FEU LES TPE ?

Depuis un peu plus de trois ans, un groupe IREM travaille sur les « travaux personnels encadrés ». C'est ce groupe, constitué de professeurs encadrant effectivement des TPE et d'universitaires, qui a conçu et réalisé le numéro de *l'Ouvert* que vous avez en mains.

Nous nous sommes penchés sur un certain nombre de questions, comme

– la documentation effectivement accessible aux élèves et à leurs enseignants ;

– l'évaluation.

Nous avons aussi réfléchi à des sujets de TPE dans lesquels pourraient intervenir des mathématiques qui soient vraiment au niveau des élèves. Par exemple, dans les sujets « maths-physique » (un binôme classique), les mathématiques commencent le plus souvent par une équation différentielle, ce qui est déjà un peu haut, même pour les élèves de terminale. Il nous a semblé qu'il y avait par contre des mathématiques, des vraies mathématiques, au niveau des élèves, utilisables dans des binômes associant mathématiques et musique, ou art, ou littérature, ou philosophie...

Au lieu de déduire des difficultés rencontrées lors de l'encadrement des TPE que, de toute façon, les élèves ne savaient pas assez de mathématiques pour faire quelque chose d'intéressant, nous avons préféré faire la (longue) liste des compétences qu'ils avaient acquises et avons envisagé, pour chacune de ces compétences, des sujets dans lesquels elle pouvait être utilisée. C'est ainsi qu'est conçu le site web du groupe,
`http://www-irma.u-strasbg.fr/irem/TPE/TPE.html`
où nous avons mis en correspondance les thèmes officiels des TPE avec les notions mathématiques traitées en terminale

– Croissance
– Images
– Sciences et aliments
– Espace et mouvement
– Risques naturels et technologiques
– Frontière
– Art, littérature et politique
– La ville
– Formes et structures
– Médecine
– Nouvelles technologies

– Fonction exponentielle, logarithme
– Dérivée, tangente, vitesse, taux de variation
– Équations différentielles
– Intégrales
– Limites
– Suites
– Nombres complexes
– Nombres, divisibilité
– Combinatoire, dénombrements
– Statistiques, probabilités
– Graphes
– Géométrie (symétries, transformations, trigonométrie)
– Coniques (paraboles, hyperboles, ellipses).

Vous pouvez partir, soit d'un thème ou d'un sujet donné *a priori*, soit d'une compétence des élèves, pour trouver, *a posteriori*, des sujets de TPE.

Bien entendu, nous n'avons pas trouvé d'exemple à l'interface entre chaque thème de TPE et chaque notion mathématique et nous vous invitons à nous aider à enrichir le site de nouveaux exemples.

Les TPE sont morts (?) vive la culture scientifique. Il ne nous semble pas que la disparition annoncée des TPE rende notre travail caduc. Oui, nos élèves savent des mathématiques (heureusement, puisque nous passons notre temps à leur en enseigner), oui, ces mathématiques ont un rapport avec le monde dans lequel ils vivent, oui, c'est notre travail de les aider à le découvrir.

Nous vous engageons donc à consulter le site du groupe. Même dans l'optique où l'exercice TPE n'existerait plus, il peut vous aider (nous avons nous-mêmes été surpris de l'étendue des possibilités) à penser à des relations entre ce que vos élèves apprennent dans les cours de mathématiques du lycée et la vie courante, les livres qu'ils lisent, les phénomènes atmosphériques dont ils sont témoins, la musique qu'ils écoutent, les téléphones qu'ils utilisent, les tableaux qu'ils regardent, les crises économiques qui les frappent.

Ce numéro. Dans ce numéro de *l'Ouvert*, nous avons regroupé
- des expériences de « vrais » TPE, dans les articles de Francis Jamm (page 25), de Marie-Odile Sauvanaud (page 35), de Jean-Pierre Darou (page 41) ;
- des réflexions sur l'expérience de l'encadrement, par Jacques Ourliac (page 15) ou de l'évaluation des TPE, par Bernard Ortlieb (page 7) ;
- le bilan des travaux du groupe sur l'évaluation, par Nadine Meyer (page 3) ;
- une bibliographie générale rangée par thèmes et faisant appel à des ressources documentaires que l'on trouve dans la plupart des CDI et des bibliothèques municipales, un gros travail réalisé par Nadine Meyer (page 9) ;
- enfin deux articles mettant en évidence des mathématiques élémentaires, accessibles aux élèves et à leurs enseignants, et que l'on peut utiliser dans des TPE « math-SVT », sur les virus, par Gilles Halbout (page 47), ou « math-physique », sur la relativité restreinte, par Michèle Audin (page 57).

Remerciements. Tous les textes ont été lus, relus, critiqués, modifiés, par les membres du groupe. On considérera donc ce numéro comme un travail collectif, chacun des auteurs gardant la responsabilité du ou des textes qu'il a signé(s). Les articles de Marie-Odile Sauvanaud, Jean-Pierre Darou et Michèle Audin sont des suites des exposés présentés le 10 novembre 2004 au lycée Jean Monnet de Strasbourg lors d'un stage proposé au plan académique de formation. Ceux de Jacques Ourliac et Gilles Halbout ont été présentés, eux, lors d'une après-midi organisée par l'IREM le 12 janvier 2005 sur le thème « maths-SVT ». Nous remercions
- tous les participants à ces deux manifestations pour leur aide, leur présence, leurs questions et leurs remarques ;
- l'académie de Strasbourg pour son soutien, et notamment Suzette Rousset-Bert et Étienne Meyer ;
- l'IREM et en particulier sa directrice Nicole Bopp, pour sa proposition de réaliser ce numéro spécial, alors même que les TPE sont en voie de disparition.

Pour le groupe IREM « TPE »
Michèle AUDIN et Gilles HALBOUT
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur, Strasbourg
maudin@math.u-strasbg.fr

Quelques éléments de réflexion sur l'évaluation des TPE

Nadine Meyer

Résumé. Nous proposons quelques pistes pour l'évaluation des TPE.

Introduction

Comment évaluer de façon juste « un TPE » d'élève ? C'est une question que se posent à la fois le professeur qui encadre cette activité et le professeur qui interroge lors de l'examen final. Cette question est d'autant plus délicate que les professeurs ont, dans l'ensemble, très peu pratiqué ce type de travail auparavant.

1. Les critères officiels de l'évaluation

Le Bulletin Officiel est d'une certaine aide puisqu'il présente des critères détaillés et un barème précis pour cette évaluation. Le BO 39 du 24 Octobre 2002, disponible sur le site `www.education.gouv.fr/bo/2002/39/`
rappelle et fixe les critères de l'évaluation.

Extraits.

Objectifs et critères de l'évaluation. Les « travaux personnels encadrés » sont caractérisés par un travail, en partie collectif dans la majorité des cas, qui va de la conception d'un projet à sa réalisation concrète et à sa présentation écrite et orale.

Le dispositif d'évaluation est conçu pour tenir compte des spécificités de cet enseignement qui implique au moins deux disciplines, et se réfère à un thème.

Il porte sur les trois grandes composantes du travail personnel encadré :

- la démarche personnelle de l'élève et son investissement au cours de l'élaboration du travail personnel encadré (le carnet de bord constitue un des outils d'appréciation) ;
- la production finale ;
- la présentation orale du projet et de la production réalisée.

La fiche présentée en annexe 1 fixe les critères de référence pour chacune des composantes de l'évaluation.

Mode d'évaluation des travaux personnels encadrés. L'évaluation est individuelle ; il revient aux enseignants concernés d'évaluer la contribution individuelle de chaque candidat dans le cadre le plus souvent d'une production collective d'un groupe de 2 à 4 élèves. Les groupes excédant cette dimension seront fractionnés au moment de la présentation orale du TPE.

La notation prend en compte, pour chacun des élèves du groupe :

(1) L'évaluation du travail effectué, pour un maximum de 8 points sur 20. La note, assortie d'appréciations détaillées, est attribuée à chaque élève par les professeurs ayant encadré les travaux personnels encadrés du groupe d'élèves concerné ; elle correspond à l'évaluation de la démarche personnelle de l'élève et de son investissement au cours de l'élaboration du TPE.

Ces éléments sont portés sur la fiche individuelle de notation du candidat.

(2) Une épreuve orale, pour 12 points sur 20. La note résulte de l'évaluation, par au moins deux professeurs autres que ceux ayant encadré les travaux personnels encadrés des candidats, de la présentation du TPE et de la production réalisée. Cette évaluation prend en compte :
- la production finale proprement dite du travail personnel encadré ; la synthèse, rédigée par chaque élève (deux pages maximum), sert à individualiser l'appréciation (notation sur 6 points sur 20) ;
- une soutenance orale, d'une durée modulable selon la taille du groupe sur la base de 10 minutes par candidat (notation sur 6 points sur 20), qui se décompose en deux temps d'égale durée :
  - un premier temps au cours duquel le groupe d'élèves (exceptionnellement le candidat) présente collectivement le travail réalisé ;
  - un temps d'entretien au cours duquel chaque élève est interrogé sur sa contribution.

  Les appréciations et les propositions de note sont portées sur la fiche individuelle de notation.

Annexe 1 : Critères de référence et barème.

1re composante : Démarche personnelle et investissement du candidat au cours de l'élaboration du TPE (sur 8 points).

Recherche documentaire	Recherche de sources d'information et de documents en rapport avec le thème et le sujet Traitement pertinent des informations (sélection et analyse)
Démarche	Adaptation de la démarche au sujet Tenue d'un carnet de bord Planification du travail
Contenus disciplinaires	Appropriation et croisement de connaissances et de compétences
Contribution au travail collectif	Esprit d'initiative et prise de responsabilités Souci d'un travail d'équipe

2e composante : Production finale (sur 6 points).

Production	Pertinence de la production et de la forme choisie pour le sujet traité Inventivité Soin apporté au travail Production achevée
Synthèse écrite	Cohérence de la construction (plan et enchaînements) Qualité de l'expression (clarté, richesse du vocabulaire) Restitution de l'ensemble de la démarche

3e composante : Présentation orale du projet (sur 6 points).

Présentation argumentée	Construction de l'exposé Argumentation et justification des choix Réactivité face aux questions Richesse des connaissances mises en jeu
Expression orale	Qualité de l'expression orale (clarté, audibilité, richesse du vocabulaire) Prise de distance par rapport aux notes écrites

2. Questions et réflexions sur l'évaluation

Mais, quand on a pratiqué cette évaluation, des interrogations subsistent après lecture de ce document. Voici par exemple quelques questions et remarques fréquentes, recueillies auprès de collègues au sujet de l'évaluation des TPE. Ces remarques sont suivies d'éléments de réflexion voire de réponse, formulés par les membres du groupe IREM « TPE et mathématiques » lors d'une réunion consacrée au thème de l'évaluation.

2.1. Évaluation par l'encadrement.

(1) Comment évaluer le travail alors qu'une partie de celui-ci est effectué à la maison en dehors des séances ? Comment noter la méthode de travail ?

Les indicateurs de la démarche et de l'investissement peuvent être :

- le carnet de bord régulièrement complété ;
- d'éventuels comptes-rendus intermédiaires ;
- la prise en compte par l'élève des remarques du professeur, remarques qu'il peut être opportun de faire figurer dans le carnet de bord ;
- la synthèse ou le carnet de bord pourraient contenir une bibliographie structurée (élaborée avec l'aide d'un professeur documentaliste ?) et le professeur documentaliste pourrait participer à la notation par les professeurs encadrants.
- On peut penser à s'appuyer sur les moyens de communication internes à l'établissement (comme le réseau local d'ordinateurs, où l'élève se doit de déposer son carnet de bord régulièrement mis à jour, consultable de manière asynchrone par les enseignants) ou externes à l'établissement (comme la messagerie personnelle car tous les élèves et aussi les enseignants disposent d'un mail). Il suffit donc qu'un représentant du groupe expose les difficultés afin que l'enseignant réponde ou prépare les éléments de réponse pour la prochaine séance. La version plus performante techniquement étant de disposer d'un forum privé réservé aux élèves et enseignants TPE, cela permettant aussi des rappels à l'ordre collectif sur la méthode, les dates-butoir, les sources d'information... Par ce contact « permanent », on dispose d'une évaluation plus régulière du travail du groupe car en séance hebdomadaire il est difficile de rencontrer chacun et pour peu que cela coïncide avec une sortie, cela renvoie la mise au point à deux semaines, voire plus.

(2) Un élève ou groupe auteur d'une production médiocre peut-il obtenir une bonne note de l'encadrement ? Faut-il juger de la qualité de la production ?

- Oui, il est possible qu'un mauvais choix de sujet et de problématique conduise à une production médiocre et que cependant les élèves aient mené une bonne démarche selon les critères définis par le BO (avec une faiblesse probablement des parties « contenus disciplinaires » et « traitement de l'information » ?)

2.2. Évaluation par les examinateurs.

(1) Certains sujets dépassent manifestement les capacités des élèves ; de nombreuses productions ne reposent pas sur une problématique et sont de simples (mais parfois brillants) exposés. On observe parfois un décalage entre la problématique et la production. La multi-disciplinarité des sujets est parfois fort relative.

Ces remarques entraînent les réflexions suivantes des membres du groupe :

- L'encadrement n'aurait-il pas dû être plus directif ? Peut-on dissuader les élèves de traiter certains sujets ?
- Il faut demander aux élèves si leur problématique est claire et si leur production est bien la réponse à la problématique qu'ils ont formulée. Il faut plus souvent poser la question « pourquoi faites-vous cela ? » aux élèves.

(2) Comment gérer l'individualisation du questionnement ? Comment repérer un membre du groupe qui a profité du travail de ses camarades ?

À ce sujet, il conviendrait de rappeler que la synthèse écrite est individuelle et qu'elle décrit la démarche et l'investissement personnel de chaque élève. Si ceci est respecté, la préparation du questionnement individuel par les examinateurs sera facilitée.

(3) Le choix du support de la production est parfois judicieux, parfois ridicule. L'oral est parfois décevant avec des élèves qui se contentent de lire leurs notes.

Les élèves doivent pouvoir justifier le choix du support. Il peut être utile de prévoir des oraux blancs dans le cadre des séances de TPE pour les former à une vraie présentation orale.

(4) Comment approfondir le questionnement des examinateurs ?

Les questions les plus simples et naïves dans notre discipline ou dans celle du collègue examinateur sont parfois les plus pertinentes et permettent de tester la compréhension et l'appropriation par les élèves du TPE. Voici quelques exemples :

- Un élève présente un diagramme circulaire dans le cadre de son travail. D'où viennent ces données ? Comment l'a-t-il construit ? Utilisation d'un logiciel ? Quel est l'intérêt de ce type de présentation ?
- L'interroger sur la nature des données présentées sur une représentation graphique, le choix des axes et des unités (repère rarement orthonormé, parfois semi-logarithmique...)
- Revenir sur les définitions des termes fondamentaux. Sur le thème de la croissance, qu'appelle-t-on croissance, comment la mesurer, comment comparer des croissances, les élèves peuvent-ils expliquer croissance absolue, relative ? de la fonction affine à l'exponentielle, que dire de croissance relative ?
- « L'histogramme est en forme de cloche, il est proche de la fonction de Gauss » qu'est-ce que cela signifie ? Quel est l'intérêt d'une telle observation ?
- Intervalle signifiant d'un calcul, comme l'IMC (indice de masse corporelle : poids/taille^2), notion de courbes de niveau, quelles influences sur la fraction peut-on simuler ?
- Lors d'un calcul binaire (traitement des images), comment fonctionne le calcul en binaire ?
- Lors de l'étude de molécules : quelles sont les transformations de l'espace mises en œuvre ? Les définir précisément ; conventions de la représentation plane ? Positions des atomes : lien entre équilibre chimique et relation barycentrique ?
- Lors de l'étude ou de l'utilisation d'une loi en physique : Peut-on la démontrer ? Ou quelle méthode empirique a permis de l'établir ? Quels objets mathématiques sont utiles dans le cadre de cette étude (vecteurs, repères et coordonnées, courbes particulières, ...) ? Quelles sont les applications numériques de cette loi dans le cadre du TPE ?
- Poser des questions sur l'homogénéité des formules en physique, sur la définition des mesures et sur leurs unités, exemple : un diamètre apparent est en fait une mesure d'angle.

Nadine Meyer
Lycée Marguerite Yourcenar
Erstein
Nadine.Meyer@ac-strasbourg.fr

ÉVALUATION
L'AUTHENTIQUE ET L'AUTANT-TOC

Bernard ORTLIEB

Résumé. Je propose quelques réflexions sur l'évaluation des TPE, inspirées par mon expérience d'examinateur.

Les réflexions qui suivent sont inspirées par trois expériences d'examinateur de l'épreuve de TPE du baccalauréat et concernent le travail personnel des élèves et la présentation orale.

Dossiers

De nombreux élèves prennent à cœur l'épreuve de TPE et présentent un travail personnel parfois maladroit mais réel. D'autres, par contre, voient dans cette épreuve une occasion de gagner facilement quelques points au baccalauréat en s'inspirant du travail des autres et ce sans grand risque, puisque ne sont comptabilisées que les notes supérieures à 10.

Les articles concernant les TPE, ainsi que des exemples de TPE sont fort nombreux sur Internet, aussi une des difficultés pour l'examinateur est de distinguer les documents résultant d'un travail effectif des élèves et les « copier-coller », l'authentique de « l'autant-toc ».

La difficulté est réelle, quelques indices simples peuvent cependant mettre la puce à l'oreille de l'examinateur :

(1) le sujet : les sujets très généraux auxquels les élèves peuvent difficilement apporter une touche personnelle (« le Big-Bang », par exemple) sont à considérer avec attention, de même les travaux portant sur des sujets à succès, fréquemment choisis par les élèves (« le virus Ebola »), qui sont souvent des copies de travaux se trouvant sur le net ;

(2) la présentation des dossiers : les dossiers volumineux, plus de 100 pages parfois, relèvent très souvent de la reproduction de documents que les élèves n'ont pas pris la peine de trier voire d'étudier ;

(3) la police de caractères utilisée peut également révéler des « copier-coller » : les travaux personnels des élèves sont le plus souvent rédigés en Times New Roman ou en Comic Sans MS, toute autre police est suspecte, notamment lorsque les documents fournis sont rédigés à l'aide de diverses polices (il est évidemment légitime pour l'élève d'effectuer des citations d'articles, si les sources sont indiquées) ;

(4) l'interrogation orale : l'interrogation orale permet souvent de lever les derniers doutes, il en est par exemple ainsi lorsque les élèves n'arrivent pas à définir un mot ou une notion importante figurant dans le document.

Présentation orale

Par ailleurs, un travail réel peut parfois être mis en valeur ou gâché par sa présentation. La présentation orale est évidemment importante et mérite d'être travaillée mais l'appréciation repose aussi sur la présentation matérielle du dossier (support, texte, orthographe, etc.). Pour présenter leurs travaux, les élèves font souvent appel avec plus ou moins de bonheur aux moyens modernes (vidéo, CD, etc.) dont ils disposent soit personnellement, soit dans leur établissement.

Ces moyens sont parfois justifiés et permettent des présentations fort attrayantes. C'est ainsi que des groupes ont présenté des vidéos d'expériences difficiles à présenter en « direct » (par exemple, un groupe s'est filmé pour présenter les risques de fracture dans le cadre des sports de combat), d'autres ont présenté des films d'interviews et très souvent les candidats présentent le plan de leur exposé à l'aide d'un rétroprojecteur ou d'un CD.

Cependant dans certains cas l'appel à ces moyens n'est guère justifié et nuit à la clarté du dossier. Par exemple, il n'est guère judicieux d'utiliser un CD comme seul support du TPE, y compris du texte (il n'est guère agréable de lire un texte de plusieurs pages sur un écran). Cette tendance se développe pourtant. Enfin que dire d'un TPE ayant comme seul support une vidéocassette où l'on voit uniquement les élèves exposer leur dossier...

Enfin, il est à noter que les élèves demandent parfois aux examinateurs de leur servir de cobayes lors de tests d'observations d'images ou de dégustations de boissons ou de mets divers (chocolat, bière). Si le fait d'avoir à observer des documents censés contenir des images subliminales ne prête pas à conséquence, je dois dire que j'aurais eu de la peine à me montrer indulgent avec des candidats me demandant de déguster divers « colas »...

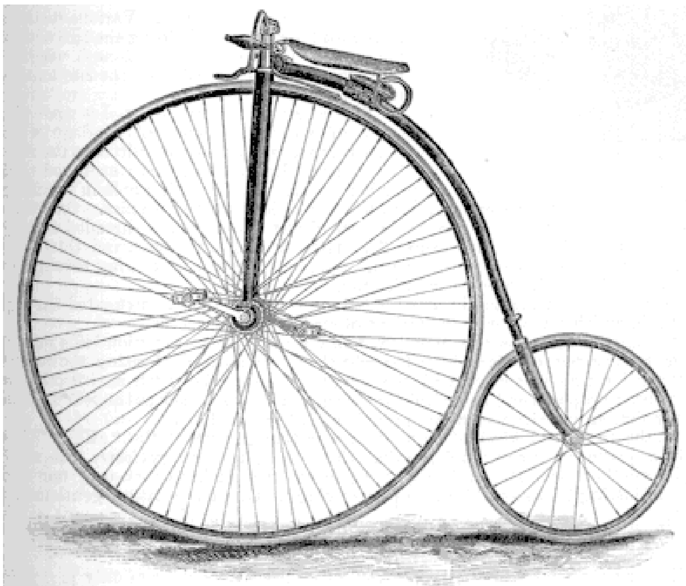


Fig. 1.—Bicycle.

Bernard Ortlieb
Lycée Kleber
Strasbourg
Bernard.Ortlieb@ac-strasbourg.fr

Différentes pistes bibliographiques ou documentaires

Nadine Meyer

Résumé. Je propose une liste de documents utiles et intéressants pour les TPE, venant soit d'encyclopédies ou de magazines de vulgarisation, soit de manuels de mathématiques de terminale.

Comment et où trouver des documents utiles et intéressants pour la production d'un TPE ? Les élèves se ruent sur l'outil internet et force est de constater qu'ils y trouvent rarement des documents clairs, accessibles et pédagogiques. Ils y trouvent par contre en quantité impressionnante les TPE tous faits d'autres élèves, ce qui les ravit mais ne leur apprend pas à faire un réel travail documentaire. C'est aux enseignants de leur rappeler régulièrement que les livres et les revues de leur CDI ou des bibliothèques sont d'excellentes ressources.

Une bibliographie raisonnable de TPE devrait toujours mentionner la consultation d'une encyclopédie : Universalis, Larousse, Encarta ou autre... Et ce devrait être la première démarche des élèves, avant d'aller plus en avant, que de lire quelques articles d'encyclopédie sur le sujet choisi.

Pour ce qui est des mathématiques, les ouvrages à consulter en plus des encyclopédies, peuvent être les revues scientifiques ou les manuels scolaires. Voici quelques éléments de bibliographie présentés sous deux formes :
- En partant de thèmes : des références d'articles ou de livres que l'on trouve dans quasiment toutes les bibliothèques ou CDI.
- En partant de domaines des mathématiques : des références d'exercices de manuels de mathématiques en usage.

Toutes ces références peuvent être utiles à un élève mais aussi à un enseignant qui souhaite orienter le travail des élèves vers plus de mathématiques.

1. Références bibliographiques sur des thèmes qui peuvent faire l'objet d'un TPE en mathématiques

Chaque revue est suivie de sa date de publication. Pour les livres, on trouvera le titre, l'auteur et l'éditeur.

(1) Images satellitales et GPS :
  - *Pour la Science* 101 (1986)
  - *Ça m'intéresse* 146 (04/1993)
  - *Pour la Science* 238 (08/1997)
  - *Science et avenir* 641 (07/2000)
  - Le GPS : une révolution, Ariane Andreani, Éditions Jean Jary
  - Exploration de la terre par les satellites, A. et M. Chabreuil, Paris, Hachette 79
  - Représenter le monde, Françoise Minelle, Explora, Presses pocket (ouvrage également très bien pour tout ce qui est cartographie terrestre)
  - Encyclopédie Encarta ; voici une liste de mots-clés pouvant donner des idées de sujets : chaos, météorologie, infrarouge, géodésie, observatoire, radar, photogrammétrie, SPOT, télédétection, radioastronomie.

(2) Mouvements des planètes, répartition des étoiles :
  - Positions et mouvements des astres : initiation à l'astronomie avec votre PC, Roger Bouigue, Masson,

– Les galaxies, Danielle Alloin, Dominos, Flammarion
– Le chaos, Ivar Ekeland, Dominos, Flammarion
– Atlas de l'astronomie, Joachim Herrmann, Le livre de Poche
– Dictionnaire de l'astronomie, Larousse
– Initiation à la cosmologie, M. Lachièze-Rey, Masson (pour répartition étoiles et galaxies)
– Encyclopédie Encarta : mots-clés pouvant donner des idées de sujets : Eudoxe de Cnide, Appolonios de Perga, Copernic, Ptolémée, Kepler, Lagrange, Laplace, noms de planètes, orbites.
– Mémo Larousse.
– Histoires de problèmes-Histoire des mathématiques, IREM, Ellipses
– *Pour la Science* dossier 11
– *Tangente* 09/1996, 06/1996 et 08/1999

(3) Imagerie médicale :
– Que sais-je n° 3004
– Encyclopédie Encarta ; liste de quelques mots-clés pouvant donner des idées de sujets : imagerie médicale, fibres optiques, rayons X, traceurs isotopiques, microscope.

(4) Engrenages et articulations :
– Mémo Larousse pour articulations
– Encyclopédie Encarta ; mots-clés pouvant donner des idées de sujets : Archimède, poulie, engrenages, pompes, hélicoptères, montres et horloges, calculateurs à engrenages.

(5) Mesure du temps :
– Temps et calendrier (*Tangente* spécial TPE)
– Cadrans, horloges, principes (*Tangente* spécial TPE)
– Mémo Larousse.

(6) Chimie, molécules :
– Topologie moléculaire et graphes (*Pour la Science* dossier 15)
– Propriétés des quasicristaux (*Pour la Science* dossier 20-1998)
– Synthèse de molécules non-chirales (*Pour la Science* dossier 20-1998)
– Symétries et molécules (*Pour la Science* dossier 20-1998)
– Physique et nœuds (*Pour la Science* dossier 15)
– Particules élémentaires (*Pour la Science* dossier 20-1998)

(7) Astronomie :
   - Répartition des étoiles et galaxies (*Pour la Science* dossier 11)
   - Pourquoi la nuit est-elle noire, densité des étoiles (*Tangente* 09/96)
   - Éclipses (*Tangente* 06/96 ; *Tangente* 08/99)
   - Taille de la lune et calculs d'Aristarque (*Tangente* 08/99)
   - Représenter le monde, Françoise Minelle, Explora presses pocket
(8) Biologie :
   - Fibonacci et lapins (*Tangente* TPE)
   - Fibonacci et croissance des plantes (*La Recherche* 250 01/93)
   - Tigre : symétries et brisures (*Pour la Science* dossier 20-1998)
   - Symétries dans la nature (*Pour la Science* dossier 20-1998)
   - Symétrie et coquillages ; symétries et poissons plats (*Pour la Science* dossier 20-1998)
   - Structure moléculaire de l'ADN (*Pour la Science* dossier 15)
   - Arbres de pierre, la croissance fractale de la matière, Vincent Fleury, Flammarion
(9) Santé :
   - Infirmière et statisticienne (*Pour la Science* dossier 11)
   - L'épidémiologiste traque le hasard (*Pour la Science* dossier 11)
(10) Sciences économiques et sociales :
   - Le hasard matrimonial (*Pour la Science* dossier 11)
   - Levi-Strauss : ethnologie et maths (*Tangente* 04/96)
   - Espérance de vie (*Tangente* 09/97)
   - La vignette, étude statistique (*Tangente* 02-03/98)
   - Les codes barres (*Tangente* 09/96)
   - Histoires de carrefours (*Tangente* 09/96)
   - Les indices prix/consommation (*Tangente* 10/95)
(11) Architecture :
   - Urbanisme et fractales dans des villages africains (*Pour la Science* 256 02/99)
   - Le Corbusier : architecture et maths (*Tangente* 02/96)
   - Le château de Maulnes, un pentagone régulier (*Tangente* 02-03/98)
(12) Arts :
   - Maths et sculpture (*Tangente* 12/96)
   - Maths dans les temples japonais (*Tangente* 12/96)
   - Xenakis : musique stochastique (*Tangente* 06/96)
   - Mondrian : peinture et maths (*Tangente* 10/95)
   - Art et nombre d'or (*Tangente* 02-03/98)
   - Anamorphose et arts (*Tangente* TPE)
   - Les entrelacs des enluminures celtes (*Pour la Science* dossier 15)
   - La symétrie en musique (*Pour la Science* dossier 20-1998)
(13) Histoire-Géographie :
   - La méridienne de France (*Sciences et Vie* 988-01/00)
   - Maths, labyrinthes et légendes (*Tangente* 05-06/97)
   - Sonia Kowalevskaya (*Tangente* 10/95)
   - Les maths égyptiennes (*Tangente* 03-04/97)
   - Les maths chinoises (*Tangente* 06/96)
   - Maths et constitution (*Tangente* 05-06/97)
(14) Littérature :
   - Milan Kundera : littérature et nombres (*Tangente* 12/97-01/98)
   - Marcel Pagnol (*Tangente* 03-04/97)

- Maths et Jules Verne (*Tangente* 01-02/97)
- Le roman Code Mercury : cryptographie (*Tangente* 12/98)
- Devos et logique (*Tangente* 11/96)

2. Références d'exercices de mathématiques qui abordent des thèmes d'autres disciplines

Manuels cités :
– Transmaths désigne le manuel Transmaths (Nathan) Terminale S, édition 2002,
– Déclic le manuel Déclic (Hachette) Terminale S, édition 2002,
– et Fractale le manuel Fractale (Bordas) Terminale S, édition 2002.

(1) Études de fonctions et optimisation :
  - angles et photographie : Transmaths p. 76 (et trigonométrie)
  - volume d'un cône : Transmaths p. 85
  - résistance d'une poutre à la flexion : Transmaths p. 86
  - Optimisation de la taille d'un réservoir : Déclic pp. 11 et 84

(2) Suites :
  - approximation d'un volume : Transmaths p. 102
  - calculs d'intérêts : tout livre de 1^{re}
  - hauteur d'un son : Fractale p. 164

(3) Fonction ln :
  - pH en chimie : Transmaths p. 132
  - sismologie et magnitude : Transmaths p. 132 + Fractale p. 135
  - intensité en acoustique : Fractale p. 135 + Transmaths p. 132
  - magnitude des étoiles : Fractale p. 146

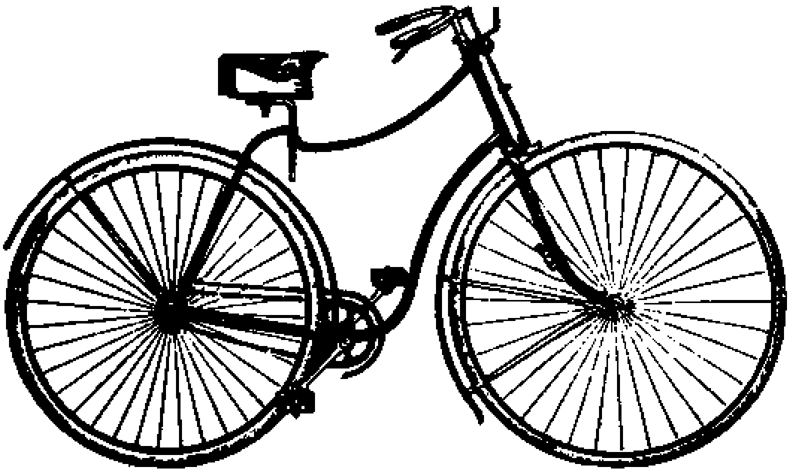
(4) Fonction exponentielle et équations différentielles
  - chaînette : Transmaths p. 145
  - temps d'effet d'un médicament : Transmaths p. 163 + Fractale p. 115
  - datation au carbone 14 : Transmaths p. 164
  - chute des corps dans l'air : Fractale p. 105
  - dilution jusqu'à une solution homéopathique : Fractale p. 104
  - circuits RLC, intensités et tensions : Fractale p. 113
  - température d'un corps : Fractale p. 115

(5) Intégration :
  - volume d'un tore : Transmaths p. 235
  - volume d'un tuyau : Transmaths p. 236
  - durée de vie d'un composant électronique : Fractale p. 331 (et probabilités, modélisation)

(6) Probabilités, dénombrement et statistiques
  - digicodes : Transmaths p. 253
  - nombre d'octets : Transmaths p. 256
  - Raymond Queneau : Transmaths p. 258
  - test de dépistage : Transmaths p. 272 + Fractale pp. 314 et 290
  - loi d'équilibre génétique : Transmaths pp. 274 et 285 + Fractale p. 326
  - population d'un étang : Transmaths p. 318 + Fractale p. 358
  - fiabilité réacteurs avion : Transmaths p. 288
  - culture de bactéries : Transmaths p. 287
  - météo : Transmaths p. 282 + Fractale p. 314

(7) Géométrie dans l'espace :
  - chimie et molécules : Transmaths p. 392

– contrôle aérien : Transmaths p. 432
– problèmes d'optimisation (programmation linéaire) : Fractale p. 298



Nadine Meyer
Lycée Marguerite Yourcenar
Erstein
Nadine.Meyer@ac-strasbourg.fr

Cinq ans de pratique des TPE math-SVT

Jacques Ourliac

Résumé. Je m'interroge sur mon expérience des TPE math-SVT.

Après une année d'expérimentation, c'est à la rentrée 2001 que les TPE ont été généralisés, plus particulièrement en terminale. Cette année expérimentale avait permis à différents groupes institutionnels (Ministère, CNDP, CRDP, équipes académiques...) de réfléchir à ce que devraient être les TPE et aux ressources documentaires disponibles sur tous supports.

Très vite fleurirent sur tous les serveurs académiques des rubriques TPE, relayées par les sites du ministère — notamment à l'occasion de la naissance d'Eduscol(1) — et bien sûr avec la participation du CNDP, de tous les CRDP et CDDP de France et de Navarre œuvrant là dans le cadre de leur mission de documentation. Les CRDP s'étaient d'ailleurs répartis la tâche de recherche documentaire afin d'éviter la redondance et de se spécialiser dans un des thèmes officiels.

Après quatre ans, on peut tenter un bilan, surtout que l'existence des TPE en terminale semble fortement compromise. Pour ma part, j'ai participé à la phase expérimentale en 2000, dans le cadre du CNDP, pour tenter d'imaginer ce qu'allaient être les TPE, en bref pour donner des conseils à ceux qui allaient les pratiquer. Les aléas du métier ont fait qu'à la rentrée 2001, c'est en tant qu'enseignant auprès d'élèves de terminale scientifique que j'ai moi-même pratiqué les TPE et ce jusqu'à cette année encore (2004–2005). Les propos qui suivent n'engagent bien sûr que moi ; ils sont issus de ce que je vis sur le terrain avec les élèves, dans les réunions du groupe IREM, dans les réunions annuelles d'harmonisation.

1. Qu'attendait-on des TPE ?

Si l'on s'en tient au document *Mise en œuvre des* TPE(2) distribué à la rentrée 2001, page 5 :

– une démarche inscrite dans la durée (sans humour aucun !),
– de caractère pluridisciplinaire,
– élaborée à partir d'une recherche documentaire,
– donnant lieu à une évaluation.

Il m'est apparu intéressant d'essayer de voir ce qu'il était advenu de ces objectifs ambitieux.

1.1. Qu'est-ce qu'une problématique ? C'est déjà un problème ! Cette notion de problématique est vite apparue au cœur du débat que ce soit avec les élèves ou entre enseignants, recoupant là le commentaire du document *Mise en œuvre des* TPE, cité plus haut. On y note des différences d'interprétation selon les cultures disciplinaires.

Le collègue de SVT avec qui je pratique les TPE (depuis le début) et moi-même nous sommes accordés sur le fait que nous devions partir d'une question ciblée, correspondant à un sujet bien défini, interrogeant simultanément plusieurs domaines de connaissances censés apporter une réponse argumentée et vérifiée grâce à un aller-retour entre investigations et analyses.

(1) `http://www.eduscol.education.fr/D0050/default.htm`
(2) `http://www.eduscol.education.fr/D0050/2004_200`

Ceci, c'étaient les bonnes résolutions de départ, mais à l'arrivée les problématiques sur lesquelles j'ai tenté d'encadrer les élèves — voir la liste en annexe — sont parfois plus proches d'un exposé traditionnel sur un sujet, faisant le tour d'une connaissance, à la façon d'une revue de vulgarisation scientifique.

D'un autre côté, les élèves ont souvent eu des idées « originales » non dénuées d'intérêt mais difficiles à documenter. Pour preuve, une problématique avortée en 2004-2005 « Quelles sont les forces en présence dans un œuf qui le rendent incassable ? ». Cette idée avait germé dans l'esprit des élèves à partir de la légende selon laquelle lorsque l'on exerce une pression aux extrémités d'un œuf, on n'arrive pas à le casser... Réflexion, recherche, le temps passe, finalement abandon et changement de problématique.

Notre idée de départ était de fournir aux élèves les thèmes officiels avec quelques commentaires explicatifs sans brider leur imagination. Mais cette année nous n'avons retenu que les thèmes « Formes et structures », « Hériter innover », afin de nous faciliter l'accompagnement, certes, mais aussi d'éviter trop d'hésitations sur plusieurs sujets éventuels qui créent des dissensions dans le groupe et font perdre du temps.

Les deux premières années, notre objectif premier avait été d'amener les élèves à poser une question claire, de préférence ouverte, c'est-à-dire laissant la place à des développements futurs et non un sujet sur lequel tout est connu, tout a été dit (ce qui aurait conduit inévitablement à l'exposé traditionnel, dérive fréquente des TPE). Loin de nous l'idée d'affirmer que nous avons évité cet écueil ! Mais les élèves ont aussi droit à leur autonomie, à leurs risques et périls.

Une fois qu'on leur a dit ce que ne devait pas être un TPE, il est temps d'aider les élèves à définir une véritable problématique. Les conseils méthodologiques ont été fréquemment répétés. Lire et relire les thèmes, les sous-thèmes, les commentaires associés et leur appliquer la technique la plus connue, un peu sous forme de jeu, celle appelée des 3QOCP (Qui, Quand, Quoi, Où, Comment, Pourquoi). Et vogue la galère après accord des différents partenaires concernés...

1.2. « ... Élaborée à partir d'une recherche documentaire ». Mais qu'est-ce que la recherche documentaire ?

L'expression — recherche documentaire — n'a rien de bien mystérieux et chacun pense souvent, aussi bien les enseignants que les élèves, maîtriser aussi bien les outils que les méthodes. Il est vrai que l'Internet et les moteurs de recherche ont vulgarisé cette notion, c'est une bonne chose mais peut-on faire l'économie d'une méthode ?

Non. Très vite les élèves ont pensé tout trouver sur Internet et même plus, c'est-à-dire le TPE tout fait[3] qu'il n'y aurait plus qu'à « copier/coller ». Il n'est pas question de dénigrer systématiquement les ressources de l'Internet mais de convaincre les élèves de respecter plusieurs critères d'exigence :

(1) L'information trouvée est-elle crédible ? confirmée par d'autres sources ?
(2) Suis-je capable de comprendre et d'expliquer ce que je viens de découvrir ? Où est le travail de l'élève ? Celui de l'enseignant chargé d'encadrer ? Lire et croire ?
(3) Cela fait-il vraiment avancer ma problématique ? Dois-je réorienter ma problématique ? Suis-je hors-sujet ? D'où la nécessité d'avoir bien ciblé la problématique !

Un exemple de dysfonctionnement classique au point 2 : « Comment expliquer la rapidité de propagation du SRAS à une échelle géographique si grande, suivie d'une régression brutale ? ». Ce sujet, qui collait à l'actualité du moment, fondait toute son argumentation

[3] `http://www.centretpe.com/index.php`, site regroupant des TPE... Très tentant pour les élèves !

sur une formule mathématique — incontestables mathématiques ! — formule qui était censée exprimer la vitesse de transmission de la maladie (appelée r)

$$r = \frac{I(n+1) - (1-a)I(n)}{S(n)I(n)} \text{ avec } a = \frac{R(n+1) - R(n)}{I(n)}.$$

Ici, a est la vitesse d'hospitalisation, n le nombre de jours depuis le début de l'épidémie, $I(n)$ le nombre de personnes infectées le jour n, $R(n)$ le nombre de personnes ayant été hospitalisées (depuis le début, au jour n), $S(n)$ le nombre de personnes en contact avec des personnes infectées le jour n.

Pour a, on devine la présence d'un taux de variation, puisque R semble être une fonction de I mais quelle est l'unité de cette vitesse ? Par analogie avec la vitesse d'un véhicule ? pour r, ou on avale l'affirmation, ou on cherche sa justification...

Plus loin les élèves annoncent que cette vitesse est de $0,000125$ à Hong-Kong... Unité ? Ordre de grandeur ? Est-ce un excès de vitesse ? Autant de questions qui ont bien sûr une réponse ! Laquelle ? Comment la trouver ? J'avoue que mon encadrement sur ce coup n'a pas été terrible...

Se contraindre à passer les ressources documentaires trouvées à l'épreuve des trois critères cités ci-dessus a aidé bien des groupes à éliminer, approfondir, recentrer la problématique et aussi à s'éloigner du « tout-Internet » pour s'orienter vers des supports plus fiables, mieux structurés tels que les revues, les livres que ce soit au cdi ou dans une bibliothèque, occasion de rencontrer les documentalistes et de découvrir leur savoir-faire en recherche documentaire.

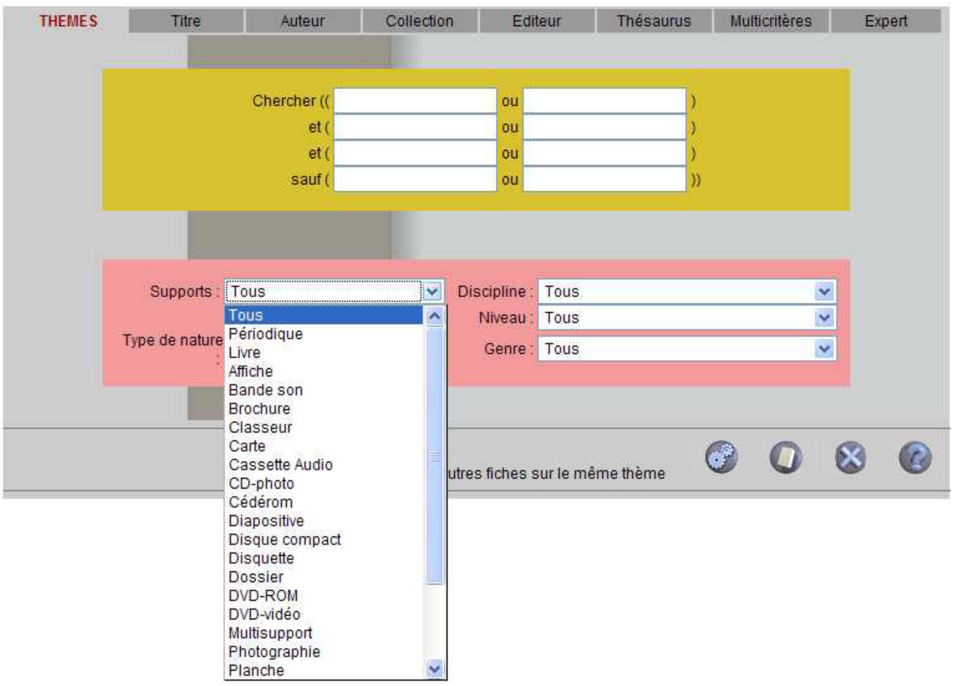


Figure 1

Trop peu d'enseignants fréquentent le cdi de leur établissement. On y trouve des ressources étonnantes avec des outils de recherche informatiques identiques aujourd'hui à ceux utilisés dans les bibliothèques, utilisant les opérateurs booléens incontournables (« et »,

« ou », « sauf »...) nécessitant d'être attentif au support du document, à sa cote... Montrons (figure 1) un exemple d'un masque de recherche dans la base documentaire du CDI. C'est un outil auquel on peut accéder de chez soi par internet pour préparer sa venue au CDI. Nombreuses sont les bibliothèques à fonctionner ainsi, en particulier la BMS(4), la BNU(5)... C'est aussi préparer nos élèves aux études universitaires et à la nécessité de chercher eux-mêmes les compléments indispensables à leur formation.

Pour conclure, la réalisation d'un TPE et la formation d'un futur bachelier ne peuvent faire l'économie d'une formation sérieuse aux techniques documentaires, non limitées aux moteurs de recherche type Google ou autres...

1.3. « De caractère pluridisciplinaire... ». Quelle place pour les mathématiques ? Dans l'annexe (ci-dessous) qui regroupe quelques-uns des sujets que j'ai accompagnés durant ces quatre années — à raison d'environ dix groupes de trois à quatre élèves par an — j'ai commenté le contenu mathématique associé. C'est d'ailleurs presque de l'autocritique. On y remarquera que cela se limite trop souvent à la présentation de quelques éléments pompeusement appelés « statistiques » mais se ramenant à des pourcentages donnant lieu à des diagrammes, quelques histogrammes, courbes de croissance et c'est tout.

Constatation particulièrement vraie au sein du binôme math/SVT comme le confirment nombre d'interventions sur la liste de diffusion des TPE(6) « Je n'ai vu de maths dans aucun TPE de terminale ni de première (à part de la proportionnalité) ».

Comment aider les élèves et nous-mêmes à surmonter cette difficulté ? Pas de réponse universelle mais quelques exigences sur le sens des informations que les élèves nous présentent à la suite de leurs recherches documentaires. Prenons quelques exemples, pour montrer que cela ne se passe pas toujours très bien.

1.3.a. « Pourquoi l'attaque des fourmis géantes n'est-elle qu'un film ? ». Dès le départ, le rôle que pourront jouer les mathématiques semble bien obscur ! Mais il ne s'agit pas de bloquer d'entrée la problématique ! Quoique... Au fil de l'étude du comportement de la fourmi volante, en vue de transposer la situation à une échelle 100 fois plus grande, son mode de déplacement est apparu comme une spirale logarithmique ! Le lien avec les mathématiques était fait, le prof serait content, le TPE était bouclé etc.

Mais bien des questions restaient en suspens ! Quelques questions simples, afin d'approfondir le terme, furent lancées. Qu'est-ce qu'une spirale ? Pourquoi logarithmique ? Comment la construire ? Bien sûr les élèves trouvèrent les réponses sur internet ! Ils se mirent même à dessiner pour découvrir que ce déplacement cachait une suite géométrique : voici le travail des élèves (figure 2). D'abord

$$\frac{a_0}{\sin 80^\circ} = \frac{a_1}{\sin 70^\circ} \Leftrightarrow a_1 = \frac{\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} a_0,$$

petit retour en classe de 1^{e} S, qui conduit à l'expression de la suite géométrique

$$a_n = \left(\frac{\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}\right)^n a_0,$$

(4) Bibliothèque municipale de Strasbourg
(5) Bibliothèque nationale universitaire
(6) `http://www.ldif.education.gouv.fr/wws/info/tpe-tice-educnet`

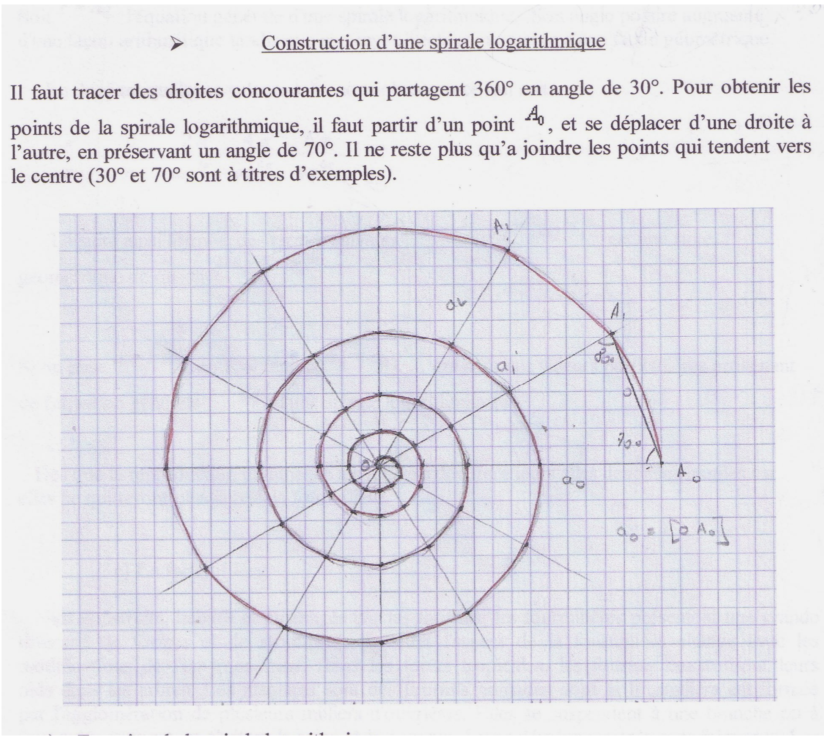


Figure 2

ce qui permet de calculer la somme des termes et ainsi d'évaluer la distance parcourue par la fourmi

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \frac{1-\left(\dfrac{\sin 70°}{\sin 80°}\right)^n}{1-\left(\dfrac{\sin 70°}{\sin 80°}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 \frac{1}{1-\left(\dfrac{\sin 70°}{\sin 80°}\right)}.$$

Avec $a_0 \sim 1\,m$, on obtient environ $21,8\,m$ pour parcourir la spirale. Mais on ne sait toujours pas pourquoi logarithmique ? Son équation ? La littérature parle d'équation polaire $\rho a e^{(k+i)\theta}$? Certes, on connaît depuis la classe de première les coordonnées polaires, depuis peu l'exponentielle, mais quel lien ? Tout simple !

$$\begin{cases} x = \rho a e^{k\theta} \cos\theta \\ y = \rho a e^{k\theta} \sin\theta. \end{cases}$$

On arrive ainsi à la représentation paramétrique, mais peut-on la représenter avec sa calculatrice ? Bien sûr, on peut même accéder aux représentations en polaires, et les élèves se sont amusés à faire varier le pas, comme on peut le voir sur la figure 3.

En cherchant encore, c'est le lien avec la représentation en complexes[7] :

« *Toute suite de points complexes dont les modules sont en progression géométrique de raison a et les arguments en progression arithmétique de raison b décrit une spirale logarithmique avec $k = \ln a/b$* ».

[7] http://www.mathcurve.com/courbe2d/logarithmic/logarithmic.shtm

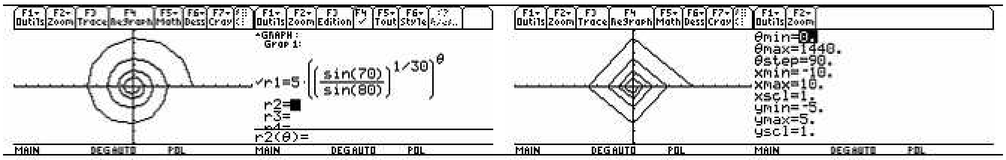


Figure 3

Évidemment le nombre d'or ne tardait à arriver mais on commençait à s'éloigner de la problématique pour ne faire que des maths ! Comme quoi, en cherchant ne serait-ce qu'à comprendre ce qu'on lit, on apprend plein de choses...

La spirale logarithmique aurait pu suffire à faire un TPE a elle toute seule. Simuler sa création avec un logiciel de géométrie en utilisant la récursivité par exemple.

Dans un TPE actuellement en cours de réalisation « Présence du nombre d'or dans la nature, hasard ou utilité ? », la spirale fait son retour, d'où la possibilité de réutiliser des recherches faites par d'autres.

1.3.b. Dans tous les sujets qui touchent à la virologie, à l'épidémiologie, en bref à la médecine, on ne peut pas échapper à l'étude de données statistiques, que ce soit pour étudier le développement d'une maladie ou les résultats d'un traitement[8]. Pour l'observation d'épidémies — la grippe par exemple — une méthode que l'on retrouve souvent, notamment avec le réseau sentinelle, est celle dite du « Serpent de Serfling », modèle de régression périodique appliqué aux observations passées. Avec cela on est bien fixé, aussi bien sur la méthode employée que sur la compréhension du graphique figure 4.

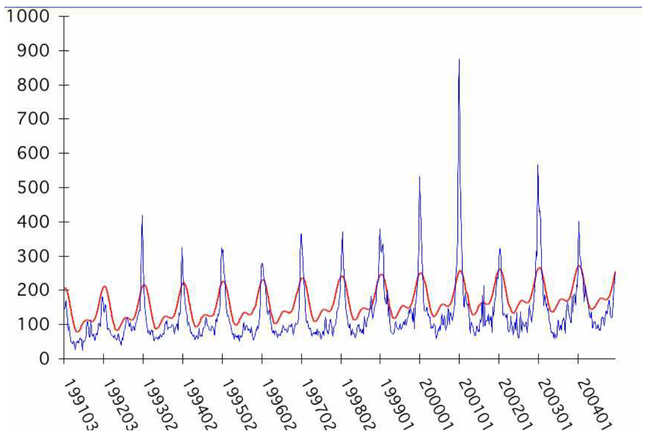


Figure 4

Les recherches faites par les élèves ont révélé qu'il s'agissait d'observer les syndromes grippaux en ordonnée, par rapport au seuil d'alerte fixé par les épidémies de grippe des années précédentes, le serpent. Cette réflexion a pu servir à d'autres sujets portant aussi soit sur la grippe, soit sur un problème d'épidémiologie.

Mais les statistiques en biologie ou ailleurs ne s'arrêtent pas à quelques graphiques. Ce fut l'occasion de réinvestir quelques notions oubliées telles que la fluctuation d'échantillonnage (classe de seconde), la notion de données gaussiennes en liaison

[8] Voir d'autres mathématiques sur ces sujets dans l'article de Gilles Halbout, page 47.

avec l'écart-type (classe de première). Des groupes n'ont pas hésité à mener des enquêtes au sein de l'établissement (étude du goût, obésité et calcul de l'IMC, test du QI...).

Un TPE, en cours de réalisation, porte sur « Inné et acquis » et s'appuie notamment sur le QI, dont l'interprétation n'a de sens que par rapport à une population respectant une distribution gaussienne. Mais tous ces travaux ont nécessité beaucoup de temps pour persuader les élèves de ne pas se contenter de recopier de belles phrases, de belles formules mathématiques mais de leur donner du sens[9].

1.4. « ...donnant lieu à une évaluation ». Passons rapidement sur l'évaluation sommative, un compte-rendu académique est fait chaque année. Je retiendrai plutôt trois attitudes des élèves par rapport à cette perspective de notation (coefficient 2 pour les points au-dessus de 10). Il y a

– ceux qui envisagent une mention et se motivent en conséquence ;
– ceux qui le font parce qu'il faut le faire et se prennent au jeu de leur problématique, du montage de leur présentation, souvent avec la présence d'un leader dans le groupe ;
– ceux qui renâclent tout le long, persuadés de s'en sortir avec du copier/coller et Internet d'autant qu'il n'y a aucun risque par rapport à la note.

L'évaluation formative est beaucoup plus intéressante pour les élèves et pour l'enseignant.

Après trois ans de lycée et de nombreuses heures de math, de SVT et de sciences physiques, il est temps, en vue de l'orientation des élèves, de tenter de faire la synthèse de leurs connaissances livresques pour décrypter ne serait-ce qu'un texte scientifique de vulgarisation.

– Le travail en groupe au sein de l'établissement comme à l'extérieur notamment par mail ou téléphone !
– La présentation écrite et orale, même si elle génère du stress, est une situation incontournable dans leur futur cursus d'étudiant.
– Bien des groupes ont fait preuve d'imagination — présentation sous forme de saynette, par exemple. Un élément qui se généralise chez nos élèves, c'est la maîtrise de l'outil informatique aussi bien pour la présentation que pour l'usage d'outils de simulation (géométrie, traceur de courbes...), de traitements statistiques (tableur).
– La tenue du carnet de bord qui, tout en étant ressentie comme une contrainte, les aide à voir leur avancement et leur sert de mémoire pour éviter de tourner en rond. Tout un travail de groupe (présentiel) s'appuyant sur une communication synchrone mais aussi asynchrone car tout leur travail est sur le réseau local accessible dans et hors de l'établissement. Permettant aussi aux enseignants une meilleure observation de l'évolution du travail et la possibilité de conseils...

Pour les enseignants, travailler à deux sur un même sujet et avec les mêmes élèves, c'est déjà le début de l'interdisciplinarité et du travail de groupe, c'est pas si mal ! Écouter et tenter de comprendre la vision d'un collègue sur une problématique comportant un langage technique qu'on ne maîtrise pas — pour ma part, je n'avais plus fait de SVT depuis le bac où elles n'étaient qu'à l'écrit.

S'obliger à écouter les élèves, comprendre leurs questions sur des sujets inhabituels et leur faire admettre qu'on ne sait pas tout mais qu'on va y travailler... Bien sûr, c'est aussi une approche différente des élèves que l'on a aussi en classe et c'est l'occasion de parler de ce qui pourrait y être amélioré, du devoir à venir...

Bien sûr, tout n'est pas rose, nombreux sont les enseignants hostiles aux TPE et je les comprends car on s'engage dans l'inconnu, acceptant une tâche dont on ne connaît pas les

[9] Un livre fort utile : Manuel de statistiques biologiques, René Heller, Gauthier-Villars, 1968.

limites, sans parler de ses propres limites ! Il faut que l'enseignant soit volontaire et que ce ne soit pas fait en complément de service comme cela semble se faire de plus en plus.

Un autre regret, c'est la difficulté, due à l'organisation administrative, à monter un TPE associant les mathématiques à des matières dites littéraires (art, philo...). Par exemple en terminale L avec des élèves faisant spécialité math et suivant souvent une option artistique.

1.5. « ...Une démarche inscrite dans la durée ». Sans entrer dans la polémique issue de la perspective de suppression des TPE en terminale[10], je crois, en me retournant sur ces cinq années, que cette suppression serait une erreur, pour au moins trois raisons :

(1) La désertion des études scientifiques, reconnue et pleurée par tous[11]. Comment accepter de mobiliser autant d'énergie autour des sciences, notamment en première et terminale, pour après le bac voir aussi peu d'étudiants poursuivre dans cette voie. Les TPE sont le premier pas, certes modeste, vers une culture scientifique.
(2) Le travail de groupe avec toutes ses conséquences sur la vie sociale de la classe. Valorisant des compétences méconnues et non reconnues (informatique, esprit d'organisation...).
(3) Le fait de rédiger et d'exposer en public un travail réalisé dans la durée, exigence aujourd'hui présente dans toutes les formations post-bac (rapport de stage, mémoire, thèse...).

Approcher les objectifs assignés au TPE nécessite bien deux ans aux élèves (première et terminale). Justifier leur suppression par un trop grand nombre d'heures de nos élèves c'est nier le fait que le travail n'est pas systématiquement synonyme de punition mais que la recherche, la maîtrise de la connaissance, comme dans le cadre d'un TPE, sont aussi des sources de satisfaction.

Nous avons, dans le cadre des TPE, avec bien sûr encore bien des progrès à faire, l'occasion d'accompagner les élèves dans une véritable initiation à la démarche scientifique en s'appuyant sur le principe des trois C : Chercher, Comprendre, Communiquer.

2. Annexes

2.1. Outils de recherche spécialisés en ligne, Mathématiques et SVT.

(1) `http://web.ccr.jussieu.fr/urfist/cerise/`, aide à la recherche
(2) `http://www.granddictionnaire.com/btml/fra/r_motclef/index1024_1.asp`
(3) `http://bms.strasbourg.fr/`
(4) `http://tolweb.org/tree?group=Life_on_Earth&contgroup`, botanique
(5) `http://www.cnrs.fr/cw/dossiers/dosgeol/accueil.html`, Astronomie, planètes...
(6) `http://earth.leeds.ac.uk/learnstructure/index.htm`, géologie
(7) `http://www.ggl.ulaval.ca/personnel/bourque/intro.pt/planete_terre.html`, géologie
(8) `http://www.labosvt.com/index.php`, SVT avec Forum
(9) `http://www.netanatomy.com/`, Anatomie
(10) `http://www.univ-tours.fr/genet/`, Génétique
(11) `http://www.chronomath.com/`, Encyclopédie des mathématiques
(12) `http://membres.lycos.fr/villemingerard/Alphabet.htm`, Encyclopédie mathématique
(13) `http://www.bibmath.net/index.php3`, Dictionnaire des maths
(14) `http://www.inrialpes.fr/sel/index.html`, Statistiques en ligne, incontournable

[10] Rappelons l'existence de la pétition `http://www.tpe-petition.net/index.php`
[11] Rapport Porcher, mars 2002, `http://www.education.gouv.fr//rapport/porchet.pdf`

(15) `http://www.math-info.univ-paris5.fr/smel/index.html`, statistiques et médecine
(16) Forum d'aide aux TPE : `http://sciences-TPE.ens-cachan.fr/`
(17) Les moteurs de recherche traditionnels et trop généralistes

2.2. Outils informatiques utilisés

(1) Tableur, peu importe sa marque, libre de préférence
(2) SINEQUANON, traceur de courbe, `http://perso.wanadoo.fr/patrice.rabiller/`
(3) Géoplan-Géospace, Cabri, pour la géométrie
(4) REGRESSI, pour déterminer l'équation d'une courbe à partir de données
(5) PAO et outils bureautiques.

2.3. Documents de référence les plus utilisés au sein de l'établissement

(1) Encyclopédie Universalis (CDI)
(2) Sciences et Avenir (CDI)
(3) Tangente (CDI)
(4) Pour la Science (CD-ROM : ensemble des articles 1999-2002)

2.4. Exemples de quelques sujets de TPE Math-SVT durant ces quatre années. Illustration de la difficulté à mettre en évidence le rôle des mathématiques

	Titre et rôle des mathématiques (peu ou pas : « ? ») (intéressant : « * »)
1 ?	Effets de l'entraînement et de l'alimentation chez le sportif, anabolisants et dopage, éthique sportive, **Graphiques**
2 *	Un réchauffement climatique nous menace. Est-il vraiment si important ? **Courbe de tendance, usage du tableur**
3 **	Qu'est-ce qu'une éclipse de lune et comment peut-on les prévoir ? **Géométrie plane et dans l'espace, outils de simulation**
4 ?	La modification des aliments est-elle un progrès ? **Statistiques à base de pourcentages**
5 **	Les lunettes sont-elles une réelle solution aux défauts de la vue ? **Optique géométrique, étude des lentilles avec Cabri**
6 ?	Comment chaque individu peut-il différencier les différentes saveurs ? **Graphiques et quelques statistiques à base de pourcentages**
7 *	Comment l'épidémie de la grippe se propage-t-elle ? **Statistiques : méthode du serpent de Serfling**
8 ?	Qu'est-ce-qu'une allergie alimentaire ? **Graphiques et pourcentages**
9 *	Comment se sert-on de l'imagerie satellitaire pour préciser les prévisions des moussons ? **Géométrie et GPS**
10 ?	Obésité et ses conséquences IMC **et pourcentages, graphiques**
11 ?	Comment cheveux et ongles poussent-ils ? Et quels sont les causes des différents problèmes de nos jours ? **Pourcentages, graphiques**
12 ?	Que représentent les cellules cancéreuses par rapport aux cellules saines ? Les traitements sont-ils efficaces ? **Calcul du facteur de risque** RR**, croissance des tumeurs, validité d'un test**
13 **	Comment améliorer une image pour la rendre exploitable ? **Algorithmes de codage et de compression, arithmétique cryptographie**

	2004-2005 En cours de réalisation Extrait des 10 sujets en chantier
	L'intelligence est-elle innée ou acquise ? **Rôle des statistiques pour évaluer la fiabilité des tests**
	La voiture à hydrogène en Islande, une application possible en France ? **Étude économique de faisabilité et changement d'échelle**
	Les astéroïdes, mythe ou danger réel ? **Calcul de l'énergie résultant d'un choc et des trajectoires**
	Le nombre d'or dans la nature, hasard ou utilité ? **Danger d'oublier la problématique !**
	Le cerveau est-il responsable des illusions d'optique ? **Optique et géométrie**
	Quel lien y a-t-il entre l'évolution des espèces et la modification de leur aérodynamisme ? **Problème du Cx, mécanique des fluides et forces en présence**

Jacques Ourliac
Lycée Lucie Berger
Strasbourg
Jacques.Ourliac@ac-strasbourg.fr

Les antennes paraboliques en TPE

Francis Jamm

Résumé. Je rends compte d'une expérience de TPE sur les antennes paraboliques et des mathématiques des coniques qu'il a mis en jeu.

Nous avions proposé[1] le TPE suivant : Pourquoi les antennes sont-elles paraboliques ?

Je m'attendais à un TPE tranquille sur les propriétés focales des coniques. L'objectif était, qu'à partir de mesures faites sur une antenne, les élèves déterminent, par calcul, la position du foyer et constatent que le récepteur était placé à cet endroit.

1. Un TPE « expérimental »

Les élèves nous apportent donc une antenne parabolique. Non, rassurez-vous, ils nous ont dit qu'ils ne l'avaient pas volée sur un toit !

« Monsieur, le bord de l'antenne c'est pas un cercle mais un ovale ! ? »

Donc le paraboloïde n'était pas coupé perpendiculairement à son axe (une autre possibilité aurait été que le paraboloïde ne soit pas de révolution ; mais dans ce cas, les différentes paraboles qui le composent n'ont pas le même foyer et il ne peut pas servir de récepteur). Les choses se corsaient et adieu la tranquillité...

Le premier travail a consisté à prendre des mesures de l'antenne. Les élèves se sont placés dans un repère orthonormé d'origine en une extrémité du grand axe de l'ellipse (trouvé au jugé). Le grand axe mesurant 82 cm les élèves ont mesuré, tous les 5 cm, la profondeur du paraboloïde. Ces mesures devaient permettre de trouver une équation de la parabole obtenue par l'intersection du paraboloïde avec le plan du repère. En effet, ce plan est plan de symétrie du paraboloïde et contient donc le récepteur ou foyer.

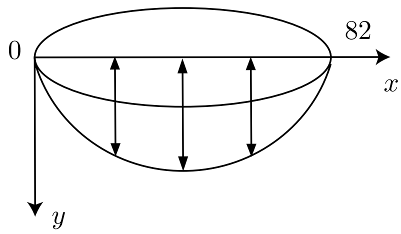


Figure 1

Les élèves ont obtenu les points suivants (l'unité étant le cm) :

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	82
y	0	1,8	3	4,2	5,2	5,9	6,3	6,5	6,5	6,3	5,9	5,3	4,6	3,7	2,7	1,8	0

1.1. Premier essai. Ils essayent, à l'aide du logiciel Regressi, de trouver l'équation de la parabole en introduisant les coordonnées des points trouvés. Mais en vain, car le logiciel ne fonctionne que pour des relations du type $y = f(x)$.

[1] De belles âmes s'offusqueront peut-être que l'on propose des sujets de TPE aux élèves au lieu de laisser libre cours à leur imagination foisonnante. Cela se passait dans une classe de Première S, option Sciences de l'ingénieur ; les contraintes de la SI expliquent ce dirigisme de la part des professeurs.

1.2. Deuxième essai. Je fais aux élèves un petit topo sur l'équation générale des coniques et je leur explique que, le repère n'étant pas le repère canonique, ils doivent chercher une équation sous la forme

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Ils répartissent les points en deux groupes et cherchent des polynômes normalisés. Ils obtiennent, pour les points d'abscisses 0, 20, 40, 60, 82, les équations suivantes (à l'aide d'une TI 89) :

$$x^2 - 2,65y^2 + 1,17xy - 82x + 228y = 0.$$

Et pour les points d'abscisses 0, 25, 45, 65, 82 :

$$x^2 + 1,65y^2 + 1,06xy - 81,94x + 205,67y = 0.$$

Il faut noter que les élèves ont pensé que prendre deux chiffres après la virgule était suffisant, compte tenu de l'imprécision de leurs mesures. Ils n'ont pas eu la curiosité de remplacer, dans l'équation, x et y par les coordonnées des points choisis. Or, quand on le fait, pour la première équation, les résultats s'échelonnent entre $-1,1$ et $-22,1$, au lieu de valeurs proches de 0. Ils n'ont pas davantage eu la curiosité de voir ce que cela donnait avec les points non choisis pour trouver l'équation.

D'autre part, ils sont très surpris que les deux équations, qui sont censées représenter à peu près la même courbe, aient des coefficients si différents. Entre temps ils ont troqué la TI 89 pour MAPLE, ce qui fait tout de même plus « classe ». Ils se dépêchent alors de tracer les représentations graphiques de ces deux courbes ainsi que les dix-sept points dont ils ont mesuré les coordonnées.

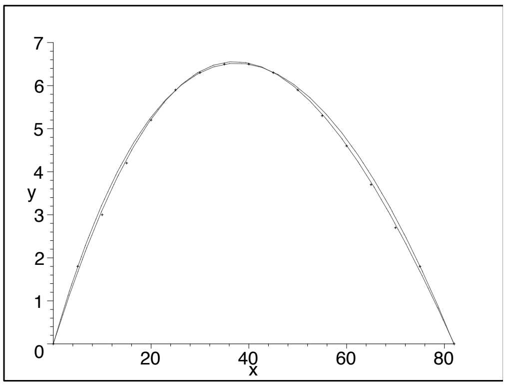


FIGURE 2

Ils sont très contents, tout cela se superpose à merveille. Ah, graphique quand tu nous tiens !

Là où commencent les ennuis. Le hic est que la première équation est celle d'une hyperbole et la deuxième celle d'une ellipse ! Sans entrer dans des considérations algébriques sur les formes quadratiques, ils s'en rendent compte en changeant de fenêtre. Ils obtiennent alors la figure 3.

Ce fiasco était prévisible. Cinq points déterminent une conique mais, la parabole étant d'excentricité 1, quatre points suffisent. La probabilité que cinq points, pris au hasard, déterminent une parabole est donc nulle. Or les coordonnées des points utilisés sont des valeurs approchées, d'où l'impossibilité d'obtenir une parabole. Les élèves ont pu s'en

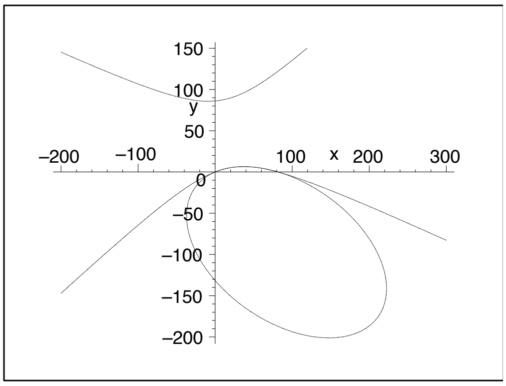


FIGURE 3

convaincre en utilisant Cabri Géomètre. En fixant quatre points et en déplaçant le cinquième, on passe d'une ellipse à une hyperbole sans jamais obtenir une parabole. Heureusement que la question n'était pas : ayant fait dix-sept observations de la position d'un astéroïde, déterminer s'il va entrer en collision avec la Terre...

1.3. Troisième essai. Ils me demandent si l'on ne peut pas bricoler les équations pour les écrire sous une forme plus simple. Oui, la réduction quadratique de Gauss le fait très bien, mais cela ne nous avancera pas.

1.4. Quatrième essai. J'ai alors anticipé auprès de ces élèves le cours sur les changements de repères. Pour effectuer un changement de repère, il suffit de connaître les coordonnées du nouveau centre $\Omega(a, b)$, le rapport k et l'angle θ de la similitude. Dans le nouveau repère on aura la relation $Y = X^2$. Les formules de changement de repère nous permettent de passer des coordonnées initiales à (X, Y) et d'obtenir ainsi les équations. MAPLE se chargera de trouver (a, b, k, θ).

Les élèves prennent les points d'abscisses 0, 25, 55, 82. Et voici les résultats :

a	$0,01$	$0,01$	3225	3255
b	1	1	57	57
k	$0,006$	$-0,006$	$-17,9$	$17,9$
θ	$-0,99$	$2,14$	$-0,11$	$3,13$

Avec les points d'abscisses 0, 20, 50, 82, ils trouvent (en supprimant les doublons liés aux deux orientations possibles du repère) :

a	$-0,07$	$35,8$
b	$0,004$	-1287
k	$0,005$	$-25,25$
θ	$2,64$	$-1,58$

La clarté n'est pas la première qualité de ces résultats. J'ai vite abandonné cette voie. Les élèves perdaient visiblement pied (il faut dire que pour un premier changement de repère, c'était un peu rude !).

1.5. Cinquième essai. Ils essayent de couper la courbe obtenue par une droite passant par l'origine du repère. Elle recoupe la courbe en un point A. La médiatrice de $[OA]$ serait l'axe cherché. Ils se rendent vite compte que c'est faux, et pourtant, ils n'ont jamais été si proches de la solution, comme on le verra à la fin.

1.6. Sixième essai. Ils pensent qu'en posant la « parabole » sur une table, le point de contact sera le sommet du paraboloïde. Là aussi, ils réalisent tout de suite que c'est faux.

À ce stade nous ne savons même pas si le sommet du paraboloïde est situé sur l'antenne parabolique.

1.7. Septième essai. Il fallait donc se débrouiller avec ce que l'on avait. Après tout, dans la zone qui nous intéressait, ces coniques approchaient fort bien la parabole cherchée. L'axe focal de l'ellipse ne devait pas être très éloigné de l'axe de symétrie de la parabole.

Je leur explique alors, que dans une conique à centre, il y a deux directions privilégiées, à savoir les axes de symétrie. Avec un peu de chance, l'axe focal sera proche de l'axe de symétrie de la parabole. En effet, on ne sait pas du tout comment a été coupé le paraboloïde.

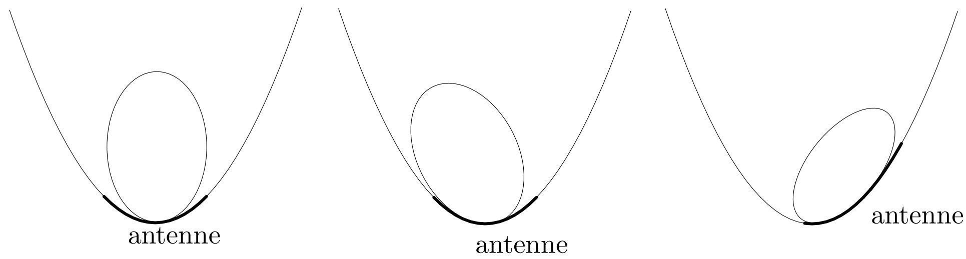


Figure 4

Sur la figure 4, on a représenté le cas « chanceux » à gauche et deux cas « non chanceux » mais possibles à droite.

Une boite noire appelée « vecteurs propres » permet de trouver ces axes. Ce cher maple leur fournit les résultats suivants. Pour

$$x^2 - 2,65y^2 + 1,17xy,$$

ils obtiennent les vecteurs propres de coordonnées $(0,15; -0,97)$ et $(-0,97; -0,15)$. Pour

$$x^2 + 1,65y^2 + 1,06xy,$$

ils obtiennent les vecteurs propres de coordonnées $(0,52; 0,85)$ et $(0,85; -0,52)$. Ce qui se visualise ainsi (figure 5) :

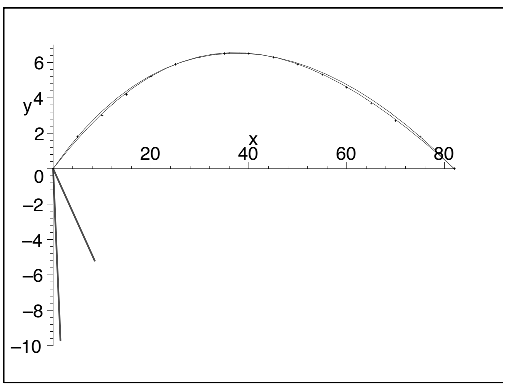


Figure 5

Pour ce qui est d'obtenir une idée de la direction de l'axe de la parabole, c'est raté ! Naturellement, les essais qu'ils font avec d'autres familles de points donneront des résultats tout aussi inexploitables.

1.8. Huitième essai. Je me plonge alors avec délices dans les cent dix pages que mon vieux livre de Terminale consacrait aux coniques. J'y redécouvre des propriétés oubliées, sous-tangentes, sous-normales et autres. Mais cette séquence nostalgie ne donne rien, car toutes ces propriétés supposent que l'on ait déjà l'axe de la parabole.

Ce TPE commence à m'échauffer sérieusement les oreilles. Il devient urgent de réfléchir au lieu de foncer tête baissée dans les calculs. Mais, au moins je ne peux pas me plaindre de l'absence de mathématiques dans ce TPE.

1.9. Neuvième essai. Suit alors une séance où l'on reprend le problème à zéro.

Dans le repère lié à l'antenne on a les coordonnées approximatives de dix-sept points. Il faut trouver, dans ce repère, une parabole qui approche au mieux ces dix-sept points. Une parabole est déterminée par son foyer $F(a, b)$ et sa directrice d d'équation $y = mx + p$. Par quatre points il passe une parabole. On choisit quatre points parmi les dix-sept. Pour chacun des quatre points choisis, on a $MF = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur d. On obtient alors le foyer et la directrice. Ensuite, pour chaque point M non pris, on évalue l'erreur commise

$$\text{erreur} = |MF - MH| \,.$$

Puis on somme toutes ces erreurs, la somme est notée sommerreur. On gardera la parabole pour laquelle sommerreur est la plus petite. Par exemple en choisissant les points d'abscisses 0, 25, 55, 82, on obtient :

```
> restart;
> P:=array(1..2,1..17,[[0,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,82],
> [0,1.8,3,4.2,5.2,5.9,6.3,6.5,6.5,6.3,5.9,5.3,4.6,3.7,2.7,1.8,0]]);
> d:=(x,y)->(m*x-y+p)^2/(1+m^2)-((x-a)^2+(y-b)^2);
> sol:=solve(d(0,0)=0,d(25,5.9)=0,d(55,5.3)=0,d(82,0)=0,p>0);
> assign(sol);
> erreur:= k->abs(sqrt((P[1,k]-a)^2+(P[2,k]-b)^2)-
> abs(m*P[1,k]-P[2,k]+p)/sqrt(1+m^2));
> sommerreur:=0;
> for k from 1 to 17 do sommerreur:=sommerreur +erreur(k) od;
```

On trouvera en annexe des remarques concernant ce programme. Voici les résultats des différents tests effectués par les élèves.

Abscisses des points choisis	a	b	m	p	sommerreur
0 25 55 82	7	-40	0,65	47,55	1,81
0 35 45 82	10	-42	0,54	49,93	1,82
0 30 60 82	7	-35	0,73	-43,1	1,92
0 20 60 82	8	-4	0,61	49,35	2,07
0 20 40 82	12	-45	0,49	525,39	2,11
10 20 40 82	100	14	-8,82	899,91	6,51

On obtient finalement :

```
> with(plots);
> parabole:=implicitplot((m*x-y+p)^2/(1+m^2)-(x-a)^2-(y-b)^2=0,
> x=-100..100,y=-80..80):
> directrice:=plot(m*x+p,x=-100..100);axe:=plot(-(x-a)/m+b,x=-100..100);
> foyer:=plot([[7.15,-39.25]],color=black,style=point);
> points:=plot([[0,0],[5,1.8],[10,3],[15,4.2],[20,5.2],[25,5.9],
> [30,6.3],[35,6.5],[40,6.5],[45,6.3],[50,5.9],[55,5.3],[60,4.6],
> [65,3.7],[70,2.7],[75,1.8],[82,0]],x=-100..100,y=-80..80,
> color=black,style=point);
> display(parabole,directrice,axe,foyer,points);
```

L'antenne correspond à la partie de la parabole avec les dix-sept points surajoutés.

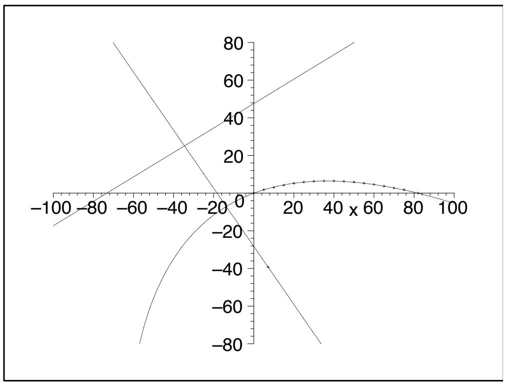


Figure 6

Voici, enfin, sur la figure 7, la visualisation des rayons provenant du satellite et qui se réfléchissent sur le récepteur. On voit également le bras qui relie le capteur au bord de la parabole. Les axes ont été tournés de façon à mettre la parabole dans sa position réelle.

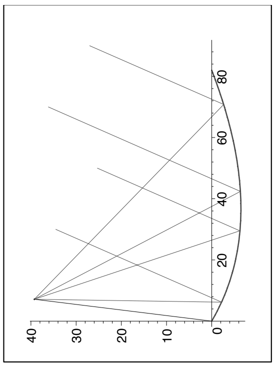


Figure 7

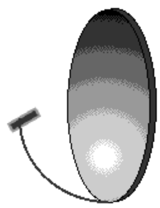


Figure 8

Le récepteur est un cône tronqué d'une dizaine de cm de long. L'antenne elle-même est un fil de métal, d'environ 1,5 cm de long, placé au fond du cône. Le point trouvé pour le foyer se situe, à peu près, au fond du cône. Le cône peut servir à éliminer les rayonnements parasites par réflexions successives.

Ensuite les élèves ont collé trois carrés de papier réfléchissant sur la parabole. Ils ont placé, à quelques mètres de la parabole, trois émetteurs lasers orientés de telle sorte que les rayons émis soient parallèles à l'axe de la parabole. On voyait très bien, dans une ambiance

« Starwars », les trois rayons réfléchis converger vers le récepteur. La photographie (figure 9) montre l'équipe de Terminale essayant de faire converger sur le foyer trois rayons laser parallèles.

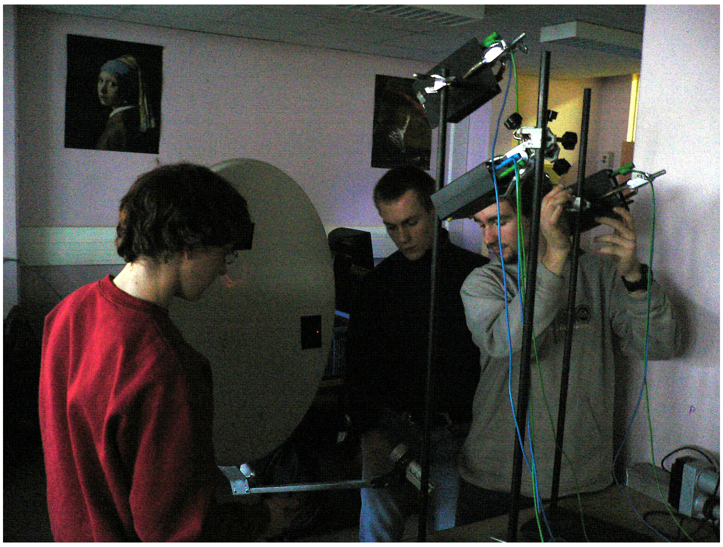


FIGURE 9

2. Le pourquoi du comment

Reste *la* question. Je dis bien LA question. Pourquoi le paraboloïde est-il coupé de la sorte ? Le professeur de SI avec qui j'encadrais ce TPE pensait que c'était pour améliorer la réception, mais sans plus. Les vendeurs d'antennes paraboliques, interrogés par les élèves, n'en avaient aucune idée. Sauf un, qui pensait que c'était pour empêcher l'eau de pluie de stagner sur l'antenne. La réponse m'est venue d'un de mes anciens élèves, aujourd'hui professeur à Télécom Paris. Si l'on coupait le paraboloïde perpendiculairement à l'axe, alors le bras portant le récepteur intercepterait une partie du faisceau qui aurait pu être collecté. Le paraboloïde est coupé de telle sorte que la totalité de sa surface renvoie le faisceau. Cela se voit très bien sur le dessin ci-dessus. Les antennes ainsi coupées sont appelées antennes « offset ».

Il est bien connu, que pour les TPE, les relations sont utiles.

Les cordes qui dégonflent la parabole. Les bonnes lectures aussi sont utiles. À peine ce TPE était-il terminé que je trouvais dans *Quadrature* la propriété suivante :

Quand on coupe une parabole par deux cordes parallèles, la droite joignant les milieux des deux cordes est parallèle à l'axe de la parabole.

C'est élémentaire à démontrer, et, si nous l'avions su, le TPE aurait été considérablement simplifié.

Morale de l'histoire. Pour les élèves, vaut-il mieux, avoir un professeur savant et faire un TPE tranquille, ou bien, avoir un professeur moins savant et un TPE plus sportif ?

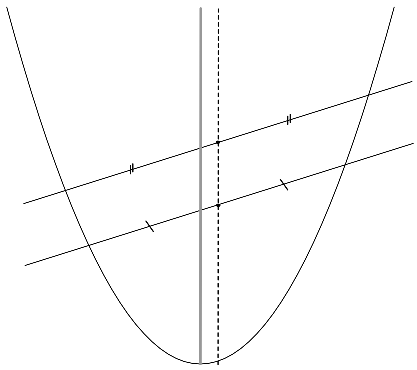


FIGURE 10

Perspectives. Je persiste à penser que l'on peut faire un TPE « tranquille » sur ce sujet. C'est-à-dire avec un paraboloïde coupé perpendiculairement à l'axe. C'est le cas de certaines antennes radar (comme sur la figure 11). Le récepteur peut comporter un deuxième réflecteur, qui est un hyperboloïde destiné à mieux concentrer le faisceau. Là, au moins, pas de danger que les élèves rapportent une antenne pour se confronter à la réalité.

On peut consulter le livre *Les Maths en pratique en Terminale* CDE de l'IREM de Strasbourg, chapitre Coniques et radars (Bordas 1990), et le fabuleux site de Serge Mehl `http://chronomath.com`.

- Les antennes paraboliques peuvent aussi servir d'émetteur. La Cité des Sciences et de l'Industrie en montre un exemple.
- Il y a aussi les miroirs sphériques utilisés par Archimède à Syracuse ou dans les grands radiotélescopes.

FIGURE 11

FIGURE 12

- Il existe des antennes permettant de capter plusieurs satellites comme celle que l'on voit sur la publicité reproduite figure 12[(2)].
- Il existe même des antennes plates (le bonheur), avec un dispositif électronique pour amplifier le signal reçu.

Tous ces exemples peuvent faire des sujets de TPE, mais je ne garantis pas la tranquillité.

[(2)] La rédaction décline toute responsabilité quant à l'orthographe de cette annonce publicitaire.

3. Post-scriptum

Cette année j'ai repris ce TPE, mais avec des élèves de Terminale... et avec le « théorème-miracle ». Bien entendu on va droit au but, et avec plus d'autonomie de la part des élèves. Mais cela reste un TPE très mathématique à cause d'un changement de repère compliqué pour nos élèves.

En effet les mesures se font dans le repère (O, x, y). Puis, après avoir trouvé le vecteur joignant le milieux des deux cordes (la direction v sur la figure), on se place dans le repère (O, X, Y). Dans ce repère, la parabole a une équation plus classique, de la forme

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

Là on trouve les coordonnées du sommet Ω de la parabole. Puis, dans le repère (Ω, X', Y'), la parabole a une équation de la forme

$$Y'^2 = 2pX'.$$

Alors le foyer F a pour coordonnées $(p/2; 0)$. Il suffit enfin de retourner au repère d'origine.

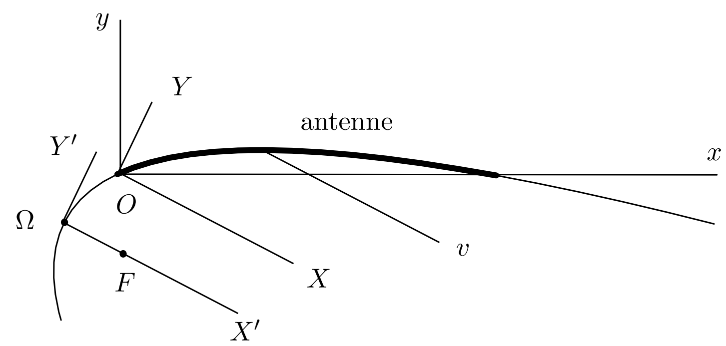


FIGURE 13

Une des difficultés provient de la précision des mesures. Et en particulier pour la corde intérieure à la parabole qui est très aplatie. En effet, comme les points joignant les milieux des cordes sont proches, une petite erreur à ce niveau entraîne une erreur importante sur la direction de l'axe focal.

De plus, le bord de l'antenne parabolique étant arrondi, il est déjà difficile de savoir où commence exactement le paraboloïde. Un groupe a trouvé 82 cm et l'autre 81,5 cm pour le grand diamètre de l'antenne.

Là où les premiers avaient trouvé une ellipse et une hyperbole, les seconds ont, eux, trouvé, au départ, deux ellipses.

Faire des mesures précises sur une antenne parabolique peut faire l'objet d'un TPE math-physique.

Annexe

Choix des points. Pour choisir quatre points parmi dix-sept on a, *a priori*, 2380 possibilités. Il semble raisonnable de prendre les deux points situés au bord de l'antenne. En effet on est sûr que l'ordonnée y est nulle. L'essai fait avec les points d'abscisse 10, 20, 40 et 82 place le foyer dans le mauvais demi-plan !

Les élèves ont testé des points à peu près régulièrement répartis.

Choix de l'équation et de la fonction MAPLE pour la résoudre. Pour s'initier à MAPLE, les élèves avaient le livre « MAPLE sugar » de Guy Le Bris, Cassini 1999. Quand on teste la méthode avec des points de la parabole d'équation $y = x^2$, on obtient :

Abscisses des points	Équation	MAPLE	Solution	Temps calcul
$-2, 0, 2, 3$	$MF^2 = MH^2$	solve	$m = 0$, $p = -1/4$, $b = 1/4$, $a = 0$ $m = -2/3$, $a = 1921/546$, $p = 2929/252$ $b = 3279/364$	7 s
		fsolve	p $= 11,62301$, $b = 9,008241$, $a = 3,518315$ $m = -0,6666667$	1 s
	$MF = MH$	solve		>10 mn
		fsolve	Échec	
$-2, 0, 1, 10$	$MF^2 = MH^2$	solve	$m = 0$, $p = -1/4$, $b = 1/4$, $a = 0$ $m = -2/11$, $a = -41/30$, $p = -305/132$ $b = -109/60$	10 s
		fsolve	$a = -1,36667$, $b = -1,81667$ $m = -0,181818$, $p = -2,310606$	2 s
	$MF = MH$	solve		>10 mn
		fsolve	Échec	

Les deuxièmes solutions, à rejeter, correspondent à une parabole qui passe presque par les quatre points choisis, mais pas du tout par d'autres points de la parabole $y = x^2$.

Naturellement le choix s'est porté sur $MF^2 = MH^2$ et sur solve.

Nos élèves, abreuvés d'équations du second degré et d'intégrales calculées à l'aide de primitives, croient que les mathématiques sont faites pour donner des solutions exactes — la solution étant d'autant plus exacte qu'elle provient d'une calculatrice plus haut de gamme. Là ils ont été servis !

Mesure de l'écart entre les dix-sept points et la parabole trouvée. Additionner les nombres $|MF - MH|$ était la méthode la plus simple.

– À partir du foyer et de la directrice, on aurait pu chercher l'équation de la parabole. Puis additionner les distances entre les dix-sept points et la parabole.
– On pouvait prendre la distance parallèlement à l'axe de la parabole, comme les élèves savent le faire avec l'asymptote.
– On pouvait aussi prendre la vraie distance entre le point et la parabole.

Comparer ces trois méthodes est un sujet de TPE en soi !

Francis Jamm
Lycée Lavoisier
Mulhouse
francis.jamm@ac-strasbourg.fr

Les TPE du vélo

Marie-Odile Sauvanaud

Résumé. Je fais état d'une expérience d'encadrement d'un TPE sur l'amélioration de la suspension d'un VTT, qui a mené à l'étude d'équations différentielles linéaires d'ordre 2.

1. En option sciences de l'ingénieur

Depuis 2000, année de la création des TPE, je fais partie d'une équipe encadrant des TPE en première et terminale S, option Sciences de l'ingénieur.

Les TPE sont des « Projets pluridisciplinaires à caractère scientifique et technique ». Le sujet doit respecter le référentiel des Sciences de l'ingénieur et les thèmes nationaux fixés par le Bulletin officiel.

Nous sommes quatre, deux professeurs de Sciences de l'ingénieur (génie électrique et génie mécanique), un professeur de sciences physiques et un professeur de mathématiques. Les séances de TPE ont lieu pendant les heures de Sciences de l'ingénieur et dans le laboratoire de Sciences de l'ingénieur. Les professeurs d'enseignement général sont « invités » et se partagent 30 heures-années.

Je travaille dans un lycée polyvalent, il n'y a qu'une seule première S et une seule terminale S, recrutant essentiellement sur les quatre secondes du lycée. Nous invitons les élèves de seconde qui envisagent de faire une S à assister à des oraux blancs de TPE en Terminale ou en 1^{re}. Aussi ont-ils une idée de ce qu'est un oral de TPE. Nous leur demandons ensuite de réfléchir à un futur TPE qui soit en rapport avec une de leurs passions ou/et avec un projet professionnel.

2. Amélioration du vélo

A la rentrée de première, nous commençons nos TPE. Et chaque année un groupe de deux ou trois élèves souhaite travailler sur l'amélioration d'une partie de leur VTT. Le feu vert est donné par l'équipe encadrante. Ce choix n'a que des avantages.

2.1. Documentation. Le premier trimestre est consacré au cahier des charges, à l'analyse fonctionnelle et technique et à la recherche documentaire.

Les élèves peuvent, comme leurs camarades en lycée d'enseignement général, passer trop de temps sur Internet. Ils trouveront les sites des fabricants, moins avares d'indications techniques que les fabricants d'hélicoptères ou de moteurs de voitures de course qui les intéressent aussi traditionnellement.

Je leur indique le site de l'ENS Cachan, sur lequel ils peuvent lire les questions que d'autres élèves ont posées en étudiant les mêmes systèmes et les réponses qui leur ont été données. Ces réponses englobent des adresses de sites universitaires respectables et des références à des problèmes théoriques.

La présence des professeurs d'enseignement général va bientôt se justifier pleinement. Ils pourront aussi poser des questions aux étudiants qui collaborent à ce site.

Mais l'équipe encadrante et surtout notre documentaliste demandent aux élèves d'analyser l'avancement de leurs recherches documentaires pour limiter les pertes de temps.

Nos élèves ont d'autres ressources pour se documenter : les marchands de VTT, les revues spécialisées, les notices des constructeurs. Ils peuvent aussi aller dans un lycée professionnel et y rencontrer des professeurs des sections cycles qui forment les futurs professionnels de la vente et de l'entretien des cycles. Ceux-ci leur proposent même de les aider à fabriquer leurs nouvelles pièces en grandeur réelle. Ils ont surtout la ressource d' étudier leur propre VTT soit dans leur garage, soit même au lycée en apportant les pièces qu'ils souhaitent améliorer.

2.2. Amélioration des suspensions. Notre groupe souhaite améliorer les suspensions du VTT et le lycée a même les moyens d'acheter une fourche avant ! Les élèves vont la démonter et comprendre qu'il y a deux éléments : la suspension et l'amortisseur.

La suspension va exercer un frottement proportionnel à la vitesse et l'amortisseur une force de rappel proportionnelle à l'écrasement dû aux chocs. Les professeurs savent qu'en Terminale le principe fondamental de la dynamique permettra d'établir une équation différentielle et de la résoudre. En première, les élèves modélisent les pièces sur SOLIDWORKS, trouvent dans les notices techniques la formule donnant le coefficient de raideur de l'amortisseur en fonction de ses caractéristiques (diamètre des spires, nombre de spires, matériaux). De même pour le frottement de la suspension.

Les élèves font spontanément des tableaux sur EXCEL pour recenser les différents modèles existants, leurs prix, et guider leurs choix. Les professeurs d'enseignement général connaissent bien EXCEL et peuvent les aider. Ensuite ils peuvent représenter sur EXCEL les fonctions donnant les coefficients en fonction de telles ou telles données. Les études de fonctions sont maîtrisées dès la fin du premier trimestre de la première et l'on peut déjà utiliser des maths pour optimiser les choix. En fin de première, l'étude des pièces et du système statique est présentée.

2.3. Les données. Le coefficient k de raideur de l'amortisseur se calcule par la formule

$$k = \frac{Gd^4}{8N_a D^3},$$

où

- G est le module d'élasticité transversal du matériau ; l'amortisseur à notre disposition est en acier et, pour les aciers, $G = 80000\,\mathrm{N/mm^2}$;
- d est le diamètre du fil de l'amortisseur en millimètres ; on mesure $d = 3\,\mathrm{mm}$;
- N_a est le nombre de spires actives (c'est-à-dire qu'il ne faut pas prendre en compte les spires qui sont meulées), dans notre cas $N_a = 29,5$;
- D est le diamètre d'enroulement en millimètres, dans notre cas, $D = 18,3\,\mathrm{mm}$. Voir la figure 2.

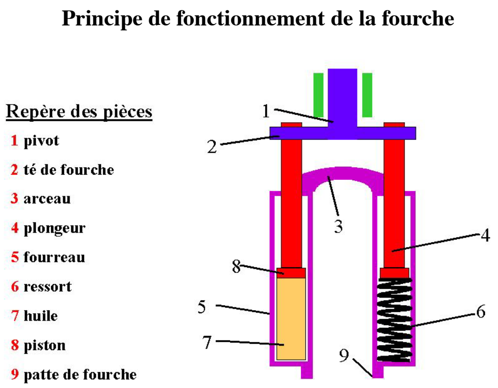


FIGURE 1

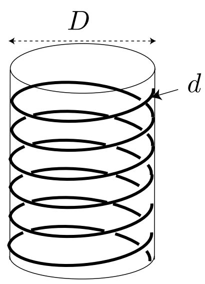


FIGURE 2. Un amortisseur

Par conséquent,

$$k = \frac{80000 \times 3^4}{8 \times 29,5 \times 18,3^3} = 4.81\,\mathrm{N/mm}.$$

Pour simplifier les prochains calculs, on prendra $k = 5\,\mathrm{N/mm}$. Comme les deux amortisseurs sont parallèles et identiques, on prendra

$$k_1 = 10\,\mathrm{N/mm} = 10000\,\mathrm{N/m}.$$

Le coefficient k_2 est le coefficient d'amortissement de la fourche. Les élèves n'ont pas pu déterminer sa valeur expérimentalement. Le prof de mécanique leur a donné $k_2 = 500\,\mathrm{N/(m/s)}$.

2.4. Équations différentielles. En terminale les élèves sont rapidement initiés aux équations différentielles, aussi bien en Sciences de l'ingénieur qu'en physique ou qu'en mathématique. Trois profs qui leur parlent de la même chose, presque en même temps ! Et en TPE il faudra s'en servir. L'affaire devient intéressante !

Nos élèves écrivent leur principe fondamental de la dynamique avec les valeurs numériques définies par les pièces créées. En notant y_0 la hauteur de la fourche rigide, y_2

la hauteur de la route (par rapport à la valeur initiale) et y_1 la hauteur de la fourche sous l'effet de l'amortissement (voir la figure 3), l'équation différentielle s'écrit

$$k_1(y_2 + y_0 - y_1) - k_2(y_1' - y_2') - mg = my_1'',$$

ce qui donnera

$$y_1'' + \frac{k_2}{m}y_1' + \frac{k_1}{m}y_1 = \frac{k_2}{m}y_2' + \frac{k_1}{m}y_2 + \frac{k_1}{m}y_0 - g.$$

Ils tentent de la résoudre avec leur TI 89. En principe, c'est possible, mais avec leurs valeurs numériques, c'est illisible. Nous allons donc utiliser DERIVE et la fonctionnalité D-SOLVE IV $(p, q, r, x_0, y_0, y_0')$.

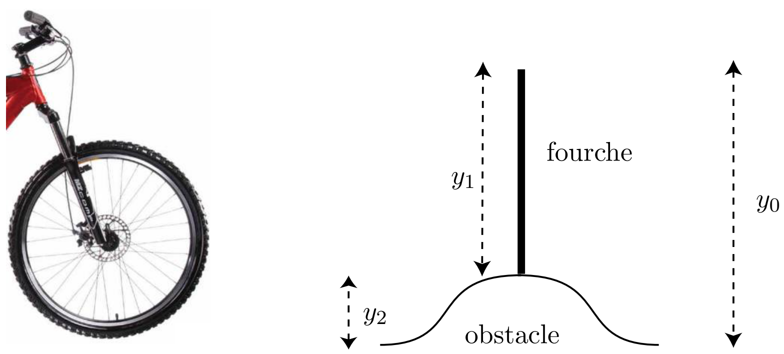


FIGURE 3. Un obstacle

Le professeur de mécanique me demande de faire un rapide exposé à toute la classe, d'autant plus que d'autres groupes ont besoin d'équations différentielles linéaires d'ordre 2. Celles-ci ne sont pas au programme mais n'en sont pas loin. Les élèves savent

– que les équations $y' = ay + b$ ont pour seules solutions les fonctions

$$y(t) = k\exp(at) - b/a;$$

– en physique, ils ont vu que les équations $y'' = -\omega^2 y$ ont pour solutions

$$y(t) = a\cos(\omega t + \varphi).$$

Ils connaissent aussi l'écriture exponentielle des complexes. Ils leur paraît donc tout naturel que je cherche les solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 sous forme d'exponentielle, puis de tomber sur une équation caractéristique de degré 2 et de calculer son discriminant. Celui-ci sera négatif, les solutions seront deux nombres complexes conjugués et les solutions seront données explicitement.

Le principe étant compris, nous passons à la résolution sur DERIVE. Les élèves tiennent beaucoup à leurs valeurs numériques précises. Avec nos valeurs numériques ($k_1 = 10000$, $k_2 = 500$, $m = 30$),

$$y_1'' + \frac{50}{3}y_1' + \frac{1000}{3}y_1 = \frac{500}{30}\pi\sin(20\pi t) + \frac{10000}{30}(-0.05\cos(20\pi t) + 0.05) - 10.$$

Sur DERIVE on rentrera :

$$\text{DSOLVE2\_IV}\left(\frac{50}{3}, \frac{1000}{3}, \frac{50}{3}\pi\sin(20\pi x) + \frac{50}{3}\cos(20\pi x) + \frac{20}{3}, x, 0, 0.97, 0\right).$$

Je peux à peine négocier une précision à 10^{-2} ! Mais si les solutions sont illisibles, les courbes obtenues sont intéressantes. Les élèves acceptent enfin un exemple simple fictif et du coup les solutions sont lisibles. J'ai réalisé là que les exemples simples fictifs qui illustrent nos cours de maths sont aussi abstraits pour eux que des exemples littéraux et de fait pas du tout simples !

Les élèves obtiennent donc différentes solutions en modifiant les coefficients de raideur de l'amortisseur ou celui des frottements de la suspension. Ils les comparent avec succès avec celles obtenues sur leurs logiciels MECA 3D.

Et c'est vraiment un grand succès de voir que deux approches différentes d'un même problème donnent les mêmes courbes.

2.5. Une suite, un second membre. Mais le problème a une suite. Le choc auquel est soumise la suspension du VTT a une fin, qui se traduit par la fin de l'écrasement de l'amortisseur et une nouvelle équation différentielle. DERIVE n'accepte pas un second membre d'équation différentielle d'ordre 2 avec une fonction définie par morceaux. Les élèves peuvent comprendre que cette fonction n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais je ne pense pas que ce soit le problème de DERIVE.

Je leur propose d'appliquer la méthode d'Euler en calculant la vitesse à la fin du choc, qui sera la vitesse initiale de notre nouvelle équation différentielle. Nous obtenons ainsi une nouvelle fonction, puis nous recollons nos deux morceaux pour obtenir une solution, puis d'autres solutions en changeant les valeurs de k. Ces solutions sont plus régulières que celle qui simule le choc et c'est justement ce qui mérite le nom d'amortissement.

Nous constatons enfin que les valeurs numériques des pièces des fabricants sont bonnes et ne peuvent pas être vraiment améliorées. Les élèves ont pu répondre à leur problématique : « Peut-on améliorer la suspension d'un VTT ? »

Conclusion

En encadrant ces TPE j'ai constaté que les élèves comprenaient aisément les formules de maths nécessaires mais avaient du mal avec leurs applications numériques. Les fautes les plus fréquentes proviennent des unités choisies et de formules qui ne sont pas homogènes. Ils ont appris ainsi à repérer ces erreurs.

Marie-Odile Sauvanaud
Lycée Louis Marchal
Molsheim
odile.sauvanaud@ac-strasbourg.fr

Du pendule au vélo, la méthode d'Euler dans le cadre des TPE

Jean-Pierre Darou

Résumé. Je montre comment utiliser la méthode d'Euler et un tableur pour résoudre des équations différentielles décrivant le pendule ou l'amortissement de la fourche d'un VTT.

1. Intérêt de la méthode d'Euler et présentation de deux exemples d'utilisation

Dans le domaine des sciences appliquées, en mécanique, en physique, en chimie, en biologie, etc., on sait que la modélisation se traduit souvent par la résolution d'une équation différentielle. L'élève qui prépare un TPE sera donc assez fréquemment conduit à une telle résolution, ce qui lui donnera l'occasion de présenter une activité mathématique de réel intérêt.

Au lycée, les élèves ne sont en mesure de résoudre de manière exacte que quelques cas très simples ; on sait que les situations effectivement rencontrées, même en les simplifiant, sont beaucoup plus complexes et se ramènent rarement aux seules équations linéaires, du premier ordre, à coefficients constants, accessibles en terminale S.

Toutefois, dès le début de l'année scolaire, les élèves ont eu l'occasion de découvrir la méthode d'Euler, ils ont ainsi eu également la possibilité de travailler avec un tableur, ils disposent donc de tous les outils nécessaires pour résoudre de manière approchée des équations différentielles plus compliquées que l'équation $y' = ky$ qui figure au programme. On verra qu'il n'est pas très difficile d'expliquer comment la méthode d'Euler s'applique à des équations différentielles du second ordre.

Évidemment, et c'est là le point faible de ces méthodes qu'il est honnête, je pense, de leur signaler, ils ne sont pas en mesure d'apprécier les erreurs commises et la fiabilité (convergence, stabilité) de la méthode. Au mieux pourra-t-on leur montrer, sur des exemples où la solution est connue, les écarts entre la solution exacte et la solution approchée obtenue.

Lors de la première année d'existence des TPE, mes élèves s'étaient intéressés au mouvement du pendule. C'étaient de bons élèves qui avaient été primés au rallye mathématique, ce qui leur avait valu d'être invités à l'Hôtel du Département où se tenait une exposition mathématique. Ils y avaient découvert le pendule de Kepler, ils avaient d'abord voulu l'étudier, mais ils s'étaient vite aperçus de la complexité du travail et avaient fini par se contenter plus modestement de la classique étude du pendule simple. Je leur avais alors suggéré d'utiliser la méthode d'Euler pour résoudre l'équation différentielle qu'ils avaient obtenue. Je leur avais ensuite proposé de prendre en compte un amortissement proportionnel à la vitesse et d'essayer, en salle de physique, de déterminer expérimentalement la valeur de la constante de proportionnalité.

Je n'ai malheureusement pas retrouvé leurs travaux ; je me souviens qu'ils n'avaient pas eu le temps de terminer la dernière partie, mais que tout le reste avait été traité de manière très satisfaisante.

Je donne en deuxième partie l'essentiel de leur travail que j'espère avoir fidèlement reconstitué et, à la fin, complété.

J'ai récemment participé à l'animation de la journée de formation proposée par le groupe TPE de l'IREM auquel j'appartiens. C'est à cette occasion que j'ai découvert le TPE intitulé

« les mathématiques du vélo » que présente Marie-Odile Sauvanaud (dans ce numéro, page 35).

La modélisation de l'étude de la suspension avant conduit à une équation différentielle que ses élèves avaient résolue en utilisant d'une part le logiciel DERIVE, d'autre part le logiciel spécialisé MECA 3D. Dans les deux cas, cette résolution se réduit à l'entrée des données et la sortie des résultats sans que les élèves puissent comprendre comment ils ont été obtenus. Je me suis alors amusé à jouer le rôle de l'élève et à utiliser la méthode d'Euler pour résoudre cette équation. Les collègues qui assistaient à cette journée de formation ont pu constater toute la souplesse de l'utilisation d'un tableur qui permet de modifier très facilement les différents paramètres et de tenir ainsi virtuellement le rôle d'un ingénieur dans son bureau d'étude.

Je présente ce travail en troisième partie.

2. Le pendule simple

Le pendule simple est formé d'une masse ponctuelle m suspendue par un fil de longueur ℓ et de masse négligeable. Lorsque le pendule fait un angle a avec la verticale, le vecteur poids se décompose en deux forces, l'une opposée à la tension du fil et l'autre, notée F, normale au fil, qui ramène le pendule vers sa position de repos. En négligeant les forces de frottement, on déduit que

$$F = mg\sin a = -m\ell a'',$$

où $-\ell a''$ est l'accélération angulaire du pendule, la valeur de a est donc à tout moment solution de l'équation différentielle

$$a'' = -(g/\ell)\sin a.$$

On obtient ensuite l'écart $e = \ell a$ du pendule avec la verticale, qu'il est plus intéressant de visualiser sur le graphique. Les conditions initiales sont la valeur de l'angle a et celle de a' qu'on peut choisir égale à 0, ce qui est le cas lorsqu'on écarte le pendule avant de le laisser osciller sans donner d'impulsion.

Pour pouvoir se ramener à une équation que l'on sait résoudre (mais qui n'est plus actuellement au programme de terminale), on confond souvent $\sin a$ et a, ce qui est licite pour des angles suffisamment petits. Cette approximation n'est pas utile avec la méthode d'Euler, on pourra donc envisager des angles quelconques. On placera dans des cellules du tableur la valeur(1) h (par exemple $h = 0,01$) du pas choisi, la valeur ℓ (par exemple $\ell = 2$ m) de la longueur du pendule, la valeur de g (par exemple $g = 9,81N$) et la valeur initiale de a en radians (on peut par commodité la donner d'abord en degrés, puis faire la conversion). Il est enfin commode de nommer k une cellule contenant la valeur g/ℓ. Je donne à ces cellules les noms g, h, k, ℓ et a.

On utilise cinq colonnes B à F contenant les valeurs de t (temps écoulé), a'', a', a et e. En première ligne (par exemple dans les cellules B3 à F3) on porte les valeurs initiales. En deuxième ligne (cellules B4 à F4) on applique la méthode d'Euler : la nouvelle valeur de a' est

$$a'_{n+1} = a'_n + a''_n h,$$

la nouvelle valeur de a est

$$a_{n+1} = a_n + a'_n h,$$

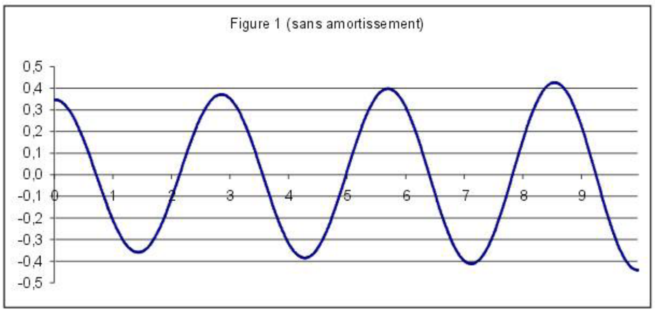
enfin la nouvelle valeur de a'' est $a'' = -ka$ d'après l'équation différentielle.

(1) Toutes les grandeurs sont exprimées dans le système SI, les masses en kg, les longueurs en m et les temps en secondes.

B3 à F3	0	$= -k * \sin(\mathrm{E3})$	0	$= a$	$= \ell * \sin(\mathrm{E3})$
B4 à F4	$= \mathrm{B3} + h$	$= -k * \sin(\mathrm{E4})$	$= \mathrm{D3} + \mathrm{C3} * h$	$\mathrm{E3} + \mathrm{D3} * h$	$= \ell * \sin(\mathrm{E4})$

Les lignes suivantes s'obtiennent immédiatement en sélectionnant les cinq cellules B4 à F4 et en tirant vers le bas avec la souris (jusqu'à la ligne 1003 pour une étude sur 10 secondes).

Le graphique 1 qui suit donne le résultat obtenu avec un angle a initial de 10°. On est alors dans le cas dit des petits angles et on devrait obtenir une sinusoïde. On constate que c'est à peu près le cas mais que l'amplitude qui, en l'absence de frottements, devrait rester constante, est amplifiée ; en revanche la période est stable, un examen de la table des valeurs conduit aux valeurs successives de 0,75 ; 3,59 ; 6,43 et 9,28 secondes (écart égal à 0) donc à une période de 2,84 secondes alors que $2\pi\sqrt{\ell/g} \sim 2,837$. La précision sur la période est excellente !



Un complément intéressant consiste à prendre en compte un amortissement de l'amplitude des oscillations proportionnel à la vitesse angulaire. Il est alors facile de voir que l'équation différentielle devient dans ce cas

$$a'' = -ma' - (g/\ell)a,$$

où m est le coefficient d'amortissement. Ce coefficient est inconnu mais pourrait être déterminé expérimentalement (il faut noter qu'un « résidu » de ce coefficient sert à compenser l'augmentation de l'amplitude due aux erreurs résultant de la méthode). Comme je l'ai signalé, ce travail n'avait pas été fait par les élèves qui manquaient de temps.

Pour ce qui est du tableur, la seule modification à apporter concerne la cellule C4 (nouveau calcul de a) qui devient $= -k * \sin(\mathrm{E4}) - m * \mathrm{D4}$. La figure 2 donne les résultats constatés avec un angle initial de 10° et un coefficient m égal à 0,2. On constatera toutefois qu'en introduisant un coefficient de 0,05, on rétablit une amplitude sensiblement constante, ce dont il faudrait tenir compte pour une vérification expérimentale de la valeur de m.

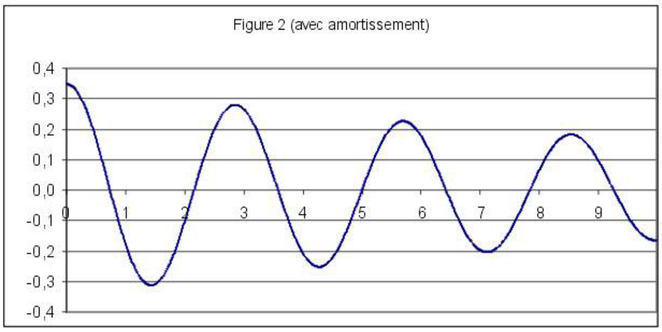
On pourra enfin observer le comportement du pendule dans le cas où l'angle initial est important (par exemple 90°).

3. Mathématiques du vélo, étude de la suspension de la fourche

L'étude théorique a été présentée dans le TPE réalisé par les élèves de Marie-Odile Sauvanaud, je la reprends cependant rapidement en précisant les notations que j'ai utilisées.

On note y_0 la hauteur de la fourche rigide, y_2 la hauteur de la route (par rapport à la valeur initiale) et y la hauteur de la fourche sous l'effet de l'amortissement. Les forces qui s'exercent sur la fourche sont :

– le poids mg dirigé vers le bas ;



– la force du ressort, dirigée vers le haut, égale à $a(y_2 + y_0 - y)$, (la constante a est la raideur du ressort) ;
– la force due à l'amortissement, dirigée vers le bas pour $y' - y_2' > 0$, égale à $-b(y' - y_2')$, la constante b est le coefficient d'amortissement de la fourche.

Le principe fondamental de la dynamique conduit à l'équation différentielle

$$a(y_2 + y_0 - y) - b(y' - y_2') - mg = my''.$$

En prenant $y_0 = 1$, on en déduit que

$$y'' = -\frac{b}{m}y' - \frac{a}{m}y + \frac{a}{m}y_2 + \frac{b}{m}y_2' + \frac{a}{m} - g.$$

Pour bien mettre en évidence l'effet de l'amortissement, on superpose deux graphiques : celui qui donne les variations de la hauteur y de la fourche et celui qui donne les variations de la fonction $c(t) = y_2 + y_0 - mg/a$ (on garde l'effet du poids qui comprime le ressort et baisse donc la hauteur $y_2 + y_0$ qu'aurait une fourche rigide, mais on ne prend pas en compte les effets de l'amortissement).

On portera les paramètres m (par exemple $m = 30\,\mathrm{kg}$), a (par exemple $a = 5000$), b (par exemple $b = 500$), le pas h en secondes (par exemple $h = 0,001$) dans des cellules de même nom. Il est également commode de porter dans des cellules les valeurs qu'on gardera fixes, $y_0 = 1$ et $g = 9,8\,\mathrm{N}$.

Je reprends d'abord le travail des élèves en modélisant l'irrégularité de la route par un dos d'âne d'équation $y_2(t) = 0,05(1 - \cos(20\pi t))$ avec t compris entre 0 et 0,1 seconde. Si le cycliste roule à 18 km/h, on vérifiera que ce dos d'âne s'étend sur 50 cm et a une hauteur maximale de 10 cm. Pour t supérieur à 0,1 seconde, la route redevient horizontale et $y_2(t) = 0$.

La feuille de calcul comporte huit colonnes avec dans l'ordre :
– la valeur de t (temps écoulé) en colonne E ;
– les valeurs de y'', de y', de y en colonnes F, G et H ;
– la valeur du second membre

$$f(t) = \frac{a}{m}y_2 + \frac{b}{m}y_2' + \frac{a}{m} - g$$

en colonne I ;
– les valeurs de $y_2(t)$, fonction dérivable modélisant la variation de la hauteur de la route et de $y_2'(t)$ en colonnes J et K ;
– la valeur de $c(t)$ en colonne L.

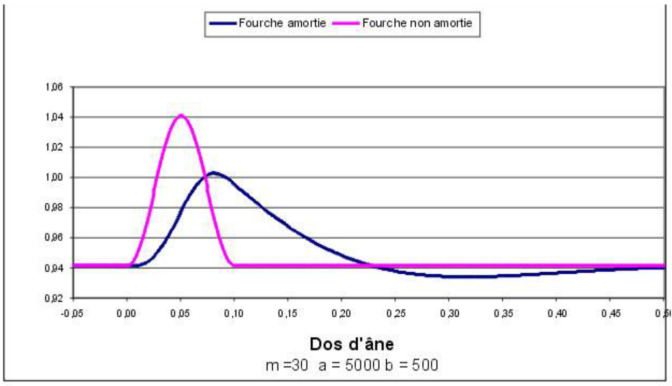
Voici, représentés en colonnes, les contenus de la ligne initiale (ligne 57) et de la ligne 58. Dans la ligne 58, la cellule E58 ainsi que les cellules G58 et H58, où l'on applique la méthode d'Euler, sont à réécrire. Les autres peuvent être obtenues en tirant les cellules correspondantes de la ligne 57.

Ligne 57		Ligne 58	
Cell.	Formule	Cell.	Formule
E57	0	E58	$= \mathrm{E57} + h$
F57	$= -b/m * \mathrm{G57} - a/m * \mathrm{H57} + \mathrm{I57}$	F58	$= -b/m * \mathrm{G58} - a/m * \mathrm{H58} + \mathrm{I58}$
G57	0	G58	$= \mathrm{G57} + h * \mathrm{F57}$
H57	$= 1 - m * g/a$	H58	$= \mathrm{H57} + h * \mathrm{G57}$
I57	$= b/m * \mathrm{K57} + a/m * \mathrm{J57} + a/m - g$	I58	$= b/m * \mathrm{K58} + a/m * \mathrm{J58} + a/m - g$
J57	$= 0,05 * (1 - \cos(20 * \pi * \mathrm{E57}))$	J58	$= 0,05 * (1 - \cos(20 * \pi * \mathrm{E58}))$
K57	$= \pi * \sin(20 * \pi * \mathrm{E57})$	K58	$= \pi * \sin(20 * \pi * \mathrm{E58})$
L57	$= 1 - m * g/a + \mathrm{J57}$	L58	$= 1 - m * g/a + \mathrm{J58}$

En sélectionnant l'ensemble et en tirant avec la souris on obtient immédiatement les lignes suivantes, cependant il faudra penser à modifier l'expression de $f(t)$, celle de $y_2(t)$ et celle de $y_2'(t)$ pour les valeurs de t supérieures à 0,1. On a alors $f(t) = a/m - g$, alors que $y_2(t) = y_2'(t) = 0$.

On peut enfin prévoir de représenter la situation pendant les quelques fractions de seconde précédant l'obstacle, il n'y aura à remplir alors que les colonnes E (valeurs négatives), H $(= 1 - mg/a)$ et L $(= 1 - mg/a)$.

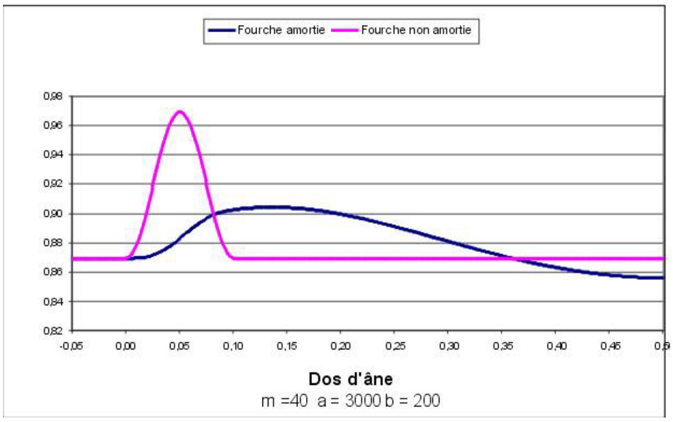
Voici quelques graphiques obtenus en faisant varier m (qui correspond au tiers environ de la masse totale du cycliste et du vélo), la raideur a du ressort et le coefficient b d'amortissement de la fourche :

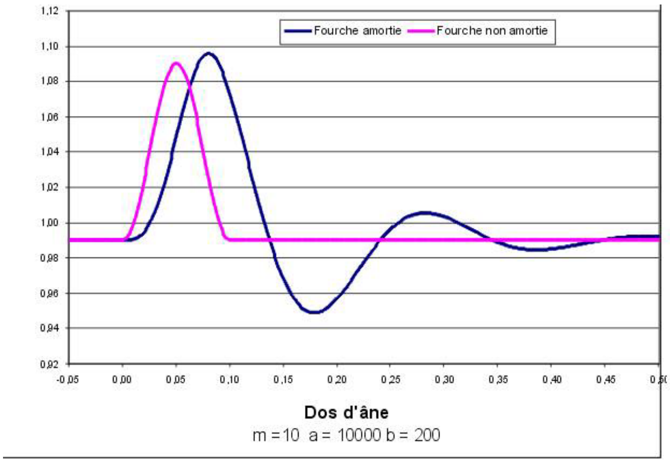


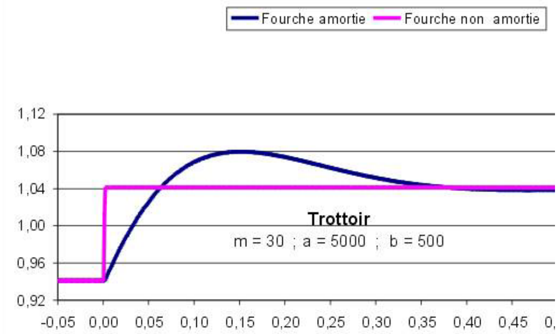
Le dernier graphique montre que les effets peuvent être néfastes lorsque les constantes sont mal choisies !

On peut très aisément modifier la fonction qui modélise l'obstacle, il faut cependant qu'elle soit dérivable. Essayons par exemple de simuler la rencontre brutale avec un trottoir de 10 cm de hauteur. La fonction $y_2(t) = 0,1\sin(250\pi t)$ convient bien. La hauteur de $0,1\,m$ est atteinte pour $t = 0,002$, ce qui correspond à une distance horizontale d'environ 1 cm seulement si le cycliste roule à 18 km/h. On peut reprendre la feuille précédente où il suffit de modifier y_2 et y_2', on pensera aussi à donner à ces deux fonctions les valeurs 0,1 et 0 lorsque t est supérieur à 0,002. Le graphique ci-dessous montre l'efficacité de l'amortissement.

Je dois reconnaître que l'exemple de la fourche est sensiblement plus compliqué que celui du pendule. Il aurait certainement fallu donner une aide importante aux élèves pour qu'ils puissent le traiter, mais j'espère qu'ils se seraient amusés comme je l'ai fait en étudiant







diverses situations et en observant les effets plus ou moins favorables. Cela leur permettrait aussi de se persuader eux-mêmes et de convaincre leur camarades de l'utilité si souvent mise en doute des mathématiques.

Documentation. Les fichiers EXCEL réalisés sur le pendule et sur l'amortissement de la fourche sont accessibles sur le site de l'IREM.

Jean-Pierre DAROU
Lycée Jean Monnet
Strasbourg
Jean-Pierr.Darou@ac-strasbourg.fr

La forme des virus

Gilles Halbout

Résumé. Partant d'un exemple de TPE sur la forme des capsides, j'explique comment utiliser des mathématiques accessibles au niveau de la terminale pour décrire la géométrie des virus.

Pour cet exposé, je suis parti d'un TPE très intéressant réalisé pendant l'année 2002-2003 au LEGT Notre-Dame à Fontenay-le-Comte, Vendée (85) par Antoine Rousseau, Gérôme Dieu, David Dupont sur « la géométrie des virus ». Je n'ai pas pour objectif de critiquer ce travail : bien au contraire, j'y ai beaucoup appris sur les virus. Je voudrais plutôt montrer comment ce thème, comme tant d'autres, peut donner lieu à des études ou simulations mathématiques très simples et j'ai essayé d'y rattacher de nombreux points du programme de mathématique de terminale.

Le plan du TPE dont je suis parti était le suivant :

- Présentation du TPE
- Introduction
- Étude biologique des virus (généralités)
    - Généralités sur les virus
    - La capside
    - Mode d'action du virus
- Étude mathématique des polyèdres réguliers, et en particulier de l'icosaèdre
    - Les polyèdres
    - Les polyèdres de Platon
    - Démonstration de l'existence de cinq polyèdres réguliers
- Conclusion.

Et la problématique développée était :

Les capsides des virus ont une forme géométrique. Quelle est-elle et peut-on la rapprocher des formes géométriques régulières en mathématiques ?

Je reprendrai ce plan sans sa partie mathématique. Je compléterai mon étude en m'inspirant d'un très bon article [1] sur le virus de la grippe publié en mars 1999 dans *Pour la Science*. On pourra aussi consulter d'autres articles sur les virus ([2], [3]).

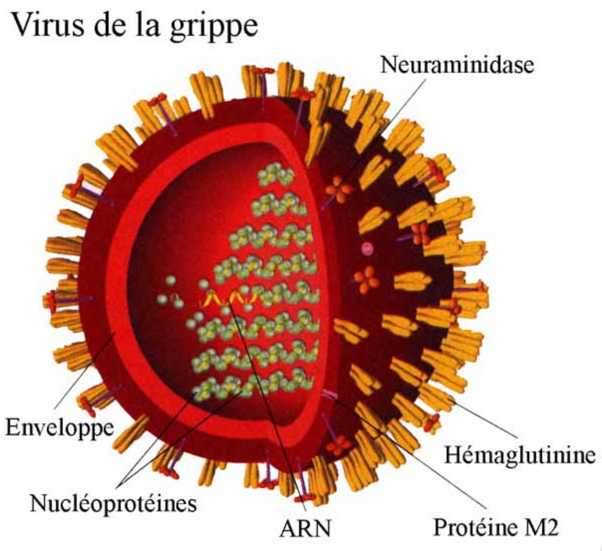
En préparant cet exposé, j'ai pris le même plaisir qu'ont eu, espérons-le, les élèves qui découvraient comme moi un sujet étranger à leurs préoccupations quotidiennes. Comme on n'apprend jamais tout seul je voudrais remercier Françoise Bringel et Mario Keller (de l'Institut de Biologie Moléculaire des Plantes à l'ULP) qui m'ont conseillé sur les virus et mon ami Nicolas Destainville du laboratoire de Physique Théorique de l'Université Paul Sabatier, grand connaisseur des quasi-cristaux. Je lui dois notamment la très bonne référence [4], d'un niveau assez difficile cependant.

1. La forme générale des virus

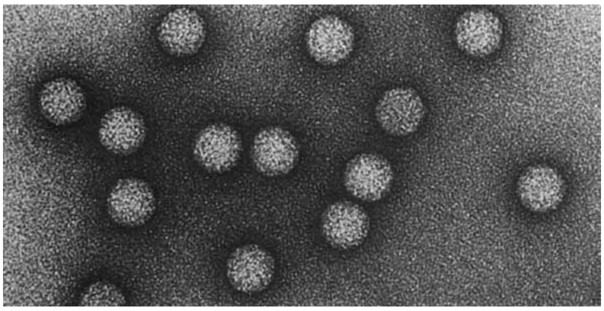
1.1. Une description. Un virus comporte toujours un génome (ADN ou ARN) emballé dans une structure protéique appelée capside. La capside protège le génome. Elle a une structure géométrique (soit tubulaire, soit polyédrale).

Par exemple, le virus de la grippe a une taille de $100\,nm$ et possède une enveloppe externe composée de molécules de lipides et tapissée de protéines (neuraminidase et hémaglutinine) : ce sont des chaînes repliées d'acides aminés.

Ces molécules ont presque toutes la même structure tridimensionnelle, toutefois les séquences des acides aminés varient notablement selon les protéines.



1.2. Des contraintes physiques à une description géométrique. Il est très difficile de voir les formes des virus même avec un grossissement de $\times 300.000$: on a l'impression qu'il s'agit de petites sphères, comme on le voit ici pour le virus de la poliomyélite.



La structure est en fait très souvent celle d'un polyèdre régulier. On peut expliquer cette configuration :
- les protéines ont tendance à se mettre dans une disposition « favorable énergétiquement » ;
- en première approximation, on peut supposer que toutes les protéines (ou plus précisément, les sous-unités protéiques) sont identiques et à symétrie sphérique.

Une étude mathématique (recherche du minimum d'une fonction) peut alors mettre en évidence la structure. L'énergie, que l'on cherche à minimiser est une somme, pour tous les couples de protéines (P_i, P_j) de termes $c_i c_j / d_{ij}^2$ où c_i est une constante qui ne dépend que de la protéine P_i et d_{ij} est la distance entre P_i et P_j. Dans le cas où toutes les protéines sont identiques (c'est-à-dire que les constantes c_i sont égales) on obtient une configuration comme celle décrite précédemment. Mais c'est très difficile à démontrer (voir [4]).

Avec trois protéines identiques, l'étude est plus simple. On commence par confiner nos protéines sur un cercle : on doit choisir une « échelle » (en faisant des homothéties de rapport λ, on ne change pas la nature du problème mais on divise l'énergie par λ^2).

Fixons deux protéines et supposons la troisième entre les deux premières. La fonction que l'on doit minimiser est la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \frac{1}{|e^{i\theta}-1|^2} + \frac{1}{|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|^2}, \end{aligned}$$

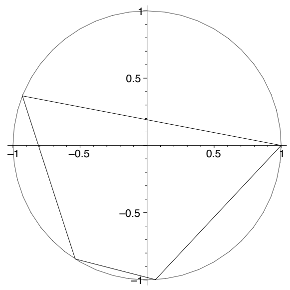
où θ_0 est une constante fixée. On vérifie que cette fonction est minimale en un seul point $\theta = \theta_0/2$, ce qui signifie que la protéine est à égale distance des deux autres. En faisant un raisonnement par l'absurde, on prouve ensuite que trois protéines sur le cercle se trouvent en position d'énergie minimale si elles forment un triangle équilatéral.

De manière générale, si on a plus de trois protéines sur un cercle, on fait le même raisonnement en supposant, en première approximation (pour être rigoureux, il faut des outils mathématiques plus sophistiqués), que la contribution énergétique d'une protéine provient uniquement des interactions avec ses deux voisines. D'après ce qui précède, chaque protéine est à égale distance de ses voisines. Toutes ensemble, elles forment donc un polygone régulier. Enfin, en raisonnant dans l'espace, on montre que celles-ci doivent former un polyèdre régulier, c'est-à-dire un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers isométriques qui s'assemblent en chaque sommet de la même façon.

On peut ensuite faire une modélisation (ici sur MAPLE) et retrouver ce résultat de distribution régulière de manière expérimentale. Attention, ceci n'est pas une preuve ! Mais si l'on suppose les protéines différentes (c'est-à-dire que les c_i sont différentes), on obtient une indication sur leur disposition mais surtout, réciproquement, si l'on rencontre dans la nature des protéines disposées de manière non régulière, on peut utiliser des moyens informatiques pour deviner les différentes constantes c_i et ainsi les différents types de protéines en jeu.

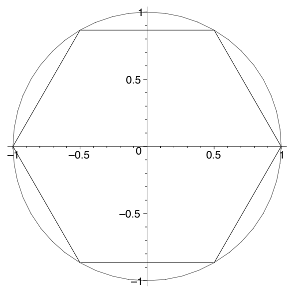
Voici un exemple avec quatre protéines : devinez lesquelles sont les mêmes !

```
> restart:with(plots):poly:=proc(p,a,b,c,d)
> local cercle, pol,j,bi,ci,di,n,t,u,uu,v,vv:n:=4:t[1]:=a:t[2]:=b:
> t[3]:=c:t[4]:=d:uu[2]:=1:uu[3]:=2:uu[4]:=3:vv:=100000000000:
> for bi from 1 to p do u[2]:=evalf(2*Pi*bi/p):
> for ci from bi+1 to p do u[3]:=evalf(2*Pi*ci/p):
> for di from ci+1 to p do u[4]:=evalf(2*Pi*di/p): v:=0:
> for j from 2 to n do v:=v+t[1]*t[j]/(sin((u[j])/2))^2:od:
> for j from 3 to n do v:=v+t[2]*t[j]/(sin((u[2]-u[j])/2))^2:od:
> for j from 4 to n do v:=v+t[3]*t[j]/(sin((u[3]-u[j])/2))^2:od:
> if v <vv then vv:=v:uu[2]:=u[2]:uu[3]:=u[3]:uu[4]:=u[4]:fi:od:od:od:
> pol:=plots[pointplot]([[cos(0),sin(0)],[cos(uu[2]),sin(uu[2])],[cos(uu
> [3]),sin(uu[3])],[cos(uu[4]),sin(uu[4])],[cos(0),sin(0)]],style=line):
> cercle:=plot([sin(t),cos(t),t=-Pi..Pi]):
> plots[display]({cercle,pol},scaling=constrained)
> end:
> poly(50,20,20,1,1);
```



Voici maintenant ce que l'on obtient avec six protéines identiques : c'est rassurant[1] !

```
> restart:with(plots):poly:=proc(p,a,b,c,d,e,f)
> local cercle, pol,j,bi,ci,di,ei,ffi,n,t,u,uu,v,vv:
> n:=6:t[1]:=a:t[2]:=b:t[3]:=c:t[4]:=d:t[5]:=e:t[6]:=f:
> uu[2]:=1:uu[3]:=2:uu[4]:=3:uu[5]:=4:uu[6]:=5:vv:=100000000000:
> for bi from 1 to p do u[2]:=evalf(2*Pi*bi/p):
> for ci from bi+1 to p do u[3]:=evalf(2*Pi*ci/p):
> for di from ci+1 to p do u[4]:=evalf(2*Pi*di/p):
> for ei from di+1 to p do u[5]:=evalf(2*Pi*ei/p):
> for ffi from ei+1 to p do u[6]:=evalf(2*Pi*ffi/p):
> v:=0:for j from 2 to n do v:=v+t[1]*t[j]/(sin((u[j])/2))^2:od:
> for j from 3 to n do v:=v+t[2]*t[j]/(sin((u[2]-u[j])/2))^2:od:
> for j from 4 to n do v:=v+t[3]*t[j]/(sin((u[3]-u[j])/2))^2:od:
> for j from 5 to n do v:=v+t[4]*t[j]/(sin((u[4]-u[j])/2))^2:od:
> for j from 6 to n do v:=v+t[5]*t[j]/(sin((u[5]-u[j])/2))^2:od:
> if v<vv then vv:=v: for j from 1 to n do
> uu[j]:=u[j]:od:fi:od:od:od:od:od:
> pol:=plots[pointplot]([[cos(0),sin(0)],[cos(uu[2]),sin(uu[2])],[cos(uu
> [3]),sin(uu[3])],[cos(uu[4]),sin(uu[4])],[cos(uu[5]),sin(uu[5])],[cos(
> uu[6]),sin(uu[6])],[cos(0),sin(0)]],style=line):
> cercle:=plot([sin(t),cos(t),t=-Pi..Pi]):
> plots[display]({cercle,pol},scaling=constrained)
> end:
> poly(18,1,1,1,1,1,1);
```



1.3. Une classification. L'étude mathématique a mis en évidence le fait que les contraintes physiques se traduisent par des contraintes géométriques, ici l'invariance par certaines rotations d'ordre fini. Cette condition était déjà énoncée par Crick et Watson[2] en 1956 qui parlaient de « symétrie cubique » : chaque sous-unité protéique doit être

(1) Ce n'est pas le moyen le plus simple pour dessiner un hexagone...
(2) Les découvreurs de la structure en double hélice des molécules d'ADN.

entourée par le même environnement, et celui-ci doit être invariant par une rotation d'ordre fini.

Contrairement aux polygones réguliers, il n'existe pas une infinité de polyèdres convexes réguliers. On peut démontrer que :

– il en existe au plus cinq ;
– il en existe effectivement cinq qui sont les cinq polyèdres de Platon : le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier

– Pour montrer le premier point, on note p le nombre d'arêtes de chaque polygone et q le nombre d'arêtes partant de chaque point et on démontre que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Puisque p et q sont au moins égaux à 3, le couple (p,q) est nécessairement égal à l'un des couples suivants

$$(3,3),\ (4,3),\ (3,4),\ (5,3),\ (3,5)$$

qui correspondent respectivement aux cinq polyèdres réguliers du deuxième point. Pour montrer l'inégalité stricte (1), on applique souvent la formule d'Euler $F-A+S=2$, où F, A et S comptent respectivement le nombre de faces, d'arêtes et de sommets d'un polyèdre. Cette formule se démontre en projetant le polyèdre sur une sphère et en mesurant de deux manières la surface de la sphère. Ceci repose sur la formule de Girard, calculant l'aire d'un triangle sphérique et est peut-être un peu difficile. On poursuit en remarquant que $pF=2A$ et que $qS=2A$ et donc que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}=\frac{1}{A}$$

d'où l'inégalité.

Mais cette inégalité peut aussi se démontrer directement, en remarquant que la projection « dilate » les angles : soit $ABCD$ un tétraèdre tel que D soit la projection orthogonale de A sur (BCD), en comparant les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$, on démontre que

$$\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\geq\cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}).$$

Ensuite, puisque l'angle entre deux arêtes d'un p-gone régulier est $\dfrac{p-2}{p}\pi$, en projetant les q angles issus d'un point, on obtient

$$q\frac{p-2}{p}\pi<2\pi$$

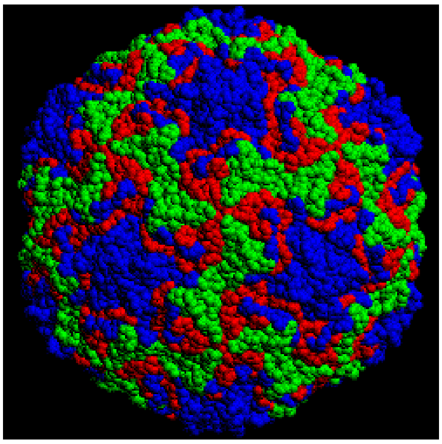
ce qui donne l'inégalité.

– On oublie souvent de vérifier le second point : il est aisé de construire un tétraèdre régulier, un cube ou un octaèdre régulier. On peut construire un icosaèdre régulier à partir d'un dodécaèdre régulier en prenant, pour sommets, les centres des faces du dodécaèdre. Enfin, on construit facilement un dodécaèdre régulier « à la main » : on construit un pentagone régulier auquel on attache cinq pentagones réguliers isométriques, un sur chaque arête, qu'on soulève d'un angle ayant pour sinus $2\sin(\frac{\pi}{10})$. Ceci fournit quinze points dont on peut calculer les coordonnées dans l'espace. On répète l'opération et on vérifie que les deux figures obtenues s'assemblent correctement.

1.4. Raffinement du modèle. Nous allons discuter des hypothèses (symétrie sphérique et uniformité des protéines) faites jusque là :

Les capsides peuvent comporter différentes protéines. Le modèle du virus comme un polyèdre régulier comprenant une même protéine à chaque sommet (ou sur chaque face) est trop rudimentaire. La capside de la plupart des virus (comme le rhinovirus 14 ci-dessous ou celui de la poliomyélite) comporte en fait plusieurs types de protéines. Ces différentes protéines sont disposées de manière à conserver les symétries, soit au centre des faces, soit dans les coins des faces, soit sur les arêtes, soit sur les sommets. Une étude mathématique nous montre que c'est en étudiant la structure du « groupe » des isométries du polyèdre que l'on peut mieux comprendre comment peuvent s'organiser les différents groupes de protéines (sur ce sujet la littérature, même très accessible, ne manque pas sur les groupes de symétries A_4, S_4 et A_5 des polyèdres réguliers).

Observons l'image ci-dessous. Elle montre la capside du rhinovirus 14 déterminée par cristallographie aux rayons X. Chaque acide aminé est représenté par une sphère de 4 angstroms de diamètre. La capside est constituée de quatre types de protéines : protéines VP1 (noir), VP (gris clair), VP3 (gris) et VP4 (pas visible). Sur cette image, on aperçoit bien les axes de rotation d'ordre 5 avec VP1 aux centres des pentagones (il doit y en avoir 12 !).

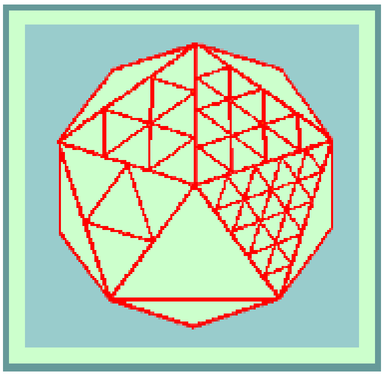


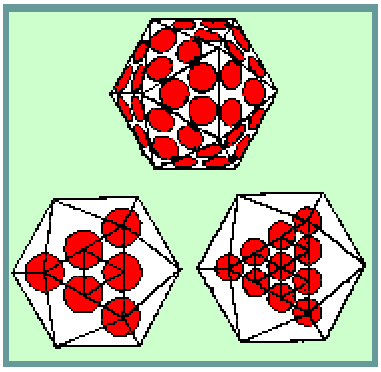
La répartition des protéines ne respecte pas les faces. De plus, la répartition des protéines ne respecte pas toujours les faces du polyèdre régulier : il faut alors faire un « pavage » plus fin du polyèdre. Prenons l'exemple de l'icosaèdre régulier. Les protéines (ou pasmers) ont presque toujours une symétrie (on les appelle alors dimères, trimères... selon l'ordre des rotations les préservant).

Caspar et Klug ont montré que, pour décrire précisément l'agencement des protéines, il fallait paver le dodécaèdre avec $20T$ triangles où $T = a^2 + ba + b^2$. Si $T = 1$, on retrouve les vingt triangles formant les faces de l'icosaèdre régulier.

Pour obtenir une triangulation générale, on réalise un pavage du plan en triangles équilatéraux. On se déplace le long de a triangles dans le même sens, puis on tourne de $2\pi/3$ et on se déplace le long de b triangles. Le chemin global détermine l'arête du triangle de base, face de notre icosaèdre régulier. On obtient ainsi une triangulation de l'icosaèdre régulier qui ne respecte pas nécessairement les faces : elle la respecte si et seulement si $b = 0$ comme sur le dessin ci-après. On peut obtenir un nouveau polyèdre en « aplatissant » les triangles qui ne se trouvaient pas sur une même face. Ce polyèdre, même s'il est constitué de triangles équilatéraux, n'est en général pas régulier car d'un point peuvent partir cinq ou six arêtes. Cette nouvelle figure géométrique rend mieux compte de la structure de la capside et de la disposition des protéines.

Voici quelques exemples de triangulations respectant les faces, c'est-à-dire pour $b = 0$.

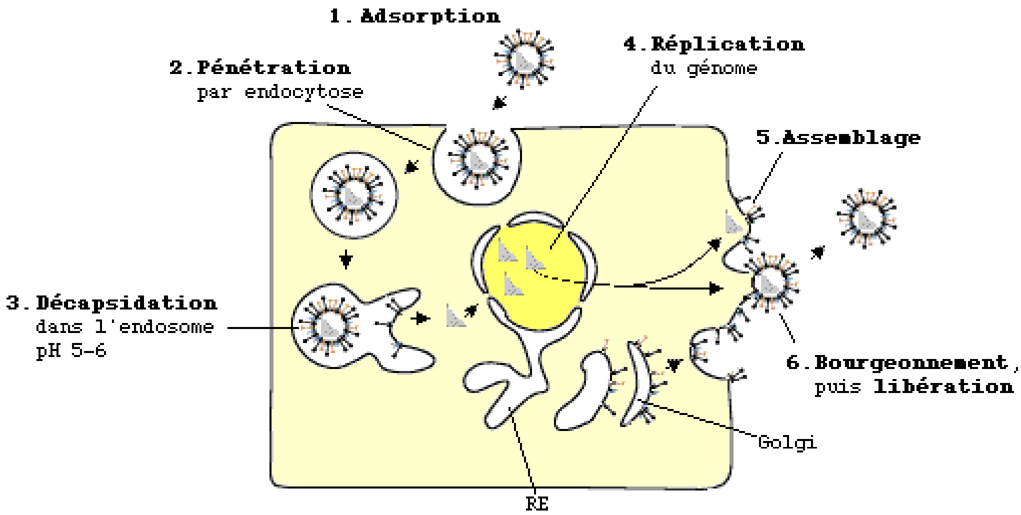




Dans le dessin de droite, on a représenté plusieurs dispositions de protéines : dans les coins des faces (en haut), sur les sommets (en bas). On peut ensuite faire une étude combinatoire et montrer qu'il y a $60T$ monomères, $30T$ dimères, $20T$ trimères, 12 pentamères et $10(T-1)$ hexamères.

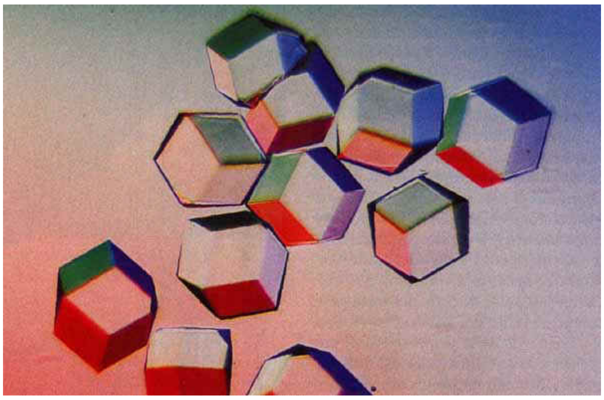
2. L'action des virus

2.1. Description. Tous les virus obéissent à une stratégie de multiplication fondamentale que l'on peut découper en cinq étapes illustrées par le cycle du virus de la grippe :



– L'adsorption : l'adsorption du virus consiste en la liaison d'une protéine virale à un récepteur de la surface cellulaire. Certains virus peuvent utiliser plusieurs molécules différentes pour s'attacher aux récepteurs. Les récepteurs peuvent être une protéine ou le sucre attaché à une glycoprotéine ou glycolipide. Certains virus portent à leur surface une neuraminidase qui leur permet de se détacher de leur récepteur en clivant l'acide neuraminique terminal porté par la chaîne polysaccaridique du récepteur.
– La pénétration : à la différence de l'adsorption, la pénétration est un processus qui requiert de l'énergie.
– La décapsidation : mise à nu du génome viral.
– La réplication du génome viral : l'élément clé dans la réplication virale est la synthèse des protéines virales par la machinerie cellulaire.
– L'assemblage et la libération.

2.2. Les traitements. Le virus de la grippe possède à sa surface une enzyme, la neuraminidase, qui sert à dissoudre la colle que constitue l'acide sialique adsorbé à la surface du virus. Grâce à cette enzyme, le virus ne reste pas collé à la cellule infectée, mais peut se libérer pour aller infecter d'autres cellules saines... C'est cette enzyme qui fait de la grippe une maladie infectieuse extrêmement contagieuse.



Nous allons étudier la structure de cette protéine. Elle est elle-même formée de particules qui, à leur tour, sont disposées de manière régulière et donc devraient former un polyèdre régulier. En fait, cette enzyme neuraminidase cristallise sous la forme de dodécaèdres rhombiques (c'est un polyèdre dont les douze faces sont des losanges isométriques).

Alors que l'on s'attendait à trouver encore un polyèdre, dans ce cas un cube, on trouve un dodécaèdre rhombique. C'est donc que la structure n'est pas régulière : en faisant pour le cube le même raisonnement que celui que l'on avait fait pour l'icosaèdre, on démontre que notre enzyme a une structure $(1, 1)$ (dans le cas du cube, on fait un pavage en carrés et une structure (a, b) donne $T = 6(a^2 + b^2)$ carrés, on a découpé chacune des six faces en $a^2 + b^2$ carrés !), ce qui permet de la caractériser.

C'est grâce à l'analyse structurale de ces cristaux, que les chercheurs ont pu déterminer la structure tridimensionnelle de l'enzyme neuraminidase et élaborer de nouveaux médicaments qui, en bloquant le site actif de l'enzyme, l'empêchent de fonctionner normalement, inhibant ainsi la multiplication du virus.

2.3. Autres exemples. Je ne résiste pas au plaisir de donner aussi une liste de sujets liés à des problèmes géométriques similaires : c'est le cas, évidemment pour les quasi-cristaux (comme sur la figure suivante, à gauche).

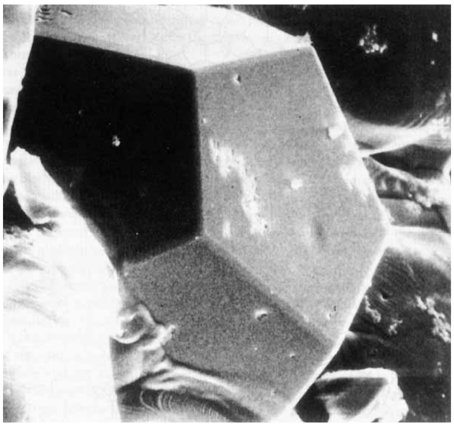
Mais on les retrouve aussi en

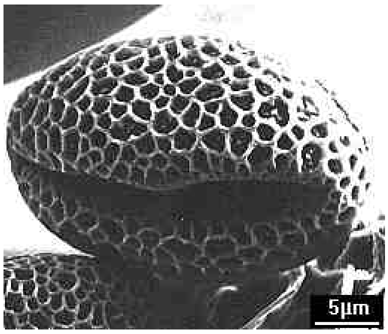
- chimie (chimie tétraédrique, octaédrique, cubique, polyédranes et prismanes) ;
- botanique : les particules de pollen ont souvent des formes géométriques qui rappellent celles des polyèdres (figure ci-dessous, à droite) ;
- zoologie (les yeux d'insectes, les nids d'abeilles) ;
- physique : la mousse de savon devient polyédrale lorsque qu'elle ne contient plus de liquide. Les différents films ne se rejoignent que par trois, selon des angles de 120°.

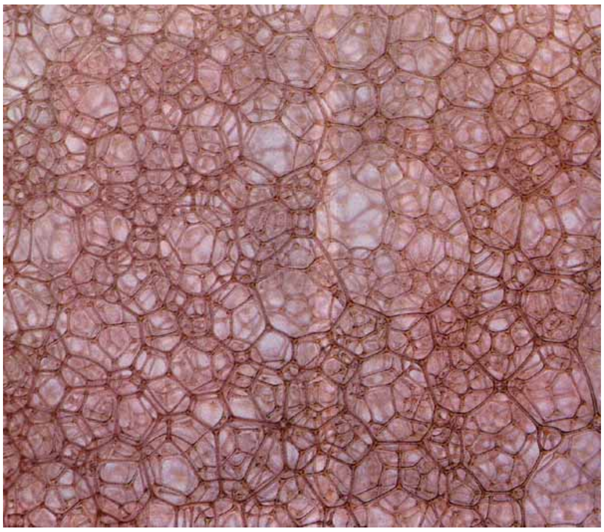
Bibliographie

[1] Le virus de la grippe : *Pour la Science*, mars 1999. .

[2] Le virus de la poliomyélite : *Pour la Science*, mai 1987.







[3] Le virus du sida : *Pour la Science*, février 1987.

[4] R. VANSELOW ET R. HOWE, *Chemistry and Physics of Solid Surfaces VII*, Springer 1988, pp. 367-405.

Gilles HALBOUT
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
Strasbourg
halbout@math.u-strasbg.fr

Les mathématiques de la relativité restreinte utilisables dans un TPE math-physique

Michèle Audin

Résumé. Je propose des mathématiques accessibles aux élèves de terminale qui interviennent dans la théorie de la relativité restreinte.

Ces notes

Elles ne constituent bien entendu pas un TPE. Elles s'adressent d'ailleurs plus aux enseignants qu'à leurs élèves. Elles visent à mettre en évidence le fait qu'il y a, dans la relativité restreinte, beaucoup de mathématiques à la fois sérieuses, intéressantes et accessibles à des élèves de terminale. C'est pourquoi, si l'on trouvera dans ce texte des remarques faisant référence à des notions trop compliquées pour les élèves (comme l'allusion aux formes quadratiques), le discours dans sa cohérence logique n'est composé que de démonstrations, calculs, étude de fonction, et autres techniques connues des élèves.

L'idée de donner des références sur ce sujet est assez naturelle puisque celui-ci est souvent choisi par les élèves (c'est après avoir assisté à des soutenances de TPE au lycée Jean Monnet de Strasbourg en 2004 que l'idée d'axer une partie du stage sur ce sujet nous est venue). La difficulté est alors d'aider les élèves à préciser la problématique. L'apport des professeurs de mathématiques pourrait être de mettre en évidence les questions de mathématiques lorsqu'elles apparaissent.

1. À quelles questions répond la relativité restreinte ?

Il s'agit de décrire les phénomènes physiques mettant en jeu des vitesses proches de celles de la lumière (l'électromagnétisme mais *pas* la mécanique — j'y reviens au § 5).

On sait que la relativité galiléenne ne s'applique pas, grâce à l'expérience de Michelson, qui a montré (en 1881, puis, avec encore plus de précision, avec Morley, en 1887) que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels. C'est en 1905 qu'Einstein publie les résultats de ses travaux sur ce sujet(1).

2. La relativité galiléenne et la relativité restreinte, les deux (seules) solutions d'un même problème

Le problème est le suivant. Comme l'énoncent les physiciens, *on postule qu'il existe une classe de repères (référentiels), dits référentiels inertiels, dans lesquels les lois de la physique s'écrivent de la même façon.*

On a deux repères $Oxyz$ et $O'x'y'z'$, chacun est muni d'une horloge, lui permettant de mesurer, l'un un temps t, l'autre le temps t'. Le repère $Oxyzt$ est immobile (ce qui veut dire que l'observatrice est liée à ce repère), le repère $O'x'y'z't'$ est mobile et il se meut avec une vitesse constante (c'est un vecteur constant). Voir la figure 1. On exprime (x', y', z', t') en fonction de (x, y, z, t) par des transformations que je vais supposer linéaires et je vais démontrer (c'est un article sur les *mathématiques de la relativité restreinte*) que, de deux choses l'une,

(1)La relativité générale, une autre théorie, date de 1915. Lorsqu'Einstein reçoit le prix Nobel, en 1921, c'est pour ses travaux sur les quanta de rayonnement, pas pour ces théories, encore mal connues.

– soit il n'existe aucune vitesse qui prenne la même valeur dans les deux repères, et on est dans le cadre galiléen,
– soit il existe une (et d'ailleurs une seule) vitesse à laquelle les observatrices liées à tous les repères trouvent la même valeur, et on est dans le cadre de la relativité restreinte.

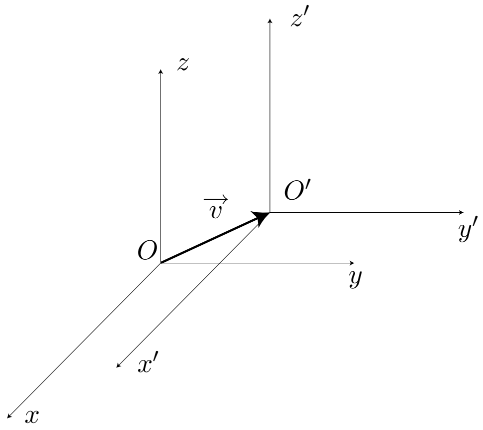


Figure 1

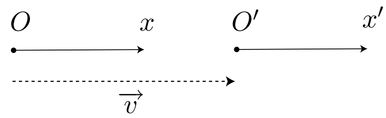


Figure 2

Pour simplifier les notations, je vais supposer que la translation est dans la direction (commune) des axes Ox et Ox' (figure 2). Ainsi, $y' = y$, $z' = z$, on est ramené à une question bidimensionnelle et

$$\begin{cases} x' = Ax + Bt \\ t' = Cx + Dt. \end{cases}$$

Sans changer la translation considérée, on renverse maintenant le sens des axes, $X = -x$, $X' = -x'$, donc

$$\begin{cases} X' = AX - Bt \\ t' = -CX + Dt. \end{cases}$$

Mais, comme la translation n'a pas changé (l'observatrice située sur $O'X'$ voit OX translaté de la même façon), le repère OX est le repère $O'X'$ translaté, donc (c'est un effet du « principe » postulé ci-dessus)

$$\begin{cases} X = AX' + Bt' \\ t = CX' + Dt', \end{cases}$$

de sorte que (résolution du système linéaire)

$$t' = \frac{At - CX}{AD - BC}, \text{ mais c'est aussi } -CX + Dt,$$

donc

$$\begin{cases} -\dfrac{C}{AD-BC} = -C \\ \dfrac{A}{AD-BC} = D \end{cases} \qquad \text{et donc } AD - BC = 1, \quad A = D, \text{ et aussi } C = \frac{A^2-1}{B}.$$

L'abscisse de O' est $x' = 0$, de sorte que son abscisse x dans le référentiel Ox vérifie $0 = Ax + Bt$, ainsi

$$x = -\frac{Bt}{A},$$

et donc
$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\frac{B}{A} = v, \text{ c'est la vitesse du point } O', \text{ donc } B = -Av.$$
On obtient finalement
$$\begin{cases} x' = A(x - vt) \\ t' = \dfrac{1 - A^2}{A}\dfrac{x}{v} + At. \end{cases}$$

Reposons maintenant notre question (motivée, je le rappelle, par le résultat de l'expérience de Michelson) : existe-t-il une vitesse qui ait la même valeur dans les deux repères ? Appelons c une hypothétique telle vitesse[2]. On aurait
$$c = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{A\left(\dfrac{dx}{dt} - v\right)}{\dfrac{1-A^2}{Av}\dfrac{dx}{dt} + A} = \frac{A(c-v)}{\dfrac{1-A^2}{Av}c + A}$$
soit
$$(A^2 - 1)c^2 = A^2v^2 \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$
On peut bien sûr supposer que A et v sont positifs, de sorte que la dichotomie annoncée a bien lieu :

– soit $A = 1$ et il n'existe pas de solution, le passage d'un repère à l'autre est de la forme
$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t, \end{cases} \qquad \text{les transformations de Galilée,}$$
dans lesquelles le temps est « absolu » (et, entre nous, nous appellerons le groupe de ces transformations le « groupe de Galilée »),
– soit $A > 1$ et il existe une solution unique,
$$c = \frac{Av}{\sqrt{A^2 - 1}}.$$
Exprimées à l'aide de c, les transformations sont de la forme
$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \end{cases}$$
le temps est « relatif », ce sont les transformations de la relativité restreinte, ce que, entre nous, nous appellerons le « groupe de Lorentz[3] ». Notons qu'alors la vitesse de translation v de n'importe quel référentiel est strictement inférieure à c.

On ne considère pas le cas où il y aurait une vitesse imaginaire invariante.

[2] L'usage de la lettre c pour la vitesse de la lumière vient du mot « célérité ».
[3] C'est Lorentz qui a mis en évidence dès 1892, ces transformations, qui laissent invariantes les équations de Maxwell et qui portent son nom. Mais c'est Einstein qui, en 1905, a formulé le principe de la relativité, qui postule l'invariance de toutes les lois de la physique.

3. Conséquences des formules de Lorentz

3.1. Le coefficient A. Le coefficient A obtenu ci-dessus est une fonction « simple » de la vitesse v,

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

que les élèves de terminale sont capables d'« étudier », comme on dit, c'est-à-dire d'en comprendre assez pour dessiner son graphe. Par exemple en remarquant que c'est une fonction paire, en en calculant la dérivée et les limites aux bornes, on obtient le graphe représenté sur la figure 3. L'essentiel est que la vitesse v doit être inférieure à celle, c, de la lumière (la fonction n'est définie que pour $v < c$), que A est toujours plus grand que 1 (et ne prend la valeur 1 qu'en 0) et, bien sûr, que A tend vers l'infini quand v tend vers c.

Sur la figure, j'ai insisté sur le fait que, près de 0, la fonction est très proche de la fonction constante égale à 1 : aux vitesses ordinaires, petites par rapport à la vitesse de la lumière, les transformations de Lorentz sont presque les transformations de Galilée.

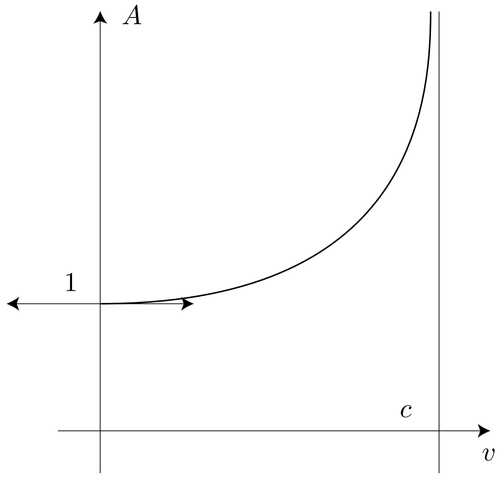


FIGURE 3. Le coefficient A

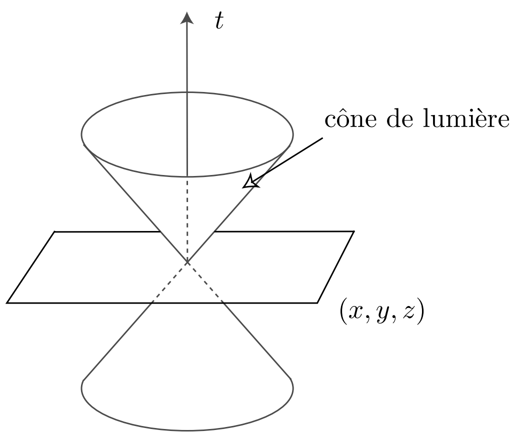


FIGURE 4. Le cône de lumière

3.2. Une parenthèse, le groupe de Lorentz. Les transformations de Lorentz forment un groupe. On vérifie sans mal que

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2.$$

En fait, si on écrit les formules plus générales en dimension 3 (ou même 4), les transformations de Lorentz préservent la « forme quadratique »

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Le groupe de Lorentz est, en fait, le groupe des « isométries » de cette forme quadratique (que l'on appelle $O(3, 1)$ parce que la signature de la forme quadratique est $(3, 1)$, trois signes $+$ et un signe $-$).

3.3. Le cône de lumière. Même sans savoir ce qu'est un groupe de transformation, une forme quadratique ou une signature, on est capable de dessiner le « cône » d'équation $x^2 - c^2t^2 = 0$ et même, pour que cela ressemble plus à ce que les élèves de terminale appellent un « cône », celui d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$, un dessin dans $\mathbf{R}^4$ dans lequel on voit (comme dans celui de la figure 4, plutôt représenté dans $\mathbf{R}^3$ — pas plus qu'une élève de terminale, je ne sais dessiner dans $\mathbf{R}^4$) que l'espace est partagé en trois parties :

– les points tels que $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 < 0$, ce sont les points de l'espace-temps que peut atteindre une particule partie de 0 au temps 0 (la particule a une vitesse $v < c$),
– ceux tels que $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$, ce sont les points que peut atteindre un photon qui part du point 0 au temps 0 (le photon va, par définition, à la vitesse c),
– et enfin, ceux tels que $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 > 0$, des points que l'on n'atteint jamais si l'on part du point 0 au temps 0 (il faudrait aller plus vite que la lumière).

3.4. L'« addition » des vitesses. Supposons maintenant qu'une observatrice liée au repère $Oxyz$ regarde passer le repère $O'x'y'z'$ à la vitesse v, auquel est liée une autre observatrice, qui de même regarde passer le repère $O''x''y''z''$ à la vitesse v'. La première voit passer le troisième repère à une vitesse v''. Que vaut v'' en fonction de v et v' ?

Dans la mécanique galiléenne, la réponse est très simple, on a $v'' = v + v'$. Un exemple habituel de cette situation est celui où l'observatrice « à l'arrêt » regarde passer un tapis roulant sur lequel marchent des gens.

Étudions cette situation à l'aide des transformations de Lorentz. On utilise les notations ci-dessus pour passer de Ox à $O'x'$ (lettres A, B, etc.), les notations analogues (A', B', etc.) pour passer de $O'x'$ à $O''x''$ et, sans surprise, les notations A'', B'', pour passer directement de Ox à $O''x''$. Ainsi,

$$v = -\frac{B}{A}, \quad v' = -\frac{B'}{A'} \quad \text{et } v'' = -\frac{B''}{A''}.$$

Avec $x' = Ax + Bt$, $x'' = A'x' + B't'$ et $t' = Cx + Dt$, on a

$$x'' = (AA' + B'C)x + (BA' + B'D)t.$$

Mais

$$D = A \text{ et } C = \frac{A^2 - 1}{B}$$

comme on l'a vu, de sorte que

$$v'' = -\frac{B''}{A''} = -\frac{AB' + BA'}{AA' + B'\dfrac{A^2-1}{B}} = \frac{-\dfrac{AB' + BA'}{AA'}}{1 + \dfrac{B'(A^2-1)}{AA'B}}.$$

Le numérateur est tout simplement $v + v'$. En utilisant la relation $(A^2 - 1)c^2 = A^2v^2$, on obtient la formule d'addition recherchée :

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \dfrac{vv'}{c^2}}.$$

Bien sûr, si v et v' sont très petites par rapport à c, comme dans le cas des piétons sur le tapis roulant, le dénominateur est pratiquement égal à 1 et on retrouve la formule galiléenne.

Une vérification plus intéressante serait le cas où les observatrices liées aux repères $Oxyz$ et $O'x'y'z'$ regardent passer un photon. C'est le cas où $v' = c$, qui nous donne

$$v'' = \frac{v+c}{1+\dfrac{v}{c}} = c,$$

nos deux observatrices vont bien mesurer la *même* vitesse de la lumière, comme nous l'avons souhaité.

Deux remarques pour les professeurs. D'abord la formule donnant v'' « rappelle » quelque chose, oui, la formule d'addition des tangentes, sauf le signe + au dénominateur... il s'agit de la formule d'addition des tangentes hyperboliques (poser $\tanh\alpha = v/c$, etc.). Ensuite (et c'est essentiellement la même remarque), si l'on voulait définir une « addition », disons $\star$, par la formule

$$v \star v' = \frac{v+v'}{1+\dfrac{vv'}{c^2}},$$

on définirait une structure de groupe sur $]-c, c[$... il faut bien sûr exclure $\pm c$, on ne peut pas avoir $v \star c = c$ pour tout v dans un groupe. La vitesse de la lumière c joue le rôle d'infini.

3.5. Les paradoxes. Notre observatrice regarde passer une règle graduée (ou une cycliste, comme sur la figure 5). Dans son repère propre, la règle mesure une longueur ℓ_0. Disons qu'elle est disposée le long de l'axe des x', donc ℓ_0 est la différence $x'_1 - x'_0$ des extrémités. En appliquant nos formules,

$$\ell_0 = x'_1 - x'_0 = \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

... de sorte que la longueur mesurée par l'observatrice est

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \ell_0.$$

Un phénomène habituellement appelé la contraction des longueurs.

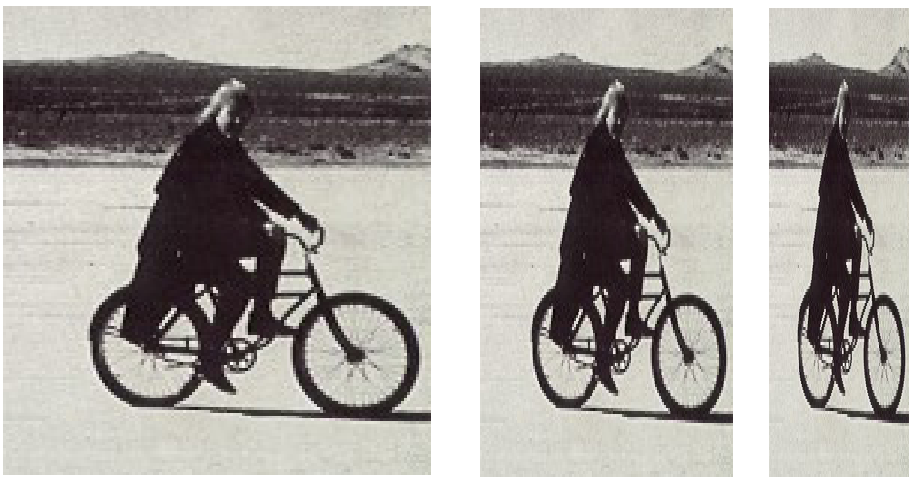


FIGURE 5. Contraction des longueurs

On a de même une dilatation des durées. L'observatrice au repos pendant un temps $t_2 - t_1$ compare cette durée à celle mesurée dans le repère en mouvement ainsi

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > t'_2 - t'_1.$$

Ce que l'on appelle en général le « paradoxe des jumeaux », la jumelle restée au repos ayant vieilli davantage que celle ayant fait un voyage. Et qui n'a bien entendu rien de paradoxal, la vitesse v à laquelle même les jumelles les plus rapides voyagent étant absolument négligeable par rapport à la vitesse de la lumière.

4. $E = mc^2$, mon amour...

Par un raisonnement analogue, la conservation de l'énergie cinétique mène à la formule

$$E_c = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

pour une particule de masse m_0 et de vitesse v, ce qui est assez raisonnable puisque

$$\lim_{v \to c} E_c = +\infty \text{ et } E_c \sim_{v \to 0} \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

On décide d'appeler « masse en mouvement » la quantité

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

qui, remarquons-le, tend vers l'infini quand v tend vers c. L'énergie cinétique s'écrit alors

$$E_c = (m - m_0)c^2.$$

Quant à l'énergie totale, somme de l'énergie au repos ($m_0 c^2$, donc) et de l'énergie cinétique, elle vaut

$$E = mc^2.$$

5. L'affaire Mercure

On mentionne souvent, à propos de la « relativité », la précession du périhélie de Mercure. De quoi s'agit-il exactement ?

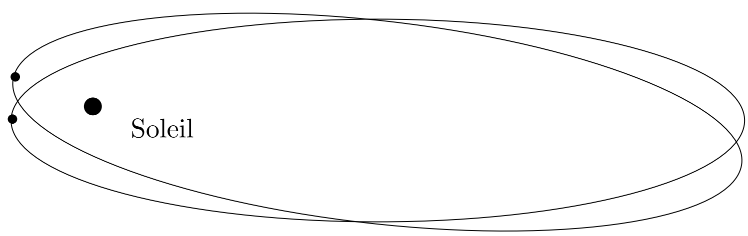


Figure 6

Mercure est une planète difficile à observer depuis la Terre, une raison pour laquelle elle a été beaucoup regardée. Elle a une orbite en première approximation elliptique, une ellipse très excentrique (l'excentricité est de l'ordre de $0,2$, pour fixer les idées, l'excentricité de l'orbite de la Terre, qui est presque circulaire, est $0,017$). Le périhélie est le point de l'orbite qui est le plus proche du foyer occupé par le Soleil. Le fait que l'orbite soit elliptique est une conséquence des lois de Kepler qui s'appliquent à un problème « à deux corps », dans lequel on tiendrait seulement compte du Soleil et de Mercure. Or, il y a d'autres corps célestes qui interviennent et c'est pourquoi c'est une approximation, on a à peu près une ellipse et en particulier le périhélie est variable, on peut en effet observer une « précession » dudit périhélie. Et la mesurer : au bout d'un siècle, ce périhélie a bougé de $572''$ d'arc. En utilisant la loi de la gravitation de Newton, l'aplatissement du soleil et les corps célestes proches, on explique sans mal toutes ces secondes... à l'exception de 43 d'entre elles.

La relativité générale rend assez parfaitement compte de ces $43''$. Ce qui appelle (au moins) deux remarques :

– La vitesse de Mercure sur son orbite est de 48 kilomètres par seconde, beaucoup plus que la vitesse d'une sœur jumelle en voyage, mais encore assez négligeable par rapport à la vitesse de la lumière (que je n'ai pas encore rappelée, il serait temps, c'est environ 300 000 kilomètres par seconde, soit 6250 fois plus).
– Malgré leurs noms, la relativité restreinte et la relativité générale sont deux théories distinctes et j'oserai même dire disjointes. La relativité restreinte, j'ai expliqué son champ d'action plus haut, c'est essentiellement le domaine des particules élémentaires. La relativité générale, c'est une théorie de la gravitation. La première n'a *aucune* application à la mécanique céleste. La deuxième relèverait, du point de vue des mathématiques, du domaine de la géométrie riemannienne (ce qui la met très au-dessus des possibilités d'apprentissage des élèves de lycée, aussi douées soient-elles).

L'intérêt principal de l'évocation de Mercure[(4)] dans ce texte serait alors d'insister sur la nécessité, pour qu'un TPE soit « bon », que la problématique en soit bien cernée et, en particulier dans le cas d'un TPE math-physique, que le champ d'application de la théorie physique étudiée en soit précisé.

6. La bibliographie

Pour préparer ce texte, j'ai utilisé presque exclusivement l'*Encyclopædia Universalis*[(5)] sous les deux formes, CD-ROM et version papier. Autant dire que les données sont accessibles à tous (cette encyclopédie est présente dans la plupart des CDI et des bibliothèques municipales), au moins sous forme papier. Pour ceux ou celles qui ne disposeraient pas du CD-ROM[(6)], je précise que les choses les plus intéressantes viennent des articles :

– Relativité, par Thibault Damour et Stanley Deser, qui expliquent très clairement ce qu'est le principe de relativité (commun à Galilée et à Einstein) et qui mentionnent le fait que, ce principe étant posé, il n'y a que deux solutions possibles. Ils abordent aussi les questions gravitationnelles.
– Relativité restreinte, par Michel Paty, qui est assez clair sur le champ d'application de la théorie.
– On peut bien sûr consulter les articles sur Galilée, Einstein, Michelson, Lorentz...

(4) J'en ai parlé parce que c'est joli, ce qui est sans doute aussi pourquoi je l'ai vu cité à contre-emploi au cours de la soutenance d'un authentique TPE.

(5) C'est généralement une excellente référence, plus précise, plus complète et surtout plus sûre que ce que l'on trouve, au hasard du ouèbe, où il y a aussi, bien sûr, des choses intéressantes, mais assez difficiles à distinguer, en tout cas pour des adolescentes, d'un fatras vide et mal cerné un peu omniprésent.

(6) Il n'y a rien dans le CD-ROM qui ne soit pas dans la version papier, mais il est vrai qu'il est plus facile de chercher une notion par le moteur de recherche, quitte ensuite à aller lire l'article dans le livre.

– Mercure, par Pierre Thomas, article dans lequel j'ai trouvé les données numériques (excentricité, vitesse) que j'ai mentionnées sur cette planète.

La démonstration du fait qu'il n'y a que deux solutions possibles, je l'ai copiée dans un « vieux » livre de physique, celui que j'ai utilisé moi-même lorsque j'étais étudiante, écrit par Hubert Gié, et qui n'est probablement plus disponible. Cette démonstration doit bien exister dans des livres plus récents mais je n'ai pas eu le temps de chercher.

Pour les élèves, on peut aussi leur suggérer de lire

– la BD *Tout est relatif*, dans la série des aventures d'Anselme Lanturlu, de Jean-Pierre Petit (publiée par Belin) ;
– il y a aussi un *Que Sais-je* sur la relativité et un numéro hors-série de *Science et vie junior* sur le même sujet ;
– il faut aussi leur conseiller, à eux et à ceux de leurs enseignants qui ne les ont pas lues, les aventures de l'ineffable Mr Tompkins, le héros de livres de vulgarisation écrits il y a plus de cinquante ans par le physicien George Gamow, et qui sont toujours aussi passionnants que lorsque j'étais moi-même lycéenne, il y a plus de trente ans... Les illustrations de l'auteur et de John Hookham, qui éclairent le livre, ont inspiré la figure 5 de cet article — et par suite la couverture de ce volume.

C'est Nadine Meyer qui a trouvé toutes ces références (sauf peut-être le Gamow), effectivement disponibles, à la médiathèque de Sélestat ; j'ai vérifié dans le catalogue « en ligne » de la bibliothèque municipale de Strasbourg que toutes y étaient aussi disponibles, on doit donc pouvoir les trouver un peu partout.

Michèle Audin
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
Strasbourg
maudin@math.u-strasbg.fr