Jacobi, American Institute of Musicology, 1967-1972.

[22] J. J. Rousseau, Oeuvres Complètes, Tome V (Écrits sur la musique, la langue et le théâtre), Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, Paris 1995.

[23] Théon de Smyrne, Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon, éd. bilingue (grec-français) établie par J. Dupuis, Paris 1892, reproduite par les Editions Culture et Civilisation, 115 Av. Gabriel Lebon, Bruxelles 1966.

Athanase Papadopoulos
Institut de Recherche Mathématiques Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7 rue René Descartes
F 67084 Strasbourg Cedex France
papadopoulos@math.u-strasbg.fr

Quelques exemples d'utilisation des mathématiques dans la théorie et la composition musicales

Rachel Tacquard

Résumé : Dans cet article, je vais donner des exemples d'utilisation de structures algébriques dans la composition et dans la théorie musicale. En particulier, je mentionnerai certains aspects de la musique de Messiaen et de Xenakis, ainsi que le travail du mathématicien Ronald C. Read.

Introduction

Depuis l'Antiquité grecque et jusqu'à la fin du Moyen Âge, la musique n'était pas dissociée des sciences : elle faisait partie de l'enseignement et des traités de mathématiques, à égalité avec l'arithmétique, l'astronomie et la géométrie. Elle a motivé une certaine quantité de recherches dans le domaine de la physique, mais aussi en mathématiques, par exemple sur les équations diophantiennes ou la théorie des moyennes. Au VI^e siècle avant Jésus-Christ, Pythagore fut celui qui inaugura cette longue amitié entre mathématiques et musique en trouvant une relation entre les intervalles musicaux et les fractions d'entiers. Lui et ses disciples, les pythagoriciens, se sont beaucoup penchés sur la théorie de la musique et ont ataché un grand intérêt à la symbolique des nombres qui a été le moteur de beaucoup de leurs recherches. (Plus tard, Bach mais aussi Bartok, Berg et bien d'autres ont fait jouer un grand rôle aux nombres dans leur musique.)

Ce lien étroit n'a pas totalement disparu avec l'évolution des mathématiques ; il a au contraire presque évolué en parallèle avec les mathématiques. L'analyse musicale, ainsi que la composition, ont par exemple utilisé des éléments de théorie des probabilités ou celle des groupes. Nous nous intéressons ici en particulier à ce dernier point. À l'aide de quelques exemples, nous essayerons de donner un aperçu de l'utilisation des mathématiques, et plus particulièrement des groupes, dans le domaine musical : dans la composition, avec les approches de Messiaen et Xenakis, et dans les problèmes de dénombrement générés par des questions de musique.

1. Composition et groupes chez Messiaen

Né en 1908 en Avignon, mort en 1992, Olivier Messiaen a été l'un des grands compositeurs de musique du XX^e siècle. Également théoricien et professeur, de nombreux musiciens sont passés dans ses classes, à l'image de Stockhausen et Xenakis. Ses idées ont énormément enrichi la musique contemporaine pendant de nombreuses années. Dans ces quelques pages, nous allons aborder certains aspects de sa théorie qui font appel à la théorie des groupes.

Avant d'en dire plus, nous allons rappeler le formalisme mathématique qui va nous servir à décrire certaines caractéristiques des techniques de composition de Messiaen. Il s'agit de représenter chaque note de la gamme chromatique du tempérament égal par un entier relatif modulo 12. C'est Milton Babbitt, compositeur, musicologue et mathématicien qui a introduit de manière systématique cette façon de faire, et ce dans le cadre de la musique dodécaphonique.

Fig. 1 – La gamme chromatique

Ainsi, les notes do, do ♯, ré, ré ♯, mi, fa, fa ♯, sol, sol ♯, la, la ♯ et si sont représentées respectivement par les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11 :
Deux notes sont donc “égales” si elles diffèrent d'un multiple de l'octave, tout comme deux entiers sont égaux dans le groupe cyclique $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ s'ils diffèrent d'un multiple de 12. Cette notion est plutôt naturelle car, par exemple, on a parfois du mal à reconnaître si deux notes, jouées par des instruments différents, sont identiques ou diffèrent d'une octave. Il nomme *pitch class* (ce qui signifie “classe de hauteur”, pour la hauteur de la note) la classe d'équivalence d'une note, représentée par la classe correspondante dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, et *pitch class set* un ensemble de ces classes de hauteurs, représenté pas un sous-ensemble du groupe $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

On peut alors constater que si on néglige la fréquence exacte de la note, i.e. si on la ramène aux notes de base modulo l'octave, on a effectivement une structure de groupe sur les notes de la gamme chromatique.

On exprime donc de façon formelle ce qui s'appelle la transposition en musique, c'est-à-dire le déplacement d'un ensemble de notes d'un ou de plusieurs demi-tons (plus haut ou plus bas) : il s'agit de la translation modulo 12 dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. L'ensemble des transpositions est donc un groupe engendré par $x \mapsto x+1$. De même, l'inversion correspond à l'opération $x \mapsto -x$.

Il faut remarquer que Messiaen n'a jamais utilisé ce langage mathématique pour décrire par exemple ce qu'il appelle les modes à transposition limitée ou les permutations, ce qui ne l'a pas empêché d'en donner une description précise en langage musical dans plusieurs de ses ouvrages tout en étant conscient de la nature mathématique de certaines propriétés (dans [4]).

1.1. Modes à transposition limitée

Dans son *Traité de rythme, de couleur et d'ornithologie*, Messiaen a décrit les modes comme étant une succession de notes distinctes qui permettent de décrire l'atmosphère d'une œuvre musicale.

On l'aura compris, Messiaen portait un intérêt particulier aux modes à transposition limitée : il les a définis comme étant une suite de notes toutes différentes, telles que si on les transpose un petit nombre de fois (i.e. par un diviseur strict de 12 : 2, 3, 4 ou 6), on retombe sur les mêmes notes, et ce en identifiant la gamme chromatique tempérée de 12 notes à $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. Ainsi, un mode k fois transposable est tel que si on lui applique la translation $x \mapsto x+k$, on obtient les mêmes notes, à permutation circulaire près. L'expression “transposition limitée” se justifie par le fait qu'on ne peut transposer indéfiniment sans retomber sur les mêmes notes. C'est dans ce genre d'impossibilités que Messiaen trouvait un charme particulier. Il dit lui-même dans [4] : « C'est une musique chatoyante que nous cherchons, donnant au sens auditif des plaisirs voluptueusement raffinés. [...] Ce charme [des impossibilités], à la fois voluptueux et contemplatif, réside particulièrement dans certaines impossibilités mathématiques des domaines modal et rythmique ». En effet, l'oreille humaine est sensible aux symétries qui ne sont pas d'ordre trop grand, c'est-à-dire qui sont appréhendées plus facilement, ce qui confère à la musique qui en utilise un intérêt particulier.

On va voir qu'il est intéressant de décrire les modes à transposition limitée en termes d'éléments de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, car cela permet de mettre en évidence les symétries de tels modes.

Premier mode

Ce mode est deux fois transposable : il est invariant par l'application $t : x \mapsto x + 2$. Précisons que l'on considère que deux suites de notes sont équivalentes si elles sont égales à translation près. Dans le cas des modes, cela implique que deux suites d'éléments de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ (c'est-à-dire de notes au sens des pitch class) représentent le même mode si elles sont égales modulo un entier n, et sont deux transpositions différentes du même mode. Ceci est bien une relation d'équivalence, et nous permet donc de dire que, modulo cette relation, le premier mode est $\{0, t(0), t^2(0), t^3(0), t^4(0), t^5(0)\}$, l'orbite de 0. Il s'écrit $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, ou encore do, ré, mi, fa ♯, sol ♯, si ♭.

Deuxième mode

C'est le mode préféré de Messiaen. Dans [4], il fait remarquer que d'autres compositeurs s'en sont aussi déjà servi, plus ou moins consciemment selon les cas, comme Ravel, Strasvinsky ou Scriabine.

Le mode 2 est trois fois transposable : c'est-à-dire que sa représentation modulo 12 est un sous-ensemble de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ invariant par $u : x \mapsto x + 3$. On prend pour cette suite la réunion des orbites de 0 et de 1 pour l'action de l'application de u. C'est donc $\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$ ou bien do, ré ♭, mi ♭, mi, fa ♯, sol, la, si ♭ :

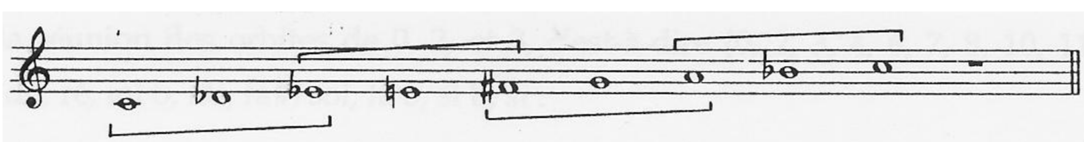

Fig. 2 – Première transposition du deuxième mode

Il se divise en groupes "symétriques" (d'après l'appellation de Messiaen) de deux façons : la première façon consiste à séparer le mode en quatre parties de deux notes : $\{0, 1 \,|\, 3, 4 \,|\, 6, 7 \,|\, 9, 10\}$. Ce qui caractérise ces groupes, c'est qu'on peut leur appliquer la translation u, et leur configuration est invariante par u. La deuxième manière de grouper est de le faire en 4 groupes de 3 notes chacun : $\{0, 1, 3 \,|\, 3, 4, 6 \,|\, 6, 7, 9 \,|\, 9, 10, 12\}$ (voir la figure 2). La même translation aura les mêmes effets sur ce découpage.

On l'a évoqué un peu plus haut, un mode se présente sous plusieurs formes équivalentes. La première transposition du deuxième mode est : $\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$. C'est l'état initial représenté sur la figure 2.

La deuxième est la même décalée de $+1$ (figure 3). La troisième est représentée sur la figure 4.

FIG. 3 – Deuxième transposition du deuxième mode

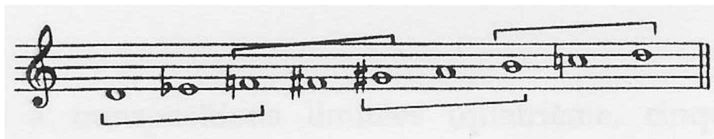

FIG. 4 – Troisième transposition du deuxième mode

La quatrième transposition du deuxième mode est en fait la même suite que la première, étant donné que l'on a trois fois décalé de $+1$, ce qui veut dire que l'on a appliqué u à $\{0,1,3,4,6,7,9,10\}$ qui, par définition, est invariant par u à permutation circulaire près :

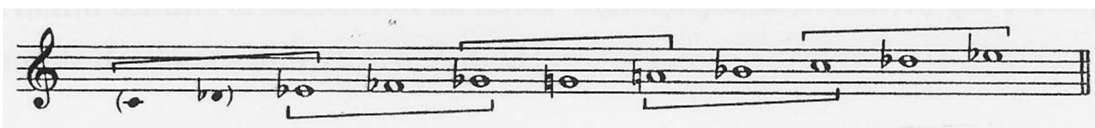

FIG. 5 – Quatrième transposition du deuxième mode

Troisième mode

Celui-ci est quatre fois transposable : il est représenté par une suite de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ invariante par l'application $w : x \mapsto x+4$. On prend donc comme éléments de ce mode la réunion des orbites de 0, 2 et 3, c'est-à-dire $\{0,2,3,4,6,7,8,10,11\}$ ou encore do, ré, mi ♭, mi, fa ♯, sol, la ♭, si ♭, si :

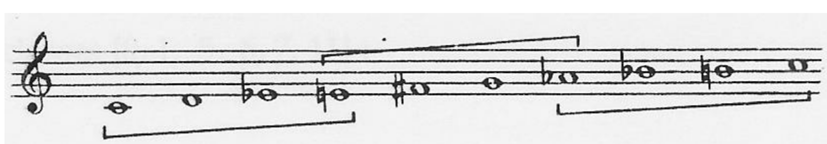

FIG. 6 – Troisième mode

Il se divise aussi de deux manières en plusieurs groupes symétriques, qui sont, dans le premier cas, trois groupes de trois notes : $\{2,3,4\,|\,6,7,8\,|10,11,0\}$. Ici c'est la translation w qui laisse invariante la configurartion de ces groupes. Il en est de même dans le deuxième découpage illustré sur la figure : $\{0,2,3,4\,|\,4,6,7,8\,|\,8,10,11,12\}$.

À nouveau, le mode peut se présenter sous plusieurs formes équivalentes, qui en sont différentes transpositions : la première transposition est la forme de base $\{0,2,3,4,6,7,8,10,11\}$. La deuxième transposition du troisième mode est $\{1,3,4,5,7,8,9,11,0\}$. La troisième est

$\{2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 0, 1\}$, et la quatrième est $\{3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 1, 2\}$. Tout comme pour le deuxième mode à transposition limitée, les transpositions suivantes seront représentées par les mêmes ensembles d'entiers modulo 12 que les première, deuxième, etc du fait de l'invariance du mode par une translation de $+4$.

Les autres modes à transposition limitée (quatrième, cinquième, sixième et septième) sont tous les quatre six fois transposables. On n'en aura pas d'autres, car 6 est le plus grand diviseur strict de 12. Ils se divisent chacun en groupes symétriques selon le principe qui a déjà été expliqué pour les deuxième et troisième modes.

Quatrième mode

Il est défini comme la succession de notes do, ré ♭, ré, fa, fa ♯, sol, la ♭, si, qui correspond à l'ensemble de classes $\{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 11\}$:

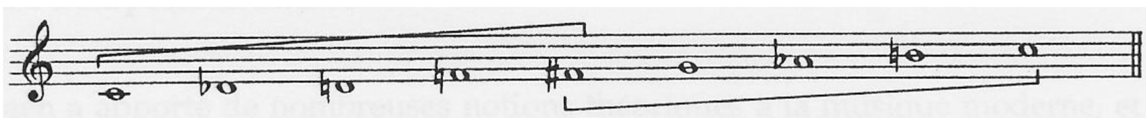

Fig. 7 – Quatrième mode

C'est l'union des orbites de 0, 1, 2 et 5 relativement à $x \mapsto x + 6$.

Cinquième mode

Il est défini comme la succession de notes do, ré ♭, fa, fa ♯, sol, si, qui correspond à l'ensemble de classes $\{0, 1, 5, 6, 7, 11\}$:

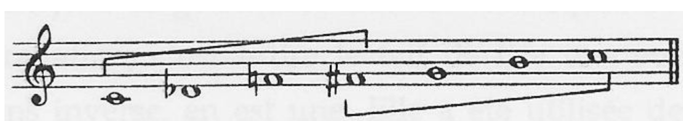

Fig. 8 – Cinquième mode

C'est l'union des orbites de 0, 1 et 5 relativement à $x \mapsto x + 6$.

Sixième mode

Il est défini comme la succession de notes do, ré, mi, fa, fa ♯, sol ♯, la ♯, si, qui correspond à l'ensemble de classes $\{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11\}$ (figure 9). C'est l'union des orbites de 0, 2, 4

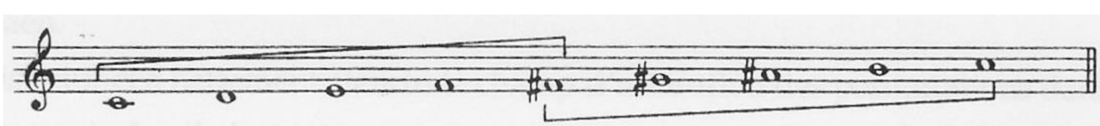

Fig. 9 – Sixième mode

et 5 relativement à $x \mapsto x + 6$.

Septième mode

Il est défini comme la succession de notes do, ré ♭, ré, mi ♭, fa, fa ♯, sol, la ♭, la, si, qui correspond à l'ensemble de classes $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$ (figure 10). C'est l'union des

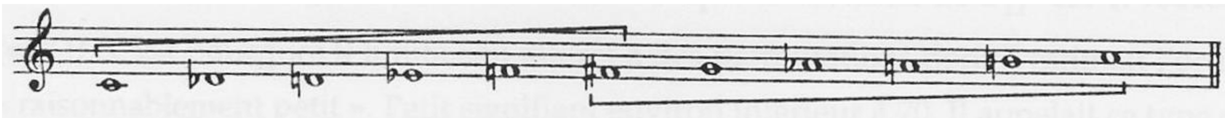

FIG. 10 – Septième mode

orbites de 0, 1, 2, 3 et 5 relativement à $x \mapsto x + 6$.

Pour ces quatre modes, on ne présentera pas les différentes formes transposées, car elles sont nombreuses, mais elles se définissent exactement comme pour les premiers modes à transposition limitée.

Messiaen a apporté de nombreuses notions théoriques à la musique moderne, et les modes à transposition limitée ne sont pas les seules qui présentent un aspect mathématique. Nous allons en aborder une autre qui est l'emploi des groupes de permutations.

1.2. Les permutations

Les permutations ont joué un grand rôle dans les techniques de composition de Messiaen. La rétrogadation, c'est-à-dire le fait de lire une succession d'éléments musicaux dans le sens inverse, en est une. Elle a été utilisée depuis déjà quelques siècles par bon nombre de compositeurs, et Messiaen aussi y a trouvé un grand intérêt, particulièrement dans les situations non rétrogradables : il s'agit de celles qui ont en fait une "symétrie", c'est-à-dire que la succession rétrogradée est égale à elle-même. Dans cette situation, c'est à nouveau le « charme des impossibilités » (impossibilité de rétrograder sans retomber sur les mêmes successions) qui fascinait Messiaen.

Mais celui-ci a nettement étendu le champ d'utilisation des permutations dans une œuvre musicale : il s'est intéressé aux permutations en général. À partir d'un motif de base qu'il permutait, il effectuait certaines variations sur un même "thème" dans ses compositions. De plus, il ne s'agissait pas seulement pour Messiaen de permuter une suite de notes, un pitch class set, comme vu précédemment ; il a également appliqué cette opération à des successions de rythmes, d'intensités, de durées, etc.

Là non plus, il n'a pas étudié ces objets — les permutations — de façon mathématique ; mais il avait quand même les moyens d'en déterminer certaines propriétés. Ainsi, il avait lui-même constaté — sans le dire ainsi — que le cardinal de $\mathfrak{S}_{12}$ est $12! = 479001600$; c'est pourquoi il limita son intérêt à des permutations dont il estimait l'ordre « raisonnablement petit », "petit" signifiant inférieur à 70. Il appelait ce type de permutations des permutations symétriques.

La rétrogradation en est une et son ordre est 2. En effet, si on se place dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ pour représenter les classes de hauteur, cette application associe à une suite $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ du groupe cyclique, la suite renversée $(n_k, n_{k-1}, \ldots, n_1)$. Une nouvelle rétrogradation produit alors la suite de départ $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Si on appelle f l'application rétrogradation, on peut donc dire que $f^2 = \text{id}$, c'est-à-dire que l'ordre de f est 2.

D'autres permutations ont particulièrement attiré l'attention de Messiaen : ce sont celles qui, étant donnée une succession d'objets, lui attribuent la succession qui commence par l'élément du milieu, puis alternativement par un élément de gauche et de droite. Une telle permutation associe (dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$) à $1, 2, 3$ la suite $2, 1, 3$. En nommant $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ cette permutation, on peut écrire

$$1, 2, 3 \xrightarrow{\sigma} 2, 1, 3 \xrightarrow{\sigma} 1, 2, 3 \ ,$$

ce qui montre que la permutation est d'ordre 2. On peut encore présenter pour finir un autre exemple (en gardant σ comme nom pour l'application) :

$$1, 2, 3, 4 \xrightarrow{\sigma} 2, 3, 1, 4 \xrightarrow{\sigma} 3, 1, 2, 4 \xrightarrow{\sigma} 1, 2, 3, 4 \ .$$

Cette fois, $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ est d'ordre 3.

Nous avons donc déjà pu nous faire une idée de la forme que prennent les mathématiques dans la composition. On l'a plusieurs fois signalé, Messiaen n'a jamais utilisé le langage mathématique pour présenter ses théories. D'autres que lui, en revanche, en ont fait un usage plus explicite. Nous allons aborder maintenant une partie des théories de composition d'un autre grand nom de la musique du XX[e] siècle, Iannis Xenakis.

2. La symbolique dans la composition chez Xenakis

Iannis Xenakis est connu par le grand public pour son utilisation dans la composition d'œuvres musicales de processus probabilistes. Ingénieur, musicien mais aussi architecte, il a cherché à faire intervenir les différentes connaissances qu'il avait acquises dans sa musique. Dans son livre *Musique formelle* [10], outre les questions stochastiques, il consacre un chapitre à ce qu'il appelle la musique symbolique (c'est ce que nous allons aborder). Il y pose des structures mathématiques sur des objets de nature musicale, et ce dans le but d'avoir des « outils pour la meilleure compréhension des travaux du passé et pour la construction d'une nouvelle musique ». En d'autres termes, il se crée des objets formels qui lui permettront d'aborder l'analyse et la composition d'œuvres. Nous sommes conscients du fait que les idées de Xenakis que nous allons essayer d'exposer ici ne sont pas toujours ni rigoureuses ni claires, et qu'il reste beaucoup à faire pour les rendre correctes du point de vue mathématique. Mais l'important pour nous est de voir que même sans être rigoureuses, ces idées ont donné naissance à des compositions musicales intéressantes et chargées d'émotion, qui sont jouées et enregistrées.

2.1. Composition d'événements sonores

On considère un événement sonore de durée finie, sur lequel on ne pose aucun jugement qualitatif. Si l'on réitère ce même événement, que l'on nomme a, et si l'on ne tient pas compte de la notion de temps, on obtient un simple accolement de ces événements. On note cela $a \vee a$, $\vee$ signifiant que les deux événements sont l'un à coté de l'autre, hors du temps. On a donc une loi de composition $\vee$ sur l'ensemble des événements sonores de durée finie.

On considère maintenant en plus un deuxième événement sonore b distinct de a. On demande comme axiome pour cette loi la commutativité, car on ne tient pas compte du temps : on peut écrire $a \vee b = b \vee a$, car cela n'apporte rien de nouveau de les accoler dans un sens ou dans l'autre si l'on exclut le temps. On constate donc que la loi de composition introduite ci-dessus est commutative.

Si l'on a trois événements distincts a, b et c, on peut considérer que $a \vee b$ constitue un nouvel élément, et alors il est possible de combiner celui-ci avec c : on effectue $(a \vee b) \vee c$. Cette opération "ne produit rien de plus", on a $(a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$ et $a \vee (b \vee c) = a \vee b \vee c$, autrement dit, la loi est associative.

Si par contre on replace les événements a, b et c dans le temps, on n'aura bien sûr plus la commutativité : Xenakis exprime cela : $a \top b \neq b \top a$, le symbole $\top$ étant une loi de composition signifiant "avant".

Xenakis considère ensuite une notion un peu plus subtile : il faut se détacher de notre « expérience traditionnelle » d'une relation biunivoque entre « événements et instants » et considérer le temps indépendamment des événements. En fait, il faut alors voir trois événements comme séparant le temps en deux parties (entre les événements) ; ainsi il revient au même de faire passer un événement avant un autre, ou l'inverse, ce qui nous donne la commutativité et l'associativité : $a \top b = b \top a$ et $(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$.

Si l'on prend alors comme élément neutre le son "vide", on peut voir l'ensemble des événements sonores comme un monoïde. C'est ce que Xenakis considère comme étant hors du temps, inversement à la situation qui lie un événement à un instant et qui est dans le temps.

2.2. Notion d'intervalle

L'événement sonore en lui-même n'étant pas très fécond en informations, il est plus intéressant de prendre en compte ses qualités : elles peuvent être nombreuses et en font partie par exemple le ton, la durée, le timbre, ou encore, d'après Xenakis, la variabilité, la densité... Il nous suffira ici d'étudier de plus près l'une de ces qualités, et ce que nous en dirons pourra s'étendre aux autres. Le choix du musicien a été de s'occuper du ton (c'est-à-dire de la hauteur).

L'objet de ce paragraphe est de parler des intervalles entre les tons (c'est-à-dire entre des fréquences). Pour pouvoir faire cela, il nous faut nous placer dans une situation où l'on a au moins trois événements a, b et c, pour pouvoir avoir une notion de taille relative en comparant la hauteur de deux éléments à celle d'un troisième. On peut considérer que cela nous donne une sorte de notion de distance. Faisons remarquer qu'alors on a mis une relation d'ordre sur les intervalles mélodiques : on appelle H l'ensemble $\{h_a, h_b, \ldots\}$ des intervalles de hauteurs et $\mathcal{S}$ la relation "être plus grand ou égal à" :

$$\begin{array}{ll}
\forall\, h \in H,\ h\mathcal{S}h & \text{(réflexivité)}, \\
\forall\, h_a, h_b \in H,\ [h_a\mathcal{S}h_b \text{ et } h_b\mathcal{S}h_a] \Leftrightarrow [h_a = h_b] & \text{(antisymétrie)}, \\
\forall\, h_a, h_b, h_c \in H,\ [h_a\mathcal{S}h_b \text{ et } h_b\mathcal{S}h_c] \Rightarrow [h_a\mathcal{S}h_c] & \text{(transitivité)},
\end{array}$$

ce qui définit bien une relation d'ordre.

Nous avons évoqué le fait qu'un événement sonore avait certaines qualités. On se restreindra par la suite à trois d'entre elles, celles qui paraissent définir le plus entièrement un son : ce sont la hauteur, l'intensité et la durée. Pour Xenakis, ces trois-là sont celles qui sont indispensables pour parler d'un événement sonore.

On considère encore l'ensemble H des intervalles mélodiques (ou de hauteur). On pose aussi G l'ensemble des intervalles d'intensité, et U l'ensemble des durées (d'un son). Ces trois ensembles sont considérés hors du temps, au sens défini précédemment. Enfin, on regarde aussi l'ensemble T, ce n'est pas la durée de quelque chose, mais un intervalle de *temps* entre deux événements, qui peut se situer chronologiquement. Ce que l'on va maintenant effectuer sur H pourra être étendu de façon naturelle à G, U et T.

On a une loi de composition interne qui associe à deux éléments de H un troisième ; de manière concrète, cette loi fait la somme des intervalles. On l'appelle *addition* et on la note bien sûr "+". Cette addition est associative : on voit immédiatement que pour tous $h_a, h_b, h_c \in H$, on a $(h_a + h_b) + h_c = h_a + (h_b + h_c)$. Elle a également un élément neutre que l'on nomme h_0 : c'est l'intervalle zéro, et il agit ainsi sur un élément $h_a \in H$: $h_a + h_0 = h_0 + h_a = h_a$. Il s'agit de l'unisson dans le cas de la hauteur et de la simultanéité dans le cas de la durée. Qui plus est, il existe toujours un inverse à un élément de H (ou de G, U, T). Pour H, il s'agit d'un intervalle décroissant, qui "ramène" à l'unisson ; pour G, c'est un intervalle en décibels négatifs, et pour U c'est un intervalle de durée, négatif, ce qui est possible puisque justement il s'agit d'intervalles entre des durées de différents événements. Dans U, la somme d'un intervalle et de son inverse donne la simultanéité. Enfin, on peut dire de cette loi de composition interne qu'elle est commutative. On a donc finalement mis sur H, mais aussi sur G, U et T, une structure de groupe abélien.

2.3. L'espace vectoriel $H \times G \times U$

On commence par mettre sur H, G et U une loi de composition externe avec le corps des réels $\mathbf{R}$. Cela est possible car, de par la nature de ces ensembles, pour un élément a appartenant à l'un d'eux et pour $x \in \mathbf{R}$, l'élément xa est dans le même ensemble que a. Ainsi H, G et U sont des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. On forme alors l'espace vectoriel produit $H \times G \times U$, noté E_3 par Xenakis, qui est de dimension 3 sur $\mathbf{R}$. Une base est par exemple donnée par les vecteurs $\overline{h} = (1, 0, 0)$, $\overline{g} = (0, 1, 0)$ et $\overline{u} = (0, 0, 1)$.

Par ailleurs, on choisit des unités et des origines dans H, G et U. Pour l'exemple qui va suivre, on prend dans H comme unité le demi-ton, et comme origine (zéro) la note do. Dans G, l'origine sera à 50 décibels, et l'unité d'intensité sera de 10 décibels ; et enfin dans U, l'origine est à la durée de 10 secondes, et l'unité est d'une seconde. (Tout cela étant posé comme le fait Xenakis dans [10]). Prenons un exemple : soient $X_1 = 5\overline{h} - 3\overline{g} + 5\overline{u}$ et $X_2 = 7\overline{h} + 1\overline{g} - 1\overline{u}$. Xenakis prend dans ce cas pratique la croche comme étant de durée une seconde, c'est-à-dire que l'unité dans U est la croche. On peut écrire ces vecteurs sur une portée :

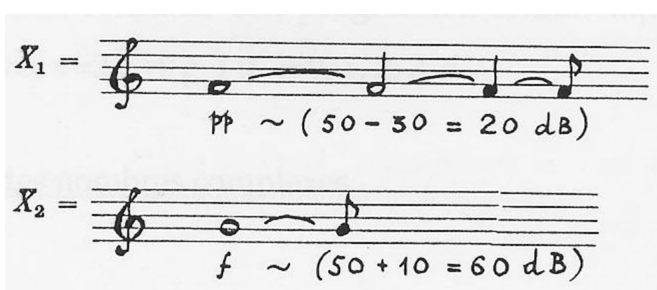

Fig. 11 – Exemple

Leur addition $X_1 + X_2 = 12\overline{h} - 2\overline{g} + 4\overline{u}$ donne alors musicalement :

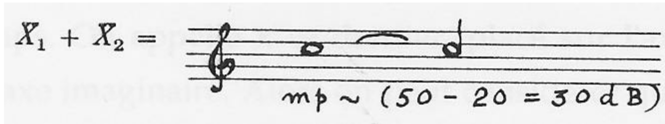

FIG. 12 – Somme de deux vecteurs

Pour Xenakis, ce langage algébrique permet d'analyser des œuvres, aussi bien que d'en composer en combinant les éléments de H, G et U. L'exemple suivant est un exemple d'analyse de pièce (tiré de Sonate, Op. 57, de Beethoven), dans lequel il décortique la succession A.

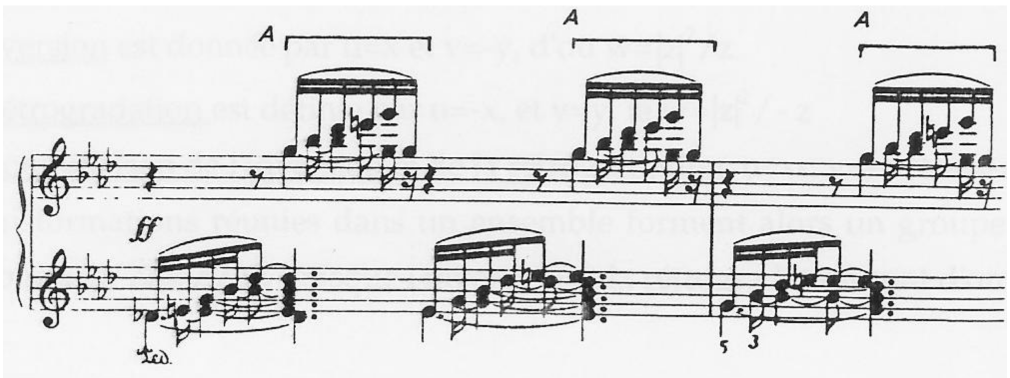

FIG. 13 – La séquence A

Il considère cette fois comme vecteur unité dans U la double-croche, et comme origines, ré ♭ pour H, 60 décibels pour G (la coordonnée dans G reste constante égale à l'origine au cours de ce fragment), et 5 doubles-croches pour U. Alors :

- à sol correspond le vecteur $X_0 = 18\overline{h} + 0\overline{g} + 5\overline{u}$,
- à si ♭ correspond le vecteur $X_1 = (18+3)\overline{h} + 0\overline{g} + 4\overline{u}$,
- à ré ♭ correspond le vecteur $X_2 = (18+6)\overline{h} + 0\overline{g} + 3\overline{u}$,
- à mi correspond le vecteur $X_3 = (18+9)\overline{h} + 0\overline{g} + 2\overline{u}$,
- à sol correspond le vecteur $X_4 = (18+12)\overline{h} + 0\overline{g} + 1\overline{u}$,
- à sol correspond le vecteur $X_5 = (18+0)\overline{h} + 0\overline{g} + 1\overline{u}$.

Cette écriture permet de constater une progression arithmétique dans les vecteurs, puisque $X_i = X_0 + iv$ avec $v = 3\overline{h} + 0\overline{g} - 1\overline{u}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

2.3. Utilisation des nombres complexes

Ce paragraphe va être assez court, mais va nous permettre de voir qu'il est encore possible d'introduire une nouvelle structure de groupe sur des objets musicaux.

On se place dans une situation où seuls deux paramètres interviennent, par exemple la hauteur et le temps. On appelle x ce dernier, placé sur l'axe des réels, et y la hauteur, placé sur l'axe imaginaire. Alors on peut considérer que $z = x + iy$ est un son de ton y qui démarre à l'instant x. Étant données deux fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$, on pose $w = u + iv$, et on considère la transformation $z \mapsto w(z)$. Il est alors possible d'exprimer les opérations que l'on peut faire sur un motif musical en terme de ces transformations :

- L'identité est telle que $u(x,y)=x$ et $v(x,y)=y$, et donc $w=\mathrm{id}$.
- L'inversion est donnée par $u(x,y)=x$ et $v(x,y)=-y$, d'où $w(z)=|z|^2/z$.
- La rétrogadation est définie par $u(x,y)=-x$ et $v(x,y)=y$, d'où $w(z)=-|z|^2/z$.
- La combinaison de l'inversion et de la rétrogadation : $u(x,y)=-x$, $v(x,y)=-y$ et $w=-\mathrm{id}$.

Ces transformations réunies dans un ensemble forment alors un groupe de Klein, isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, puisque l'inversion et la rétrogradation sont d'ordre 2.

Xenakis envisage enfin la possibilité d'utilisation de transformations plus compliquées, voire même, dans le cas d'un « espace musical de plus de deux dimensions », d'utiliser les quaternions.

Les différents sujets abordés ici ont été liés à la notion de groupe, mais il peut être intéressant de voir que d'autres éléments mathématiques peuvent être introduits dans la musique en dehors de la théorie des groupes. Le lecteur intéressé pourra consulter [10].

2.5. Considérations ensemblistes pour la composition

On se place dans l'espace $\mathcal{R}$ des sons que peut produire un piano. On regarde dans ce paragraphe des ensembles d'événements sonores. Soient A et B deux tels ensembles : on peut les jouer l'un après l'autre, ce que Xenakis note $A \top B$. On peut en les écoutant savoir s'ils s'intersectent, s'ils sont disjoints, inclus l'un dans l'autre, ou égaux. Xenakis note $A\cdot B$ l'intersection, qui est la même chose que $B\cdot A$. On peut également créer l'ensemble union de A et B, noté $A+B$, et la négation d'un ensemble A, notée $\overline{A}$, qui est le complémentaire de A dans $\mathcal{R}$. Xenakis s'aide de ces opérations sur des ensembles pour composer. Il considère une expression booléenne, par exemple

$$F = A\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C.$$

On peut montrer qu'on a également

$$F = (A\cdot B + \overline{A}\cdot\overline{B})\cdot C + \overline{(A\cdot B + \overline{A}\cdot\overline{B})}\cdot\overline{C}.$$

Xenakis représente cette expression par le dessin de la figure 14. Pour finir, il utilise ce schéma pour construire la base de la partition de la pièce *Herma* pour piano (1961) (figure 15).

Xenakis, tout comme Messiaen, était compositeur. Ses théories ont donc beaucoup servi à la construction d'œuvres musicales, les mathématiques étant alors un outil pour la composition. Mais des problèmes mathématiques peuvent aussi naître de situations musicales.

3. Questions mathématiques dans la musique

C'est en fait au travail exposé par Ronald C. Read (mathématicien) dans [7] que nous allons nous intéresser. En particulier, nous allons porter notre attention sur deux problèmes, anciens en musique, et résolus dans un cadre mathématique.

3.1. Sous-ensembles de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$

On se place encore une fois dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ pour représenter les douze classes de notes modulo l'octave. Un sous-ensemble de $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ (modulo 12), en ordre croissant, est nommé *scale* par Read. Remarquons que cette notion est très proche de ce

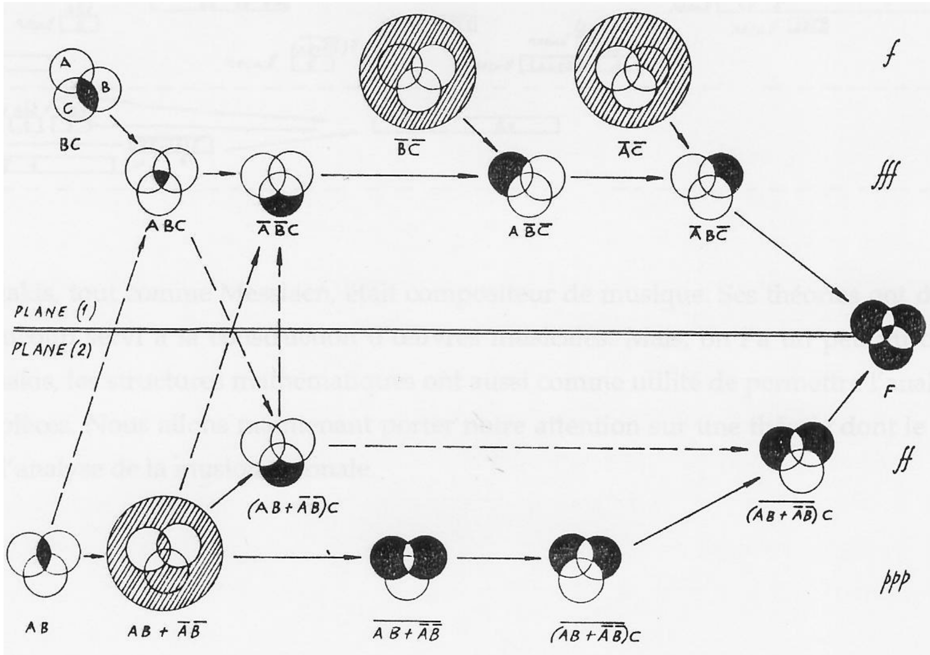

FIG. 14 – Structure de la pièce *Herma* de Xenakis. Nous avons reproduit le shéma tel qu'il apparaît dans les oeuvres de Xenakis mais un lecteur attentif verra qu'il y a 3 corrections à faire : une sur le diagramme intérieur et deux autres sur les deux diagrammes qui se trouvent dans le coin en bas à droite (merci à Odile Schladenhaufen de nous l'avoir signalé)

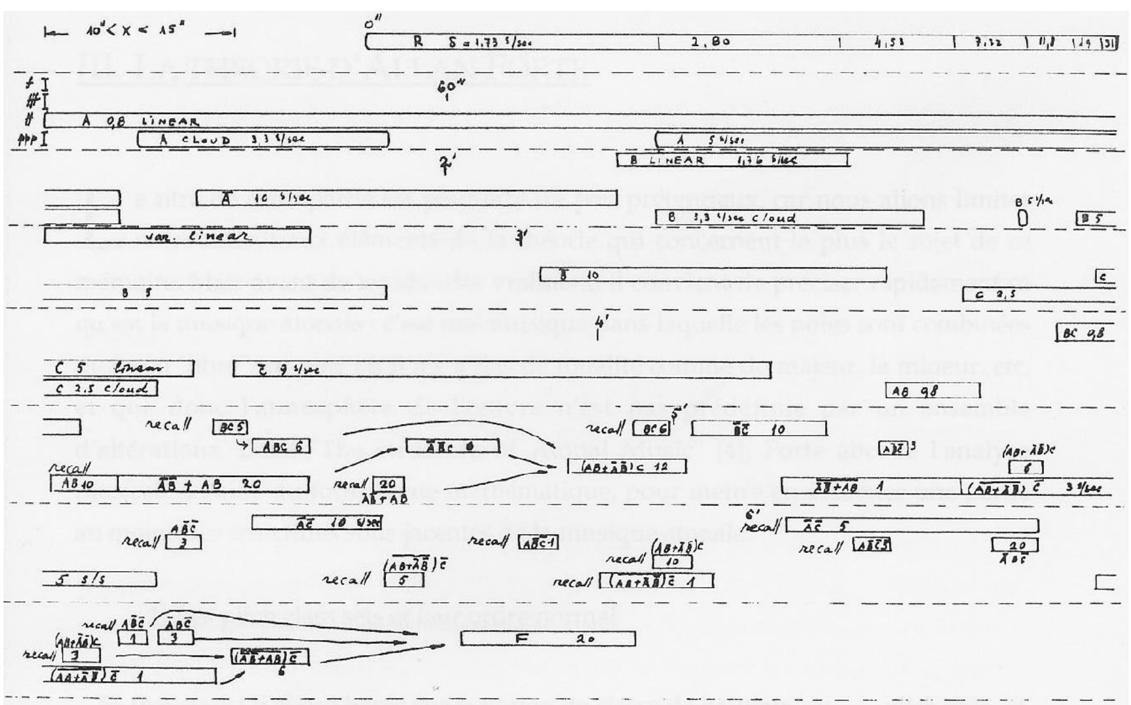

FIG. 15 – Base d'une partition de Xenakis

qui avait été appelé pitch set class. Ici aussi, on considère comme étant équivalents deux scales dont l'un est la translation par un entier k (translation $x \mapsto x+k$) de l'autre. D'une certaine façon, on généralise l'approche de Messiaen sur les modes à transposition limitée. Une question peut se poser : combien y a-t-il de scales de k notes non équivalents par translation ? Pour faciliter la réponse à cette question, on peut représenter le problème posé par un disque divisé en 12 secteurs égaux, chacun marqué ou non d'un signe :

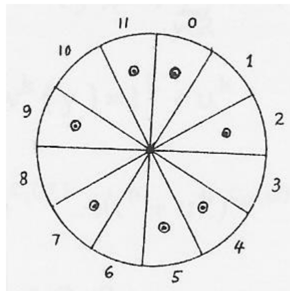

Fig. 16 – Représentation des 12 notes sur un disque

Les 12 secteurs sont donc par analogie les 12 notes, et les marques sont là où les notes font partie du scale. La translation $x \mapsto x+k$ correspond alors à la rotation du disque de k secteurs. La question qui nous intéresse se pose alors autrement : il s'agit de trouver le nombre de manières de mettre k marques sur le cercle pour avoir des disques qui ne sont pas équivalents par rotation. R.C. Read fait alors appel à un théorème de Polya pour avoir la solution. Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'article [7].

Les résultats sont contenus dans la dernière ligne du tableau ci-dessous :

Number of notes Symmetry	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1	5	18	40	66	75	66	40	18	5	1	
2			1		2		3		2		1		
3				1			1			1			
4					1				1				
6							1						
12	1												1
All scales	1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1

Ainsi, il y a 6 façons de placer deux marques sur le disque qui sont non équivalentes par rotation, 19 de placer trois marques, et ainsi de suite. Pour le cas où le nombre de marques est 2, voir la figure 17.

Une autre question peut maintenant se poser : parmi les ensembles à n éléments non équivalents par rotation du disque, combien sont équivalents à eux-mêmes par une rotation de $12/k$ secteurs ?

Dans le cas $n = 2$ illustré ci-dessus, on voit que les cinq premiers cas n'ont une "symétrie" que par rotation de 12 secteurs. Le dernier cas en revanche est manifestement symétrique, il est invariant par une rotation de $12/2 = 6$ secteurs.

On peut répondre à la question précédente en exhibant toutes les solutions possibles, comme on vient de le faire pour le cas $n = 2$. R.C. Read résoud ce problème à l'aide de

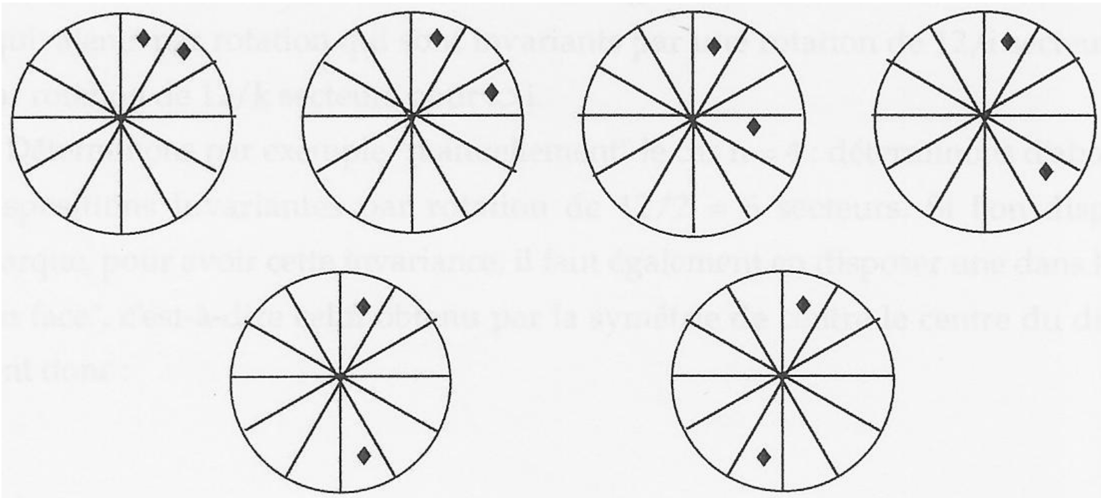

FIG. 17 – Le cas $n = 2$

la formule d'inversion de Möbius pour l'ensemble E des diviseurs du cardinal de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ — qui est 12 — et pour les deux fonctions suivantes sur cet ensemble : le nombre a_k de disques invariants par rotation de $12/k$ secteurs, k appartenant à E, et le nombre A_m de disques invariants par $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (i.e. par rotation de $12/m$ secteurs), m appartenant aussi à E, et par aucun autre groupe (cyclique plus grand que $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$). À nouveau, le lecteur intéressé consultera [7].

Les A_m sont représentés dans le tableau donné précedemment : la première ligne donne le nombre de scales invariants par rotation de $12/1$ secteurs, pour les différents cardinaux possibles, et pas par rotation de $12/k$ secteurs, pour $k > 1$. On retrouve pour $n = 2$ le chiffre 5. De même, la deuxième ligne donne le nombre d'ensembles (non équivalents par rotation), qui sont invariants par rotation de $12/2$ secteurs, et pas par rotation de $12/k$ secteurs, $k > 2$: pour $n = 2$ il n'y en a qu'un, c'est celui signalé plus haut. Pour les n impairs, il n'y en a pas, et pour les autres le nombre est très restreint. De même, la i-ème ligne donne le nombre d'ensembles non équivalents par rotation qui sont invariants par une rotation de $12/i$ secteurs, et pas par rotation de $12/k$ secteurs, $k > i$.

Déterminons par exemple “manuellement” le cas $n = 4$: cherchons d'abord les dispositions invariantes par rotation de $12/2 = 6$ secteurs. Si l'on dispose une marque, pour avoir cette invariance, il faut également en disposer une dans le secteur “en face”, c'est-à-dire celui obtenu par la symétrie de centre le centre du disque (voir la figure 18). Les deux premiers n'ont aucune autre invariance que par rotation de 6 secteurs ; le dernier par contre est clairement invariant par rotation de $12/4 = 3$ secteurs. Cela illustre bien le 2 de la deuxième ligne, cinquième colonne, et le 1 de la quatrième ligne, cinquième colonne.

3.2. Dénombrement de séries

Une série est l'élément de base de la musique dodécaphonique, c'est-à-dire du système musical fondé sur l'emploi exclusif des 12 sons de la gamme chromatique. Cela consiste donc en une permutation de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ (dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$). Le compositeur ne se servira que d'une série dans son œuvre, et de ses équivalents ainsi définis : ce sont de nouveau les opérations vues dans d'autres parties qui font l'équivalence de deux séries.

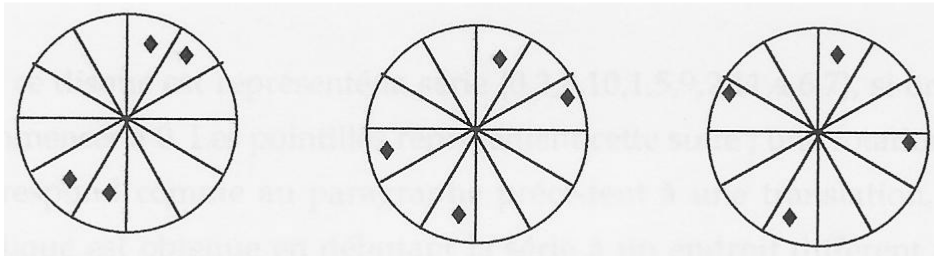

Fig. 18 – Le cas $n = 4$

Autrement dit, sont équivalentes des séries égales à translation, inversion ou rétrogradation près. Dans l'article, Read signale que le dénombrement de séries non équivalentes est cette fois encore résolu à l'aide du théorème de Polya, qui donne 9985920 tone rows possibles. Comme lui, nous n'entrerons pas dans les détails.

Si l'on considère de plus l'équivalence par permutation cyclique, la question se résout autrement. Read représente une série et des équivalents possibles sur un diagramme :

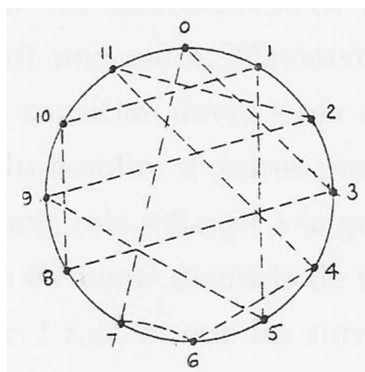

Fig. 19 – Diagramme de Read

Sur ce disque est représentée la série $\{0, 3, 8, 10, 1, 5, 9, 2, 11, 4, 6, 7\}$, si on choisit de la faire commencer à 0. Les pointillés représentent cette suite ; une rotation de ce diagramme correspond comme au paragraphe précédent à une translation. Une permutation cyclique est obtenue en débutant la série à un endroit différent ; la rétrogradation correspond au fait de suivre les pointillés dans le sens inverse, et l'inversion est donnée en faisant une symétrie du disque par rapport au diamètre vertical. Trouver le nombre de séries non équivalentes revient donc à déterminer le nombre de tels diagrammes non équivalents par l'action de D_{12}, le groupe des rotations et symétries d'un dodécagone régulier (représenté par les positions de $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$). Le résultat est alors donné par le théorème de superposition que Read a lui-même introduit et dont il parle dans [8].

Mais les problèmes mathématiques soulevés dans la musique ne sont pas que de cette sorte. Il est aussi possible d'avoir recours aux mathématiques pour des questions d'une origine plutôt différente. Dans le même article [7], Read en aborde une en particulier, dans le domaine du dénombrement : le compositeur Karlheinz Stockhausen a écrit une pièce, Klaviertstück, n. XI, qui consiste en 19 fragments de musique que le musicien devra jouer dans l'ordre de son choix. Cela pose assez vite la question du nombre d'ordres possibles ; et en s'éloignant de la nature musicale de ce problème, cela s'élargit à la question de connaître le nombre d'agencements possibles de n éléments distincts de la chaîne $(1, 2, 3, \ldots, n)$ tels que le dernier symbole apparaisse $r + 1$ fois et que les autres apparaissent au plus r fois. Nous n'entrerons pas dans les détails, mais il est intéressant de pouvoir constater la diversité des origines des problèmes musicaux-mathématiques.

Conclusion

Les mathématiques et la musique ont un long passé en commun. Les notions musicales en rapport avec les groupes que l'on a abordées ne sont pas très vieilles en comparaison de ce passé, car elles datent principalement du XX[e] siècle. Mais manifestement, il y a beaucoup à dire, d'autant que bon nombre de sujets n'ont pas été abordés ici, ou bien ont été abordés très rapidement. Bien d'autres domaines des mathématiques peuvent interagir avec la musique, comme par exemple les probabilités chez Xenakis.

Les mathématiques ont fasciné certains musiciens, tandis que d'autres s'en sont toujours méfiés... Le mélange d'une science assez rigide et de l'art de la composition fait parfois craindre que la musique perde son âme. C'est en effet un risque possible, mais c'est aux compositeurs de veiller à ce que leur sensibilité ne soit pas étouffée par une recherche de règles absolues, et à ce qu'elle leur serve pour exprimer ce qu'il peut y avoir de beau dans les mathématiques.

Les théories que nous venons d'évoquer ne sont nullement des théories qui font l'unanimité : comme souvent dans ce domaine, il y a beaucoup de controverses, de courants et de contre-courants. Déjà à l'époque du père de Galilée (et dans la Grèce Antique également) ont eu lieu de rudes débats entre ceux qui cherchaient à établir les lois du fonctionnement interne de la musique et les autres. On peut imaginer que ces discussions vont continuer, tout comme “l'intrusion” des mathématiques dans la musique, et ce, en enrichissant toujours plus la création musicale

Bibliographie

[1] L. COMTET (1970), Analyse combinatoire, tome premier, *Presses universitaires de France.*

[2] L. COMTET (1970), Analyse combinatoire, tome second, *Presses universitaires de France.*

[3] L. FICHET (1996), Les théories scientifiques de la musique aux XIX[e] et XX[e] siècles, *Musique et esthétique, J. Vrin.*

[4] O. MESSIAEN (1944), Technique de mon langage musical, *Alphonse Leduc, Paris.*

[5] A. PAPADOPOULOS (2003), *La matematica nella musica di Olivier Messiaen*, Lettera Matematica (ed. Springer), **47**, 24–41.

[6] A. PAPADOPOULOS, cours « Sciences et musique », Université Louis Pasteur.

[7] R.C. READ (1997), *Combinatorial problems in the theory of music*, Dicrete mathematics, **167/168**, 543–551.

[8] R.C. Read (1968), *The use of S-functions in combinatorial analysis*, Canadian journal of mathematics, **20**, 808–841.

[9] E. Vuillermoz (1973), Histoire de la musique, *Fayard*.

[10] I. Xenakis (1990), Formalized music : thought and mathematics in composition, Harmonologia series No. 6, *Pendragon Press*.

Rachel Tacquard
Université Louis Pasteur, Strasbourg
tacquard.rachel@wanadoo.fr