Éditorial

Une lettre de lecteur

Nous avons reçu une lettre de lecteur annonçant qu'il hésite à se réabonner à L'Ouvert. En effet nous ne publions pas 3 numéros par an comme promis et les sujets des derniers numéros ne l'intéressent absolument pas, en particulier les deux numéros consacrés à la « musique théorique » et celui traitant uniquement des TPE. Il y a une crise à L'Ouvert, dit-il, et vous ne daignez pas vous en excuser ni en fournir une explication. Cette lettre prouve qu'il y a encore des collègues qui lisent L'Ouvert, ce qui nous fait plaisir, et elle nous donne l'occasion de fournir les explications demandées.

Effectivement la parution de L'Ouvert a été très irrégulière ces derniers temps : c'est pourquoi nous avons transformé l'abonnement annuel en abonnement pour 3 numéros. Nous ne l'avons probablement pas annoncé assez clairement à nos abonnés bien que cela figure en 4e page de couverture. C'est chose faite.

Il est vrai que certains articles des numéros consacrés à la musique (Nos **112** et **114**) étaient un peu techniques mais il nous semble que cela fait partie du rôle de L'Ouvert de permettre à ses lecteurs de faire connaître l'intervention des mathématiques dans différents domaines. En revanche nous ne comprenons pas pourquoi un numéro consacré exclusivement aux TPE (No **111**) serait absolument inintéressant : ce numéro est issu des travaux d'un groupe de l'Irem comprenant des enseignants de lycée et de l'université. Certains articles relatent des expériences de « vrais » TPE faits avec des élèves et d'autres racontent des mathématiques accessibles aux élèves et utilisables dans des TPE. Il nous semble que publier ce type de travail fait partie des missions de L'Ouvert. Nous apprécierions beaucoup que d'autres lecteurs nous indiquent ce qu'ils aiment ou n'aiment pas dans L'Ouvert, et surtout quels types d'articles ils aimeraient y trouver.

Et pour finir, on peut dire que oui L'Ouvert est en crise, pour plusieurs raisons. D'une part le nombre de nos abonnés ne cesse de décroître. Les jeunes enseignants ne jugent plus utile de s'abonner à une revue (pas plus à L'Ouvert qu'au bulletin vert de l'Apmep) car ils trouvent plus pratique d'aller chercher sur le net les informations dont ils ont besoin. C'est d'ailleurs pourquoi nous avons fait le double effort de mise en ligne des articles de L'Ouvert sur le site de l'Irem (`http://irem.u-strasbg.fr/`) et de leur référencement sur la base publimath (`http://publimath.irem.univ-mrs.fr/`). D'autre part les propositions d'articles qui nous parviennent sont moins nombreuses : les groupes de l'Irem ont besoin de plus de temps pour aboutir à un travail rédigé car leurs membres n'ont plus de décharge pour cette activité (seulement quelques heures complémentaires) et sont aussi beaucoup plus sollicités dans leurs établissements. Les universitaires, eux aussi, ont des charges d'enseignement plus lourdes qu'il y a 20 ans et sont soumis à une pression plus forte pour écrire des articles de recherche.

Nous allons faire tout notre possible pour poursuivre la publication, ne serait-ce qu'en ligne. Cette volonté est confortée par le fait que deux collègues, Jean-Pierre Darou et Emmanuel Will ont rejoint cette année le comité de rédaction. Et nous espérons que la variété des sujets traités dans ce numéro est fidèle à l'esprit de L'Ouvert.

Nicole Bopp

Erratum

Quelques propriétés de la technique de Boulez...

Nous prions les lecteurs de première édition du numéro **114** de L'Ouvert de bien vouloir nous excuser pour les erreurs commises dans les figures accompagnant l'article de Nicolas Weiss

Quelques propriétés de la technique de Boulez *de multiplication des blocs sonores.*

En effet les notes apparaissant sur les différentes portées illustrant cet article se sont transformées par une malice du transfert informatique des images en signes cabalistiques, parfois des W, parfois des Œ. Et ceux d'entre nous qui ont eu le numéro en main avant le premier tirage se sont contentés de penser que Boulez avait une drôle de façon d'écrire les notes. Tout compte fait il s'agissait de blanches et de noires bien ordinaires. Elles sont réapparues lors du deuxième tirage !

Plutôt que de reproduire ici ces figures, nous avons mis en ligne l'article de Nicolas Weiss. Vous pourrez en obtenir une version corrigée sur le site de l'Irem

`http://irem.u-strasbg.fr`

onglets : publications/publications disponibles/L'Ouvert

Que l'auteur veuille bien, lui aussi, nous pardonner !

Le comité de rédaction de L'Ouvert

Les aires et le raisonnement géométrique

Michel de Cointet, Marie-Agnès Egret

Résumé : D'une part, la notion d'aire parcourt en filigrane le cursus scolaire : objet de l'activité géométrique à l'école puis au collège, lieu de synthèse des acquis géométriques en seconde, lien entre géométrie et analyse en terminale des lycées. D'autre part, le raisonnement géométrique est fait à la fois de visualisation et de déduction. L'article cherche à préciser, dans des situations mettant en jeu la notion d'aire, ce que signifie une visualisation qui constitue un réel apport heuristique à une démarche géométrique, en examinant sur des exemples la façon dont fonctionnent les interactions entre une telle visualisation et l'élaboration d'une démonstration. L'article s'efforce de montrer que la visualisation dans le raisonnement géométrique mérite un apprentissage qui lui soit propre, tout autant que le raisonnement déductif.

Mots-clés : Aire - Raisonnement géométrique - Visualisation - Appréhension d'une figure - Heuristique - Démonstration - Parallélogramme - Médiane - Triangle - Longueurs - Proportionnalité - Alignement - Théorème de Thalès - Théorème de Pythagore.

Introduction

> « L'ambiguïté du statut des figures pèse lourdement sur les premiers apprentissages de la géométrie. Elle enferme souvent l'enseignement dans un dilemme : ou l'on s'en tient à l'évidence visuelle (c'est souvent le cas en primaire) et on reste en deçà des traitements mathématiques, ou l'on se réfère en priorité aux traitements mathématiques (à partir du collège, bien souvent) et on perd l'apport intuitif et heuristique des figures. »

(extrait du compte rendu de l'expérimentation faite par l'IREM de Strasbourg en 1995 sur l'apprentissage des aires en sixième ([1])).

Cependant, le raisonnement géométrique est fait à la fois de visualisation et de déduction : une démonstration ne peut se passer, à chacune de ses étapes, de l'apport heuristique de la lecture d'une figure. Or, l'évidence visuelle est inopérante, parfois trompeuse. Il faut la dépasser et pour cela savoir lire une figure. Cela s'apprend et on sait les difficultés que rencontre son apprentissage.

Dans cet article, nous nous proposons d'examiner des situations mettant en jeu la notion d'aire afin d'étudier :

- ◇ ce que signifie une visualisation qui constitue un réel apport heuristique à une démarche géométrique, et quel apprentissage spécifique cela demande ;
- ◇ la manière de faire fonctionner et de rendre fructueuses les interactions entre une telle visualisation et l'élaboration d'une démonstration.

1. Que disent les programmes ?

À l'école primaire

Les compétences devant être acquises en fin de l'école primaire sont les suivantes :
- ◇ classer et ranger des surfaces (figures) selon leur aire (par superposition, découpage et recollement ou pavage par une surface de référence) ;
- ◇ construire une surface qui a même aire qu'une surface donnée (et qui ne lui est pas superposable) ;
- ◇ différencier aire et périmètre d'une surface, en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir la même aire sans avoir nécessairement le même périmètre et qu'elles peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire ;
- ◇ mesurer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (dont l'aire est prise pour unité) ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé (le résultat étant une mesure exacte ou un encadrement) ;
- ◇ calculer l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés au moins est de dimension entière ;
- ◇ connaître et utiliser les unités usuelles (cm^2, dm^2, m^2 et km^2) ainsi que quelques équivalences ($1\ m^2 = 100\ dm^2$, $1\ dm^2 = 100\ cm^2$, $1\ km^2 = 1\ 000\ 000\ m^2$).

Au collège

Dans l'introduction générale pour le collège, on peut lire parmi les objectifs :

> « Isoler dans une configuration les éléments à prendre en compte pour répondre à une question. »

En particulier, il est précisé pour la classe de sixième :
- ◇ parmi les objectifs principaux pour la géométrie : « Reconnaître les figures planes mentionnées ci-dessus dans une configuration complexe. »
- ◇ au début du paragraphe *Géométrie* : « L'objectif d'initier à la déduction est aussi pris en compte. A cet effet, les activités qui permettent le *développement des capacités à décortiquer et à construire des figures* et des solides simples, *à partir de la reconnaissance des propriétés élémentaires*, occupent une place centrale. »
- ◇ dans les commentaires sur les aires dans le paragraphe *Grandeurs et mesures* : « *Comparer des aires à l'aide de reports, de décompositions, de découpages et de recompositions, sans perte ni chevauchement.* »

Au lycée

1. En classe de seconde parmi les deux objectifs principaux assignés à cette partie du programme, on peut lire : « Proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes du collège. Pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des problèmes d'aires. »
2. En classe de terminale, il est écrit dans le paragraphe *Intégration* : « Les élèves ont la notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines définis à l'aide de fonctions. Les propriétés de l'intégrale seront (...) commentées et admises ; l'interprétation en terme d'aire (...) les rend conformes à l'intuition. Les élèves s'en serviront comme règles opératoires. »

On voit, à la lecture des programmes, l'importance donnée à l'activité géométrique sur les aires (avant toute formule de calcul) à l'école puis au collège, l'intérêt attribué aux problèmes d'aires comme lieu de synthèse géométrique à l'entrée au lycée, enfin le rôle donné à la notion d'aire dans la compréhension du concept d'intégrale en classe terminale. On peut dire que c'est une notion qui parcourt en filigrane tout le cursus scolaire. En outre, elle y constitue un lien important entre la géométrie et l'analyse.

2. Visualisation en mathématiques : le cas des aires

Ces réflexions prennent appui sur le travail de Raymond Duval ([2]) et le compte-rendu de l'expérimentation de l'IREM de Strasbourg en 1995 ([1]).

2.1. Appréhensions d'une figure

On sait que dans la pratique de la géométrie et particulièrement dans son apprentissage, les figures constituent un support intuitif et jouent un rôle heuristique. Pour analyser la façon dont fonctionne l'intuition heuristique donnée par une figure géométrique, on peut distinguer deux modes d'appréhension de cette figure :

◇ l'appréhension dite « perceptive » : il s'agit de la reconnaissance spontanée, à partir des formes élémentaires comme le trait, le carré, le rond, des objets géométriques tels que la droite, le triangle, différents quadrilatères, un demi-cercle, etc.

◇ l'appréhension dite « opératoire » mobilisée pour un raisonnement géométrique :
  - elle consiste d'abord à penser les objets géométriques à travers leurs propriétés puis à regarder la figure en fonction des propriétés formulées comme hypothèses : celles-ci sont écrites ou font l'objet d'un codage[1].
  - à partir de là, une étude de la figure conduit à se poser des questions ou à énoncer une conjecture, si ce n'est déjà fait dans l'énoncé du problème ;
  - puis un véritable travail de recherche sur cette figure est nécessaire pour trouver, tout à la fois, les enchaînements déductifs et les propriétés à mettre en œuvre pour résoudre le problème posé.

A cet effet, cette appréhension s'approfondit en complétant la figure par de nouveaux tracés (points, lignes, figures) et en procédant à des « reconfigurations ».

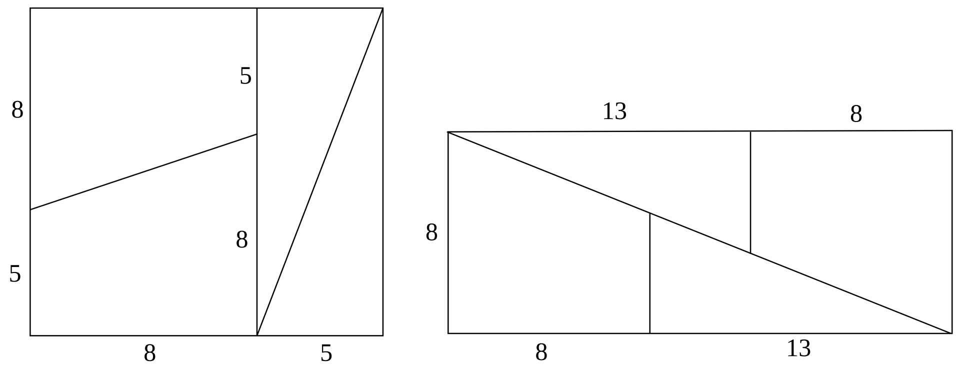
De quoi s'agit-il ? Toute figure peut être modifiée de plusieurs manières, par exemple, elle peut être partagée en sous-figures, incluse dans une autre figure, agrandie, déplacée, tournée. On appelle *reconfiguration* l'opération qui consiste à réorganiser une ou plusieurs sous-figures d'une figure donnée en une autre figure, à la manière d'un tangram qu'on déconstruirait puis reconstruirait pour obtenir une nouvelle image.

L'appréhension opératoire nécessite une démarche faite de réflexions et d'initiatives. Elle est plus « dynamique » que l'appréhension perceptive. On peut dire qu'elle « fait vivre » la figure et c'est elle qui a un rapport que l'on peut qualifier de dialectique avec le raisonnement déductif. Ceci dit, l'appréhension opératoire d'une figure dont on a démontré des propriétés préalablement peut être suffisamment familière pour qu'elle soit immédiate dès qu'on la rencontre par la suite.

[1]Notons qu'on a tout avantage à ce que le codage ne traduise que ces propriétés, quitte à faire ensuite une nouvelle figure, lorsqu'une propriété change de statut (devenant hypothèse après avoir été démontrée) pour démontrer une nouvelle propriété.

2.2. Un exemple d'appréhension perceptive

A partir de quatre pièces d'un puzzle on recompose les deux surfaces qui sont dessinées ci-dessous. L'une apparaît comme un carré de côté 13 et l'autre comme un rectangle de longueur 21 et de largeur 8. Il n'est évidemment pas question d'en conclure que $13^2 = 21 \times 8$.

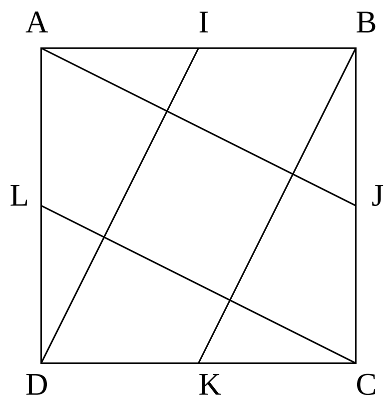


Cette activité expérimentale ne constitue pas une visualisation mathématique. Celle-ci, répétons-le, est mobilisée pour un raisonnement géométrique. Elle s'appuie sur les propriétés d'une figure prises comme hypothèses par un énoncé. Elle conduit à une conjecture qui peut être validée par une démonstration.

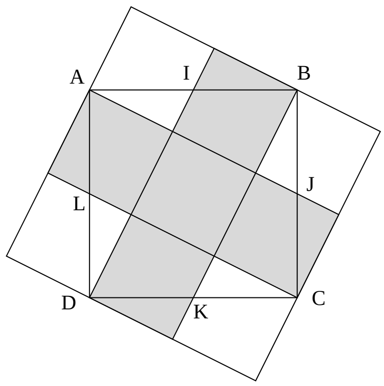
2.3. Un exemple de reconfiguration

Problème : rapport d'aires

On donne un carré $ABCD$.On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, et $[DA]$. La figure fait apparaître un quadrilatère (qui est un carré) à l'intérieur du carré initial. Quel est le rapport des aires des deux carrés ?



La figure est invariante par une rotation dont le centre est celui du carré $ABCD$. On en déduit que le quadrilatère dont il est question est bien un carré. À s'en tenir là, la figure n'est guère parlante pour répondre à la question posée.



Cette figure de travail comporte un quadrillage. Celui-ci a été imaginé, choisi et tracé pour faire apparaître des carrés de même aire que le carré intérieur. On fait apparaître ainsi une « croix » qui a même aire que le carré de départ, ce que l'on peut voir au travers de « compensations » d'aires et vérifier en procédant à des reconfigurations portant sur quatre triangles rectangles intérieurs au carré $ABCD$. On peut alors démontrer ce résultat à l'aide de symétries centrales ayant pour centres les milieux des côtés de $ABCD$.

La résolution du problème nécessite deux étapes indépendantes :
- l'une est consacrée à démontrer que le quadrilatère intérieur est bien un carré ;
- l'autre demande une perception opératoire (compensation d'aires, reconfiguration) qui débouche, ici, sur une démonstration (symétries) que l'on peut rédiger immédiatement.

3. Aires et démonstrations

Les outils de démonstration sont de deux ordres :

◇ ceux liés à la conservation des aires par les transformations au fur et à mesure de leurs études : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, leurs composées, rotation. Rappelons que les propriétés de la symétrie axiale, en particulier la conservation des aires, sont « admises » à partir de la superposition des figures par pliage. La conservation des aires par la symétrie centrale en résulte.
Par ailleurs, avant de définir la translation et de savoir qu'une translation est la composée de deux symétries centrales, on est amené à admettre la propriété suivante : « Deux triangles dont les côtés sont parallèles et de mêmes longueurs (deux à deux) ont la même aire ». Cette propriété, qui peut paraître évidente expérimentalement, se justifie : un déplacement (au sens expérimental) éventuellement suivi d'un pliage permet de « superposer » de tels triangles. On a là une visualisation de cette propriété. De même, on peut utiliser les propriétés suivantes :
   - Trois points P, Q et R sont alignés dans cet ordre si et seulement si on a l'égalité
   $$\mathrm{Aire}(MPR) = \mathrm{Aire}(MPQ) + \mathrm{Aire}(MQR)$$
   où M désigne un point qui n'est aligné ni avec P et Q, ni avec Q et R, ni avec R et P.
   - Si D est un point intérieur au triangle ABC, alors $\mathrm{Aire}(DBC) < \mathrm{Aire}(ABC)$.

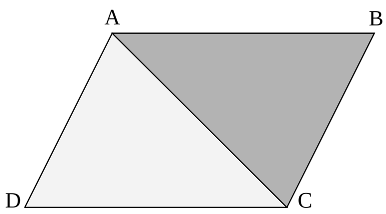
◇ ceux liés aux définitions et propriétés des figures fondamentales, acquises au fur et à mesure : rectangle, carré, losange, parallélogramme, médiane d'un triangle, configuration de Thalès, angles, etc. Il est important de ne pas les oublier : si les aires constituent un outil spécifique en géométrie, c'est néanmoins un outil parmi d'autres lié aux propriétés des configurations et des transformations.[2]

[2] C'est volontairement que les formules de calcul d'aires ne font pas partie des outils de démonstration car nous privilégions, ici, le rôle de la visualisation dans l'apprentissage géométrique. A partir de l'acquis de l'école primaire généralisé aux rectangles dont les côtés ne sont plus de dimensions entières, le théorème sur les parallélogrammes ayant un côté commun (voir le paragraphe 3.3) permet de déduire les formules

Plusieurs des exemples qui suivent proviennent de l'article d'André Laur ([4]). En raison de la perspective didactique annoncée dans l'introduction, la présentation de ces exemples (ordre, libellé de l'énoncé) et la façon de les traiter peuvent en différer sensiblement. Pour chacun de ces exemples nous décrivons une visualisation au sens que nous lui avons donné au paragraphe 2. Elle constitue un apport heuristique à une démarche géométrique en interaction avec l'élaboration d'une démonstration.

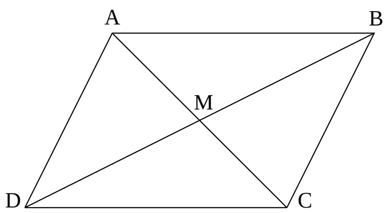
3.1. Demi-parallélogramme

Chaque diagonale partage un parallélogramme en deux triangles de même aire.



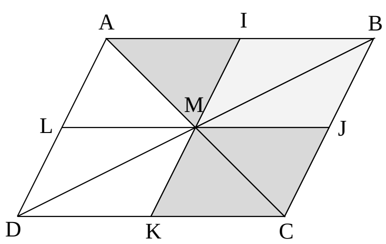
Qui dit parallélogramme dit centre de symétrie, à savoir le point de concours des diagonales. Penser ainsi permet d'accéder à une perception opératoire de la figure : la conservation des aires par la symétrie centrale est, en effet, la clé d'une démonstration immédiate.

Conséquence :
Les diagonales d'un parallélogramme le partagent en quatre triangles de même aire.



Il s'agit de démontrer, par exemple, que les triangles BAM et BCM ont même aire.
Ici, la perception opératoire va au-delà de la prise en compte des hypothèses de l'énoncé (aspect que l'on peut qualifier de statique).

De façon à utiliser la propriété du demi-parallélogramme, on complète la figure initiale par le tracé de segments d'origine M, parallèles aux côtés du parallélogramme $ABCD$, afin d'obtenir de nouveaux parallélogrammes (aspect dynamique).



En fait, on obtient ainsi un puzzle constitué de triangles. On s'intéresse particulièrement à ceux qui constituent les triangles BAM et BCM. Ils sont deux à deux superposables. Il suffit de trouver à l'aide des « outils de démonstration » et du résultat précédent de quoi le démontrer. Ils ont, deux par deux, la même aire (utilisation de la propriété du parallélogramme et d'un des outils de démonstration ou d'une symétrie de centre M).

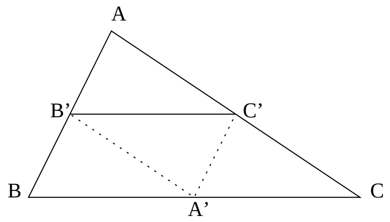
de l'aire du parallélogramme et celle du triangle, puis de calculer l'aire de tout polygone.

a) Application 1 : aires et agrandissement

Propriété des milieux
Si B' et C' sont les milieux des côtés AB et AC du triangle ABC, alors

$$\text{Aire}(AB'C') = \frac{1}{4}\,\text{Aire}(ABC)$$

.

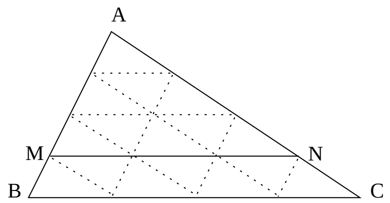


On appelle A' le milieu du côté BC et on trace les trois côtés du triangle $A'B'C'$. On met ainsi (par cette simple initiative) en évidence quatre triangles de même aire. La démonstration s'ensuit immédiatement.

Propriété générale
Si M et N partagent les côtés AB et AC du triangle ABC dans le même rapport k, alors

$$\text{Aire}(AMN) = k^2 \times \text{Aire}(ABC)$$

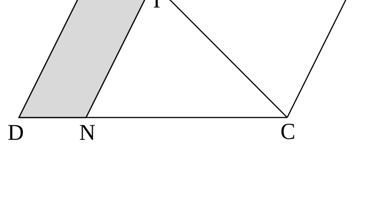
.



On démontre la propriété pour certaines valeurs rationnelles de k en mettant en évidence des triangles de même aire. On admet la propriété pour toute valeur rationnelle de k puis on généralise à toute valeur de k.

b) Application 2 : propriété du papillon 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme et I un point de la diagonale $[AC]$. Les aires des deux parallélogrammes $IMBQ$ et $INDP$, « opposés par le sommet » en I, sont égales.

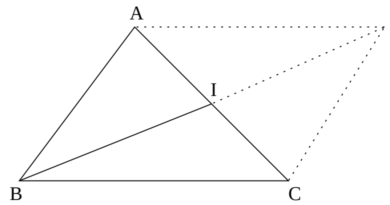


La perception opératoire consiste à remarquer
- ◇ que la droite (AC) partage $ABCD$ en deux triangles de même aire, « contenant » l'un le parallélogramme $IMBQ$ et l'autre le parallélogramme $INDP$;
- ◇ que la droite (AC) est diagonale de trois parallélogrammes.

La démonstration consiste alors à appliquer la propriété du « demi-parallélogramme » à ces trois parallélogrammes. Les aires de $IMBQ$ ou $INDP$ sont alors obtenues par soustractions d'aires.

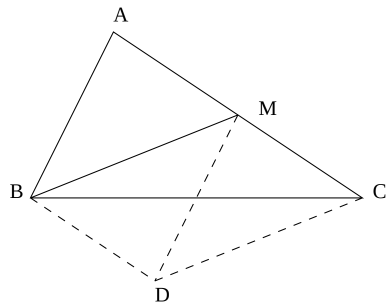
3.2. Médiane

Propriété de la médiane
Chaque médiane partage un triangle en deux triangles de même aire.



Le travail a été fait au paragraphe 3.1.

Une autre façon de procéder : On démontre la propriété de la médiane avant de démontrer la propriété de l'égalité des aires des triangles que découpent les diagonales d'un parallélogramme. L'idée est celle de la démonstration de Daniel PERRIN ([6]).

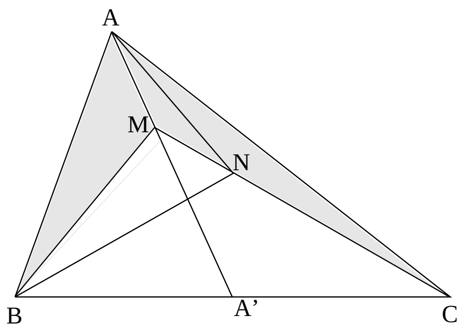


Soit M le milieu de AC. Il s'agit de démontrer que les triangles BMA et BMC ont même aire. L'idée est, là aussi, de faire apparaître des parallélogrammes afin d'utiliser la propriété du demi-parallélogramme.

On complète la figure par le parallélogramme $BMCD$ construit sur le triangle BMC. On obtient ainsi un nouveau parallélogramme : $BDMA$. Il faut alors percevoir que les triangles BMA et BMC ont, chacun, même aire que le triangle BMD, commun aux deux parallélogrammes (ce qui est moins évident pour BMC que pour BMA). La mise en forme de la démonstration s'ensuit.

L'égalité des aires des triangles découpés par les diagonales d'un parallélogramme (voir paragraphe 3.1) est alors immédiate.

Caractérisation de la médiane par une propriété d'aires.
Un point M appartient à la médiane (AA') d'un triangle ABC si et seulement si les triangles MBA et MCA ont même aire.



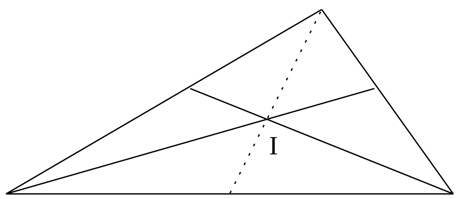
On donne un triangle ABC et on désigne par A' le milieu du segment $[BC]$.

1. Pour ce qui est de la partie directe : si M est un point de (AA') alors (MA') est médiane du triangle MBC. On est ainsi conduit à utiliser deux fois la propriété de la médiane.

2. Pour la réciproque, on peut penser à une démarche, par exclusion des cas, utilisée pour

démontrer la propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment ou de la bissectrice d'un angle : soit N un point intérieur au triangle ACA', par exemple. On appelle M le point d'intersection des segments $[CN]$ et $[AA']$. On perçoit que l'aire du triangle ANB est supérieure à celle du triangle ANC. Il reste à le démontrer à l'aide des outils de démonstration cités plus haut.

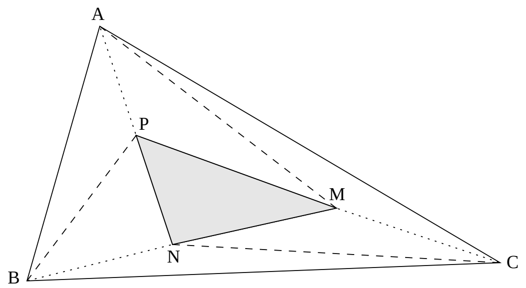
Conséquence : les trois médianes d'un triangle sont concourantes.



La propriété précédente est caractéristique des médianes d'un triangle. On peut donc procéder ici comme on le fait pour les médiatrices ou les bissectrices.

On appelle I le point d'intersection de deux médianes : la partie directe de la propriété précédente permet d'écrire deux égalités d'aires dont on déduit une troisième égalité. La partie réciproque de la propriété précédente permet alors de conclure que I appartient à la troisième médiane.

Exercice d'application : rapport d'aires
On donne un triangle MNP et on construit les points A, B et C symétriques respectivement de N par rapport à P, de M par rapport à N et de P par rapport à M. Quel est le rapport de l'aire du triangle MNP à celle du triangle ABC ?

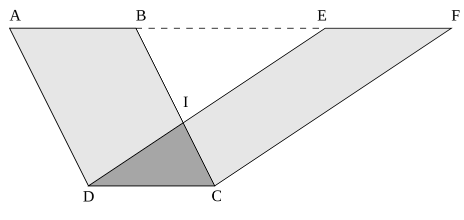


La donnée de plusieurs milieux conduit à joindre des points de la figure pour mettre en évidence des triangles intérieurs au triangle ABC ayant une même aire, en vertu de la propriété de la médiane. La démonstration en résulte immédiatement.

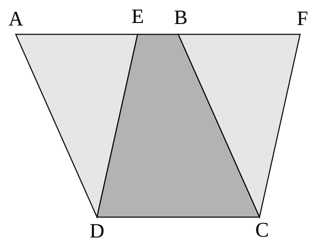
3.3. Parallélogrammes ayant un côté commun

Théorème
Deux parallélogrammes dont deux sommets consécutifs sont communs et les autres sont alignés, ont même aire.

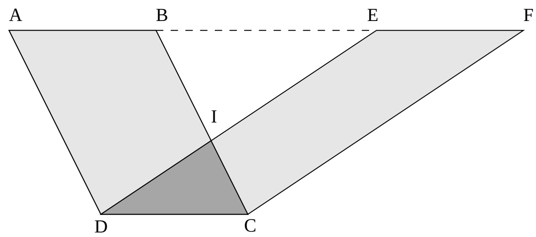
Hypothèses :
$ABCD$ est un parallélogramme,
$CDEF$ est un parallélogramme,
A, B, E et F sont alignés.



Les différents cas de figures se ramènent aux cas ci-dessous :



Examinons la première figure : les deux parallélogrammes ont en commun un trapèze. Pour reconstituer, à partir de ce trapèze, chacun des parallélogrammes $ABCD$ ou $CDEF$, on juxtapose le triangle ADE ou le triangle BCF. Or, ces deux triangles ont même aire.

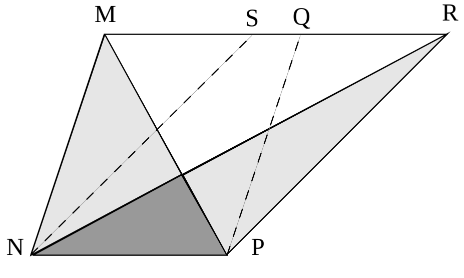


Examinons la seconde figure : l'alignement des sommets A, B, E et F suggère de tracer la droite (AB) qui n'est autre que la droite (EF).
Les triangles ADE et BCF ont même aire. Pour reconstituer, à partir de chacun de ces deux triangles, les parallélogrammes $ABCD$ et $CDEF$, on juxtapose le triangle IDC et on supprime le triangle IBE.

Démonstration
$AD = BC$ par hypothèse,
$DE = CF$ par hypothèse,
$EA = FB$ car $AB = EF$.
Donc les triangles ADE et BCF ont même aire.
On appelle I le point d'intersection des droites (BC) et (DE). Les aires des parallélogrammes $ABCD$ et $CDEF$ se déduisent de celles des triangles ADE et BCF par addition de celle du triangle IDC et soustraction de celle du triangle IEB. Elles sont donc égales.

On peut noter que cette démonstration bâtie sur l'appréhension opératoire de la seconde figure s'avère tout à fait valide dans le cas de la première.

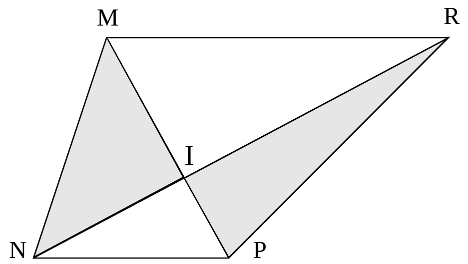
Conséquence 1
Deux triangles de même base et ayant des sommets situés sur une parallèle à cette base, ont même aire.



Cette propriété est aussi connue comme **propriété du trapèze**, car M, N, P et R sont les quatre sommets d'un trapèze.

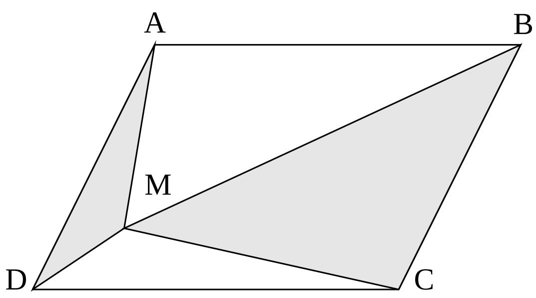
On peut considérer les triangles MNP et RNP comme des « demi-parallélogrammes ». On construit les parallélogrammes $MNPQ$ et $PNSR$: la propriété précédente permet de conclure à l'égalité des aires des triangles MNP et RNP.

Conséquence 2 : propriété du papillon 2
Soit $MNPR$ un trapèze. On appelle I le point d'intersection de ses diagonales. Les aires des deux triangles IMN et IPR, « opposés par le sommet » en I, sont égales.



En soustrayant à l'égalité obtenue ci-dessus l'aire du triangle INP, on vérifie que les aires des triangles IMN et IPR sont égales,

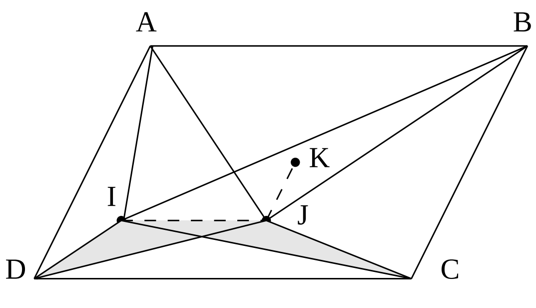
Application 1 : égalité d'aires
On donne un parallélogramme $ABCD$ et un point M intérieur à ce parallélogramme. Où faut-il placer le point M pour que la somme des aires de deux triangles opposés par le sommet en M soit égale à la somme des aires des deux autres triangles opposés par le sommet en M ?



Soit S l'une de ces sommes, par exemple

$$S = \text{Aire}(MBC) + \text{Aire}(MAD).$$

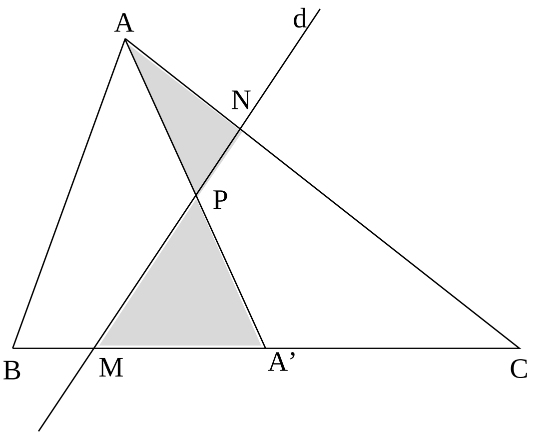
L'idée est d'étudier ce que devient S lorsqu'on déplace le point M d'un point I au centre K du parallélogramme.



Pour pouvoir appliquer les résultats précédents, on déplace d'abord M parallèlement à (AB) de I en J pour déplacer ensuite M parallèlement à (BC) de J en K. On compare donc, dans un premier temps, la somme de l'aire de IBC et de l'aire de IAD à la somme de l'aire de JBC et de l'aire de JAD. Le résultat obtenu pour cette somme induit la suite et la fin du raisonnement.

Application 2 : partage d'un triangle par une droite en deux surfaces de même aire

On donne un triangle ABC ainsi qu'un point M sur $[BC]$. Trouver une droite passant par M qui partage le triangle ABC en deux surfaces de même aire ?



On connaît une situation facile à traiter : celle où M est en A', milieu de $[BC]$ (théorème de la médiane). Soit un point M de $[BC]$, différent de A'. On trace une droite d passant par M qui coupe $[AC]$ en N. On appelle P le point d'intersection de d et de $[AA']$. La résolution du problème nécessite une étude attentive des surfaces qui constituent la figure. On cherche la position de d telle que

$$\text{Aire}(ABMN) = \text{Aire}(CMN).$$

Comme $\text{Aire}(ABA') = \text{Aire}(CA'A)$, il faut « voir » que cette condition est réalisée si les deux triangles PAN et $PA'M$ ont même aire avant de reconnaître un « papillon ».

Démonstration. On constate que

$$\begin{aligned}\text{Aire}(ABMN) &= \text{Aire}(ABA') + \text{Aire}(PAN) - \text{Aire}(PA'M) \ ,\\ \text{Aire}(CMN) &= \text{Aire}(ACA') - \text{Aire}(PAN) + \text{Aire}(PA'M) \ .\end{aligned}$$

Les aires de ABA' et ACA' étant égales par la propriété de la médiane, on en déduit que

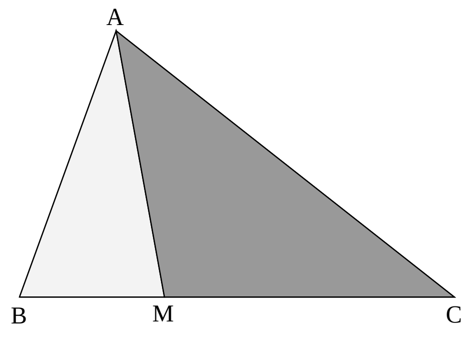
$$\text{Aire}(ABMN) = \text{Aire}(CMN) \Longleftrightarrow \text{Aire}(PAN) = \text{Aire}(PA'M) \ .$$

Si la droite $(A'N)$ est parallèle à la droite (AM) alors la condition est réalisée (Propriété du papillon 2).

3.4. Proportionnalité entre aires et bases

Propriété des proportions

Soit M un point du côté $[BC]$ d'un triangle ABC. Les aires des triangles ABM et ACM sont proportionnelles aux longueurs BM et CM.

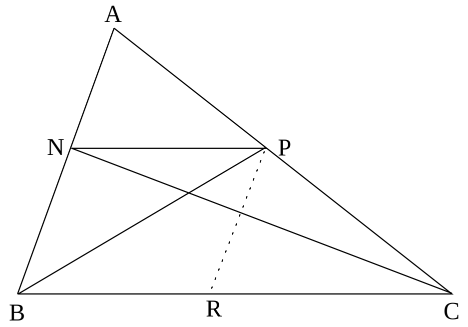


Cette propriété a été démontrée dans le cas où le point M est le milieu du côté $[BC]$. On peut alors démontrer cette propriété dans d'autres cas particuliers : si l'une des longueurs BM ou CM est multiple de l'autre, si les deux longueurs sont commensurables. On l'admet dans le cas général [a].

[a] en utilisant la formule donnant l'aire d'un triangle, la démonstration est évidente.

Application : le théorème de Thalès
On donne un triangle ABC, un point N intérieur au segment $[AB]$ et un point P intérieur au segment $[AC]$. Si (NP) est parallèle à (BC) alors on a

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{NP}{BC}.$$



Pour démontrer la première égalité, l'idée est de transformer les rapports de longueurs en des rapports d'aires. Or les deux triangles NBC et PBC ont même aire. Donc, plutôt que de calculer d'emblée

$$\frac{AN}{AB} \text{ et } \frac{AP}{AC} \text{ ,}$$

on calcule d'abord

$$\frac{NB}{AB} \text{ et } \frac{PC}{AC} \text{ .}$$

Pour démontrer la seconde égalité du théorème, il suffit de penser à tracer la parallèle à la droite (AB) passant par P : on pourra alors utiliser la première égalité appliquée au contexte ainsi créé.

Démonstration
D'après la propriété des proportions on a :

$$\frac{NB}{AB} = \frac{\text{Aire}(NBC)}{\text{Aire}(ABC)} \quad \text{et} \quad \frac{PC}{AC} = \frac{\text{Aire}(PCB)}{\text{Aire}(ACB)} \text{ .}$$

Les sommets N et P des deux triangles NBC et PBC sont situés sur une parallèle à leur base commune BC. Ils ont donc même aire par la propriété des trapèzes. On en déduit :

$$\frac{NB}{AB} = \frac{PC}{AC} \quad \text{et donc} \quad \frac{AN}{AB} = \frac{AP}{AC}.$$

La parallèle à la droite (AB) passant par P coupe le segment $[BC]$ en R. D'après la première égalité du théorème, on a

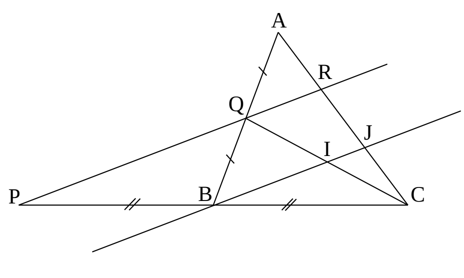
$$\frac{CP}{CA} = \frac{CR}{CB} \quad \text{d'où} \quad \frac{AP}{AC} = \frac{BR}{BC} \text{ .}$$

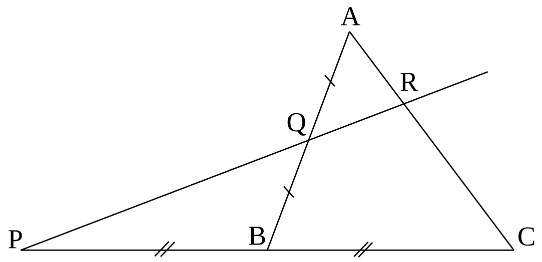
Comme $BR = NP$ on en déduit

$$\frac{AP}{AC} = \frac{NP}{BC} \text{ .}$$

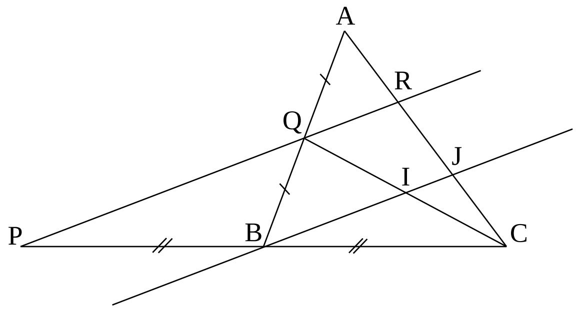
3.5. Aires et alignement

Problème
On donne un triangle ABC. On appelle P le symétrique de C par rapport à B et Q le milieu du côté $[AB]$. La droite (PQ) coupe le côté $[AC]$ en R. Dans quel rapport R partage-t-il $[AC]$?





On remarque l'existence de deux milieux dans les hypothèses et, de ce fait, on pense à une démonstration faisant appel à la propriété des milieux dans un triangle (théorème ou réciproque).



Démonstration sans l'aide des aires

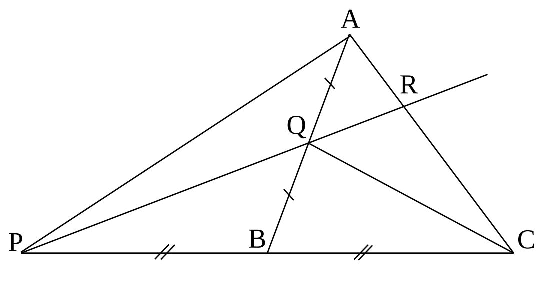
On trace la droite d passant par B et parallèle à la droite (PQ). Elle coupe (CQ) en I et (CR) en J. Le point B étant le milieu de $[CP]$, le point I est le milieu de $[CQ]$ (réciproque de la propriété de la droite des milieux). On démontre de façon analogue que J est le milieu de $[CR]$ et que R est le milieu de $[AJ]$.

Démonstration à l'aide des aires

En joignant A à P et C à Q, on fait apparaître différents triangles et différentes médianes. On utilise alors la propriété de la médiane (en raison des hypothèses) et celle des proportions (en raison de ce que l'on cherche) pour une démonstration utilisant les aires.

Plus précisément, on cherche à déterminer le rapport

$$k = \frac{CR}{CA}\,.$$



De l'alignement dans cet ordre des points P, Q et R, on déduit

$$\text{Aire}(CPR) = \text{Aire}(CPQ) + \text{Aire}(CQR).$$

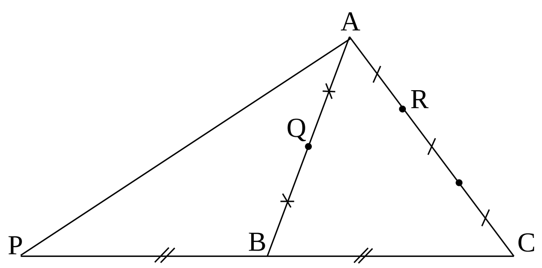
En calculant ces aires en fonction de celle de ABC on obtient

$$\text{Aire}(CPR) = k\,\text{Aire}(PAC) = k \times 2\,\text{Aire}(ABC)\,,$$
$$\text{Aire}(CPQ) = 2\,\text{Aire}(QBC) = \text{Aire}(ABC)\,,$$
$$\text{Aire}(CQR) = k\,\text{Aire}(QAC) = k \times \frac{1}{2}\,\text{Aire}(ABC)\,.$$

On en conclut que $2k = 1 + \dfrac{k}{2}$ d'où $k = \dfrac{2}{3}$.

Problème réciproque

On donne un triangle ABC. On appelle P le symétrique de C par rapport à B et Q le milieu du côté $[AB]$. R est situé au tiers de $[AC]$ à partir de A. Que peut-on dire des points P, Q et R ?



Démonstration à l'aide des aires

Pour démontrer que les points P, Q et R sont alignés, il suffit de démontrer l'égalité

$$\text{Aire}(CPR) = \text{Aire}(CPQ) + \text{Aire}(CQR)\,.$$

On a les égalités $\text{Aire}(CPQ) = 2\,\text{Aire}(QBC) = \text{Aire}(ABC)$;

$$\text{Aire}(CPR) = \frac{2}{3}\ \text{Aire}(PAC) = \frac{2}{3} \times 2\,\text{Aire}(ABC) = \frac{4}{3}\,\text{Aire}(ABC);$$

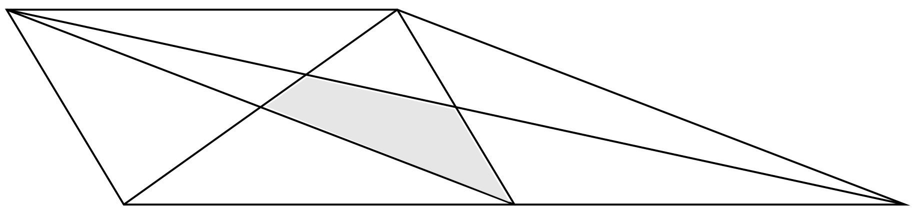
$$\text{Aire}(CQR) = \frac{2}{3}\,\text{Aire}(QAC) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\,\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{3}\,\text{Aire}(ABC).$$

On en déduit l'égalité cherchée. Les points P, Q et R sont donc alignés.

4. Pour ceux qui aiment relever des défis

4.1. Une figure qui manque d'aires

Enoncé dû à Elisabeth Busser et Gilles Cohen paru dans *Affaire de logique. Cent défis mathématiques du Monde* (tome 2) aux éditions Pole.

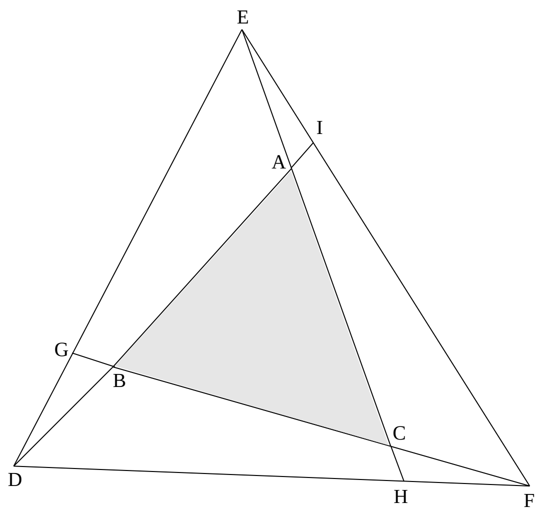


Cette figure, formée de deux parallélogrammes enchevêtrées et de leurs diagonales, comporte huit zones. Seule l'aire d'une des zones est donnée. Quelle est la valeur des sept aires inconnues ?

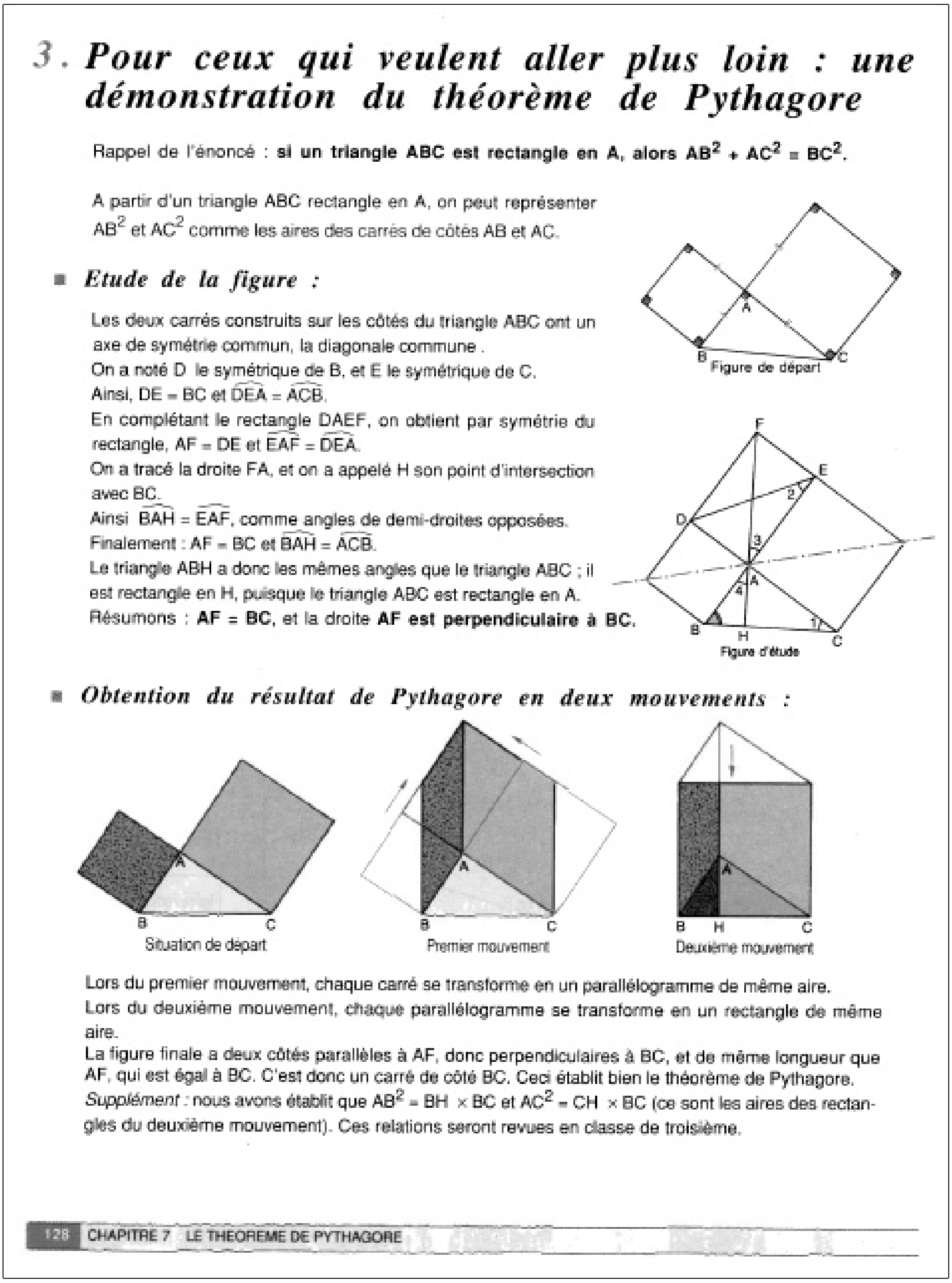
4.2. Le grand triangle

Enoncé dû à Elisabeth Busser et Gilles Cohen paru dans *Affaire de logique. Cent défis mathématiques du Monde* (tome 3) aux éditions Pole.

On prolonge les trois côtés d'un triangle ABC d'une longueur égale à la moitié du côté prolongé (comme sur le dessin) pour former un grand triangle DEF.
Quel est le rapport de l'aire du grand triangle ainsi construit sur celle du petit ?
Les trois côtés prolongés du petit triangle recoupent les côtés du grand triangle en trois points G, H, et I. Dans quel rapport ces points divisent-ils le côté qu'ils coupent ? (Par exemple, dans quel rapport G divise-t-il DE ?).



5. Une étude de la démonstration du théorème de Pythagore d'un manuel de quatrième de l'IREM de Strasbourg ([5]).



3. Pour ceux qui veulent aller plus loin : une démonstration du théorème de Pythagore

Rappel de l'énoncé : **si un triangle ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.**

A partir d'un triangle ABC rectangle en A, on peut représenter AB^2 et AC^2 comme les aires des carrés de côtés AB et AC.

Figure de départ

■ ***Etude de la figure :***

Les deux carrés construits sur les côtés du triangle ABC ont un axe de symétrie commun, la diagonale commune.
On a noté D le symétrique de B, et E le symétrique de C.
Ainsi, DE = BC et $\widehat{DEA} = \widehat{ACB}$.
En complétant le rectangle DAEF, on obtient par symétrie du rectangle, AF = DE et $\widehat{EAF} = \widehat{DEA}$.
On a tracé la droite FA, et on a appelé H son point d'intersection avec BC.
Ainsi $\widehat{BAH} = \widehat{EAF}$, comme angles de demi-droites opposées.
Finalement : AF = BC et $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$.
Le triangle ABH a donc les mêmes angles que le triangle ABC ; il est rectangle en H, puisque le triangle ABC est rectangle en A.
Résumons : **AF = BC**, et la droite **AF est perpendiculaire à BC.**

Figure d'étude

■ ***Obtention du résultat de Pythagore en deux mouvements :***

Situation de départ — Premier mouvement — Deuxième mouvement

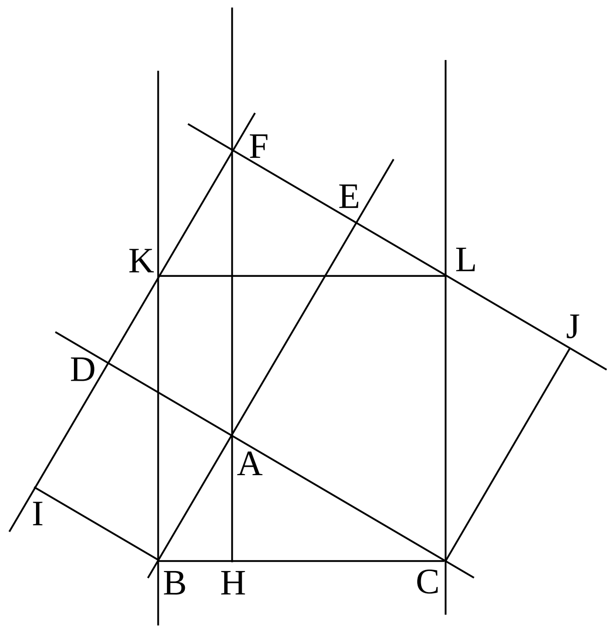
Lors du premier mouvement, chaque carré se transforme en un parallélogramme de même aire.
Lors du deuxième mouvement, chaque parallélogramme se transforme en un rectangle de même aire.
La figure finale a deux côtés parallèles à AF, donc perpendiculaires à BC, et de même longueur que AF, qui est égal à BC. C'est donc un carré de côté BC. Ceci établit bien le théorème de Pythagore.
Supplément : nous avons établit que $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times BC$ (ce sont les aires des rectangles du deuxième mouvement). Ces relations seront revues en classe de troisième.

128 CHAPITRE 7 LE THEOREME DE PYTHAGORE

Cette démonstration paraît bien compliquée : l'idée directrice, parce qu'elle n'est énoncée que partiellement, n'apparaît pas suffisamment clairement pour guider le raisonnement. De plus, la démonstration de la propriété étudiée à partir d'une symétrie axiale est parachutée et on n'en comprend la nécessité que par la suite. Pour finir, l'élève est appelé à suivre sur la figure cette démonstration et non à chercher les théorèmes appropriés pour bâtir une démonstration du théorème de Pythagore à partir d'une étude approfondie de la figure. Est-il possible de faire mieux ? Nous tentons de le faire avec la rédaction qui suit.

L'idée directrice de cette démonstration est d'interpréter AB^2, AC^2 et BC^2 comme les aires des carrés de côtés AB, AC et BC : les deux premiers étant construits, la résolution du problème consiste à construire un troisième carré qui réponde à la question.

Dans cette perspective, on construit une figure de travail :



On nomme les deux carrés déjà construits par leurs sommets : $ABID$, $ACJE$. On privilégie quatre directions de droites, à savoir celles des côtés de ces deux carrés, la direction de (BC) et la direction des perpendiculaires à (BC). Pour cela on trace les droites (ID) et (JE) qui se coupent en F, ainsi que les perpendiculaires à (BC) en B et C qui coupent respectivement (ID) et (JE) en K et L.

Il reste à démontrer que le quadrilatère $BCLK$ est un carré, et que son aire est égale à la somme de celles des carrés initiaux.

Observons de plus près cette figure. Il apparaît des carrés $ABID$ et $ACJE$ (par hypothèse) et $BCLK$ (à démontrer), des rectangles de côtés AD et AE (par hypothèse), de côtés BH et BK, de côtés CH et CL (à démontrer), des parallélogrammes $ABKF$ et $ACLF$ (à démontrer). Il apparaît aussi un axe de symétrie, à savoir la droite (IJ) qui passe par A. Pour démontrer que $BCLK$ est bien un carré et du même coup que les parallélogrammes et rectangles « apparus comme tels » le sont réellement, il suffit de démontrer que (AF) est perpendiculaire à (BC) et que AF = BC. La démonstration de ces deux assertions proposée par le manuel de l'IREM a alors sa place ici.

Il reste à trouver deux surfaces dont la réunion soit le carré $BCLK$ et dont les aires soient respectivement celles des carrés $ABID$ et $ACJE$. En n'oubliant pas qu'un rectangle donc un carré est un parallélogramme (particulier), on utilisera le théorème sur les parallélogrammes ayant un côté commun : ainsi, $ABID$ a même aire que $ABKF$ qui a même aire que le rectangle de côtés BH et BK (résultat analogue pour $ACJE$). Ceci permet de démontrer ce qui est évoqué par les « mouvements » qui figurent dans le manuel de l'IREM.

Cependant la démonstration reste difficile car formée de deux parties très distinctes. Mais le travail de visualisation conduisant à l'utilisation de résultats sur les aires et la démonstration qui en résulte peuvent constituer un exercice instructif en lycée.

Il est aussi possible de donner une explication visuelle de ce théorème. Raymond Duval ([3] figures 16 à 18) l'analyse de manière didactique en montrant les enjeux d'un tel apprentissage.

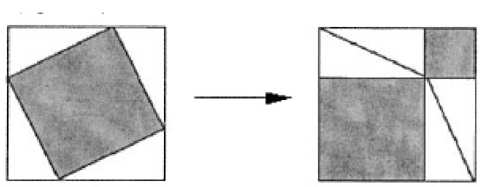


Figure 16

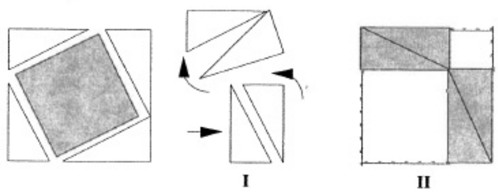


Figure 17

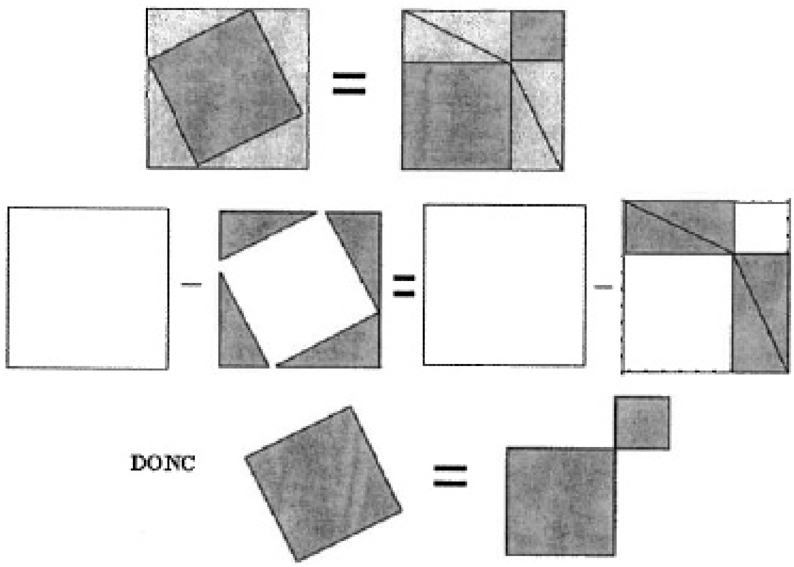


Figure 18

Conclusion

Quels enseignements tirer de ce qui précède ? Que demande la visualisation en mathématiques ?

◇ Savoir construire et lire une figure à travers ou en fonction de propriétés ou de conditions formulées comme hypothèses : ces hypothèses sont au départ celles de l'énoncé, mais peuvent s'enrichir de résultats acquis au fur et à mesure du déroulement de la démonstration ; ceci entraîne des modifications de la figure initiale ou une lecture différente de celle-ci.

◇ Appréhender toute figure de façon opératoire (voir le paragraphe 2) en y incluant d'éventuels tracés supplémentaires propres à trouver une procédure de résolution du problème posé.

Ainsi décrite, la visualisation en mathématiques est une véritable démarche mathématique.

Elle peut fonctionner de façon autonome. Son langage est celui de l'argumentation. Le raisonnement consiste à expliquer des traitements de figures et conduit à une justification de conjectures. Si on ne juge pas nécessaire de démontrer un résultat utile, on peut s'en tenir là à condition de dire explicitement qu'il ne s'agit pas de démonstration mais d'explication visuelle.

Elle remplit un rôle heuristique important lorsqu'elle fonctionne en interaction avec le discours déductif dans l'élaboration d'une démonstration. Elle aide à déterminer des processus de résolution, à énoncer des conjectures et à trouver des propriétés ou théorèmes à mettre en œuvre pour la démonstration.

Les exemples étudiés au paragraphe 3 (il y en a d'autres) montrent que les problèmes d'aires et, plus généralement, les situations géométriques susceptibles d'être résolues par les aires constituent un domaine particulièrement apte à l'apprentissage de la visualisation dans son fonctionnement propre et dans son rôle heuristique. L'importance du rôle de la visualisation dans le raisonnement géométrique mérite un apprentissage, tout autant que le raisonnement déductif. Il paraît donc intéressant de promouvoir un enseignement qui permettrait un apprentissage de traitements figuraux, en particulier de la reconfiguration qui a un rôle-clé pour trouver des sous-figures intéressantes lors de la résolution de problèmes de géométrie. La reconfiguration n'est pas le seul traitement figural qui rende compte du pouvoir heuristique des figures et n'est pas pertinente pour toutes les situations géométriques. Mais nous la privilégions pour deux raisons : la première est qu'elle a joué historiquement un grand rôle, la deuxième est que les situations géométriques présentées dans les premières années de collège relèvent de ce type de traitement purement figural. Il paraît donc essentiel de proposer dès le début du collège des exercices dont la résolution peut être obtenue par un traitement figural et où il est possible de donner une explication visuelle.

Bibliographie

[1] Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques (1997), *Mathématiques en classe de sixième. La mise en œuvre des programmes 96.*

[2] R. DUVAL (1995), Sémiosis et Noésis, *Peter Lang* .

[3] R. DUVAL (2005), *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements*, Annales de didactique et sciences cognitives, **10**, 5–53.

[4] A. LAUR (2006), *Démontrer par les aires*, Bulletin de l'Association des Professeurs de l'Enseignement Public, **463**, 201–211.

[5] IREM DE STRASBOURG (1988), Manuel de quatrième, *Istra.*

[6] D. PERRIN (2006), *Aires et volumes : découpage et recollement,* `euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/perrin/iprdp.pdf`

Michel DE COINTET
Marie-Agnès EGRET
IREM de Strasbourg
irem@math.u-strasbg.fr

Séries en série

Michel Émery

Résumé : Remarques sur des expressions de π comme somme de série.

Mots-clés : Pi - Série - Bailey Borwein Plouffe - Algorithme BBP.

La quête des valeurs approchées de π est presque aussi ancienne que les mathématiques elles-mêmes. Nous ne tenterons pas de l'esquisser ici (il y faudrait la plume d'un Lefort) ; de nombreux ouvrages, pour spécialistes ou pour un public plus large, s'y consacrent en partie ou en totalité, par exemple [4], qui rassemble un matériau impressionnant, tant historique que mathématique. L'un des moments marquants de cette histoire a été la découverte en 1997 par David H. Bailey, Peter B. Borwein et Simon Plouffe [3] de la formule

$$\pi = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{16^k}\Big(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\Big) ,$$

qui a pour la première fois permis de calculer des chiffres de π (en base 2) sans avoir besoin de calculer aussi tous les chiffres précédents. Elle a été obtenue par tâtonnements, à l'aide de programmes informatiques exploitant des coïncidences numériques. En recherchant systématiquement d'autres formules du même genre, Victor Adamchik et Stan Wagon [1] ont trouvé l'expression plus simple

$$\pi = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{4^k}\Big(\frac{2}{4k+1} + \frac{2}{4k+2} + \frac{1}{4k+3}\Big) . \tag{1}$$

S'il a fallu attendre la fin du XX$^\text{e}$ siècle et les calculs formels sur ordinateurs pour que ces formules soient découvertes, elles auraient pu l'être dès le XVIII$^\text{e}$; leur démonstration (entendez : leur vérification) ne nécessite aucun outil sophistiqué et peut se faire à la main. Il suffit en effet de sommer séparément les différents termes ; or, si $|x| < 1$, $a \geqslant 0$ et $b > 0$, on a la formule sommatoire

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{ak+b} = \sum_{k\geqslant 0} x^k \int_0^1 t^{ak+b-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{b-1} \sum_{k\geqslant 0} (xt^a)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1-xt^a}\,\mathrm{d}t ,$$

où l'échange des signes $\sum$ et $\int$ est justifié par le fait que tout reste fini lorsque x est remplacé par $|x|$. La quadrature s'effectue ensuite en factorisant le dénominateur (pour $a = 4$ ou 8, les racines a-ièmes de l'unité ne sont pas trop méchantes).

On peut également utiliser pour ces quadratures un programme de calcul formel ; c'est ainsi qu'ont procédé Adamchik et Wagon pour trouver la formule (1). Mais celle-ci peut aussi s'obtenir beaucoup plus élégamment : partons du développement en série entière

$$\log \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} , \tag{2}$$

qui converge dans le disque complexe $|z| < 1$, et où la détermination du logarithme est réelle pour z réel.[1] Appliquant (2) à $z = \frac{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et ne retenant que les parties imaginaires, on obtient l'égalité

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \, \frac{\sin(n\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}^{\,n}} \; ,$$

où les irrationnelles $\sqrt{2}$ s'éliminent, faisant apparaître (1). Cette disparition de $\sqrt{2}$ était prévisible a priori, z^n/n héritant de z la rationalité de ses parties réelle et imaginaire.

J'ignore à qui est due cette élégante démonstration ; elle est mentionnée dans la section 2 de l'article [2] de Bailey, où π n'est qu'un élément d'une liste impressionnante de constantes obtenues par cette méthode.

Sans nous aventurer dans cette jungle de constantes, et en restant fidèle à π, nous allons nous livrer à deux variations sur ce qui précède. Elles peuvent être lues indépendamment l'une de l'autre (ou ne pas être lues du tout, l'élégant argument ci-dessus récompensant amplement le lecteur qui nous a déjà suivi jusqu'ici).

Notre **première variation** va consister à appliquer (2) à des valeurs de z autres que $(1+\mathrm{i})/2$. Mentionnons auparavant pour mémoire les z imaginaires purs, qui donnent la formule classique

$$\arctan t = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \, \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \; ,$$

valable pour $|t| < 1$. Cette formule était l'un des outils utilisés voici trois siècles par John Machin pour calculer π à 10^{-100} près (pour plus de détails, voir par exemple [4] ; voir aussi l'article [5] de Raymond Seroul dans L'Ouvert n° 45 de décembre 1986).

Il y a d'ailleurs un autre développement,

$$\arctan t = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \, \frac{\operatorname{Im}(\mathrm{i}t + t^2)^n}{(1+t^2)^n} \; , \tag{3}$$

obtenu pour $z = \frac{\mathrm{i}t+t^2}{1+t^2}$, c'est-à-dire z sur le cercle de diamètre $[0,1]$. Ce développement converge pour tout t réel, plus rapidement que le précédent ; mais le gain en vitesse est faible pour t petit, et la formule beaucoup moins commode — sauf pour $t = 1$, où l'on retrouve (1).

Mais revenons à π. Nous allons choisir z sur le segment joignant 1 à i ; il suffit pour cela de prendre $a > 0$ et $b > 0$, et de poser $z = \frac{a+\mathrm{i}b}{a+b}$. On obtient ainsi l'identité

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \, \frac{\operatorname{Im}(a+\mathrm{i}b)^n}{(a+b)^n} \; , \tag{4}$$

dont (1) est le cas particulier correspondant à $a = b$. Des choix de a et b tels que $a+b$ vaille 10 ou 100 pourraient être commodes pour des calculs à la main en base 10 ; mais j'avoue ne pas avoir eu le courage d'essayer.

[1] Ceci peut se voir sans recours à l'analyse complexe, en observant que la somme $S(z)$ de la série (2) est continue en z et vérifie $\exp S(z) = 1 + z + z^2 + \ldots = 1/(1-z)$. Obtenue par substitution de la série S dans la série définissant l'exponentielle, cette dernière identité ne nécessite aucun calcul : pour en identifier les coefficients, il suffit de la savoir vraie pour z réel ! Rappelons que $\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$, où $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$.

Pour $0 < \theta < \pi$, en choisissant $z = \cos\theta\, e^{i\theta}$ dans (2), on obtient

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \cos^n \theta \sin(n\theta) ,$$

qui n'est qu'une réécriture de (3) puisque z est sur le cercle de diamètre $[0,1]$; lorsque $\theta = \frac{\pi}{4}$, on retrouve bien sûr (1). En remplaçant θ par $\frac{\pi}{2} - \theta$ et en additionnant, on parvient à

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \left[\cos^n \theta \sin(n\theta) + \sin^n \theta \sin(n\frac{\pi}{2} - n\theta)\right] ,$$

valide pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Substituant maintenant $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ à $\cos\theta$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ à $\sin\theta$, on obtient pour tous $a > 0$ et $b > 0$ l'identité

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Im} \frac{a^n\,(a+ib)^n + b^n\,(b+ia)^n}{n\,(a^2+b^2)^n} ,$$

qui rappelle (4), mais en plus compliqué. Ici encore, des choix tels que $a^2 + b^2 = 10$ ou 100 se prêteraient peut-être au calcul manuel.

Passons à la **seconde variation**. Conservant à z la valeur $(1+i)/2$, nous utiliserons un autre développement, plus rapide, de $\log\bigl(1/(1-z)\bigr)$: pour tout z tel que $|z| < 1$ et tout entier $p \geqslant 0$, on a

$$\log \frac{1}{1-z} = -\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m}\Bigl(\frac{-z}{1-z}\Bigr)^m + p!\,\Bigl(\frac{-z}{1-z}\Bigr)^p \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{(n)_{p+1}} , \tag{5}$$

où $(n)_{p+1}$ désigne la factorielle montante $n(n+1)...(n+p)$. Lorsque $p = 0$, cette formule n'est autre que (2). Pour p quelconque, on peut la déduire du développement en série entière de $(1-z)^p \log\bigl(1/(1-z)\bigr)$ dans le disque $|z| < 1$; on peut aussi la vérifier par récurrence sur p, en s'assurant que le second membre est le même pour $p-1$ et p à l'aide de l'identité élémentaire

$$(1-z) \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{(n)_p} + p \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{n+1}}{(n)_{p+1}} = \frac{z}{p!} .$$

Il ne reste qu'à fixer $z = \frac{1}{2}(1+i)$ dans (5) pour obtenir

$$\log\sqrt{2} + i\,\frac{\pi}{4} = -\sum_{m=1}^{p} \frac{(-i)^m}{m} + p! \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{i(n-2p)\pi/4}}{\sqrt{2}^{\,n}(n)_{p+1}} ,$$

et à prendre des deux côtés les parties imaginaires : pour chaque $p \geqslant 0$, ceci fournit π comme somme d'une série à termes rationnels. Quand $p = 0$, on retombe naturellement sur la formule (1) d'Adamchik et Wagon. Pour chaque $p > 0$, on dispose d'une nouvelle formule ; par exemple les cinq premières, obtenues pour p allant de 1 à 5, sont

$$\pi = 3 + \frac{1}{2} \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \Big(\frac{2}{(4k+3)_2} + \frac{2}{(4k+4)_2} + \frac{1}{(4k+5)_2} \Big) \ ;$$

$$\pi = 4 - 2 \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \Big(\frac{2}{(4k+1)_3} + \frac{2}{(4k+2)_3} + \frac{1}{(4k+3)_3} \Big) \ ;$$

$$\pi = \frac{19}{6} - 3 \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \Big(\frac{2}{(4k+3)_4} + \frac{2}{(4k+4)_4} + \frac{1}{(4k+5)_4} \Big) \ ;$$

$$\pi = \frac{8}{3} + 24 \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \Big(\frac{2}{(4k+1)_5} + \frac{2}{(4k+2)_5} + \frac{1}{(4k+3)_5} \Big) \ ;$$

$$\pi = \frac{47}{15} + 60 \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \Big(\frac{2}{(4k+3)_6} + \frac{2}{(4k+4)_6} + \frac{1}{(4k+5)_6} \Big) \ .$$

Curieusement, la quatrième se réécrit

$$\pi = \frac{8}{3} + 120 \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \ \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+6)(4k+7)} \ ;$$

je ne m'explique pas cette simplification pour la seule valeur $p = 4$.

En prenant les parties réelles au lieu des parties imaginaires, on aurait obtenu une famille infinie de développements de $\log 2$, et, pour $p = 4$, la réécriture

$$\log 2 = \frac{7}{10} - 30 \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \ \frac{1}{(4k+3)(4k+4)(4k+5)(4k+8)(4k+9)} \ ;$$

mais j'avais promis de m'en tenir à π.

Tout comme pour (1), chacune de ces formules peut aussi être vérifiée en décomposant tous les termes en éléments simples et en sommant séparément les séries obtenues.

Bibliographie

[1] V. Adamchik & S. Wagon (1997), *A Simple Formula for Pi*, Amer. Math. Monthly **104**, 852–855.

[2] D.H. Bailey (2004), *A compendium of BBP-type formulas for mathematical constants*, n° 43 dans la liste `http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/`

[3] D.H. Bailey, P.B. Borwein & S. Plouffe (1997), *On The Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants*, Mathematics of Computation **66**, n° 218, 903–913, `http://www.ams.org/journals/mcom/1997-66-218/home.html`

[4] L. Berggren, J.M. Borwein & P.B. Borwein (2004), Pi: a source book (3e édition), *Springer-Verlag*.

[5] R. Seroul (1986), *Formules à la Machin*, L'Ouvert **45**, 14–27.

Michel Émery
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
67 084 Strasbourg Cedex
`emery@math.u-strasbg.fr`

Des tresses, des élèves

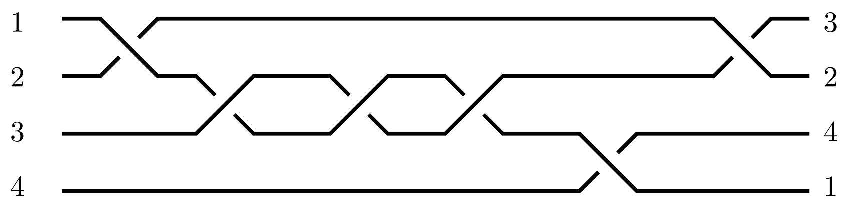
Francis Jamm

Résumé : Cet article présente un travail sur les tresses, réalisé par des élèves, dans le cadre d'un club scientifique. En manipulant des bouts de ficelle ils ont, peu à peu, découvert les premières notions de la théorie des groupes. Leur grand étonnement a été de voir, que non seulement il y avait des mathématiques dans un sujet aussi banal, mais qu'en plus ce sont elles qui permettaient de progresser dans l'étude des tresses.

Mots-clés : Tresses - Réduction des tresses - Groupe des tresses - Groupe - Groupe quotient - Générateurs - Relations - Classe d'équivalence - Isotopie - Dénombrement - Croisement - Cryptographie - Nœuds - Dehornoy - Club scientifique - Atelier mathématique - APMEP 2005 Caen - Lycée Lavoisier Mulhouse.

Le nœud gordien a pour fils les entrelacs celtiques et pour filles les tresses. Si ces dernières comptaient conserver leurs secrets, elles doivent être bien désappointées. Car c'était sans compter avec la sagacité d'un groupe d'élèves, qui, dans le cadre d'un club scientifique en TS, a entrepris d'en percer les mystères.

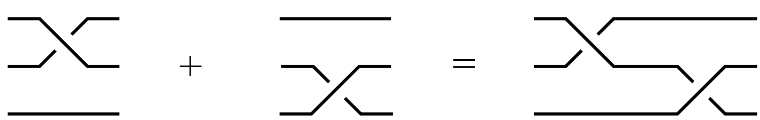
Une tresse, ce sont des brins qui se croisent. Par exemple :



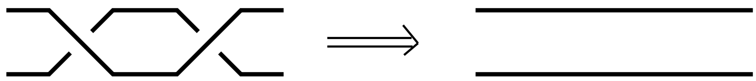
Sans déflorer le sujet, mais pour donner un fil d'Ariane, disons tout de suite que les tresses à n brins forment un ensemble quotient qui peut être muni d'une structure de groupe, non abélien, défini par générateurs et relations. C'est la découverte de ces notions par les élèves que relate cet article.

1. Les débuts

A la première séance, j'apporte des bouts de grosse laine aux couleurs vives. Les élèves voient tout de suite que l'opération élémentaire est le croisement de deux brins adjacents, avec deux cas possibles, par-dessus et par-dessous. Ensuite par concaténation de tels croisements on obtient une tresse.

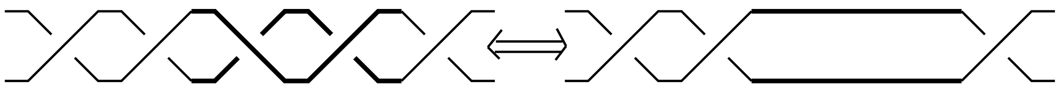


Rapidement ils constatent que certaines tresses ne sont pas tressées du tout ! Une tresse est réellement tressée si, en tirant sur les brins, sans modifier leur ordre aux extrémités, on n'obtient pas des brins parallèles. Un exemple trivial de tresse non réellement tressée est :



D'emblée, une élève dit : « Si on appelle le premier croisement 1 et le second -1, alors c'est comme 1 - 1 = 0 ». Ils appellent une telle tresse *une tresse nulle.* Là, je sens que c'est bien parti pour explorer les groupes de tresses.

Dans la foulée les élèves décident que deux tresses qui diffèrent seulement par de tels croisements, donc par des tresses nulles, seront déclarées égales. Il s'agit en fait de *l'isotopie* des tresses qui est une relation d'équivalence.



Pour s'en convaincre on réalise deux telles tresses, puis on tire sur les brins, sans modifier leur ordre en bout de tresse, et on constate que l'on obtient alors deux tresses identiques. Ils appellent vraie tresse une tresse débarrassée de ces croisement inutiles ; donc une classe d'équivalence pour l'isotopie.

Ils décident de noter $T_{i,i+1}$ le croisement où le brin i passe au-dessus du brin $i+1$; et $\overline{T}_{i,i+1}$ le croisement où le brin i passe en dessous du brin $i+1$.

i

$i+1$

$T_{i,i+1}$ $\overline{T}_{i,i+1}$

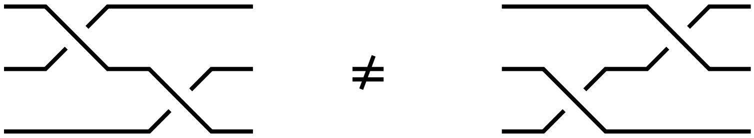
Il est clair que : $T_{i,i+1}\overline{T}_{i,i+1} = \overline{T}_{i,i+1}T_{i,i+1} = 0$.

Une vraie tresse est définie par une formule du genre $T_{12}\overline{T}_{23}\overline{T}_{23}\overline{T}_{23}T_{34}T_{12}$ (voir le premier dessin). Ils constatent vite que $T_{12}T_{23}$ est différent de $T_{23}T_{12}$. Tout simplement car l'ordre des brins à l'arrivée n'est pas le même. Et voilà la non communtativité ; mais nous y reviendrons.

1

2

3

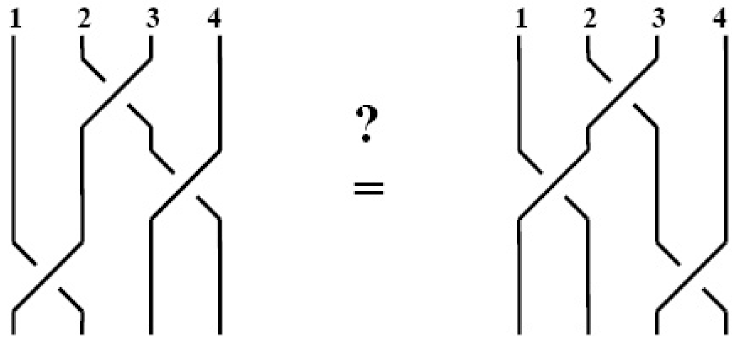


$T_{12}\ T_{23}$ $T_{23}\ T_{12}$

2. L'inverse d'une tresse

Ils construisent alors $T_{12}\ T_{34}\ T_{23}\ \overline{T}_{23}\ \overline{T}_{34}\ \overline{T}_{12}$ qui est la tresse nulle, découvrant ainsi que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Ils appellent $\overline{T}_{23}\ \overline{T}_{34}\ \overline{T}_{12}$ la *tresse inverse de* $T_{12}\ T_{34}\ T_{23}$. Oui je sais, ils mélangent un peu le vocabulaire des lois additives et multiplicatives. Toute tresse admet donc un inverse ; et ils ont un procédé pour le construire.

Constatant la symétrie de cette tresse nulle ainsi obtenue ; ils se posent alors la question de savoir si toute tresse nulle admet un axe de symétrie. Ils découvrent alors que l'on a aussi $T_{12}\ T_{34}\ T_{23}\ \overline{T}_{23}\ \overline{T}_{12}\ \overline{T}_{34} = 0$. Comment font ils ? Mais tout simplement ils réalisent la tresse, puis tirent sur les brins et obtiennent des brins parallèles, donc la tresse nulle. Doit-on en déduire que l'on a $\overline{T}_{23}\ \overline{T}_{34}\ \overline{T}_{12} = \overline{T}_{23}\ \overline{T}_{12}\ \overline{T}_{34}$?



Visuellement la réponse est oui, car on passe de l'une à l'autre en faisant glisser les croisement sans en créer de nouveaux. Plus rigoureusement ils décident de dire que

$$T = T' \text{ si et seulement si } T\,\overline{T'} = 0 \ .$$

Ici on a donc $\overline{T}_{23}\ \overline{T}_{34}\ \overline{T}_{12}\ (\overline{T}_{23}\ \overline{T}_{12}\ \overline{T}_{34})^{-1} = \overline{T}_{23}\ \overline{T}_{34}\ \overline{T}_{12}\ T_{34}\ T_{12}\ T_{23}$. Quand on réalise cette tresse, et que l'on tire sur les brins on aboutit à la tresse nulle. Donc, par glissement des brins, on peut permuter deux croisements, pourvu qu'ils portent sur des brins distincts. C'est-à-dire

$$T_{i,i+1}\,T_{k,k+1} = T_{k,k+1}\,T_{i,i+1} \text{ ssi } |i-k| \geqslant 2 \ .$$

Et voilà pour la deuxième relation.

Toute tresse admet une tresse inverse. Mais est-elle unique ? Ils chercheront un bon moment avant de se lasser. Plus tard, je ferai un topo sur les groupes et leur démontrerai l'unicité de l'élément réciproque dans tout groupe. Pour le moment, ils concluent joliment qu'il existe une tresse inverse mais « écrivable » de plusieurs façons.

3. Dénombrement des tresses

3.1. Tresses à deux croisements

A ce stade ils posent la question de savoir combien il existe de vraies tresses à n brins et p croisements. Avec n brins et un croisement, il existe $2(n-1)$ cas à savoir T_{12} jusqu'à $T_{n-1,n}$ et leurs inverses. Pour les tresses à deux brins et p croisements, il n'y a que deux cas $T_{12}.....T_{12}$ (p fois) et son inverse.

Avec 3 brins et 2 croisements on a 12 cas, hormis la tresse nulle. Dans cette activité, mon principal rôle est de tenir la craie et de coucher sur le tableau les idées des élèves. Je trouve leur notation $T_{i,i+1}$ lourde et leur propose de noter T_{12} par a, T_{23} par b et par A et B leur inverses.

Les 12 cas s'écrivent alors :

aa	ab	aB	AA	Ab	AB
ba	bA	bb	Ba	BA	BB

Par une disposition astucieuse des différents cas, ils montrent, de proche en proche, que pour les tresses à deux croisements il y a, hormis la tresse nulle, 26 cas pour 4 brins, 44 pour 5 brins et 66 pour 6 brins.

Avec 3 brins

1er croisement	2ème croisement	1er croisement	2ème croisement
a	a, b, B	A	A, b, B
b	a, A, b	B	a, A, B

On retrouve les 12 cas précités.

Avec 4 brins

On note « c » le croisement du troisième brin sur le quatrième et « C » son inverse. Comme « a » et« c » portent sur des brins indépendants, il faut éliminer les doublons : ac, aC, Ac et AC. Les cas n'apparaissant pas dans le tableau précédent sont signalés par des fontes grasses.

1er croisement	2ème croisement	1er croisement	2ème croisement
a	a, b, B, **c**	A	A, b, B, **C**
b	a, A, b, **c, C**	B	a, A, B, **c, C**
c	**A, b, B, C**	**C**	**A, b, B, C**

On retrouve 26 cas.

Avec 5 brins

On note « d » le croisement du quatrième brin sur le cinquième et « D » son inverse. Il faut éviter les doublons portant sur des brins non adjacents, donc sur des lettres non consécutives.

1er croisement	2ème croisement	1er croisement	2ème croisement
a	a, b, B, c, **d**	A	A, b, B, C, **D**
b	a, A, b, c, C, **d**	B	a, A, B, c, C, **D**
c	A, b, B, C, **d, D**	C	A, b, B, C, **d, D**
d	**a, B, c, C, d**	**D**	**a, b, c, C, D**

On retrouve les 44 cas.

Les élèves sont allés jusqu'aux tresses à 6 brins.

La séance suivante, ils ont montré qu'il existe $2n^2 - 6$ tresses à n brins et deux croisements, hormis la tresse nulle. Voici comment ils ont procédé. Il faut dire, à leur décharge, qu'ils ne connaissaient ni les dénombrements ni le raisonnement par récurrence ; mais ils auraient pu avoir l'idée d'un tableau.

On note t_i le croisement du $i^{\text{ème}}$ brin sur le suivant et T_i son inverse. Avec n brins il existe $2n - 2$ croisements possibles, i variant de 1 à $n - 1$.

Il y a	$(2n-2)^2$	couples possibles (sans aucune condition) ;
on ôte	$2n-2$	cas t_iT_i ou T_it_i qui donnent la tresse nulle ;
on ôte	$2n-2$	cas t_it_i ou T_iT_i ;
il reste	$(2n-2)^2-2(2n-2)$	cas qui correspondent à i différent de j ;
on divise par 2, d'où	$2(n-1)^2-(2n-2)$	cas qui correspondent à $i<j$;
on ajoute	$2n-2$	on remet les cas t_it_i et T_iT_i ;
il reste	$2(n-1)^2$	cas qui correspondent à $i \leqslant j$;
on ajoute	$4(n-2)$	cas qui correspondent aux croisements : $t_{i+1}t_i$, $t_{i+1}T_i$,T_{i+1} t_i, T_{i+1} T_i (donc non communtatifs) avec $i>j$.
On obtient	$2n^2-6$.	

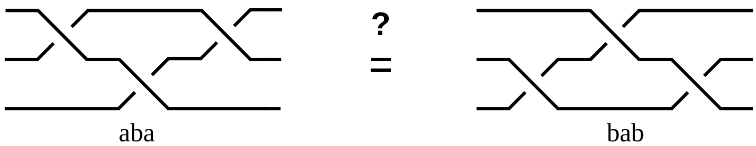
3.2. Tresses à trois croisements

Pour 3 brins et 3 croisements on ajoute a,b,A ou B à droite des cas à deux croisements en évitant de former une sous-tresse nulle. On trouve :

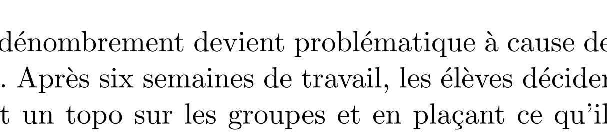
aaa	baa	Baa	**aba**	bba	Aba	**aBa**	ABa	BBa
aab	**bab**	Bab	**bAb**	BAb	Aab	abb	bbb	Abb
bAA	BAA	AAA	abA	bbA	**AbA**	aBA	**ABA**	BBA
aaB	baB	**BaB**	bAB	**BAB**	AAb	aBB	ABB	BBB

4. La troisième relation

Les cas en caractères gras posent problème. Examinons les de plus près.



Les avis sont partagés quant à l'égalité de ces deux tresses. Pour en décider construisons abaBAB.



En tirant sur les brins on obtient la tresse nulle. On a donc bien aba = bab. Et voilà la troisième relation.

Arrivé à ce stade, le dénombrement devient problématique à cause des cas d'égalité qu'engendre cette relation. Après six semaines de travail, les élèves décident de faire une pause. Je termine en faisant un topo sur les groupes et en plaçant ce qu'ils ont trouvé dans ce cadre.

5. Le groupe des tresses

Les tresses physiques sont des objets tridimensionnels que l'on représente par des diagrammes plans. Ces diagrammes sont codés par les croisements élémentaires

$$\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1} \cdots \sigma_{n-1}^{\pm 1} ,$$

où σ_i^1 représente le croisement du $i^{\text{ème}}$ brin sur le $(i+1)^{\text{ème}}$ et σ_i^{-1} le même croisement dans l'autre sens. Une tresse à n brins est représentée par la concaténation de tels croisements, on parle de « mots de tresses ».

L'ensemble des diagrammes à n brins, muni de l'opération de concaténation, a une structure de monoïde. En effet, il n'y pas unicité de l'inverse. L'isotopie des diagrammes est une relation d'équivalence compatible avec la concaténation et induit donc une opération des classes. Des mots différents peuvent coder la même tresse ; par exemple $\sigma_1\sigma_3$ et $\sigma_3\sigma_1$. On a les relations suivantes, avec $\cong$ pour l'isotopie et ϵ pour le mot vide :

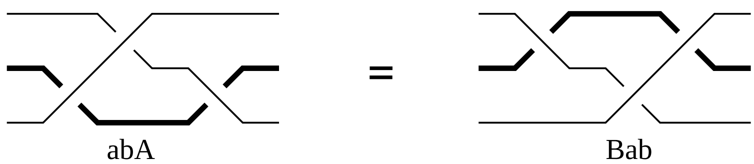
$$\forall (i;j) \in [1, n-1], \begin{cases} |i-j| = 1 \Longrightarrow \sigma_i\sigma_j\sigma_i \cong \sigma_j\sigma_i\sigma_j , \\ |i-j| > 1 \Longrightarrow \sigma_i\sigma_j \cong \sigma_j\sigma_i , \end{cases}$$
$$\forall (i;j) \in [1, n-1], \ \sigma_i\sigma_i^{-1} \cong \sigma_i^{-1}\sigma_i \cong \epsilon .$$

En passant au quotient, on obtient le groupe des tresses à n brins, qui est noté B_n. Les tresses à deux brins ont une structure isomorphe à $(\mathbf{Z}, +)$. Que deux tresses sont isotopes si et seulement on peut passer de l'une à l'autre à l'aide des relations ci-dessus a été démontré par ARTIN.

De tout ce jargon, un peu impressionnant pour eux, ils voient des liens avec des choses connues, comme la relation de congruence. Ils passent une séance à jouer les Monsieur Jourdain en découvrant qu'ils connaissaient, sans le savoir, plein de groupes et d'ensembles quotients. J'en profite pour leur montrer des groupes finis isomorphes ou non. Je fus impressionné quand une élève me déclara : « Oui, c'est comme avec le log entre $(\mathbf{R}_+^*, \times)$ et $(\mathbf{R}, +)$. »

6. La réduction des tresses

Les élèves constatent que abA est isotope à Bab ; en effet il suffit de tirer sur le brin en gras sans créer de nouveau croisement. Dans le jargon des tresses on parle de poignée.



Ils pensent avoir trouvé une nouvelle relation. Je leur explique que toute nouvelle « formule » doit découler des relations qui définissent le groupe de tresses. Et c'est la découverte de ce que peut être le calcul algébrique :

$$\text{abA} = \text{BbabA} = \text{BabaA} = \text{Bab} .$$

De la même manière on a

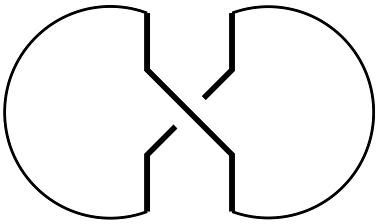
$$\text{aBA} = \text{BAb}, \text{Aba} = \text{baB et ABa} = \text{bAB} .$$

Par exemple la tresse ABAbab est clairement isotope à la tresse nulle si on fait le dessin. On le retrouve avec

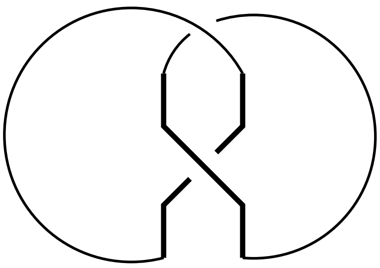
$$\mathrm{A}\mathbf{BAb}\mathrm{ab} = \mathrm{A}\mathbf{aBA}\mathrm{ab} = \mathrm{Bb} = 0\ .$$

7. Et les nœuds ?

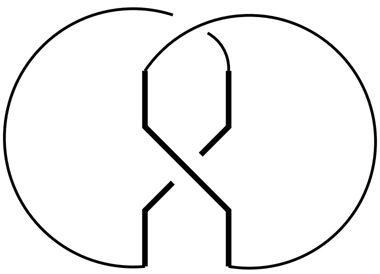
Dans un deuxième temps, les élèves se sont essayés aux nœuds. En effet, quand on noue les brins d'une tresse on obtient un nœud. La première difficulté est de savoir comment nouer une tresse. Avec la tresse la plus simple il y a déjà trois possibilités.



Qui donne un cercle.



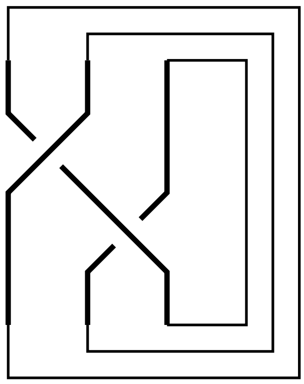
Qui donne deux cercles enlacés.



Qui donne deux cercles disjoints.

C'est la première méthode qui semble devoir être retenue puisqu'elle n'introduit pas de croisement supplémentaire.

La question est de savoir si deux tresses non isotopes donnent toujours des nœuds différents. La réponse est non. L'exemple ci-contre donne aussi un nœud réduit à un cercle.



Nous ne sommes pas allés plus loin ; entre autres, car il était difficile et long de réaliser des nœuds à partir de tresses.

8. Cryptographie

A la fin de cette étude que les élèves ont menée pour elle-même, ils se sont posé la question des applications possibles. Comme ils avaient vu le système RSA en arithmétique, je leur ai montré que les tresses pouvaient servir en cryptographie.

Soit p une clé publique dans le groupe des tresses à $2n$ brins que Alice et Bob décident d'utiliser.
Alice choisit la tresse a qui porte sur les brins de 1 à n et envoie à Bob $p_A = apA$.
Bob choisit la tresse b qui porte sur les brins $n+1$ à $2n$ et envoie à Alice $p_B = bpB$.
Alors on a $ab = ba$ car ils portent sur deux groupes de brins disjoints.
Maintenant Alice et Bob calculent leur clé commune et secrète s.
Alice calcule $ap_B\ A$ et Bob calcule bp_AB.
Le nœud de l'affaire est que $ap_BA = abpBA = bp_AB$.
Ils ont maintenant une clé commune $s = ap_BA = bp_AB$.
Tirer a ou b de (p, apA)ou de (p, bpB) est très difficile.
Soit M le message à envoyer. On envoie sMs^{-1} qu'il suffit de décoder avec $s^{-1}sMs^{-1}s = M$.

Perspectives et conclusions

Partis comme l'étaient les élèves pour explorer les groupes, ils auraient pu, avec un peu de directivité de ma part, s'attaquer par exemple aux deux résultats suivants.

A chaque tresse on peut associer la permutation qu'elle réalise entre la position des brins au départ et à l'arrivée. En fait, les tresses sont les permutations plus la mémoire de la façon dont cette permutation a été réalisée. Les tresses dont la permutation associée est l'identité forment un sous-groupe distingué du goupe B_n.

Le groupe B_n est engendré par σ_1 et $t = \sigma_{n-1} \cdots \sigma_2\sigma_1$. En effet pour tout i dans $[1, n-1]$ on a :

$$\begin{aligned}
t\sigma_{i+1} &= \sigma_{n-1} \cdots \sigma_{i+2}\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1\boldsymbol{\sigma_{i+1}} \\
&= \sigma_{n-1} \cdots \sigma_{i+2}\sigma_{i+1}\sigma_i\boldsymbol{\sigma_{i+1}}\sigma_{i-1}.\cdots \sigma_1 \text{ (car } \sigma_{i+1} \text{ permute avec } \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) \\
&= \sigma_{n-1} \cdots \sigma_{i+2}\boldsymbol{\sigma_i}\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 \text{ (car } aba = bab) \\
&= \boldsymbol{\sigma_i}\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{i+2}\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 \text{ (car } \sigma_i \text{ permute avec } \sigma_{n-1} \cdots \sigma_{i+2}) \\
&= \sigma_i t\ .
\end{aligned}$$

Donc $\sigma_{i+1} = t^{-1}\sigma_i t$. Et par itération on obtient tous les générateurs de B_n.

Je dois à la remarquable conférence faite lors des journées de l'APMEP en 2005 à Caen, par M. Patrick Dehornoy ([2]), de m'être lancé dans ce travail. Le sujet est tout de même assez ardu pour des lycéens et j'ai vu fondre les effectifs. A la fin, il restait une grosse demi-douzaine d'élèves, dont une fille, acharnée par le sujet et qui s'était joliment tressé les cheveux durant l'année ! Les garçons participaient bien, mais certains en renâclant. Pour une fois que j'avais des filles en club scientifique j'ai passé outre et maintenu ce sujet. Un des grands moments a été quand elles nous ont montré comment faire des nattes à quatres brins.

Bibliographie

[1] P. DEHORNOY (1997), *L'art de tresser*, Dossier HS Pour la Science, La science des nœuds, 68–74.

[2] P. DEHORNOY (2006), *Le calcul des tresses*, Bulletin de l'APMEP, **465**, 465–476.

[3] T. AUBRIOT & E. WAGNER (2006), *Des tresses et des nœuds mathématiques*, L'OUVERT **113**, 1–16.

[4] Le site de P. DEHORNOY spécialiste des tresses, `www.math.unicaen.fr/~dehornoy`

[5] Pour débuter, la page des tresses de Alexandre BENOIT, `wwww.chez.com/alexandrebenoit`

[6] Une page avec des questions, ce qui est bien dans l'esprit d'ANIMATH, `wwww.animath.fr/UE/autres/tresses`

Francis JAMM
Lycée Lavoisier
Mulhouse
francis.jamm@ac-strasbourg.fr

MATHÉMATIQUES ET PHILOSOPHIE DANS LE TEXTE DES *PENSÉES* DE PASCAL

Nadine MEYER, Martin DUMONT

Résumé : Un professeur de philosophie et un professeur de mathématiques dialoguent et livrent leur interprétation de textes extraits des *Pensées* de PASCAL.

Mots-clés : Mathématiques et Philosophie – Interdisciplinarité – Pascal – Pensées

Le départ...

Le texte des *Pensées* de PASCAL, apologie inachevée de la religion chrétienne, contient de nombreuses références aux mathématiques directes ou implicites. Ce qui n'a rien de surprenant puisque PASCAL est un des plus grands mathématiciens de son époque et qu'il a, avant ce texte, rédigé la plupart des résultats de ses travaux mathématiques.

Dans le cadre d'un groupe IREM travaillant sur l'interdisciplinarité, nous (Martin DUMONT, professeur de philosophie et Nadine MEYER, professeur de mathématiques) avions relevé une partie de ces références pour les commenter dans leur contexte. C'est notre dialogue sur quelques extraits, nourri de nos points de vue disciplinaires, qui est reproduit ici.

L'œuvre étudiée

Cette œuvre de PASCAL , les *Pensées*, est un recueil de réflexions plus ou moins développées sur l'homme et la religion. Ces pensées ont été rassemblées et ordonnées après la mort de PASCAL , fidèlement à ce que PASCAL souhaitait en faire : une interrogation sur l'existence humaine et un cheminement vers la foi. De ce fait, on distingue principalement deux parties dans l'œuvre :

- d'abord des réflexions qui concernent l'homme et sa place dans l'univers et dont le but est de déstabiliser le lecteur,
- puis, des pensées qui présentent la conversion à la religion chrétienne comme seul but sensé.

Ainsi, lorsque des mathématiques apparaissent dans le texte de PASCAL, c'est

- d'abord sous forme d'images pour parler de l'homme, de l'univers et de Dieu,
- ensuite comme procédés de conviction pour amener à la conversion.

Notre travail a débuté par le texte intitulé *Les deux infinis* [185] et a fini par le texte intitulé *Le Pari* [397]. Des extraits de ces textes sont reproduits en annexes. D'autres fragments des *Pensées* sont cités dans le texte accompagnés de leur référence dans la nouvelle édition des *Pensées* de PASCAL par Michel LE GUERN. Noter que cette édition contient une table de correspondance avec les autres éditions.

1. Les images pour Dieu et l'univers

Le point de vue de la prof de maths

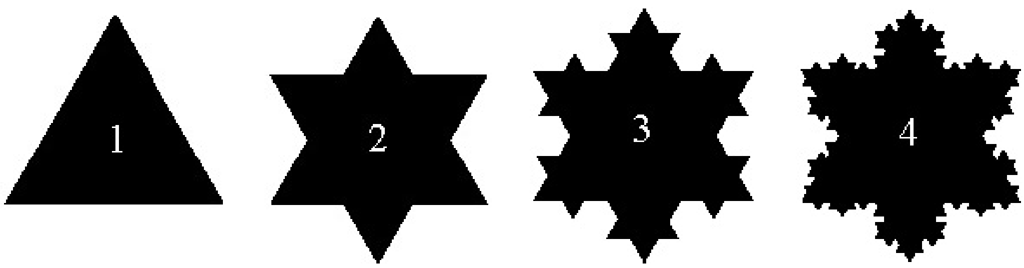
1.1. Deux infinis dans la nature

« *Que l'homme contemple donc la nature entière...* » ; ces mots d'introduction au texte des deux infinis de Pascal sont une invitation à la redécouverte et à la contemplation humble de notre environnement, décrit comme un univers vertigineux et déstabilisant. Des objets ou concepts liés aux mathématiques renforcent son propos.

Tout d'abord, partant de l'homme vers notre système solaire, il suggère que toute distance parcourue aussi grande soit-elle, peut être dépassée : « *[...] que l'imagination passe outre ; elle se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir* », « *nous avons beau enfler nos conceptions [...], nous n'enfantons que des atomes, au prix de la réalité des choses* », « *c'est une sphère dont [...] la circonférence (est) nulle part.* » C'est l'image d'un infini analogue à celle que nous donnons à un élève de 1ère S en définissant la limite infinie d'une suite de nombres ainsi : pour tout nombre A fixé (aussi grand que l'on veut) , il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A.

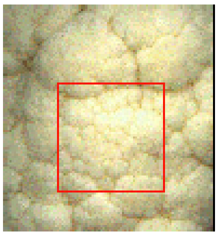
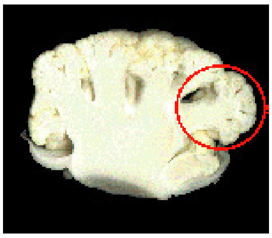
La démarche inverse, partir de l'homme vers des éléments plus petits apparaît aussi sans fin : « *[...] dans la petitesse de son corps, des parties incomparablement plus petites ...* », « *il pensera peut-être que c'est là l'extrême petitesse de la nature ; je veux lui faire voir là-dedans un abîme nouveau* ». La définition de limite nulle pour une suite de nombres positifs relève de la même idée : pour tout nombre ϵ strictement positif fixé (aussi petit que l'on veut), il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à ϵ.

Une autre idée, du domaine de la géométrie cette fois, contribue à la sensation de vertige que procure la lecture du texte : la nature possède la propriété d'un objet fractal, à savoir la répétition de structures identiques à plusieurs niveaux d'agrandissement (homothétie interne). Un exemple mathématique illustrant la notion de fractal est donné par la courbe de von Koch. Le principe de sa construction est indiqué ci-dessous.



L'objet limite de cette suite de constructions est le flocon de von Koch et la frontière de cet objet est la courbe de von Koch.

Un exemple, rencontré dans la nature, qui illustre aussi cette notion est celui du chou-fleur.

Sa structure particulière est identique à la description de Pascal : « *Qu'un ciron*[1] *lui offre dans la petitesse de son corps, des parties incomparablement plus petites... Qu'il y voie une infinité d'univers dont chacun a son firmament, sa terre, ses planètes en la même proportion que le monde visible ; dans cette terre, des animaux et enfin des cirons, dans lesquels il trouvera ce que les premiers ont donné ; et trouvant encore dans les autres la même chose sans fin...* »

1.2. L'infini dans le raisonnement

Dans la suite du texte *Les deux infinis* Pascal étend son observation à notre mode de réflexion : « *La nature ayant gravé son image dans toutes choses, elles tiennent presque toutes de sa double infinité. C'est ainsi que nous voyons que toutes les sciences sont infinies...* » [185]. Pascal déduit de son observation de l'univers que l'esprit de l'homme et son raisonnement présentent également une structure infinie : « *...car qui doute que la géométrie par exemple, a une infinité d'infinités de propositions à exposer ? Elles sont aussi infinies dans la multitude et la délicatesse de leurs principes ...* » [185].

A partir d'un nombre fini d'axiomes, on peut construire, démontrer, un nombre infini de propriétés. Cet argument fait songer de façon anachronique à Gödel qui prouve en 1930 qu'il est impossible de démontrer par des procédés finis que l'arithmétique ne contient aucune propriété non contradictoire (c'est-à-dire une propriété à la fois vraie et fausse). Pour sa démonstration, Gödel utilise les propriétés vraies de l'arithmétiques (en nombre infini) pour en construire une dont on ne peut pas démontrer qu'elle est vraie.

Le point de vue du prof de philo

L'utilisation de l'infini chez Pascal, est dans le fil de la valorisation nouvelle de l'infini, que l'on doit particulièrement à Descartes.

En effet, dans l'Antiquité, l'infini désigne ce qui est imparfait. Le monde est ordonné, il forme un tout hiérarchisé, dans lequel l'homme doit trouver sa place, doit imiter l'ordre du monde. C'est une « *sagesse du monde* », l'homme et le monde ont quelque chose à se dire. Donc il y a une possibilité de mesurer l'un à l'autre, ils sont commensurables, il y a une mesure commune sur laquelle se fonde l'imitation. L'infini, qui rend les choses incommensurables (voir plus loin) empêche cela, et rompt le lien de l'homme au monde. Pour les Anciens, l'infini c'est l'imparfait, l'inachevé, la « *finitude* » c'est la perfection.

- Il n'y a pas d'infini réellement existant puisque le monde est fini, il y a seulement de l'infini en puissance, selon la division (la matière et le temps sont infiniment divisibles, mais seulement en idée).
- Le mouvement parfait est circulaire ; un mouvement infini rectiligne est impensable (parce que le monde est clos).
- Dans un monde finalisé, ce qui est sans fin c'est ce qui est inutile, et qui n'a pas d'existence réelle comme les désirs à l'infini chez Aristote.

[1]Animal minuscule, le plus petit visible à l'oeil nu.

- Ce qui porte l'homme à l'infini, c'est la démesure : par exemple les héros grecs qui transgressent l'ordre du monde sont punis pour cela. L'homme est un milieu, le centre du monde, et cela doit être une leçon d'humilité pour lui ; la sagesse c'est d' « *être géomètre* », et de savoir se régler sur le monde, limiter ses désirs. « *Les savants disent que le ciel et la terre, les dieux et les hommes sont unis ensemble par l'amitié, la règle, la tempérance et la justice, et c'est pour cela qu'ils donnent à tout cet univers le nom d'ordre (cosmos), et non de désordre ou déréglement. Mais toi tu ne fais pas attention à cela (...), tu penses, au contraire, qu'il faut tâcher d'avoir plus que les autres ; c'est que tu négliges la géométrie.* » [Gorgias].

Par contre, l'infini des Modernes, donc pour Pascal et Descartes, rompt le lien de l'homme au monde, pour insister sur le lien de l'homme à Dieu ; et ce qui fait leur ressemblance (voir la *Genèse*), c'est entre autre cette capacité de l'infini. Pour Descartes, j'ai l'idée de l'infini en moi, or je suis un être fini, donc cela vient de Dieu. On ne peut se comprendre comme fini que par rapport à un au-delà de la limite, sur fond d'infini : c'est l'infini qui est premier sur le fini. D'où le fait que l'infini des désirs en l'homme montre que l'homme est fait pour Dieu. Il y a donc deux infinis : l'infini (Dieu) et l'indéfini (le monde), qui est un infini par accumulation, au sens de ce qui est sans fin : « *qu'il y voie une infinité d'univers* », et « *trouvant encore dans les autres la même chose sans fin* » [185]. C'est un rappel de la révolution scientifique du XVII^{e} siècle, « *du monde clos à l'univers infini* » (Koyré).

Mais chez Pascal , il y a l'effroi de l'infini. Car si Pascal est héritier de cette conception positive de l'infini, il la retourne également. L'homme est effrayé en un sens par cet infini qu'il découvre en lui, parce qu'il n'en connaît pas le sens, et il se sent incapable de le connaître, il se sent d'abord limité. Le caractère infini (et non indéfini) du monde montre que l'homme n'y a plus de place attitrée, le monde ne lui parle plus : « *le silence éternel de ces espaces infinis m'effraye...* » [187]. Plutôt que l'admiration des Anciens, une fois passé par la relativisation du monde des Modernes, il y a seulement un effroi de l'infini. Il renvoie l'homme à une absence de place stable. Pascal utilise l'infini comme déstabilisant comme le suggère le titre du fragment *Disproportion de l'homme* [185] ou les phrases : « *Qu'il juge s'il a quelque proportion avec [la nature]* », « *Qui se considérera de la sorte s'effraiera de soi-même [...] entre ces deux abîmes de l'infini et du néant* », « *Les hommes se sont portés témérairement à la recherche de la nature comme s'ils avaient quelque proportion avec elle.* » [185]

1.3. Un infini moins bien connu

La prof de maths

« *De ces deux infinis, celui de grandeur est bien plus sensible ...* » [185]. Ce n'est pas par hasard que Pascal commence son discours sur les deux infinis par « *l'infiniment grand* ». Car, comme il l'affirme plus loin, « *l'infini en petitesse est bien moins visible* ».

Pascal va pourtant développer l'idée que cet infiniment petit, plus ignoré, est comparable à l'infiniment grand. Entre les paragraphes sur les deux infinis on lit :« *Mais pour lui présenter un prodige aussi étonnant...* ». Un peu plus loin, il y revient avec précision : « *on se croit naturellement bien plus capable d'arriver au centre des choses que d'embrasser leur circonférence...il ne faut pas moins de capacité pour aller jusqu'au néant que jusqu'au tout...* » [185].

Ces mots me rappellent la remarque d'une élève ayant du mal à comprendre qu'une suite strictement croissante de nombre positifs puisse avoir pour limite le nombre 1. Après discussion avec elle, elle concluait à juste titre « *qu'il y avait finalement autant de nombres réels entre 0 et 1 qu'entre 1 et l'infini.* ». Elle avait franchi le cap conceptuel délicat auquel fait allusion Pascal. En effet, en mathématiques les intervalles de nombres réels $]0;1]$ et $[1;\infty[$ sont en bijection, tout nombre x dans $]0;1]$ ayant son inverse dans $[1;\infty[$. Ces deux intervalles sont donc bien « *comparables en taille* ».

Et Pascal va encore plus loin dans l'analyse de cette situation quand il dit : « *Il me semble que qui aurait compris les derniers principes des choses pourrait aussi arriver jusqu'à connaître l'infini. L'un dépend de l'autre et l'un conduit à l'autre.* » [185]

Ceci semble en rapport avec le fait que, lorsque x tend vers 0 la limite de $1/x$ est l'infini et lorsque x tend vers l'infini, la limite de $1/x$ est 0. L'idée de ces comportements asymptotiques se retrouve dans la phrase de Pascal : « *L'un dépend de l'autre et l'un conduit à l'autre. Ces extrémités se touchent et se réunissent à force de s'être éloignés* » [185], où le terme « *extrémités* » désigne en fait 0 et l'infini.

Le prof de philo

On peut voir là aussi une conception originale de ce qu'est la vérité. Pour que la vérité soit complète, il faut souvent une union des contraires, même si cela paraît « *incompréhensible* », incompréhensible au sens vu ici : des extrémités qu'on n'arrive pas à « *comprendre* », c'est-à-dire à prendre ensemble, à embrasser ensemble, parce qu'on n'a pas vue assez large. Donc il ne faut pas les abandonner parce que contradictoires, mais continuer à chercher ce qui peut les concilier, « *l'incompréhensible ne laisse pas d'être* » [139]. Dieu seul est assez grand pour unir les deux, pas l'homme (qui lui ne voit que le caractère apparemment contradictoire). « *Qui aurait compris les derniers principes des choses pourrait aussi arriver jusqu'à connaître l'infini. L'un dépend de l'autre et l'un conduit à l'autre. Ces extrémités se touchent et se réunissent à force de s'être éloignées et se retrouvent en Dieu.* » [185]

Ainsi il faut dire que l'homme est à la fois grand et qu'il est misérable, au lieu de faire comme les philosophes qui insistent sur l'un ou sur l'autre, et font soit l'orgueil, soit le désespoir de l'homme. Le modèle de l'union des contraires comme constituant la vérité, c'est la religion chrétienne, qui est remplie de contradictions entre lesquelles il ne faut pas choisir, c'est leur union qui fait la vérité. Les contradictions de la Bible doivent être maintenues, et lues à la lumière de Jésus-Christ, qui est lui-même paradoxe, puisqu'il est en même temps homme et Dieu. « *La foi embrasse plusieurs vérités, qui semblent se contredire ; la source en est l'union des deux natures en Jésus-Christ.* » [624]

Et cela seul peut éclairer les contradictions de l'homme lui-même, qui est à la fois capable du bonheur et incapable, capable de connaître toutes choses et incapable, *etc.* Parce que l'homme aussi a deux natures, avant et après le péché, et c'est ce qui explique cette dualité. Il ne faut pas tricher avec ces contradictions en cherchant à les résorber. L'idée est que la vérité est ce qui va éclairer l'homme, plutôt que l'inverse, donc c'est normal s'il y a de l'incompréhensible, du mystère, au sens de ce qui nous dépasse.

Ceci amène à la question des hérésies : être hérétique, ce n'est pas dire le faux, mais oublier une partie du vrai comme contradictoire. « *Ne pouvant concevoir le rapport de deux vérités opposées, et croyant que l'aveu de l'une enferme l'exclusion de l'autre, ils s'attachent à l'une, excluent l'autre.* » [624] Le mot hérésie vient d'ailleurs de « *choix* ». Donc pour réfuter quelqu'un, il ne faudrait pas lui montrer qu'il a tort mais qu'il a raison ; puis qu'il n'a raison que partiellement et qu'il oublie une partie de la vérité.

2. Les images pour l'homme, sa place dans l'univers

2.1. Les images employées pour l'homme : le point, le fini

La prof de maths

Perdus dans cet (ces) univers, les hommes et leur milieu de vie sont peu de choses. « *Qu'est-ce qu'un homme dans l'infini ?* » [185]. Et pour en parler, Pascal utilise comme images des objets mathématiques qui contrastent avec le concept d'infini : le point, l'unité, la partie bornée.... « *Que la terre lui paraisse comme un point ...* ». Mais, si l'homme est un point, c'est un point particulier. « *Car enfin qu'est-ce que l'homme dans la nature ? ...un milieu entre rien et tout.* » L'homme a donc une position centrale et même une position d'équilibre : « *La nature nous a si bien mis au milieu que si nous changeons un côté de la balance, nous changeons aussi l'autre.* » L'image du milieu est précisée : l'homme est au milieu comme, avec le vocabulaire mathématique, l'isobarycentre des extrémités d'un segment.

La place accordée à l'homme dans cette partie du texte est-elle valorisante ? Peut-on parler d'anthropocentrisme chez Pascal ?

Le prof de philo

Non, car l'image de la balance employée ici décrit un idéal que l'homme n'atteint jamais. L'homme doit être au milieu, c'est sa tâche, mais en même temps sa position n'est jamais assurée, il est dans l'instabilité permanente. Pour les Grecs, l'homme est au centre du monde, il doit se conformer au monde, l'imiter, il a une place. Mais pour Pascal l'homme est peut-être au milieu, mais il ne connaît pas sa place, et n'est pas le centre de toutes choses. Sa situation est celle de quelqu'un de perdu dans l'univers, qui n'a pas de place désignée. L'homme est au milieu par défaut, parce qu'il est incapable de toucher les extrêmes. « *Bornés en tout genre, cet état qui tient le milieu entre deux extrêmes se trouve en toutes nos puissances. Nos sens n'aperçoivent rien d'extrême...* » [185].

L'homme ne connaît pas sa place dans le monde et si le monde est infini, il n'a pas de centre, l'homme ne peut donc pas être au centre. La tendance de l'homme à se faire le centre du monde, à croire qu'il est fait pour lui, est d'ailleurs critiquée : « *Il est injuste qu'il se fasse centre de tout.* » [509] Il n'y a pas de place désignée à l'homme dans la nature. Il en est la composante la plus faible : « *L'homme n'est qu'un roseau, le plus faible de la nature.* » [186] L'homme est « *égaré* » dans le monde ([398] et [379]).

L'homme occupe une place instable, et donc est immobile par défaut. « *Nous voguons sur un milieu vaste, toujours incertains et flottants, poussés d'un bout vers l'autre ; [...] ne cherchons donc point d'assurance et de fermeté ;[...] rien ne peut fixer le fini entre les deux infinis qui l'enferment et le fuient.* » [185] Ce développement sur l'infini vient là justement pour montrer que l'homme n'y a pas sa place. Et comme il ne connaît pas quelle place il devrait gagner, il lui faut rester à la sienne pour ne pas provoquer plus de désordre : « *Cela étant bien compris, je crois qu'on se tiendra en repos, chacun dans l'état où la nature l'a placé.* » [185]

Cette place de milieu est donc en fait un rappel à l'humilité pour l'homme, mais le fait qu'il recherche à être le centre est aussi le signe qu'il est promis à la grandeur. Voilà une autre contrariété à observer : l'homme doit à la fois vouloir se faire le centre, et ne pas le vouloir, son orgueil est le signe de sa grandeur. D'où un va-et-vient : « *S'il se vante je l'abaisse / s'il s'abaisse je le vante / et le contredis toujours / jusqu'à ce qu'il comprenne*

/ qu'il est un monstre incompréhensible. » [121] Donc ce statut de milieu, entre ange et bête, ne donne pas pour autant un sens, une assurance. L'homme est milieu au sens de ce tissu de contradictions, mixte de deux natures (corps et esprit), tiraillé donc.

L'homme est tellement peu au centre du monde, qu'il n'est même pas au centre de lui-même, il ne se connaît pas lui-même, ne connaît pas sa nature, a peu de maîtrise sur lui : le moi, l'ego, n'est pas l'essentiel. « *L'homme est à lui-même le plus prodigieux objet de la nature.* » [185]

La portée religieuse à saisir ici à nouveau est que le seul véritable centre est hors de l'homme, c'est le Christ, centre paradoxal, le centre des Ecritures, de l'univers, de l'homme lui-même : « *Jésus-Christ est l'objet de tout, et le centre où tout tend.* » [419] Le Christ est l'union de deux natures contradictoires, l'homme et Dieu. « *La connaissance de JC fait* ***le milieu****, parce que nous y trouvons et Dieu et notre misère.* » [181]

2.2. L'homme en comparaison avec Dieu

La prof de maths

L'objet du discours de Pascal lorsqu'il utilise les termes « *point* », « *borné* », « *unité* », ou « *fini* » à propos de l'homme, c'est de signifier au lecteur qu'il n'y a pas de comparaison possible entre celui-ci et Dieu pour lequel il emploie l'image de l'infini : « *Le fini s'anéantit en présence de l'infini [...] Ainsi notre esprit devant Dieu ; ainsi notre justice devant la justice divine. Il n'y a pas si grande disproportion entre notre justice et celle de Dieu, qu'entre l'unité et l'infini.* » [397] Et même : « *Dans la vue de ces infinis, tous les finis sont égaux.* » [185] Alors que le fonctionnement de nos sociétés repose sur la comparaison de nombres finis, (« *le nombre qui fait la force* », la majorité...), Pascal retient que cette différence significative sur des ensembles finis n'a plus de valeur dès lors qu'on les compare à un ensemble infini.

« *L'unité jointe à l'infini ne l'augmente de rien.* » [397] On dit à un élève de Première qu'additionner ou soustraire une constante à une suite de nombres qui a une limite infinie, ne change pas la limite. Il y a là l'idée que l'homme est une quantité négligeable ; il y a aussi une approche du concept d'ensemble dénombrable, comme celui des entiers naturels défini par les axiomes de Peano : c'est un ensemble infini d'unités dont chacune a un et un seul successeur.

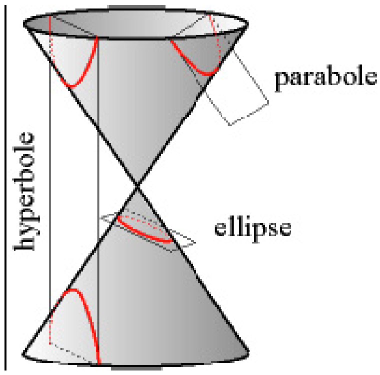
Mais la référence aux entiers naturels est encore plus claire dans le paragraphe suivant de la pensée [397] : « *Nous connaissons qu'il y a un infini et ignorons sa nature.... ; il est faux qu'il soit pair, il est faux qu'il soit impair, car, en ajoutant l'unité, il ne change point de nature ; cependant c'est un nombre, et tout nombre est pair ou impair (il est vrai que cela s'entend de tout nombre fini). Ainsi, on peut bien connaître qu'il y a un Dieu sans savoir ce qu'il est.* » Ainsi, cette idée de Pascal que le fini (l'homme) et l'infini (Dieu) sont incomparables et n'ont pas la même nature est pour lui un argument en faveur de l'existence de Dieu.

Nous ne pouvons pas appliquer au nombre infini des entiers naturels, la notion de parité ou toute autre propriété que nous connaissons pour les nombres finis ; de même, l'homme ne doit pas chercher à connaître la nature de Dieu en se référant à des arguments propres à l'homme : « *Nous connaissons donc l'existence et la nature du fini, parce que nous sommes finis et étendus comme lui... Mais nous ne connaissons ni l'existence ni la nature de Dieu parce qu'il n'a ni étendue ni bornes.* » [397]

2.3. Un point-place particulier pour l'homme

L'homme-point ne peut donc pas comprendre Dieu - l'infini puisqu'il ne lui est pas comparable. Cependant, pour Pascal, il existe un point particulier qui peut permettre à l'homme de mieux appréhender l'univers. « *Ainsi les tableaux, vus de trop loin et de trop près ; et il n'y a qu'un point indivisible qui soit le véritable lieu : les autres sont trop près ou trop loin, trop haut ou trop bas. La perspective l'assigne dans l'art de la peinture. Mais dans la vérité morale qui l'assignera ?....Il faut avoir un point fixe pour en juger.* » [19] Dans la suite du texte, on comprend que ce point fixe est Jésus-Christ. Mais l'image employée ici par Pascal n'est pas sans rapport avec l'une de ses plus importantes contributions aux mathématiques : son Essay sur les coniques qu'il écrit en 1640 à l'âge de 16 ans.

Du point S, sommet du cône, on peut observer que des courbes très différentes ont en fait la même origine, et démontrer et approfondir leurs propriétés communes ce que Pascal fera par exemple pour son théorème de « l'hexagramme mystique » : *Les côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une ellipse se coupent en trois points alignés.*



Cette image sur laquelle a travaillé Pascal apparaît dans le fragment [19] sous la forme d'une référence à la peinture. La perspective à point de fuite à laquelle il fait allusion est une représentation de l'espace dans le plan qui impose que : tout point de l'espace et son image dans le plan du dessin soient alignés avec un point fixe donné appelé point de vue ; On retrouve bien l'image du cône coupé par un plan dans cette forme de projection.

En parlant de ce mode de représentation, Pascal veut montrer qu'un point particulier permet de voir des figures très différentes comme ayant des propriétés proches, idée à rapprocher de son travail sur les propriétés des coniques (ellipses et hyperboles) qu'il démontre en partant de propriétés du cercle. L'homme doit donc aspirer à se rapprocher de ce point sommet d'où tout paraît plus clair.

De plus, si l'on reprend l'image de la perspective à point de fuite, ce point particulier aurait même la propriété de nous rapprocher de l'infini. En effet, en théorie les droites reliant un point de l'espace et son image dans le plan du dessin sont des rayons de lumière. Ces droites sont considérées comme des droites parallèles dans d'autres formes de perspectives alors qu'elles passent toutes par un même point pour une représentation avec point de fuite. Par analogie, dans la géométrie dite projective, on définit un point « *infini* » par lequel passent toutes les droites parallèles de l'espace considéré. « *Un espace infini égal au fini* » [139], dit Pascal.

Le prof de philo

L'idée que Pascal se fait des coniques est celle de la découverte d'un point à partir duquel le regard peut comprendre ce qui est commun à des réalités très différentes. Ainsi vu du haut du cône, on peut embrasser toutes les coniques à la fois, et voir qu'elles ont une forme de correspondance. C'est le modèle pour Pascal des résolutions des contradictions : pour lui nous sommes pris entre différents ordres (voir aussi le texte sur les 3 ordres [290]), qui sont incommensurables. Chaque plan est une perspective qu'on peut avoir sur la réalité, et donc chacun a un jugement différent. « *La raison ne sait pas mettre le prix aux choses* », il y a des points de vue contradictoires. Mais ces contrariétés sont résolues, et conservées, à partir du bon point de vue, celui qui permet de comprendre les autres. Ici c'est le point, qui permet de comprendre des figures finies et infinies, et donc le point est une union du fini et de l'infini .

Pour Pascal, c'est là encore Jésus-Christ, le point de vue qu'il faut adopter pour voir les contradictions coïncider harmonieusement. L'homme-point, c'est Jésus-Christ, parce qu'il est l'homme-Dieu, donc le médiateur qui joint humanité et Dieu.

Il y a une sorte de projection géométrique des réalités divines sur celles de l'homme, qui est un « *miroir* » imparfait : entre notre justice et celle de Dieu, il y a une disproportion infinie, mais aussi elles sont l'image l'une de l'autre. Donc il faut rechercher leur point d'union. La justice humaine est figure de la divine, et elle pousse à « *remonter* » dialectiquement à elle. « *Un espace infini égal au fini.* » [139] ; à la fois nous partageons la justice de Dieu comme image, et nous en sommes à une distance infinie. Les Coniques résolvent cet état a priori incompréhensible (aux deux sens du terme : trop grand pour nous et contradictoire). C'est donc une subversion de l'idée de dialectique chez Platon : à travers les contradictions qui émergent de la discussion, on aboutit à un point de vue plus élevé de compréhension.

Pascal souhaite que l'homme parte à la recherche de ce point particulier. Pour l'y amener, on l'a vu, ce mathématicien a recourt à de nombreuses images mathématiques qui lui sont naturelles, mais au-delà des illustrations, son raisonnement et sa façon de convaincre sont celles d'un mathématicien.

3. Convaincre l'homme par des procédés démonstratifs ou calculatoires

La prof de maths

3.1. Théorème d'existence et raisonnement par l'absurde

Pascal construit ses *Pensées* pour amener le lecteur à la recherche de la foi. Il va faire appel pour ceci à « *l'esprit de géométrie* » et « *on sait bien quel est l'objet de la géométrie, et qu'il consiste en preuves* » [500].

Les preuves que Pascal souhaite donner sont celles de l'existence de Dieu : « *Comme nous savons qu'il est faux que les nombres soient finis, donc il est vrai qu'il y a un infini en nombre.....ainsi on peut bien connaître qu'il y a un Dieu sans savoir ce qu'il est.* » [397]

Est-ce convaincant ? On peut voir dans ce raisonnement de Pascal un exemple de théorème d'existence non constructif où l'on démontre l'existence d'un objet sans donner le moyen de le construire. En mathématiques, la démonstration de l'existence de la limite d'une suite croissante majorée ne donne aucune idée de la valeur de la limite par exemple.

On peut aussi interpréter la première phrase et d'autres extraits des *Pensées* comme des raisonnements par l'absurde. Dans l'impossibilité d'amener des preuves directes de l'existence de Dieu, Pascal choisit de démontrer qu'il est impossible que le contraire soit vrai : Dieu n'existe pas est absurde donc Dieu existe. De nombreuses démonstrations sur l'infinitude d'ensembles en arithmétique ont le même schéma de raisonnement : on suppose l'ensemble fini, on arrive à une contradiction, l'ensemble est donc infini. La plus célèbre de ces démonstrations est certainement celle de l'infinitude des nombres premiers : on suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers, et on considère le « *grand* » nombre obtenu en les multipliant tous puis en ajoutant 1. Par construction ce nombre n'est divisible par aucun nombre premier car 1 n'est lui-même pas divisible par un nombre premier. Or tout nombre strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier. Contradiction.

Un tel raisonnement, par l'absurde, repose sur l'idée mathématique qu'une propriété ne peut être à la fois vraie et fausse ce à quoi adhère Pascal quand il dit à propos du Pyrrhonisme « *Chaque chose est ici vraie en partie, fausse en partie. La vérité essentielle n'est pas ainsi : elle est toute pure et toute vraie. Ce mélange la déshonore et l'anéantit.* » Ou encore pour justifier l'emploi de ce type de raisonnement « *Lorsqu'on ne sait pas la vérité d'une chose, il est bon qu'il y ait une erreur commune qui fixe l'esprit des hommes...* » [628]

3.2. Les axiomes ou premiers principes

Pourtant il est surprenant de constater que cet esprit de géométrie que Pascal emploie pour convaincre, il le rejette comme procédé permettant d'arriver entièrement à la foi : « *La foi est différente de la preuve : l'une est humaine, l'autre est un don de Dieu.* » [5] Il faut donc explorer d'autres voies car « *il ne faut pas se méconnaître : nous sommes automates autant qu'esprit ; et de là vient que l'instrument par lequel la persuasion se fait n'est pas la seule démonstration. Combien y a-t-il peu de choses démontrées ? Les preuves ne convainquent que l'esprit.* » [671] Et « *les géomètres qui ne sont que des géomètres ont donc l'esprit droit, mais pourvu qu'on leur explique bien toutes choses par définitions et principes...* » [466] Voilà l'idée du raisonnement mathématique rappelée.

Ce que Pascal veut et recommande donc que l'homme utilise, c'est son cœur : « *C'est le cœur qui sent Dieu, et non la raison. Voilà ce que c'est que la foi, Dieu sensible au cœur, non à la raison.* » [397] De même que le mathématicien part d'axiomes (principes) pour construire son raisonnement, Pascal pense que l'homme doit partir de son cœur pour construire sa foi. « *Nous connaissons la vérité, non seulement par la raison, mais encore par le cœur ; c'est de cette dernière sorte que nous connaissons les premiers principes....Et c'est sur ces connaissances du cœur et de l'instinct qu'il faut que la raison s'appuie, et qu'elle y fonde tout son discours.* » [101] Et l'illustration qui suit ces propos confirme l'analogie avec le raisonnement mathématique. « *Le cœur sent qu'il y a trois dimensions dans l'espace, et que les nombres sont infinis ; et la raison démontre ensuite qu'il n'y a* *point deux nombres carrés dont l'un soit le double de l'autre. Les principes se sentent, les propositions se concluent.* » [101]

La référence aux mathématiques est claire dans ce passage du texte et l'exemple de « *proposition* » à laquelle la raison permet d'arriver n'est pas anodin. « *Il n'y a point deux nombres carrés dont l'un soit le double de l'autre* » [101] est une autre formulation de la propriété *la racine carrée de 2 est un irrationnel* . En effet si p et q sont deux entiers avec $q \neq 0$ alors

$$p^2 = 2q^2 \text{ équivaut à } 2 = \frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 .$$

Or cette dernière affirmation est effectivement fausse mais la démonstration de ceci est célèbre pour avoir jeté le trouble dans l'esprit des mathématiciens de l'antiquité grecque, qui avaient du mal à concevoir l'existence de nombres irrationnels.

Citer cette propriété, comme exemple d'utilisation du raisonnement, c'est affirmer d'une certaine façon sa supériorité sur des propriétés intuitivement non évidentes. « *Et il est aussi ridicule et inutile que la raison demande au cœur des preuves de ses premiers principes, pour vouloir y consentir, qu'il serait ridicule que le cœur demandât à la raison un sentiment de toutes les propositions qu'elle démontre, pour vouloir les recevoir.* » [101]

Ainsi, le raisonnement du mathématicien, s'il a la force de la conviction ne peut permettre à lui seul à l'homme d'accéder à la connaissance de Dieu mais c'est un instrument pour y arriver. « *Et c'est pourquoi ceux à qui Dieu a donné la religion par sentiment du cœur sont bien heureux...mais ceux qui ne l'ont pas, nous ne pouvons la donner que par raisonnement, en attendant que Dieu la leur donne par sentiment de cœur, sans quoi la foi n'est qu'humaine, et inutile pour le salut.* » PASCAL justifie ainsi ses procédés démonstratifs de conviction.

Le prof de philo

PASCAL fait une apologie de la religion. Il a un but pratique : pousser à la conversion, à partir de la connaissance de l'homme qu'apporte la religion. Donc ses « *arguments* » sont anthropologiques et bibliques, plus que philosophiques. Il mêle sans cesse persuasion (procédés rhétoriques, par exemple l'effroi, de l'ordre du sentiment) et conviction (rationnelle). Il veut montrer que la religion est « *raisonnable et aimable* », à des hommes (les libertins) qui pensent qu'elle est bête et à craindre. Donc il cherche à atteindre les deux à la fois, le cœur et la raison.

Mais le but est de montrer qu'elle est raisonnable, pas rationnelle ! Raisonnable veut dire : autant que la raison puisse en savoir, il n'y a pas d'absurdité à croire les contenus de la religion. Rationnelle serait prétendre pouvoir tout démontrer, sans passer par la Bible, et donc sans passer par le Christ (« *nul ne connaît le Père si ce n'est par moi* »). La religion rationnelle, le déisme de VOLTAIRE par exemple, serait une « *religion naturelle* », où Dieu n'intervient plus du tout pour les hommes, il devient un Destin, sans rapport d'amour ou de « *charité* » donc un Dieu... inutile. PASCAL a pour but théologique, pour idée que la foi et le salut, c'est la grâce qui les donne, et pas l'homme qui se les donne lui-même. Il se positionne contre l'idée de mériter son salut, dans le débat entre la foi et les œuvres qui fait rage, et donc ici contre les chrétiens qui pensent pouvoir démontrer rationnellement tous les mystères – Trinité, eucharistie, péché originel, ... – contre le « *Dieu des philosophes et des savants* », qui n'est qu'une cause ultime, un Grand Horloger, un fondement rationnel. Il veut parler du « *Dieu d'Abraham, d'Isaac et de Jacob* » [419], et se replacer dans une tradition, la Bible, et la religion révélée et non rationnelle. Parce que là seulement il y a un Dieu avec lequel on a un rapport réel, plutôt qu'un être irréel. « *Qu'il y a loin de la connaissance de Dieu à l'aimer.* » [357]

Donc les preuves chez PASCAL sont là seulement pour détruire des positions philosophiques (surtout celles de DESCARTES, sur la stabilité du moi, sur l'infini en Dieu), pour amener à la religion. Il ne cherche pas tant à convaincre qu'à convertir, c'est-à-dire à avoir un effet pratique, sur la vie de ses contemporains. Il veut amener à se soucier de sa vie. *Le Pari* par exemple n'est pas un texte théorique, mais pratique, contre l'indifférence. Il veut amener à prendre des décisions, parler au corps (« *la machine* »), aux habitudes. C'est pourquoi il ne refuse pas la raison (c'est un mathématicien et un savant !), mais veut en montrer les limites : « *Il n'y a rien de plus raisonnable que ce désaveu de la raison.* » On a vu ce qui en découle avec l'idée que « *l'incompréhensible ne laisse pas d'être* », et que la vérité émerge parfois d'une contradiction dont on n'a pas encore compris le sens. Il veut ouvrir au sens du mystère. « *Cette impuissance [à prouver tout] ne doit donc servir qu'à humilier la raison – qui voudrait juger de tout – mais non pas à combattre notre certitude.* » [101]

PASCAL refuse de donner des preuves de l'existence de Dieu : elles sont « *inutiles et incertaines* », elles ne convainquent que pour deux minutes, tout de suite après on se demande si on a eu raison de les accepter. On les oublie aussitôt. Surtout, elles obligent à donner un concept de Dieu qui l'enferme dans des limites. Il ne veut pas non plus de preuve par l'existence du monde (le monde est beau, donc il y a quelqu'un qui l'a créé ; le monde est utile à l'homme ; le monde est ordonné, *etc.*). Le cosmos est un lieu où l'on se perd chez PASCAL ! Il n'y a pas de remontée de lui à Dieu. De même, il conteste l'idée de trace directe de Dieu en l'homme comme l'infini chez Descartes. Il souhaite juste montrer que la vérité de la religion seule permet de comprendre l'homme (par Jésus-Christ). Ainsi PASCAL prétend donner des preuves de la religion, mais pas de Dieu [398] car la vérité est connue non seulement par la raison, mais aussi par le cœur : la raison ne se fonde pas elle-même, elle se fonde dans le cœur, et par ce que l'on sait intuitivement (les premières définitions, la certitude de l'existence du monde, *etc.*) [101]. Et le projet de ses *Pensées* est de préparer la conversion, autant que la raison (et la rhétorique) peut le faire.

Le mot cœur est employé comme vocabulaire à la fois biblique et libertin, il désigne l'intériorité profonde. Dans l'oubli du cœur, PASCAL voit une trace du péché originel, des deux natures en l'homme, l'une grande et l'autre après la chute, qui a inversé le cœur et la raison. On devrait connaître Dieu par le cœur et les sciences ou les mathématiques par la raison. Or l'homme après la chute demande que les raisonnements mathématiques ou scientifiques soit plaisants, et exige que Dieu soit prouvé *more geometrico*, sur le mode des mathématiciens ! Il y a là une confusion que PASCAL veut rétablir : la démonstration dans les sciences, la persuasion en matière de religion, le sentiment (*cf.* son traité sur la démonstration). Dieu doit être aimé pour être connu ; il passe du cœur dans l'esprit, et non l'inverse ; c'est lui qui donne la foi. On prétend dans les choses naturelles ne céder qu'à la démonstration, mais en réalité « *la raison est ployable à tout sens* » [470], donc quand on veut quelque chose, on se débrouille pour que la raison, qui « *ne sait mettre le prix aux choses* », la considère comme juste. Et donc on exige des démonstrations en science (reste de la première nature), mais en réalité on n'y suit que ses inclinations, sa volonté.

Comme la religion chrétienne ne flatte pas nos plaisirs, on demande des raisonnements certains pour la croire alors qu'on est juste retenu par nos plaisirs pour PASCAL ...

La prof de maths

Parmi ces plaisirs, il y a le jeu, et si PASCAL utilise souvent des arguments de type démonstratifs, dans son texte *Le Pari* il propose même quelques calculs.

3.3. Calculs d'espérances dans le texte du Pari

PASCAL est un des premiers (voire le premier) mathématicien à s'intéresser au calcul de probabilités. La fréquentation d'amis libertins et joueurs sert souvent de prétexte à ses recherches sur les jeux de hasard. Sa correspondance avec le Chevalier de MÉRÉ en témoigne.
Dans son texte du *Pari* [397] (extrait en annexe 2) ce sont des arguments du calcul de probabilités qui viennent appuyer sa tentative de convaincre le lecteur du « *gain* » que peut apporter la conversion à la religion. Dans ce texte ardu, PASCAL s'adresse à un libertin et lui propose un jeu (expérience aléatoire) : parier sur l'existence de Dieu (existe ou non) avec une probabilité d'abord équirépartie, puis faible voire nulle, et considérer les gains possibles : une ou plusieurs vies éternelles (voire une infinité) contre aucune (variables aléatoires). Les calculs assez artificiels d'espérances qui en découlent tendent à convaincre le lecteur qu'il faut jouer. « *Cela est admirable, Oui, il faut gager.* » Et c'est bien là la volonté de PASCAL , lutter contre l'indifférence.

Ces calculs sont-ils convainquants ? l'étaient-ils à l'époque ? Pour PASCAL , il ne s'agit encore une fois que d'interpeller ses contemporains, et il pense que le raisonnement mathématique peut l'y aider.

Pour finir....

La dernière phrase de l'extrait du texte *Le Pari* vient rappeler que ces arguments d'un mathématicien, PASCAL ne les emploie que parce qu'ils sont de nature à convaincre ses contemporains :

« ***Cela est démonstratif et si les hommes sont capables de quelque vérité, celle-là l'est.*** »

Annexe 1 : *Les deux infinis* (extrait)

Que l'homme contemple donc la nature entière dans sa haute et pleine majesté, qu'il éloigne sa vue des objets bas qui l'environnent. Qu'il regarde cette éclatante lumière, mise comme une lampe éternelle pour éclairer l'univers, que la terre lui paraisse comme un point au prix du vaste tour que cet astre décrit et qu'il s'étonne de ce que ce vaste tour lui-même n'est qu'une pointe très délicate à l'égard de celui que les astres qui roulent dans le firmament embrassent. Mais si notre vue s'arrète là, que l'imagination passe outre ; elle se lassera plutôt de concevoir, que la nature de fournir. Tout ce monde visible n'est qu'un trait imperceptible dans l'ample sein de la nature. Nulle idée n'en approche.

Nous avons beau enfler nos conceptions, au-delà des espaces imaginables, nous n'enfantons que des atomes, au prix de la réalité des choses. C'est une sphère infinie dont le centre est partout, la circonférence nulle part. Enfin, c'est le plus grand caractère sensible de la toute puissance de Dieu que notre imagination se perde dans cette pensée.

Que l'homme étant revenu à soi considère ce qu'il est au prix de ce qui est, qu'il se regarde comme égaré dans ce canton détourné de la nature ; et que, de ce petit cachot où il se trouve logé, j'entends l'univers, il apprenne à estimer la terre, les royaumes, les villes et soi-même, son juste prix. Qu'est-ce qu'un homme dans l'infini ?
Mais pour lui présenter un autre prodige aussi étonnant, qu'il recherche dans ce qu'il connaît les choses les plus délicates. Qu'un ciron lui offre dans la petitesse de son corps des parties incomparablement plus petites, des jambes avec des jointures, des veines dans ces jambes, du sang dans ces veines, des humeurs dans ce sang, des gouttes dans ces humeurs, des vapeurs dans ces gouttes ; que, divisant entre ces dernières choses, il épuise ses forces en ces conceptions, et que le dernier objet où il peut arriver soit maintenant celui de notre discours ; il pensera peut-être que c'est là l'extrême petitesse de la nature. Je veux bien lui faire voir là-dedans un abîme nouveau. Je veux lui peindre non seulement l'univers visible, mais l'immensité qu'on peut concevoir de la nature, dans l'enceinte de ce raccourci d'atome. Qu'il y voie une infinité d'univers, dont chacun a son firmament, ses planètes, sa terre, en la même proportion que le monde visible ; dans cette terre, des animaux, et enfin des cirons, dans lesquels il retrouvera ce que les premiers ont donné ; et trouvant encore dans les autres la même chose sans fin et sans repos, qu'il se perde dans ces merveilles, aussi étonnantes que leur petitesse que les autres par leur étendue.

Annexe 2 : *Le Pari* (extrait)

Examinons donc ce point, et disons : « Dieu est, ou il n'est pas ». Mais de quel côté pencherons-nous ? La raison n'y peut rien déterminer : il y a un chaos infini qui nous sépare. Il se joue un jeu, à l'extrémité de cette distance infinie, où il arrivera croix ou pile. Que gagerez-vous ? Par raison, vous ne pouvez faire ni l'un ni l'autre ; par raison, vous ne pouvez défaire nul des deux. Ne blâmez donc pas de fausseté ceux qui ont pris un choix ; car vous n'en savez rien.

– Non ; mais je les blâmerai d'avoir fait, non ce choix, mais un choix ; car, encore que celui qui prend croix et l'autre soient en pareille faute, ils sont tous deux en faute : le juste est de ne point parier.
– Oui, mais il faut parier ; cela n'est pas volontaire, vous êtes embarqué. Lequel prendrez-vous donc ? Voyons. Puisqu'il faut choisir, voyons ce qui vous intéresse le moins. Vous avez deux choses à perdre : le vrai et le bien, et deux choses à engager : votre raison et votre volonté, votre connaissance et votre béatitude ; et votre nature a deux choses à fuir : l'erreur et la misère. Votre raison n'est pas plus blessée, en choisissant l'un que l'autre, puisqu'il faut nécessairement choisir. Voilà un point vidé. Mais votre béatitude ? Pesons le gain et la perte, en prenant croix que Dieu est. Estimons ces deux cas : si vous gagnez, vous gagnez tout ; si vous perdez, vous ne perdez rien. Gagez donc qu'il est, sans hésiter.

– Cela est admirable. Oui, il faut gager ; mais je gage peut-être trop.

– Voyons. Puisqu'il y a pareil hasard de gain et de perte, si vous n'aviez qu'à gagner deux vies pour une, vous pourriez encore gager ; mais s'il y en avait trois à gagner, il faudrait jouer (puisque vous êtes dans la nécessité de jouer), et vous seriez imprudent, lorsque vous êtes forcé à jouer, de ne pas hasarder votre vie pour en gagner trois à un jeu où il y a pareil hasard de perte et de gain. Mais il y a une éternité de vie de bonheur. Et cela étant, quand il y aurait une infinité de hasards dont un seul serait pour vous, vous auriez encore raison de gager un pour avoir deux, et vous agiriez de mauvais sens, étant obligé à jouer, de refuser de jouer une vie contre trois à un jeu où d'une infinité de hasards il y en a un pour vous, s'il y avait une infinité de vie infiniment heureuse à gagner. Mais il y a ici une infinité de vie infiniment heureuse à gagner, un hasard de gain contre un nombre fini de hasards de perte, et ce que vous jouez est fini. Cela ôte tout parti : partout où est l'infini, et où il n'y a pas infinité de hasards de perte contre celui de gain, il n'y a point à balancer, il faut tout donner.

– Car il ne sert de rien de dire qu'il est incertain si on gagnera, et qu'il est certain qu'on hasarde, et que l'infinie distance qui est la *certitude* de ce qu'on s'expose, et l'*incertitude* de ce qu'on gagnera, égale le bien fini, qu'on expose certainement, à l'infini, qui est incertain. Cela n'est pas ; aussi tout joueur hasarde avec certitude pour gagner avec incertitude ; et néanmoins il hasarde certainement le fini pour gagner incertainement le fini, sans pécher contre la raison. Il n'y a pas infinité de distance entre certitude de ce qu'on s'expose et l'incertitude du gain ; cela est faux. Il y a, à la vérité, infinité entre la certitude de gagner et la certitude de perdre. Mais l'incertitude de gagner est proportionnée à la certitude de ce qu'on hasarde, selon la proportion des hasards de gain et de perte. Et de là vient que, s'il y a autant de hasards d'un côté que de l'autre, le parti est à jouer égal contre égal ; et alors la certitude de ce qu'on s'expose est égale à l'incertitude du gain ; tant s'en faut qu'elle en soit infiniment distante. Et ainsi, notre proposition est dans une force infinie, quand il y a le fini à hasarder à un jeu où il y a pareils hasards de gain que de perte, et l'infini à gagner. Cela est démonstratif ; et si les hommes sont capables de quelque vérité, celle-là l'est.

Bibliographie

[1] BLAISE PASCAL, Pensées, *Edition de Michel Le Guern* , Folio classique (1995).

[2] J.-N. DUMONT (1996), Premières leçons sur les Pensées de Blaise Pascal, *PUF.*

Nadine MEYER
Lycée Yourcenar, Erstein
nadine.meyer@ac-strasbourg.fr

Martin DUMONT
Lycée Watteau, Valenciennes
martindmnt@yahoo.fr

Optimiser ... en découpant des polyèdres

Renaud Sirdey

Résumé : Dans de nombreux domaines, les ingénieurs se trouvent confrontés à des problèmes combinatoires intrinsèquement difficiles. Une approche géométrique conduit à des méthodes, les *méthodes polyédriques*, qui permettent, en pratique, de les résoudre.

Mots-clés : Optimisation combinatoire - Polyèdres - Complexité.

Introduction

L'optimisation combinatoire est la branche des mathématiques qui traite des problèmes où il convient de trouver un meilleur élément parmi un ensemble de taille finie mais astronomique, ceci sans avoir recours à l'examen, impossible en pratique, de tous les éléments de l'ensemble.

Le problème bien connu du voyageur de commerce est emblématique. Il s'agit, étant donné un ensemble de villes et, pour chaque couple de villes, la distance qui les sépare, de trouver une tournée, c'est-à-dire un circuit passant une et une seule fois par chacune des villes, de longueur minimale. S'il y a n villes alors il y a $n!$ tournées possibles et, typiquement, 23! est du même ordre de grandeur que le nombre de microsecondes qui se sont écoulées depuis le *big bang* !

Un grand nombre de problèmes d'optimisation combinatoire sont NP-difficiles (c'est le cas de l'exemple ci-dessus), ce qui signifie qu'il est fort vraisemblable qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de les résoudre qui soit efficace, autrement dit qui soit capable de faire significativement mieux, *dans le pire des cas*, que l'examen exhaustif du nombre exponentiel de solutions.

Ces résultats négatifs ne doivent pas obscurcir le tableau outre mesure : pour un problème NP-difficile donné, il existe généralement des familles d'instances particulières qui peuvent, elles, être résolues efficacement et, surtout, il peut s'avérer que la majeure partie des instances rencontrées en pratique ne soient pas si difficiles.

Une approche géométrique conduit à des méthodes, les *méthodes polyédriques*, qui sont actuellement parmi les plus performantes pour la résolution exacte de ces problèmes combinatoires difficiles.

1. Complexité des algorithmes

La complexité d'un algorithme est une fonction de la taille du problème (par exemple le nombre de villes dans le cas du problème du voyageur de commerce) qui fournit, à un facteur multiplicatif près, une borne supérieure sur le temps d'exécution de l'algorithme. Dans la mesure où cette borne est indépendante de l'instance, on parle de complexité au pire. On dit qu'un algorithme est *polynomial* ou tout simplement *efficace*, si cette fonction est un polynôme.

Identifier les algorithmes efficaces aux algorithmes polynomiaux est assez naturel. Par exemple, pour un problème linéaire (polynomial de degré 1) doubler la vitesse de l'ordinateur utilisé pour le résoudre revient *grosso modo* à doubler la taille des instances que l'on peut résoudre dans un intervalle de temps donné. Pour un problème dont la complexité est exponentielle, par contre, doubler la vitesse de l'ordinateur permet seulement d'ajouter une constante à la taille des instances que l'on peut traiter dans le même intervalle de temps !

Il existe de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire qui peuvent être résolus efficacement, on dit aussi *en temps polynomial*. Par exemple, le problème du plus court chemin dans un graphe, le problème du flot de plus petit coût sur un réseau de transport et les problèmes de couplages sont tous des problèmes polynomiaux.

Néanmoins, il existe aussi de nombreux problèmes que l'on ne sait pas, aujourd'hui, résoudre efficacement, il s'agit des problèmes NP-difficiles.

L'ensemble NP est l'ensemble des problèmes de décisions, c'est-à-dire des questions dont la réponse est soit oui soit non, tels que, pour chacune des instances dont la réponse est oui, il existe un certificat qui permet de montrer en temps polynomial que la réponse est bien oui. Par exemple, si la question est de savoir, pour une instance du problème du voyageur de commerce, s'il existe une tournée de longueur au plus L alors, si la réponse est positive, il suffit d'exhiber une tournée qui vérifie cette propriété et il suffit alors de la parcourir, ce qui ne requiert qu'un temps proportionnel au nombre de villes.

L'ensemble des problèmes de décision que l'on peut résoudre en temps polynomial est noté P et il est généralement conjecturé que $P \neq NP$, autrement dit que certains problèmes de NP ne peuvent pas être résolus en temps polynomial. Cette conjecture fait partie des sept célèbres problèmes du millénaire dotés par la fondation Clay d'un prix d'un million de dollars[1].

Il y a bien sûr des problèmes de décision qui ne sont pas dans NP, certains problèmes de décision ne sont même pas décidables auquel cas il n'existe tout simplement pas d'algorithme permettant systématiquement d'obtenir une réponse en temps fini ! Le problème de l'arrêt d'une machine de Turing est emblématique de cette dernière famille.

Il existe dans NP des problèmes qui ont la particularité d'être polynomialement équivalents à tous les autres problèmes de NP, il s'agit des problèmes NP-complets. L'existence de tels problèmes est riche de conséquences : les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de NP et s'il existe un algorithme polynomial qui permet de résoudre l'un des problèmes NP-complets alors cet algorithme peut être utilisé pour résoudre tous les problèmes de NP (NP-complets ou non) en temps polynomial.

Jusqu'ici nous avons uniquement considéré des problèmes de décision or nous sommes intéressés par des problèmes d'optimisation. Il est clair que si l'on sait résoudre un problème d'optimisation, par exemple, trouver une tournée de voyageur de commerce de longueur minimale alors on sait répondre à toutes les questions de la forme « existe-t-il une tournée de voyageur de commerce de longueur au plus L ? ». Inversement, si l'on sait répondre aux questions de la forme « existe-t-il une tournée de voyageur de commerce de longueur au plus L ? » alors on sait aussi résoudre le problème d'optimisation associé, par exemple, à l'aide d'une recherche dichotomique. Le nombre de questions à poser est alors de l'ordre du nombre de bits nécessaire pour coder les distances. Ceci permet donc de définir la notion

[1] Voir sur la toile à l'adresse `www.claymath.org/millennium/`.

de problème d'optimisation NP-difficile : un problème d'optimisation NP-difficile est un problème d'optimisation qui est au moins aussi difficile qu'un problème NP-complet.

2. Polyèdres

Un *polyèdre*[2] consiste en l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés, il s'agit donc d'un ensemble que l'on peut écrire sous la forme $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ où A est une matrice $m \times n$ à valeurs réelles et où $b \in \mathbb{R}^m$. Chaque ligne de la matrice A définit, avec le coefficient du vecteur b associé, l'hyperplan frontière du demi-espace associé.

Un polyèdre est de *pleine dimension* si son intérieur (c'est-à-dire $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax < b\}$) n'est pas vide.

Un hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha^T x = \beta\}$ *supporte* un polyèdre s'il ne le coupe pas en deux et si son intersection avec le polyèdre n'est pas vide ; cette intersection définit alors une *face* du polyèdre. Les faces de dimension 0 et 1 s'appellent respectivement les *sommets* et les *arêtes* du polyèdre. Les faces de dimension maximale ($n - 1$ si le polyèdre est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de pleine dimension) s'appellent des *facettes*, ce sont les faces qui « collent » au mieux au polyèdre. La figure 1 illustre ces notions.

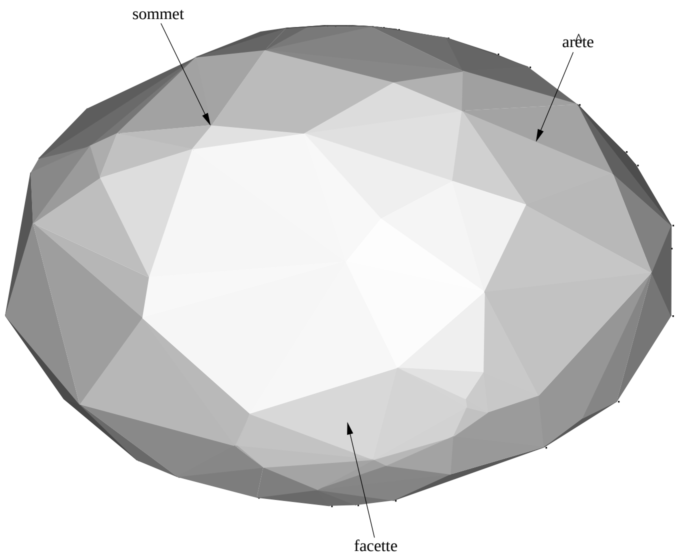


FIG. 1 – Exemple de polyèdre de pleine dimension (dans le cas contraire, il serait inclus dans un plan et, par conséquent, son intérieur serait vide) inclus dans $\mathbb{R}^3$. Les sommets et les arêtes sont des ensembles de dimension 0 et 1, respectivement. Ici, les facettes sont des ensembles de dimension 2. Les niveaux de gris ont été attribués aux facettes par simulation d'un éclairage de face.

Un polyèdre borné (soit contenu dans une boule de rayon fini) s'appelle un *polytope.* Tout polytope correspond à l'enveloppe convexe de ses sommets.

[2]Les polyèdres considérés ici sont toujours convexes.

3. La programmation linéaire

L'invention, en 1947, de la programmation linéaire, indissociable de celle de l'algorithme du simplexe, par G.-B. DANTZIG est l'un des tours de force mathématiques du vingtième siècle.

Formellement, un programme linéaire consiste, étant donné un vecteur $c \in \mathbb{R}^n$, une matrice A, $m \times n$, à valeurs réelles et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, à trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, solution du programme mathématique suivant :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } c^T x, \\ \text{sous la contrainte} \\ Ax \leq b. \end{cases}$$

Les premières applications de la programmation linéaire ont concerné les plans de formation, d'approvisionnement et de déploiement des troupes de l'armée de l'air américaine. Ces plans, appelés *programmes*, ont donné leur nom à la programmation linéaire puis, peu après, à la programmation mathématique en général.

L'exemple probablement le plus classique d'application de la programmation linéaire consiste à déterminer le régime alimentaire le moins cher qui soit conforme aux recommandations des nutritionnistes. Soit D un ensemble de denrées alimentaires et N un ensemble de nutriments (glucides, protides, lipides, etc.). On note c_d le coût unitaire de la denrée d et A_{nd} la quantité unitaire du nutriment n apportée par la denrée d. Enfin, b_n^- et b_n^+ dénotent respectivement les apports quotidiens minimum et maximum recommandés. Soit x_d la quantité de la denrée d à acheter, le problème s'énonce alors comme suit

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \sum_{d \in D} c_d x_d, & \\ \text{sous les contraintes} & \\ b_n^- \leq \sum_{d \in D} A_{nd} x_d \leq b_n^+ & \forall n \in N, \\ x_d \geq 0 & \forall d \in D. \end{cases}$$

Contrairement aux apparences, un programme linéaire est un problème d'optimisation combinatoire. En effet, un tel programme possède une interprétation géométrique assez intuitive : dans la mesure où chaque ligne de la matrice A définit, avec le coefficient du vecteur b associé, un hyperplan, le problème revient à optimiser une forme linéaire sur un polyèdre, l'optimum (s'il existe) étant forcément réalisé en l'un de ses sommets. Puisque ces derniers sont en nombre fini, il s'agit bien d'un problème de nature combinatoire.

Généralement, on résout les programmes linéaires à l'aide de l'algorithme du simplexe. Grossièrement, l'algorithme du simplexe part d'un sommet du polyèdre[3] puis, à chaque itération, emprunte l'une de ses arêtes de manière à atteindre un *meilleur* sommet voisin. Cette dernière opération requiert la résolution de deux systèmes linéaires accompagnée de quelques manipulations. Ce schéma est répété jusqu'à ce que le sommet courant soit au moins aussi bon que tous ses voisins, donc optimal. La figure 2 illustre le fonctionnement de l'algorithme. Bien que son efficacité pratique soit remarquable, l'algorithme du simplexe n'est pas un algorithme polynomial : il existe des instances pathologiques à n variables et $2n$ contraintes qui requièrent un nombre exponentiel, $2^n - 1$, d'itérations.

[3] Trouver ce sommet nécessite la résolution, à l'aide de l'algorithme du simplexe, d'un programme linéaire dérivé du programme à résoudre pour lequel trouver un sommet initial est trivial.

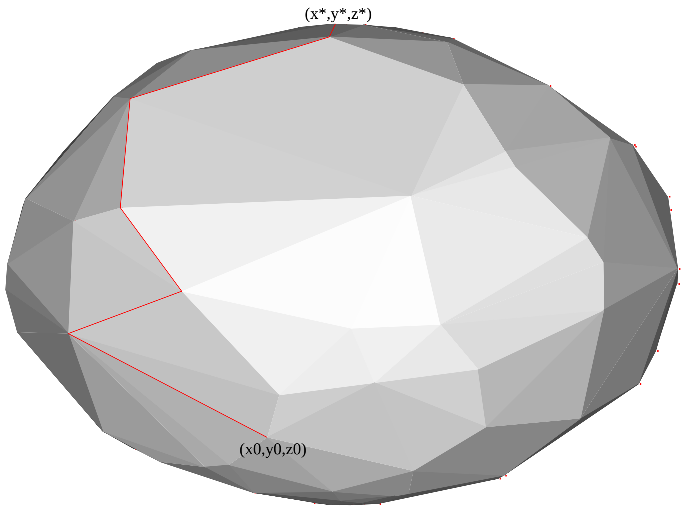


Fig. 2 – Exemple de chemin emprunté par l'algorithme du simplexe afin de trouver le sommet le plus élevé (soit maximiser y) du polyèdre ci-dessus. L'algorithme part du sommet (x_0, y_0, z_0) et chemine, en prenant systématiquement de l'altitude, jusqu'au sommet culminant (x^*, y^*, z^*).

Néanmoins, il existe des algorithmes polynomiaux capables de résoudre le problème de la programmation linéaire, en particulier l'algorithme de l'ellipsoïde introduit en 1979 par L. G. Khachiyan. Étant donné un polyèdre borné, donc un polytope, de pleine dimension (ces restrictions peuvent être levées au prix d'une technicité accrue) défini par un système linéaire d'inégalités, ce dernier algorithme fonctionne *grosso modo* comme suit. Au départ, on commence avec un ellipsoïde (la généralisation d'une ellipse à un nombre arbitraire de dimensions) suffisamment gros pour contenir toutes les solutions du système. À chaque itération, on vérifie si le centre de l'ellipsoïde correspond à une solution réalisable, si c'est le cas on s'arrête, sinon on choisit un hyperplan contenant le centre de l'ellipsoïde et qui le coupe de telle manière que l'une de ses moitiés contienne toutes les solutions réalisables. On choisit alors le plus petit ellipsoïde contenant cette dernière moitié et on itère jusqu'à ce que le volume de l'ellipsoïde soit en deçà d'un certain seuil, bien défini car un polytope (rationnel) de pleine dimension ne peut pas avoir un volume arbitrairement petit. La figure 3 illustre le fonctionnement de l'algorithme. Énoncé de cette manière, l'algorithme permet uniquement de décider si l'ensemble des solutions du système d'inégalités est vide ou pas. Une telle primitive, si tant est, ce qui est le cas ici, qu'elle soit polynomiale, permet néanmoins de résoudre le problème de la programmation linéaire en temps polynomial.

Bien qu'il ne puisse (paradoxalement ?) rivaliser, en pratique, avec l'algorithme du simplexe[4] et qu'il souffre de problèmes d'instabilité numérique, l'algorithme de l'ellipsoïde est, comme nous allons le voir, d'une importance théorique capitale.

[4]Contrairement à l'algorithme polynomial de point intérieur introduit en 1984 par N. Karmarkar.

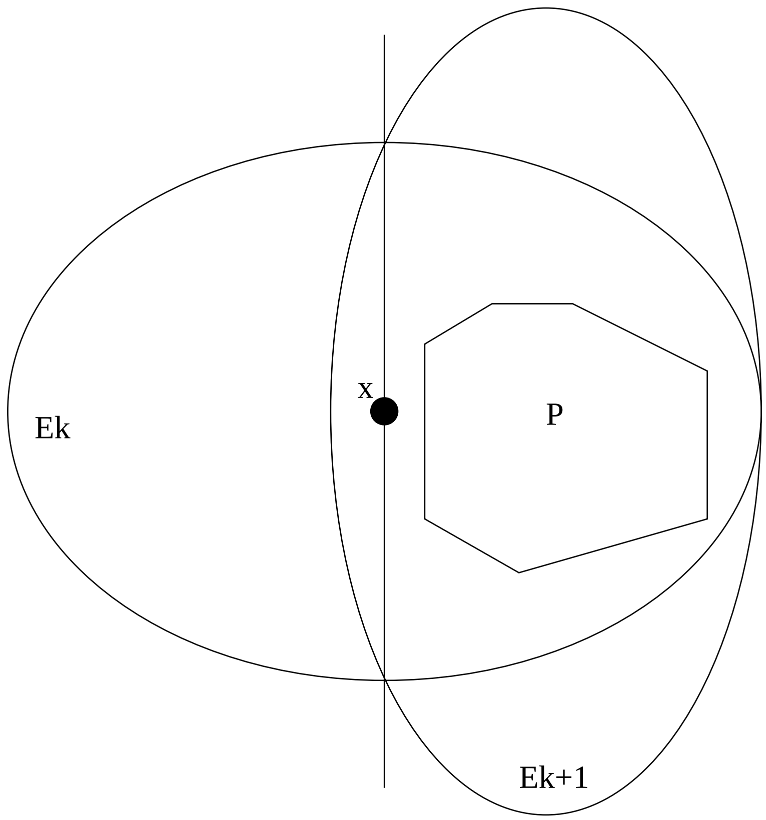


FIG. 3 – Illustration d'une itération de l'algorithme de l'ellipsoïde : l'ellipsoïde E_k contient le polytope P et son centre, x, n'appartient pas à P, on choisit donc un plan, passant par x, qui sépare x de P. La moitié droite de E_k, qui contient P, est choisie et E_{k+1} correspond justement au plus petit ellipsoïde qui contient cette moitié.

4. L'équivalence séparation/optimisation

En 1981, M. GRÖTSCHEL, L. LOVÁSZ et A. SCHRIJVER ont montré comment modifier l'algorithme de l'ellipsoïde afin de résoudre, bien sûr toujours en temps polynomial, des programmes linéaires sans que le système d'inégalités ne soit explicitement donné. Leur algorithme ne requiert qu'un *oracle séparateur*, c'est-à-dire un algorithme qui, étant donné un point de l'espace euclidien, décide s'il appartient au polyèdre ou fournit un hyperplan qui le sépare de ce dernier, qui n'est interrogé qu'un nombre polynomial de fois.

Muni de ce résultat, on peut, au moins en théorie, résoudre en temps polynomial des programmes linéaires à un nombre exponentiel (du nombre de variables) de contraintes à condition que le problème de séparation soit polynomial.

Plus généralement, si l'on sait séparer en temps polynomial alors on sait optimiser en temps polynomial (la réciproque est aussi vraie mais nous n'entrerons pas, ici, dans les détails). Il s'agit d'un résultat central de l'informatique théorique par le biais duquel on a pu montrer que des problèmes étaient polynomiaux bien avant qu'un algorithme « combinatoire » (c'est-à-dire exploitant directement la structure du problème) ne soit connu (on pourrait presque parler de preuves non constructives). Par ailleurs, certains problèmes polynomiaux attendent toujours leur algorithme « combinatoire »...

5. Résolution exacte des problèmes *NP*-difficiles

Ici, nous nous intéressons aux problèmes NP-difficiles que l'on peut écrire sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers, c'est-à-dire d'un programme mathématique de la forme

$$\begin{cases} \text{Minimiser } c^T x, \\ \text{sous les contraintes} \\ rAx \leq b, \\ x \in \mathbb{Z}^n. \qquad\qquad (I) \end{cases}$$

C'est le cas pour de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire, NP-difficiles ou non.

La contrainte d'intégrité (I) ne change pas la nature du problème : il s'agit toujours d'optimiser une forme linéaire sur un polyèdre, le *polyèdre entier*, qui correspond à l'enveloppe convexe des solutions entières du système $Ax \leq b$. En effet, il existe un système linéaire d'inégalités minimal $A'x \leq b'$, principalement composé de facettes du polyèdre entier, tel que le problème ci-dessus est équivalent au programme linéaire

$$\begin{cases} \text{Minimiser } c^T x, \\ \text{sous la contrainte} \\ A'x \leq b'. \end{cases}$$

Malheureusement, à moins que la contrainte d'intégrité ne soit redondante, ce qui n'est que rarement le cas, le système $A'x \leq b'$ possède un nombre astronomique de lignes. Dans le cas des problèmes polynomiaux, ce n'est pas si grave, au moins en théorie, grâce, nous l'avons vu, à l'équivalence optimisation/séparation. Pour les problèmes NP-difficiles, par contre, le système $A'x \leq b'$ reste inaccessible dans son intégralité. Ceci étant dit, une connaissance partielle de ce système s'avère, en pratique, extrêmement pertinente.

En effet, une approche actuellement parmi les plus performantes pour la résolution exacte des problèmes NP-difficiles consiste à exploiter, dans le cadre d'un schéma de recherche arborescente, le programme linéaire continu obtenu en ignorant la contrainte d'intégrité (I), itérativement enrichi de facettes du polyèdre entier.

6. L'exemple du problème du voyageur de commerce

Pour se fixer les idées, revenons à notre problème de voyageur de commerce. Une instance à n villes peut être spécifiée, dans le cas symétrique, à l'aide d'un vecteur c à $\frac{n(n-1)}{2}$ composantes, chacune d'entre elles étant associée à une arête du graphe non orienté complet dont les n nœuds sont les villes. De même, une tournée peut être représentée à l'aide de son *vecteur caractéristique*, c'est-à-dire d'un vecteur x à $\frac{n(n-1)}{2}$ composantes binaires qui est tel que $x_e = 1$ si et seulement si l'arête e appartient à la tournée. Le problème revient alors à trouver un vecteur $x^\star$ qui est le vecteur caractéristique d'une tournée et dont la longueur,

$$c^T x^\star = \sum_{e \in E} c_e x_e^\star,$$

est minimale.

Le polyèdre défini comme l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des tournées s'appelle le *polytope du voyageur de commerce*. Il s'agit bien d'un polytope car il est contenu dans l'hypercube unité à $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensions.

Pour mettre le problème sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers on procède généralement comme suit. Tout d'abord on impose les contraintes $0 \leq x_e \leq 1$ pour chaque arête e. Ensuite, on requiert que chaque ville soit visitée une et une seule fois ce qui revient à imposer qu'exactement deux des variables associées aux arêtes incidentes à un nœud v aient pour valeur 1. Formellement,

$$\sum_{e:v\in e} x_e = 2, \tag{1}$$

pour tout nœud $v \in \{1,\ldots,n\}$. Ces deux familles de contraintes permettent les vecteurs caractéristiques d'unions d'un ensemble de sous-tournées indépendantes, ces dernières n'étant bien évidemment pas des solutions admissibles. Pour les éliminer, il convient d'imposer que la tournée entre et sorte de chaque sous ensemble strict non vide de villes, autrement dit qu'au moins deux des variables associées aux arêtes dont un et un seul des nœuds est dans $\emptyset \subset V \subset \{1,\ldots,n\}$ aient pour valeur 1. Formellement,

$$\sum_{e:|V\cap e|=1} x_e \geq 2, \tag{2}$$

pour tout $\emptyset \subset V \subset \{1,\ldots,n\}$. Bien que ces dernières contraintes soient en nombre exponentiel, il y en a $2^n - 2$, elles sont séparables en temps polynomial.

Associé à la contrainte d'intégrité, l'ensemble des contraintes ci-dessus suffit à définir un programme linéaire en nombres entiers dont les solutions optimales sont les solutions optimales de l'instance du problème du voyageur de commerce associée.

Depuis les premiers travaux de G.-B. Dantzig et de R. Fulkerson, dans les années cinquante, de nombreux mathématiciens se sont attelés à l'étude du polytope du voyageur de commerce. Il en résulte, en particulier, tout un bestiaire de classes d'inégalités connues pour définir des facettes de ce polytope. Les inégalités (2) ci-dessus en font partie.

Comment, alors, résout-on le problème du voyageur de commerce ?

L'idée consiste à commencer par résoudre le programme linéaire continu comprenant les inégalités $0 \leq x_e \leq 1$, pour chaque arête e, et les égalités (1). Ce programme définit une *relaxation linéaire* du problème. Si, par chance, on obtient un vecteur solution caractéristique d'une tournée, alors on a fini. Sinon on recherche une ou plusieurs, généralement plusieurs, facettes qui sont violées par le vecteur solution courant et on les ajoute à la relaxation, de manière à « couper » la solution courante (voir la figure 4), que l'on résout à nouveau. Ce schéma est répété soit jusqu'à obtention d'un vecteur caractéristique d'une tournée, donc optimale, soit jusqu'à ce que l'on ne soit pas en mesure de trouver une nouvelle facette violée par la solution courante, rappelons en effet que l'on ne dispose que d'une connaissance très partielle du polytope entier. Dans ce dernier cas, la valeur de la solution non réalisable courante fournit un minorant de la longueur d'une tournée optimale.

Lorsque l'on se retrouve coincé, on scinde le problème en deux sous-problèmes en choisissant de fixer une variable, par exemple, à 0 et en résolvant le problème sous cette contrainte puis en fixant cette même variable à 1 et en gardant la meilleure des deux solutions obtenues. Ce schéma est appliqué récursivement : les sous-problèmes sont, si nécessaire, scindés en deux sous-sous-problèmes et ainsi de suite. L'algorithme décrit alors une arborescence dont les nœuds correspondent aux sous-problèmes.

Afin de réduire, autant que faire se peut, la taille de l'arborescence, l'algorithme mémorise la valeur de la meilleure tournée déjà rencontrée. Dans le cas où, lors de la résolution d'un

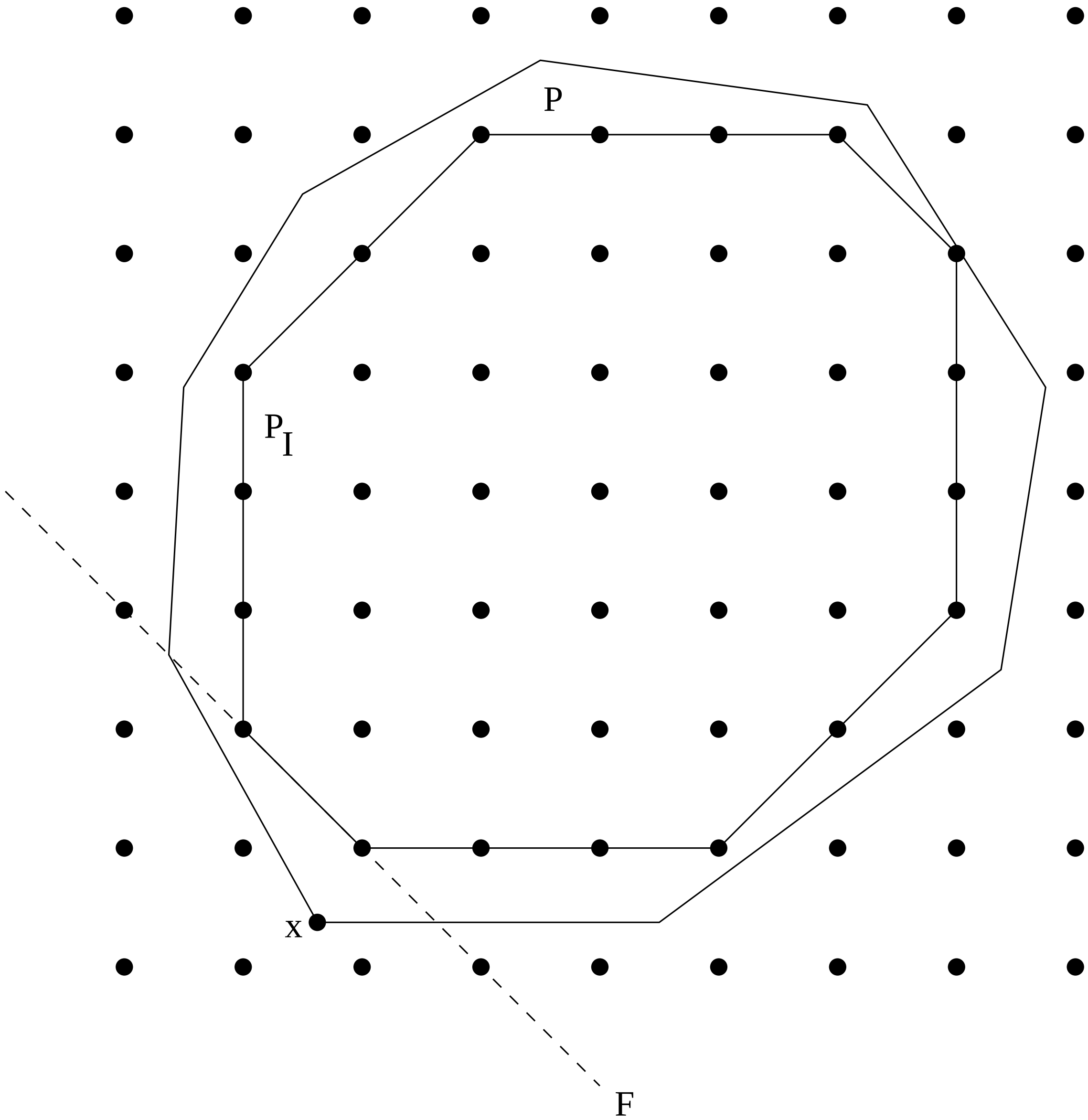


Fig. 4 – P est le polyèdre $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b\}$ et P_I est le polyèdre entier correspondant. La facette F sépare le sommet fractionnaire $x \in P$ de P_I.

sous-problème, l'ajout de facettes ne permet pas d'obtenir un vecteur caractéristique d'une tournée, il convient de s'assurer que le minorant obtenu n'est pas supérieur à la valeur de la meilleure solution déjà rencontrée. Si c'est le cas, résoudre le sous-problème est inutile. Ce principe permet de réduire le nombre de sous-problèmes à résoudre, donc le nombre de nœuds explorés, de manière drastique.

C'est à l'aide d'un algorithme de ce type, bien sûr beaucoup plus raffiné, et d'une bonne dose d'ingéniosité informatique que D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal et W. Cook ont réussi, en 1998, à résoudre une instance du problème du voyageur de commerce à plus de 13000 villes. Certes au prix de l'équivalent d'une dizaine de jours de calcul réparti sur un réseau d'une cinquantaine de stations de travail, ce qui ne diminue en rien la performance. La même équipe, renforcée par K. Helsgaun, détient le présent record : il est, depuis mai 2004, possible d'effectuer une tournée optimale des 24978 villes de Suède[5] !

[5]Voir sur la toile à l'adresse `www.tsp.gatech.edu`.

Malgré ces résultats empiriques remarquables, on sait aussi construire des instances de petite taille que l'on n'arrive pas, en pratique, à résoudre. Le problème du voyageur de commerce reste donc difficile, dans le pire des cas, et la conjecture $P \neq NP$ tient bon.

7. Quid des applications industrielles ?

Dans des domaines aussi variés que l'informatique, les télécommunications, le transport, la production, la finance ou la bioinformatique, les ingénieurs se trouvent régulièrement confrontés à des problèmes d'optimisation combinatoire, qu'ils soient NP-difficiles ou non. Par exemple, les problèmes d'affectation de fréquences dans les réseaux de téléphonie mobile ou les problèmes de conception de réseaux fiables, pour ne parler que du domaine des télécommunications, sont des problèmes NP-difficiles que l'on résout à l'aide des méthodes polyédriques.

Avec H. Kerivin du laboratoire d'informatique, de modélisation et d'optimisation des systèmes (Limos) de l'université de Clermont-Ferrand II, nous nous sommes attaqués à un problème de reconfiguration dynamique d'autocommutateurs répartis à l'aide, entre autres, des méthodes polyédriques. En quelques mots, il s'agit d'ordonner des déplacements de processus de traitement d'appels de telle manière que des contraintes de capacité sur les processeurs du système ne soient jamais violées, les situations de blocage étant résolues en arrêtant temporairement des processus, donc en renonçant temporairement à rendre une partie du service. Il s'agit alors de minimiser la dégradation temporaire du service induite par la reconfiguration du système.

Naturellement, notre démarche a été similaire à celle suivie pour le voyageur de commerce : après nous être assurés qu'il était NP-difficile, nous avons mis notre problème sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers, puis nous avons mis en évidence des classes de facettes du polytope entier associé et étudié les problèmes de séparation, enfin nous avons exploité ces résultats théoriques dans le cadre d'un algorithme de recherche arborescente.

Bien entendu, nos résultats ne sont pas aussi spectaculaires que ceux obtenus par les « tombeurs » du voyageur de commerce (soulignons néanmoins que des instances à plusieurs dizaines de milliers de déplacements ou de processeurs n'ont pas grand sens sur le plan de notre application industrielle). Typiquement, notre algorithme permet de résoudre en moins de quelques heures, la majeure partie des instances pratiques (de l'ordre, au maximum, de 80 déplacements pour des systèmes à quelques dizaines de processeurs) et, lorsque la taille des instances augmente et que l'on se retrouve contraint d'arrêter prématurément l'algorithme, le minorant obtenu par résolution de la première relaxation linéaire permet de prouver que la valeur de la meilleure solution rencontrée ne se trouve qu'à quelques pourcents de celle d'une solution optimale. Ce dernier point illustre une autre des qualités fondamentales des algorithmes de recherche arborescente polyédrique : ils fournissent généralement une bonne estimation au pire de l'écart à l'optimum lorsque le temps imparti ne suffit pas à résoudre le problème.

Remerciements

L'auteur souhaite remercier J. Carlier, professeur à l'université de technologie de Compiègne, et H. Kerivin, maître de conférences à l'université de Clermont-Ferrand II, qui ont bien voulu relire l'intégralité de ce texte.

Bibliographie

[1] D. APPLEGATE, R. BIXBY, V. CHVÁTAL et W. COOK (1998), *On the solution of traveling salesman problems*, Documenta Mathematica **Extra Volume ICM**, 645–656.

[2] V. CHVÁTAL (1983), Linear programming, *W. H. Freeman and Company.*

[3] G. B. DANTZIG (1982), *Reminiscences about the origins of linear programming*, Operations Research Letters **1**, 43–48.

[4] K. DELVIN (2002), The millenium problems, *Basic Books.*

[5] M. R. GAREY et D. S. JOHNSON (1979), Computers and intractability, *W. H. Freeman and Company.*

[6] M. GRÖTSCHEL, L. LOVÁSZ et A. SCHRIJVER (1988), Geometric algorithms and combinatorial optimization, *Springer.*

[7] A. SCHRIJVER (2004), Combinatorial optimization, *Springer.*

[8] R. SIRDEY et H. KERIVIN (2006), *A branch-and-cut algorithm for a resource-constrained scheduling problem*, RAIRO—Operations Research **à paraître**.

Renaud SIRDEY
Nortel et UMR CNRS Heudiasyc
renauds@nortel.com

Pour vos vacances

Michel Émery

Résumé : Énoncé de problème.

Mots-clés : Problème - Dénombrement - Cercle - Longueur d'arc - Probabilité.

Le problème ci-dessous, qui m'a été signalé par Freddy Delbaen comme venant de Russie, est difficile bien qu'il admette une solution élémentaire ; n'hésitez pas à envoyer la vôtre à L'Ouvert, qui sera heureux de la publier.

Un cercle C est fixé une fois pour toutes. Deux points de C seront dits *proches* s'ils sont joints par un arc de C mesurant au plus $2\pi/3$ radians. Par exemple, (a) deux points diamétralement opposés ne sont pas proches, mais (b) les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans C sont proches deux-à-deux.

Étant donné un ensemble E de n points de C, montrer que, parmi les n^2 couples formant l'ensemble $E \times E$, au moins la moitié sont des couples de points proches.

Remarques.

1) L'exemple (a) plus haut montre que l'on ne peut pas remplacer dans le problème l'inégalité large « au moins la moitié » par l'inégalité stricte « plus de la moitié » ; l'exemple (b) montre que la propriété devient fausse si, dans la définition de la proximité, on remplace l'inégalité large « au plus $2\pi/3$ » par l'inégalité stricte « moins de $2\pi/3$ ».

2) L'énoncé que m'avait transmis Delbaen est un peu plus général ; intuitivement, il correspond au cas où E ne serait plus nécessairement fini ; sa solution est essentiellement la même, avec un peu de théorie de la mesure, et un ε en plus. Sa formulation est probabiliste : *deux points de C, tirés au hasard, indépendamment et selon une même loi de probabilité* (n'importe laquelle), *ont au moins une chance sur deux d'être proches.* Lorsque les tirages sont effectués uniformément parmi les n points de l'ensemble E, on retrouve l'énoncé précédent.

Michel Émery
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
67 084 Strasbourg Cedex
emery@math.u-strasbg.fr