Éditorial

L'OUVERT EN LIGNE

Le site de l'IREM a été modifié au printemps 2006 par Loïc TEYSSIER pour donner un accès direct (avec mot de passe) à tous ceux qui doivent en mettre à jour certaines pages. En particulier l'esthétique de la page des sommaires de l'OUVERT a été améliorée puisque chaque sommaire est accompagné de l'image de la couverture correspondante. Comme il est maintenant possible de scanner rapidement les anciens numéros, nous allons progressivement mettre en ligne certains de leurs articles. Jean LEFORT, que nous ne remercierons jamais assez pour avoir fait vivre cette publication pendant de nombreuses années, a déjà fait un travail d'archivage des numéros 1 à 43 et va pouvoir mettre en ligne lui-même les articles qu'il a scannés.

À l'occasion de cette mise à jour, j'ai parcouru les anciens numéros de l'OUVERT et j'ai découvert que, il y a trente ans, on avait déjà des doutes sur la survie de ce journal. Voici quelques titres évocateurs de certains éditoriaux :

- ✓ A vos stylos, par Alain KUZNIAK N° 103 en avril 2001 ;
- ✓ L'OUVERT et son avenir, par Jean LEFORT, N° 58 en mars 1990 ;
- ✓ Les IREM existent-ils encore ? par Etienne MEYER, N° 17 en février 1979 ;
- ✓ Afin que l'OUVERT ne se referme pas..., par André MARTZ, N° 6 en mai 1975.

Des questions, toujours d'actualité, y sont soulevées : comment persuader des collègues de participer au comité de rédaction de notre revue ? comment inciter les collègues de la maternelle à l'université à proposer des articles décrivant leurs expériences dans leurs classes ? Aujourd'hui, une première réponse optimiste consiste à dire que, puisque l'OUVERT a survécu plus de 35 ans, il survivra bien encore quelques années.

Je crois cependant que la situation a radicalement changé ces dernières années. En effet, le nombre d'abonnés n'a cessé de décroître. Et pourtant il y a eu un large renouvellement du corps des professeurs de lycée et collège de l'Académie et de l'ensemble des animateurs de l'IREM. Mais, s'abonner à une revue ou adhérer à une association comme l'APMEP ne semble plus faire partie de la culture des nouvelles générations.

Par contre la recherche et l'utilisation de documents disponibles en ligne est devenue une pratique régulière pour de nombreux enseignants. C'est pourquoi l'avenir de l'OUVERT passe par une mise en ligne rapide des articles (et par un tirage papier limité pour les bibliothèques des IREM et les CDI des établissements scolaires).

Quant au contenu, j'ai bon espoir qu'il soit pour une bonne part l'aboutissement des travaux de certains groupes de l'IREM. En effet le peu d'heures de décharge attribuées aux animateurs ne leur donne plus le temps nécessaire à la rédaction de brochures dans des délais raisonnables et, de toute façon, leurs collègues n'en achètent pratiquement plus. Par contre il devrait être plus facile de choisir parmi les activités expérimentées en classe ou les réflexions des groupes de travail un thème qui ferait l'objet d'un article pour l'OUVERT, article qui trouverait des lecteurs en étant mis en ligne. Un exemple du travail d'un groupe publié dans notre revue est celui du N° 111 entièrement rédigé par le groupe « TPE ».

Plusieurs groupes nous ont promis des articles pour la rentrée prochaine. Ceci montre bien que les enseignants n'ont du temps à consacrer à de telles activités que pendant les vacances scolaires.

Que ceci n'empêche pas les collègues de l'enseignement secondaire ou supérieur de nous proposer des articles sur une expérience dans leurs classes ou leurs amphis !

Nicole Bopp

Des tresses et des nœuds en mathématiques

Thomas Aubriot, Emmanuel Wagner

Résumé : Nous reprenons le contenu d'une conférence intitulée « Des Tresses et des Nœuds en Mathématiques » donnée dans le cadre du Jardin des Sciences. En particulier, nous définissons en parallèle les tresses et nœuds dans l'espace et expliquons comment à l'aide de projections et des mouvements dits de Reidemeister, nous pouvons nous ramener à une étude dans le plan. Ensuite nous mettons en évidence une structure sur les tresses et expliquons comment une opération sur ces tresses permet d'associer un mot à une tresse, ce qui permet ensuite de classer ces tresses. Dans le cas des nœuds, nous expliquons comment l'étude d'invariants permet de distinguer certains nœuds même si la classification complète des nœuds reste un problème ouvert.

Remerciements : Le CIES et le Jardin des Sciences nous ont donné la possibilité de faire une conférence intitulée « Des Tresses et des Nœuds en Mathématique » . Cette conférence a été suivie d'une série de questions qui nous ont incités à prolonger notre travail. Mme Bopp, directrice de L'IREM de Strasbourg, nous a permis dans le cadre de l'Ouvert de rédiger cet article. Nous la remercions ici ainsi que tous ceux qui nous ont incités à nous engager dans ces projets.

Mots-clés : Nœud – Tresse – Groupe – Invariant.

Introduction

Les tresses et les nœuds ont le privilège d'occuper régulièrement la Une des publications tant dans les revues de recherche que de vulgarisation. Cet engouement s'explique par la grande diversité des domaines reliés aux tresses et aux nœuds. Une recherche rapide sur le serveur de prépublication Arxiv donne plus de 300 réponses pour les mot braids (tresses en anglais) ou knots (nœuds) révélant ainsi la grande vitalité de la recherche en mathématique dans ces domaines. Mais cet engouement provient aussi de la diversité des applications de ces théories [8],[9] : de la cryptographie à l'ordinateur quantique en passant par la modélisation de trajectoires de particules ou encore la génétique ....

Nous présentons les tresses et les nœuds en partant de l'intuition que nous avons de ces objets dans la vie courante pour définir ensuite ces objets mathématiques. Plus précisement, les nœuds pour les mathématiciens sont des morceaux de ficelle refermés dans l'espace et entremêlés, tandis que les tresses sont des morceaux de ficelles attachés en haut et en bas et s'entremêlant. Une différence majeure avec les nœuds courants est donc que les nœuds et les tresses mathématiques ne se dénouent pas tous !

Une des première étapes pour simplifier ces objets et mieux travailler avec les nœuds et les tresses est de voir comment les représenter dans le plan. En projetant ces objets de l'espace sur un plan de manière générique, nous définissons des nœuds et des tresses dans le plan. Il convient alors de considérer les mouvements de Reidemeister qui décrivent comment se comportent les dessins dans le plan de nos nœuds ou tresses lorsque nous changeons de projection. Ces mouvements nous permettent d'établir que les nœuds et tresses de l'espace peuvent être représentés par leurs dessins dans le plan. Après ces définitions en parallèle des nœuds et tresses, nous expliquons comment clôturer une tresse pour en faire un nœud.

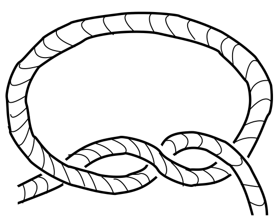
Le problème de la définition étant résolu, nous aimerions pouvoir distinguer deux nœuds ou deux tresses différents. Ce problème de classification, naturel pour les mathématiciens, est différent pour les nœuds et les tresses ; en effet, une structure de groupe, semblable à la structure des nombres entiers relatifs vis à vis de l'addition, peut être mise sur les tresses. Une composition peut être définie en collant l'une en dessous de l'autre deux tresses et cette opération est suffisament riche en propriétés pour nous permettre de découper une tresse en tresses plus simples et de réduire le problème de la classification des tresses à un problème plus simple (de classification de mots dont les lettres sont les tresses simples).

Pour les nœuds, nous pouvons encore assembler deux nœuds mais cette opération n'a pas la structure précédente et nous n'obtenons pas la classification de cette manière. Pour répondre à la question « Quand deux nœuds sont-ils semblables », les mathématiciens définissent alors des invariants. Un invariant est un objet mathématique associé à un nœud, par exemple son nombre minimal de croisement, qui nous permet de dire que deux nœuds avec un invariant différent sont différents. Le problème est que deux nœuds différents peuvent avoir le même invariant. Des invariants de plus en plus subtils et sophistiqués ont été attachés aux nœuds mais pour le moment, aucun invariant ne permet de distinguer tous les nœuds.

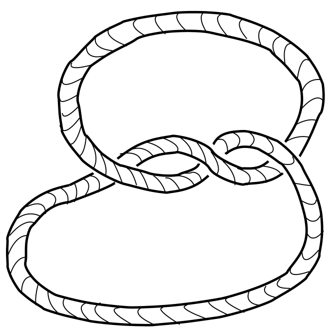
1. Définitions en parallèle des tresses et des nœuds

1.1. Nœuds et entrelacs

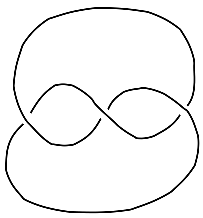
Lorsqu'on parle de nœuds, on ne s'imagine pas parler de mathématiques ; on associe plutôt ce terme à d'autres domaines tels que la marine ou l'escalade. De manière plus simple on pense à ses lacets de chaussures, en d'autres termes aux nœuds que l'on rencontre dans la vie courante, ceux que l'on fait avec des bouts de ficelle. Regardons de plus près le plus simple d'entre eux, le nœud plat :



Ce nœud est caractéristique de ceux que l'on peut faire, en particulier il est facile de le dénouer. Si l'on fait un nœud plus compliqué, on pourra toujours le dénouer, même si comme chacun en a fait l'expérience cela peut parfois être plus difficile et prendre plus de temps. Donc dans un certain sens tous les nœuds sont les mêmes puisqu'on peut tous les dénouer. Les mathématiciens, pour donner plus de diversité, modifient cette définition intuitive en recollant les deux extrémités pendantes du bout de ficelle, ce qui donne dans le cas du nœud plat le dessin suivant :



Pour le moment, les nœuds considérés, ont toujours une épaisseur (celle du bout de ficelle) ; nous allons maintenant considérer que notre ficelle n'a pas d'épaisseur, ce qui permet de la schématiser ainsi :



On notera que ce dessin permet d'indiquer si un brin passe au-dessus ou en dessous d'un autre brin.

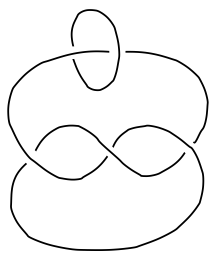
Pour pouvoir dessiner nos nœuds nous avons été obligés de les mettre à plat sur une feuille, mais en réalité ce que nous regardons ce sont ces mêmes nœuds mais dans l'espace ambiant (celui de dimension 3). Nous pouvons maintenant donner une définition d'un nœud.

Définition 1 *Un nœud est une courbe fermée sans points doubles dans l'espace, c'est-à-dire une application continue* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ *telle que* $\gamma(0) = \gamma(1)$ *et* $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ *pour deux éléments distincts* t *et* t' *.*

Nous allons aussi considérer des objets un petit peu plus généraux : des entrelacs. Dans tout ce que nous avons fait précédemment nous n'avons pris qu'un seul bout de ficelle ; nous effectuons maintenant les mêmes opérations avec plusieurs morceaux de ficelle.

Définition 2 *Un entrelacs est une réunion disjointe de courbes fermées sans points doubles dans l'espace.*

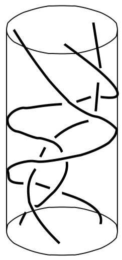
Voici un exemple d'entrelacs :



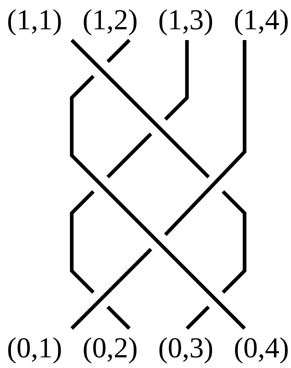
Une *composante* sera une des courbes fermées (ce qui correspond à un des bouts de ficelle). En utilisant ce vocabulaire, un nœud est un entrelacs à une composante. Nous remarquons que dans notre exemple une des composantes (un des bouts de ficelles) est un cercle. Ce cercle est le nœud (même si dans la vie courante on n'appellerait pas cela un nœud) le plus simple que l'on puisse faire, on l'appelle le *nœud trivial* (trivial signifiant en mathématiques le plus simple).

1.2. Tresse à n brins

De la même manière que pour les nœuds, nous considérons dans l'espace des bouts de ficelle attachés en haut et en bas comme le montre le dessin ci-dessous et s'entremêlant.



Pour les dessiner, nous projetons les tresses dans le plan. Nous pouvons toujours trouver une projection qui nous permette de dessiner les tresses comme des brins attachés en haut et en bas comme le montre la figure suivante. De plus, quitte à déformer les bouts de ficelle, il est toujours possible de considérer que les croisements se font seulement entre deux brins.



Nous pouvons alors donner une première définition mathématique d'une tresse à n brins.

Définition 3 *Une tresse géométrique est la donnée de n courbes ouvertes (les bouts de ficelle) attachées à leurs extrémités aux points de coordonnées $(1,1),\ldots,(1,n)$ en haut et $(0,1),\ldots,(0,n)$ en bas, qui descendent toujours et telles que les seuls points d'intersection entre ces courbes ouvertes soient des points doubles tels que nous sachions quel brin passe au-dessus de l'autre.*

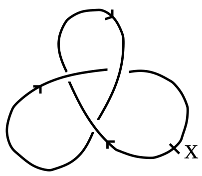
Nous représenterons le brin du dessus avec un trait continu et celui du dessous avec un trait coupé comme le montre l'exemple précédent.

1.3. Projection et mouvements de Reidemeister

Projection des nœuds

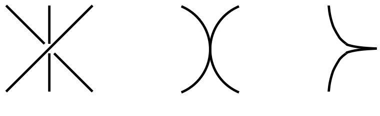
Dans la partie précédente, les nœuds et les entrelacs ont été définis comme des objets vivants dans l'espace, mais une représentation plane permet d'appréhender ces objets plus simplement. L'opération que l'on effectue est une projection (on prend notre bout de ficelle et on l'écrase sur un mur). On met ensuite en place une convention de dessin pour reconnaître dans chaque croisement la position relative des deux morceaux. La convention est la même que pour les tresses et est donnée par les diagrammes suivants :

Par exemple, si on considère le diagramme suivant et que l'on part de la marque $\times$ en suivant la flèche, on passe successivement au-dessus, au-dessous, au-dessus, au-dessous, au-dessus, au-dessous et on revient au point de départ.



Plus généralement, on peut toujours attribuer à un nœud ou à une composante d'un entrelacs un sens de parcours. Ce sens de parcours sera alors signifié sur le diagramme par une flèche. Un nœud (entrelacs) muni d'un sens de parcours sera appelé un *nœud (entrelacs) orienté*.

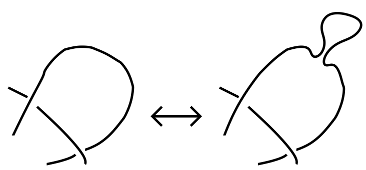
Le dessin du nœud dans le plan s'appelle un *diagramme de nœud*. Nous allons maintenant nous demander dans quelle mesure les diagrammes représentent les objets de l'espace. Pour cela on veut que la projection soit *générique*. Le terme générique signifie qu'à partir du diagramme on peut retouver le nœud ou l'entrelacs. Dans le cas contraire la projection est catastrophique comme dans les dessins ci-dessous :



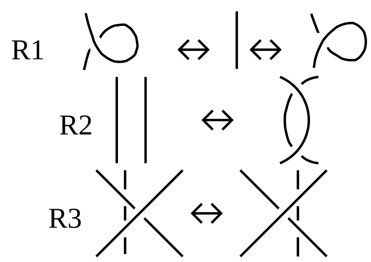
Si la projection ressemble localement à un de ces dessins, le nœud n'est pas parfaitement défini dans l'espace (il y a plusieurs nœuds qui ont cette projection). Heureusement, on peut montrer qu'il existe toujours une projection générique. Par diagramme d'un nœud ou d'un entrelacs, on entend en fait une projection générique d'un nœud ou d'un entrelacs.

Mouvements de Reidemeister pour les nœuds

Un des problèmes classiques en Mathématiques est le problème de classification des objets que l'on étudie. Dans cette optique, nous allons nous intéresser à la classification des nœuds et des entrelacs. Nous allons donc mettre en place des critères de classification. Par exemple, si vous voulez ranger votre bibliothèque, il faut d'abord décider si vous optez pour un classement thématique ou alphabétique, par auteur ou par titre. Dans notre cas il faut d'abord décider quand est-ce que deux nœuds seront pour nous les mêmes. Pour cela revenons un moment à nos ficelles. On prend un bout de ficelle, on le noue et on recolle les extrémités. On aimerait alors que toutes les manipulations que l'on peut faire avec notre morceau de ficelle dans l'espace sans le couper nous donnent toujours le même nœud : *deux nœuds sont les mêmes* si l'on peut transformer l'un en l'autre par une manipulation continue dans l'espace. Le terme manipulation continue signifie essentiellement sans couper le bout de ficelle. Les manipulations autorisées étant précisées, étudions leurs répercussions sur les diagrammes de nœuds. Elles sont essentiellement de quatres types et nous donnerons localement leurs dessins. Les déformations entre deux croisements, comme dans l'exemple suivant sont autorisées,



ainsi que les trois types de déformation mettant en jeu des croisements et que l'on appelle mouvements de Reidemeister, du nom du mathématicien allemand qui les a découverts. Ces manipulations sont dessinées ci-dessous, la flèche signifiant que l'on peut passer d'un diagramme à l'autre, dans un sens ou l'autre.



On peut remarquer que pour passer d'un côté à l'autre d'une des flèches on passe par une situation catastrophique. Par exemple, dans le cas de R2 pour aller de la situation de droite à la situation de gauche, on tire les deux bouts l'un vers la droite l'autre vers la gauche et juste avant d'avoir deux bouts parallèles, on passe par la seconde situation catastrophique.

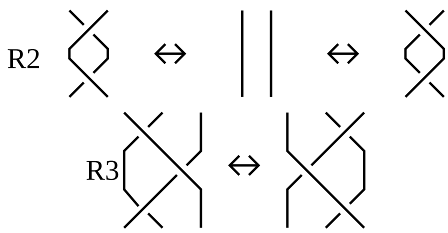
Il reste maintenant à savoir si toutes les manipulations d'un nœud dans l'espace peuvent être vues sur un diagramme de nœud grâce aux mouvements de Reidemeister et aux manipulations entre les croisements (manipulations triviales). Reidemeister en a donné la preuve [5].

Théorème 1 (Reidemeister 1927) *Si l'on peut transformer un nœud en un autre nœud par une manipulation continue dans l'espace, on peut obtenir le même résultat par une manipulation dont la projection consiste seulement en mouvements de* Reidemeister *et en manipulations triviales du diagramme dans le plan.*

Ce théorème signifie que pour étudier la classification des nœuds dans l'espace, il suffit d'étudier leurs diagrammes en utilisant des manipulations triviales et des mouvements de Reidemeister. On a donc ramené le problème de l'espace au plan, de la dimension trois à la dimension deux. De la même manière, ce résultat reste vrai pour les entrelacs, ainsi que pour les nœuds et les entrelacs orientés. Les mouvements de Reidemeister pour les nœuds et entrelacs doivent être possible avec toutes les orientations, mais on peut montrer qu'ils s'obtiennent tous à partir des deux mouvements suivants.

Mouvements de Reidemeister pour les tresses.

Comme pour les nœuds, des projections génériques permettent d'obtenir la définition géométrique d'une tresse dans le plan. Il faut donc aussi tenir compte des mouvements possibles dans l'espace et de leur incidence sur le dessin dans le plan. Toutes les manipulations triviales (sans toucher aux croisements) sont donc autorisées ainsi que les mouvements de Reidemeister. Cependant ces mouvements sont légèrement différents de ceux considérés pour les nœuds, par exemple le mouvement R1 de Reidemeister imposant au brin de remonter est exclu. Nous avons en fait le mouvement R2 (en tenant compte de l'orientation du haut vers le bas) et qui est représenté sur la figure suivante et le mouvement R3 de Reidemeister qui, lui, reste inchangé.



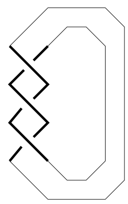
(1)

Nous pouvons alors définir les tresses dans le plan en permettant ces mouvements et elles correspondent à l'intuition comme l'affirme le théorème suivant (qui découle du Théorème de Reidemeister).

Théorème 2 *En autorisant les manipulations triviales sans toucher aux croisements ainsi que les mouvements* R2 *et* R3 *de* Reidemeister*, les tresses géométriques correspondent aux tresses dans l'espace.*

1.4. Clôture d'une tresse en un nœud

Les tresses et les nœuds provenant de morceaux de ficelle entremêlés dans l'espace, il est donc naturel d'essayer de relier les deux notions mathématiques que nous venons de définir pour représenter ces morceaux de ficelle. Cela est possible en effectuant la contruction suivante. Etant donné une tresse, nous pouvons la clôturer en reliant les extrémités entre elles sans ajouter de croisement comme le montre la figure suivante.

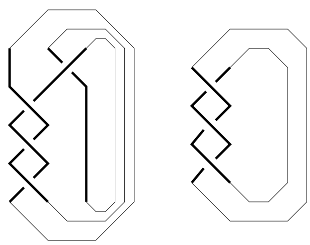


(2)

Nous obtenons alors un nœud ou un entrelacs. Le théorème d'ALEXANDER affirme alors que tous les nœuds et entrelacs peuvent être obtenus par clotûre d'une tresse.

Théorème 3 (Alexander 1923) *Tout nœud ou entrelacs est clôture d'une tresse.*

Ce résultat est un résultat d'existence aussi se pose une question naturelle : étant donné un nœud, comment trouver une tresse qui se clôture en ce nœud. Vogel [11] a donné un algorithme pour « déclôturer » un noeud. Nous pouvons alors « transporter » par clôture des résultats des tresses sur les nœuds. Cependant si on obtient certains résultats de cette manière, le problème de la classification des nœuds ne se déduit pas de la classification des tresses. En effet, nous allons voir que la classification des tresses provient d'une structure sur l'ensemble des tresses, mais cette structure ne peut pas être mise sur les nœuds. Notons aussi que des tresses très différentes peuvent donner par clôture le même nœud comme le montre l'exemple ci-dessous.



2. Une structure pour les tresses

Dans cette partie, nous montrons comment mettre une structure sur les tresses qui nous permet de réduire l'étude des tresses à une étude de mots et d'en déduire une classification.

2.1. Remarques générales

Commençons par regarder ces ensembles de tresses et leurs liens avec des ensembles connus comme les nombres ou les permutations.

Lien avec les nombres

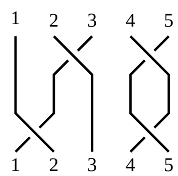
Notons $\mathcal{B}_2$ l'ensemble des tresses à deux brins. Nous avons deux types de croisements élémentaires que nous dirons positifs ou négatifs comme l'indiquent les figures suivantes.

croisement positif croisement négatif

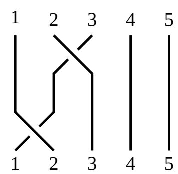
Pour les tresses à deux brins, nous pouvons compter le nombre de croisements avec leurs signes et obtenir un nombre entier relatif associé à la tresse. Le mouvement R2 de REIDEMEISTER (1) correspond exactement aux opérations $1 - 1 = 0 = -1 + 1$ et la tresse de l'exemple (2), par exemple, correspond au nombre -3. Nous pouvons alors identifier les tresses à deux brins avec les nombres entiers avec signes ! Pour les entiers relatifs, nous avons une opération, l'addition, qui nous donne une structure. Nous allons construire la structure correspondante pour les tresses générales et nous illustrerons ses propriétés grâce à cet exemple des tresses à deux brins. Mais pour un temps encore continuons à regarder les liens avec un autre ensemble, les permutations.

Lien avec les permutations

Considérons la tresse à 5 brins ci-dessous :



Numérotons les brins et suivons-les. Le premier brin se termine en position 2 et le deuxième en position 3, le troisième brin terminant en position 1. D'autre part les brins 4 et 5 restent en position 4 et 5. Nous avons donc une permutation des positions associées à cette tresse que nous noterons $1 \to 2 \to 3$ ou encore (123). De la même manière, considérons une tresse à n brins et numérotons les brins. Suivons les brins et notons la position finale de chaque brin. Nous obtenons une *permutation* de $\{1, \ldots, n\}$ (c'est-à-dire une autre manière de ranger les nombres 1 à n) associée à la tresse. Notons que cette permutation est invariante par les mouvements de REIDEMEISTER et nous pouvons alors définir une application de l'ensemble des tresses à n brins (noté $\mathcal{B}_n$) vers l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ (noté $\mathfrak{S}_n$). Cette application ne permet cependant pas d'identifier les tresses et les permutations comme le montre la figure suivante où la même permutation (123) est obtenue à partir d'une autre tresse.



En un sens les tresses représentent les permutations avec le souvenir des opérations effectuées !

Une tresse en général

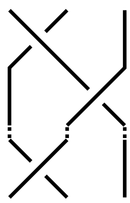
Jusqu'à maintenant, nous avons toujours considéré des tresses à n brins. Comment définir une tresse de manière générale ? Prenons une tresse à 3 brins et juxtaposons-la à une tresse à deux brins triviaux (c'est-à-dire ne s'entremêlant pas). Nous avons obtenu une tresse à 5 brins (voir l'exemple précédent). De manière générale, nous pouvons toujours juxtaposer des brins triviaux à côté d'une tresse pour lui donner le nombre de brins que l'on veut. On peut de cette manière considérer une tresse générale. Nous sommes alors prêts à regarder la structure de ces tresses.

2.2. Opération et structure sur les tresses

Pour mieux connaître les tresses, nous aimerions savoir comment obtenir une tresse à partir d'autres. Pour cela nous allons regarder comment créer une tresse à partir de deux autres et en faisant une analogie avec les nombres (qui correspondent aux tresses à deux brins) quelles propriétés, et donc quelle structure peut-on espérer pour les tresses, structure que nous récapitulerons rapidement dans un tableau (voir Fig. 1).

Comment construire une tresse à partir de deux autres ?

À partir de deux tresses, nous pouvons éventuellement ajouter des brins pour obtenir deux tresses de même taille et alors coller la seconde tresse en dessous de la première et relier les brins comme le montre la figure qui suit.



Nous obtenons ainsi une opération sur l'ensemble des tresses que l'on appelle la *composition* de deux tresses. Pour l'exemple des tresses à deux brins nous pouvons identifier une tresse avec le nombre de croisement. La composition de deux tresses s'identifie alors avec l'addition des nombres entiers relatifs.

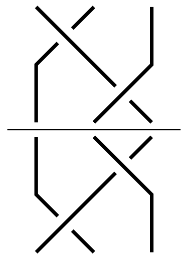
Quelles propriétés pour cette opération ?

Par analogie avec les nombres, cherchons quelles propriétés peuvent être vérifiées par cette composition.

La composition des tresses comme l'addition pour les nombres est *associative*. Pour les tresses, cela revient à dire que si nous prenons trois tresses que nous mettons les unes en dessous des autres, le résultat de la composition est le même si l'on relie d'abord les deux tresses du dessus et ensuite que l'on relie la tresse obtenue avec celle du dessous ou bien le contraire : on relie les deux tresses du dessous puis celle du dessus.

La composition comme l'addition possède un *élément neutre*. Considérons la tresse constituée de brins ne s'entremêlant pas ; nous l'appellerons la tresse triviale. La composition avec cette tresse ne change rien et la tresse triviale est donc un élément neutre.

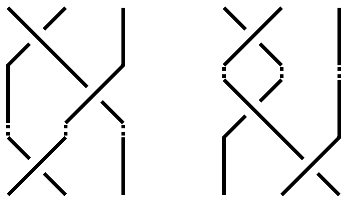
Chaque tresse admet une *tresse inverse*. Etant donné une tresse, nous devons trouver une autre tresse qui, quand on la compose, nous donne un résultat qui s'identifie à la tresse triviale (équivalent du zéro). Cela est possible en considérant l'image de la tresse dans un miroir. En composant une tresse avec son image dans un miroir, nous obtenons une tresse qui se réduit par des mouvements de REIDEMEISTER en la tresse triviale comme l'illustre la figure suivante.



Un ensemble qui possède une opération qui vérifie les propriétés précédentes (associativité et existence d'un élément neutre et d'inverses pour tous les éléments) est appelé un *groupe*. Nous avons donc le théorème.

Théorème 4 *La composition munit l'ensemble des tresses d'une structure de groupe.*

Remarquons que nous n'avons pas toutes les propriétés de l'addition des nombres. Par exemple l'addition est *commutative*. Pour les tresses, ceci n'est plus vrai si le nombre de brins est supérieur ou égal à trois. La figure suivante montre l'exemple de deux tresses à trois brins telles que le composé de ces deux tresses est différent selon l'ordre dans lequel nous faisons l'opération (il suffit pour s'en convaincre de remarquer que les deux permutations associées sont différentes).

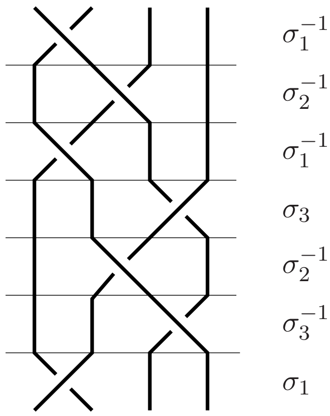


Intérêt de cette structure

Un intérêt de cette structure est de pouvoir réduire les tresses à des composés de tresses simples. En gardant toujours notre analogie avec les nombres, nous pouvons écrire $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ et donc réduire le nombre 5 à une addition de nombres simples, ici tous égaux à 1.

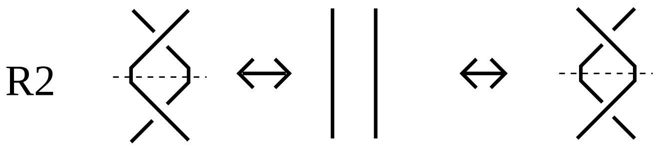
Nous pouvons faire de même pour les tresses. Pour cela nous devons dire quelles sont les tresses « simples ». Nous considérons les tresses constituées d'un seul croisement positif entre les brins i et $i+1$. Nous noterons cette tresse σ_i. De même nous noterons σ_i^{-1} la tresse constituée d'un seul croisement négatif entre les brins i et $i+1$.

Considérons maintenant la tresse à 4 brins de la figure qui suit.

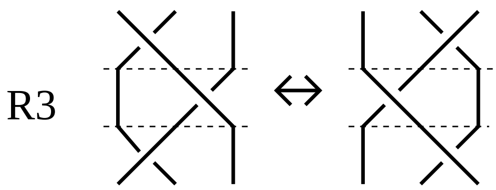


On étire la tresse pour isoler chaque croisement élémentaire et nous obtenons alors ce que nous appellerons un *mot* constitué des lettres σ_i. Le mot correspondant est alors $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_1$.

Notons que nous pouvons obtenir plusieurs mots à partir d'une tresse que cela soit en étirant autrement la tresse ou en faisant subir des mouvements de REIDEMEISTER à la tresse. Heureusement, nous connaissons les relations que ces manipulations imposent aux mots. Précisément, lorsque nous pouvons obtenir deux mots différents en étirant différemment la tresse, cela impose une relation de la forme $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ et cela est possible dès que les brins $i, i+1, j$ et $j+1$ sont tous distincts c'est-à-dire quand $|i-j| \geq 2$. Le mouvement R2 de REIDEMEISTER s'écrit $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\sigma_i = T$, si T désigne la tresse triviale.



Le mouvement R3 de REIDEMEISTER s'écrit lui $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.



On peut ensuite montrer que seules ces relations interviennent et par suite le groupe des tresses s'identifie aux mots constitués des lettres $\sigma_i^{\pm 1}$ et soumis aux relations précédentes, théorème dû à E. ARTIN [2].

Théorème 5 (Artin 1947) *Le groupe des tresses à n brins s'identifie au groupe engendré par* $(\sigma_i^{\pm 1})_{i=1\ldots n-1}$ *avec les relations*

$$\begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j &=& \sigma_j\sigma_i & \textit{pour tout } i,j \textit{ tels que } |i-j|>2 \\ \sigma_i\sigma_i^{-1} &=& \sigma_i^{-1}\sigma_i = 1 & \textit{pour tout } i=1,\ldots,n-1 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &=& \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \textit{pour tout } i=1,\ldots,n-2. \end{array} \tag{3}$$

Cette structure et cette écriture en produits de tresses simples (*générateurs*) et ensuite en mots permet de classifier les tresses et d'avoir des algorithmes qui déterminent si deux tresses sont identiques.

Opération	Mettre la seconde tresse en dessous de la première	additionner les croisements avec signe
Associativité	Oui	$(2+3)+5=2+(3+5)$
Élément neutre	La tresse triviale	$0+2=2+0=2$
Inverse	L'image dans un miroir	$2-2=-2+2=0$
Commutativité	Non	$2+3=3+2$
Générateurs	$(\sigma_i)_{i=1\ldots n-1}$	1

FIG. 1 – Résumé de la structure des tresses

2.3. Travaux récents sur les structures : un ordre total

Récemment, une nouvelle structure a été construite sur les tresses. DEHORNOY [3] a montré comment définir un ordre total sur les tresses, c'est-à-dire deux tresses étant données, décider laquelle est la plus grande. Pour les tresses dites *positives*, c'est-à-dire à qui nous pouvons associer un mot qui ne comporte que les lettres σ_i avec des puissances positives, cet ordre correspond à l'ordre lexicographique quand on se donne l'ordre des lettres $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_{n-1}$. Par exemple $\sigma_1\sigma_2\sigma_4\sigma_2\sigma_1^2\sigma_8 < \sigma_1\sigma_4\sigma_2^3$ car pour la première lettre différente nous avons $\sigma_2 < \sigma_4$. Même si pour les autres tresses, la définition est un peu plus compliquée, cet ordre permet de dire que deux tresses α et β sont égales si et seulement si $\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \alpha$. Des travaux récents ont aussi amélioré la rapidité de l'algorithme de différentiation des tresses et d'autres sont en cours pour créer des algorithmes de cryptographie à partir de calculs sur les tresses.

3. Invariants

Revenons aux nœuds et à leur classification.

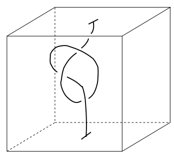
3.1. Utilisation du théorème de Reidemeister

On pourrait à priori penser que le théorème de REIDEMEISTER donne la classification des nœuds. En effet si on se donne deux diagrammes de nœuds, il suffit pour savoir s'ils sont les mêmes d'appliquer un mouvement de REIDEMEISTER sur l'un des diagrammes puis de comparer les diagrammes et de recommencer ainsi de suite. Si les deux diagrammes représentaient le même nœud ce processus aboutirait, dans le cas contraire il serait sans fin. Le problème c'est que l'on ne peut pas conclure si le processus ne s'arrête pas. Dans le cas où les deux diagrammes représentent deux nœuds distincts, on s'y est peut-être mal pris, ou il faut peut-être encore travailler un peu. Pour obliger ce processus à prendre fin, on peut essayer d'appliquer les mouvements de REIDEMEISTER seulement dans le sens où le nombre de croisements diminue. Malheureusement, cela ne suffit pas car il faut parfois compliquer la situation (augmenter le nombre de croisements) pour ensuite réduire le nœud. Par exemple, considérons le diagramme suivant :

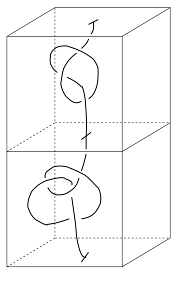
En fait on peut voir que ce diagramme est équivalent à celui du nœud trivial mais pour le transformer par mouvements de REIDEMEISTER en un cercle, il est nécessaire d'augmenter le nombre de croisements.

3.2. Une structure pour les nœuds ?

Que se passe-t-il quand on essaye de mettre une structure sur l'ensemble des nœuds ? Le premier point est de trouver comment mettre une composition sur l'ensemble des nœuds. Essayons de la définir comme nous l'avons fait pour les tresses : on coupe le nœud et on le met ensuite dans une boîte comme le montre le dessin ci-dessous (la boîte sert juste de support visuel).

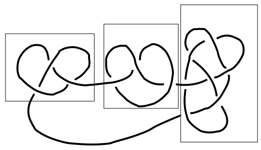


Pour composer les nœuds on colle les boîtes les unes au-dessus des autres :



Ensuite on peut recoller les deux extrémités pour obtenir un nœud.

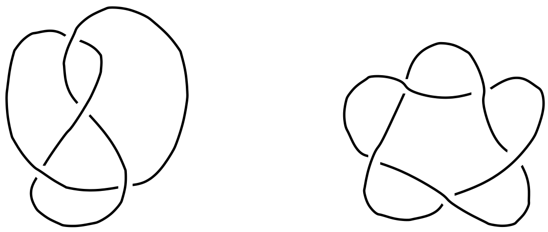
Considérons maintenant les propriétés analogues à celles que nous avons obtenues pour les tresses. L'élement neutre de cette composition est le nœud trivial. Ce produit de nœud est associatif et il est de plus commutatif. En serrant par exemple le premier nœud on peut le passer au travers du second le long de la ficelle et obtenir la composition dans l'autre sens. Le problème est qu'un nœud n'a pas d'inverse pour cette opération. Néanmoins par ce procédé on peut obtenir une décomposition des nœuds en *nœuds premiers*, qui sont ceux qu'on ne peut plus décomposer. On a alors, comme pour les nombres entiers, une arithmétique des nœuds. Schubert a étudié les propriétés de cette arithmétique dans les années 50. Par exemple, le nœud suivant a été décomposé en trois nœuds premiers.



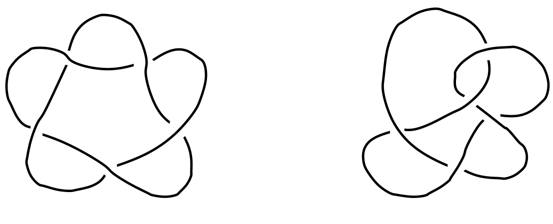
3.3. Construction d'invariants

Ni l'étude d'une structure sur les nœuds, ni le théorème de Reidemeister, n'ont permis de conclure à une classification des nœuds. Néanmoins ce théorème de Reidemeister est la clef pour la construction d'invariants. Afin de comprendre ce qu'est un invariant il faut d'abord préciser invariant par rapport à quoi ? Si l'on considère le nœud, l'invariance doit être par rapport aux manipulations continues de l'espace, mais comme on peut se ramener à un diagramme de nœuds, l'invariance est par rapport aux manipulations triviales et aux mouvements de Reidemeister.

Pour comprendre cette idée d'invariant, considérons un élément « caractéristique » du nœud comme le nombre de croisements. À un diagramme, on peut associer son nombre de croisements. Mais si nous effectuons un mouvement de Reidemeister R1, par exemple, ce nombre de croisements change. Ce n'est donc pas quelque chose qui dépend uniquement du nœud mais aussi de sa représentation. Par contre, en considérant le nombre minimal de croisements pour les diagrammes d'un nœud, nous avons un invariant. Les nœuds suivants



n'ont pas le même nombre minimal de croisements, ils sont donc différents, alors que les nœuds ci-dessous



ont le même nombre minimal de croisements mais sont aussi différents. Notons que s'il est facile de se convaincre en regardant les dessins que les nœuds sont représentés avec leur nombre minimal de croisements, trouver le nombre minimal de croisements d'un nœud est en général un problème très difficile.

De manière générale un *invariant* est l'association à un diagramme de nœud d'un certain objet algébrique (un nombre, un polynôme...). Pour que cette association soit un invariant, il faut qu'elle soit invariante par manipulations triviales et mouvements de Reidemeister. Comme on l'a vu sur un cas particulier, un invariant sert en général à répondre par la négative à la question : est-ce que ces deux diagrammes représentent le même nœud ? Un invariant qui serait différent pour tous les nœuds distincts serait *complet*. Il existe beaucoup d'invariants tels que les polynômes d'Alexander[1] (construit dans les années 1920) et de Jones[2] (1984) qui sont, contrairement au nombre minimal de croisements, facilement calculables . Nous savons que la majorité des invariants ne sont pas complets, néanmoins, on conjecture que les invariants de Vassiliev (1989–90) le sont. En attendant, la classification des nœuds reste un problème ouvert.

Bibliographie

[1] J. W. Alexander (1923), *A lemma on a system of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **9**, 93–95.

[2] E. Artin (1947), *Theory of Braids*, Annals of Math. (2) **48**, 101–126.

[3] P. Dehornoy (1997), *A fast method for comparing braids*, Advances in Math. **125**, 200-235.

[4] C. Kassel (2002), *Cents ans de topologie algébrique*, L' Ouvert **106**.

[5] K. Reidemeister (1974), Knotentheorie, *Reprint Springer-Verlag.*

[6] D. Rolfsen (1990), Knots and links, *Mathematics Lecture Series* **7**, (Corrected reprint of the 1976 original).

[7] A. Sossinsky (1999), Nœuds, Genèse d'une théorie mathématique (Origins of a mathematical theory), *Éditions du Seuil.*

[8] *La science des nœuds, théorie et applications*, Pour la science, dossier hors série - avril 1997.

[9] *Des tresses pour l'ordinateur quantique*, Pour la science, mai 2006.

[10] V. Touraev (1992), *Topologie des nœuds*, L' Ouvert **66**.

[11] P. Vogel (1990), *Representations of links by braids : A new algorithm,* Comment. Math. Helvetici, **65**, No. 1, 104-113.

Thomas Aubriot
Emmanuel Wagner
IRMA
Université Louis Pasteur, Strasbourg
aubriot@math.u-strasbg.fr
wagner@math.u-strasbg.fr

[1]On pourra consulter l'article « Cent ans de topologie algébrique » de C. Kassel paru dans l'Ouvert 106 pour une définition de l'invariant d'Alexander.

[2]On pourra consulter l'article « Topologie des Nœuds » de V. Touraev paru dans l'Ouvert 66 pour une définition de l'invariant de Jones.

APERÇU HISTORIQUE DE L'ÉVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DES VECTEURS EN FRANCE DEPUIS LA FIN DU XIX^e SIÈCLE

Cissé BA, Jean-Luc DORIER

Résumé : Le présent texte s'insère dans un projet plus global d'une thèse en cours sur les liens entre mathématiques et physique dans l'enseignement. Cet article présente une analyse de l'histoire de l'enseignement des vecteurs en France depuis leur timide apparition dans les programmes des classes du secondaire à la fin du XIX^e jusqu'à nos jours. Le cadre théorique sur lequel s'appuient nos analyses s'inspire de l'écologie des savoirs tel qu'elle a été développée par Yves Chevallard (1994). Au-delà de l'intérêt historique, nous voulons ainsi éclairer un domaine de l'éducation mathématique, qui ne cesse de rétrécir au fur et à mesure des réformes récentes, et dont le lien avec l'enseignement de la physique, s'il paraît naturel aux deux parties, semble néanmoins ne pas pouvoir réellement servir d'appui efficace pour les enseignants de l'une et l'autre discipline.

Mots-clés : Vecteur – Enseignement – Programme – Histoire – Niche – Habitat.

Introduction

Même si l'on retrouve des traces du parallélogramme des forces dès l'antiquité, l'origine du vecteur est à chercher dans des périodes beaucoup plus récentes. La critique de Leibniz de la géométrie de Descartes, qui prônait la recherche d'une caractéristique purement géométrique qui puisse s'appliquer aux positions de la même façon que l'algèbre s'applique aux grandeurs, est restée vaine pendant plus d'un siècle. C'est vraiment avec l'interprétation géométrique des quantités imaginaires et le désir de généralisation à l'espace, que le concept de vecteur se fait jour dans le courant du XIX^e, à la croisée de l'algèbre et de la géométrie, puis dans les applications à la physique (CROWE, 1967 et FLAMENT, 1997 et 2003). De même, les liens qui ont uni la genèse du calcul vectoriel et l'élaboration de l'algèbre linéaire sont aussi plus complexes et plus ténus qu'ils n'en ont l'air (DORIER, 1997, 1^ère partie).

Notre propos n'est pas ici de retracer l'histoire des vecteurs, nous renvoyons le lecteur intéressé aux ouvrages cités ci-dessus. Nous nous intéressons plutôt à l'histoire de l'enseignement des vecteurs en France depuis leur timide apparition dans les programmes des classes du secondaire à la fin du XIX^e jusqu'à nos jours. Au-delà de l'intérêt historique, nous voulons ainsi éclairer un domaine de l'éducation mathématique, qui ne cesse de rétrécir au fur et à mesure des réformes récentes, et dont le lien avec l'enseignement de la physique, s'il paraît naturel aux deux parties, semble néanmoins ne pas pouvoir réellement servir d'appui efficace pour les enseignants de l'une et l'autre discipline.

Nous allons étudier dans cet article les différentes places occupées par le vecteur dans les programmes qui se sont succédés depuis la réforme de 1852. La question initiale que nous nous posons porte sur les conditions qui ont amené à faire vivre et évoluer les vecteurs dans l'enseignement secondaire français. Du point de vue théorique de l'analyse, nous nous situons dans une perspective écologique, c'est-à-dire que nous identifions l'évolution de l'habitat et des niches des vecteurs, selon les termes définis par CHEVALLARD (1994) dans son approche de l'écologie didactique des savoirs :

> *Les écologistes distinguent, s'agissant d'un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce.* (Op. cité, p. 142).

À la suite de CHEVALLARD, ARTAUD (1997) montre alors comment un objet émerge et peut vivre dans un écosystème didactique.

> *Pour qu'un objet O émerge dans un écosystème didactique, il est nécessaire qu'existe un milieu pour cet objet, c'est-à-dire un ensemble d'objets connus (au sens où il existe un rapport institutionnel non problématique) avec lesquels O viendra se mettre en interrelation. Cette condition est à mettre en rapport avec une condition citée plus haut, la loi du tout structuré, dont je rappelle l'énoncé : un objet mathématique ne peut exister seul ; il doit venir prendre place dans une organisation mathématique, organisation qu'il faut faire exister. La nécessité qu'existe un milieu dit alors que cette émergence d'une organisation mathématique ne peut se faire ex nihilo. Il faut prendre appui sur des organisations, mathématiques ou non mathématiques, déjà existantes.* (Op. cité, p. 124).

L'analyse écologique permet alors de mettre à jour un réseau de conditions et de contraintes qui vont déterminer la place que peut occuper l'objet vecteur et son évolution au cours des changements de programmes en prenant en compte le fonctionnement global des institutions scolaires où il intervient, mais aussi d'institutions plus larges liées au fonctionnement du savoir savant chez les mathématiciens ou les physiciens.

Nous allons procéder par ordre chronologique depuis 1852 jusqu'à nos jours, en différentes phases qui correspondent aux grandes réformes scolaires. Notons que nous ne nous attarderons pas trop sur les réformes les plus récentes, qui sont mieux connues des lecteurs et ont fait l'objet d'analyses fines dans des travaux que nous citerons en conclusion, en débouchant sur quelques réflexions didactiques qui orientent un travail en cours.

1. Les débuts (1852 – 1925)

1852 – Une première référence au mot vecteur

Les astronomes avaient pour habitude de parler de *tourbillon vecteur* pour désigner le mouvement d'une planète et de *rayon vecteur* pour désigner le segment qui joint le foyer de la conique décrivant la trajectoire de la planète à une position sur l'orbite. L'emploi du terme *rayon vecteur* s'est ensuite généralisé en géométrie, mais n'a finalement rien à voir avec le vecteur tel qu'on l'entend actuellement. C'est pourtant dans cette expression qu'il apparaît pour la première fois dans des programmes de mathématiques du secondaire en 1852 (pour la classe de première), suite à la réforme dite de la « bifurcation ». C'est une réforme à visée exclusivement utilitaire comme le rappellent GISPERT et HULIN (2000) :

> *Avec cette réforme, un double but est poursuivi : réserver aux sciences une place plus importante (compte tenu de leur développement), mais aussi constituer un enseignement plus approprié aux besoins de la société productive. L'enseignement est alors marqué par une conception utilitaire et tournée vers les applications. Jean-Baptiste Dumas, l'un des protagonistes de la réforme, explique qu'il convient de « réduire la géométrie aux propositions vraiment usuelles, l'algèbre à ce qu'il faut pour étudier les éléments de physique et de mécanique ».* (Op. cité, p.1).

Cette citation montre que la conception dominante au niveau de l'enseignement des sciences était plutôt d'ordre utilitaire. Les mathématiques sont avant tout vues comme une discipline au service des autres. C'est pourquoi, il faudra attendre le début du XX[e] siècle pour voir le concept de vecteur, encore en cours de constitution, apparaître dans l'enseignement secondaire. C'est la même année, en 1852, qu'apparaît en mécanique la composition des forces, des vitesses et des mouvements, avec une allusion au parallélogramme des forces et à la composition des forces concourantes ou parallèles. Mais le lien avec la notion de vecteur n'était pas encore clair.

La réforme de 1902 : apparition du vecteur en géométrie

À l'orée du XX[e] siècle, les conceptions épistémologiques sur l'enseignement des sciences change. En 1902, une réforme inspirée par des enseignants du supérieur (comité présidé par DARBOUX pour les mathématiques), donne une nouvelle vision de l'enseignement des sciences. Cette réforme opérée dans l'enseignement secondaire vise à faire des sciences des humanités au même rang que les humanités classiques. Elles doivent contribuer à former l'homme et le citoyen.

> *L'accroissement notable de la place accordée aux sciences, et en particulier à la physique, s'accompagne d'un discours sur l'apport spécifique des diverses disciplines tout en soulignant l'unité de la science.* (GISPERT et HULIN, 2000, p. 2).

Lors de cette réforme, le terme rayon vecteur disparaît des programmes laissant la place à la notion de vecteur défini comme segment orienté. Jusque-là confinée dans le monde savant, la notion de vecteur va commencer à pénétrer dans les programmes de première en mécanique et en cinématique. Les points abordés sont : les projections, la somme et la différence de vecteurs concourants, le théorème des projections, le moment linéaire. En statique et dynamique, on parle de travail des forces (produit scalaire). Le vecteur entre donc dans l'enseignement secondaire par l'habitat paraphysique et trouve une niche dans la représentation de grandeurs physiques. C'est une réforme qui consacre la place des mathématiques dans la connaissance de la nature. Lors de cette réforme majeure de 1902, les concepteurs des programmes accordent une importance accrue à la collaboration entre les professeurs des deux disciplines. D'ailleurs, l'intérêt de cette collaboration est souligné par une circulaire de 1909 :

> *Il serait bon [..] que les professeurs de mathématiques et les professeurs de physique d'un même établissement se prêtassent un mutuel appui. Le professeur de physique doit, à chaque instant, savoir à quel degré d'avancement se trouve l'éducation mathématique de ses élèves et réciproquement, le professeur de mathématiques a tout intérêt à ne pas ignorer quels exemples il peut choisir, dans les connaissances expérimentales déjà acquises, pour illustrer les théories qu'il a expliquées d'une façon abstraite.* (Op. cité, p. 3).

La surcharge des programmes est dénoncée par les enseignants qui demandent et obtiennent des allégements en 1905. Ainsi, les vecteurs passent de la première à la Terminale dans l'habitat de la géométrie pour se constituer en outils pour la physique (ce qui constitue leur niche).

> *En mécanique, […] le professeur devra éviter tous les développements et les exercices présentant uniquement un intérêt géométrique ; c'est pour supprimer toute occasion de développements de ce genre que les théorèmes se rapportant aux vecteurs ont été réduits au minimum indispensable et transportés dans le programme de géométrie, où ils se présentent*

> *sous leur véritable jour.* (Instruction du 27 juillet 1905 relative à l'enseignement des mathématiques, p. 676)

Les vecteurs se retrouvent donc « basculés » de la physique dans la géométrie en réponse à un problème purement didactique.

1925 – Un nouvel habitat potentiel

En 1925, sans être explicitement au programme, les vecteurs apparaissent au niveau de la classe de troisième, pour la représentation des nombres relatifs comme « notions concrètes sur les nombres positifs et négatifs » en arithmétique :

> *La définition des nombres positifs et négatifs, au moyen des grandeurs mesurables susceptibles de sens, n'offre pas de difficultés spéciales. Leur correspondance avec des vecteurs portés par un axe n'en présente guère plus […] l'appel à la représentation des nombres algébriques sur un axe donne une solution tout à fait satisfaisante de ces difficultés, du point de vue théorique tout au moins.* (Instructions pour les programmes de 1925)

On voit ainsi que l'habitat potentiel des vecteurs en classe de troisième est l'arithmétique et la représentation des grandeurs mesurables susceptibles de sens leur tient lieu de niche. C'est un fait tout à fait nouveau.

Pour la terminale, les vecteurs apparaissent à présent en trigonométrie, avec un contenu quasiment inchangé « Théorie des projections. Somme géométrique des vecteurs. Formule d'addition pour le sinus, le cosinus et la tangente. » L'intervention des vecteurs en cinématique est plus précise : le vecteur vitesse est clairement nommé, les vitesses moyenne et à un instant donné sont définies comme des vecteurs. Le vecteur accélération est évoqué dans le cas particulier du mouvement circulaire. Pour les forces appliquées à un corps solide, le centre de gravité est introduit en liaison avec le centre des forces parallèles. Les vecteurs ont donc trouvé une légitimité à l'intérieur même des mathématiques, et s'y nichent comme outils pour établir les formules de trigonométrie. Cette introduction des vecteurs dans un titre de trigonométrie est jugée bénéfique par les instructions relatives à l'enseignement de la statique :

> *En statique, la confusion qui se produisait si souvent, entre les propriétés des systèmes de forces et celles des systèmes de vecteurs associés, disparaîtra avec l'étude générale de ces derniers.*

Ainsi le statut géométrique des vecteurs se renforce et leur niche dans cet habitat se consolide dans le rapport à la trigonométrie.

2. Une évolution lente (1937-1967)

1937-38 – L'habitat arithmétique se concrétise

En 1937-38, en classe de quatrième, en algèbre et arithmétique, les vecteurs sur un axe sont introduits avec la question de l'orientation et du repérage sur l'axe réel et la relation de Chasles. La projection de vecteurs de même direction sur un autre axe apparaît comme une illustration de la multiplication des nombres relatifs. Il s'agit toujours de vecteurs liés (segments orientés) de même direction avec la notation $\overrightarrow{AB}$.

Figurent aux programmes :

- ✓ les notions de droites orientées ou axes, de vecteur unitaire, de direction orientée,

- ✓ de mesure algébrique d'un vecteur sur un axe ou parallèle à une direction donnée (notée $\overline{u}$, la relation de Chasles étant traitée),
- ✓ de somme géométrique de deux vecteurs de même direction, de somme algébrique de leurs mesures,
- ✓ de repérage sur une droite : abscisse d'un point sur une droite orientée comportant un point origine, changement d'origine,
- ✓ mesure d'un vecteur vue comme accroissement de l'abscisse de l'origine à l'extrémité, abscisse du milieu du segment,
- ✓ interprétation géométrique des inégalités, position d'un point par rapport à un segment.

On peut noter aussi que l'homothétie est introduite à partir de segments interceptés sur deux parallèles par des sécantes concourantes. La définition de l'homothétique d'un point est donnée à l'aide de mesures algébriques. Ce sont donc réellement les mesures algébriques qui sont en jeu, plus que les vecteurs.

Le contenu sur les vecteurs en trigonométrie apparaît à présent au niveau de la première.

Les habitats et les niches n'ont pas changé, sauf que l'habitat algébrique se renforce tout en montrant qu'il reste limité à la dimension 1 et que l'habitat trigonométrique est descendu d'un niveau. Dans l'habitat algébrique, c'est la multiplication par un scalaire qui est importante.

Mais c'est seulement en 1942, que les entités vectorielles commencent à investir le champ de l'enseignement secondaire de la physique avec la représentation vectorielle d'une force en seconde. Cependant, l'articulation entre les concepts de vecteur et de grandeur physique vectorielle n'y est pas explicitée, mais on commence déjà à relever des difficultés des élèves à propos des grandeurs vectorielles.

1947 – Un pont entre les deux habitats

En 1947, pas de changements majeurs. Tout d'abord, en seconde, en algèbre, apparaît une révision du programme de quatrième et un prolongement au repérage dans le plan et en géométrie : « Rapport de deux vecteurs parallèles, point divisant un segment dans un rapport donné, théorème de Thalès. » L'homothétie plane est introduite, en vue de donner les figures homothétiques d'une droite et d'un cercle, propriétés qui seront réinvesties dans l'étude du périmètre du cercle. L'emploi des vecteurs à son sujet n'est pas imposé.

En première, le vecteur sort de la trigonométrie et revient en géométrie, avec pour la première fois les termes de « vecteurs équipollents » qui servent à définir la translation, et de « rapport de deux vecteurs parallèles » qui sert à introduire vectoriellement l'homothétie, somme et différence vectorielle, projections et mesure algébrique, dans un plan orienté, angles orientés de vecteurs ou de droites. On retrouve une allusion aux vecteurs dans la partie trigonométrie : la somme géométrique des vecteurs est introduite pour faciliter l'établissement des formules donnant le cosinus ou le sinus de la différence ou de la somme de deux arcs. L'utilisation du vecteur en cinématique s'amplifie avec l'introduction des notions de vecteur vitesse et de vecteur accélération que l'on retrouve en mathématiques en terminale scientifique.

On voit donc que les mêmes habitats et niches demeurent par rapport à la période précédente. Sauf que la trigonométrie disparaît comme habitat de référence au profit d'un élargissement dans la géométrie.

Mais surtout un pont est fait entre les deux habitats jusqu'alors disjoints de l'algèbre et de la géométrie, par le théorème de Thalès qui associe géométrie et mesure algébrique. Ainsi le vecteur géométrique s'algébrise, la multiplication par un scalaire prend de l'importance, et l'équipollence qui apparaît pour la première fois devient nécessaire pour une bonne définition des opérations.

1957 – Statu quo

De 1957 à 1967, on retrouve le vecteur en physique en classe de première à propos d'électromagnétisme : il y est défini comme un segment de droite orienté, ayant une origine et une extrémité ; son traitement est le plus souvent, sinon exclusivement, analytique. Un usage des vecteurs est fait aussi en cinématique qui reste un domaine d'étude en mathématiques en classe de première C, avec les notions de vecteur vitesse et de vecteur accélération dans l'étude des mouvements rectilignes et des mouvements circulaires uniformes. Dans ce contexte, tous les calculs, portent sur les coordonnées cartésiennes qui sont fonctions du temps. En seconde, les vecteurs apparaissent en géométrie, on y reprend les segments orientés vus en troisième. Ceci comprend l'équipollence, l'addition et ses propriétés, les projections et leur effet sur la somme et la différence de vecteurs, la multiplication d'un vecteur par un nombre ; de plus, les translations et homothéties sont définies par des vecteurs.

C'est en première, que la distinction entre vecteurs liés équipollents et vecteur libre[1] est faite. Les applications des vecteurs à la géométrie et à la cinématique prennent de plus en plus d'importance : pour la première fois on aborde le barycentre de deux points et le produit scalaire de deux vecteurs avec ses propriétés. C'est à ce niveau aussi, qu'on note un intérêt grandissant pour l'utilisation des vecteurs en géométrie analytique qui en est un passage obligé.

On peut donc dire que, dans cette période, les habitats et niches restent inchangés alors que l'outil vectoriel s'impose de plus en plus.

3. Période des mathématiques modernes (1968-1985)

La réforme

Face à la nécessité et à l'urgence de rénover l'enseignement secondaire et particulièrement celui de la géométrie, on assiste à partir des années 1970 à une réforme en profondeur des contenus d'enseignement sous l'influence du mouvement dit des mathématiques modernes. Cette réforme est mise en œuvre et soutenue de manière radicale par des universitaires dont l'une des figures de proue est Jean DIEUDONNÉ, qui, en 1964, dans un ouvrage intitulé « Algèbre linéaire et géométrie élémentaire », défend fortement sa vision de la réforme concernant l'enseignement de la géométrie, avec souvent un ton polémique.

> *Ce volume donne un exposé détaillé et complet des notions et théorèmes d'algèbre linéaire élémentaires qui devraient constituer le bagage minimum du bachelier ès sciences au moment où il entre dans les classes du 1er cycle de l'enseignement supérieur. L'orientation générale et la substance en ont été déterminées par le souci de préparer l'étudiant à assimiler le plus facilement possible l'enseignement actuel donné dans ces classes, qui devrait lui apparaître*

[1] Ce vocabulaire qui permet de distinguer le segment orienté de la classe d'équipollence a disparu avec les mathématiques modernes. Les termes de *libre* et *lié* n'ont rien à voir ici avec les notions de famille libre ou liée de l'algèbre linéaire.

> *comme le prolongement naturel de ce qu'il a déjà appris. Le fait qu'à l'heure présente, il n'y a sans doute pas un bachelier sur mille qui serait en état de lire ce livre sans aide et sans fournir un travail personnel considérable en dit long sur l'incohérence de nos programmes d'enseignement.* (Op. cité, p. 7).

De cet argumentaire, DIEUDONNÉ déduit qu'il ne faut enseigner dans le secondaire que ce qui prépare au supérieur (sans élitisme !). Ainsi, il faut préparer les élèves à l'algèbre linéaire qui unifie la géométrie synthétique et la géométrie analytique, riche en applications les plus variées et qui est la base de la plupart des notions enseignées en propédeutique (premières années d'université).

> *Il me semble qu'il y a intérêt à familiariser le débutant le plus tôt possible avec les notions essentielles de cette discipline, à lui apprendre à « penser linéairement », ce qui est d'autant plus facile qu'il y a peu de notions, en mathématiques, qui soient plus simples à définir que celles d'espace vectoriel et d'application linéaire. A notre époque de prolifération intense dans toutes les sciences, tout ce qui condense et tend à l'unification a une vertu qu'on ne saurait surestimer. […] D'autre part, j'ai cherché à résister à la tentation d'introduire prématurément les théories qui seront enseignées à l'Université. Il me semble que la nature nous a heureusement fourni « une ligne de démarcation » toute tracée, en nous douant de l'intuition géométrique pour les espaces à 2 et 3 dimensions ; il est donc possible de représenter graphiquement tous les phénomènes de l'Algèbre linéaire limités à ces deux dimensions (et bien entendu aux scalaires réels).* (Op. cité, p. 12-14).

On voit bien que DIEUDONNÉ se soucie beaucoup plus de la nature unificatrice de l'Algèbre linéaire permettant ainsi de présenter la géométrie élémentaire avec toute la rigueur mathématique qui lui sied. Pour lui, l'intérêt de la géométrie dans l'enseignement secondaire tient en ce qu'elle représente un :

> *[…] merveilleux laboratoire où se familiariser avec des cas particuliers d'aspect fort simple et susceptibles d'images concrètes, de notions dont l'essence est beaucoup plus générale mais aussi beaucoup plus abstraite, et qu'il faudra assimiler sous cette forme générale plus tard ; il serait vraiment dommage de ne pas profiter au maximum de cette heureuse circonstance.* (Ibid., p. 14)

En revanche, CHOQUET (1964), qui a aussi joué un rôle dans cette réforme, tout en étant en retrait voire opposé aux Bourbaki, conçoit l'enseignement de la géométrie pour les jeunes enfants non pas comme un enseignement déductif mais plutôt basé sur l'observation et ayant pour but l'élaboration des concepts fondamentaux à partir de l'expérience. Il pense que la « voie Royale » qui modélise l'espace géométrique comme un espace affine euclidien de dimension 3 n'est pas accessible directement à des élèves de moins de 17 ans, et propose une axiomatique intermédiaire.

CHOQUET prône

> *l'utilisation d'une axiomatique simple aux axiomes forts, c'est-à-dire donnant très vite accès à des théorèmes non évidents, et intuitifs, c'est-à-dire traduisant les propriétés de l'espace qui nous entoure faciles à vérifier.*(Op. cité, p. 10).

DELACHET (1967) reprend les points de vue développés dans ces deux ouvrages en les complétant :

> *L'ouvrage de Dieudonné utilise directement les notions d'espace vectoriel et de produit scalaire bien qu'il permette d'aller plus vite beaucoup plus loin, il nous paraît laisser un vide entre*

l'utilisation de la méthode expérimentale, la seule que l'on puisse employer avec des jeunes enfants et une initiation de la méthode axiomatique, qui nous semble bien adaptée aux élèves du second cycle de nos lycées. (Op. cité, p. 7).

La position de DIEUDONNÉ, qui a dominé la réforme des mathématiques modernes, est un modèle idéologique du haut vers le bas : plaquer le modèle de l'espace euclidien normé pour l'introduction du vecteur au collège dans la perspective de l'enseignement de l'algèbre linéaire, et même plus loin de l'analyse fonctionnelle.

Dans ce contexte, le vecteur est introduit dès la classe de quatrième comme classe d'équivalence de bipoints équipollents. L'étude des propriétés algébriques doit faire apparaître, sans le dire, la structure d'espace vectoriel sous-jacente à l'espace géométrique (en commençant par la droite, puis le plan). Dans ce but, les résultats élémentaires de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie sont introduits dans les programmes du lycée dès la classe de seconde en 1969. En classe de première C, les vecteurs interviennent en géométrie vectorielle, mais le sens de ce mot s'élargit avec la nouvelle structuration du savoir mathématique :

[…] ce mot a recouvert longtemps une certaine description du monde physique, une énumération (parfois incomplètement explicitée) de propriétés que des raisons expérimentales lui faisaient attribuer, enfin - et c'est l'essentiel – l'étude des propriétés qui pouvaient être déduites des précédentes par un raisonnement logique. Il désigne dorénavant une construction mathématique, logique par nature, s'appuyant sur un système cohérent d'axiomes où interviennent au premier chef les structures algébriques (espaces vectoriels, groupes…) et topologiques ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^n$ …). (PRESSIAT, 1999, p. 204)

Dans cette organisation verticale, la géométrie devient une propédeutique à l'algèbre linéaire et le vecteur géométrique devient le prototype quasiment exclusif des espaces vectoriels. C'est une solution technique au problème idéologique de l'apprentissage de l'abstrait à partir du concret, qui impose une certaine stratégie d'exposition.

En effet, la nature du vecteur géométrique ne se résume pas à ses seules propriétés linéaires (parce qu'elles ne rendent compte ni de sa nature géométrique ni de l'aspect constitutif de la dialectique entre algébrique et géométrique, ni de l'importance de la multiplication vectorielle[2] dans la genèse du vecteur). C'est pourquoi l'introduction des axiomes d'espace vectoriel par leur vérification sur les vecteurs géométriques a pour intérêt essentiel de montrer que de tels ensembles abstraits existent à un niveau plus « familier ». Le choix du vecteur géométrique se justifie alors comme illustration, à condition d'être très explicite sur la fonction de cette illustration. (DORIER, 2000, p. 53)

Autrement dit on assiste alors à une véritable linéarisation de la géométrie. Un des effets de ce choix est que des notions comme les sous-espaces vectoriels, les vecteurs linéairement dépendants ou indépendants et les bases constituent le fondement de cette nouvelle géométrie vectorielle. Elle va servir de point d'appui pour introduire la cinématique du point, avec entre autres, les notions de vecteur vitesse et de vecteur accélération en classe de terminale C.

Dans cette nouvelle organisation mathématique, les vecteurs vont occuper une nouvelle niche. Ainsi ils ont pour fonction de préparer les élèves à l'enseignement de l'algèbre linéaire, ils en seront le ferment et l'exemple central. Cette vision descendante de

[2] Que ce soit le produit scalaire ou le produit vectoriel.

l'organisation mathématique, caractéristique des mathématiques modernes, va conditionner et modeler l'organisation mathématique autour des vecteurs au collège.

En résumé, on voit que, pendant cette période, l'habitat « naturel » du vecteur est la géométrie et sa niche est de servir de fondement à la géométrie, mais surtout de préparer à l'algèbre linéaire.

On remarque alors une filiation directe mais lointaine avec les espaces de Hilbert enseignés quelques 5 ou 6 ans plus tard, et encore uniquement à une élite !

Critique de la réforme

Dès lors, l'aspect intuitif qui a eu un rôle déterminant dans la genèse du calcul vectoriel est abandonné (comme le souligne BOULIGAND (1944) c'est à la mécanique et à l'électromagnétisme qu'il appartient d'avoir mis l'élément vecteur au premier plan des préoccupations mathématiques) au profit de la théorie abstraite des espaces vectoriels.

> *[…] la nature du vecteur géométrique […] est l'aboutissement nécessaire d'une mise en rapport dialectique de la structuration algébrique et de l'intuition géométrique. Nous devons souligner ici que l'usage du terme « structuration algébrique » ne doit pas faire croire que le calcul vectoriel est par essence l'émergence de la théorie des espaces vectoriels en géométrie. En effet, il ne faut pas ici se laisser abuser par la similitude du vocabulaire. La théorie des espaces vectoriels est de nature axiomatique, les vecteurs algébriques ne sont pas construits, ils existent a priori et ne sont définis que par leurs propriétés structurelles. Le calcul vectoriel relève quant à lui d'une modélisation dynamique, l'objet se crée dans la combinaison algébrique en interaction avec l'intuition géométrique. De plus, le rôle de la multiplication a été fondamental dans la genèse du vecteur géométrique, alors que la structure linéaire ne comporte pas de produit.* (DORIER, 1997, p. 76-77)

Il semble alors qu'on a très peu tenu compte de cette interaction avec l'intuition géométrique dans l'étude du calcul vectoriel. C'est ce que souligne CHOQUET en 1973 :

> *Je suis effaré par ce je constate dans l'enseignement à l'école primaire et dans le premier cycle du secondaire. Certes j'ai été l'un des promoteurs de la réforme de l'enseignement mathématique, mais ce que je préconisais était simplement un élagage de quelques branches mortes et encombrantes, et l'introduction d'un peu d'Algèbre […] mais il y a eu toute une atmosphère nocive qui a accompagné leur mise au point : en particulier une attaque contre la géométrie et contre le recours à l'intuition ; on a dit aux enseignants qu'ils étaient minables s'ils étudiaient les triangles, que l'Algèbre linéaire remplaçait toute l'ancienne géométrie […]* (Cité par LICOIS, 2005, p. 17)

C'est ainsi que dès 1985 les programmes des lycées changent, en réaction aux choix bourbakistes. S'entame alors la période que l'on qualifiera de contre-réforme des mathématiques modernes. L'algèbre linéaire disparaît entièrement des programmes du secondaire. Commencée avec les programmes de la seconde indifférenciée de 1981, cette disparition atteint toutes les classes des lycées avec les programmes de 1985.

Les raisons de cette remise en cause des programmes des mathématiques modernes ont été en particulier soulignées par le rapport de la commission KAHANE (2000) :

> *[…] ce projet (tout linéaire), s'il pouvait sembler cohérent du point de vue mathématique, a été introduit sans qu'ait été menée une véritable réflexion didactique préalable. Il a conduit à un échec retentissant que ne suffit pas à expliquer l'impréparation du corps enseignant. Il*

> *semble y avoir, en effet des raisons didactiques essentielles qui font qu'une introduction précoce de l'algèbre linéaire n'est pas aussi simple que ne l'avaient pensé les collègues des années soixante.* (Op. cité, p. 110).

Cependant, notons que la nouvelle définition du vecteur, comme élément d'un espace vectoriel issue de la nouvelle structuration de l'enseignement de la géométrie autour de l'algèbre linéaire, n'a pas eu d'incidence immédiate sur les pratiques enseignantes en physique, comme le souligne HULIN (1996) :

> *La coordination physique - mathématique se complique : à côté du décalage dans le temps entre l'enseignement de mathématiques et les besoins de l'enseignant de physique, il existe un décalage entre les mathématiques modernes enseignées et les mathématiques applicables utilisées dans l'enseignement de la physique. D'ailleurs un groupe sera créé à la charnière de la commission Lagarrigue et de la commission Lichnerowicz pour étudier les relations entre les deux enseignements.* (Op. cité, p. 112).

Malgré la bonne volonté des réformateurs, il y aura un constat d'échec dans les enseignements des deux disciplines. Ce qu'exprime aussi BELHOSTE (1996) quand il dit :

> *Une réforme pilotée par l'enseignement supérieur en fonction de ses intérêts et de ses préoccupations et sans vision claire des missions propres du secondaire, était sans doute vouée dès le départ à l'échec, quelle que soit sa légitimité scientifique et la bonne volonté de ses promoteurs.* (Op. cité, p. 37).

Les études des didacticiens de la physique par exemple mettent à jour certaines difficultés liées aux vecteurs et à leur utilisation en physique, et tentent d'éclaircir ce constat d'échec. C'est ainsi qu'en 1973, MALGRANGE, SALTIEL et VIENNOT réalisent une enquête par questionnaire auprès d'étudiants entrant en première année d'université pour chercher à caractériser les significations que ceux-ci attachent aux vecteurs et leur utilisation en physique. Parmi les difficultés repérées, la plus tenace concerne l'addition vectorielle, à laquelle s'ajoutent celles dues au langage de la physique qui ne distingue pas en général la grandeur vectorielle de la grandeur scalaire (la vitesse désigne aussi bien le vecteur vitesse que l'intensité de la vitesse). Ce qui fait dire à ces auteurs que :

> *[…] La présentation géométrique est sans doute plus proche de l'intuition de l'espace physique que réel. Elle permet de développer des « images mentales » (« on voit ce qui se passe ») dont l'importance dans les raisonnements est incontestable, quoique difficile à définir exactement. Elle permet, ou devrait permettre de résoudre des problèmes qualitativement (sans référence aux intensités). Elle est nécessaire lorsque le géométrique est seul en cause (problème de symétrie par exemple). Cependant, outre que ces divers aspects ne sont pas systématiquement exploités, s'en tenir à une présentation uniquement géométrique conduit aux défauts que nous connaissons.* (Op. cité, p. 12).

En somme, ces auteurs attribuent ces difficultés à

> *l'influence trop grande d'une géométrie mal articulée sur l'algèbre et qui laisse dans l'ombre bien des aspects des relations entre forces, mouvements et géométrie des déplacements.* (Ibid., p. 13).

On ne tardera pas à reconnaître les effets néfastes de l'abstraction au niveau du secondaire et le lien des mathématiques avec les autres disciplines sera mis en valeur : les nouveaux programmes [de 1978], et tout particulièrement leur partie géométrique, mettent l'accent sur l'utilisation de l'acquis intuitif des élèves. La théorie n'est pas un but en soi, mais un outil pour répondre à des questions que pose la vie : technologie, physique, économie.

4. La contre réforme (de 1985 à 2006)

Suite à ce constat d'échec des mathématiques modernes dans les programmes d'enseignement secondaire, un processus de changement de point de vue s'est opéré : la théorie des espaces vectoriels qui servait de cadre d'étude à la notion de vecteur disparaît petit à petit des programmes du lycée laissant la place à un cadre géométrique plus « concret ». Dans le même sens, le texte du programme précise que : « Le calcul vectoriel ne doit pas constituer un terrain purement algébrique ; la maîtrise de ses relations avec les configurations joue un rôle essentiel pour la résolution des problèmes de géométrie ».

> *C'était oublier que le vecteur géométrique est algébrique par essence et que cette nature algébrique n'a nullement besoin de s'afficher par l'intermédiaire de l'espace vectoriel. Les opérations sur les vecteurs géométriques sont constitutives du concept même de vecteur géométrique :*
>
> - ✓ *La longueur est la base de l'algébrique depuis les Grecs.*
> - ✓ *Le sens (sur une même direction) est ce qui permet de considérer des grandeurs négatives incontournables dans la constitution de l'addition.*
> - ✓ *La direction enfin est ce qui vient de l'idée de multiplication.*
>
> *Cette dernière hypothèse est plus difficile à comprendre. Mais regardons ce qu'est la multiplication de deux vecteurs. Dans l'algèbre géométrique des Grecs anciens, la multiplication de deux nombres (c'est-à-dire de deux segments) est l'aire d'un rectangle. Si l'on passe du rectangle au parallélogramme apparaît dans la formule de l'aire le sinus de l'angle formé par les deux côtés, c'est-à-dire la position relative de leurs directions (l'idée de négatif implique ici la prise en compte de l'orientation). Ainsi comme le souligne Grassmann dans l'introduction de l'Ausdehnungslehre, c'est le parallélogramme et non le rectangle qui symbolise le vrai concept de multiplication si l'on considère les grandeurs géométriques orientées (en direction et sens). Ce point de vue souligne l'importance de la direction des grandeurs géométriques dans l'idée de produit.* (DORIER, 2000, p. 79-80)

Ainsi, dans ces nouveaux programmes, le calcul vectoriel est présenté comme outil de résolution de problèmes de constructions géométriques ou comme pouvant servir aux enseignements en physique y afférant. Pour illustrer ce point de vue, on peut remarquer qu'en classe de première, on ne parle plus que de la pratique du calcul vectoriel avec des injonctions comme « tout point de vue axiomatique est exclu pour l'ensemble de la géométrie ». En terminale, le titre de « Outil vectoriel et configurations » en géométrie, est révélateur de ce processus de mise à l'écart de toute forme d'abstraction autour du concept de vecteur. Ainsi on peut noter que le caractère outil de l'objet mathématique vecteur se renforce, à savoir qu'il intervient plus fortement dans le cadre du processus d'étude d'autres objets mathématiques.

De même, la notion de vecteur est introduite en fin de collège de manière « naïve » en association avec la notion de translation. C'est un retour aux leçons de géométrie de HADAMARD (1898), qui traduit bien le lien naturel entre translation et vecteur quand il définit la translation :

> *Si, par tous les points d'une figure, on mène des droites égales, parallèles et de même sens, les extrémités de ces droites forment une figure égale à la première. [...] L'opération par laquelle*

> *on passe de la première figure à la seconde a reçu le nom de translation. On voit qu'une translation est déterminée quand on se donne en grandeur, direction et sens le segment tel que AA', qui va d'un point à son homologue. Aussi désigne-t-on une translation par les lettres d'un tel segment : on dit par exemple la translation AA'.* (Op. cité, p. 51).

Cependant, cette idée de droites parallèles masque souvent le lien entre mouvement de translation et translation mathématique que peu d'enseignants de mathématiques se soucient d'établir comme nous l'avons constaté dans notre travail (BA 2003). Pour autant, GIBBS (1901) avait défini le vecteur comme une translation et la liaison avec la mécanique était vite perceptible quand il énonce : *the typical vector is the displacement of translation in space*.

La cinématique, qui était le seul domaine des mathématiques permettant un pont entre mathématiques et physique, est reléguée comme secteur à part entière du programme de mécanique de la classe de seconde de physique. Cependant, l'utilisation du vecteur se généralise dans les programmes de physique du secondaire. La force, grandeur vectorielle modélisant l'action mécanique d'un objet sur un autre, voit ses caractéristiques explicitées et formellement représentées dans tous les manuels scolaires et la modélisation de la vitesse correspond à un vecteur au sens mathématique de vecteur libre.

On note ici que l'aspect outil des concepts vectoriels prime sur leur aspect objet.

Ainsi l'algèbre linéaire disparaît des programmes du secondaire, le vecteur géométrique reste introduit dans les classes de quatrième et de troisième mais avec interdiction à des références à l'algèbre linéaire. L'addition vectorielle doit être reliée à la composition des translations. La géométrie des figures revient en force. En classe de seconde, par exemple, il est précisé que tout point de vue axiomatique est à bannir en géométrie. La pratique des figures occupe une place centrale et le lien avec l'ordinateur est souligné. Le calcul vectoriel ne doit pas constituer un terrain d'activités purement algébriques, ce qui est essentiel, c'est de mettre en œuvre les vecteurs sur les configurations et les transformations. Il est précisé aussi que l'intérêt de la notion de vecteur ne se limite pas à la géométrie. Cet intérêt pouvant être illustré par des exemples issus de la physique. Les mêmes objectifs sont poursuivis en classe de première S avec la poursuite du calcul vectoriel dans le plan et l'extension à l'espace.

On voit donc que le vecteur retrouve un habitat réduit en géométrie et une niche pour l'illustration de la physique et comme outil performant pour faire de la géométrie. La référence à l'algèbre (que ce soit par l'algèbre linéaire ou par les grandeurs orientées, comme on l'a vu dans la niche arithmétique des années 40 à 60) a complètement disparu.

Conclusion

Plusieurs travaux de didactique des mathématiques ont analysé les évolutions plus récentes des programmes et mis à jour des difficultés d'enseignement des vecteurs (voir par exemple : LÊ THI HOAI, 1997, BITTAR, 1998, PRESSIAT, 1999). On trouve aussi dans ces travaux des expériences intéressantes sur l'enseignement des vecteurs. Il est bien sûr hors de question de les résumer tous ici.

Nous nous focaliserons cependant sur trois points que notre étude peut éclairer :

- ✓ Malgré le rejet de la réforme des mathématiques modernes, le modèle de l'algèbre linéaire s'il a disparu officiellement des programmes du secondaire, continue de marquer l'organisation mathématique autour du vecteur. L'importance accordée à la multiplication par un scalaire en classe de seconde en atteste. On continue de faire

« démontrer » sans le dire les axiomes de la structure linéaire. Cependant des aspects algébriques plus propres au vecteur, comme le lien avec le théorème de Thalès, sont passés sous silence. La disparition de toute niche algébrique opère toujours comme un manque, qu'une fois rejetée (à juste titre) la référence à la structure d'espace vectoriel, rien n'est venu combler. Dans ce sens, il conviendrait de s'interroger sur la nécessité d'assumer la part intrinsèquement algébrique du vecteur, qui n'est pas celle d'une structure linéaire, mais s'exprime de façon indissociable de la nature géométrique de ceux-ci.

✓ Par ailleurs, la niche « outil performant pour la géométrie » a elle aussi du mal à fonctionner. Il est en effet difficile de trouver un problème de géométrie posé sans vecteur où la modélisation par des vecteurs conduise à un usage réellement performant de l'outil vectoriel. On a vu en effet, à travers l'évolution des programmes (et l'analyse historique le confirme) que l'habitat géométrique n'était pas si naturel qu'il y paraît pour les vecteurs. Pour une part importante, le vecteur géométrique est une création didactique qui a permis à un moment donné de résoudre un problème idéologique et pratique dans l'organisation du savoir enseigné. Ce point est particulièrement étudié dans le travail de PRESSIAT (1999).

✓ Reste la niche « outil pour la physique », mais elle paraît aussi difficile à faire vivre. En effet, peu de situations physiques sont utilisables en troisième ou même en seconde, dans lesquelles le formalisme vectoriel soit vraiment pertinent. Le plus souvent, on trouve dans les manuels des habillages plus ou moins cachés de situations pseudo-physiques. L'élève en est réduit à comprendre ce qu'on veut lui faire faire, faute de pouvoir avoir vraiment prise sur la situation physique en jeu.

On a vu que l'évolution des programmes n'a cessé de séparer les habitats physique et mathématique du vecteur, favorisant ainsi le cloisonnement disciplinaire. Dans notre travail de thèse en cours, nous examinons cette question. Nous analysons d'une part des situations issues de la physique qui pourraient être une bonne entrée en matière pour l'enseignement du vecteur en classe de mathématiques et d'autre part, nous examinons, dans l'enseignement de la physique, les situations où un travail mathématique pertinent sur les vecteurs est nécessaire. Idéalement, nous visons à construire des scénarios de séances communes aux deux disciplines, alliant les vecteurs et les grandeurs physiques vectorielles.

Bibliographie

ARTAUD M. (1997), Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, In Bailleul et al. (eds.), *Actes de la IX^ième^ École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, 1997, 101-139.

BA C. (2003), *Étude didactique de l'utilisation du vecteur en physique et des liens entre mouvement de translation et translation mathématique*, mémoire de DEA, LIRDHIST, Université Claude Bernard, Lyon1.

BELHOSTE B., GISPERT H. et HULIN N. (eds.) (1996), *Les Sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Paris : Vuibert et INRP.

BITTAR M. (1998), *Les vecteurs dans l'enseignement secondaire - Aspects outil et objet dans les manuels - Étude de difficultés d'élèves dans deux environnements : papier-crayon et Cabri-géomètre II*, thèse de l'université Joseph Fourier – Grenoble 1.

BOULIGAND G. (1944), *Les aspects intuitifs de la Mathématique*, Paris : Gallimard.

CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique*, 2ème éd., Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, 135- 180, In Arsac, G. et al. (ed.) *La transposition didactique à l'épreuve,* Grenoble : La Pensée sauvage.

CHOQUET G. (1964), *L'enseignement de la géométrie*, Paris : Hermann.

COLOMB J. (dir.) (1993), Les enseignements en Troisième et Seconde, ruptures et continuités, INRP, 49-76.

CROWE M.J. (1967) *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*, Notre Dame: University Press. Rééd., New-York : Dover, 1985.

DELACHET A. (1967), *La géométrie élémentaire*, Paris : Que sais je 418.

DIEUDONNÉ J. (1964), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Paris : Hermann.

DORIER J-L. (ed.) (1997), *L'algèbre linéaire en question*, collection Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

DORIER J-L. (2000), *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions*, Cahier du laboratoire Leibniz n°12. http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/index.html

FLAMENT D. (1997), *Le nombre, une hydre à n visages. Entre nombres complexes et vecteurs.* Paris, Éditions de la maison des sciences de l'Homme.

FLAMENT D. (2003), *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie.* Paris : CNRS Éditions.

GISPERT H. ET HULIN N. (2000), *L'enseignement des mathématiques dans ses liens à d'autres disciplines, Une perspective historique.* Communication à l'académie des sciences.

HADAMARD J. (1898), *Leçons de géométrie élémentaire, T1 : géométrie plane*, Paris : Hermann, réimpression Éditions Jacques Gabay, 1988.

KAHANE J-P. (ed.) (2002), *Rapport au ministère de l'Éducation nationale, l'enseignement des sciences mathématiques, Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques sous la direction de Jean-Pierre Kahane*, Paris : Odile Jacob.

LICOIS J-R. (2005), *La géométrie élémentaire au fil de son histoire dans les programmes français*, Ellipses.

LÊ THI HOAI C. (1997), *Étude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Vietnam et la classe de seconde en France,* Thèse de l'université Joseph Fourier - Grenoble 1 et École Normale Supérieure de Vinh.

LOUNIS A. (1989), *L'introduction aux modèles vectoriels en physique et en mathématiques : conceptions et difficultés des élèves, essai et remédiation,* Thèse, Université de Provence Aix-Marseille I.

MALGRANGE J-L., SALTIEL E. ET VIENNOT L. (1973), Vecteurs, scalaires et grandeurs physiques, *Bulletin SFP. Encart pédagogique*, **Janvier-Février 1973**, 3-13.

PRESSIAT A. (1999), *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison « points-vecteurs ».* Thèse de l'université Paris VII.

Cissé BA
FASTEF (ex. ENS de Dakar)
LIRDHIST Université Lyon1
Cisse.ba@univ-lyon1.fr

Jean-Luc DORIER
Equipe DDM – Laboratoire Leibniz
Jean-Luc.Dorier@imag.fr

Algorithme CORDIC pour calculer le logarithme

Nicole Bopp

Résumé : À l'occasion d'un enseignement en L1, j'ai découvert l'algorithme CORDIC utilisé par les calculatrices pour obtenir les valeurs de certaines fonctions, en particulier la fonction logarithme. Pour comprendre l'intérêt de cet algorithme et surtout sa précision, je montrerai comment les questions que l'on se pose naturellement mènent à un théorème dont la démonstration exige un peu d'analyse élémentaire. J'espère avoir ainsi convaincu certains étudiants, affichant haut et fort leur désintérêt pour les mathématiques que nous leur enseignons, que ces mathématiques leur seront indispensables même s'ils projettent de faire des études d'informatique.

Mots-clés : Algorithme - Calculatrice - CORDIC - Logarithme

Introduction

Un enseignement appelé MTU (Méthodologie du Travail Universitaire) a été introduit en L1 (nouvelle appellation de la première année d'université) à l'Université Louis Pasteur en 2005/2006. L'objectif des concepteurs de cet enseignement était essentiellement une formation à la recherche de documents. Dans la filière mathématique et informatique de la licence, ce sont les mathématiciens qui ont pris en charge cet enseignement et leur objectif était plus précisément d'apprendre aux étudiants à lire un texte mathématique. C'est pourquoi, avec quelques collègues en charge de cet enseignement, nous avons choisi d'approfondir un thème mathématique déjà familier aux étudiants qui venaient de passer le baccalauréat.

J'ai choisi d'étudier avec mes étudiants les fonctions logarithmes. Les questions que nous avons approfondies ensemble étaient nombreuses : quelles en sont les différentes définitions ? pourquoi sont-elles équivalentes ? pourquoi les a-t-on inventées ? comment ont été calculées les premières tables de logarithmes ? comment calculer l'aire sous l'hyperbole ?

Pour répondre à ces questions les étudiants ont principalement recherché des informations sur internet (en tapant logarithme dans google) et recopié ce qu'ils avaient trouvé. Il a fallu faire un travail important pour comprendre les résultats trouvés et en écrire des démonstrations. J'étais assez contente car j'avais l'impression de leur avoir montré qu'on pouvait progresser en se posant de « bonnes » questions. Comme j'exprimais cette satisfaction à la fin d'une séance, l'un des étudiants me rétorque :« cela vous amuse peut-être de vous poser des questions mais nous pas du tout ». À quoi je lui réponds : « si vous voulez faire des études de mathématiques il faudra vous poser des questions ». Manque de chance, il ajoute « mais moi je veux faire des études d'informatique ». Voulant avoir le dernier mot je me lance : « Alors, vous voulez savoir comment votre calculatrice obtient les valeurs de la fonction logarithme. Eh bien, tapez CORDIC sur google et vous verrez ». Et c'est ainsi que j'ai vu arriver trois jours plus tard cet étudiant dans mon bureau avec un algorithme qu'il avait implanté sur sa calculatrice, qui tournait bien mais qu'il voulait mieux comprendre.

Voilà ce qu'il avait trouvé sur le site Gérard Evrard ([1]).

Logarithme par l'algorithme CORDIC

```
Input X
0->I
1->Y
Lbl 1
1+10^-I->Z
Lbl 3
If XZ>10
Goto 2
XZ->X
Y-Log Z->Y
Goto 3
Lbl 2
Is(I,10)
Goto 1
Disp Y
```

Mode d'emploi : *Lancer le programme - Taper un nombre compris entre 1 et 10 - Le logarithme du nombre est affiché.*

Mathématiques à l'œuvre : *On utilise l'algorithme CORDIC. Il ne faut pas croire que la fonction Log, présente dans le programme, soit utilisée de façon dérobée, elle évite seulement le recours à une table. Pour être plus convaincant, on pourrait adapter le programme pour qu'il utilise xStat et yStat, sans aucune élévation à la puissance ni Log. Le principe est de multiplier le nombre de départ par des nombres de la forme Pi=(1+10^-i) afin d'atteindre 10 sans jamais le dépasser. On commence naturellement par la valeur de i la plus basse possible, soit 0 (ligne 2). Lorsque 10 est atteint, on a : 10=X*Produit(Pi) soit 1=log(X) + Somme(log(Pi)). ou log(X)=1-Somme(log(Pi)). Or une table précalculée donne les log(Pi), il suffit donc de les sommer dans la boucle à chaque fois qu'on multiplie par le Pi correspondant.*

En fait ce qui intriguait au premier chef cet étudiant était le sens de la commande `Is(I,10)`. Une rapide inspection du mode d'emploi de la calculatrice nous a appris que ce n'était rien d'autre qu'une boucle « `Rajouter 1 à la variable I tant que I est plus petit que 10` ». Ce qui l'étonnait plus c'est qu'il obtenait systématiquement une valeur légèrement supérieure à celle que donne la calculatrice quand on utilise la touche ln. Et, bien sûr, il voulait savoir comment cela fonctionnait.

Il se proposait d'exposer cet algorithme et ce qu'il en avait compris à la séance suivante car un exposé oral était exigé pour obtenir une note de contrôle continu. Voilà pourquoi j'ai tenté de comprendre les mathématiques qui justifient l'efficacité de cet algorithme et trouvé que sa simplicité était remarquable.

1. Le principe de l'algorithme pour le calcul de $\ln x$

L'algorithme CORDIC[1], inventé[2] en 1959 pour calculer les valeurs des fonctions trigonométriques, a permis aux premiers calculateurs de poche (HP 35 en 1972) d'être rapides malgré la taille réduite de leur mémoire. C'est en effet un algorithme économe en calculs comme nous le verrons plus loin. Nous allons le décrire pour le calcul du logarithme népérien d'un nombre décimal x strictement compris entre 1 et 10.

1.1. Pourquoi se restreindre aux nombres strictement compris entre 1 et 10 ?

Si on connaît $\ln 10$, on peut ramener le calcul de $\ln X$, où X est un nombre strictement positif, à celui d'un nombre compris entre 1 et 10 en utilisant le résultat élémentaire suivant.

Si X un nombre strictement positif, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $1 \leqslant 10^n X < 10$.

La caractérisation fonctionnelle du logarithme implique que

$$\ln X = \ln(10^n X) - n \ln 10 \ .$$

Si $10^n X = 1$ c'est terminé car $\ln 1 = 0$. Sinon on est ramené au calcul du logarithme de $10^n X$, nombre compris strictement entre 1 et 10.

Dans la pratique on travaille avec des nombres décimaux car ce sont les seuls que la calculatrice utilise. Le nombre n dont l'existence est donnée par le lemme peut même s'obtenir sans peine à la main. Si on voulait regarder d'un peu plus près le fonctionnement de la calculatrice, il faudrait considérer le fait qu'elle utilise l'écriture en base 2 des nombres, mais nous allons en rester à ce qui est apparent, c'est-à-dire à leur expression en base 10.

On considère dans la suite un nombre décimal x appartenant à l'intervalle $]1, 10[$.

1.2. Traduire l'algorithme

L'algorithme décrit dans l'introduction utilise des labels, ce qui le rend difficile à comprendre. Un examen rapide permet de le réécrire en utilisant les boucles usuelles, ce qui facilitera son analyse.

`On se donne` x `compris entre` 1 `et` 10.
`On affecte la valeur` $\ln 10$ `à la variable` y.

`Pour` i `allant de` 0 `jusqu'à` 10 `(ou jusqu'à` N`), faire`
    $1 + 10^{-i} \to z$;
    `Tant que` $xz \leqslant 10$ `faire`
        $xz \to x$;
        $y - \ln(z) \to y$;

`Le résultat cherché est` y.

[1] CORDIC est l'acronyme de COordinate Rotation DIgital Computing.
[2] par Jacques Volder, ingénieur dans une firme aéronautique.

On remarque tout d'abord que la valeur 10 intervient de deux manières différentes. Elle apparaît d'une part dans la longueur de la boucle « `Pour` i `allant de 0 jusqu'à` 10 ». Ceci est arbitraire et pour plus de clarté nous avons remplacé 10 par N à cet endroit. D'autre part 10 intervient dans les valeurs affectées à la variable z, à savoir $1+10^{-i}$, et nous expliquerons plus loin pourquoi ce choix simplifie les calculs.

Ce qui frappe tout d'abord c'est que le programme utilise la fonction logarithme de certains nombres. Mais on voit rapidement qu'il utilise seulement les logarithmes des nombres de la forme $1+10^{-i}$. Il repose donc sur le préalable suivant.

1.3. Préalable

On utilise un petit nombre de valeurs de la fonction logarithme népérien[3] qui sont stockées dans la mémoire de la calculatrice. Plus précisément les valeurs que l'on pourra utiliser sont de la forme suivante :

z	$\ln z$
10	2.302585092994012
2	0.693147180559945
1.1	0.095310179804325
$\vdots$	$\vdots$
$1.000\cdots 1$	

J' ai recopié les quelques valeurs données dans ce tableau dans l'article [4] de J. Laporte. Le nombre de décimales indiquées est choisi en fonction de la précision de la calculatrice et donc, de la précision que l'on espère obtenir pour le calcul de $\ln x$.

1.4. La boucle principale ou un algorithme simpliste

Il s'agit de la boucle décrite par la commande « `Tant que` ».

Fixons un entier $i \in \{0,\dots,N\}$ et multiplions x par $(1+10^{-i})$ jusqu'à ce qu'on dépasse 10. Chaque fois qu'un produit par $(1+10^{-i})$ est effectué, soustrayons $\ln(1+10^{-i})$ à $\ln 10$. Que peut-on dire du nombre y obtenu ainsi ?

Pour plus de clarté, nous allons l'écrire en remplaçant 10^{-i} par un réel $\alpha > 0$. Comme la suite $\Big((1+\alpha)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$, on établit sans peine le

Lemme 1. —*Si x est un réel appartenant à l'intervalle $[1,10]$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$x(1+\alpha)^n \leqslant 10 < x(1+\alpha)^{n+1}\ .$$

La croissance de la fonction logarithme implique que

$$\ln x + n\ln(1+\alpha) \leqslant \ln 10 < \ln x + (n+1)\ln(1+\alpha)\ ,$$

[3] On pourra trouver dans ([3], page 31) une rapide description des méthodes utilisées au XVII$^{\text{e}}$ siècle, en particulier par Briggs, pour établir les tables de logarithme.

ce qui démontre la

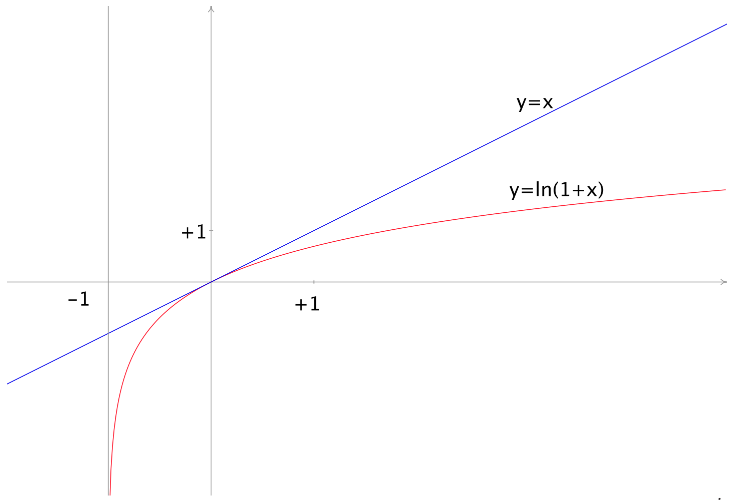
Proposition 2. *Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que le nombre $y_n = \ln 10 - n \ln(1+\alpha)$ est une valeur approchée par excès de $\ln x$ à $\ln(1+\alpha)$ près. Plus précisément on a*

$$\ln x \in \left]y_n - \ln(1+\alpha), y_n\right] .$$

On peut dire plus grossièrement que y_n est une valeur approchée à α près en utilisant l'inégalité (1) qui est bien connue. Elle est illustrée par la figure[4] ci-dessous.

Pour tout $\alpha \geqslant -1$ on a

(1) $\quad \ln(1+\alpha) \leqslant \alpha$.



En prenant $\alpha = 10^{-i}$, on obtient ainsi une valeur approchée par excès de $\ln x$ à 10^{-i} près, ce qui est assez satisfaisant et demande une seule boucle. On peut remarquer que les seuls produits à effectuer sont des produits par $(1 + 10^{-i})$ ce qui revient à faire un décalage de virgule puis une addition, qui sont deux opérations très simples. Les seules autres opérations à effectuer sont des soustractions. Ceci explique que ce choix pour α est particulièrement judicieux.

Mais l'algorithme CORDIC ne se contente pas de cette seule boucle car le nombre de pas à effectuer, qui est égal à $n+1$ où n est l'entier dont l'existence est énoncée à la proposition 2, peut être très grand.

Par exemple pour $x = 3$ et $i = 12$ le nombre de pas m est tel que

$$3(1+10^{-12})^m > 10 \quad \text{c'est-à-dire tel que} \quad m > \frac{\ln \frac{10}{3}}{\ln(1+10^{-12})} > 10^{12} ,$$

car $\ln \frac{10}{3} > 1$ et $\ln(1+10^{-12}) \leqslant 10^{-12}$.

1.5. Le principe de l'algorithme

Pour limiter le nombre de pas, on se rapproche le plus possible de 10 en multipliant x d'abord par des puissances de 2, puis par des puissances de $1,1$, puis de $1,01$ *etc.* Si on désire une précision de 10^{-N}, on termine en faisant le produit par des puissances de $(1 + 10^{-N})$. On espère que le nombre de pas de l'algorithme ainsi mis en place ne sera pas trop grand. C'est ce que nous allons démontrer dans le paragraphe suivant.

[4] Cette figure a été tracée à l'aide du logiciel libre Edugraph, distribué sous licence GPL et dû à Joël Amblard.

2. Majorations du nombre de pas

2.1. Etape 0

En prenant $\alpha = 10^0 = 1$, on déduit du lemme 1 l'existence d'un entier n_0 tel que

$$x(1+10^0)^{n_0} \leqslant 10 < x(1+10^0)^{n_0+1} \ .$$

Comme x est supérieur à 1, $2^4 x$ est supérieur à 16 et par conséquent n_0 est inférieur ou égal à 3. Posons

$$x_0 = x(1+10^0)^{n_0} \ ,$$

et remarquons que, par construction, on a $x_0 \leqslant 10 < 2x_0$.

2.2. Etape 1

En prenant $\alpha = 10^{-1}$, on déduit du lemme 1 l'existence d'un entier n_1 tel que

$$x_0(1+10^{-1})^{n_1} \leqslant 10 < x_0(1+10^{-1})^{n_1+1} \ .$$

Montrons que *l'entier n_1 est inférieur ou égal à 10.*

Par construction, le nombre x_0 vérifie l'inégalité

$$x_0 \leqslant 10 < 2x_0 \ .$$

Puisque $x_0(1+10^{-1})^{n_1}$ est inférieur ou égal à 10, on en déduit par l'absurde que

$$(1+10^{-1})^{n_1} < 2 \ ,$$

ce qui est équivalent à

$$n_1 < \frac{\ln 2}{\ln(1+\frac{1}{10})} \ .$$

Pour conclure, il reste à minorer $\ln(1+10^{-1})$. Pour cela on utilise l'inégalité (2) suivante.

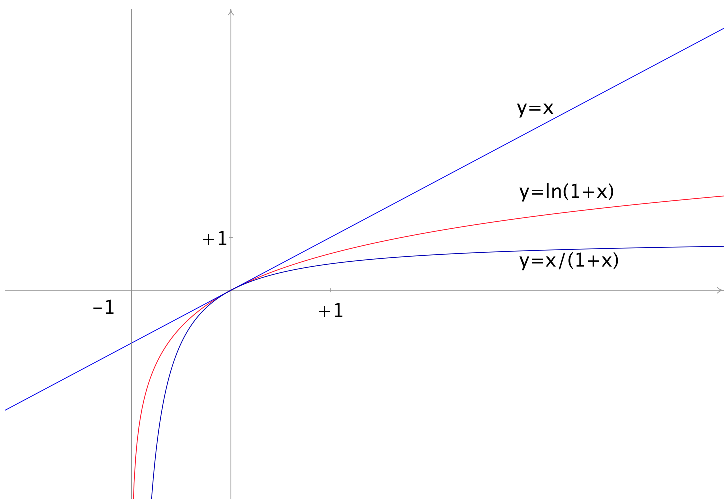
Pour tout $\alpha \geqslant -1$ on a

(2) $$\frac{\alpha}{1+\alpha} \leqslant \ln(1+\alpha) \ .$$

Cette inégalité se démontre aisément en étudiant les variations de la fonction

$$\alpha \longmapsto \ln(1+\alpha) - \frac{\alpha}{1+\alpha} \ .$$

Elle est illustrée par la figure ci-contre.



En majorant $\ln 2$ par 1, on en conclut que $n_1 < \dfrac{1+\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}} = 11$,

d'où le résultat.

2.3. Le théorème justifiant l'algorithme

En itérant le processus on comprend que l'algorithme CORDIC pour le calcul des valeurs du logarithme repose sur le théorème suivant.

Théorème 3. —*Soit x un réel strictement compris entre 1 et 10. Il existe alors une suite d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tels que*

(i) $0 \leqslant n_i \leqslant 10$;

(ii) Pour tout entier positif N,

$$x\left(\prod_{i=0}^{N}(1+10^{-i})^{n_i}\right) \leqslant 10 < x\left(\prod_{i=0}^{N}(1+10^{-i})^{n_i}\right)(1+10^{-N}) .$$

Démonstration. —Le théorème se démontre par récurrence sur N en utilisant exclusivement les outils déjà mis en place dans la détermination de n_0 et n_1 (étapes 0 et 1). On suppose donc connus des entiers $n_0, n_1, \ldots, n_{N-1}$ vérifiant (i) et (ii) et on pose

$$x_{N-1} = x\prod_{i=0}^{N-1}(1+10^{-i})^{n_i} .$$

On a alors par (ii)

$$x_{N-1} \leqslant 10 < x_{N-1}(1+10^{-(N-1)}) .$$

On déduit, toujours du lemme 1, l'existence d'un entier n_N tel que

$$x_{N-1}(1+10^{-N})^{n_N} \leqslant 10 < x_{N-1}(1+10^{-N})^{n_N+1} .$$

Il reste donc à majorer n_N. Un raisonnement par l'absurde analogue à celui de l'étape 1 montre que

$$(1+10^{-N})^{n_N} < 1+10^{-(N-1)} \quad \text{ce qui est équivalent à} \quad n_N < \frac{\ln(1+10^{-(N-1)})}{\ln(1+10^{-N})} .$$

L'inégalité (1) implique que $\quad \ln(1+10^{-(N-1)}) \leqslant 10 \times 10^{-N}$,

et l'inégalité (2) que $\quad \ln(1+10^{-N}) \geqslant \dfrac{10^{-N}}{1+10^{-N}}$.

On en conclut que

$$n_N < 10(1+10^{-N}) < 11 ,$$

ce qui démontre le théorème. □

2.4. Conséquences du théorème

Posons, en utilisant les notations du théorème, $y_N = \ln 10 - \sum_{i=0}^{N} n_i \ln(1+10^{-i})$. En utilisant à nouveau l'inégalité (1), on déduit de (ii) que

$$y_N - 10^{-N} < \ln x \leqslant y_N .$$

Nous avons donc démontré la

Proposition 4. —*Pour tout entier N, il existe une suite d'entiers positifs $n_i \leqslant 10$ tels que y_N soit une valeur approchée par excès de $\ln x$ à 10^{-N} près.*

Dans le cas où $N = 10$, y_{10} est exactement le nombre y que l'algorithme, décrit en **1.2.**, permet de déterminer. Les entiers $n_i + 1$ donnent le nombre de pas de chaque boucle `Tant que` et nous venons de démontrer qu'il y a au plus 11 pas. Si on cherche par exemple une valeur approchée de $\ln x$ à 10^{-12} près, il faudra au plus 130 pas pour obtenir le résultat où chaque pas consiste en une soustraction, un test de comparaison avec 10 et une multiplication par $(1 + 10^{-i})$, ce qui est très rapide.

Ceci explique le succès de cet algorithme car il a été facile de l'implanter sur une calculatrice ayant peu de mémoire.

Conclusion

A ma grande surprise le principe utilisé par les calculatrices pour obtenir les valeurs de la fonction logarithme ne repose pas du tout sur l'exploitation du développement en série de $\ln(1 + x)$ ou d'une de ses variantes plus performantes comme $\ln \frac{1-x}{1+x}$, mais simplement sur le théorème 3 dont la démonstration ne demande que la connaissance des inégalités (1) et (2).

Le calcul des valeurs des fonctions trigonométriques repose sur les mêmes principes que ceux que nous venons de voir. On peut en trouver une description rapide dans l'article [4] de J. Laporte et une étude plus complète dans l'article [2] de C. Devalland. Évidemment on peut consulter l'article original [5] de Jacques Volder, dont on trouve une reproduction sur le site [4].

Bibliographie

[1] G. Evrard (2000/2001), *TI81, Logarithme par l'algorithme CORDIC*, en ligne à l'adresse `http://gerard.evrard.free.fr/Pages/Logitheque/TI81-4.html`

[2] C. Devalland (2004) *L'algorithme CORDIC*, en ligne à l'adresse `http://cdeval.free.fr/article.php3?id_article=50`

[3] E. Hairer & G. Wanner (2001), L'analyse au fil de l'histoire, *Springer*.

[4] J. Laporte (1981), *Le secret des algorithmes*, en ligne à l'adresse `http://www.jacques-laporte.org/LeSecretDesAlgorithmes.htm`

[5] J. Volder (1959) *The CORDIC Trigonometric Computing Technique*, IRE Trans. Electronic Computing, **EC - 8** , 330–334.

Nicole Bopp
IRMA et IREM
Université Louis Pasteur, Strasbourg
`bopp@math.u-strasbg.fr`

À LA RECHERCHE DE LA FORME DE LA TERRE

Jean LEFORT

Le texte que l'on trouvera ci-après est une refonte de la conférence que j'ai prononcée en juin 2005 au lycée René Cassin à l'invitation de la Régionale APMEP de Strasbourg. Je remercie Nicole Bopp pour le travail de relecture et les conseils qu'elle m'a donnés pour améliorer et préciser certains passages.

Résumé : Depuis toujours l'Homme a cherché à expliquer le monde dans lequel il vit. D'abord mythiques les explications se font de plus en plus précises et scientifiques. Il y a 23 siècles apparaissent les premières mesures. À partir du XVII^{e} siècle, la triangulation puis la théorie font apparaître une Terre en forme d'ellipsoïde. À la fin du XIX^{e} siècle, on comprend qu'il faut faire appel à une surface orthogonale au champ de pesanteur, le géoïde. L'avènement des satellites artificiels et la création du GPS permettent aujourd'hui une excellente précision.

Mots-clés : Méridien - Ellipsoïde - Géoïde – GPS – Triangulation - Ératosthène – Huygens – Histoire des mathématiques – Géographie.

Introduction

Les interrogations de l'Homme sur les raisons de son existence, sur sa place dans l'Univers, sur son rôle, l'ont amené à essayer de comprendre le monde dans lequel il vit. Les mythes de création, les cosmogonies, vont de pair avec une réflexion sur la forme du monde ou de l'Univers.

L'imagination de l'homme est grande, mais pour expliquer il faut toujours partir du connu. Le connu c'est la tente où vivent les nomades, c'est le fleuve où s'abreuvent tant les hommes que les troupeaux et les animaux, ce sont les phénomènes météorologiques apportant bien-être ou malheurs, *etc.*

Les explications sont toujours anthropocentriques et gardons-nous de juger avec les connaissances actuelles les idées d'il y a 5000 ans. C'est grâce à la réflexion de ces ancêtres que nous avons pu progresser et faire que la science nous donne pouvoir sur le monde.

La réflexion scientifique c'est la méthode des essais et des erreurs, c'est faire des hypothèses et les justifier par l'adéquation de leurs conclusions avec l'observable. Si nous affinons l'observable nous devons affiner nos hypothèses.

Je vais essayer d'illustrer ce propos en montrant comment a évolué la représentation de la Terre au cours des âges historiques.

1. Les premières idées

Chaque peuple, chaque époque a eu ses mythes originels expliquant à la fois la création du monde et celle des humains. Mais, même si ils ont le mérite de dépasser la simple explication physique pour expliquer aussi le psychisme, l'observation de divers phénomènes naturels s'accorde mal avec des idées aussi simples que celles développées dans ces légendes.

Quand les marins s'aventurèrent assez loin en mer, ils se rendirent compte qu'ils voyaient d'abord le sommet des montagnes avant d'en voir le pied, de même que ceux restés à terre voyaient d'abord le sommet des mâts avant de voir l'embarcation elle-même. On ne pouvait guère expliquer cela que par un bombement de la surface terrestre. Il faut aussi expliquer les éclipses autrement que par un gros animal qui cherche à manger le Soleil ou la Lune.

Pythagore, 6 siècles avant notre ère, fut sans doute le premier, mais l'idée devait être dans l'air du temps, à penser que le monde et la Terre sont de forme sphérique. Le cercle symbole d'éternel recommencement est considéré comme la figure la plus parfaite. La sphère, du même coup, est la figure solide la plus parfaite puisqu'elle est en tout point identique à elle-même. Il n'est pas question d'associer la ligne droite (ou le plan dans l'espace) car notre conception de ligne droite infinie n'existe pas chez les grecs. Tout au plus peut-on avoir un segment (que l'on peut prolonger) ou une figure géométrique plane aussi grande que l'on veut. Par conséquent la ligne droite n'est pas en tout point identique à elle-même puisqu'elle a deux bouts. En raison de la perfection de la sphère, l'Univers ne peut être que sphérique et la Terre également.

La réflexion sur la forme de la Terre va de pair avec une réflexion sur sa place dans l'Univers. On trouvera dans les écrits de Platon (–428, –348) les conceptions de Pythagore et surtout de son disciple Philolaos sur l'Univers. Il y a là, à côté d'intuitions géniales, une mystique du nombre 10 qui, entre autres idées, empêche une explication correcte du mouvement des planètes.

Il est beaucoup plus instructif de lire les réflexions d'Aristote dans son ouvrage "Du Ciel" où il donne une série de raisons en faveur de la sphéricité de la Terre, raisons qu'il est intéressant de comparer avec nos connaissances actuelles :

> *Quant à sa forme* [de la Terre] *elle est nécessairement sphérique. En effet, chaque portion de terre a un poids jusqu'à son arrivée au centre, et la plus petite poussée par la plus grande, n'amène pas une surface ondulée, mais plutôt un tassement et une réunion d'une partie à une autre jusqu'à ce que le centre soit atteint* […]
> *Une autre preuve nous est fournit par l'évidence sensible. Car, sans cette sphéricité, les éclipses de Lune ne présenteraient pas les segments tels que nous les voyons. C'est un fait que si, dans les aspects qu'elle nous offre chaque mois, la Lune revêt toutes les variétés (puisqu'elle devient droite, bombée et concave), dans les éclipses la ligne qui la limite est toujours une ligne courbe, de sorte que, s'il est vrai que l'éclipse est due à l'interposition de la Terre, c'est la forme de la surface de la Terre qui, étant sphérique, sera la cause de la forme de cette ligne. – En outre, nos observations des astres montrent avec évidence, non seulement que la Terre est circulaire, mais encore que c'est un cercle qui n'est pas d'une grandeur considérable. En effet, il suffit que nous nous déplacions tant soit peu vers le Sud ou vers le Nord, pour amener une évidente modification du cercle de l'horizon, de sorte que les étoiles qui sont au-dessus de nos têtes sont tout à fait changées, et n'apparaissent plus les mêmes si nous nous déplaçons vers le Nord ou vers le Sud. En effet, il y a certaines étoiles qu'on voit en Égypte et dans le voisinage de Chypre, et qu'on n'aperçoit pas dans les régions situées au Nord ; et les étoiles qui, dans la région du Nord, n'échappent jamais à notre champ visuel, ont leur coucher dans les régions du Sud.* […]

2. La grandeur de la Terre

La Terre est donc sphérique. Mais quelle est donc sa dimension ? La première expérience connue est celle d'Ératosthène (–284, –192) dont tout le monde a entendu parler mais que nous allons reprendre en détail pour comprendre les limites de ses calculs.

Chargé par Ptolémée III Évergète de diriger la bibliothèque d'Alexandrie, Ératosthène fait la constatation suivante. En mesurant l'ombre d'un obélisque à Alexandrie le jour du solstice d'été, il évalue la distance zénithale du Soleil à 1/50 de circonférence (soit 7° 12'), il sait que ce même jour, à Syène (l'actuelle Assouan) le fond des puits est éclairé par le Soleil ce qui prouve que le Soleil passe au zénith. Il peut donc en conclure que la différence de latitude entre les deux villes est de 7° 12' (*figure 1*). En fait ceci n'est pas exact, on s'en doute. Assouan se trouve par 24° 54' N donc un peu plus au nord que le tropique qui, lui, se trouve par 23° 27' N. Ceci correspond à environ 160 Km mais n'empêche pas le Soleil d'éclairer le fond des puits. Par ailleurs Alexandrie a une latitude de 31° 12', mais Ératosthène l'évalue à 30° 39' soit un écart d'environ 60 Km. Mais heureusement les deux erreurs sont dans le même sens et elles se compensent donc en partie.

Une autre source d'erreur provient du fait que, contrairement à ce qu'estime notre savant, les deux villes ne sont pas sur le même méridien mais à 3° de longitude de différence (*figure 2*). Soit encore une erreur de l'ordre de 75 Km. Mais ceci ne va pas beaucoup jouer sur l'évaluation finale.

Reste à mesurer la distance en ligne droite de Syène à Alexandrie. Là c'est le règne de l'approximation. Si pour tous le Nil coule du Sud vers le Nord, son cours est loin d'être rectiligne. Que l'évaluation se fasse en journées de marche le long du fleuve ou en journée de navigation sur le fleuve, il faut tenir compte des boucles et dans le deuxième cas, de la vitesse du courant qui est loin d'être la même tout au long du parcours. Une mesure approximative sur une carte conduit à une différence de 870 Km en ligne droite à 1140 Km en suivant le fleuve. On voit donc que c'est sur ce point que l'erreur est la plus importante. Ératosthène évalue la distance en ligne droite à 5 040 stades.

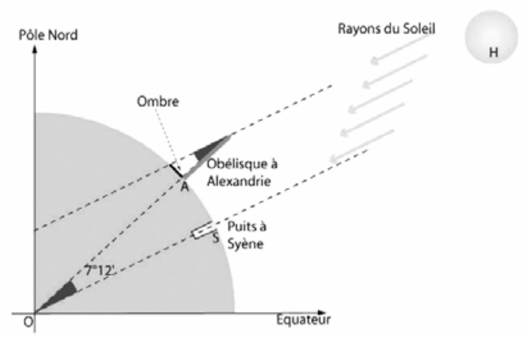


Figure 1 : Mesure de la Terre par Ératosthène

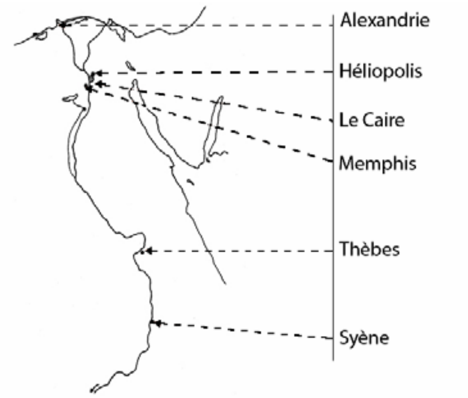


Figure 2 : Aperçu de l'Égypte ancienne

Deux remarques. Personne ne sait exactement combien valait le stade. Certes le stade fait 600 pieds, mais selon les pays le pied varie de 25 à 32 cm. Or Ératosthène est grec mais travaille en Égypte. Quel pied a-t-il utilisé ? Nous n'en savons rien.

Par ailleurs on peut s'étonner du choix de 5 040 stades pour 1/50 de circonférence. Cela fait exactement 252 000 stades pour la circonférence soit 700 stades au degré. A croire que, comme notre mètre, le stade est rattaché à la mesure du méridien. Il faut néanmoins admirer la prouesse d'Ératosthène. Son ordre de grandeur est très correct : entre 37 800 et 48 400 Km de circonférence.

L'idée d'Eratosthène fut reprise et améliorée vers 825. Le calife de Bagdad Al-Ma'mûn (786, 833) commandita deux expéditions pour déterminer la forme de la Terre. Une première expédition alla dans les plaines de Shinar, le long des côtes sud de la mer rouge. Elle détermina deux points sur le même méridien séparés de 1° en mesurant la hauteur du pôle à partir de la position des étoiles circumpolaires, puis elle mesura, en coudées hachémites, la distance entre ces deux points. En multipliant par 360, elle aboutit à une circonférence de 20 400 milles. Cependant ce calcul repose sur l'a priori d'une Terre sphérique. Pour justifier cette hypothèse une deuxième expédition fut envoyée faire deux mesures du côté de Sinjâr à 120 Km à l'ouest de Mossoul. Deux équipes, partant du même point, l'une vers le nord, l'autre vers le sud firent également une mesure d'un arc de 1° et la concordance de leur résultat permis d'affirmer la rotondité de la Terre.

Mais comme pour la mesure d'Ératosthène, nous ne savons pas transcrire en kilomètres les 20 400 milles, faute de connaître d'une part, le nombre de coudées dans un mille et d'autre part, la valeur de la coudée hachémite dans le système international. Diverses évaluations ont été faites pour la coudée qui oscille entre 493,2 mm à 501,2 mm, la valeur la plus probable étant 498,75 mm. Par ailleurs le mille contient-il 3000 ou 4000 coudées, plutôt cette dernière valeur. Les thuriféraires de la civilisation arabo-musulmane affirment que cela donne une circonférence de 39 986 Km soit une erreur de 877 m sur le degré de méridien à la latitude d'environ 15°.

Pour la petite histoire, retenons qu'il se trouva un des plus renommés docteurs en théologie, Takyuddin, qui menaça des pires châtiments divins un calife qui se permettait de troubler la dévotion des fidèles musulmans en diffusant des idées fausses et une philosophie athée, puisqu'il est bien écrit dans le Coran que la terre est plate et carrée ! L'avantage, en l'occurrence, de l'islam, c'est qu'Al-Ma'mun était aussi chef spirituel, ce qui lui permit de passer outre les foudres de Takyuddin.

3. Les mouvements de la Terre

L'étude de la forme de la Terre est inséparable de l'étude de ses mouvements éventuels et de sa place dans l'Univers. L'idée que c'est la Terre qui se déplace et non pas le ciel est une idée ancienne. Ainsi Aristarque de Samos (–310, –230) proposa, comme explication du mouvement des astres, la rotation de la Terre sur elle-même et son mouvement autour du Soleil. Déjà il se fera accuser d'impiété. On objecta également à Aristarque que si la Terre tournait autour du Soleil, on ne verrait pas les étoiles dans la même direction selon les saisons. À quoi Aristarque répondit que les distances des étoiles étaient telles que tout se passait comme si la Terre et le Soleil étaient des points.

La plupart des savants reviendront au cours des siècles sur cette possibilité de mouvements de la Terre. En faveur de ces mouvements ils prôneront le fait que l'on ne peut que constater des mouvements relatifs et qu'il est plus facile de ne faire bouger que la Terre qui est relativement petite que tous le cosmos et la sphère des fixes. Mais faute de comprendre la notion de force et même la simple composition des vitesses, ils n'ont guère d'arguments à rétorquer à ceux qui mettent en avant le fait que, par exemple, les oiseaux vont aussi vite d'est en ouest que d'ouest en est, qu'une flèche tirée à la verticale ne dévie pas et retombe aux pieds de l'archer,… C'est donc souvent des arguments purement idéologiques qui les feront pencher dans un sens ou dans l'autre.

Aryabhata vers 500 en Inde, Al-Bîrûni vers 1000 à Bagdad, pour ne citer qu'eux, penchèrent pour un mouvement de la Terre. Dans l'Europe chrétienne, malgré l'idéologie dominante due à Aristote (–384, –322) qui condamne tout mouvement, le débat d'idées est important comme en témoignent les écrits de Jean Buridan (1300, 1366) :

> *La Terre est sphérique ; et la figure sphérique comporte une certaine aptitude au mouvement sphérique ou circulaire. Or, il en est de l'aptitude naturelle comme il vient d'être dit de la puissance : on ne peut pas admettre qu'elle soit éternellement inefficace.* […]
> *Beaucoup ont tenu pour probable qu'on peut sans contredire à nos perceptions, admettre que la Terre se meut ainsi en cercle ; que si l'on désigne une partie quelconque de la Terre, cette partie achève chaque jour une révolution qui part de l'occident pour aller à l'orient, et revenir à l'occident. Dès lors il faudrait admettre aussi que la sphère des étoiles est immobile : c'est le mouvement de la Terre qui nous donnerait le jour et la nuit, et constituerait le mouvement diurne. Notre cas serait pareil à celui d'un navigateur qui, sur son vaisseau en marche, se croirait immobile, et attribuerait le mouvement à un autre vaisseau, réellement au repos :* […]

Nicole Oresme (1320, 1382) précisa que l'étude du ciel peut aboutir à la constitution d'un savoir qui ne peut cependant pas avoir la prétention de nous faire connaître les intentions de Dieu qui, elles, sont insondables. La discussion du mouvement de la Terre est une hypothèse parmi d'autres car nous sommes incapables de discerner les causes finales de la Création. Dans ce cadre, la science est soumise à la théologie.

Nicolas de Cuse (1401, 1464) reprit ces arguments. Il précisa que si l'on se trouvait sur Mars on aurait l'impression que Mars est immobile et en conclut que l'Univers *a son centre partout et sa circonférence nulle part, puisque sa circonférence et son centre sont Dieu qui est partout et nulle part.*

On sait que finalement, c'est à partir des travaux de Galilée et la publication en 1588 de *De mundi aetheri recentioribus phaenomenis* que l'on admit définitivement la rotation de la Terre ainsi que sa translation autour du Soleil. Restait à comprendre les raisons de ces mouvements.

4. Les premiers théoriciens

4.1. Galilée (1564, 1642)

S'il est assez facile de dater un événement physique, la naissance des idées est beaucoup plus délicate à déterminer puisque la rupture de la pensée résulte d'une longue maturation. L'invention de la lunette en Hollande, et son usage astronomique par Galilée vont donner un coup fatal à la dichotomie entre le monde infra lunaire, monde des hommes, corrompu par le péché, et le monde supra lunaire, celui parfait de Dieu. Malgré les critiques que font les péripatéticiens (ces philosophes aristotéliciens qui arpentent les rues pour y répandre leurs idées) sur l'usage d'un instrument qui ne donne pas à voir la réalité mais la travestit, Galilée saura convaincre le grand Duc de Venise et sa cour de l'utilité de cet instrument. C'est en voyant les montagnes de la Lune que Galilée se convainc de l'unité de l'Univers. Les lois sont les mêmes ici-bas et là-haut.

Je ne vais pas revenir sur les travaux de mécanique de Galilée. Il va étudier la composition des forces, montrer que la trajectoire d'un objet jeté est une parabole, étudier la cycloïde… Mais surtout il va introduire le premier principe de relativité en expliquant que rien ne distingue l'immobilité du mouvement rectiligne uniforme :

> *Enfermez-vous avec un ami dans une vaste salle sous le pont d'un grand navire, […] suspendez un seau dont l'eau tombe goutte à goutte par un orifice dans un autre bocal à col étroit posé sur le sol. Le navire étant arrêté, observez attentivement […] les gouttelettes tombant dans le bocal au sol ; et vous-même, lancez à un ami un objet et constatez que vous pouvez faire cela avec la même facilité dans l'une ou l'autre direction, quand les distances sont égales ; et qu'en sautant les pieds joints, vous traversez des espaces égaux dans tous les sens. Quand vous aurez observé avec soin toutes ces choses, […] faites marcher le navire aussi vite que vous voudrez, pourvu que le mouvement soit uniforme, sans oscillation par-ci ou par-là. Vous ne discernerez aucun changement dans tous les effets précédents et aucun d'eux ne vous dira si le navire est en marche ou arrêté : en sautant vous franchissez les mêmes espaces qu'auparavant ; vos sauts ne seront pas plus grands vers la poupe que vers la proue, bien que pendant le temps que vous restez en l'air, le plancher en dessous se déplace dans le sens contraire de votre saut, et en jetant quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de plus de force s'il se trouve à la poupe et vous à la proue que dans le cas contraire ; les gouttelettes tombent dans le bocal comme avant, bien que le bateau avance de plusieurs largeurs de main, pendant qu'elles se trouvent dans l'air ; […] et si, en brûlant une larme d'encens, on fait un peu de fumée, on la verra monter en haut et s'y maintenir sous forme d'un petit nuage, sans aller vers l'un ou l'autre côté. Et la raison pour quoi tous ces effets restent pareils est que le mouvement est commun au navire et à tout ce qu'il contient y compris l'air.*
> *[…] Un mouvement commun à plusieurs corps est nul et non advenu à l'égard de ces corps.*
>
> Dialogue, journée II, 1632

Ce sont indubitablement les idées de Galilée qui vont permettre l'essor de la physique au XVII[e] et XVIII[e] siècle. Mais si Galilée met en évidence des lois expérimentales, il n'a pas encore les moyens de trouver des lois générales qui permettent de faire des prévisions, ce qui est l'essence même de la science.

Notons que les perfectionnements de la lunette permettront de se rendre compte qu'une planète comme Jupiter est aplatie au pôle. Selon le principe de l'unité des lois physiques supra et sublunaires, si Jupiter est aplati, pourquoi pas la Terre ?

4.2. Kepler (1571, 1630)

On peut se demander en quoi Kepler, qui est avant tout connu pour sa découverte des trois lois qui portent son nom et qui régissent les mouvements des planètes, peut avoir à faire avec une étude sur la forme de la Terre. En fait, au même titre que Galilée, il met en place des lois expérimentales qui permettront ultérieurement à Newton de découvrir la théorie de la gravitation universelle.

4.3. Newton (1642, 1727)

L'histoire de la pomme a été trop souvent travestie et enjolivée. Très prosaïquement, Isaac Newton s'est posé la question suivante : "Pourquoi la pomme tombe-t-elle et la Lune ne tombe-t-elle pas ?" En montrant que la Lune tombe mais qu'elle avance suffisamment sur son orbite pour rester à la même distance de la Terre, Newton mettra au point la loi de la gravitation universelle. C'est une vraie loi théorique en ce sens qu'elle prédit les résultats expérimentaux de Galilée et de Kepler. Rappelons que, après des années de maturation et d'hésitation devant l'accueil qui aurait pu lui être fait, Newton publie en 1687 son œuvre majeure : "Philosophae naturalis principia mathematica".

Il n'est pas question de diminuer le mérite de Newton, mais il y a, à la fin du XVII^{e} siècle tout un développement des mathématiques qui va permettre la mise en place d'une théorie scientifique digne de ce nom. C'est le début du calcul différentiel et intégral, inventé par Newton (en parallèle avec Leibniz), mais il ne faut pas oublier le travail d'un Wallis, d'un Pascal…

Une fois en possession de sa théorie, Newton s'attaque à la forme de la Terre. Son idée de base, il la cite dans ses œuvres : *Si la Terre n'était pas un peu plus haute au voisinage de l'équateur qu'aux pôles, les mers baisseraient aux pôles et monteraient dans les régions équatoriales, inondant tout en ces lieux.* Newton va faire un calcul laborieux et très approximatif en supposant la Terre homogène et en équilibrant le poids de deux colonnes joignant le centre de la Terre, l'une au pôle, l'autre à l'équateur. En tenant compte de la rotation terrestre il montre que l'aplatissement vaut 1/230.

Remarquons toutefois que Newton avance une autre raison à l'existence du bourrelet équatorial : la chaleur qui, comme chacun sait, dilate les corps !

4.4. Huygens (1629, 1695)

Huygens va reprendre l'idée de Newton sur l'eau qui envahirait les régions équatoriales si la Terre était sphérique. Il démontre alors qu'à l'équilibre la surface de la Terre doit être en tout point orthogonale à la direction de la pesanteur. Cette pesanteur est la somme de la force attractive de la masse de la Terre (la gravité) et de la force centrifuge due à sa rotation diurne. Huygens va supposer que la masse de la Terre est concentrée au centre et il trouve une valeur de l'aplatissement de 1/578. Les calculs de Huygens peuvent être facilement refaits aujourd'hui avec les notations actuelles.

Plaçons nous dans un plan méridien et considérons un repère centré au centre de la Terre avec Oy axe des pôles et Ox un rayon équatorial. Notons $y = y(x)$ le profil du méridien. Un point P de coordonnées (x,y) de la surface terrestre subit une attraction newtonienne d'intensité $GM/(x^2+y^2)$ dirigée vers le centre O (G est la constante de la gravitation universelle et M la masse de la Terre). Cette attraction newtonienne est représentée par le vecteur

$$\vec{g}=\begin{cases}\dfrac{-GM}{x^2+y^2}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2mm]\dfrac{-GM}{x^2+y^2}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}.$$

Par ailleurs la force centrifuge est perpendiculaire à Oy et vaut $\vec{f}=\begin{cases}\omega^2 x\\0\end{cases}$. En conclusion la pesanteur est représentée par le vecteur

$$\vec{g}+\vec{f}=\begin{cases}\dfrac{-GM}{x^2+y^2}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\omega^2 x\\[2mm]\dfrac{-GM}{x^2+y^2}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

qui doit être orthogonal à $\begin{cases}1\\y'\end{cases}$. En effectuant le produit scalaire on obtient l'équation différentielle

$$-\frac{GM\ x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}+\omega^2 x-\frac{GM\ yy'}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=0 \quad \text{soit} \quad \frac{GM\left(x+yy'\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=\omega^2 x,$$

équation qui s'intègre à vue en

$$\frac{-GM}{\sqrt{x^2+y^2}}=\omega^2\frac{x^2}{2}+k.$$

On calcule la constante k en remarquant que pour $x=0$, $y=b$ et que pour $x=a$, $y=0$ ce qui conduit à

$$k=\frac{-GM}{b} \quad \text{et} \quad \frac{-GM}{a}=\omega^2\frac{a^2}{2}-\frac{GM}{b}, \text{ soit en regroupant } \frac{a-b}{a}=\omega^2\frac{a^2 b}{2GM}. \qquad (*)$$

Prenons les valeurs actuelles des paramètres :

$GM = 3\,986\,005 \times 10^8$ m^3. s^{-2} ; $\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11}$ rd. s^{-1} et $a^2 b = (6\,371$ Km$)^3$.

On obtient pour l'aplatissement la valeur de

$$\frac{b-a}{a}=\frac{1}{579{,}75}.$$

On peut simplifier les calculs, comme l'avait fait Huygens en identifiant, dans le deuxième membre de (*), a et b au rayon moyen R connu à l'époque (les mesures de Picard de 1670 conduisaient à une circonférence de 40 036 Km) et en prenant pour $g=GM/R^2$ une valeur approchée de la pesanteur. La valeur obtenue diffère peu du résultat précédent, c'est ce qui importe.
On notera que la forme de la méridienne, dans le calcul de Huygens, n'est pas une ellipse mais une courbe qui, ici, s'en approche beaucoup :

$$\left(x^2+y^2\right)\left(\beta x^2-\gamma\right)^2=\alpha^2 \text{ avec } \alpha = 9{,}81 \text{ ; } \beta = 6{,}548\times10^{-23} \text{ ; } \gamma = 1{,}539\times10^{-6}.$$

4.5. Clairaut (1713, 1765)

C'est Clairaut qui parachèvera la théorie et signera l'acte de naissance de la géodésie dynamique. Mais nous sommes déjà au XVIII^e siècle. Il démontre que l'aplatissement de la surface d'une planète en équilibre ne dépend pas seulement de la masse et de la vitesse de rotation, mais encore de la répartition des masses à l'intérieur de la planète. Si la Terre est homogène, il retrouve la valeur de Newton, si toute la masse est concentrée au centre, c'est la valeur de Huygens. Clairaut ajoute que si la Terre était initialement fluide, les couches les plus denses sont les plus proches du centre et donc que la répartition des densités est intermédiaire entre le cas de Newton et celui de Huygens. Par suite son aplatissement est compris entre 1/578 et 1/230.

Surtout Clairaut va démontrer que la connaissance de la valeur de la pesanteur en deux points de latitudes différentes, valeurs qui peuvent être déterminées à l'aide des oscillations d'un pendule, permet de mesurer l'aplatissement du globe terrestre.

Malheureusement, l'imprécision des mesures de l'époque conduit à un rejet de la théorie de Clairaut et il faudra attendre 1825 pour que Laplace (1749, 1827) trouve un aplatissement de 1/308 à partir de la mesure d'un arc de méridien et 1/310 à partir de mesures de période de pendules. Les idées de Clairaut sont alors confirmées et l'on en vient, sur une proposition de Lamarck en 1802, à penser que la Terre se déforme lentement pour s'ajuster à sa figure d'équilibre.

5. La Terre est un ellipsoïde aplati

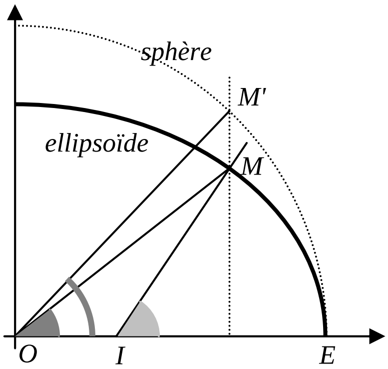
Les idées de Newton, contrairement à ce que peut laisser croire le paragraphe précédent, ne furent pas admises immédiatement. Il y eut d'un côté la rivalité entre l'Angleterre et les puissances continentales, mais aussi le problème de la vérification des idées théoriques sur le terrain.

Initialement, on ne disposait que des mesures faites en France par Picard puis par les Cassini au cours du XVIII^e siècle de Dunkerque à Perpignan. Or ces mesures laissaient entendre que les longueurs du degré de méridien diminuaient au fur et à mesure que l'on s'approchait du pôle nord ce qui laissait entendre que la Terre avait la forme d'un ellipsoïde allongé selon l'axe des pôles. Il s'ensuivit une longue polémique de près de 15 ans entre les théoriciens et les praticiens, polémique doublée de chauvinisme. Pourtant, un français, Richer, avait mesuré, dès 1672, la longueur du pendule battant la seconde à Cayenne et l'avait trouvée plus courte de 1 ligne ¼ (environ 3 mm). Cette différence ne pouvait pas être expliquée par la seule force centrifuge qui a un effet 4 fois moins important entre le pôle et l'équateur. Il fallait donc supposer un plus grand éloignement du centre de la Terre.

Il faudra cependant attendre la mission de Maupertuis en Laponie en 1737 puis 5 ans plus tard le retour de celle du Pérou pour enfin admettre les idées de Newton et des autres théoriciens.

D'où provenait donc l'erreur ? Essentiellement de deux sources : d'une part des erreurs de mesure de Picard et Cassini qui avaient travaillé dans l'urgence faute d'être assurés du financement des travaux ; d'autre part de la situation très particulière de la France où la forme moyenne de la Terre (ce qu'on appellera plus tard le géoïde) induit des modifications sur la direction de la verticale entraînant localement un ellipsoïde beaucoup moins aplati.

Le repérage sur un ellipsoïde ne pose pas trop de difficultés. Les méridiens sont tous identiques. Reste à déterminer la latitude. On distingue habituellement trois types de latitude (*figure 3*).



La latitude géographique : l'angle EOM
La latitude astronomique : l'angle EIM (IM est la normale en M)
La latitude mathématique : l'angle EOM' qui repose sur la représentation mathématique de l'ellipse : $\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$

Figure 3

Après le formidable travail de triangulation fait en France, les autres pays vont aussi se lancer dans la triangulation. Chacun rattache sa triangulation à une base particulière. Ainsi la Suisse a créé une base du côté de Sausheim. En fait la triangulation n'est pas un art exact. Habituellement on mesure plusieurs bases. Par exemple sur un arc, on mesure une base au départ et une autre à l'arrivée et on compare la longueur mesurée de la base à l'arrivée avec la longueur fournie par la résolution de tous les triangles depuis la base de départ. Évidemment ça ne concorde jamais. Il faut donc répartir les erreurs sur l'ensemble de la triangulation en fonction de la précision des mesures.

Relier les triangulations de plusieurs pays nécessite d'une part une collaboration entre ces pays, ensuite une comparaison des algorithmes mis en œuvre et enfin un raccord des triangulations, ce qui oblige bien souvent à reprendre tous les calculs. Vaste travail. Et au XIXe siècle, il n'est pas question d'imaginer relier des terres séparées par de vastes étendues marines.

Chaque pays va donc cartographier au mieux les régions sous sa souveraineté et choisir un ellipsoïde correspondant le plus exactement possible aux mesures faites. Les écarts entre ces différents ellipsoïdes ne sont pas bien grands, de l'ordre de ±1 Km sur le grand axe et le petit axe, avec un aplatissement α tournant autour de 1/300. Voici quelques exemples d'ellipsoïdes utilisés au XIXe siècle, puis au XXe.

Date	Nom	Pays	*a*	*b*	α	Utilisation
1810	Delambre	France	6 376 985	6 356 323,4	1/308,64	France
1810	Plessis	France	6 376 523	6 355 862,9	1/308,64	État-major
1819	Walbeck	Russie	6 376 895	6 355 833,8	1/302,78	Russie
1830	Everest	G. Bretagne	6 377 276,3	6 356 075,4	1/300,8	Inde, Asie SE
1841	Bessel	Allemagne	6 377 397,2	6 356 079	1/299,15	Europe centrale
1848	Airy	G. Bretagne	6 377 563,4	6 356 256,9	1/299,32	G. Bretagne
1866	Clarke	États Unis	6 378 206,4	6 356 583,8	1/294,98	Amérique Nord
1880	Clarke	(IGN. NTF)	6 378 249,1	6 356 514,9	1/293,46	Afrique, France
1909	Hayford	International 1924	6 378 388	6 356 911,9	1/297	
1940	Krasovsky	URSS	6 378 245	6 356 863	1/298,3	URSS
1965	Australien	Australien	6 378 160	6 356 774,7	1/298,25	Australie
1966	WGS 66		6 378 145	6 356 759,77	1/298,25	

1967		International 1967	6 378 157,5	6 356 772,2	1/298,25	
1972	WGS 72		6 378 135	6 356 750,5	1/298,26	NASA
1984	WGS 84	(GPS 80)	6 378 137	6 356 752,3	1/298,257	(Fr : RGF 93)

On comprend alors que, selon le choix de l'ellipsoïde, les coordonnées soient différentes. C'est une source d'erreur de plusieurs dizaines de mètres. Il y a évidemment aussi le problème de l'origine sur l'ellipsoïde. Ce problème n'est guère d'actualité aujourd'hui, mais historiquement il l'a été. Le tableau ci-dessous exprime dans divers systèmes un même point, la sortie nord de Strasbourg jonction A 4 – A 35 (source IGN).

Système de coordonnées géographiques	Longitude	Latitude géographique
NTF (méridien de Paris)	5°24´ 0" Est	48°36´00,0" Nord
NTF (méridien de Greenwich)	7°44´14,0" Est	48°36´00,0" Nord
ED50 (Greenwich)	7°44´16,4" Est	48°36´03,0" Nord
WGS84 (Greenwich)	7°44´12,2" Est	48°35´59,9" Nord

Pour des raisons de métrologie, on ne définit pas l'ellipsoïde à partir du petit et du grand axe car on tient également compte de la répartition des masses. Voici comment est défini le WGS 84 (ou GPS 80 ou RGF 93) :

1) **Le centre** est le centre d'inertie avec l'atmosphère.
2) **La masse** M est précisée en donnant le produit de la masse de la Terre, atmosphère comprise, par la constante G de la gravitation universelle : $G\,M = 3\,986\,005 \times 10^8\ m^3.s^{-2}$.
3) **Le petit axe** est l'axe moyen des pôles.
4) **La vitesse angulaire** correspond à un tour en une journée sidérale (environ 23 h 56 min) et vaut $7\,292\,115 \times 10^{-11}\ rad.s^{-1}$.
5) **Le demi grand axe** a est le rayon équatorial et vaut 6 378 137 m.
6) **Le rapport** $J_2 = \dfrac{C - A}{Ma^2}$ où C est le moment d'inertie par rapport au petit axe et A celui par rapport au grand axe ; on a $J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}$.

A partir de ces données, il est possible d'en déduire d'autres, par exemple le demi petit axe $b = 6\,356\,752{,}314\ m$ ce qui conduit à l'aplatissement 1/298,257 222 101.

Dès le XIXe siècle on commença à penser que l'ellipsoïde de révolution n'était qu'une approximation commode de la surface terrestre, même débarrassée des montagnes. C'est en 1873 que le géodésien allemand Listing baptisa la forme de la surface d'altitude 0 du nom de géoïde. Schématiquement il s'agit de l'équipotentielle correspondant à la surface des océans au repos, surface que l'on prolonge sous les masses continentales. La répartition inégale des masses au sein de la Terre laisse penser que le géoïde va présenter des creux et des bosses par rapport à un ellipsoïde de référence, y compris au milieu des mers.

6. Le géoïde

Le géoïde n'est donc pas une surface dont la représentation mathématique est simple comme celle de l'ellipsoïde. Il faut pouvoir l'approcher globalement dans l'espace. On pourrait imaginer que l'on donne les 3 coordonnées, dans un repère convenable, de suffisamment de points pour que la surface soit définie avec une précision donnée à l'avance. C'est effectivement ce que l'on a fini par faire avec les satellites artificiels. Mais historiquement on a d'abord cherché à définir le géoïde par son altitude par rapport à un

ellipsoïde moyen. Encore faut-il se mettre d'accord sur un ellipsoïde moyen. Initialement on ne dispose que d'ellipsoïdes locaux qui approchent au mieux localement le géoïde, en fonction des bosses et des creux dudit géoïde (*figure 4*). L'idée est alors de moyenner les différents ellipsoïdes locaux. Mais avant l'avènement des satellites artificiels on n'avait guère d'idées sur la forme du géoïde dans les régions océaniques.
La question est de savoir ce que l'on entend par altitude 0. On pourrait penser qu'il suffit de se mettre d'accord sur un point qui par convention serait déclaré de niveau 0, puis de suivre par nivellement (on monte de tant de mètres, on redescend,…) pour retrouver le niveau 0 un peu plus loin. Ce raisonnement est fallacieux et nous allons voir pourquoi.

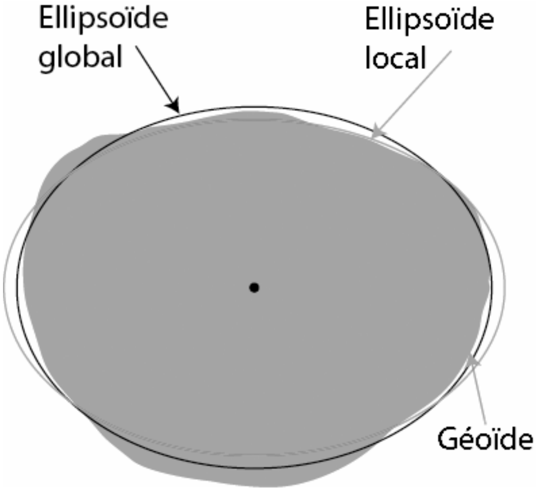


Figure 4 : Géoïde, ellipsoïde local et global

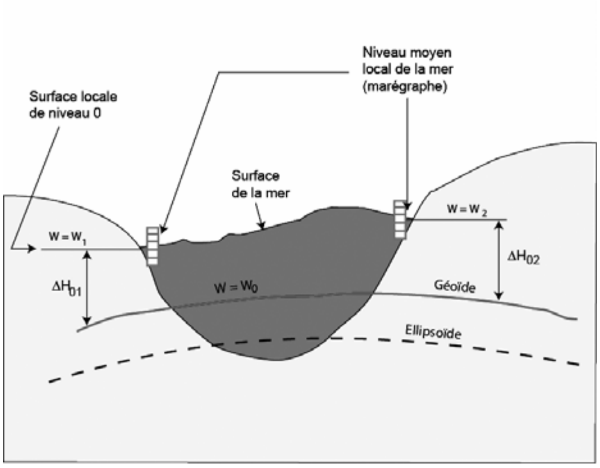


Figure 5 : Nivellement à travers les océans

6.1. Le niveau zéro

Se mettre d'accord sur un point d'origine 0 sans froisser les susceptibilités nationales n'est déjà pas évident, mais même en France les choix ont varié : Picard avait choisi le rez-de-chaussée du château de Versailles, Cassini avait adopté le niveau de la mer près de Perpignan, Collin proposa un point situé à 100 m en dessous de la cour de l'observatoire de Paris (!!!). C'est en 1860 qu'un décret ministériel fixa comme origine 0 le niveau moyen de la Méditerranée défini par le trait 0,40 m de l'échelle de marée de Fort Saint-Jean à Marseille.

Mais si on est sur un autre continent et que l'on choisit un niveau 0 comme niveau moyen de la mer ou de l'océan en tel endroit, peut-on être sûr que ces deux niveaux moyens donnent un même 0 ? (*figure5*).

Certes, ce sont Laplace et Gauss qui reconnurent que le niveau moyen des mers devait être une surface équipotentielle. Le choix de la Méditerranée où les marées sont de très faible amplitude est logique. Mais qu'est-ce qu'un niveau moyen ? Il faut faire intervenir le temps. Quelle durée : une lunaison, un an, 18 ans (il y a dans le mouvement de la Lune un terme de période voisine de 18 ans) ? Il y a aussi des marées terrestres, de quelques dizaines de centimètres. Dès que l'on prend en compte un temps assez long, on se trouve confronté à la fonte des glaciers qui entraîne le soulèvement des continents, *etc.* Par ailleurs il y a des courants marins dont le rythme est assez aléatoire et qui entraînent des modifications importantes des niveaux océaniques. Pensons par exemple au phénomène "el niño". Sur une échelle de temps de plusieurs dizaines d'années, la tectonique des plaques intervient avec des déplacements de l'ordre de quelques centimètres par an.

6.2. Le nivellement

Niveler, c'est positionner une lunette horizontalement entre deux mires distantes pour mesurer les hauteurs relatives de ces deux mires par rapport à la lunette et ainsi connaître la différence d'altitude entre les deux mires.

Il faut bien comprendre que le niveau 0 correspond à une surface équipotentielle, c'est-à-dire à une surface orthogonale en tout point à la direction de la pesanteur. Or les différentes surfaces équipotentielles n'ont aucune raison d'être régulièrement espacées d'une même quantité en mètres. Par la force des choses, l'arpenteur reste à la surface de la Terre et non pas sur une surface équipotentielle, sauf quand il suit une courbe de niveau. Cela se voit bien sur le dessin où l'on a représenté un champ fictif de pesanteur qui montre que les surfaces équipotentielles s'écartent plus ou moins les unes des autres (*figure 6*). Le nivellement ne permet pas de retrouver le niveau 0 après un cheminement et de plus selon le cheminement choisi le résultat ne sera pas le même. Pire, un même cheminement ne donnera pas le même résultat selon le choix du point intermédiaire et cela en raison de la courbure des lignes de champ de la pesanteur. Bien sûr les écarts ne sont pas importants mais la connaissance précise de la forme de la Terre est à ce prix (*figure 7*).

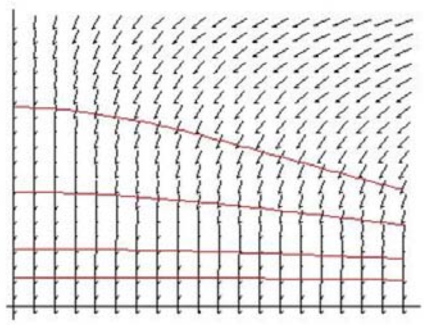


Figure 6 : Les équipotentielles ne sont pas régulièrement espacées

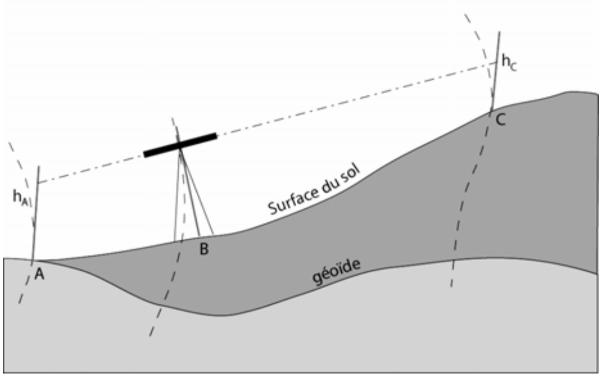


Figure 7 : La quantité $h_A - h_C$ dépend du choix de *B* en raison de la courbure des lignes de champ

6.3. L'influence des montagnes

C'est Pierre Bouguer qui, lors de l'expédition pour la mesure de l'arc de méridien au Pérou (1736-1743) remarqua une trop grande différence de la valeur de la pesanteur entre le niveau de la mer et le sommet des Andes. Un siècle plus tard, George Everest fit une observation analogue au voisinage de l'Himalaya : la déviation de la pesanteur n'est pas aussi importante qu'elle devrait l'être si cette chaîne de montagne était simplement posée sur la croûte ou sur le manteau terrestre. On en déduisit la théorie de l'isostasie qui n'est autre qu'une application du principe d'Archimède. Les montagnes flottent sur une couche plus dense et s'y enfoncent d'une quantité plus ou moins importante selon leur densité.

On définit ainsi aujourd'hui plusieurs types d'anomalies :

- ✓ L'anomalie à l'air libre qui est tout simplement la variation de la pesanteur au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la Terre. C'est de l'ordre de 0,3086 mgal par mètre (pour rappel la pesanteur au niveau de la mer varie de 978 gal à l'équateur à 983 gal aux pôles).
- ✓ L'anomalie de Bouguer qui tient compte de la seule partie de montagne située au dessus du niveau de la mer de l'ordre de 0,1968 mgal par mètre.
- ✓ L'anomalie isostatique due à l'effet d'attraction des masses compensatrices situées en profondeur sous le niveau de la mer. Il y a différentes façons de la calculer.

En fait il existe d'autres anomalies dues à des différences de densité à la fois dans le manteau et dans la croûte terrestre. Ce sont d'ailleurs ces différences qui sont exploitées en géologie minière.

L'amélioration de la précision des mesures gravimétriques à l'aide de pendules a permis de déterminer la pesanteur en tout point de la surface des continents. L'utilisation des satellites a permis de définir le niveau moyen des océans. On a pu également mesurer la pesanteur en altitude, y compris au niveau des satellites artificiels, ce qui n'est pas évident car l'intérieur d'un satellite est pratiquement en apesanteur. L'utilisation de résultats mathématiques comme les formules de Stokes, permet ensuite de récupérer les équipotentielles et en particulier le niveau 0. Cela permet de situer le géoïde par rapport à un ellipsoïde de référence. On utilise également l'étude de la trajectoire de deux satellites identiques dont la distance réciproque est mesurée au micromètre près (expérience GRACE : *Gravity Recovery And Climate Experiment*). Les écarts maximum du géoïde par rapport à un ellipsoïde de référence bien choisi sont d'une centaine de mètres. En voici une visualisation (*figure 8*).

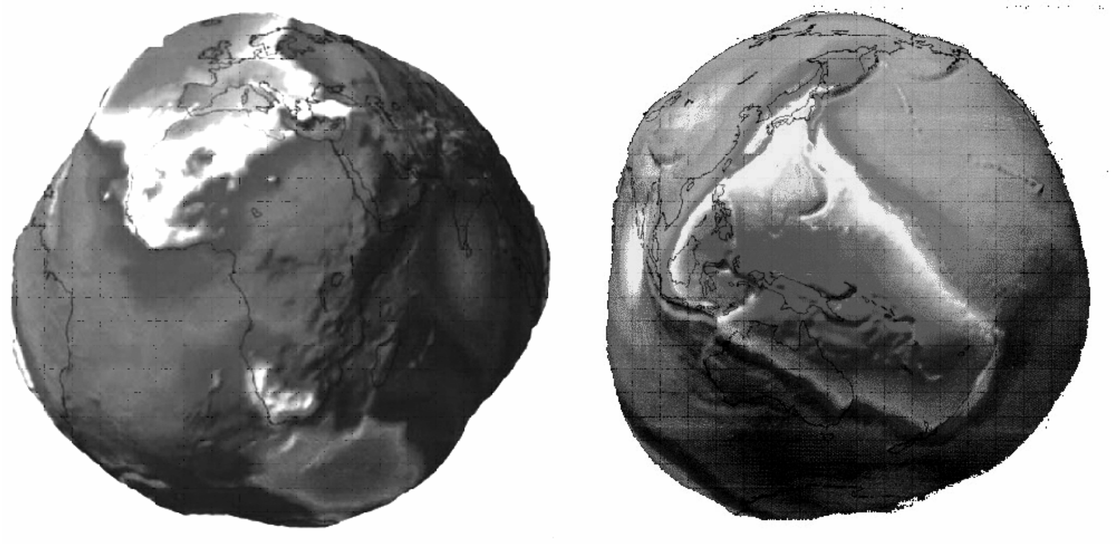


Figure 8 : Exagération d'un facteur 1000 des écarts du géoïde à la sphère

7. Aujourd'hui et demain

Nous avons vu très rapidement l'usage des satellites pour la détermination de la forme de la Terre. N'oublions pas que les premiers satellites n'étaient suivis que visuellement et que c'est petit à petit que l'on a pu tenir compte de la forme de leur orbite pour mettre en évidence et les variations de la gravité au niveau de l'orbite et les freinages dus aux restes de l'atmosphère.
Avec la précision des mesures et les aller et retour entre la théorie et la pratique, on peut suivre l'orbite d'un satellite à quelques centimètres près. Une des retombées essentielles en est la navigation par satellite ou GPS.

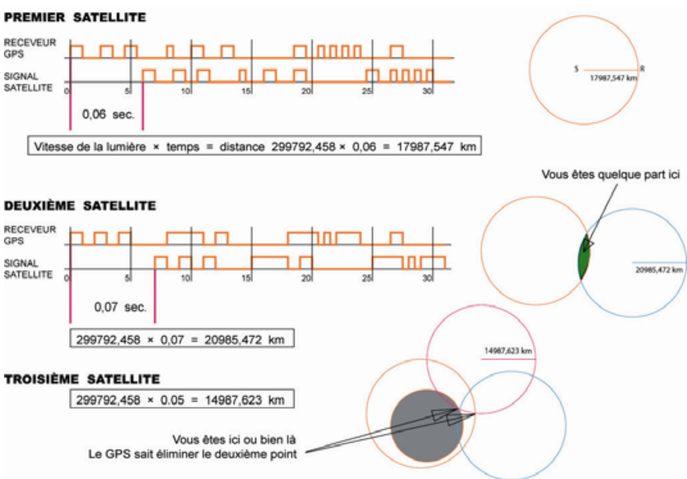


Figure 9 : Principe de fonctionnement du GPS

Je vais donc expliquer ici le fonctionnement du GPS qui est une extension du principe de triangulation. J'ai peu parlé de triangulation dans cette conférence puisque si, historiquement, la méthode a permis de déterminer la grandeur et la forme de la Terre, on a ensuite essentiellement utilisé des méthodes gravimétriques pour trouver la forme la plus précise de notre planète.

Dans le cas du GPS il s'agit d'une triangulation dans l'espace. On détermine la position d'un point sur terre ou dans les airs à l'aide d'une triangulation sur des satellites dont la position est connue. Il faut donc trois satellites : 1 satellite donne la position sur une sphère, 2 satellites la donnent sur un cercle, 3 sur deux points dont l'un est dans presque tous les cas aberrant. On va voir que les erreurs de mesures impliquent la nécessité d'avoir une mesure vis-à-vis d'un 4ème satellite. Pour que l'on ait toujours ce nombre minimum de satellites visibles il en faut une constellation (24) autour de la Terre (*figure 9*).

- ✓ La marche des satellites est contrôlée grâce à des stations terrestres. Éventuellement, un moteur permet de corriger les dérives dues à la pression du vent solaire, aux influences gravitationnelles de la Lune et du Soleil, au freinage dû à l'atmosphère qui subsiste à 20 000 Km d'altitude. Si les corrections de trajectoires sont insuffisantes, on transmet au satellite l'information sur sa nouvelle trajectoire, information retransmise vers les récepteurs GPS par un canal spécial. Ceci permet une précision de 20 cm sur la position des satellites.
- ✓ Le signal émis par chaque satellite est codé de façon pseudo aléatoire avec un code qui caractérise le satellite. Chaque satellite possède une horloge atomique interne qui assure la stabilité du codage.
- ✓ Le récepteur GPS reçoit le signal avec un retard de l'ordre de 7/100ème de seconde. Mais le récepteur ne possède pas une horloge atomique qui permet de mesurer très exactement ce retard et d'en déduire la distance. Comme l'écart entre les deux horloges est constant pendant la durée des mesures, le calcul de la distance à un 4ème satellite assure la mesure de cet écart.
- ✓ La célérité du signal n'est pas connue et sûrement moindre que 299 792 458 $m.s^{-1}$. Sur terre, il est possible de compenser cette erreur en utilisant le principe à l'envers. Un laboratoire bien équipé et dont la position terrestre est parfaitement connue mesure le temps mis par le signal pour parcourir la distance satellite – laboratoire et en déduit la célérité du signal. Si ce labo n'est pas trop loin du récepteur GPS, environ 200 à 250 km, on peut penser que les conditions atmosphériques sont les mêmes sur les deux trajets de l'onde et par suite les célérités identiques.
- ✓ Reste le problème des trajets multiples par réflexion sur les obstacles naturels ou artificiels : falaises, immeubles,… Ce problème n'a guère trouvé de solution.

En résumé, voici ce que donne l'accumulation des erreurs en nanosecondes et approximativement en mètres :

Stabilité en fréquence du satellite :	35 ns = 10,5 m
Position du satellite :	33 ns = 10 m
Traversée de l'ionosphère :	13 ns = 3,9 m
Traversée de la troposphère :	33 à 65 ns = 9,8 à 19,6 m
Stabilité de l'horloge de l'utilisateur :	9,7 ns = 2,9 m
Trajets multiples :	8 ns = 2,4 m
TOTAL :	environ 150 ns soit environ 45 m.

Si l'usage le plus connu du GPS est de déterminer sa position sur terre, sur mer ou dans les airs, ou bien comme aide à la navigation routière, grâce à un couplage avec des cartes et des plans de ville (avec sens interdit), c'est aussi un instrument bien pratique pour continuer à déterminer la forme de la Terre. A titre d'exemple, une expédition en mai 1999 a placé au sommet de l'Everest, une balise GPS qui permet de mesurer le déplacement de ce prestigieux sommet. Il ne s'élève pas de ses 8850 m, contrairement à l'attente mais se déplace vers le nord d'environ 6 mm par an sous la pression du sous continent indien.

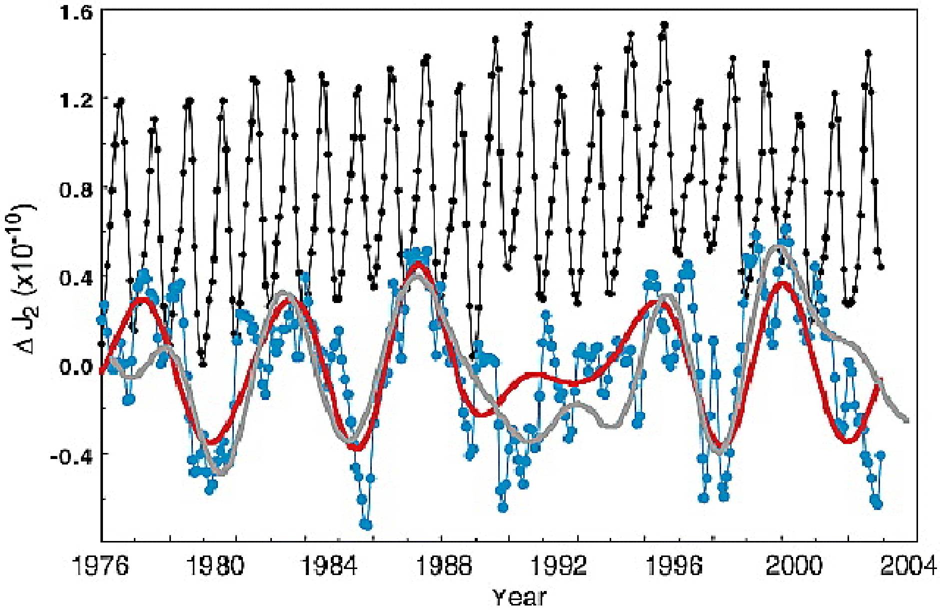


Figure 10 : En noir épais variation du J_2 et en gris du niveau moyen des océans. (Source NASA)

Mais ce sont des méthodes de gravimétrie à l'aide des deux satellites de GRACE qui depuis 28 ans nous renseignent sur les variations de la forme du géoïde (essentiellement dans les océans) avec une période d'un peu plus de 4 ans. Ces variations sont intimement liées aux changements climatiques (*figure 10*).

Conclusion

Chacun pourra choisir la conclusion qu'il veut bien tirer de cet exposé. Quant à moi, j'ai appris beaucoup de choses en travaillant sur ce sujet et sur des sujets connexes. J'en ai retiré quelques éléments qui m'ont permis d'illustrer de façon vivante mon cours que j'ai toujours voulu, au-delà du programme officiel, en phase avec l'histoire des sciences ainsi qu'avec la science d'aujourd'hui. Je suis certain que cela peut se faire à tous les niveaux d'enseignement, certes, pas de la même façon, mais le professeur dynamique et ouvert saura, j'en suis convaincu, adapter à des collégiens la question de la triangulation, du calcul de la hauteur d'une montagne, ou de la détermination de la position par GPS. Ces mêmes questions et d'autres comme le calcul de Huygens, peuvent être traitées de façon plus approfondie au lycée. Si certains peuvent en tirer un travail interdisciplinaire avec leurs élèves et les professeurs de physique, d'histoire ou de technologie, je n'aurai pas travaillé en vain.

Sources

Livres généraux

Bernard MAITTE et Anne-Marie MARMIER (1988), *COSMOS, Une histoire des représentations de l'univers,* Alias.

Jean-Jacques LEVALLOIS (1993), *Mesurer la Terre, 300 ans de géodésie française,* Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées / Association française de Topographie.

Jean LEFORT (2004), *L'aventure cartographique*, Belin – Pour la Science.

Sites Internet

Principe du GPS : http://www.trimble.com/gps (en anglais)

Pour la gravimétrie : Bureau de Gravimétrie International :
http://bgi.cnes.fr:8110/tutorial/debutbgi.htm

Mesures de la Terre : Applications à la classe :
http://expositions.bnf.fr/ciel/maths/index.htm

Le Géoïde : École Supérieure des Géomètres et Topographes :
http://mail.esgt.cnam.fr/fr/recherche/geoide.htm

Historique du géoïde : http://www.ens-lyon.fr/Planet-Terre/Infosciences/Geodynamique/Structure-interne

Site de la NASA :
http://www.nasa.gov/centers/goddard/earthandsun/earthshape.html

Jean LEFORT
24, rue Schweitzer
68920 Wintzenheim
jlefort.apmep@wanadoo.fr

LES ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES Volume 11 –2006

Sommaire du volume 11

Sommaire du supplément

Tarifs

Volume 11 (2006) et supplément (colloque Mons 2005), 395 pages --- 15 euros.
(13 euros pour les membres de l'APMEP*).
Vol. 11 seul, 300 pages, 13 euros ; supplément seul, 95 pages, 6 euros.
Un bon de commande est accessible en ligne sur le site de l'IREM : http://irem.u-strasbg.fr

** Ce volume des annales a été co-édité avec l'APMEP.*

Actes du XXXII^e colloque de la COPIRELEM

Auteurs Conférenciers et orateurs du colloque, animateurs d'ateliers, COPIRELEM.

Mots-clés Didactique des mathématiques – enseignement et apprentissage – formation des maîtres – écoles maternelle et élémentaire – Europe – systèmes d'enseignement – systèmes de formation.

Date Mai 2006.

Éditeur IREM de Strasbourg (**S. 192**)

ISBN 2-911446-27-5.

Public concerné Professeurs et formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, professeurs des écoles et des collèges.

Résumé Cette brochure contient les textes des conférences et de la table ronde ainsi que les résumés des ateliers et des communications du XXXII^e colloque de la COPIRELEM. Le CD-ROM joint contient ces textes ainsi que les comptes-rendus des ateliers et les rédactions détaillées des communications. Une partie de ces articles permet de confronter des dispositifs de formation et d'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire dans différents pays et contextes.

Prix 12 € (+ 3,50 € de frais d'envoi).
Un bon de commande est accessible en ligne sur le site de l'IREM : http://irem.u-strasbg.fr

Les carnets mathématiques

On signale la sortie d'une nouvelle revue de mathématiques destinée aux étudiants, *les Carnets mathématiques*. Édités par le CRDP d'Alsace, les *Carnets* fournissent des exercices corrigés d'oraux de concours, les solutions étant le fruit d'un travail collaboratif entre les auteurs et des élèves de CPGE du lycée Kléber.

Le premier numéro compte environ 240 pages de mathématiques, et près de 130 exercices. On y trouvera aussi une rubrique plus ludique (*Récréation*) ainsi que des exercices et articles plus poussés (*Salon hors-programme*). Il pourra intéresser les étudiants comme leurs enseignants, de la première année à l'Agrégation.

Le prix de ce volume est de 10 euros. Le deuxième numéro est prévu pour février 2007.

Les auteurs

- Emmanuel Bougnol (professeur au lycée Kléber) ;
- Olivier Dodane (doctorant à l'IRMA) ;
- Patrick Génaux (professeur au Lycée Kléber, membre du comité d'organisation du rallye mathématique d'Alsace) ;
- Marie-Laure Kostyra (professeur au Lycée Kléber, membre du comité d'organisation du rallye mathématique d'Alsace) ;
- Julien Stiker (professeur au lycée Le Corbusier) ;
- Frédéric Suffrin (professeur au lycée Kléber).

Pour de plus amples renseignements,

`http ://www.crdp-strasbourg.fr/produits/carnetsMaths.php`

ou

`carnets_math@yahoo.fr`.