

MATHÉMATIQUES ET MUSIQUE : ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Depuis plusieurs années, nous développons à Strasbourg un travail important sur l'alliage Mathématiques-Musique, à travers des conférences, des rencontres et des séminaires réguliers, et à travers des cours proposés aux étudiants de l'UFR de Mathématiques et Informatique et à ceux de l'UFR de Sciences Physiques de l'Université Louis Pasteur, ainsi qu'à ceux du Département de Musicologie de l'Université Marc Bloch.

Le présent volume de l'*Ouvert* paraît un an après la deuxième "Rencontre Mathématiques-Musique" que j'ai co-organisée avec Xavier HASCHER à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg en décembre 2005. Il réunit les textes des conférences qui y ont été présentées, et il témoigne encore une fois de la diversité des points de vue sur ce vaste sujet.

L'algèbre et la géométrie peuvent être utilisées dans la composition, dans l'analyse, et dans la théorie musicale. Il est toujours bon de voir comment les mathématiques peuvent servir la musique.

Il est peut-être utile de rappeler ici que plusieurs compositeurs importants, en particulier parmi ceux du vingtième siècle, ont utilisé des structures mathématiques (algébriques ou géométriques) comme base de leurs compositions. Certains de ces compositeurs, comme Olivier MESSIAEN, Yannis XENAKIS et Pierre BOULEZ (pour en citer trois des plus connus), ont explicité dans des écrits théoriques les structures mathématiques dont ils se sont servis. D'autres ne l'ont pas fait (il suffit de penser à Arnold SCHOENBERG, qui au début de ses compositions basées sur les séries ne révélait ses méthodes qu'à un très petit cercle d'initiés). Le travail de l'analyste musical consiste alors à chercher ces structures et à les mettre en valeur.

On trouvera dans les textes qui suivent certaines méthodes de composition ou d'analyse, ou encore des façons de raconter le phénomène musical qui sont basées sur des structures mathématiques. Les deux premiers articles (ceux de HASCHER et de WEISS) ont un caractère algébrique, et les trois autres (ceux de JEDRZEJEWSKI, d' ANDREATTA et le mien) ont un caractère plus géométrique.

Xavier HASCHER introduit dans son article un nouveau modèle mathématique pour l'étude des accords, dans lequel interviennent les notions d'accord *régulier* et d'accord *semi-régulier*. L'accord est analysé en termes de la structure arithmétique des intervalles qui le définissent. La nature musicale de ces structures arithmétiques, qui fait que l'on s'intéresse à certaines de leurs symétries particulières, conduit à des questions intéressantes sur les approximations de nombres réels par d'autres. Cette étude constitue aussi pour nous une illustration du langage et des techniques d'analyse utilisés aujourd'hui par les théoriciens de la musique.

Nicolas WEISS, dans son article, décrit la structure algébrique des blocs sonores. Ces blocs sont équipés de lois de composition qui les munissent d'une structure de semi-anneau. La notion de bloc sonore a été introduite par Pierre BOULEZ, d'abord comme procédé théorique, et ensuite comme principe compositionnel. L'article de WEISS montre que les

blocs sonores peuvent aussi être étudiés comme exemples d'objets intéressants, de nature purement algébrique.

Franck JEDRZEJEWSKI présente dans son article plusieurs applications de la théorie des nœuds au domaine musical. L'étude des mots (au sens mathématique de langage symbolique) associés aux diagrammes des nœuds remonte à GAUSS, et il est agréable de voir pour la première fois cette étude appliquée à la théorie de la musique (classification des accords, *etc.* .) et à la recherche topologique dans l'analyse musicale. Ceci est une occasion de signaler que Franck JEDRZEJEWSKI, chercheur au CEA à Saclay, a soutenu récemment une Habilitation à Diriger les Recherches en musicologie, à l'Université Marc Bloch de Strasbourg, dont une partie traite de l'application de la théorie des nœuds au domaine musical.

L'article de Moreno ANDREATTA concerne les canons rythmiques. Les canons rythmiques ont été mis en valeur principalement par Olivier MESSIAEN, qui les a étudiés du point de vue théorique, et qui les a largement utilisés dans ses compositions. Ils sont en un certain sens plus abstraits que les canons mélodiques que tout le monde connaît. La notion de canon, en musique, peut être mise en parallèle avec la théorie mathématique des pavages. Dans cet article, ANDREATTA établit une relation entre les canons rythmiques et une conjecture de MINKOWSKI sur l'approximation des nombres réels par des rationnels, conjecture qui peut aussi être formulée en termes de pavages de l'espace de dimension n par des cubes unité.

Enfin, dans mon article, on retrouve les pavages, sous une forme plus classique, comme pavages des surfaces par des polygones réguliers. J'expose dans cet article des idées inspirées de l'œuvre de KEPLER, qui combine mathématique et musique. La théorie des pavages des surfaces, de même que celle de la construction des polygones réguliers à la règle et au compas, est mise en relation avec la théorie de la consonance. On voit en particulier dans cet article que des questions sur la consonance, étalées sur une période de 2500 ans, ont été abordées, sous des formes équivalentes, par des mathématiciens et des musicologues.

Les auteurs des quatre premiers articles ont inclus, à la fin de leur article, un lexique des mots techniques utilisés, destiné à un lecteur mathématicien, pour que l'article soit plus compréhensible aux lecteurs de l'*Ouvert*. Nous les remercions pour cela, et pour le reste, et je remercie Pierre JEHEL pour ses remarques utiles après sa lecture des textes de ce volume.

Athanase PAPADOPOULOS
Le 26 février 2007

ACCORDS RÉGULIERS ET SEMI-RÉGULIERS

Xavier HASCHER

Résumé : Soit E un ensemble, appelé espace musical, de hauteurs utilisées pour la composition. On construit dans cet espace des accords réguliers par division d'un intervalle entre deux hauteurs données h et g . On appelle cet intervalle la norme de l'accord. Dans le cas général d'une division en deux parties, on obtient une collection ordonnée de trois éléments (h, μ, h_1) représentant un accord de trois sons (ou tricorde), dont μ est appelé le centre et les intervalles (h, μ) et (μ, h_1) ses rayons. Ceux-ci peuvent alors être subdivisés, et les demi-rayons résultants sous-subdivisés, etc., donnant naissance à des accords de cardinalité plus importante. Par définition, on dit qu'un accord est régulier lorsque les hauteurs dont il est formé coïncident avec les hauteurs ainsi calculées ou en constituent les meilleures approximations possibles dans E . L'accord est semi-régulier lorsqu'on se contente de la deuxième meilleure approximation.

Mots-clés : Accord (construction de l'), Accord complexe, Accord dual, Espace musical, Musique et mathématique, Structure cordique, Système harmonique, Théorie musicale.

Introduction

Au contraire de l'interprétation courante, on évitera dans cet article de déduire la constitution des accords de la décomposition d'un son périodique en ses composantes harmoniques. Ce modèle, bien adapté pour décrire l'accord parfait majeur du système tonal et les accords dérivés, se montre néanmoins insatisfaisant lorsqu'il s'agit de rendre compte de formations cordiques étrangères à la série harmonique, comme l'a montré, du point de vue musicologique, l'étude de Jacques Chailley [2]. Notre hypothèse est que, parmi les différentes combinaisons de hauteurs disponibles dans les espaces musicaux diatoniques ou chromatiques, certaines se distinguent par la régularité de leur structure intervallaire. Les plus répandues sont celles reproduisant par superposition un intervalle donné : étagements par tierces selon le modèle tonal, « accords » par quarts, par quintes ou par tons entiers, éventuellement grappes chromatiques. Mais la catégorie des accords réguliers, tels que nous les définissons, englobe également certaines des combinaisons propres à la musique atonale du début du vingtième siècle comme les tricordes $(do, fa\#, si)$ ou (do, fa, si) et leurs transpositions, particulièrement fréquents dans l'œuvre de Schoenberg.

Dans une précédente publication [7], nous distinguons les « accords », dont la structure obéit à un regroupement des éléments selon un schéma périodique, des « agrégats » non réductibles à de tels schémas ; nous élargissons alors les notions d'harmonicité et d'inharmonicité pour les faire correspondre à cette distinction, sans référence à la résonance physique des corps sonores. Les propositions que nous faisons ici amendent et étendent à la fois ces considérations, en tenant compte de divers travaux produits par la musicologie théorique américaine dans le dernier quart de siècle : l'étude de N. Carey et D. Clampitt sur l'engendrement des échelles bien

formées [1], celles de J. Clough et G. Myerson sur les propriétés des systèmes diatoniques [4, 5], de J. Clough et J. Douthet sur les collections bien réparties [3], et de D. Lewin sur les système riemanniens et la perspective duale [8]. Enfin, nous nous référons à la classification désormais classique des collections de classes de hauteurs (c.c.h.) établie par A. Forte [6].

1. Construction des accords réguliers dans l'espace diatonique ordinaire

1.1. L'espace musical diatonique ordinaire \mathbf{E}_d se définit comme un espace indicé à 7 hauteurs par octave, le nombre d'octaves étant théoriquement infini. Étant donné une octave de référence $\{do, ré, mi, fa, sol, la, si\}$ de cet espace, une hauteur h appartenant à cette octave possède une fréquence f mesurée en hertz égale à $2^0 \cdot f(h)$. La première octave supérieure reproduit la structure de l'octave de référence en récrivant la fréquence de chaque hauteur sous la forme $2^1 \cdot f(h)$, et ainsi de suite pour chaque nouvelle octave. On désignera l'appartenance à la a -ième octave supérieure ou inférieure en indiquant par a chacune des notes de l'octave, $a \in \mathbb{Z}$. Par simplification, on omet de noter l'indice lorsque $a=0$ (c.-à-d. dans l'octave de référence). La classe de hauteurs $[h]$ rassemble toutes les hauteurs h_a en relation d'octave.

Pour construire un accord régulier, on commence par considérer un couple de hauteurs (h, h_1) séparées d'une octave, de sorte que $f(h_1) = 2f(h)$. En divisant l'octave en deux intervalles égaux, on obtient une note dont la fréquence est égale à $\sqrt{2} \cdot f(h)$. On cherche alors une hauteur $\mu \in \mathbf{E}_d$ telle que $f(\mu)$ est la plus proche possible de cette valeur. Dans l'espace diatonique ordinaire, il s'agit de la hauteur formant avec h un intervalle de longueur diatonique $\ell_d = 3$ ou $\ell_d = 4$. On définit ainsi un accord régulier de centre μ et de norme $\omega = \text{int}(h, h_1)$, l'intervalle entre h et h_1 . Dans le cas général, qui est celui considéré ici, la norme correspond au module de l'espace, c'est-à-dire l'octave, et le tricorde (h, μ, h_1) a pour contenu en classes de hauteurs la collection $\{[h], [\mu]\}$.

Lorsque $h \in \mathbf{E}_d \setminus \{[fa], [si]\}$, $f(\mu) \approx \sqrt{2} \cdot f(h)$ et $f(\mu) \neq \sqrt{2} \cdot f(h)$. La structure de l'accord est dissymétrique, le centre μ se trouvant soit à gauche (approximation par défaut), soit à droite de $\sqrt{2} \cdot f(h)$ (approximation par excès). Le centre se trouve alors en μ_g ou en μ_d respectivement, avec $\frac{f(\mu_d)}{\sqrt{2} \cdot f(h)} = \frac{\sqrt{2} \cdot f(h)}{f(\mu_g)}$. Les intervalles (h, μ) et (μ, h_1)

sont donc inégaux, leur différence de longueur diatonique étant égale à 1. On appelle rayon majeur ρ le plus grand, et rayon mineur ρ' le plus petit de ces intervalles. Si $h = fa$, alors $f(\mu) = \sqrt{2} \cdot f(h)$ et $\frac{f(\mu)}{f(h)} = \frac{f(h_1)}{f(\mu)}$. L'accord est symétrique avec $\mu = si$,

mais la longueur diatonique de l'un des rayons excède celle de l'autre de 1. En effet, $\ell_d \text{ int}(fa, si) = 3$ alors que $\ell_d \text{ int}(si, fa_1) = 4$. Enfin, si $h = si$, l'accord est également symétrique avec $\mu = fa_1$, et l'on retrouve $\ell_d \text{ int}(si, fa_1) = 4$ et $\ell_d \text{ int}(si_1, fa_1) = 3$. On désigne par ρ le rayon de plus grande, et par ρ' le rayon de moindre longueur diatonique respectivement.

1.2. On poursuit la construction de l'accord en subdivisant successivement ρ , puis ρ' . On commence par chercher une hauteur ε dont la fréquence est la plus proche possible

de $\sqrt{\frac{f(\mu)}{f(h)}} \cdot f(h)$ lorsque l'accord est dissymétrique à droite, c'est-à-dire quand $f(\mu)$ est

supérieure à $\sqrt{2} \cdot f(h)$, ou de $\sqrt{\frac{f(h_1)}{f(\mu)}} \cdot f(\mu)$ lorsque l'accord est dissymétrique à gauche,

c'est-à-dire quand $f(\mu)$ est inférieure à cette valeur. La subdivision de ρ' conduit alors à

chercher ε' tel que $f(\varepsilon') \approx \sqrt{\frac{f(h_1)}{f(\mu)}} \cdot f(\mu)$ (dissymétrie à droite), ou $f(\varepsilon') \approx \sqrt{\frac{f(\mu)}{f(h)}} \cdot f(h)$

(dissymétrie à gauche). On choisit toujours la meilleure approximation de la fréquence recherchée. Lorsque deux notes se trouvent à même distance du milieu de ρ' , ε' peut se trouver en ε'_g ou en ε'_d . (Le cas ne se présente pas pour ε dans les accords ici considérés.)

Enfin, lorsque l'accord est symétrique, ρ étant à gauche, $f(\varepsilon) = \sqrt[4]{2} \cdot f(h)$ et

$f(\varepsilon') = \frac{f(h_1)}{\sqrt[4]{2}}$, ou $f(\varepsilon') \approx \frac{f(h_1)}{\sqrt[4]{2}}$. Lorsque ρ est à droite, ces valeurs sont échangées.

En supposant un engendrement du système diatonique par quintes pures rabattues dans l'octave de référence, les hauteurs approximées par ε et ε' (dissymétrie à droite)

ou par ε' et ε (dissymétrie à gauche) correspondent à $\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot f(h)$ et

$\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot f(\mu) = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{3f(h)}{2}$, ou $\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot f(h)$ et $\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot f(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3f(h)}{2}$, respectivement.

On établit à présent la liste des collections représentant les contenus en classes de hauteurs des accords réguliers obtenus à partir des règles ci-dessus. Du fait du mode de construction des accords, chaque contenu peut être rattaché à deux accords dont l'un est dissymétrique à gauche, l'autre à droite. Seuls les accords où $\mu = si$ à droite ($h, h_1 \in [mi]$) et $\mu = fa$ à gauche ($h, h_1 \in [do]$) ne partagent leur contenu avec aucun autre accord. En revanche, les deux accords symétriques ont eux aussi les mêmes contenus :

$\{[do], [mi], [sol], [la]\}$
$\{[ré], [fa], [la], [si]\}$
$\{[ré], [fa], [la], [do]\}$
$\{[mi], [sol], [si], [ré]\}^*$
$\{[fa], [la], [do], [ré]\}^*$
$\{[sol], [si], [ré], [mi]\}$
$\{[sol], [si], [ré], [fa]\}$
$\{[la], [do], [mi], [sol]\}$
$\{[si], [ré], [fa], [sol]\}$
$\{[si], [ré], [fa], [la]\}$

FIG. 1.1

1.3. Au-delà, la construction de l'accord peut se poursuivre récursivement en sous-subdivisant les demi-rayons restants de longueur diatonique $\ell_d \geq 2$. On commence par le demi-rayon représentant le rapport de fréquences le plus élevé, jusqu'à ce que l'accord

contienne éventuellement toutes les hauteurs diatoniques comprises dans l'octave (h, h_1) .

2. Structure, inversion d'ordre et renversement dual

2.1. Laissant provisoirement de côté la subdivision du rayon mineur ρ' , on examine maintenant la structure générique des accords, mesurant la longueur diatonique des intervalles entre les éléments en tenant compte de l'ordre de ceux-ci. Ainsi, en prenant par exemple $h = do$, on a soit $\varepsilon = mi$ et $\mu = sol$ (à droite), soit $\varepsilon = la$ et $\mu = fa$ (à gauche), avec $h_1 = do_1$ dans les deux cas, donnant pour structure générique $\langle 2 \ 2 \ 3 \rangle$ et $\langle 3 \ 2 \ 2 \rangle$ respectivement :

$h = do$	(do, mi, sol, do_1)	$((do,) fa, la, do_1)$
Structure	$\langle 2 \ 2 \ 3 \rangle$	$\langle 3 \ 2 \ 2 \rangle$
générique		

FIG. 2.1

Ces structures sont rétrogrades l'une de l'autre, et l'ordre des deux accords est également inverse. Par référence au vocabulaire musical on désignera par structure authentique la structure définie sur les pseudo-tricordes (lorsqu'on néglige h_1) ou les tétracordes (lorsqu'on considère h_1), et par extension tous les n -cordes qui sont dissymétriques à droite, et structure plagale celle définie sur les pseudo-tricordes (en négligeant h) ou les tétracordes (en considérant h), et par extension tous les n -cordes dissymétriques à gauche.

Lorsqu'un accord est dissymétrique à gauche et muni, par conséquent, d'une structure plagale, il est indifférent de considérer $f(\mu)$ comme l'approximation par défaut de

$\sqrt{2} \cdot f(h)$ plutôt que de $\frac{f(h_1)}{\sqrt{2}}$. Par contre, en prenant pour nouvelle octave de référence

l'octave $\{do_1, ré_1, mi_1, \dots, si_1\}$, et si l'on considère que ces accords sont obtenus par division de $f(h_1)$ plutôt que par multiplication de $f(h)$, leur mode de construction devient entièrement symétrique des accords possédant une structure authentique. On appelle h la fondamentale inférieure des accords avec une structure authentique, h_1 la fondamentale supérieure des accords avec une structure plagale. On fait correspondre à cette structure un ordre où les éléments sont décroissants de droite à gauche.

Un accord symétrique possède une structure authentique lorsque ρ est à gauche, plagale dans le cas contraire. (Cette distinction n'est possible qu'au vu de la différence de longueur diatonique des rayons, qui place ε d'un côté ou de l'autre.) La rétrogradation de la structure sur les accords symétriques conduit à déplacer leur centre μ en un point μ_g ou μ_d selon le cas, dont la fréquence constitue la meilleure approximation de $\sqrt{2} \cdot f(h)$ sans être égale à celle-ci. On affaiblit donc la règle primitive de construction des accords réguliers afin de faire correspondre à un accord symétrique possédant une structure authentique (respectivement : plagale) un accord dissymétrique de structure plagale (respectivement : authentique). On appelle accords semi-réguliers de tels accords dérivés d'accords réguliers par rétrogradation de la structure.

2.2. On établit Q^- le dual d'un accord Q muni d'une structure authentique en déplaçant à droite de ρ le contenu de ρ' puis en lisant les éléments de droite à gauche à partir de μ_1 , à l'octave supérieure de μ . Le centre (transposé d'une octave) devient donc la fondamentale supérieure d'un accord dQ de structure plagale, et ${}^dQ = Q^-$. Inversement, on établit ${}^aQ = Q$ l'antédual d'un accord dQ muni d'une structure plagale en déplaçant à gauche de ρ' le contenu de ρ puis en lisant les éléments de gauche à droite à partir de μ . Le centre devient ainsi la fondamentale du nouvel accord, sur lequel on restitue une structure authentique.

Le renversement dual constitue une inversion des relations d'ordre partiel sur les chaînes (h, μ) et (μ, h_1) de l'accord avec permutation des chaînes elles-mêmes. On considère par exemple $Q = (h, \varepsilon, \mu, \varepsilon', h_1)$ un pentacorde avec une structure authentique dont h , la fondamentale, est le plus grand élément de sorte que quelque soit $a \in Q$ ($h \succ a$). Les deux chaînes partielles sont (h, ε, μ) et (μ, ε', h_1) . On recolle ces chaînes en les échangeant de côté et l'on renomme $\mu := {}^d h$ et $h_1 := {}^d \mu$, de sorte que ${}^d h_1$ et ${}^d \mu$ sont la fondamentale supérieure et le centre respectivement du nouvel accord $Q^- = ({}^d h, \varepsilon', {}^d \mu, \varepsilon, {}^d h_1)$. L'ordre de cet accord se lit de droite à gauche à partir de ${}^d h_1$, avec quelque soit $a \in Q^-$ ($a \preccurlyeq {}^d h_1$). Lorsque $\text{card } Q \leq 4$, les structures de Q et de Q^- sont entièrement rétrogrades l'une de l'autre. Ainsi, $C^+ = (do, mi, sol, do_1)$ a-t-il pour dual $G^{+-} = ((sol,) do_1, mi_1, sol_1)$. Lorsque Q est symétrique, son dual est lui-même symétrique. Le dual de $Q = (si, fa_1, si_1)$ construit sur si est donc $Q^- = ((fa,) si, fa_1)$ construit sous fa_1 . Leur contenu en classes de hauteurs $\{[fa], [si]\}$ est bien identique, mais leur ordre est inverse.

Chaque accord régulier ou semi-régulier muni d'une structure authentique (respectivement : plagale) possède un dual (respectivement : antédual). En particulier, $((do,) fa, la, do_1)$ est le dual de (fa, la, do_1, fa_1) , l'accord construit par rétrogradation de la structure de l'accord symétrique sur fa . De même, on construit le dual de (mi, sol, si, mi_1) , l'accord $((si,) mi_1, sol_1, si_1)$, par rétrogradation de la structure de l'accord symétrique sous si_1 .

On donne ci-dessous (fig. 2.2) la table des tétracordes ou pseudo-tricordes réguliers et semi-réguliers pour l'espace diatonique ordinaire, mettant en regard les accords en relation duale. Les accords sont nommés selon la hauteur sur (respectivement : sous) laquelle ils sont construits. Lorsque, quand la structure est authentique, on a $\text{int}(h, \varepsilon) > \text{int}(\varepsilon, \mu)$, ou, quand la structure est plagale, $\text{int}(\mu, \varepsilon) > \text{int}(\varepsilon, h_1)$, l'accord est dit majeur, conformément au vocabulaire musical courant, et se note Q^+ ; il est mineur dans le cas inverse, et il est noté Q^- . Lorsque les demi-rayons sont égaux (c'est le cas des accords symétriques), l'accord est neutre, ou diminué, et se note Q^0 .

ANTÉDUALS		DUALS	
NOM	STRUCTURE AUTHENTIQUE	STRUCTURE PLAGALE	NOM
C^+	(do, mi, sol, do_1)	$((sol,) do_1, mi_1, sol_1)$	G^{+-}
D^-	$(ré, fa, la, ré_1)$	$((la,) ré_1, fa_1, la_1)$	A^{--}
E^-	(mi, sol, si, mi_1)	$((si,) mi_1, sol_1, si_1)$	B^{--}
F^+	(fa, la, do_1, fa_1)	$((do,) fa, la, do_1)$	C^{+-}
G^+	$(sol, si, ré_1, sol_1)$	$((ré,) sol, si, ré_1)$	D^{+-}

FIG. 2.2 (début)

ANTÉDUALS		DUALS	
NOM	STRUCTURE AUTHENTE	STRUCTURE PLAGALE	NOM
A^-	(la, do, mi_1, la_1)	$((mi,) la, do, mi_1)$	E^-
B^0	$(si, ré_1, fa_1, si_1)$	$((fa,) si, ré_1, fa_1)$	F^0

FIG. 2.2 (*fin*)

On retrouve sans peine les tricordes ou pseudo-dicordes sous-tendant ces accords en éliminant la hauteur représentant ε .

2.3. On considère l'accord sur do possédant une structure authentique $C_6^+ = (do, mi, sol, la, do_1)$. Sa structure générique s'écrit $\langle 2\ 2\ 1\ 2 \rangle$. En rétrogradant celle-ci, on obtient un nouvel accord sous do_1 de structure plagale $C_6^{+-} = ((do,) mi, fa, la, do_1)$. Il s'agit d'un accord semi-régulier où ε' , originellement situé en ε'_g ($ré$), a, par affaiblissement de la règle de division du rayon mineur, été déplacé en ε'_a (mi), lequel ne constitue que la deuxième meilleure approximation du milieu de ρ' . Cet accord est lui-même le dual de l'accord semi-régulier $F_7^+ = (fa, la, do_1, mi_1, fa_1)$, résultant du même déplacement de ε' et qui, par rétrogradation de la structure, donne $F_7^{0-} = ((fa,) sol, si, ré_1, fa_1)$, l'accord régulier symétrique sous fa_1 . À son tour, celui-ci a pour dual l'accord symétrique sur si , $B_6^0 = (si, ré_1, fa_1, sol_1, si_1)$, qui lui-même par rétrogradation de la structure donnera $B_7^{-} = ((si,) do_1, mi_1, sol_1, si_1)$, et ainsi de suite. Les deux opérations alternées, rétrogradation de la structure et renversement dual, permettent ainsi de parcourir un cycle complet sur l'ensemble des accords réguliers et semi-réguliers sans omettre un seul accord.

On donne à présent (fig. 2.3) la table des pentacordes ou pseudo-tétracordes réguliers ou semi-réguliers, en plaçant une nouvelle fois en regard les accords en relation duale. Les nombres 6 et 7 en indice renvoient à l'ajout de la sixte et de la septième au sens des intervalles diatoniques usuels, plutôt qu'à la longueur diatonique de ces mêmes intervalles.

ANTÉDUALS		DUALS	
NOM	STRUCTURE AUTHENTE	STRUCTURE PLAGALE	NOM
C_6^+	(do, mi, sol, la, do_1)	$((sol,) la, do_1, mi_1, sol_1)$	G_7^{+-}
C_7^+	(do, mi, sol, si, do_1)	$((sol,) si, do_1, mi_1, sol_1)$	G_6^{+-}
D_6^-	$(ré, fa, la, si, ré_1)$	$((la,) si, ré_1, fa_1, la_1)$	A_7^-
D_7^-	$(ré, fa, la, do_1, ré_1)$	$((la,) do_1, ré_1, fa_1, la_1)$	A_6^-
E_6^-	$(mi, sol, si, do_1, mi_1)$	$((si,) do_1, mi_1, sol_1, si_1)$	B_7^-
E_7^-	$(mi, sol, si, ré_1, mi_1)$	$((si,) ré_1, mi_1, sol_1, si_1)$	B_6^-
F_6^+	$(fa, la, do_1, ré_1, fa_1)$	$((do,) ré, fa, la, do_1)$	C_7^+
F_7^+	$(fa, la, do_1, mi_1, fa_1)$	$((do,) mi, fa, la, do_1)$	C_6^+
G_6^+	$(sol, si, ré_1, mi_1, sol_1)$	$((ré,) mi, sol, si, ré_1)$	D_7^+
G_7^+	$(sol, si, ré_1, fa_1, sol_1)$	$((ré,) fa, sol, si, ré_1)$	D_6^+

FIG. 2.3 (*début*)

ANTÉDUALS		DUALS	
NOM	STRUCTURE AUTHENTE	STRUCTURE PLAGALE	NOM
A_6^-	$(la, do, mi_1, fa_1, la_1)$	$((mi_1) fa, la, do, mi_1)$	E_7^{--}
A_7^-	$(la, do, mi_1, sol_1, la_1)$	$((mi_1) sol, la, do, mi_1)$	E_6^{--}
B_6^0	$(si, ré_1, fa_1, sol_1, si_1)$	$((fa_1) sol_1, si, ré_1, fa_1)$	F_7^{0-}
B_7^0	$(si, ré_1, fa_1, la_1, si_1)$	$((fa_1) la_1, si, ré_1, fa_1)$	F_6^{0-}

 FIG. 2.3 (*fin*)

2.4. Contrairement aux théories reposant sur la résonance harmonique, la présente proposition ne donne pas de priorité à l'intervalle de quinte sur celui de quarte dans la construction des accords diatoniques. En envisageant ces deux intervalles comme des approximations du milieu de l'octave, elle place la structure plagale en concurrence immédiate avec la structure authentique, et non en subordination à cette dernière. Ainsi, les hauteurs *sol* et *fa* apparaissent simultanément à partir de la division de l'octave (do, do_1) de part et d'autre du milieu fréquentiel théorique de celle-ci. Du point de vue du système tonal, l'accord de sous-dominante se présente originellement muni d'une structure plagale sous l'octave de la tonique, prise comme fondamentale supérieure d'un accord dual. L'accord de dominante, à l'opposé, signifie une rétrogradation de la structure sur le dual de l'accord de tonique, rétablissant une structure authentique. Les accords sous do_1 (C^{+-}), sur do (C^+), sous sol_1 (G^{+-}) et sur sol (G^+) forment ainsi un sous-ensemble directement lié.

La particularité de la présente démarche est de considérer que tout accord s'inscrit dans une norme, laquelle peut être rendue implicite lorsqu'il s'agit de l'octave. Les accords sont ensuite construits par division de cette norme, puis subdivision des intervalles résultants en commençant par le plus grand intervalle, et non par addition (ou soustraction) d'intervalles à partir d'une hauteur donnée. Tout dicorde, pour constituer un accord régulier, sous-entend donc en réalité un tricorde dont la norme est laissée tacite. Il n'est pas non plus tenu compte des notions de consonance ou de dissonance ; il est néanmoins intéressant de noter que notre démarche permet de reconstituer des accords conformes à l'usage musical sans faire référence à celles-ci.

3. Accords dont la longueur de la norme diffère de celle du module de l'espace

3.1. On s'intéresse d'abord aux cas où la norme de l'accord diffère de ± 1 en longueur diatonique par rapport au module de l'espace. Ceci correspond, dans l'espace diatonique ordinaire, à une norme de longueur $\ell_d = 6$ ou $\ell_d = 8$. L'échelle diatonique étant réduite, la longueur des rayons correspond simplement à la division de l'intervalle (h, g) composant la norme. Comme la norme est paire, on a de plus $\ell_d \text{int}(h, \mu) = \ell_d \text{int}(\mu, g)$.

Lorsque $\ell_d \omega = 6$, l'accord est symétrique pour $h \in \{ré, mi, sol, la, si\}$, c'est-à-dire lorsque $\mu \neq fa$ et $\mu \neq si$. Il est dissymétrique autrement, tout en conservant égales les longueurs diatoniques des rayons. Tous les accords possèdent donc la même structure $\langle 3 \ 3 \rangle$, dont la rétrogradation n'introduit aucun nouvel accord. Les tricordes ainsi construits correspondent à des étagements diatoniques de quarts (do, fa, si) , $(ré, sol, do)$, ..., (si, mi_1, la_1) . On considère la subdivision des rayons pour $h = do$. La hauteur la plus proche du milieu de ρ est *ré*, alors que le milieu de ρ' est approximé

avec la même erreur par *sol* et *la*. Lorsque $\varepsilon' = sol$, l'accord a pour structure $\langle 1\ 2\ 1\ 2 \rangle$ dont la rétrogradation donne, par déplacement de ε en ε_d , l'accord semi-régulier (do, mi, fa, la, si) . Lorsque $\varepsilon' = la$, la structure de l'accord devient $\langle 1\ 2\ 2\ 1 \rangle$. Cette structure est invariante par rétrogradation. Pour $h = ré$, on a $\mu = sol$, $\varepsilon = mi$ ou $\varepsilon = fa$, et $\varepsilon' = la$. Les structures correspondantes sont $\langle 1\ 2\ 1\ 2 \rangle$ ou $\langle 2\ 1\ 1\ 2 \rangle$ respectivement. La rétrogradation de la première introduit par déplacement de ε' en ε'_d l'accord semi-régulier $\{ré, fa, sol, si, do\}$, la deuxième restant, ici encore, invariante. Le lecteur intéressé peut poursuivre lui-même l'exploration de ce matériau. Pour ces accords et les suivants, les duals s'obtiennent simplement par inversion de l'ordre des éléments à partir de g .

Lorsque $\ell_d \omega = 8$, tous les accords sont symétriques sauf pour $h = mi$ et $h = si$. Comme précédemment, les rayons sont de longueur diatonique identique quel que soit le cas. De même, leur subdivision aboutit à des intervalles de longueurs identiques, tous les accords possédant la même structure $\langle 3\ 3\ 3\ 3 \rangle$ invariante par rétrogradation. Les pentacordes appartiennent à la classe des accords de neuvième Q_9^{sgn} , ou $Q_9^{sgn\sim}$ pour les duals.

3.2. On construit sans difficulté particulière les accords dont la norme est inférieure de 2 ou plus (en longueur diatonique d'intervalle) au module de l'espace. (N.B. : la norme doit avoir une longueur minimale de 2 pour pouvoir être divisible.) Lorsque $\ell_d \omega = 2$ ou $\ell_d \omega = 4$, tous les accords ont pour structure $\langle 1\ 1 \rangle$ ou $\langle 2\ 2 \rangle$ respectivement. Lorsque $\ell_d \omega = 3$, la structure des accords réguliers est $\langle 1\ 2 \rangle$ (dissymétrie à gauche) pour $h = do$ ou $h = sol$, ou $\langle 2\ 1 \rangle$ (dissymétrie à droite) pour $h = mi$ ou $h = si$, donnant par rétrogradation des accords semi-réguliers. Pour $h \in \{ré, fa, la\}$, μ peut être approximé à droite comme à gauche et les deux structures correspondent à des accords réguliers. Enfin, lorsque $\ell_d \omega = 5$, les tétracordes (réguliers ou semi-réguliers par rétrogradation) sont de structure $\langle 2\ 1\ 2 \rangle$ sur *ré, mi, sol, la, si*, et de structure $\langle 1\ 2\ 2 \rangle$ ou $\langle 2\ 2\ 1 \rangle$ sur *do, ré, fa, si*. Selon la hauteur sur laquelle (ou sous laquelle pour les duals) l'accord est construit, on n'obtient donc pas le même nombre de formes, et la transposition d'un accord régulier n'est pas nécessairement un accord régulier.

Afin de permettre une circulation complète sur le sous-ensemble des accords d'une même cardinalité et d'une structure donnée ou de la structure rétrograde correspondante, on élargit la notion d'accord semi-régulier pour inclure les accords obtenus par transposition d'un accord régulier. Ainsi, l'accord régulier $(ré, mi, sol, si)$ se transpose-t-il en un accord semi-régulier (mi, fa, la, do) .

3.3. De même, on construit les accords dont la norme est supérieure de 2 ou plus en longueur diatonique d'intervalle au module de l'espace. La figure 3.1 ci-dessous donne la liste des pentacordes réguliers ou semi-réguliers et pour une longueur diatonique de la norme comprise entre 9 (l'intervalle de dixième) et 14 (la double octave), en prenant $h = do$. Les formes antéduals se lisent de gauche à droite, les formes duals de droite à gauche depuis la fondamentale. La structure de chaque accord est indiquée, ainsi que le cardinal de la collection simplifiée aux classes de hauteurs correspondantes.

$\ell_d \omega$	ACCORD	CARD	STRUCTURE
9	(do, mi, sol, si, mi_1)	4	$\langle 2 \ 2 \ 2 \ 3 \rangle$
	$(do, mi, sol, do_1, mi_1)$	3	$\langle 2 \ 2 \ 3 \ 2 \rangle$
	(do, mi, la, do_1, mi_1)	3	$\langle 2 \ 3 \ 2 \ 2 \rangle$
	(do, fa, la, do_1, mi_1)	4	$\langle 3 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$
10	(do, fa, la, do_1, fa_1)	3	$\langle 3 \ 2 \ 2 \ 3 \rangle$
	(do, mi, la, do_1, fa_1)	4	$\langle 2 \ 3 \ 2 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, la, ré_1, fa_1)$	4	$\langle 3 \ 2 \ 3 \ 2 \rangle$
	$(do, mi, la, ré_1, fa_1)$	5	$\langle 2 \ 3 \ 3 \ 2 \rangle$
11	$(do, mi, la, ré_1, sol_1)$	5	$\langle 2 \ 3 \ 3 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, la, ré_1, sol_1)$	5	$\langle 3 \ 2 \ 3 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, si, ré_1, sol_1)$	5	$\langle 3 \ 3 \ 2 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, si, mi_1, sol_1)$	5	$\langle 3 \ 3 \ 3 \ 2 \rangle$
12	(do, fa, si, mi_1, la_1)	5	$\langle 3 \ 3 \ 3 \ 3 \rangle$
13	(do, fa, si, mi_1, si_1)	4	$\langle 3 \ 3 \ 3 \ 4 \rangle$
	(do, fa, si, fa_1, si_1)	3	$\langle 3 \ 3 \ 4 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, do_1, fa_1, si_1)$	3	$\langle 3 \ 4 \ 3 \ 3 \rangle$
	$(do, sol, do_1, fa_1, si_1)$	4	$\langle 4 \ 3 \ 3 \ 3 \rangle$
14	$(do, sol, do_1, fa_1, do_2)$	3	$\langle 4 \ 3 \ 3 \ 4 \rangle$
	$(do, fa, do_1, fa_1, do_2)$	2	$\langle 3 \ 4 \ 3 \ 4 \rangle$
	$(do, sol, do_1, sol_1, do_2)$	2	$\langle 4 \ 3 \ 4 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, do_1, sol_1, do_2)$	3	$\langle 3 \ 4 \ 4 \ 3 \rangle$

FIG. 3.1

4. Divisions non binaires. Accords complexes

4.1. On peut choisir pour diviseur de la norme un nombre premier différent de 2, en particulier lorsque sa longueur diatonique est un multiple de ce nombre. Ainsi, quand $\ell_d \omega = 6$, la division ternaire de la norme permet de construire un accord régulier de structure $\langle 2 \ 2 \ 2 \rangle$, soit un tétracorde par étagement de tierces, e.g. (do, mi, sol, si) . Pour $\ell_d \omega = 9$, la structure devient $\langle 3 \ 3 \ 3 \rangle$, correspondant à un tétracorde par quarts superposées, e.g. (do, fa, si, mi) . Pour $\ell_d \omega = 12$, on construit un accord de quintes superposées, etc. Il est également possible, en théorie, de subdiviser les rayons par un tel nombre. Avec $\ell_d \omega = 11$, la subdivision ternaire des rayons donne ainsi les structures $\langle 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$ ou $\langle 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$ (dissymétrie à gauche), ou bien $\langle 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \rangle$ ou $\langle 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \rangle$ (dissymétrie à droite), soit, pour $h = do$, les accords $(do, ré, fa, la, do_1, mi_1, sol_1)$, $(do, mi, sol, la, do_1, mi_1, sol_1)$, $(do, mi, sol, si, ré_1, mi_1, sol_1)$, ou $(do, mi, sol, si, ré_1, fa_1, sol_1)$. Lorsque $\ell_d \omega = 12$, la structure $\langle 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$ résulte aussi bien de la subdivision ternaire d'une division binaire de la norme, que de la subdivision binaire d'une division ternaire.

4.2. Lorsqu'on superpose une ou plusieurs fois un accord à un autre accord de structure identique, on crée un accord complexe $K_{dis}^{\deg} (Q_{ext}^{sgn})$ dont le degré indique le nombre d'accords formant le complexe, et la disjonction l'intervalle entre la borne

supérieure d'un accord et la borne inférieure de son successeur dans la superposition. L'intervalle de disjonction peut être exprimé diatoniquement ou chromatiquement selon le contexte. Il peut s'agir d'une valeur positive, négative, ou nulle. Quand $\text{dis} = 0$, l'intervalle entre les fondamentales des deux accords est égal à leur norme. Trivialement, il s'agit dans l'espace diatonique ordinaire du redoublement à l'octave quand la norme coïncide avec le module de cet espace. L'accord complexe se simplifie alors en une collection de classes de hauteurs identique au contenu de Q lui-même. Lorsqu'un complexe contient trois accords ou plus, l'intervalle de disjonction peut différer entre chaque couple d'accords successifs. La disjonction peut également être exprimée sous la forme d'une valeur d'inversion autour de la borne supérieure et la borne inférieure des deux accords successifs. Enfin, un accord complexe peut superposer des accords dont les structures sont rétrogrades entre elles, ou un accord et son dual. L'accord complexe obtenu par la superposition d'accords réguliers ou semi-réguliers n'est pas nécessairement un accord régulier ou semi-régulier.

Exemple 4.2.1. Soit le tricorde régulier $Q = (do, fa, si)$ dont la longueur diatonique de la norme est égal à 6. On établit, pour $\text{dis} = 3$, l'accord complexe

$$K_{\text{dis}=3}^{\text{d}=2} (Q) = (do, fa, si, mi_1, la_1, ré_1),$$

Soit $Q' = (do, mi, sol, si)$ le tétracorde régulier construit à partir de la division ternaire de la même norme ; pour $\text{dis} = 0$, l'accord complexe $K_{\text{dis}=0}^{\text{d}=2} (Q') = (do, mi, sol, si, ré, fa, la)$

représente l'heptacorde par tierces superposant l'ensemble du matériau de l'espace diatonique ordinaire E_d .

Exemple 4.2.2. On écrit la séquence d'accords complexes $K_{i=10}^{\text{d}=2} (C_6^+)$, $K_{i=10}^{\text{d}=2} (D_7^-)$,

$K_{i=10}^{\text{d}=2} (F_6^+)$, $K_{i=10}^{\text{d}=2} (G_7^+)$, $K_{i=10}^{\text{d}=2} (A_6^-)$, la valeur i de l'inversion étant exprimée diatoniquement. Le dernier accord complexe superpose à A_6^- un accord de structure rétrograde (fig. 4.1) :

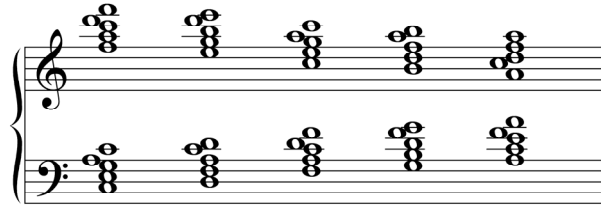


FIG. 4.1

5. Extension à l'espace chromatique et généralisation

5.1. Les règles de construction des accords réguliers exposées dans la première section peuvent être appliquées à tout espace musical similairement indicé et ne sont donc pas limitées à l'espace diatonique ordinaire. En outre, lorsqu'on néglige la distinction entre accords réguliers et semi-réguliers, et si, en rangeant les éléments de l'espace en ordre scalaire à l'intérieur du module, on obtient une échelle réduite de cardinalité égale à

celle du module (ou au nombre de classes de hauteurs distinctes de l'espace lui-même), il est aussi simple, pour placer μ , ε et ε' , d'approximer le résultat de la division de la longueur de la norme ou des rayons.

Ceci vaut pour l'espace diatonique ordinaire, où μ forme bien avec h un intervalle de longueur égale à $\left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil$ (N.B. on désigne par $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x) ou $\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor$ (N.B. on désigne par $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à x), soit $\ell_d \text{ int}(h, \mu) = 3$ ou $\ell_d \text{ int}(h, \mu) = 4$, correspondant aux longueurs respectives de ρ' et de ρ . On place alors ε tel que $\ell_d \text{ int}(h, \varepsilon) = \frac{\ell_d \text{ int}(h, \mu)}{2}$ (accord dissymétrique à droite), ou $\ell_d \text{ int}(\mu, \varepsilon) = \frac{\ell_d \text{ int}(\mu, h_1)}{2}$ (accord dissymétrique à gauche), c'est-à-dire $\frac{4}{2}$. Quant à ε' , il se situe soit à droite soit à gauche du milieu de ρ' , avec $\ell_d \text{ int}(\mu, \varepsilon') = \left\lfloor \frac{\ell_d \text{ int}(\mu, h_1)}{2} \right\rfloor$ ou $\ell_d \text{ int}(\mu, \varepsilon') = \left\lceil \frac{\ell_d \text{ int}(\mu, h_1)}{2} \right\rceil$ dans le premier cas, $\ell_d \text{ int}(h, \varepsilon') = \left\lfloor \frac{\ell_d \text{ int}(h, \mu)}{2} \right\rfloor$ ou $\ell_d \text{ int}(h, \varepsilon') = \left\lceil \frac{\ell_d \text{ int}(h, \mu)}{2} \right\rceil$ dans le deuxième, c'est-à-dire des valeurs correspondant à $\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor$ ou à $\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil$, ou des intervalles de longueur 1 ou 2.

5.2. Dans l'espace chromatique, la construction des accords réguliers est considérablement simplifiée par le fait que si la longueur de l'intervalle entre un couple de hauteurs est égale à la longueur de l'intervalle entre un autre couple de hauteurs, alors le rapport des fréquences du premier couple est égal à celui du deuxième. En effet, pour un espace de cardinalité k , représentant le nombre de classes de hauteurs (ou le nombre de hauteurs par octave) contenues dans cet espace, l'intervalle entre deux

hauteurs h et g a pour longueur chromatique $\ell_c \text{ int}(h, g) = \log_{\sqrt[2]{k}} \frac{f(g)}{f(h)}$. Soit deux

hauteurs i et j telles que $\ell_c \text{ int}(i, j) = \ell_c \text{ int}(h, g)$. Ceci revient à écrire $\log_{\sqrt[2]{k}} \frac{f(j)}{f(i)} = \log_{\sqrt[2]{k}} \frac{f(g)}{f(h)}$, soit, par simplification, $\frac{f(j)}{f(i)} = \frac{f(g)}{f(h)}$. Il suffit donc de diviser la

longueur chromatique de la norme pour placer le centre, de sorte que l'intervalle entre la fondamentale et celui-ci soit égal à $\frac{\ell_c \omega}{2}$ ou l'approxime. On procède alors de façon

analogue pour la subdivision des rayons et pour les sous-subdivisions suivantes.

Lorsqu'on considère l'espace chromatique ordinaire \mathbf{E}_c à 12 hauteurs par octave, on observe que les accords réguliers précédemment formés dans l'espace diatonique ordinaire \mathbf{E}_d ne sont pas tous des accords réguliers dans cet espace. Ainsi, pour les accords dont la norme est de longueur identique au module, seuls les accords symétriques formant au maximum des tétracordes ou des pseudo-tricordes peuvent être

considérés comme réguliers dans l'espace chromatique. Ainsi, $F^{0-} = (fa, si, ré, fa_1)$ est régulier dans \mathbf{E}_d et dans \mathbf{E}_c .

Dans le cas où la division de la longueur d'un segment donne une valeur entière, le milieu de ce segment correspond à une hauteur appartenant à \mathbf{E}_c . Le déplacement de ce milieu à droite ou à gauche par un intervalle de longueur égale à 1 transforme l'accord en un accord semi-régulier. Les accords réguliers dans \mathbf{E}_d qui ne sont pas réguliers dans \mathbf{E}_c sont au moins semi-réguliers dans cet espace. En revanche, tous les accords semi-réguliers formés dans \mathbf{E}_d ne sont pas des accords semi-réguliers dans \mathbf{E}_c . Ainsi, $F_6^{0-} = (fa, la_1, si, ré_1, fa_1)$ est régulier dans \mathbf{E}_d et semi-régulier dans \mathbf{E}_c ; $F_6^+ = (fa, la, do_1, ré_1, fa_1)$ est semi-régulier dans \mathbf{E}_d et semi-régulier dans \mathbf{E}_c ; mais $F_7^+ = (fa, la, do_1, mi_1, fa_1)$, qui est semi-régulier dans \mathbf{E}_d , ne l'est pas dans \mathbf{E}_c .

Un accord régulier dans \mathbf{E}_c dont la norme, exprimée en longueur chromatique d'intervalle, est paire, est un accord symétrique puisque ses rayons sont de longueur égale. Lorsque la norme est impaire, l'accord est dissymétrique avec $\ell_c \rho - \ell_c \rho' = 1$.

5.3. On nomme chaque hauteur de l'accord d'après la longueur de l'intervalle chromatique formé par cette hauteur et la fondamentale. Pour abréger l'exposé, on ne se préoccupe ici que des fondamentales inférieures. On établit ci-dessous (fig. 5.1) la séquence des tricordes réguliers de l'espace chromatique de norme ≤ 18 en longueur chromatique, en n'indiquant, pour les accords dissymétriques, que les formes dissymétriques à droite, et en mentionnant la classe canonique d'appartenance de la collection en laquelle se simplifie chaque accord :

ACCORD	STRUCTURE	CLASSE CANONIQUE
(0, 1, 2)	$\langle 1 \ 1 \rangle$	3-1
(0, 2, 3)	$\langle 2 \ 1 \rangle$	3-2
(0, 2, 4)	$\langle 2 \ 2 \rangle$	3-6
(0, 3, 5)	$\langle 3 \ 2 \rangle$	3-7
(0, 3, 6)	$\langle 3 \ 3 \rangle$	3-10
(0, 4, 7)	$\langle 4 \ 3 \rangle$	3-11
(0, 4, 8)	$\langle 4 \ 4 \rangle$	3-12
(0, 5, 9)	$\langle 5 \ 4 \rangle$	3-11
(0, 5, 10)	$\langle 5 \ 5 \rangle$	3-9
(0, 6, 11)	$\langle 6 \ 5 \rangle$	3-5
(0, 6, 12)	$\langle 6 \ 6 \rangle$	2-6
(0, 7, 13)	$\langle 7 \ 6 \rangle$	3-5
(0, 7, 14)	$\langle 7 \ 7 \rangle$	3-9
(0, 8, 15)	$\langle 8 \ 7 \rangle$	3-11
(0, 8, 16)	$\langle 8 \ 8 \rangle$	3-12
(0, 9, 17)	$\langle 9 \ 8 \rangle$	3-11
(0, 9, 18)	$\langle 9 \ 9 \rangle$	3-10
		etc.

FIG. 5.1

Soit $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ les éléments du premier tricorde $(0, 1, 2)$, et un entier $a \geq 1$. On voit que la séquence ci-dessus s'organise selon la suite $(ax_0, ax_1, ax_2), (ax_0, ax_1, ax_2 + 1), (ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1), ((a + 1)x_0, (a + 1)x_1, (a + 1)x_2), ((a + 1)x_0, (a + 1)x_1, (a + 1)x_2 + 1), ((a + 1)x_0 + 1, (a + 1)x_1 + 1, (a + 1)x_2 + 1), \dots$

Lorsque l'on s'intéresse aux tétracordes, on obtient le tableau suivant (fig. 5.2) où, si l'on prend $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$, avec $a \geq 1$, la séquence d'accords s'écrit à présent $(ax_0, ax_1, ax_2, ax_3 - 1), (ax_0, ax_1, ax_2, ax_3), (ax_0, ax_1, ax_2 + 1, ax_3 + 1), (ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1, ax_3 + 1), (ax_0, ax_1, ax_2 + 1, ax_3 + 2), (ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1, ax_3 + 2), ((a + 1)x_0, (a + 1)x_1, (a + 1)x_2, (a + 1)x_3 - 1), ((a + 1)x_0, (a + 1)x_1, (a + 1)x_2, (a + 1)x_3), \dots$:

ACCORD	STRUCTURE	CLASSE CANONIQUE
$(0, 1, 2, 3)$	$\langle 1 \ 1 \ 1 \rangle$	4-1
$(0, 1, 2, 4)$	$\langle 1 \ 1 \ 2 \rangle$	4-2
$(0, 1, 3, 5)$	$\langle 1 \ 2 \ 2 \rangle$	4-11
$(0, 2, 3, 5)$	$\langle 2 \ 1 \ 2 \rangle$	4-10
$(0, 1, 3, 6)$	$\langle 1 \ 2 \ 3 \rangle$	4-13
$(0, 2, 3, 6)$	$\langle 2 \ 1 \ 3 \rangle$	4-12
$(0, 2, 4, 7)$	$\langle 2 \ 2 \ 3 \rangle$	4-22
$(0, 2, 4, 8)$	$\langle 2 \ 2 \ 4 \rangle$	4-24
$(0, 2, 5, 9)$	$\langle 2 \ 3 \ 4 \rangle$	4-26
$(0, 3, 5, 9)$	$\langle 3 \ 2 \ 4 \rangle$	4-27
$(0, 2, 5, 10)$	$\langle 2 \ 3 \ 5 \rangle$	4-22
$(0, 3, 5, 10)$	$\langle 3 \ 2 \ 5 \rangle$	4-23
$(0, 3, 6, 11)$	$\langle 3 \ 3 \ 5 \rangle$	4-18
$(0, 3, 6, 12)$	$\langle 3 \ 3 \ 6 \rangle$	3-10
$(0, 3, 7, 13)$	$\langle 3 \ 4 \ 6 \rangle$	4-29
$(0, 4, 7, 13)$	$\langle 4 \ 3 \ 6 \rangle$	4-18
$(0, 3, 7, 14)$	$\langle 3 \ 4 \ 7 \rangle$	4-14
$(0, 4, 7, 14)$	$\langle 4 \ 3 \ 7 \rangle$	4-22
$(0, 4, 8, 15)$	$\langle 4 \ 4 \ 7 \rangle$	4-19
$(0, 4, 8, 16)$	$\langle 4 \ 4 \ 8 \rangle$	3-12
$(0, 4, 9, 17)$	$\langle 4 \ 5 \ 8 \rangle$	4-20
$(0, 5, 9, 17)$	$\langle 5 \ 4 \ 8 \rangle$	3-11
$(0, 4, 9, 18)$	$\langle 4 \ 5 \ 9 \rangle$	4-27
$(0, 5, 9, 18)$	$\langle 5 \ 4 \ 9 \rangle$	4-18
		etc.

FIG. 5.2

Enfin, étant donné $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$, et $a \geq 1$, la séquence des pentacordes illustrée par notre dernier tableau (fig. 5.3) s'organise selon la suite $(ax_0, ax_1, ax_2, ax_3, ax_4), (ax_0, ax_1, ax_2 + 1, ax_3 + 1, ax_4 + 1), (ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1, ax_3 + 1, ax_4 + 1), (ax_0, ax_1, ax_2 + 1, ax_3 + 1, ax_4 + 2), (ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1, ax_3 + 1, ax_4 + 2), (ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1, ax_3 + 2, ax_4 + 2), (ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 2, ax_3 + 2, ax_4 + 3), (ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 2, ax_3 + 3, ax_4 + 3), ((a + 1)x_0, (a + 1)x_1, (a + 1)x_2, (a + 1)x_3, (a + 1)x_4), \dots$:

ACCORD	STRUCTURE	CLASSE CANONIQUE
(0, 1, 2, 3, 4)	$\langle 1 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle$	5-1
(0, 1, 3, 4, 5)	$\langle 1 \ 2 \ 1 \ 1 \rangle$	5-3
(0, 2, 3, 4, 5)	$\langle 2 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle$	5-2
(0, 1, 3, 4, 6)	$\langle 1 \ 2 \ 1 \ 2 \rangle$	5-10
(0, 2, 3, 4, 6)	$\langle 2 \ 1 \ 1 \ 2 \rangle$	5-8
(0, 1, 3, 5, 6)	$\langle 1 \ 2 \ 2 \ 1 \rangle$	5-12
(0, 2, 4, 5, 7)	$\langle 2 \ 2 \ 1 \ 2 \rangle$	5-23
(0, 2, 4, 6, 7)	$\langle 2 \ 2 \ 2 \ 1 \rangle$	5-24
(0, 2, 4, 6, 8)	$\langle 2 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$	5-33
(0, 2, 5, 7, 9)	$\langle 2 \ 3 \ 2 \ 2 \rangle$	5-35
(0, 3, 5, 7, 9)	$\langle 3 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$	5-34
(0, 2, 5, 7, 10)	$\langle 2 \ 3 \ 2 \ 3 \rangle$	5-35
(0, 3, 5, 7, 10)	$\langle 3 \ 2 \ 2 \ 3 \rangle$	5-35
(0, 2, 5, 8, 10)	$\langle 2 \ 3 \ 3 \ 2 \rangle$	5-34
(0, 3, 6, 8, 11)	$\langle 3 \ 3 \ 2 \ 3 \rangle$	5-32
(0, 3, 6, 9, 11)	$\langle 3 \ 3 \ 3 \ 2 \rangle$	5-31
(0, 3, 6, 9, 12)	$\langle 3 \ 3 \ 3 \ 3 \rangle$	4-28
(0, 3, 7, 10, 13)	$\langle 3 \ 4 \ 3 \ 3 \rangle$	5-25
(0, 4, 7, 10, 13)	$\langle 4 \ 3 \ 3 \ 3 \rangle$	5-31
(0, 3, 7, 10, 14)	$\langle 3 \ 4 \ 3 \ 4 \rangle$	5-27
(0, 4, 7, 10, 14)	$\langle 4 \ 3 \ 3 \ 4 \rangle$	5-34
(0, 3, 7, 11, 14)	$\langle 3 \ 4 \ 4 \ 3 \rangle$	5-17
(0, 4, 8, 11, 15)	$\langle 4 \ 4 \ 3 \ 4 \rangle$	5-21
(0, 4, 8, 12, 15)	$\langle 4 \ 4 \ 4 \ 3 \rangle$	4-19
(0, 4, 8, 12, 16)	$\langle 4 \ 4 \ 4 \ 4 \rangle$	3-12
(0, 4, 9, 13, 17)	$\langle 4 \ 5 \ 4 \ 4 \rangle$	5-21
(0, 5, 9, 13, 17)	$\langle 5 \ 4 \ 4 \ 4 \rangle$	4-19
(0, 4, 9, 13, 18)	$\langle 4 \ 5 \ 4 \ 5 \rangle$	5-32
(0, 5, 9, 13, 18)	$\langle 5 \ 4 \ 4 \ 5 \rangle$	5-22
(0, 4, 9, 14, 18)	$\langle 4 \ 5 \ 5 \ 4 \rangle$	5-34
		etc.

FIG. 5.3

5.4. Soit Q un n -corde de structure générique $\langle i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{n-1} \rangle$ appartenant à un espace musical donné. Q est un accord régulier si :

- il existe un nombre premier k le plus petit possible tel que les intervalles de Q peuvent être regroupés en k substructures $\langle i_1 \ \dots \ i_a \rangle, \langle i_{a+1} \ \dots \ i_b \rangle, \dots, \langle i_u \ \dots \ i_{n-1} \rangle$ de longueurs intervallaires identiques ou dont la différence entre la plus grande et la plus petite longueur n'excède pas 1 dans la mesure propre à cet espace ;
- les intervalles ont la même longueur à l'intérieur de chaque substructure, ou la différence entre le plus grand et le plus petit intervalle n'excède pas 1 dans la mesure propre à l'espace concerné. L'accord est semi-régulier si cette différence est supérieure à 1 lorsqu'elle est exprimée en longueur chromatique d'intervalle ;

– lorsqu’il existe une subdivision de deuxième niveau (ou de niveau subséquent) des substructures, les longueurs des sous-substructures doivent être identiques ou ne pas présenter une différence générique supérieure à 1 entre la plus grande et la plus petite. Lorsque cette différence, exprimée en longueur chromatique d’intervalle, est supérieure à 1, l’accord est semi-régulier.

En outre, lorsqu’il n’existe que deux longueurs de substructures et que la différence en longueur chromatique est de 2 entre la plus grande et la plus petite substructure, l’accord est semi-régulier dans l’espace chromatique.

La structure d’un accord dual se lit de droite à gauche. Il a pour fondamentale supérieure l’extrémité opposée à la fondamentale inférieure de son antédual, sauf quand la norme correspond au module de l’espace. Dans ce cas, il a pour fondamentale le centre de l’antédual par permutation des rayons, comme explicité dans la section 2.2 ci-dessus.

Bibliographie

- [1] Norman CAREY & David CLAMPITT (1989), *Aspects of Well-Formed Scales*, Music Theory Spectrum 11.2, 187–206.
- [2] Jacques CHAILLEY (1977), Traité historique d’analyse harmonique, *Alphonse Leduc*.
- [3] John CLOUGH & Jack DOUTHET (1991), *Maximally Even Sets*, Journal of Music Theory 35.1/2, 93–173.
- [4] John CLOUGH & Gerald MYERSON (1985), *Variety and Multiplicity in Diatonic Systems*, Journal of Music Theory 29.2, 249–270.
- [5] John CLOUGH & Gerald MYERSON (1986), *Musical Scales and the Generalized Cycle of Fifths*, American Mathematical Monthly 93.9, 695–701.
- [6] Allen FORTE (1973), The Structure of Atonal Music, *Yale University Press*.
- [7] Xavier HASCHER (2002), *Liszt et les sources de la notion d’agrégat*, Analyse musicale 43, 48–56.
- [8] David LEWIN (1982), *A formal Theory of Generalized Tonal Functions*, Journal of Music Theory 26.1, 23–60.

Xavier HASCHER
 Université Marc-Bloch (Strasbourg-II)
 xavier.hascher@umb.u-strasbg.fr

LEXIQUE

Bicorde, tricorde, tétracorde, etc. : collection de deux, trois, quatre, etc., classes de hauteurs.

Chromatique (espace) : espace musical dont le module est divisé en n intervalles égaux. Lorsque le module est égal à l’octave, une hauteur h a pour successeur dans l’ordre scalaire une hauteur

h' telle que $f(h') = \sqrt[n]{2} \cdot f(h)$. Dans l'espace chromatique ordinaire \mathbf{E}_c , $n = 12$ et l'espace contient douze classes de hauteurs distinctes. Les éléments de l'espace chromatique sont engendrés par les 11 premières quintes successives à partir de *fa*, rabattues dans l'octave de référence : *fa, do, sol, ré, la, mi, si, fa#, do#, sol#, ré#, la#*.

Diatonique (espace) : espace musical dont chaque intervalle possède un spectre composé de deux entiers consécutifs, c.-à-d. qu'un intervalle de longueur diatonique donnée d peut être de longueur chromatique c ou $c + 1$. Dans l'espace diatonique ordinaire, les secondes ($\ell_d = 1$), les tierces ($\ell_d = 2$), les sixtes ($\ell_d = 5$) et les septièmes ($\ell_d = 6$) peuvent ainsi être majeures ou mineures, les quarts ($\ell_d = 3$) justes ou augmentées, les quintes ($\ell_d = 4$) justes ou diminuées. En outre, le cardinal de l'espace diatonique doit être premier par rapport à celui de l'espace chromatique dans lequel il est plongé. L'espace diatonique ordinaire contient 7 classes de hauteurs, engendrées par les 6 premières quintes à partir de *fa* rabattues dans l'octave de référence : *fa, do, sol, ré, la, mi, si*.

Échelle : une échelle est composée de l'ensemble des hauteurs d'un espace musical rangées en ordre scalaire à partir d'une hauteur de départ donnée et dans les limites du module. Par ex., l'échelle diatonique énonce la succession *do, ré, mi, fa, sol, la, si*.

Espace musical : ensemble de hauteurs ou de classes de hauteurs, en tant que projeté intuitivement dans un plan. On peut définir également des ensembles de durées, de timbres, etc.

Générique : en prenant pour mesure les intervalles de l'espace que l'on considère, et non de l'espace chromatique dans lequel il est plongé (par opposition à *spécifique*). L'accord (*do, mi, sol, do₁*) a pour structure spécifique $\langle 2 \ 2 \ 3 \rangle$ dans \mathbf{E}_d , alors que sa structure générique est $\langle 4 \ 3 \ 5 \rangle$ dans \mathbf{E}_c .

Hauteur : désigne une note de musique de fréquence identifiable, en faisant abstraction de son timbre, de son intensité (*forte* ou *piano*), etc.

Hauteurs (classe de) : ensemble des hauteurs de même nom, considérées comme équivalentes modulo un intervalle donné. Par exemple, tous les *do*, quelle que soit l'octave où ils apparaissent, appartiennent à la classe [*do*] et le rapport de leurs fréquences est une puissance de 2.

Longueur diatonique, chromatique : mesure la distance scalaire en nombre de degrés diatoniques (respectivement : chromatiques) entre les bornes d'un intervalle.

Module : intervalle minimum séparant deux hauteurs musicales distinctes de même nom considérées comme équivalentes modulo cet intervalle. Le module correspond généralement à l'octave, c.-à-d. l'intervalle existant entre une hauteur de fréquence f et une autre de fréquence $2f$.

Réduite (échelle) : une échelle est réduite si, pour tout degré de cette échelle (c.-à-d. une hauteur appartenant à celle-ci), l'intervalle entre ce degré et son successeur contient exclusivement 0 ou 1 degré chromatique intermédiaire.

Scalaire (ordre) : ordre de succession des éléments d'un espace par fréquence croissante.

Structure : la structure d'un accord présente la série des intervalles successifs entre les éléments de cet accord à partir de la fondamentale jusqu'à l'extrémité de la norme.

Tricorde, tétrocorde : voir *bicorde*.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TECHNIQUE DE BOULEZ DE MULTIPLICATION DES BLOCS SONORES

Nicolas WEISS

Résumé : En 1952, PIERRE BOULEZ a décrit un procédé de multiplication de blocs sonores, dont il s'est servi par la suite comme principe compositionnel. Nous proposons un survol de certains aspects formels de ce procédé, qui sont liés à des questions qui ont pu se poser relativement à son utilisation en musique.

Mots-clés : Bloc sonore - Formalisme musical.

A l'origine de cet article se trouvent des questions qui m'ont été posées par WERNER STRINZ sur la possibilité ou non d'étudier de manière formelle des propriétés du principe de multiplication des blocs sonores que PIERRE BOULEZ a décrit et utilisé, notamment dans *L'Artisanat furieux*. Je voudrais remercier WERNER STRINZ ainsi que les organisateurs de la Rencontre Mathématique-Musique 2005 à l'IRMA (Strasbourg) le 14 décembre 2005, au cours de laquelle une approche de ces questions a fait l'objet d'un exposé.

1. La multiplication de blocs sonores

1.1. Qu'est-ce qu'un bloc sonore ?

Soit E un ensemble de hauteurs. On peut les rapporter à une même octave. Si deux ensembles de hauteurs E et E' se confondent quand on les rapporte à la même octave, on dit qu'ils sont équivalents.

On peut considérer les classes d'équivalence d'ensembles de hauteurs dont toutes les hauteurs restent distinctes une fois rapportées à une octave. On appellera *bloc sonore* une telle classe d'équivalence B . On appellera *réalisation* du bloc sonore B tout ensemble de hauteurs E qui appartient à la classe B .

Rien n'est dit quant à la distribution dans la partition de la réalisation d'un bloc : elle pourra être mélodique, sous forme d'accords, etc. PIERRE BOULEZ parle suivant les textes, soit de bloc sonore, soit de complexe de sons, soit de sonorité.



FIG. 1 – Exemple de bloc sonore

Un bloc sonore peut également être vu comme un ensemble d'intervalles construits au sein d'une même octave au-dessus d'une hauteur particulière, qu'on appellera *origine* du bloc afin de rester neutre vis à vis des notions de note de basse, note fondamentale *etc* en harmonie. Il n'y a aucune raison de favoriser une classe de hauteurs du bloc par rapport à une autre dans le choix de l'origine du bloc. Cette notion sert uniquement à faciliter la description des exemples.

1.2. Transposition d'un bloc sonore

Tout bloc sonore peut-être transposé. Si on voit un bloc B comme un ensemble d'intervalles construits au sein d'une même octave au-dessus d'une origine donnée, alors on obtient les 12 transpositions du bloc B en construisant les mêmes intervalles au-dessus d'une des 12 classes de hauteurs chromatiques. On s'est donc contenté de décaler l'origine du bloc.



FIG. 2 – Transposition d'un bloc sonore

Dans l'exemple de la figure 2, le bloc sonore de gauche a été transposé d'une quarte vers le haut pour devenir le bloc sonore de droite. Si on fait le choix d'origine « classe de *do* » pour le bloc de gauche, cette origine a été modifiée en « classe de *fa* » dans le bloc de droite.

1.3. Principe de multiplication de deux blocs sonores

Le principe est très simple et a été décrit par PIERRE BOULEZ dans son article *Eventuellement* [1] : il consiste à transposer le bloc sonore A sur toutes les hauteurs du bloc sonore B puis à réunir toutes ces transpositions sans tenir compte des éventuels recouvrements. On obtient alors le bloc sonore $A \times B$.

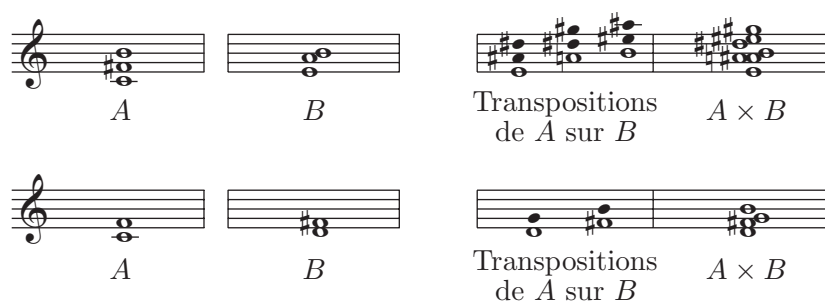


FIG. 3 – Procédé de multiplication de blocs sonores, exemples

2. Utilisation du produit de blocs par Boulez - aperçu

Nous allons donner quelques informations succinctes sur la façon dont PIERRE BOULEZ se sert du principe de multiplication de blocs sonores dans *L'Artisanat furieux*, partie du *Marteau sans maître* (1953-55).

L'Artisanat furieux est une pièce sérielle, ce qui signifie qu'elle a été élaborée à l'aide de techniques de composition qui utilisent une ou plusieurs *séries* comme matériau de base. Une série dans sa nature consiste en un ordre fixe des douze classes de hauteurs chromatiques.


 FIG. 4 – *Le marteau sans maître* (1953-55), série de *L'Artisanat furieux*

Le principe utilisé dans *L'Artisanat furieux* consiste à engendrer un ensemble de blocs sonores à partir de la série, puis à composer en se déplaçant dans cet ensemble et en se servant des classes de hauteurs des blocs ainsi parcourus.

L'engendrement d'un ensemble de blocs sonores à partir de la série se fait en plusieurs étapes. Dans un premier temps, PIERRE BOULEZ associe cinq blocs sonores *a*, *b*, *c*, *d* et *e* à la série par découpage (3 notes - 1 note - 2 notes - 4 notes - 2 notes ; on notera ce découpage (3, 1, 2, 4, 2) ; il est indiqué sur la figure 4).

Dans un deuxième temps, il effectue les vingt-cinq produits $a \times a$, $a \times b$, $a \times c$ etc. Enfin, il permute cycliquement son découpage, ce qui lui permet d'obtenir quatre nouveaux groupes de cinq blocs sonores (découpages (1, 2, 4, 2, 3), (2, 4, 2, 3, 1), (4, 2, 3, 1, 2) et (2, 3, 1, 2, 4)) qui permettent chacun d'effectuer vingt-cinq produits de blocs.

Au bout du compte, ce sont 125 blocs sonores (non forcément tous distincts) qui ont été engendrés à partir de la même série, soit beaucoup plus que les 78 blocs sonores qu'on peut obtenir en considérant tous les sous-ensembles de la série.

On remarquera la présence d'un bloc sonore d'une seule classe de hauteurs dans les découpages de la série utilisés. Cela garantit l'apparition parmi les 125 produits de blocs de sous-blocs de la série.

3. Propriétés opératoires

Elles sont bien connues de façon empirique. Nous en donnons ici une démonstration à l'aide d'une première modélisation du principe de multiplication de blocs sonores.

3.1. Représentation du produit comme « ensemble de sommes »

On peut désigner un bloc sonore en précisant un choix d'origine et en donnant l'ensemble des intervalles des classes de hauteurs qui constituent le bloc par rapport à cette origine. On conviendra ici de compter les intervalles en nombre de demi-tons. Les blocs sonores de la figure 2 seront alors désignés par $(do, \{0, 1, 6, 8, 11\})$ et $(fa, \{0, 1, 6, 8, 11\})$. Cette représentation est bien adaptée à l'opération de transposition : seule l'origine précisée change quand on transpose le bloc.

On peut également décrire précisément un bloc sonore en donnant l'ensemble des classes de hauteurs qui le constituent. Désignons par « classe 0 » la « classe de *do* », par « classe 1 » la « classe de *do#* », par « classe 2 » la « classe de *ré* » etc. Ainsi les blocs sonores de la figure 2 pourront être désignés par $\{0, 1, 6, 8, 11\}$ et $\{5, 6, 11, 1, 4\}$.

Cette deuxième représentation est moins bien adaptée à l'opération de transposition que la précédente : toutes les classes de hauteurs changent quand on transpose le bloc. Pratiquement, pour obtenir les numéros des classes de hauteurs d'une transposition d'un bloc, il suffit d'additionner modulo 12 aux numéros des classes de hauteurs du bloc l'intervalle de transposition (en demi-tons). Par exemple, le deuxième bloc de la figure 2 se déduit du premier en transposant d'une quarte ascendante (+5 demi-tons), et on a

$$\{5, 6, 11, 1, 4\} = \{(0 + 5), (1 + 5), (6 + 5), (8 + 5), (11 + 5)\} = \langle \{0, 1, 6, 8, 11\} + 5 \rangle.$$

Pour résumer par une formule, si $\{a_i | i = 1..n\}$ désigne l'ensemble des classes de hauteurs d'un bloc A de n classes de hauteurs distinctes, et si x est un intervalle de transposition (en demi-tons), alors $\{a_i + x \pmod{12} | i = 1..n\}$ représente l'ensemble des classes de hauteurs du transposé de A par cet intervalle.

Soit A un bloc sonore de n classes de hauteurs distinctes, et B un bloc sonore de p classes de hauteurs distinctes. Considérons le produit $A \times B$. Les deux blocs ne jouent pas le même rôle dans le procédé de multiplication. Du bloc A on retient les intervalles par rapport à une origine qui a été préalablement choisie ; les classes de hauteurs du bloc B servent d'origine à des transpositions du bloc A . Soit x un choix d'origine du bloc A , et $\{a_i | i = 1..n\}$ l'ensemble des intervalles des classes de hauteurs qui constituent le bloc A par rapport à cette origine. On a « $A = (x, \{a_i | i = 1..n\})$ » suivant le premier mode de représentation et « $A = \{a_i + x \pmod{12} | i = 1..n\}$ » suivant le deuxième mode de représentation. Soit $\{b_j | j = 1..p\}$ l'ensemble des classes de hauteurs qui constituent le bloc B . On a « $B = \{b_j | j = 1..p\}$ » suivant le deuxième mode de représentation.

Le transposé du bloc A sur la j -ième classe de hauteurs du bloc B est $(b_j, \{a_i | i = 1..n\})$ suivant le premier mode de représentation, ou $\{a_i + b_j \bmod 12 | i = 1..n\}$ suivant le deuxième mode de représentation. On en déduit :

Proposition 1. *Soit A un bloc sonore de n classes de hauteurs distinctes, et B un bloc sonore de p classes de hauteurs distinctes. L'ensemble des classes de hauteurs qui constituent le produit $A \times B$ est $\{a_i + b_j \bmod 12 | i = 1..n, j = 1..p\}$ où $\{a_i | i = 1..n\}$ est l'ensemble des intervalles des classes de hauteurs qui constituent le bloc A par rapport à une origine x préalablement choisie, et $\{b_j | j = 1..p\}$ est l'ensemble des classes de hauteurs qui constituent le bloc B .*

3.2. Commutativité

On reprend les notations de la proposition qui précède. Si on choisit b_1 pour origine du bloc B , alors on a « $B = (b_1, \{b_j - b_1 \bmod 12 | j = 1..p\})$ » suivant le premier mode de représentation. D'autre part, on a « $A = \{a_i + x | i = 1..n\}$ » suivant le deuxième mode de représentation. On a ainsi « $B \times A = \{(b_j - b_1) + (a_i + x) \bmod 12 | j = 1..p, i = 1..n\}$ » suivant le deuxième mode de représentation d'après la proposition 1.

Mais $\{(b_j - b_1) + (a_i + x) \bmod 12 | j = 1..p, i = 1..n\} = \{a_i + b_j + (x - b_1) \bmod 12 | i = 1..n, j = 1..p\} = \langle A \times B + (x - b_1) \rangle$. Donc $B \times A$ se déduit de $A \times B$ par transposition.

Proposition 2. *Le produit de blocs sonores est commutatif à transposition près :*

$$B \times A \stackrel{\text{transposition}}{=} A \times B.$$

3.3. Renversement et produit

Par analogie avec le langage harmonique classique, on appellera *renversement* le fait de changer de choix d'origine d'un bloc sonore B .



FIG. 5 – Exemple de renversement

Il est clair que le bloc sonore ne change pas quand on le renverse. On change cependant de réalisation du bloc comme on le voit sur l'exemple de la figure 5. Soient deux blocs sonores A et B . Quand on effectue le produit $A \times B$, on transpose le bloc A sur les classes de hauteurs du bloc B , ce qui est complètement indépendant du choix de l'origine du bloc B . D'où :

Proposition 3. *Soient A et B deux réalisations de blocs sonores. On désigne par $Renv(B)$ un renversement de la réalisation B . On a*

$$A \times Renv(B) = A \times B.$$

On déduit des propositions 2 et 3 :

Corollaire 4. *Soient A et B deux réalisations de blocs sonores. On désigne par $Renv(A)$ un renversement de la réalisation A . On a*

$$Renv(A) \times B \stackrel{\text{transposition}}{=} A \times B.$$

Il ressort du corollaire 4 que le produit de deux blocs sonores dépend du choix des réalisations de ceux-ci, mais seulement à transposition près. Pour définir proprement la multiplication de blocs sonores, il faudrait donc se restreindre uniquement à des classes de blocs à transposition près.

4. Contrôle de la nature « harmonique » du produit de blocs

On a vu en section 2 comment PIERRE BOULEZ se sert du principe technique de multiplication de blocs sonores comme principe compositionnel dans *L'Artisanat furieux*.

Ce procédé, qui permet d'assurer d'un côté une grande cohérence du matériau compositionnel et de l'autre une échappatoire à certaines contraintes liées à l'écriture sérielle, paraît fort séduisant. Il se pose cependant le problème du contrôle des qualités sonores des blocs produit engendrés.

Nous traitons ici un exemple particulier : celui des blocs sonores qui correspondent à des accords ou des échelles sonores utilisés en musique dite classique. On les appellera *blocs classés*. Les compositeurs sérialistes ne cherchent pas forcément à éviter ce type de blocs sonores dans leurs oeuvres, mais il est nécessaire pour la plupart d'entre eux de contrôler leurs occurrences, car ces blocs ont de très fortes connotations auditives (nous restons volontairement vague afin de ne pas dériver vers des questions musicologiques qui ne sont pas l'objet de cet article et dont nous ne sommes aucunement spécialiste).

Dans les oeuvres de PIERRE BOULEZ qui utilisent la multiplication de blocs sonores, les blocs classés sont rares et leurs occurrences contrôlées. Il est naturel de se demander si PIERRE BOULEZ a dû vaincre des difficultés importantes pour arriver à cette situation, ou s'il est inhérent à la technique de multiplication de blocs que les blocs classés soient rares parmi les produits de blocs envisageables.

Nous répondons à cette question à l'aide d'une modélisation géométrique du produit de blocs.

4.1. Modélisation géométrique du produit de blocs

Il est classique de représenter les 12 classes de hauteurs chromatiques sur un cercle (voir figure 6). On peut alors associer à tout bloc sonore le polygone convexe dont les sommets sont les classes de hauteurs du bloc. Ainsi, à un bloc de deux hauteurs est associé un segment, à un bloc de trois hauteurs est associé un triangle, à un bloc de quatre hauteurs est associé un quadrilatère, à un bloc de cinq hauteurs est associé un pentagone *etc.*

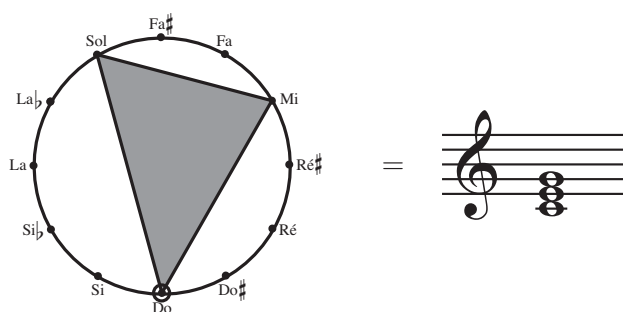


FIG. 6 – Polygone convexe associé à un bloc sonore

La transposition d'un bloc correspond géométriquement à la rotation du polygone associé au bloc. Si on choisit un des sommets x du polygone associé à un bloc A , alors le polygone convexe associé au produit du bloc A et d'un autre bloc B est l'enveloppe convexe de la réunion de tous les transformés par rotation du polygone associé à A tels que son sommet x se retrouve en l'un des sommets du polygone convexe associé au bloc B (voir figure 7 page suivante).

4.2. Pourquoi les blocs classés sont rares

Proposition 5. *Soit A un bloc sonore de n classes de hauteurs distinctes et B un bloc sonore de p classes de hauteurs distinctes. Alors le nombre de classes de hauteurs distinctes du bloc sonore $A \times B$ est compris entre $\max(n, p)$ et $\min(n \times p, 12)$.*

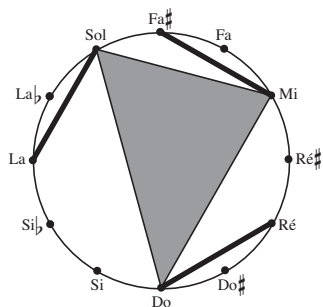
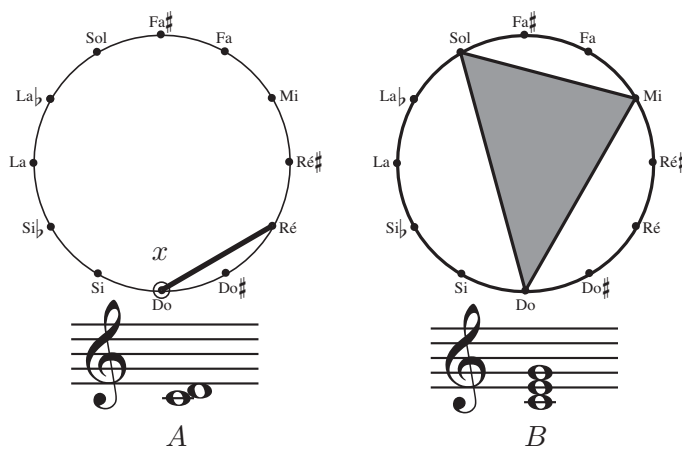
Démonstration. Le bloc B contient au moins une classe de hauteurs, aussi le bloc $A \times B$ contient au moins les n classes de hauteurs distinctes du transposé du bloc A sur une classe de hauteurs de B . Le bloc $A \times B$ contient également au moins les p classes de hauteurs distinctes du bloc B car elles servent d'origine aux transpositions du bloc A . Donc le nombre de classes de hauteurs distinctes du bloc $A \times B$ est au moins égal à $\max(n, p)$.

Le bloc $A \times B$ est fait de p transpositions du bloc A . Le bloc $A \times B$ contient donc au maximum $n \times p$ classes de hauteurs distinctes si aucune classe de hauteurs n'est commune à plusieurs de ces p transpositions du bloc A . Par ailleurs, il n'y a que douze classes de hauteurs distinctes. Donc le nombre de classes de hauteurs distinctes du bloc $A \times B$ est au plus $\min(n \times p, 12)$. \square

Le nombre de classes de hauteurs distinctes a donc tendance à augmenter sensiblement quand on effectue des produits de blocs. Pour qu'il reste petit, il faut beaucoup de recouvrements, ce qui impose des restrictions géométriques aux polygones convexes associés à deux blocs sonores A et B dont on effectue le produit.

Nous allons traiter l'exemple des blocs sonores de trois classes de hauteurs distinctes. Soit donc un bloc sonore C de trois classes de hauteurs distinctes, et A (resp. B) un bloc sonore de n (resp. p) classes de hauteurs distinctes. On suppose qu'on a $A \times B = C$.

La proposition 5 impose $n, p \leq 3$ et $n \times p \geq 3$. Le couple (n, p) appartient donc à $\{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. La proposition 2 nous autorise à ne considérer que les couples $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$ et $(3, 3)$.



Collage des rotatés de *A* en les sommets de *B*

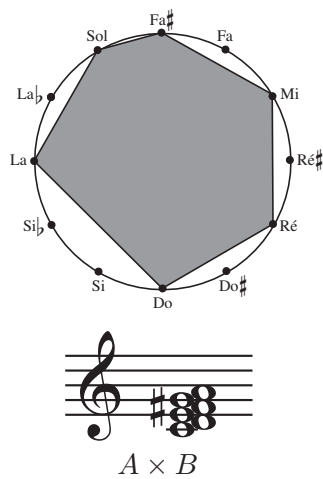


FIG. 7 – Produit de blocs - version géométrique

Cas $n = 1, p = 3$. Tout bloc est produit d'un bloc quelconque d'une seule classe de hauteurs avec lui-même. Ce cas dégénéré ne crée pas de réelle contrainte dans la manière de procéder de PIERRE BOULEZ (voir section 2). Il lui suffit, soit de ne pas isoler une classe de hauteurs lors du découpage de la série, soit s'il fait le choix d'en isoler quand même une, de ne pas choisir une série qui contient un bloc classé.

Cas $n = 2, p = 2$. Le bloc C est produit de deux blocs de hauteurs qui correspondent à deux intervalles. L'intervalle entre les deux classes de hauteurs du bloc A est égal à l'intervalle entre les deux classes de hauteurs du bloc B ou à son complémentaire (ces deux cas reviennent au même quitte à renverser le bloc B , ce qui ne change pas le produit d'après la proposition 3). Dans le cas contraire, il n'y aurait pas de recoupement entre les transpositions du bloc A qui constituent $A \times B$, et $A \times B$ contiendrait quatre classes de hauteurs distinctes. Le bloc C est donc « le carré d'un intervalle ». Les seuls blocs classés qui sont des carrés d'intervalles sont ceux auxquels correspondent l'accord de quinte diminuée (carré de la tierce mineure) et l'accord de quinte augmentée (carré de la tierce majeure).

Cas $n = 3, p = 2$. Le bloc $A \times B$ est constitué de deux transpositions du bloc B . Ces deux transpositions doivent complètement se recouper d'après la proposition 5. Fixons une origine x du bloc A , et considérons une arête a du polygone convexe associé au bloc A dont l'un des sommets est x . L'arête a correspond au même intervalle (à renversement près) que le bloc B . En effet, la transposition du bloc A sur l'une des deux classes de hauteurs du bloc B doit contenir l'autre classe de hauteurs de B puisque $A \times B$ contient les classes de hauteurs de B . En changeant de choix d'origine pour A , on obtient que le triangle associé à $A \times B$ est équilatéral. Le triangle équilatéral correspond à l'accord de quinte augmentée.

Cas $n = 3, p = 3$. Le bloc $A \times B$ est constitué de trois transpositions du bloc B qui doivent complètement se recouper. On montre avec le même raisonnement que pour $n = 3, p = 2$ que les deux triangles associés à A et B sont automatiquement équilatéraux.

Au bout du compte, les seuls blocs classés de trois classes de hauteurs distinctes qui peuvent se présenter comme produit de blocs sont ceux qui correspondent aux accords de quinte diminuée et de quinte augmentée, et ils n'y a que très peu de façons de les obtenir. Il faudrait des contraintes fortes sur la série de départ et son découpage pour obtenir un bloc classé de trois classes de hauteurs distinctes avec le procédé utilisé par PIERRE BOULEZ dans *L'Artisanat furieux*.

L'étude du cas des blocs de quatre classes de hauteurs distinctes est analogue. Les seuls blocs de quatre classes de hauteurs distinctes classés qui peuvent se présenter comme produit de blocs sont ceux qui correspondent aux accords de septième majeure, mineure ou diminuée. Aucun bloc correspondant à un accord de neuvième classé n'est produit de deux blocs d'au moins deux classes de hauteurs distinctes. L'échelle du mode majeur (qui est la même que celle des mode de ré, mi, fa, sol, la et si) est produit d'une quinte juste et du tétracorde « do-ré-mi-fa ». On peut également décomposer en produit de blocs l'échelle de la gamme par ton (il lui est associé un hexagone régulier) et l'échelle pentatonique, mais pas l'échelle du mode mineur.

Finalement, il y a très peu de possibilités d'obtenir des blocs classés comme produit de blocs, et on peut conclure que le produit de blocs est un bon outil pour assurer la rareté des blocs sonores classés.

4.3. Blocs premiers

On appellera *bloc premier* tout bloc sonore qui n'est produit que de lui-même avec un bloc d'une seule classe de hauteurs. Nous avons déjà rencontré de tels blocs : les blocs sonores qui correspondent aux accords parfaits majeur et mineur sont premiers puisque les seuls blocs classés de trois classes de hauteurs distinctes qui peuvent se présenter comme produit de deux blocs sonores d'au moins deux classes de hauteurs distinctes sont ceux qui correspondent aux accords de quinte diminuée et de quinte augmentée (voir section précédente).

On peut dresser un inventaire de tous ces blocs en faisant calculer à un programme informatique l'ensemble des tables de multiplication de blocs sonores. On trouve 128 blocs premiers sur les 351 blocs sonores non vides possibles à transposition près (voir proposition 13).

Cet inventaire nous semble intéressant au titre suivant : si l'utilisation par PIERRE BOULEZ de la technique de produit de blocs sonores lui permet sans effort d'éviter les blocs sonores classés, elle lui interdit par contre l'accès à plus d'un tiers des blocs sonores possibles, ce qui peut être perçu comme une limite de son procédé de composition. Une solution à ce soucis consiste à s'autoriser à n'employer qu'une partie des classes de hauteurs d'un produit de bloc, ce que PIERRE BOULEZ fait parfois. On rend ainsi accessibles tous les blocs premiers, mais on perd la cohérence du procédé car on détruit tout lien réel avec la série de départ (tout bloc sonore est en effet un sous-bloc du bloc qui correspond à la gamme chromatique).

5. Structure de semi-anneau sur l'ensemble des blocs sonores

On peut se demander si la multiplication de blocs sonores est un phénomène isolé, ou s'il existe une ou plusieurs autres opérations naturelles sur les blocs sonores qui soient correctement compatibles avec le produit de blocs.

On rappelle à destination des non-mathématiciens les notions de groupe et d'anneau.

Définition. Un groupe G est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $+$ telle que

- i) on a $a + (b + c) = (a + b) + c$ pour tout $a, b, c \in G$ (associativité),
- ii) il existe un élément neutre $e \in G$ tel que $a + e = e + a = a$ pour tout $a \in G$,
- iii) tout élément $a \in G$ possède un opposé noté $-a$ tel que $a + (-a) = -a + a = e$.

On peut noter la loi de composition interne multiplicativement. On parle alors d'inverse plutôt que d'opposé. Si aucun élément différent de e n'a d'élément opposé, on parle de semi-groupe. Si la loi de composition $+$ est commutative, on parle de groupe abélien.

Definition. Un anneau A est un ensemble A muni de deux lois de composition interne $+$ et \times telles que

- i) l'ensemble A muni de $+$ est un groupe abélien d'élément neutre noté 0 ,
- ii) on a $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ pour tout $a, b, c \in A$ (associativité de \times),
- iii) il existe un élément neutre pour \times noté 1 tel que $a \times 1 = 1 \times a = a$ pour tout $a \in A$,
- iv) on a $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ pour tout $a, b, c \in A$ (distributivité de \times par rapport à $+$).

En particulier, on a $a \times 0 = 0$ pour tout $a \in A$. Ce n'est pas standard, mais si A muni de $+$ est un semi-groupe, on parlera de semi-anneau. Si le produit \times est commutatif, on parle d'anneau commutatif.

On a déjà vu que le produit de blocs sonores n'est bien défini qu'à transposition près. C'est donc sur cet espace qu'on a une chance de trouver une structure intéressante.

L'unique bloc à transposition près d'une seule classe de hauteurs joue le rôle d'élément neutre pour le produit de blocs sonores. On le notera I . Si A est un autre bloc sonore à transposition près, on a effectivement $A \times I \stackrel{trsp}{=} I \times A \stackrel{trsp}{=} A$, car le bloc $A \times I$ est fait d'une unique transposition du bloc A .

La proposition 5 implique que le bloc I est le seul bloc qui possède un inverse, car le nombre de classes de hauteurs du produit de deux blocs A et B ne peut pas être inférieur à leurs nombres de classes de hauteurs distinctes respectifs. L'ensemble des blocs sonores à transposition près, muni du produit de bloc n'est donc pas un groupe (d'après la définition d'un groupe donnée plus haut tout élément d'un groupe possède un inverse).

On dispose d'un bon indice pour avoir l'intuition qu'une structure proche de celle d'anneau existe sur l'ensemble des blocs sonores à transposition près, dont le produit de bloc serait la loi de composition notée multiplicativement : le bloc vide qu'on notera 0 se comporte comme un élément nul, car si A est un bloc sonore quelconque, alors $A \times 0 = 0$ (il n'y a pas de classe de hauteurs dans le bloc 0 sur laquelle transposer le bloc A).

Désignons par « classe 0 » la « classe de *do* », par « classe 1 » la « classe de *do#* », par « classe 2 » la « classe de *ré* » etc. Soit un bloc sonore B et soit un vecteur colonne v à douze lignes numérotées de 0 à 11 et désignées par v_0, \dots, v_{11} . Pour chaque $0 \leq i \leq 11$, posons $v_i = 1$ si la classe de hauteurs i appartient à B , et $v_i = 0$ si la classe de hauteurs i n'appartient pas à B . On appellera le vecteur v *vecteur associé au bloc sonore B* , et on le notera $v(B)$.

Proposition 6. *L'application $B \mapsto v(B)$ est une bijection de l'ensemble des blocs sonores sur l'ensemble des vecteurs associés aux blocs sonores.*

Démonstration. C'est évident, car l'association d'un vecteur à un bloc sonore revient à « cocher » ses classes de hauteurs. □

Le modèle vectoriel ci-dessus n'est pas suffisant pour décrire aisément le produit de deux blocs A et B . Il faut se donner un moyen de « sélectionner » les bonnes transpositions du bloc A qui forment $A \times B$.

Le vecteur associé à la transposition d'un demi-ton vers le haut d'un bloc B se déduit du vecteur $v(B)$ en permutant circulairement les lignes de $v(B)$ de telle façon que pour $0 \leq i \leq 10$, la i -ème ligne de $v(B)$ devienne $(i+1)$ -ème ligne et que la ligne 11 devienne ligne 0. Si on répète cette opération encore dix fois, on obtient les vecteurs associés aux douze transpositions du bloc B (ils ne sont pas forcément tous distincts), qu'on peut réunir en une matrice M carrée 12×12 à coefficients dans $\{0, 1\}$ telle que $M_{(i+1 \bmod 12), (j+1 \bmod 12)} = M_{i,j}$ pour tout $0 \leq i, j \leq 11$ (on a choisi de numéroter les lignes et les colonnes de 0 à 11). On appelle la matrice M *matrice associée au bloc sonore B* , et on la note $M(B)$. On a bien sûr :

Proposition 7. *L'application $B \mapsto M(B)$ est une bijection de l'ensemble des blocs sonores sur l'ensemble des matrices associées aux blocs sonores.*

Démonstration. C'est automatique, car la matrice $M(B)$ est uniquement déterminée par son premier vecteur colonne qui est $v(B)$. \square

$$\begin{array}{c}
 B = \text{Musical staff with notes: } \text{fa}, \text{fa}\#, \text{sol}, \text{sol}\#, \text{la}, \text{la}\#, \text{si} \\
 \\
 v(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{do} \\ \text{do}\# \\ \text{ré} \\ \text{ré}\# \\ \text{mi} \\ \text{fa} \\ \text{fa}\# \\ \text{sol} \\ \text{sol}\# \\ \text{la} \\ \text{la}\# \\ \text{si} \end{array} \\
 \\
 M(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & & & & & 1 \\ & 1 & 1 & & & & & & & & & 1 \\ & & 1 & 1 & & & & & & & & 1 \\ & & & 1 & 1 & & & & & & & 1 \\ & & & & 1 & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & & & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & & & & & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

FIG. 8 – Vecteur associé à un bloc - Matrice associée à un bloc

On rappelle pour les non-mathématiciens le principe d'addition et de multiplication des matrices par un exemple sommaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & \cdot \\ 4 & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 \times 3 + 2 \times 4 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Si les matrices sont à coefficients dans $\{0,1\}$, on peut considérer la somme et le produit booléens donnés par : $0+0=0$; $0+1=1+0=1$; $1+1=1$ et $0 \times 0=0 \times 1=1 \times 0=0$; $1 \times 1=1$. On parle alors de somme booléenne et de produit booléen de matrices.

Proposition 8. *Soient A un bloc sonore de n classes de hauteurs distinctes et B un bloc sonore de p classes de hauteurs distinctes. Soient $v(A)$, $v(B)$, $M(A)$ et $M(B)$ leurs vecteurs et matrices associés.*

- i) On a $v(A \times B) = M(A) \times v(B)$.*
- ii) On a $M(A \times B) = M(A) \times M(B)$.*

On a considéré le produit booléen de matrices à coefficients dans $\{0,1\}$.

Démonstration. Comme le vecteur $v(B)$ est à coefficients dans $\{0,1\}$, le produit de la matrice $M(A)$ avec le vecteur $v(B)$ est la somme des colonnes i_1, \dots, i_p de $M(A)$ avec $0 \leq i_1 < \dots < i_p \leq 11$ et telles que les lignes i_1, \dots, i_p de $v(B)$ correspondent aux p classes de hauteurs de B . Mais la k -ième colonne de $M(A)$ ($0 \leq k \leq 11$) est le vecteur associé à la transposition du bloc A sur la classe de hauteurs numéro k , aussi le produit $M(A) \times v(B)$ est la somme booléenne des vecteurs associés aux transpositions de A sur les classes de hauteurs de B , c'est à dire le vecteur $v(A \times B)$ associé au produit $A \times B$.

Le matrice $M(A) \times M(B)$ est la juxtaposition des vecteurs colonnes de la forme $M(A) \times T_t(v(B))$ où $T_t(v(B))$ est le vecteur associé à une transposition de t demi-tons vers le haut du bloc B , avec $0 \leq t \leq 11$. On a $M(A) \times T_t(v(B)) = T_t(v(A \times B))$, car si on transpose d'un certain intervalle le bloc B , le produit $A \times B$ est transposé du même intervalle. Le produit $M(A) \times M(B)$ est donc exactement la matrice $M(A \times B)$ associée au produit $A \times B$. \square

Il est naturel de considérer l'addition booléenne des vecteurs et des matrices associées à deux blocs sonores A et B et de se demander si elle correspond à une opération naturelle sur les blocs sonores A et B . On va étudier ici le cas des vecteurs associés. Celui des matrices associées est analogue et aboutit au même résultat.

Considérons donc la ligne i du vecteur colonne $v(A) + v(B)$ (addition booléenne), avec $0 \leq i \leq 11$. Si cette ligne contient 1, l'une au moins parmi la i -ème ligne de $v(A)$ et la i -ème ligne de $v(B)$ contient également 1, car en addition booléenne, on a $1 = 1+0 = 0+1 = 1+1$. Donc l'un au moins des blocs A et B contient la classe de hauteurs i .

Si par contre la i -ème ligne de $v(A) + v(B)$ contient 0, alors la i -ème ligne de $v(A)$ et la i -ème ligne de $v(B)$ contiennent toutes les deux 0 car en addition booléenne, on a $0 = 0+0$ uniquement. Donc les blocs A et B ne contiennent pas la classe de hauteurs i .

En d'autres termes :

Proposition 9. *Soient A et B deux blocs sonores, et $v(A)$, $v(B)$, $M(A)$ et $M(B)$ leurs vecteurs et matrices associés. La somme booléenne des vecteurs $v(A)$ et $v(B)$ (resp. des matrices $M(A)$ et $M(B)$) donne le vecteur associé (resp. la matrice associée) au bloc sonore réunion des classes de hauteurs de A et B .*

Le bloc 0 est naturellement un élément neutre pour la réunion de blocs sonores. La réunion de blocs sonores est associative et commutative, et le bloc 0 est le seul à posséder un opposé, car la réunion d'un bloc A avec un bloc quelconque B contient toujours au moins les classes de hauteurs du bloc A . L'ensemble des blocs sonores, muni de la loi de composition interne de réunion est ainsi un semi-groupe.

On ne l'a pas montré, mais la multiplication de blocs sonores est associative à transposition près. Le bloc I est élément neutre. La distributivité du produit par rapport à la réunion est automatique, car la transposition d'une réunion de blocs est la réunion des transpositions de ces blocs, et le produit de bloc est une réunion particulière de transpositions.

Ainsi :

Proposition 10. *L'ensemble des blocs sonores à transposition près, muni de la réunion de blocs et du produit de blocs, est un semi-anneau d'éléments neutres le bloc vide et l'unique bloc d'une seule classe de hauteurs à transposition près.*

On déduit de la proposition qui précède que la technique de multiplication de blocs sonores choisie par PIERRE BOULEZ est un bon choix.

6. Comptage des blocs sonores

La multiplication de blocs sonores est bien définie à transposition près, mais combien y a-t-il de blocs sonores à transposition près ? Nous donnons ici un calcul de ce nombre bien connu.

Proposition 11. *Le nombre de blocs sonores de p classes de hauteurs distinctes est $\binom{p}{12}$.*

Il existe 4096 blocs sonores différents (en comptant le bloc vide).

Démonstration. C'est évident. Les p classes de hauteurs distinctes de chaque bloc sont une combinaison de p classes de hauteurs choisies parmi les douze classes de hauteurs chromatiques. On a $\sum_{p=0}^n \binom{p}{12} = 2^{12} = 4096$. □

Il est plus délicat de compter les blocs sonores à transposition près. Tout bloc sonore possède douze transpositions. Cependant certaines peuvent se recouper. On appellera *bloc sonore à transposition limitée* (ou BTL pour abrégé) tout bloc sonore qui possède moins de douze transpositions distinctes.

Proposition 12. *Il existe 17 blocs sonores à transposition limitée à transposition près. Ils sont répartis ainsi :*

Classes de hauteurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Blocs à transposition près	1	0	1	1	3	0	5	0	3	1	1	0	1

Démonstration. Si B est un BTL, alors la répartition de ses p classes de hauteurs distinctes dans une octave donnée est périodique. Cette période divise 12, mais aussi p . C'est ainsi le plus grand commun diviseur de p et 12 qui permet de contrôler la situation. Nous le noterons $(p, 12)$.

Si B est un BTL de p classes de hauteurs distinctes, alors le bloc de $n - p$ classes de hauteurs distinctes dont les classes de hauteurs sont toutes celles qui n'appartiennent pas à B est un BTL de même période que B . En effet, si le positionnement des classes de hauteurs de B est périodique, alors il en est de même du positionnement des classes de hauteurs qui n'appartiennent pas à B .

Il existe un seul bloc vide qu'on considérera à transposition limitée par symétrie avec l'unique bloc de douze classes de hauteurs distinctes qui est un BTL de période 1.

Si $(p, 12) = 1$ ($p = 1, 5, 7$ ou 11), alors il n'y a pas de diviseur commun à p et 12 autre que 1, et par suite aucun BTL de p classes de hauteurs distinctes.

Si $(p, 12) = q$, q un nombre premier ($p = 2, 3, 9$ ou 10), alors les BTL de p classes de hauteurs distinctes sont faits de la répétition d'une période qui répartit $\frac{p}{q}$ classes de hauteurs distinctes parmi $\frac{12}{q}$. Il y a ainsi $\binom{p/q}{12/q}$ BTL à p classes de hauteurs distinctes,

qui possèdent $\frac{12}{q}$ transpositions distinctes. Ainsi on trouve : $\frac{2}{12} \binom{2/2}{12/2} = 1$ pour $p = 2$, et $\frac{3}{12} \binom{3/3}{12/3} = 1$ pour $p = 3$. On obtient les valeurs pour $p = 9$ et $p = 10$ par symétrie.

Si $p = 6$, il faut considérer les BTL de période $6 = 12/2$, au nombre de $\binom{3}{6}$, les BTL de période $4 = 12/3$, au nombre de $\binom{2}{4}$, et enfin les BTL de période $2 = 12/6$, au nombre de $\binom{1}{2}$ qui sont aussi de période 4 et de période 6. Cela donne $\binom{3}{6} + \binom{2}{4} - \binom{1}{2} = 24$ BTL de six classes de hauteurs distinctes. A transposition près, il reste $\frac{1}{6} [\binom{3}{6} - \binom{1}{2}] + \frac{1}{4} [\binom{2}{4} - \binom{1}{2}] + \frac{1}{2} \binom{1}{2} = 5$ blocs.

Enfin, si $p = 4$ (ou 8 par symétrie), tout BTL est de période $6 = 12/2$, soit $\binom{2}{6}$ BTL, mais $\binom{1}{3}$ d'entre eux sont aussi de période $3 = 12/4$. Ainsi, à transposition près, il reste $\frac{1}{6}[\binom{2}{6} - \binom{1}{3}] + \frac{1}{3}\binom{1}{3} = 3$ blocs. \square

Derrière le résultat bien connu de la proposition précédente se trouve un calcul plus général, qui donne le nombre de blocs sonores à transposition limitée de p classes de hauteurs pour une division de l'octave en n classes de hauteurs. Si la décomposition en facteurs premiers de (p, n) est $p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$, alors ce nombre est

$$\sum_{l=1}^k (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k} \binom{p/p_{i_1} \dots p_{i_l}}{n/p_{i_1} \dots p_{i_l}}.$$

Les modes à transposition limitée d'OLIVIER MESSIAEN, le triton, l'accord de quinte augmentée, l'accord de septième diminuée, la gamme par tons, la gamme chromatique, correspondent à une partie de ces 17 blocs à transposition limitée à transposition près.

Proposition 13. *Il existe 352 blocs sonores distincts à transposition près (en comptant le bloc vide). Ils sont répartis ainsi :*

Classes de hauteurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Blocs à transposition près	1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1

Démonstration. On a déjà compté à la proposition 12 les BTL à transposition près. Le nombre de BTL de p classes de hauteurs distinctes a été donné plus ou moins explicitement dans la preuve de cette proposition.

Le nombre de blocs sonores de p classes de hauteurs distinctes à transposition près est

$$\frac{\text{Nombre de blocs} - \text{Nombre de BTL}}{12} + \text{Nombre de BTL à transposition près}.$$

Par exemple, pour $p = 6$, il y a $\binom{6}{12} = 12 \times 77$ blocs sonores, dont 24 BTL, et il y a 5 BTL à transposition près. On a donc $\frac{12 \times 77 - 24}{12} + 5 = 80$ blocs sonores de six classes de hauteurs distinctes à transposition près. \square

Bibliographie

- [1] Pierre BOULEZ (1952), *Eventuellement in Relevés d'apprenti*, éd Seuil, Paris (1966)

Nicolas WEISS
 Université Louis Pasteur
 Strasbourg
 weiss@math.u-strasbg.fr

TRESSES NÉORIEMANIENNES

QUELQUES APPLICATIONS MUSICALES DE LA THÉORIE DES NŒUDS

Franck JEDRZEJEWSKI

Résumé : Nous présentons dans cet article trois applications de la théorie des nœuds au domaine musical : un modèle d'enharmoine, un modèle dodécaphonique et une analyse nodale. L'enharmoine est construite par des pliages dans la spirale des quintes justes sous l'action du groupe de Artin sur les réseaux de Hostinsky. Le modèle dodécaphonique est une classification des séries de douze sons par des diagrammes de cordes. L'analyse nodale est une recherche de petites topologies dans des textes littéraires ou musicaux.

Mots-clés : Nœud - Tresse - Diagramme de cordes - Modèle d'enharmoine - Représentation de Bureau - Série dodécaphonique - Nœud dodécaphonique - Analyse nodale.

Introduction

Les mathématiques ont toujours entretenu des liens privilégiés avec la musique. Dès les premières expériences que Pythagore réalisa sur le monocorde, les rapports des fréquences musicales ont été la source d'inspiration de théoriciens qui voulaient expliquer l'univers par les nombres. Aujourd'hui les choses ont évolué, mais il reste que, si on ne cherche plus à distribuer les orbites des planètes du système solaire dans une harmonie parfaite selon les rapports numériques des intervalles musicaux, on accorde encore une place importante aux justifications mathématiques de problèmes que posent la création musicale et artistique.

L'idée n'est pas de réinventer le pythagorisme, mais de donner à voir les structures combinatoires que la nature et les compositeurs ont savamment placées ou utilisées pour leurs œuvres. A partir de Jean-Sébastien Bach, l'accord des instruments de musique s'est figé autour du tempérament égal. Mais avant cet usage qui s'est généralisé à l'échelle européenne, de nombreux accords ont été employés en fonction des goûts des facteurs et des riches possibilités qu'offraient les instruments, et plus particulièrement, à cette époque, les orgues. Les adeptes de l'*Intonation juste* ont cherché de nouvelles solutions aux problèmes d'accord en évitant le tempérament égal dont le manque de relief sonore a été si souvent critiqué. Non seulement on associait des nombres aux choix des fréquences, mais on voulait de plus que ces nombres fournissent les clés de l'harmonie. La simplicité du rapport de deux fréquences était garante de la simplicité naturelle de l'harmonie et de la qualité sonore des œuvres musicales. Puisque le beau était dans la nature, les fréquences devaient s'y trouver comme les nombres naturels.

Aujourd'hui on ne cherche plus à justifier la création ou la pratique musicale par des arguments d'ordre mathématique. Ce dont le compositeur ou le théoricien ont besoin, c'est de pouvoir dénombrer les objets qu'ils inventent, de les classer et de comprendre comment ils s'organisent. La nature profonde des structures musicales est un enjeu important de

notre compréhension du monde. Dans cet article, je donnerais trois exemples qui sont en rapport avec la théorie mathématique des tresses et des nœuds.

Dans le premier exemple qui s'inspire des travaux du musicologue Hugo Riemann, nous allons construire une tresse à deux brins le long de la spirale des quintes. Dans le tempérament égal, c'est-à-dire dans l'accord que nous utilisons aujourd'hui, les notes *do dièse* et *ré bémol* sont enharmoniques. Elles correspondent à la même fréquence et à la même touche noire du piano. Pourtant, en harmonie tonale, ces notes n'ont pas la même fonction. Ce qui pose de nombreuses questions. Avons-nous raison de les distinguer ? Si elles n'ont pas la même fonction, pourquoi auraient-elles la même fréquence ? Cette distinction correspond-elle à une réalité physique ? N'est-ce pas le pouvoir adaptatif de notre oreille qui malgré la fréquence nous contraint à distinguer un *do dièse* d'un *ré bémol* ? Est-ce plutôt la langue musicale, c'est-à-dire la grammaire et la syntaxe, qui oblige notre intellect à distinguer ces deux notes ? Pourquoi le système tempéré n'est-il fait que de *douze* sons ? Voilà des questions auxquelles la musicologie apporte des réponses. Mais ses réponses ne sont pas satisfaisantes. Car si nous devons construire un logiciel qui écrit les notes que nous jouons sur un clavier couplé à un ordinateur, il faudra être capable de calculer s'il s'agit d'un *do dièse* ou d'un *ré bémol*. Le logiciel s'aidera du contexte, mais dans certaines situations, il sera incapable de reproduire le savoir de l'expert.

La question est donc : peut-on calculer une enharmonie ? Nous n'allons pas résoudre ce problème qui reste ouvert, mais donner quelques éléments mathématiques qui aideront à comprendre ce qu'est l'enharmonie à partir d'un modèle simple. Pour cela, nous considérons un système d'accord pythagoricien dans lequel nous n'avons que des quintes justes et nous mettons en évidence une hiérarchie de gammes qui s'emboîtent les unes dans les autres comme des poupées russes. Cet emboîtement s'ordonne autour de nombres qui ont un rapport avec la décomposition en fractions continues du rapport de la quinte tempérée et l'arbre de Stern-Brocot. En distinguant deux types de quintes, nous construisons un tressage sur la spirale des quintes. En faisant agir le groupe des tresses, on montre que le passage du système pythagoricien au système tempéré a des similarités avec le passage d'un système non-commutatif à un système commutatif. Ce passage d'un modèle non-enharmonique à un modèle enharmonique est à la musicologie ce que la non-commutativité est aux mathématiques ou ce que la quantification, c'est-à-dire le passage de la mécanique quantique à la mécanique classique est à la physique. Mais ici contrairement aux modèles physiques, nous n'avons pas de quantum d'action \hbar , donc pas de passage à la limite ($\hbar \rightarrow 0$).

Dans le deuxième exemple qui emprunte aussi des notions de théorie des nœuds, nous proposons une classification des séries de douze sons par des *diagrammes de cordes*. Ces diagrammes représentent la structure tritonique des séries dodécaphoniques. L'idée de relier sur un même graphe les tritons d'une série de douze sons est à l'origine de ces diagrammes, fondés sur le triton qui est l'ensemble à transpositions limitées le plus simple. On aurait pu imaginer un autre type de diagramme montrant l'enchevêtrement d'ensembles à transpositions limitées autre que le triton, mais la structure graphique aurait été plus compliquée. Les *ensembles à transpositions limitées* ont été employés par Olivier Messiaen. Nous savons qu'ils interviennent de manière singulière dans toutes les compositions et en harmonie tonale dans certaines modulations. C'est le rôle bien connu de l'accord de septième diminuée qui parce qu'il est à transpositions limitées peut connecter plus facilement que les autres accords plusieurs tonalités. L'analyse des partitions musicales construites sur des séries ou des proliférations de séries est d'une grande difficulté. Les

indications laissées par le compositeur aident à l'analyse, mais elles n'existent pas toujours. Pour aider à l'analyse musicale, la recherche d'invariants permettrait de repérer plus facilement telle ou telle forme sérielle. L'avantage de ces invariants est aussi de fournir un processus de classification des œuvres. A chaque diagramme de cordes est associée une permutation. Lorsque plusieurs séries sont utilisées dans une pièce, les permutations correspondantes à ces séries engendrent un groupe dont l'ordre représente les possibilités d'engendrement du matériau sériel. La connaissance de ces invariants et des structures mathématiques des formesérielles est une contribution importante à la musicologie du XX^e siècle.

Dans le dernier exemple, je montre comment mettre en évidence dans des textes littéraires ou musicaux des structures nodales témoins d'une invariance structurelle, qui se déploient le long d'un entrelacs. Lorsque ces structures apparaissent à plusieurs reprises dans un texte, elles peuvent être, comme la série dodécaphonique de Schoenberg, un élément moteur de la cohésion d'une œuvre.

1. Un modèle d'enharmonie

Dans la plupart des modèles d'accord des instruments de l'orchestre, l'octave est la période du tempérament. A quelques rares exceptions près¹, les fréquences des notes se répètent à l'identique d'une octave à une autre. Dans les expériences sur le monocorde, il suffit de pincer la corde en son milieu pour produire un son à l'octave. Le rapport des fréquences est inversement proportionnel au rapport des longueurs de cordes. Pour le musicien, il est souvent plus simple de travailler avec des rapports de fréquences relativement à une note de base qu'avec les fréquences elles-mêmes. Ainsi dans les modèles de tempéraments périodiques à l'octave, toutes les notes de même nom ont le même rapport. Ces rapports sont mesurés relativement à la fréquence d'une note fixée par convention (ici la note *do*). Dans le système dit naturel, la note *sol* qui correspond à un intervalle de quinte juste a un rapport acoustique de 3/2. Son renversement, la quarte représentée par le rapport de la fréquence de la note *fa* à la fréquence de la note *do*, a un rapport de 4/3. Ce qui se calcule aussi en remarquant que l'octave se compose d'une quinte et d'une quarte dont les rapports acoustiques vérifient l'équation :

$$\nu_{quinte} \times \nu_{quarte} = 2$$

Les additions étant parfois plus faciles que les multiplications, les musiciens emploient une échelle logarithmique pour exprimer que l'octave se compose de 1200 cents ou que le demi-ton est formé de 100 cents. Une oreille "moyenne" perçoit facilement une différence de 5 cents. Un rapport acoustique formé du rapport des fréquences f_2/f_1 ($f_1 < f_2$) se mesure en *cents* par

$$1200 \log_2 \left(\frac{f_2}{f_1} \right)$$

Lorsqu'on accorde un piano, on réalise ce que les facteurs et accordeurs appellent une *partition*. Cette partition est le plan à suivre pour accorder de proche en proche les quintes

¹Quelques facteurs et théoriciens ont proposé de modifier la périodicité du système d'accord. Serge Cordier augmente légèrement l'octave de façon à n'avoir que des quintes justes, Wendy Carlos redistribue les fréquences dans un esprit microtonal. Sur ces questions voir [4] et [6]

et octaves. Dans l'accord qui est réalisé, on aimerait que toutes les quintes soient des quintes justes de rapport $(3/2)$ et qu'au bout d'un certain nombre de quintes on retombe sur une octave. Malheureusement, cela n'est pas possible car l'équation

$$\left(\frac{3}{2}\right)^q = 2^p$$

n'a pas de solution (p, q) entière (non triviale). Lorsqu'on passe les douze quintes de la gamme, on se retrouve au voisinage de sept octaves, mais pas exactement sur la septième octave. Autrement dit, lorsqu'on parcourt l'espace des fréquences en sautant de quinte juste en quinte juste, on est conduit à considérer la solution approchée $(7, 12)^2$. La différence entre les douze quintes et les sept octaves forme le *comma pythagoricien*, un intervalle qui vaut environ 23 cents.

$$C_p = \frac{12 \text{ quintes justes}}{7 \text{ octaves}} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

C'est ce comma qui est réparti entre les quintes pour former un "tempérament". Car pour retomber sur la septième octave, on est contraint de diminuer légèrement la fréquence des quintes, de *tempérer* les quintes. Dans le tempérament que nous utilisons aujourd'hui, la répartition s'effectue de manière égale entre les douze quintes. Mais historiquement, plusieurs solutions ont été proposées pour ajuster les quintes en répartissant le comma pythagoricien sur quelques quintes de façon à préserver certaines quintes justes. La théorie a pris un nouvel essor lorsque les musiciens et théoriciens se sont intéressés à des problèmes analogues en considérant non plus les quintes, mais les tierces. Un nouveau comma est alors apparu : le *comma syntonique* $C_s = 81/80$ (environ 22 cents).

Dans les systèmes pythagoriciens à n sons par octave, aussi appelés échelles pythagoriciennes, on détermine les fréquences de chaque note à partir de la spirale des quintes. On part du *do* central de rapport acoustique 1, et on monte la spirale en multipliant les rapports par $3/2$ et on la descend en divisant les rapports par cette même quantité. En remplaçant chaque son dans l'intervalle d'octave en divisant ou en multipliant le rapport par une puissance convenable de 2, on construit une suite infinie de rapports qui se place sur une hélice comme sur la surface de Riemann³ de $\log(z)$.

$$\dots, 2^5/3^3 \text{ (Eb)}, 2^4/3^2 \text{ (Bb)}, 2^2/3 \text{ (F)}, 1 \text{ (C)}, 3/2 \text{ (G)}, 3^2/2^3 \text{ (D)}, 3^3/2^4 \text{ (A)}, \dots$$

On choisit ensuite de tronquer cette suite et de ne retenir que n nombres qui, réordonnés par ordre croissant, déterminent les fréquences du système d'accord que l'on souhaite construire. Les *systèmes cycliques* sont des généralisations de cette construction. En prenant un nombre quelconque ω , on calcule ses puissances

$$\dots, \omega^{-3}, \omega^{-2}, \omega^{-1}, 1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots$$

qui sont recadrées dans l'intervalle $[1, 2]$ par multiplication ou division par une puissance de 2. On choisit alors n nombres consécutifs de cette suite qui réordonnés par ordre croissant donnent un système d'accord. Lorsque l'on fait varier n , on constate que les systèmes s'emboîtent les uns dans les autres comme des poupées russes. Certains systèmes n'ont que deux intervalles élémentaires. Ils forment ce que nous appelons des systèmes ou *échelles cycliques*⁴. Pour $\omega = 3$, nous obtenons les échelles pythagoriciennes. La première est

²Remarquons qu'en développant en fractions continues $\log(3/2)/\log 2$ on trouvera les "meilleures" approximations des solutions de l'équation. Ce procédé a été employé pour calculer des tempéraments à n degrés approchant le système naturel.

³Il s'agit ici du mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) et non du musicologue.

⁴Cette notion est équivalente aux *well-formed scales* de Carey et Clampitt (voir [1]).

obtenue pour $n = 3$. Elle se compose de trois sons $L_3 = \{1 \text{ (C)}, 4/3 \text{ (F)}, 3/2 \text{ (G)}\}$ et de deux intervalles $c_1 = 4/3$ et $c_2 = 9/8$. On la représente par le mot

$$L_3 = c_1 c_2 c_1$$

L'échelle de rang supérieur est formée de cinq sons et de deux intervalles $c_2 = 9/8$ et $c_3 = c_1/c_2 = 32/27$.

$$L_5 = c_2 c_3 c_2 c_3 c_2$$

Les premières échelles sont données dans la table suivante dans laquelle on trouve le nombre de degrés dans l'échelle⁵, puis le nombre d'intervalles élémentaires (p intervalles c_x et q intervalles c_y), le rapport acoustique de l'intervalle élémentaire (c_y) et sa valeur en cents.

3	$2c_1$	$1c_2$	$c_2 = c_0/c_1 = 9/8$	204
5	$3c_2$	$2c_3$	$c_3 = c_1/c_2 = 32/27$	294
7	$5c_2$	$2c_4$	$c_4 = c_3/c_2 = 256/243$	90
12	$7c_4$	$5c_5$	$c_5 = c_2/c_4 = 2187/2048$	114
17	$12c_4$	$5c_6$	$c_6 = c_5/c_4 = 3^{12}/2^{19}$	23
29	$17c_6$	$12c_7$	$c_7 = c_4/c_6 = 2^{27}/3^{17}$	67
41	$29c_6$	$12c_8$	$c_8 = c_7/c_6 = 2^{46}/3^{29}$	43
53	$41c_6$	$12c_9$	$c_9 = c_8/c_6 = 2^{65}/3^{41}$	2
94	$53c_9$	$41c_{10}$	$c_{10} = c_6/c_9 = 3^{53}/2^{84}$	3.6

Comme nous sommes maintenant familiarisés avec les fréquences et les systèmes d'accord, nous allons construire un modèle d'enharmoine. Pour cela, nous distinguons dans la spirale des quintes dont les rapports sont recadrés à l'octave, les "quintes justes" que nous notons P , comme par exemple C (1) – G (3/2), et les "quintes pliées" que nous notons Q , comme par exemple la quinte G (3/2) – D (9/8) dans laquelle nous avons été contraint de diviser le rapport par 2 pour replacer le rapport dans l'octave. Autrement dit, on distingue dans la spirale, les quintes dont les rapports f_2/f_1 valent 3/2 (type P) et celles dont les rapports valent 3/4 (type Q). Plaçons ces résultats sur un réseau de Hostinsky (voir [3]). Ce réseau est un graphe du plan dans lequel chaque note est au centre d'un hexagone. Une note est entourée de ses voisines en relation de quinte, de tierce majeure, de tierce mineure et de leurs renversements. Les quintes sont disposées sur les lignes horizontales. Pour construire la spirale des quintes, on recolle les bords latéraux (cf. Fig. 1) du réseau : le bord droit s'identifie au bord gauche un triangle au-dessus. Le son $D\flat$ qui se trouve en bas à droite est ainsi identifié au même $D\flat$ situé sur le bord gauche un triangle plus haut. En parcourant le réseau de gauche à droite et de bas en haut, on décrit la spirale des quintes. Comme les quintes P et Q ne commutent pas, il faut respecter l'ordre des facteurs. Pour aller de C à $C\sharp$, on peut suivre la spirale ou prendre un raccourci en suivant les arêtes du triangle C – E – $C\sharp$ ou C – A – $C\sharp$. Le mot représentant ce trajet est

$$C - C\sharp = P Q P Q P Q Q$$

Considérons maintenant l'action du groupe des tresses B_n sur ce réseau. Si on désigne par $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ les générateurs de B_n , le groupe de Artin (ou groupe des tresses) est défini par

⁵Cette table donne une curieuse parenté entre le nombre de degrés dans l'échelle (3, 5, 7, 12, 17, 29, etc.) et les valeurs des réduites du développement en fractions continues de $\log(3/2)/\log 2$.

les relations

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_i^{-1} &= \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1 \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{si } |j - i| \geq 2 \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, n - 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{pour } i = 1, 2, \dots, n - 2 \end{aligned}$$

Si le groupe n'a que deux générateurs P et Q , les relations se réduisent à

$$PQP = QPQ$$

Pour un paramètre réel t , les matrices

$$P = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -t \end{pmatrix}$$

définissent la représentation de Burau du groupe B_3 . Elles vérifient les relations

$$(PQ)^6 = (QP)^6 = t^6 .id$$

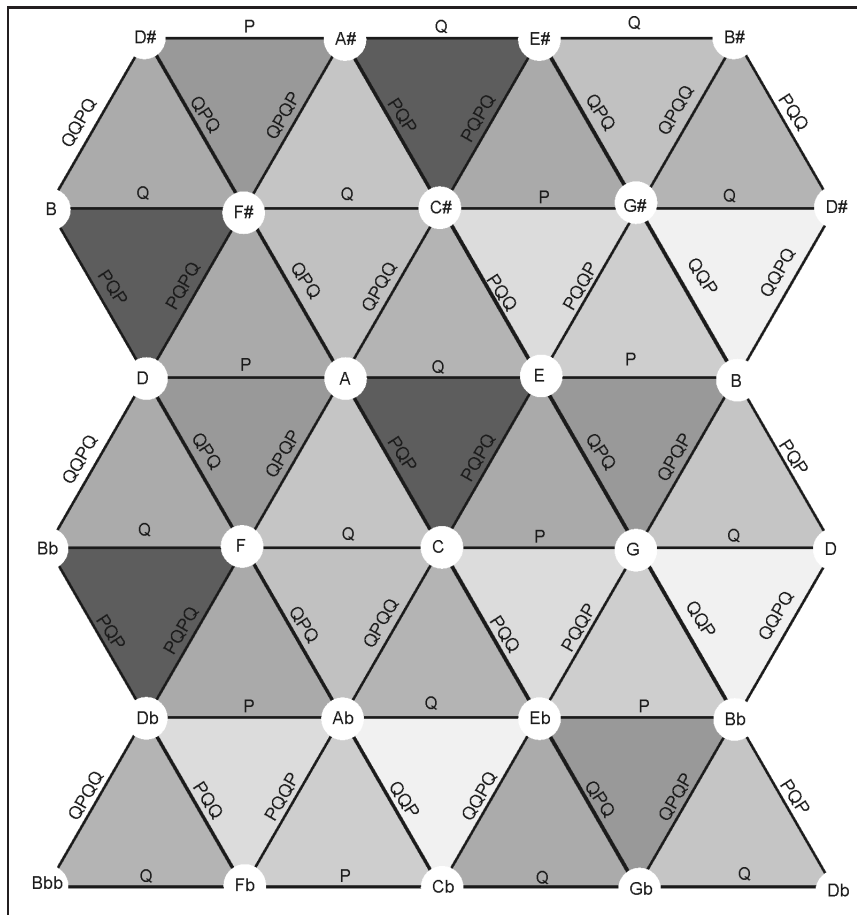


FIG. 1 – Réseau de Hostinsky

Lorsque t vaut 1, le groupe B_3 est le groupe symétrique S_3 et $P^2 = Q^2 = 1$. A chaque son de la spirale des quintes est associée une matrice. En prenant la matrice identité pour le son C, on calcule toutes les représentations des sons dans la spirale des quintes. Citons un

résultat bien connu de cette représentation : pour un son X , de matrice notée encore X , le déterminant $\det(1 - X)$ est proportionnel au polynôme d'Alexander qui caractérise la tresse associée à X (Cette tresse représente l'enchevêtrement des lettres P et Q dans X). Le rang d'une quinte dans la spirale est donné par

$$\log(-\det(X))(e)$$

Introduisons les commutateurs

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

La relation $PQP = QPQ$ conduit aux expressions

$$P = QPQP^{-1}Q^{-1} = Q \cdot [P, Q]$$

et

$$Q = PQPQ^{-1}P^{-1} = P \cdot [Q, P]$$

Les distances entre les notes enharmoniques du modèle traditionnel à douze sons se calculent en utilisant les relations du groupe des tresses. Par exemple, calculons $D\flat - C\sharp$. En utilisant le tressage $PQP = QPQ$,

$$\begin{aligned} D\flat - C\sharp &= PQPQQPQPQPQQ \\ &= PPQPQPQPQPQQ \\ &= P(PQ)^5Q \end{aligned}$$

Puis, avec la relation $(PQ)^6 = t^6 \cdot Id$, on exprime cette distance en fonction du commutateur de P et Q^{-1} .

$$D\flat - C\sharp = t^6 P(PQ)^{-1}Q = t^6 [P, Q^{-1}]$$

Toutes les distances entre les notes enharmoniques s'expriment de cette façon. La figure 2 donne les commutateurs des notes enharmoniques.

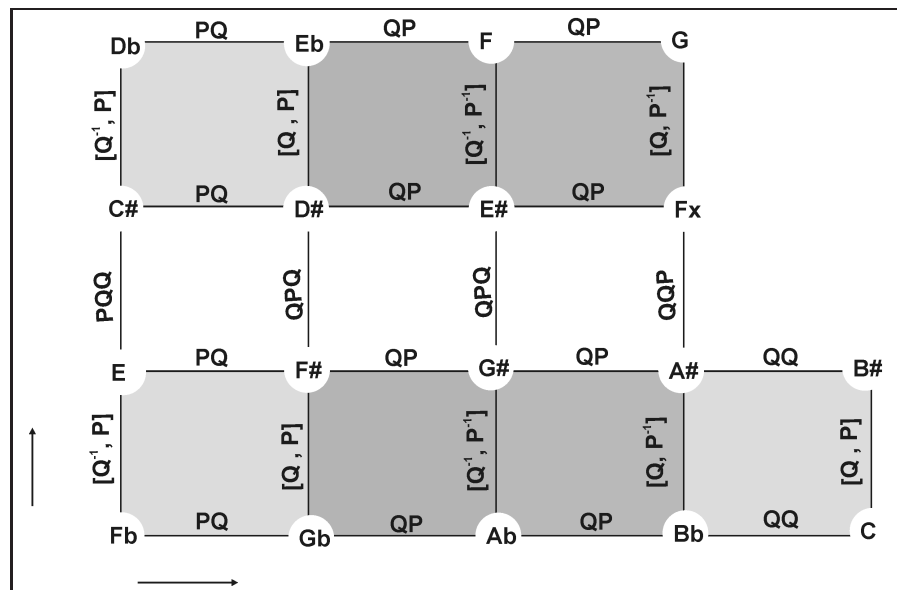


FIG. 2 – Commutateurs des notes enharmoniques

Pour $t = 1$, $x = -P$ et $y = -Q$, on retrouve le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ qui a été étudié par Thomas Noll (cf. [9] et [10]). La présentation de ce groupe en générateurs et relations est la suivante

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \langle x, y \mid xyx = yxy, (xy)^6 = 1 \rangle$$

Si on note $SL(2, \mathbb{Z})'$ le groupe des commutateurs, on retrouve la suite exacte

$$1 \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})' \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

où l'ensemble $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est identifié aux douze sons de la gamme. En croisant les quintes $(3/2)$ et les tierces majeures justes $(5/4)$ dans un réseau à la manière de ceux de Riemann (voir [11] à [14]), et en considérant l'action du groupe B_5 , on construit plusieurs modèles enharmoniques, qui constituent une généralisation des tresses néoriemaniennes obtenues ici dans le cas simple de l'action du groupe B_3 à deux générateurs.

2. Nœuds dodécaphoniques

Arnold Schoenberg est l'inventeur d'une méthode de composition à douze sons qui a été popularisée en France par René Leibowitz (cf. [8]). Cette méthode consiste à ordonner les douze sons de la gamme en une *série dodécaphonique* et à utiliser cette forme et 48 formes dérivées comme matériau compositionnel. Chaque série en forme droite ou inversée est transposée sur un des douze sons et chaque forme est lue de droite à gauche ou de gauche à droite donnant ainsi au plus 48 séries dérivées⁶. Dans ces conditions on démontre par le théorème de Pólya qu'il existe 9 985 920 séries différentes (voir [6]). Naturellement, ce chiffre est beaucoup trop important pour que le musicologue puisse élaborer une étude analytique des formes sérielles. D'où l'idée de recourir aux diagrammes de cordes. Pour construire un diagramme de cordes issu d'une série dodécaphonique, il suffit de placer les notes sur un cercle en tournant dans le sens trigonométrique et de joindre par une corde les tritons. Ainsi, si les notes de la gamme sont identifiées aux éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$, les cordes relient les couples $(0,6)$, $(1,7)$, $(2, 8)$, ..., $(5, 11)$. En effaçant du dessin toute référence aux notes, on obtient un diagramme abstrait qui représente la structure tritonique de la série. Toutes les formes dérivées de la série conduisent au même diagramme. La transposition n'est qu'une simple rotation, la rétrogradation (lecture de droite à gauche) est une symétrie miroir suivie éventuellement d'une rotation, le renversement (c'est-à-dire l'action de l'inversion $I(x) = -x \bmod 12$ sur les douze sons) a comme la rétrogradation du renversement la même structure diagrammatique, vue dans l'espace.

Les formes sérielles dérivées correspondent à l'action du groupe diédral qui fournit 554 diagrammes de cordes. Ces diagrammes permettent de classer toutes les séries dodécaphoniques en conservant leurs propriétés structurales. Le dénombrement peut se faire dans un cadre plus vaste que celui de la musique tempérée classique. Pour des systèmes à tempérament égal à $2n$ degrés (comme par exemple, les systèmes microtonaux à base de quarts de ton, voir [5]), on démontre⁷ que sous l'action du groupe cyclique C_{2n} sur

⁶Certaines séries ont moins de douze transpositions. Par exemple, la série chromatique (do, do dièse, ré, ré dièse, mi, fa, fa dièse, sol, sol dièse, la, la dièse, si) transposée de x demi-tons redonne les mêmes sons dans le même ordre. Seul le point de départ change. Elle n'a qu'une transposition

⁷Cette démonstration a été faite par A. Khruzin, voir [7].

l'ensemble des $2n$ sons, le nombre de diagrammes de cordes équivalents est

$$c_n = \frac{1}{2n} \sum_{i|2n} \varphi(i) \nu_n(i)$$

où $\varphi(i)$ est la fonction d'Euler et ν_n est défini pour tous les diviseurs de $2n$ par les formules

$$\nu_n(i) = \begin{cases} i^{n/i} (2n/i - 1)!! & \text{si } i \text{ est impair} \\ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} \binom{2n/i}{2k} i^k (2k - 1)!! & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

le symbole “double factorielle” signifiant que l'on prend un terme sur deux

$$(2n - 1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n - 1)(2n - 3)(2n - 5) \dots 5 \cdot 3$$

Sous l'action du groupe diédral, le nombre de diagrammes de Gauss équivalents, pour le tempérament égal à $2n$ degrés est

$$d_n = \frac{1}{2} (c_n + \frac{1}{2} (\kappa_{n-1} + \kappa_n))$$

où κ_n est le nombre

$$\kappa_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k!(n - 2k)!}$$

On trouvera la table des 554 diagrammes de cordes du tempérament égal à 12 sons dans [6]. Le tableau suivant montre qu'au delà du tempérament à douze sons, il n'est pas facile de classer les séries dodécaphoniques, car le nombre de diagrammes est trop important. Ainsi pour des systèmes à tiers de ton (18-tet), la classification nécessite 966 156 diagrammes de cordes. Les compositeurs comme Alain Bancquart qui ont employé des formes sérielles dans des univers micro-intervallaires ont d'ailleurs utilisé des séries tronquées plutôt que des séries complètes à $2n$ sons. Le nombre de diagrammes de cordes sous l'action du groupe cyclique (c_n) et sous l'action du groupe diédral (d_n) pour les tempéraments égaux à $2n$ degrés sont donnés ci-dessous.

n	c_n	d_n	Temp.
3	5	5	6-tet
4	18	17	8-tet
5	105	79	10-tet
6	902	554	12-tet
7	9 749	5283	14-tet
8	127 072	65 346	16-tet
9	1 915 951	966 156	18-tet
10	32 743 182	16 411 700	20-tet
11	625 002 933	312 702 217	22-tet

Ces diagrammes de cordes servent à construire des invariants et des représentations diagrammatiques des séries comme le *graphe d'intersection*. Considérons la série de *Superscripto* de Brian Ferneyhough {10, 1, 3, 4, 11, 9, 6, 7, 0, 2, 5, 8}. Le diagramme de cordes

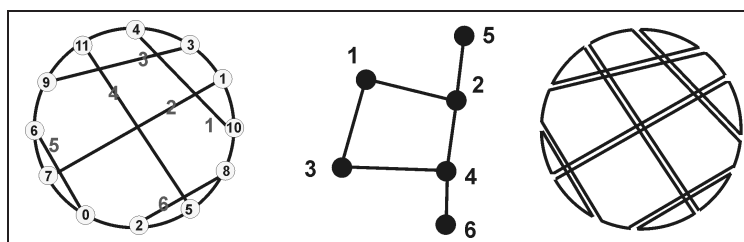


FIG. 3 – Diagramme de cordes et graphe d'intersection

de cette série est donné fig. 3. Dans le graphe d'intersection, chaque corde est représentée par un sommet. Deux sommets sont reliés entre eux si les cordes se coupent.

D'un point de vue algébrique, on peut construire la matrice d'adjacence A du graphe dont les éléments A_{ij} valent 1 si et seulement si le sommet i est relié au sommet j dans le graphe d'intersection, autrement dit si la corde i coupe la corde j dans le diagramme de cordes. Pour la pièce de Ferneyhough, la matrice d'adjacence vaut

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est symétrique et ne comporte que des zéros sur sa diagonale (car aucune corde ne se coupe elle-même). Le rang de cette matrice est un quadri-invariant, qui est lié au nombre de faces du diagramme de cordes D par la relation

$$\# \text{ faces } (D) = \text{corang } (A) + 1$$

Le nombre de faces d'un diagramme de cordes s'obtient en doublant chaque corde et en ouvrant les cordes sur le cercle extérieur. C'est le nombre de composantes connexes de la figure ainsi obtenue. Dans l'exemple de la figure 3, le diagramme de cordes ne comprend qu'une seule face. Le déterminant de la matrice d'adjacence est non nul, son rang est donc égal à 6 et son corang est nul.

Une autre approche des séries dodécaphoniques est d'associer à chaque diagramme de cordes une carte labellisée par une constellation (pour plus de détails sur les constellations et les cartes, voir [17]). Une constellation C de longueur k est un ensemble de k permutations de S_n agissant sur n points, noté $C = [g_1, g_2, \dots, g_k]$, tel que le groupe $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$ agit transitivement sur l'ensemble des n points et vérifiant

$$g_1 g_2 \dots g_k = 1$$

Le groupe G est appelé le *groupe cartographique* de la constellation C . Une carte M est un graphe plongé dans une surface X tel que (1) les sommets sont des points distincts de X , (2) les arêtes sont des courbes sur X qui ne se coupent qu'aux sommets, et (3) si on découpe la surface selon le graphe, ce qui reste est une union de composantes connexes

appelées *faces*, homéomorphes à un disque ouvert. On démontre que la caractéristique d'Euler-Poincaré ne dépend pas de la carte M , mais seulement du genre g de X et vérifie

$$\chi(M) = S - A + F = 2 - 2g$$

A chaque carte, on associe trois permutations : la permutation α pour les sommets, la permutation σ pour les arêtes et la permutation φ pour les faces. Ces trois permutations vérifient

$$\varphi = \sigma^{-1}\alpha^{-1}$$

La labellisation des cartes suit des règles particulières qu'on trouvera dans [17]. Une arête est numérotée par un couple $(m, m+1)$ de deux nombres l'un placé à l'intérieur de l'arête, l'autre à l'extérieur de l'arête, comme sur la figure 4.

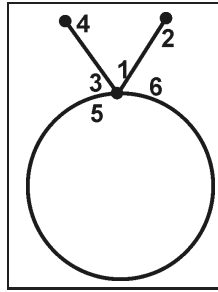


FIG. 4 – Carte labellisée

Les couples associés aux arêtes définissent la permutation α qui est donnée en cycles par

$$\alpha = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$$

La permutation associée aux sommets de la carte est définie par les labels rencontrés en tournant autour de chaque sommet dans le sens trigonométrique

$$\sigma = (1, 3, 5, 6)(2)(4)$$

Enfin, la permutation des faces est composée des cycles obtenus lorsqu'on parcourt chaque composante connexe dans le sens trigonométrique inverse

$$\varphi = \sigma^{-1}\alpha^{-1} = (1, 2, 6, 3, 4)(5)$$

A un diagramme de cordes représentant une série dodécaphonique, on associe une carte labellisée de la manière suivante. Considérons la série de ... *au delà du hasard* de Jean Barraqué

$$0, 8, 7, 1, 4, 2, 10, 3, 11, 5, 6, 9$$

Le diagramme de cordes est dessiné figure 5.

Les cordes du diagramme représentent les relations tritoniques de la série et définissent la permutation des arêtes

$$\alpha = (0, 6)(1, 7)(2, 8)(3, 9)(4, 10)(5, 11)$$

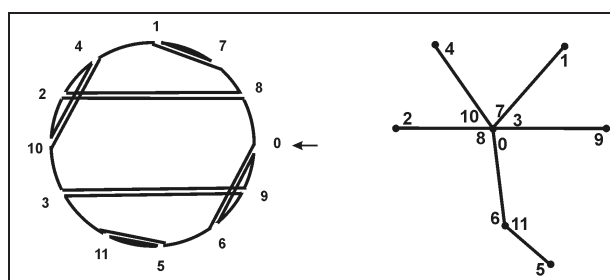


FIG. 5 – Carte labellisée d’une série dodécaphonique

La construction de la permutation associée aux faces se fait en énumérant les notes rencontrées en partant du point 0 par valeurs supérieures et en suivant le tracé du diagramme de cordes dédoublées

$$0, 8, 2, 10, 4, 2, 8, 7, 1, 4, 10, 3, 9, 0, 6, 9, 3, 11, 5, \dots$$

La permutation s’obtient en éliminant les doublets

$$\varphi = (0, 8, 2, 10, 4, 7, 1, 3, 9, 6, 11, 5)$$

Il suffit alors de calculer la permutation des sommets

$$\sigma = \alpha^{-1}\varphi^{-1} = (0, 11)(3, 7, 10, 8, 6)$$

et de tracer le graphe de cette constellation (Fig. 5). Nous obtenons ainsi une nouvelle représentation de la série dodécaphonique sous la forme d’un diagramme auquel est adjoite une constellation.

Nous avons montré qu’à partir d’une série dodécaphonique, nous pouvons associer trois graphes : le diagramme de cordes, le graphe d’intersection et la carte du diagramme. L’étude mathématique de ces graphes et de leurs relations devraient permettre au musicologue de mieux comprendre les interrelations entre séries dodécaphoniques et fournir un fil conducteur pour l’analyse des pièces sérielles complexes dans lesquelles les séries prolifèrent. Les classifications des formes sérielles devraient aussi bénéficier de ces études et offrir de nouveaux paradigmes.

3. Analyse nodale

Ferdinand de Saussure est un linguiste suisse qui a participé à travers son *Cours de linguistique* et sa réintroduction de la notion de signe au renouveau des études littéraires. A sa mort, il a laissé de nombreux cahiers de notes, dont certains ont été repris par Jean Starobinski et publié sous le titre *Les mots sous les mots, les anagrammes de Ferdinand de Saussure* [15]. De Saussure cherchait dans ses cahiers à montrer les riches structures des textes poétiques latins ou français en mettant en évidence un second niveau de lecture dans lequel il soulignait les assonances et les effets de miroir des phonèmes. Il était convaincu que la poésie saturnienne développait son matériau phonique à partir d’un mot-thème. Il cherchait des anagrammes ou ce qu’il appelait des *hypogrammes* qui contenaient en germe la possibilité du poème. Car avant de remonter à une intention psychologique, il fallait pour analyser la genèse des vers, mettre en évidence une lattence verbale sous les mots. Ainsi dans les *Mémoires d’Outre-tombe*, il lit dans le vers

Dans le domaine musical, les problèmes sont les mêmes. Nous avons mis en évidence la distribution des accents dans la *première étude* pour piano G. Ligeti et la distribution des figures sérielles dans les *Modes de valeurs et d'intensités* de Messiaen. Dans ce cas, en posant $a =$ les sons 1, 2, 3 de la série I, $A = 10, 11, 12$ de la série I, $b = 1, 2, 3$ de la série II, $B = 10, 11, 12$ de la série II, $c = 1, 2, 3$ de la série III. Le codage des quatre premiers systèmes donne le mot $abAbcAba$ qui est un entrelacs à deux brins.

La recherche de nœuds ou d'entrelacs dans les textes est une représentation nouvelle de structures qui ne peuvent se traduire de manière arborescente. Si nous essayons de transcrire la structure du poème suivant de Christophe Tarkos [16], nous devons nous rendre à l'évidence qu'un modèle arborescent n'est pas adapté. Si le début du texte s'interprète facilement sous la forme d'un arbre, il devient vite impossible de continuer. Dans la mesure où les césures ne sont pas indiquées, le texte de Tarkos a plusieurs interprétations. Dans ces conditions, il semble plus judicieux de proposer un codage linéaire des éléments du texte.

Il existe il y a et c'est ainsi. Il y a
se divise en il y a et cela. Et c'est
ainsi se divise en voilà et ainsi soit-il.
Il y a en il y a et il en est ainsi et
cela en ceci et cela, tandis que voilà en
de-ci et de-là et ainsi soit-il en oui ainsi
et que cela soit. Il y a en il y a, ceci en
cela et cela en par-ci par-là, de-ci de-là
en il est n'y est pas et oui il en est
ainsi et qu'il en soit ainsi oui en hélas.

En prélevant des éléments comme par exemple $G =$ il, $C =$ et, $T =$ ainsi, $A =$ en, on écrira le texte sous une forme symbolique

GGCTGAGCCTACTGGAGCGATCAC
ACCTATCGAGACAAGCGAATCGATA

qui pourra être utilisée par des algorithmes génétiques pour mettre en évidence des séquences particulières, comme cela se pratique en biologie le long des gènes.

La musique est comme le texte de Tarkos un enchevêtrement complexe d'éléments variés dans lesquels le musicologue essaie de comprendre la façon dont cela a été construit. Car selon le mot de Canguilhem, comprendre, c'est être capable de refaire le geste et pouvoir le prolonger.

4. Conclusion

La théorie des tresses et des nœuds offre des perspectives nouvelles pour la classification des séries dodécaphoniques, la construction des modèles d'enharmonie et la mise en évidence des liens de parenté dans des textes littéraires ou musicaux. L'analyse nodale dépasse le simple cadre des études musicales. Elle s'applique aussi bien à la recherche de structures

dans des œuvres d'art comme des peintures ou des sculptures où en captant le geste de l'artiste-créateur, elles permettent de constituer une véritable signature de l'auteur, que dans des problèmes de filiations historiques entre des langues ou des dialectes. Si nous mettons en évidence des structures nodales dans une langue fille, l'idée d'une filiation des petites topologies, nous incite à penser que ces structures existent aussi dans la langue mère. Si elles n'existent pas, l'héritage topologique fait défaut, ce qui fournit un argument pour monter que deux langues ne sont pas apparentées à une même branche historique. Dans le domaine musical, les petites topologies n'ont pas encore été suffisamment répertoriées pour permettre de caractériser des filiations ou des parentés esthétiques. Toutefois, l'outil existe. Il devrait permettre d'enrichir les études stylistiques et fournir grâce aux invariants des nœuds et des entrelacs de nouveaux procédés de catégorisation.

Bibliographie

- [1] CAREY (Norman), CLAMPITT (David), "Aspects of well-formed scales", *Music Theory Spectrum*, 11, 1989, pp. 187-206.
- [2] FONTANILLE (Jacques), ZILBERBERG (Claude), *Tension et signification*, Belgique, Mardaga, 1998.
- [3] HOSTINSKY (Ottokar), *Die Lehre von den musikalischen Klängen : ein Beitrag zur aesthetischen Begründung der Harmonielehre*, Prague, H. Domenicus, 1879.
- [4] JEDRZEJEWSKI (Franck), *Mathématiques des systèmes acoustiques, Tempéraments et modèles contemporains*, Paris, L'Harmattan, 2002.
- [5] JEDRZEJEWSKI (Franck), *Dictionnaire des musiques microtonales*, Paris, L'Harmattan, 2003.
- [6] JEDRZEJEWSKI (Franck), *Mathematical Theory of Music*, Ed. Delatour/Ircam, 2006.
- [7] KHRUZIN (A.). "Enumeration of chord diagrams", *ArXiv, math.CO/0008209*, 2000.
- [8] LEIBOWITZ (René), *Introduction à la musique à douze sons*, Paris, Rééd. L'Arche, 1974 (Première édition 1949).
- [9] NOLL (Thomas), "Tone Apperception, Relativity, and Weber-Fechner's Law", In : M. Olivetti Belardinelli et. al. (eds.) : *Proceedings of the second international conference "Understanding and Creating Music"*, 21. - 25. November 2002, Caserta. Seconda Università di Napoli.
- [10] NOLL (Thomas), "Facts and Counterfacts : Mathematical Contributions to Music-theoretical Knowledge", In : Sebastian Bab, et. al. (eds.) : *Models and Human Reasoning - Bernd Mahr zum 60. Geburtstag*. W&T Verlag, 2005, Berlin. Disponible sur <http://ftp.cs.tu-berlin.de/~noll/>
- [11] RIEMANN (Hugo), *Musikalische Logik : Hauptzüge der physiologischen und psychologischen Begründung unseres Musiksystems*, Leipzig, C. Kahnt, 1873.
- [12] RIEMANN (Hugo), *Musikalische Syntaxis : Grundriß einer harmonischen Satzbildungslehre*, Leipzig, Breitkopf und Härtel, 1877.
- [13] RIEMANN (Hugo), *Skizze einer Neuen Methode der Harmonielehre*, Leipzig, Breitkopf und Hartel, 1880.
- [14] RIEMANN (Hugo), *Grosse Kompositionslehre, vol 1 : Der homophone Satz (Melodielehre und Harmonielehre)*, Berlin, Max Hesse, 1902.

- [15] STAROBINSKI (Jean), *Les mots sous les mots, les anagrammes de Ferdinand de Saussure*, Paris, Gallimard, 1971.
- [16] TARKOS (Christophe), *Ma langue*, Al Dante, 2000.
- [17] ZVONKIN (Alexander), LANDO (S.K), *Graphs on Surfaces and their Applications*, Springer, 2004.

FranckJEDRZEJEWSKI
 CEA Saclay
 INSTN-UESMS
 91191 - Gif-sur-Yvette Cedex
 Franck.Jedrzejewski@cea.fr

Lexique

- **Accord.** Le mot *accord* a plusieurs sens en musique. Ici, il est employé dans le sens *d'accorder un instrument*, c'est-à-dire de régler la fréquence de chaque note. Le diapason fixe la fréquence d'une note, aujourd'hui le *la* 440 Hz, mais cette valeur a fluctué au cours des siècles (et des formations). Pour accorder l'ensemble des notes de la gamme, on fixe la fréquence de chaque note relativement à ce diapason, ce qui détermine un *système acoustique* ou *système d'accord*. Actuellement, les instruments sont accordés selon le *tempérament égal* ou *système tempéré*. Dans ce tempérament, deux notes consécutives de fréquences v_1 et v_2 sont séparées d'un même intervalle de rapport $v_2/v_1 = 2^{1/12}$, qui est le demi-ton tempéré de 100 cents. Avant l'établissement du tempérament égal, il y a eu de nombreux accords différents dans lesquels les demi-tons n'étaient pas tous égaux. Dans les systèmes acoustiques les plus importants, on cherchait à préserver les quintes justes de rapport $3/2$ (systèmes pythagoriciens) ou les tierces majeures de rapport $5/4$ ou mineures de rapport $6/5$ (systèmes mésotoniques).

- **Enharmonie (Modèle d').** Dans le tempérament égal, les notes do \sharp et ré \flat ont la même fréquence, mais n'ont pas la même fonction (du moins, en harmonie classique). On dit qu'elles sont *enharmoniques*. Dans les tempéraments historiques ou dans les systèmes contemporains, deux notes enharmoniques dans le tempérament égal ne sont pas nécessairement enharmoniques (do \sharp et ré \flat peuvent avoir des fréquences différentes). Comme les systèmes d'accord sont construits par un ensemble de règles, imposer que la fréquence de deux notes soit égale imposent souvent que d'autres couples de notes aient des fréquences égales. On appelle cela un *modèle d'enharmoine*.

- **Intervalle.** L'intervalle séparant deux notes de fréquences v_1 et v_2 est mesuré en cents. Le *cent* est le logarithme de base 2 du rapport des fréquences des deux sons constituant l'intervalle $\log_2(v_2/v_1)$. L'octave de rapport 2 se compose de 1200 cents. Un demi-ton tempéré vaut 100 cents. Dans le tempérament égal, la distinction entre un demi-ton chromatique (do - do \sharp) et un demi-ton diatonique (do - ré \flat) n'a pas de sens physique (puisque leurs fréquences sont égales), mais un sens fonctionnel et musical.

- **Renversement.** Un intervalle de deux sons (e.g. une quinte [do, sol]) se compose de plusieurs intervalles élémentaires (3 tons et demi). Son renversement [sol, do] ou sa lecture

en sens rétrograde se compose de son complément à l'octave (2 tons et demi, c'est-à-dire une quarte). En termes mathématiques lorsqu'on identifie les douze sons de la gamme aux douze premiers entiers naturels $do = 0$, $do \sharp = 1$, etc. le renversement d'un intervalle ou d'un ensemble de notes correspond à son inversion $I(x) = -x \bmod 12$. Pour reprendre l'exemple de la quinte $[do, sol] = [0, 7]$, son renversement vaut $[I(0), I(7)] = [0, 5] = [do, fa]$ qui est à une transposition près l'intervalle $[sol, do]$.

DE LA CONJECTURE DE MINKOWSKI AUX CANONS RYTHMIQUES MOSAÏQUES

Moreno ANDREATTA

Résumé : Nous développons ici quelques aspects mathématiques liés à la théorie des canons rythmiques mosaïques en nous concentrant, en particulier, sur une conjecture mathématique dont les métamorphoses musicales constituent un terrain très riche pour la recherche « mathémusicale » contemporaine.

Mots-clés : Canon rythmique - Canon rythmique mosaïque - Conjecture de Minkowski - Formalisme musical - Théorème de Minkowski/Hajós.

Introduction

Bien que la notion de canon rythmique mosaïque ait été formalisée, d'un point de vue mathématique, dans les années quatre-vingt-dix, elle est implicitement présente dans l'approche théorique et compositionnelle d'Olivier Messiaen (1908-1992) auquel on doit sans doute l'un des premiers essais de définition de la structure de canon musical en considérant exclusivement l'organisation rythmique, sans s'appuyer préalablement sur l'organisation mélodique ou harmonique.

Par définition, un canon rythmique est la répétition, décalée dans le temps, d'une même structure rythmique, ou d'une de ses transformations. Le pattern rythmique de base, ou « pédale rythmique » dans la terminologie de Messiaen, est à son tour répété, ce qui donne le caractère cyclique (et donc infini) de tout canon rythmique. Un cas particulier de canon rythmique s'obtient en considérant comme pattern rythmique de base un rythme non rétrogradable ou une concaténation de rythmes non rétrogradables¹. Dans le



FIG. 1 – Extrait de la pièce *Harawi* (à gauche) et représentation rythmique d'un extrait de la pièce *Visions de l'Amen* (à droite).

deuxième Tome du *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie* [21] Messiaen discute deux exemples de canons basés sur des rythmes non rétrogradables, les deux étant des

¹Rappelons que, selon Messiaen, les rythmes non-rétrogradables réalisent dans le sens horizontal ce que les modes à transpositions limitées réalisent dans le sens vertical, car « ces rythmes ne peuvent être lus en sens rétrograde sans que l'on retrouve exactement le même ordre de valeurs que dans le sens droit ».

« triple canons » c'est-à-dire des canons à trois voix : la septième partie de la pièce *Harawi* (1945) intitulée « Adieu » et la partie intitulée « Amen des anges, des saints, du chant des oiseaux » de la pièce pour deux pianos *Visions de l'Amen* (1943). Il s'agit, d'un point de vue structurel, du même canon, la différence étant la valeur minimale qui correspond à une croche dans le premier cas et à une double-croche dans le deuxième (figure 1).

Cependant, l'aspect fondamental de ce processus compositionnel est l'effet des rythmes non rétrogradables et des entrées régulières sur la structure globale du canon. Le compositeur souligne à plusieurs reprises dans le *Traité* le caractère à la fois chaotique et très organisé de la forme globale résultante des superpositions des voix rythmiques. En effet, si l'on se concentre, par exemple, sur *Harawi*, on peut remarquer que « les trois rythmes non rétrogradables divisent les durées en 5+5+7 durées [...]. Ajoutons que les durées sont très inégales. Il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, jamais au même moment ni au même endroit. C'est du désordre organisé » [21].

Nous avons vu dans cette démarche compositionnelle l'intention, de la part de Messiaen, d'obtenir ce que nous appelons un « canon rythmique mosaïque » (*tiling rhythmic canon*). Un canon mosaïque a la propriété de se dérouler dans le temps de telle façon qu'à chaque instant il n'y a qu'une (et une seule) attaque parmi les différentes voix. Autrement dit, les voix sont *complémentaires* et la pulsation résultante des différentes pédales rythmiques est *régulière*. En réalité, cette propriété n'est que partiellement vérifiée dans le cas du triple canon de rythmes non rétrogradables utilisé dans les deux pièces *Visions de l'Amen* et *Harawi* car il y a des instants temporels qui ne sont remplis par aucune attaque des trois voix et, de même, il y a des moments où les attaques de deux ou plusieurs voix coïncident. Cette aspect de « quasi-pavage » est montré en figure 2

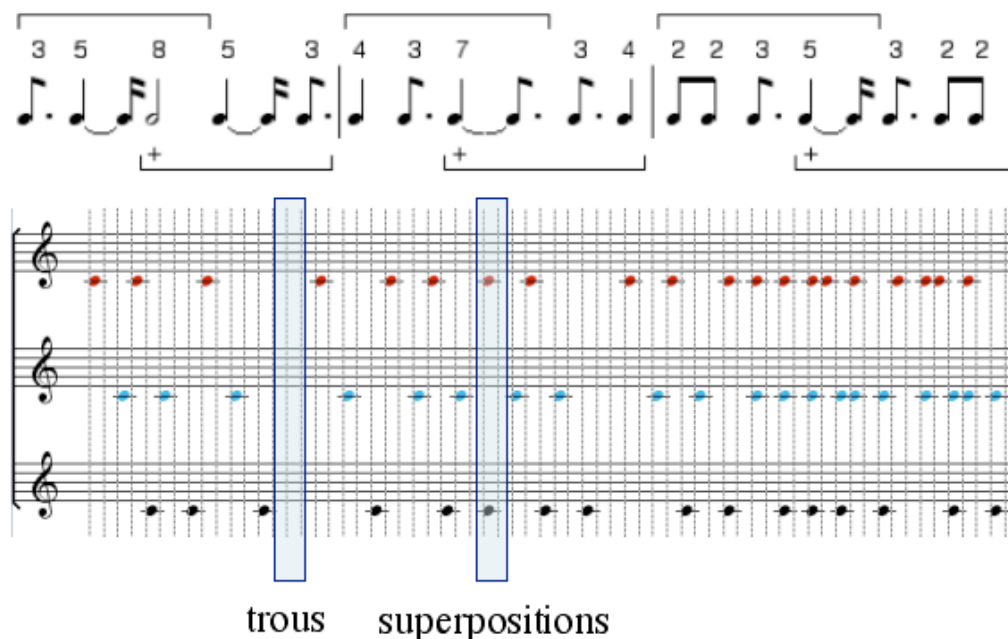


FIG. 2 – Concaténation des rythmes non rétrogradables dans *Harawi* et grille rythmique des triples canons des deux pièces *Harawi* et *Visions de l'Amen*.

qui met en évidence la concaténation des rythmes non rétrogradables dans *Harawi* ainsi que la grille rythmique sous-jacente aux deux pièces. La structure des rythmes non rétrogradables n'est évidemment pas la plus adaptée pour résoudre le problème du pavage de l'axe du temps.

Des canons rythmique mosaïques à la Conjecture de Minkowski

Comme nous l'avons amplement discuté dans notre article introductif à l'approche algébrique en musique paru dans un numéro précédent de *L'Ouvert* [7], certaines constructions théoriques initialement décrites par le compositeur et théoricien roumain Anatol Vieru (1926-1998) dans le domaine des hauteurs [33] donnent lieu à des architectures musicales nouvelles une fois appliquées au domaine rythmique. Cette application a été initialement proposée par Dan Tudor Vuza qui a développé un modèle de canons rythmiques basé sur la factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques (Canons Réguliers Complémentaires de Catégorie Maximale, en abrégé Canons RCCM). Ces structures canoniques ont, entre autres, la propriété remarquable de *paver* l'axe du temps, et cela en dépit du fait que cette théorie a été établie par Vuza indépendamment de toute considération géométrique concernant la notion de pavage d'un espace euclidien. Pourtant, comme nous l'avons montré dans [5], il y a un lien direct entre la structure des canons rythmiques RCCM et le problème du pavage de l'espace à n dimensions par des cubes unités. Nous allons reprendre ici quelques aspects de ce rapport, en esquissant l'histoire de la Conjecture de Minkowski, ainsi que des travaux qu'elle a alimentés autour du problème de la factorisation des groupes.

On trouve une première version de la conjecture de Minkowski dans *Geometrie der Zahlen* [22] à propos d'un problème d'approximation de nombres réels par des rationnels. La conjecture généralise un résultat connu en théorie des nombres et concernant l'approximation d'un nombre réel a par un nombre rationnel $q = \frac{x_1}{x_2}$ tel que :

$$|a - q| < \frac{1}{t \cdot x_2}$$

où $0 < x_2 < t$ et t est un nombre réel, $t > 1$.

Dans le cas général, la conjecture de Minkowski concerne l'approximation des nombres réels a_1, a_2, \dots, a_{n-1} avec des entiers x_1, x_2, \dots, x_n tels que, si l'on note q_i le nombre rationnel générique $\frac{x_i}{x_n}$ et t un nombre réel strictement positif tel que $0 < x_n < t^{n-1}$, la condition suivante soit vérifiée pour tout indice i :

$$|a_i - q_i| < \frac{1}{t \cdot x_n}$$

On trouve une version géométrique de la conjecture de Minkowski dans l'ouvrage *Diophantische Approximationen* [23] dans lequel l'auteur discute le problème du pavage de l'espace à n dimensions par des cubes unités. La conjecture affirme que dans un tel pavage, on trouvera toujours un couple de cubes ayant en commun une face de dimension $n - 1$.

La figure 3 décrit la situation pour $n = 2$ et $n = 3$, deux cas que Minkowski pensait pouvoir généraliser facilement à toute dimension n .

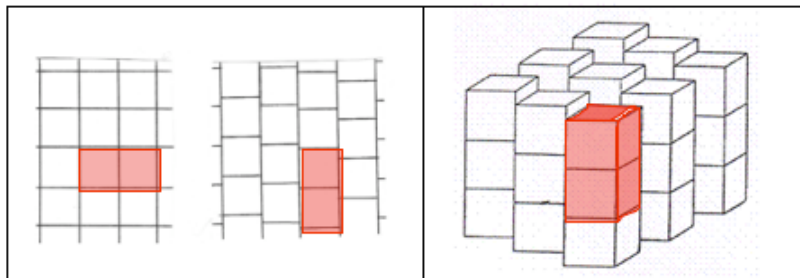


FIG. 3 – Pavage de l'espace \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 par des carrés et des cubes unités.

Notons que la conjecture concerne initialement le cas du pavage « simple », c'est-à-dire une collection de cubes congruents qui recouvrent l'espace de telle façon que ces cubes n'ont pas d'intersection (autre que la frontière) et que leurs centres forment un treillis (*lattice*). Ce treillis est appelé « simple » pour le distinguer du cas (multiple) dans lequel les cubes ont plusieurs points d'intersections (autres que les frontières). Notons également que, sans l'hypothèse du treillis, on obtient la Conjecture de Keller qui est vraie pour tout $n \leq 6$ [24] et fausse pour tout $n \geq 10$ [19]. Le cas $6 < n < 10$ reste un problème ouvert.

En faisant référence au dernier problème de Fermat, nous avons proposé d'appeler cette conjecture le « dernier problème de Minkowski » [5] car il aura fallu attendre plus de cinquante ans pour aboutir à la solution du problème dans sa forme générale. La solution a été trouvée *more algebrico* par le mathématicien hongrois G. Hajós qui a transformé la conjecture en un problème de factorisation de groupes. Selon certains historiens des mathématiques, la solution algébrique de Hajós est « le résultat le plus extraordinaire [spectacular] en théorie de la factorisation » [31]. Dans la solution de Hajós, la conjecture géométrique est transformée en un problème de factorisation de groupes, un résultat qui est aussi connu comme le « deuxième théorème général pour les groupes abéliens finis » [26]. Le théorème peut s'énoncer de la façon suivante :

Théorème (MINKOWSKI/HAJÓS). *Soit G un groupe abélien fini et soient a_1, a_2, \dots, a_n n éléments de G . Supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles A_1, A_2, \dots, A_n suivants :*

$$A_1 = \{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}, \dots, A_n = \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. Alors un des facteurs A_i est un groupe.

Comme Rédei l'a montré, ce résultat est en rapport de dualité logique avec le théorème de Frobenius-Stickenberger qui affirme la possibilité de factoriser tout groupe abélien fini comme la somme directe de ses sous-groupes cycliques. Une discussion de la technique utilisée par Hajós dans sa démonstration, ainsi que l'histoire détaillée de la Conjecture de Minkowski, est contenue dans une monographie qui constitue, aujourd'hui, l'une des meilleures introductions pédagogiques à la Conjecture de Minkowski [32]. Une approche

axiomatique au problème de Minkowski/Hajós a été par la suite proposée par K. Corrádi et S. Szabó [10].

Notons que le théorème de Hajós peut s'énoncer de façon équivalente en utilisant la notion d'ensemble périodique. Rappelons qu'un sous-ensemble A d'un groupe G est périodique s'il existe un élément g dans G , autre que l'identité, tel que $g + A = A$, la loi de composition interne du groupe étant, dans ce cas, l'addition. La forme suivante énonce la généralisation du théorème de Hajós proposée par Redei, à l'aide de la notion de périodicité :

Théorème (Généralisation du théorème de MINKOWSKI/HAJÓS). *Soit G un groupe abélien fini et soient A_1, A_2, \dots, A_n n sous-ensembles de G , chacun contenant l'élément neutre du groupe et chacun ayant un nombre premier d'éléments et supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_i, i = 1, \dots, n$. Alors, un des sous-ensembles A_i est périodique.*

Ce résultat a ouvert la voie à l'étude des propriétés d'un groupe par rapport au problème de la périodicité des sous-ensembles réalisant sa factorisation. Un groupe G est dit un « groupe de Hajós » (ou groupe ayant la propriété de Hajós) si pour toute factorisation du groupe en somme directe des sous-ensembles A_1, A_2, \dots, A_n , au moins un des facteurs est périodique. De façon duale, on appellera un groupe G « non- Hajós » si l'on peut trouver comme factorisation du groupe une somme directe de ses sous-ensembles A_1, A_2, \dots, A_n telle qu'aucun de ces ensembles ne soit périodique. Le problème d'établir si un groupe infini possède ou non la propriété de Hajós a été abordé de façon systématique par A. D. Sands qui a établi une liste de groupes de Hajós dans le cas d'une factorisation en somme directe de deux sous-ensembles et sous l'hypothèse que l'un des facteurs possède une cardinalité finie. Hajós avait déjà montré [17] que sous une telle hypothèse, le groupe des nombres entiers relatifs \mathbb{Z} possède la propriété de Hajós. Sands montre dans [30] que ce résultat est valable également pour le groupe des nombres rationnels \mathbb{Q} ainsi que pour les deux groupes $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec p un nombre premier². Le problème reste toujours ouvert dans le cas où l'hypothèse sur la cardinalité finie de l'un des facteurs est levée.

Ajoutons que le fait pour un groupe d'avoir ou non la propriété de Hajós est strictement dépendant du nombre des sous-ensembles qui en composent la factorisation. Nous concentrerons la discussion sur le cas d'un groupe qui est factorisé en deux sous-ensembles A_1 et A_2 car c'est le cas qui permet d'analyser la conjecture de Minkowski comme un problème « mathémusical » . La liste complète des groupes abéliens finis ayant la propriété de Hajós a été donnée par Sands qui a ainsi résumé le travail d'un bon nombre de mathématiciens, après Hajós. Nous proposons ici la liste dans un ordre chronologique, en restituant à chaque solution sa place dans l'histoire des mathématiques :

- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ [25]
- \mathbb{Z}_{p^α} [17]
- $\mathbb{Z}_{p^\alpha} \times \mathbb{Z}_q$ [4]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r$ [4]
- $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}$ [27]

²Dans la suite on notera \mathbb{Z}_n le groupe cyclique d'ordre n ou groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans la liste qui suit, les entiers p, q, r , et s sont des nombres premiers distincts et α est un entier, $\alpha > 1$.

- $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r$ [27]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ [27]
- $\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2^2}$ [28]
- $\mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_3$ [28]
- $\mathbb{Z}_{2^\alpha} \times \mathbb{Z}_2$ [28]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ [29]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_2$ [29]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [29]
- $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [29]
- $\mathbb{Z}_{p^3} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [29]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [29]

Notons, en particulier, que la démonstration du fait que le groupe $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ est un groupe de Hajós précède, historiquement, la démonstration de la conjecture de Minkowski par Hajós. Remarquons aussi que, mise à part cette première solution, les six cas suivants correspondent à des groupes cycliques. Autrement dit, les groupes cycliques de Hajós constituent l'ensemble des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour lesquels n est :

- Une puissance d'un nombre premier ($n = p^\alpha$)
- Un produit d'une puissance d'un nombre premier par un autre nombre premier distinct ($n = p^\alpha q$)
- Le produit de trois nombres premiers distincts ($n = pqr$)
- Le produit des carrés de deux nombres premiers distincts ($n = p^2 q^2$)
- Le produit d'un carré d'un nombre premier par deux autres nombres premiers distincts ($n = p^2 qr$)
- Le produit de quatre nombres premiers distincts ($n = pqrs$)

Cette sous-liste permet de retrouver la famille de groupes cycliques établie par Vuza dans la formalisation algébrique des canons RCCM, c'est-à-dire les groupes cycliques qui ne possèdent pas la propriété de Hajós [34]. Cette application musicale naturelle aurait sans doute fasciné François Le Lionnais qui compte $n = 72$ parmi les nombres remarquables à cause précisément du fait que « le groupe cyclique à soixante-douze éléments se décompose sous la forme $S + T$ avec S, T non-périodiques » [20]. En citant l'ouvrage sur les groupes abéliens de L. Fuchs [14], il propose la décomposition suivante :

$$S = \{0, 8, 16, 18, 26, 34\}$$

$$T = \{0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53\}$$

Cette factorisation correspond, en effet, à une des possibles solutions pour la construction d'un canon RCCM de période 72. La figure 4 montre les catalogue exhaustif des solutions ainsi que le « canon remarquable » issu de la décomposition de Fuchs précédente.

Le catalogue a été obtenu en implémentant en *OpenMusic* l'algorithme que Vuza a proposé dans [34]. En général, la liste des solutions données par l'algorithme de Vuza n'est malheureusement pas exhaustive, comme les travaux d'autres mathématiciens ont montré par la suite (voir, en particulier [13] et [3]). Autrement dit, mis à part les deux premiers groupes cycliques non-Hajós (\mathbb{Z}_{72} et \mathbb{Z}_{108} pour lesquels le catalogue des solutions données par l'algorithme de Vuza correspond à la liste exhaustive des factorisations des deux groupes en

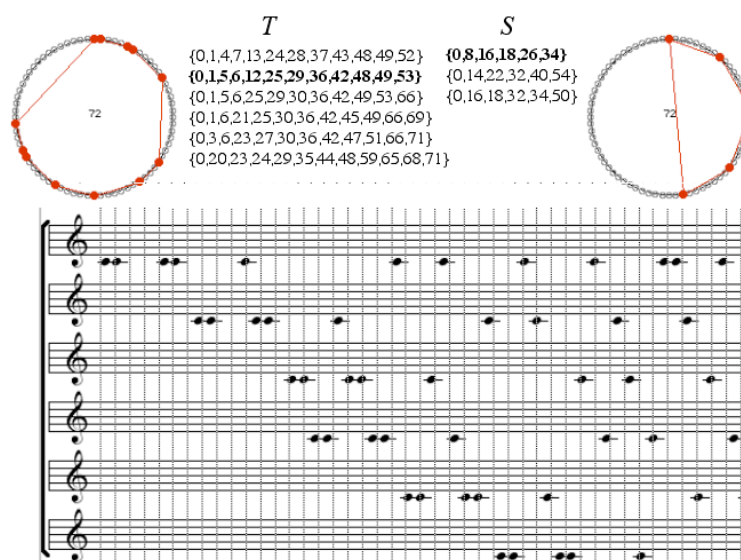


FIG. 4 – Catalogue exhaustif des factorisations du groupe cyclique \mathbb{Z}_{72} en somme directe de sous-ensembles T et S et « canon remarquable » correspondant à la décomposition citée par Le Lionnais.

somme directe de deux sous-ensembles³), il y a des canons réguliers complémentaires de catégorie maximale qui ne sont pas des canons de Vuza, c'est-à-dire qui ne sont pas une solution donnée par l'algorithme de Vuza⁴. Le problème d'obtenir toutes les factorisations possibles d'un groupe n'ayant pas la propriété d'Hajós reste ouvert.

Conclusions et perspectives

Nous avons esquissé ici l'histoire de la conjecture de Minkowski et de quelques-unes de ses surprenantes métamorphoses musicales. Un deuxième volet de cette histoire pourrait s'intituler « Des canons rythmiques mosaïques à la Conjecture de Fuglede ». En effet, les canons rythmiques mosaïques représentent des structures périodiques que l'on peut déployer de façon linéaire se rapprochant ainsi d'un champ de recherche tout à fait proche de celui que l'on vient de décrire. Il s'agit du problème du « pavage de la ligne » (*tiling the line*, voir [12] et [8]), qui a déjà suscité de nombreux travaux « mathémusicaux ». Les recherches d'Emmanuel Amiot⁵ ont montré, en effet, que l'on peut attaquer la Conjecture de Fuglede (ou conjecture spectrale) [15] en s'appuyant sur la représentation des structures rythmiques susceptibles d'engendrer le pavage de l'axe du temps, en particulier en termes de polynômes à coefficients 0 et 1 et de retrouver ainsi des résultats mathématiques autour du pavage de la ligne qui n'avaient pas de lien direct avec la conjecture de Fuglede [11]. On pourra, à partir de la conjecture spectrale, revenir à la Conjecture de Minkowski, en fermant ainsi la boucle précisément grâce aux problèmes parfois surprenants que la

³Nous avons discuté le problème de l'implémentation informatique de l'algorithme de Vuza ainsi que de la classification paradigmatique des premiers catalogues exhaustifs de solutions dans [7].

⁴Des variantes de l'algorithme de Vuza ont été proposées, entre autres, par Franck Jędrzejewski [18].

⁵Voir, en particulier, l'article [3] qui fait le point sur les liens possibles entre canons rythmiques mosaïques et théorie du pavage de la ligne.

musique pose aux mathématiques. Mais, comme on dit dans ce cas, la marge est trop petite pour aborder le sujet...

Remerciements

Merci à Athanase Papadopoulos et Xavier Hascher de leur invitation à la deuxième Journée Mathématique/Musique à Strasbourg organisée par l'Institut de Recherche Mathématique Avancée et le Département de Musique. Merci également de m'avoir donné la possibilité de développer ici quelques aspects d'un problème « mathémusical » que je n'avais pu que mentionner lors de la première Journée Mathématique/Musique. Il s'agit d'un problème qui a représenté un point de rencontre pour de nombreux mathématiciens, informaticiens, musicologues et compositeurs que je remercie ici pour tous les échanges et discussions que nous avons eus ensemble dans les dernières années. Merci enfin aux lecteurs anonymes pour leurs corrections et suggestions.

Appendice terminologique

Nous allons reprendre ici de, façon synthétique, quelques définitions concernant des termes d'usage courant en musicologie et qui pourraient poser des problèmes à un public de non-musiciens.

Attaque : Dans ce contexte, une attaque est un instant temporel occupé par un élément d'un pattern rythmique. En identifiant un pattern rythmique à un sous-ensemble T d'un groupe cyclique \mathbb{Z}_n , un attaque est donc une classe des résidus appartenant à T . Par exemple, le pattern rythmique :

$$T = \{0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53\}$$

représenté en figure 4 contient 12 attaques (correspondant à sa cardinalité). Synonymes d'attaques sont les *onsets*.

Canon rythmique : un canon rythmique (par translation) est la répétition, décalée dans le temps, d'un pattern rythmique donné (ou *rythme de base*, ou *pédale rythmique*, ou *voix* du canon). Si le pattern rythmique est translaté et en même temps transformé par une symétrie (par exemple une inversion ou une application affine) on parlera, respectivement de canon rythmique par inversion et par augmentation. Par définition un canon rythmique (par translation) est périodique et sa période correspond à la période du pattern rythmique R qui l'engendre (c'est-à-dire à la plus petite période $m \in \mathbb{Z}_n$ telle que $m + R = R$). Un canon rythmique est donné par deux pattern rythmiques : un pédale rythmique R et un pattern rythmique S indiquant l'entrée temporelle des différentes voix des canons. La cardinalité de R correspond au nombre d'attaques du rythme de base du canon. La cardinalité de S correspond au nombre des voix du canon.

Canon rythmique mosaïque : c'est un canon rythmique ayant la propriété de paver l'axe du temps. Un canon rythmique mosaïque correspond, mathématiquement, à la factorisation d'un groupe cyclique \mathbb{Z}_n en somme directe de deux sous-ensembles. Si la période des deux sous-ensembles est égale à n , on appellera le canon un canon rythmique régulier complémentaire de catégorie maximale (ou canon RCCM). La plus petite période n qui

correspond à un canon RCCM est le nombre remarquable 72. Ceci signifie que pour toute factorisation d'un groupe cyclique d'ordre m , avec $m < 72$, en somme directe de deux sous-ensembles R et S , au moins l'un des deux sous-ensembles est *périodique*, c'est-à-dire correspond, dans le domaine des hauteurs à un mode à transposition limitées. Par exemple, un canon rythmique mosaïque de période 12 est donné par la décomposition de \mathbb{Z}_{12} en sous-groupes maximaux (théorème de Sylow). Cette décomposition correspond aux pattern rythmiques suivants :

$$R = \{0, 3, 6, 9\}$$

$$S = \{0, 4, 8\}$$

Hauteur : dans ce contexte une hauteur est toujours une classe de résidus modulo 12, c'est-à-dire un élément d'un groupe cyclique \mathbb{Z}_{12} .

Mode à transpositions limitées (en abrégé mode à TL) : terme qui indique toute gamme (ou mode, ou échelle) ayant un nombre limité de transpositions. Formellement, un mode à TL est un sous-ensemble A du groupe cyclique \mathbb{Z}_{12} pour lequel il existe un élément $m \in \mathbb{Z}_{12}$, avec $m \neq 12$ tel que $m + A = A$. Cette notion est donc équivalente à celle de sous-ensemble *périodique* de période non triviale; noter que cette période est alors nécessairement un diviseur strict de 12. Un mode à TL est donc un sous-ensemble de \mathbb{Z}_{12} qui est *invariant* par transposition (non nulle). La définition se généralise au cas micro-tonal de façon tout à fait naturelle. Etant donnée une division de l'octave en n parties égales, un mode à TL est un sous-ensemble de \mathbb{Z}_n pour lequel il existe un élément $m \in \mathbb{Z}_n$, avec $m \neq n$ tel que $m + A = A$.

Pattern rythmique : dans ce contexte le terme est synonyme de rythme ou structure rythmique. Le terme pattern sous-entend un certain caractère périodique. En effet, tout pattern rythmique est formellement décrit, dans cet article, comme un sous-ensemble R d'un groupe cyclique $m \in \mathbb{Z}_n$, où n indique la période du rythme R .

Pulsation (d'un pattern rythmique) : c'est l'unité minimale $d \in \mathbb{Z}_n$ dont tout attaque d'un rythme R est un multiple entier.

Rétrogradation : opération musicale qui consiste, à l'origine, à inverser l'ordre des éléments d'une série dodécaphonique. Par extension, faire la rétrogradation d'un pattern rythmique et/ou mélodique correspond à inverser les éléments du pattern en respectant leur valeurs rythmiques. Un cas particulier concerne les structures rythmiques invariantes par rétrogradation (*cf.* rythmes non rétrogradables).

Rythme non rétrogradable : terme introduit par Olivier Messiaen afin d'exprimer l'équivalent des modes à TL, mais au niveau rythmique. Un rythme non rétrogradable est un pattern rythmique qui coïncide avec sa propre rétrogradation. Formellement, un rythme non rétrogradable est un sous-ensemble R de \mathbb{Z}_n dont la structure intervallique (a_1, a_2, \dots, a_m) coïncide avec la lecture à l'inverse d'une de ses permutations circulaires. Par exemple, tous les rythmes S du catalogue des solutions des canons rythmiques RCCM de période 72 (*cf.* figure 4) sont des rythmes non rétrogradables. Le terme est synonyme de *palindrome*. Comme la notion de mode à TL, la structure des rythmes non rétrogradables relève de ceux que Messiaen appelait « charme de l'impossibilité ».

Structure intervallique : étant donné un mode (ou une gamme, ou une échelle, ou un accord), c'est-à-dire, un sous-ensemble $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ du groupe cyclique \mathbb{Z}_{12} , sa

structure intervallique \tilde{A} est donnée par l'expression :

$$\tilde{A} = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_1 - x_m \text{ mod } 12)$$

Bibliographie

- [1] E. AMIOT (2004), *Why rhythmic Canons are interesting*, Perspectives in Mathematical Music Theory, (G. Mazzola, E. Puebla et T. Noll éd.), EpOs, Université d'Osnabrück.
- [2] E. AMIOT (2005), *Rhythmic canons and Galois theory*, Grazer Math. Ber., **347**, 1-25.
- [3] E. AMIOT (2005), *À propos des canons rythmiques*, Gazette des Mathématiciens, **106**, 43-67.
- [4] N. G. DE BRUJIN (1953) *On the factorization of finite abelian groups*, Indag. Math. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam, **15**, 258-264.
- [5] M. ANDREATTA (2004), *On group-theoretical methods applied to music : some compositional and implementational aspects*, in Perspectives in Mathematical Music Theory, (G. Mazzola, E. Puebla et T. Noll éd.), EpOs, Université d'Osnabrück, 122-162.
- [6] M. ANDREATTA (2004), *Méthodes algébriques en musique et musicologie du XX^e siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels*, Thèse, EHESS.
- [7] M. ANDREATTA (2005), *Quelques aspects théoriques d'une approche algébrique en musique*, L'Ouvert, **112**, 1-18.
- [8] M. ANDREATTA, C. AGON, T. NOLL, E ; AMIOT (2006), *Towards Pedagogability of Mathematical Music Theory : Algebraic Models and Tiling Problems in computer-aided composition*, Proceedings of Bridges (Mathematical Connections in Art, Music and Science), London.
- [9] G. ASSAYAG, C. AGON, M. LAURSON, C. RUEDA (1999), *Computer Assisted Composition at Ircam : Patchwork and OpenMusic*, Computer Music Journal, **23(3)**.
- [10] K. CORRÁDI, S. SZABÓ (1997) *An Axiomatic Approach for the Hajós Theorem*, Contributions to Algebra and Geometry, **38(2)**, 241-248.
- [11] E. COVEN ET A. MEYEROWITZ (1999) *Tiling the integers with translates of one finite set*, J. Algebra, **212**, 161-174.
- [12] J.-P. DELAHAYE (2004), *La musique mathématique de Tom Johnson*, Pour la Science, **325**, 88-93.
- [13] H. FRIPERTINGER (2001), *Enumeration of non-isomorphic canons*, Tatra Mt. Math. Publ., **23**, 47-57.
- [14] L. FUCHS (1960), *Abelian groups*, Pergamon Press, Oxford.
- [15] B. FUGLEDE (1974), *Commuting Self-Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem*, J. Func. Anal., **16**, 101-121.
- [16] G. HAJÓS (1942), *Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter*, Math. Zeit., **47**, 427-467.

- [17] G. HAJÓS (1950), *Sur le problème de factorisation des groupes cycliques*, Acta. Math. Acad. Sci. Hung., **1**, 189-195.
- [18] F. JEDRZEJEWSKI(2006), *Mathematical Theory of Music*, Collection « Musique/Sciences » , Ircam/Delatour France.
- [19] J.C. LAGARIAS AND P.W. SHOR (1992), *Keller's cube-tiling conjecture is false in high dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc. New Ser., **27**, 279-283.
- [20] F. LE LIONNAIS (1983), *Les nombres remarquables*, Hermann, Paris.
- [21] O. MESSIAEN (1992), *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie*, tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris.
- [22] H. MINKOWSKI (1896), *Geometrie der Zahlen*, Leipzig, 1896.
- [23] H. MINKOWSKI (1907), *Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie*, Chelsea Publishing Company, New York.
- [24] O. PERRON (1940), *Über lückenlose Ausfüllung des n -dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel*, I, II, Math. Z. **46**, 1-26, 161-180.
- [25] L. RÉDEI (1947), *Zwei Lückensätze über Polynome in endlichen Primkörpern mit Anwendung auf die endlichen Abelschen Gruppen und die Gaussischen Summen*, Acta Math., **79**, 273-290.
- [26] L. RÉDEI (1967), *Algebra I*, Pergamon Press.
- [27] A. SANDS (1957), *On the factorization of finite abelian groups*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 65-86.
- [28] A. SANDS (1959), *The Factorisation of Abelian Groups*, Quart. J. Math. Oxford, **2(10)**, 81-91.
- [29] A. SANDS (1962), *On a problem of L. Fuchs*, Journal of the London Math. Society, **137**, 277-284.
- [30] A. SANDS (1964), *Factorization of cyclic groups*, dans L. FUCHS, E. T. SCHMIDT (éd.) *Proceedings of the Colloquium on Abelian Groups*, Tihany (Hungary), Sept. 1963, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 139-146.
- [31] S. K. STEIN (1974), *Algebraic Tiling*, Amer. Math. Month., **81**, 445-462.
- [32] S. STEIN ET S. SZABÓ, (1994), *Algebra and Tiling*, The Carus Mathematical Monographs, **25**.
- [33] A. VIERU (1980), *Cartea modurilor*, 1 (Le livre des modes, 1), *Ed. muzicala*, Bucarest.
- [34] D.T. VUZA (1991), *Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons (in four parts)*, Perspectives of New Music, **29(2)**, 22-49.

Moreno ANDREATTA
Ircam/CNRS UMR STMS
Moreno.Andreatta@ircam.fr

DEGRÉS DE COMPLEXITÉ EN GÉOMÉTRIE ET EN MUSIQUE RÉFLEXIONS À PARTIR DE L'*HARMONIE DU MONDE* DE KEPLER

Athanase PAPADOPOULOS

Résumé : Le but de cet article est de mettre en valeur certaines des idées géométriques de Johannes KEPLER, et de les relier à des considérations sur la consonance musicale, considérations qui découlent d'une lecture attentive de son traité l'*Harmonie du Monde*.

Mots-clés : Kepler - Harmonices Mundi - Harmonie du Monde - Consonance musicale - Constructions à la règle et au compas - Polygones réguliers - Complexité - Scibilité.

Introduction

Il est toujours bon de commencer par citer les auteurs anciens. JAMBLIQUE, le biographe syrien de PYTHAGORE du III^{ème} siècle après J. C., décrivant le moment où PYTHAGORE fit sa découverte merveilleuse de la relation entre les intervalles musicaux et les fractions numériques, écrit ([4] §115 p. 66) :

« Alors que PYTHAGORE était plongé dans la réflexion et dans le calcul, cherchant à découvrir quelque instrument qui apporterait à l'ouïe un secours solide et infaillible, comme dans le cas de la vue qui a le secours du compas, de la règle ou du dioptré [...] »

La mention de la règle et du compas dans ce texte n'est pas une pure fantaisie. Je pense qu'elle indique qu'une relation entre les constructions géométriques à la règle et au compas et celle des intervalles musicaux consonants était connue intuitivement dans l'antiquité grecque. Plus de deux mille ans après PYTHAGORE, Johannes KEPLER revient sur ce thème, en y consacrant une partie importante de son traité majeur, l'*Harmonie du Monde*. Dans cet article, je vais tenter de donner plusieurs éclairages à cette relation, en exposant certaines idées de KEPLER contenues dans l'*Harmonie du Monde*, en les reliant à d'autres idées sur le même sujet.

Je commence par quelques mots sur l'ouvrage de KEPLER.

L'*Harmonie du Monde* (*Harmonices Mundi*), écrit en 1619, est un traité sur les quatre sujets du *quadrivium* pythagoricien : géométrie, arithmétique, astronomie et musique. Ce traité occupe, à divers titres, une place centrale dans le patrimoine mondial des idées. Par exemple, c'est là où KEPLER énonce la loi, que nous appelons maintenant la « troisième loi de KEPLER », qui dit que pour une planète quelconque du système solaire, le carré de sa période de révolution autour du soleil divisé par le cube de sa distance moyenne au soleil est une constante (rappelons que c'est NEWTON qui plus tard a découvert la nature de cette constante).

D'un point de vue purement mathématique, le traité de KEPLER contient une partie géométrique, écrite dans la pure tradition d'EUCLIDE, concernant la construction de figures

à l'aide de la règle et du compas. Cette partie n'a rien perdu de son intérêt, et elle pourrait servir de base pour un cours s'adressant à des étudiants d'aujourd'hui. Dans le même traité, KEPLER aborde d'autres questions de géométrie, dont certaines, qui étaient complètement nouvelles et originales à leur époque, gardent aujourd'hui encore toute leur actualité. Je pense ici aux considérations sur le « degré de congruence » des polygones et des polyèdres, considérations qui conduisent à des questions qui aujourd'hui ne sont pas encore résolues. Certaines idées de KEPLER contenues dans l'*Harmonie du Monde* mènent à des développements de la théorie des pavages qui ont été l'objet de recherches intenses durant les dernières décennies, souvent sans que leurs auteurs se rendent compte que KEPLER en était à l'origine. En fait, la plupart des idées mathématiques contenues dans l'*Harmonie du Monde*, retranscrites en langage moderne, pourraient être incluses (avec très peu de changements) dans un traité moderne de géométrie et de topologie, et à divers titres, je pense qu'il n'est pas exagéré de dire que KEPLER est l'un des fondateurs de la topologie¹. Je vais commencer par exposer ces idées, avant de parler de consonance musicale.

Note sur la traduction. J'ai utilisé la traduction française de l'*Harmonices Mundi*, due à Jean PEYROUX (Librairie A. Blanchard, Paris, 1977). Cette traduction est difficile à lire, parfois même inintelligible, mais elle a au moins le grand mérite d'exister. Parlant de traductions, il faut mentionner que la majeure partie de l'œuvre de KEPLER (écrite en latin) n'a pas encore été traduite en français (ni d'ailleurs dans une autre langue). L'Édition Frisch de ses Oeuvres Complètes comprend près de 6000 pages de texte, qui certainement sont intéressantes à des degrés divers, et la partie qui a été traduite en français se résume à peu de livres, dont l'*Harmonices Mundi*, l'*Epitome Astronomiae Copernicanae*, traduite aussi par J. PEYROUX (Librairie A. Blanchard, Paris, 1988), le *Mysterium Cosmographicum*, traduit par Alain SEGONDS (éd. belles Lettres, Paris 1894) et certains autres. La traduction en anglais de l'*Harmonices Mundi* est parue il y a seulement une dizaine d'années (trad. E.J. Aiton, A.M. Duncan & J.V. Fields American Philosophical Society, 1977), ce qui est aussi un signe de la lenteur du processus de traduction. KEPLER attachait une grande valeur à la traduction de textes scientifiques. Travailleur infatigable, il a entrepris lui-même une traduction en latin de l'*Harmonique* de PTOLÉMÉE, traduction qu'il pensait initialement inclure comme supplément à son *Harmonices Mundi*². Sa traduction du Livre III du traité de l'*Harmonique* est contenue dans l'édition Frisch de ses Oeuvres Complètes (Volume V de [5], p. 345-412). Rappelons aussi que la première traduction complète de l'*Harmonique* de PTOLÉMÉE a été faite par un mathématicien, John WALLIS (1616-1703). Cette traduction constitue, en même temps que celles du *Commentaire sur l'Harmonique* de PTOLÉMÉE de PORPHYRE (3ème siècle après J. C.), de l'*Harmonique* du musicologue byzantin Manuel BRIENNIUS ainsi que de certains ouvrages d'ARCHIMÈDE, EUDOXE, PAPPUS et ARISTARQUE de Samos, le Volume III des Oeuvres Complètes de WALLIS, éditées en trois volumes à Oxford (1693-1699). Notons enfin, puisqu'on parle de

¹Rappelons que René THOM considérait que la topologie en tant que domaine des mathématiques remonte même à l'antiquité grecque.

²Il est intéressant de noter que malgré le fait que PTOLÉMÉE a été le principal responsable pour l'adoption par le monde civilisé, pendant plus de 1300 ans, d'un système astronomique géocentrique, KEPLER, qui fut l'un des premiers astronomes modernes à adopter le système héliocentrique, se réfère constamment dans ses écrits à l'autorité de PTOLÉMÉE, pour qui il exprime explicitement son admiration dans l'appendice du Livre V de l'*Harmonie du Monde*. Il est peut-être bon de rappeler aussi que les théories astronomiques pythagoriciennes étaient plus souvent héliocentriques que géocentriques (cf. en particulier les théories de PHILOLAOS et d'ARISTARQUE de Samos ; voir par exemple [11] Vol. II p. 3).

traductions, que KEPLER a travaillé à une traduction commentée en allemand du chapitre XIII du Livre II d'ARISTOTE *de Caelo*, et que cette traduction est publiée dans ses Oeuvres Complètes ([5] Vol. VII p. 733-750).



FIG. 1 – Johannes KEPLER, tenant dans sa main une règle et un compas.

1. Géométrie : Le degré de scibilité et le degré de congruence d'un polygone régulier

Le Livre I de l'*Harmonie du Monde* est entièrement consacré à des questions de *scibilité*, c'est-à-dire (suivant la terminologie de KEPLER) de constructions à la règle et au compas, tandis que le Livre II de cet ouvrage est consacré à des questions de *congruence*, c'est-à-dire (toujours suivant la terminologie de KEPLER) de pavages d'une surface par des polygones réguliers, ou d'un espace tri-dimensionnel par des polyèdres réguliers de dimension trois. Le mot scibilité est une traduction du mot *scibilitas* utilisé par KEPLER, que l'on pourrait aussi traduire par *connaissance*. L'idée derrière le choix de ce mot est le fait que l'on peut « voir », ou « connaître », une figure si et seulement si on peut la construire à l'aide de la

règle et du compas. Une telle conception est assez courante chez les géomètres (voir par exemple HARTSHORNE [3]). On verra ci-après plusieurs formes précises que peut prendre la notion de scibilité dans le cas particulier d'un polygone régulier. Le mot latin utilisé par KEPLER qui est traduit par congruence est *congruencia*.

Les notions de scibilité et de congruence munissent l'ensemble des polygones réguliers de deux relations d'ordre que l'on va considérer plus en détail dans ce qui suit, celles induites par le *degré de scibilité* et le *degré de congruence*.

Le degré de scibilité d'un polygone inscriptible dans un cercle est une mesure de la difficulté avec laquelle on peut construire ce polygone à l'aide de la règle et du compas.

Le degré de congruence d'un polygone est une mesure de la difficulté de ce polygone à s'associer avec d'autres polygones (qui peuvent lui être isométriques ou pas) pour former un pavage du plan ou d'une surface plus générale.

On va parler en détail et successivement de scibilité et de congruence.

Dans le Livre I de son *Harmonie du Monde*, KEPLER entreprend une étude systématique de la question de savoir si un polygone régulier du plan est constructible ou non à la règle et au compas. Bien sûr, KEPLER n'est pas le premier à avoir soulevé cette question. En effet, il est bien connu que la constructibilité des polygones a occupé une grande place chez les géomètres de l'antiquité grecque, qui l'ont étudiée pour elle-même, mais aussi en relation avec d'autres problèmes célèbres, tels que ceux de la trisection d'un angle, de la quadrature du cercle et de la duplication du cube.³ On rappelle à titre d'exemple que le premier résultat du Livre I des *Eléments* d'EUCLIDE est celui de la construction du triangle équilatéral à la règle et au compas. Il est bien connu aussi que les problèmes de construction à la règle et au compas ont intéressé toutes les générations de géomètres après KEPLER. Par exemple, le titre du Livre I de la *Géométrie* de DESCARTES est : « *Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites* ».

KEPLER a introduit dans cette étude géométrique une idée dynamique très importante, et qui paraît de nos jours encore très moderne; c'est celle de *degré de scibilité* (ou de constructibilité).

Il y a plusieurs manières de rendre précise la notion de degré de scibilité d'une figure. L'une des premières qui vient à l'esprit consiste à définir ce degré comme le nombre minimum d'opérations nécessaires à la construction de cette figure. Ici, une « opération » consiste à prendre la règle ou bien le compas, à tracer une ligne ou un arc de cercle, et puis à poser l'instrument. Le nombre minimum d'opérations qui est nécessaire à la construction d'une figure est une certaine mesure de la complexité de cette figure. Par exemple, on peut construire un triangle équilatéral à l'aide des cinq opérations suivantes : on construit un segment AB à l'aide de la règle ; on construit à partir de A , puis de B , un cercle de rayon

³Par exemple, on sait que le polygone régulier à 9 côtés n'est pas constructible à la règle au compas, alors que le polygone régulier à trois côtés l'est. Or, si l'on savait trisectionner à la règle et au compas l'angle $2\pi/3$, on saurait construire le polygone régulier à 9 côtés à partir de celui à 3 côtés. Donc, trisectionner un angle est en général impossible. On voit ainsi la relation entre la construction des polygones réguliers à la règle et au compas et le problème de la trisection d'un angle. On reviendra plus loin sur cette question. Notons que dans toute cette discussion sur les constructions à la règle et au compas, il s'agit d'une règle *non graduée*. On sait, par exemple, que l'on peut trisectionner un angle quelconque à l'aide d'une règle graduée.

AB (cela fait trois opérations) ; puis on joint A et ensuite B par un segment à l'un des points d'intersection des deux cercles, ce qui fait au total cinq opérations (voir figure 2).

Cette définition du degré de scibilité est sans doute la plus naturelle, et elle présente l'avantage de pouvoir se généraliser, comme une notion de « complexité », à des situations diverses, notamment à des situations en musique théorique, auxquelles on s'intéresse plus loin dans cet article.

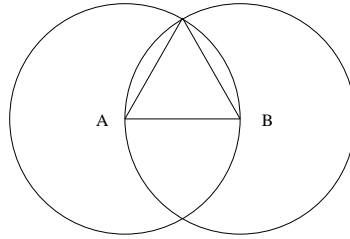


FIG. 2 – Construction à la règle et au compas d'un triangle équilatéral à partir d'un segment AB .

Rappelons que tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle, et qu'il est circonscriptible à un autre, de même centre. Le problème de la construction à la règle et au compas d'un côté du polygone régulier à n côtés dont le cercle circonscrit est donné est équivalent à celui de construire, à la règle et au compas, un arc de cercle dont la longueur est la n -ième partie du périmètre du cercle.⁴

Ceci nous mène à d'autres définitions du degré de scibilité d'un polygone régulier, notamment comme le nombre minimum d'opérations pour déterminer un côté d'un tel polygone comme une corde du cercle circonscrit à ce polygone. Par exemple, il suffit d'une seule opération pour tracer le diamètre d'un cercle (le diamètre étant considéré comme un polygone régulier à deux côtés) : on trace à la règle une ligne passant par le centre du cercle. De même, il suffit d'une opération pour construire le côté d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle : à l'aide du compas, et avec le même rayon que celui du cercle, on découpe sur le cercle un arc dont la longueur de la corde est égale au rayon du cercle. Pour un triangle équilatéral, on peut partir de l'hexagone régulier et en joindre un sommet sur deux. On peut aussi partir du côté de l'hexagone régulier et en prendre la médiatrice ; elle coupe le cercle en un point d'où l'on peut déterminer le côté du dodécagone régulier.

Concernant le degré de scibilité des polygones réguliers, KEPLER introduit d'autres définitions, qui sont reliées à celle que l'on vient de mentionner, et que l'on va passer en revue. Il serait intéressant d'établir des relations précises entre les différentes notions de degré de scibilité.

Notons d'abord que le fait qu'un polygone régulier soit constructible à la règle et au compas permet d'exprimer par des formules explicites des valeurs telles que la longueur d'un côté de ce polygone, l'aire de ce polygone, les longueurs de ses diverses diagonales, etc. en fonction de la longueur du diamètre du cercle circonscrit (ou de celui du cercle inscrit). KEPLER suggère cela dans la définition VII du Livre I de l'*Harmonie du monde* sous la forme suivante : « connaître une figure, en géométrie, c'est pouvoir la mesurer à l'aide d'une mesure connue, et dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire celui de figures

⁴Pour revenir à nos Anciens, on peut mentionner ici que le Livre IV des *Eléments* d'EUCLIDE concerne la construction des polygones réguliers à 3, 4, 5, 6 et 15 côtés inscrits dans un cercle.

inscrites dans un cercle, la mesure en question est le diamètre du cercle. »

A partir de cette idée, on peut proposer plusieurs définitions possibles du degré de scibilité d'un polygone régulier constructible. Par exemple, on peut définir ce degré comme une « complexité » de l'expression de la longueur d'un côté, ou bien celle de l'aire de ce polygone, en fonction du rayon du cercle circonscrit (ou bien de celui du cercle inscrit). Il faut maintenant définir précisément ce que l'on entend par complexité de l'expression.

La longueur et l'aire d'un polygone régulier constructible à la règle et au compas sont exprimables, en termes du rayon du cercle circonscrit (et de celui du cercle inscrit), par des fonctions qui font intervenir des fonctions rationnelles (addition, soustraction, multiplication et soustraction), ainsi que des opérations d'extraction de racine carrée. Cela découle d'une propriété commune à toutes les figures constructibles. En effet, une droite est décrite en coordonnées par une équation du premier degré, et un cercle par une équation du second degré, et les opérations que l'on se permet dans les constructions à la règle et au compas sont de deux types : (1) construction d'un cercle de centre donné et passant par un point donné ; (2) construction d'une droite passant par deux points donnés. Les points donnés sont ou bien des points dont on est parti au début de la construction, ou bien des points obtenus par intersection d'une droite ou d'un cercle que l'on a déjà construits. Une opération d'intersection de droite et de cercle, ou d'intersection de deux droites ou de deux cercles, se traduit donc par la recherche d'une solution à une équation du premier ou du second degré, c'est-à-dire par la combinaison d'une fonction rationnelle avec une extraction de racine carrée.

En réalité, le fait qu'un certain segment soit constructible à la règle et au compas est équivalent au fait que l'expression de la longueur de ce segment est obtenue par des opérations rationnelles combinées avec des opérations d'extraction de racines carrées.

En considérant que les opérations rationnelles sont « triviales » en terme de complexité, on peut alors définir le degré de scibilité d'un polygone constructible comme le nombre minimum d'opérations d'extraction de racine carrées nécessaire pour exprimer par une formule la longueur du côté (ou l'aire) de ce polygone. Une façon concise de dire cela est d'utiliser la notion de degré algébrique d'un nombre. On rappelle que les nombres algébriques sont ceux qui sont solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers, et que le degré d'un nombre algébrique est le degré minimum d'une équation polynomiale qui lui est associée. On n'entrera pas ici dans les détails de la théorie des nombres algébriques, par souci de rester élémentaire, sauf pour dire que la discussion précédente montre que le degré algébrique d'une quantité du type que l'on a considéré (longueur d'un côté, aire, ou longueur d'une diagonale d'un polygone constructible) est une puissance de 2. Notons au passage que l'on voit ainsi que le problème de Delos, c'est-à-dire celui de la duplication du volume d'un cube n'a pas de solution constructible à la règle et au compas, car il est équivalent à la construction de $\sqrt[3]{2}$, qui est de degré 3, et 3 n'est pas une puissance de 2 (cf. aussi la note 3 en bas de page ci-dessus). De même, il est bien connu que la trisection d'un angle, en toute généralité, n'est pas possible à la règle et au compas, car pour certaines valeurs particulières de l'angle, elle est équivalente à la construction de grandeurs de degré trois.

Rappelons aussi que les expressions du rayon du cercle circonscrit et du cercle inscrit à un polygone régulier (que l'on appelle respectivement *rayon* du polygone et *apothème*

du polygone), sont étudiées dans les *Eléments* d'EUCLIDE, où il y est montré comment on les calcule, dans le cas de tous les polygones réguliers constructibles connus. On y montre par ailleurs comment calculer des quantités analogues pour les polyèdres réguliers tri-dimensionnels.

On utilisera dans ce qui suit les expressions des longueurs des côtés et des aires d'un polygone régulier en fonction du rayon du polygone, plutôt que de son apothème. Il est facile de passer d'une formule exprimant la longueur du côté en fonction du rayon à une autre exprimant cette longueur en fonction de l'apothème. En effet, si r , a et c désignent respectivement le rayon, l'apothème et la longueur du côté, on a, par le théorème de PYTHAGORE, $r^2 = (c/2)^2 + a^2$, puisque a est la distance du centre du cercle (inscrit ou circonscrit) au milieu d'un côté du polygone et r la distance de ce centre à l'un de ses sommets.

A la fin du Livre I de l'*Harmonie du Monde*, KEPLER établit deux listes distinctes pour le degré de scibilité (Propositions XLVIII et L). Ces listes se rapportent à la définition de la scibilité comme degré de complexité de la formule qui exprime la longueur d'un côté et celle de l'aire, en fonction du rayon du polygone. Le classement (par degré croissant) du degré de scibilité de la longueur d'un côté est alors comme suit : (1) le diamètre (considéré comme un polygone régulier à deux côtés) ; (2) l'hexagone ; (3) le carré et le triangle ; (4) le dodécagone et le décagone ; (5) le pentagone et l'octogone.

Le classement (toujours par degré croissant) en fonction de la scibilité de l'aire est comme suit : (1) Le diamètre ; (2) le carré et le dodécagone ; (3) le triangle, l'hexagone et l'octogone ; (4) le pentagone et le décagone.

Pour comprendre ces classements, on a réuni dans la table 1 les formules exprimant les longueurs des côtés et les aires des polygones concernés.

Polygone	Longueur d'un côté	Aire
Diamètre	2	0
Triangle	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$
Carré	$\sqrt{2}$	2
Pentagone	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{5}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$
Hexagone	1	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$
Octogone	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$2\sqrt{2}$
Décagone	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$
Dodécagone	$\sqrt{2}-1$	3

TAB. 1 – Longueur d'un côté et aire de quelques polygones réguliers convexes de rayon égal à 1.

Remarque. — Pour simplifier, on s'est contenté de parler ici des polygones réguliers convexes, alors que l'étude faite par KEPLER, et les listes qu'il a établies, concernent aussi les polygones étoilés. Cette remarque est importante, parce que KEPLER est considéré comme le premier mathématicien à avoir dégagé la notion de polygone étoilé. Il est aussi le premier

à avoir étudié la construction à la règle et au compas des polygones réguliers étoilés en même temps que celle des polygones réguliers convexes.

Passons maintenant au degré de congruence.

La notion de degré de congruence est intéressante en tant que nouvel exemple de « degré d'harmonie », au sens où KEPLER l'entend dans son *Harmonie du Monde*,⁵ un exemple qui fournit un parallèle supplémentaire entre les constructions géométriques et les constructions d'intervalles musicaux.

Le degré de congruence est relié à la notion de pavage. Dans les lignes qui vont suivre sur les pavages, on va se limiter à la considération de pavés ayant la forme de polygones réguliers. Il est bien connu que dans ce cas, et si on ne permet que des pavés isométriques, on ne peut paver le plan qu'avec trois types de polygones réguliers : le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier (c'est la proposition XVIII du livre II de l'*Harmonie du Monde*). KEPLER considère cependant des pavages avec plusieurs sortes de pavés. Les propositions XIX à XXI du livre II concernent les pavages du plan utilisant respectivement 2, 3, 4 et 5 types de pavés. Dans les propositions XXIII à XXVIII du même livre, KEPLER considère la question de paver une partie du plan, ainsi que celle des pavages de surfaces dans l'espace tri-dimensionnel.

Le degré de congruence d'un polygone est une mesure des différentes possibilités pour ce polygone de s'associer avec d'autres polygones pour former un pavage d'une surface. Cette définition heuristique n'est pas pratique à utiliser telle quelle⁶, mais elle est suffisante pour que KEPLER puisse donner un tableau des premiers polygones réguliers en termes de leur degré de congruence.

Là aussi (comme pour le degré de scibilité), KEPLER donne deux listes différentes. La première concerne les pavages plans, et elle comprend 12 degrés. La liste des polygones classés suivant leur degré de congruence est : (1) hexagone ; (2) carré ; (3) triangle ; (4) dodécagone ; (5) dodécagone étoilé ; (6) octogone ; (7) octogone étoilé ; (8) pentagone ; (9) pentagone étoilé ; (10) décagone ; (11) décagone étoilé ; (12) icosagone.

La deuxième liste concerne le degré de congruence par rapport aux pavages d'une sphère dans l'espace tri-dimensionnel. La liste est la suivante : (1) triangle et carré ; (2) pentagone et son étoile ; (3) hexagone ; (4) octogone, décagone et leurs étoiles ; (5) dodécagone et son étoile ; (6) icosagone.

On peut faire quelques remarques qui aident à comprendre ces deux listes.

Les trois premiers éléments de la première liste sont les trois polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan, par un pavage dont tous les pavés sont isométriques. Le degré de congruence de ces polygones est dans l'ordre indiqué, parce que, dans un pavage du plan par des triangles équilatéraux, en chaque sommet, il y a 6 polygones qui aboutissent, tandis que pour un pavage par des carrés, il y a, en chaque sommet, 4 polygones qui aboutissent, et pour un pavage par des hexagones réguliers il y en a trois. Ainsi, en un

⁵Rappelons en passant que le mot grec pour la consonance musicale est « armonia », et qu'étymologiquement, ce mot a le sens de « fondre en un seul ».

⁶Je pense que la question de trouver une définition précise du degré de congruence et de développer une telle notion est une question mathématique très intéressante.

certain sens, un hexagone a besoin de s'associer avec moins de pavés qu'un carré, et un carré a besoin de s'associer avec moins de pavés qu'un triangle. Cela fait qu'il est « plus facile » de paver le plan avec des hexagones qu'avec des carrés, et encore plus facile qu'avec des triangles. D'où la classification donnée de ces trois polygones en fonction de leur degré de congruence.

Dans la seconde liste, le triangle et le carré apparaissent avec le même degré, parce que chacun de ces polygones détermine un pavage régulier du bord d'une sphère (le tétraèdre et le cube respectivement), avec le même nombre de polygones voisins en chaque sommet.

La question de savoir quelles surfaces (planes ou non) sont pavables en utilisant un certain nombre fini donné de classes d'isométrie de pavés est abordée par KEPLER dans l'*Harmonie du Monde*. Aujourd'hui encore elle n'est pas résolue en toute généralité et elle a été l'objet de recherches intenses dans les dernières décennies.

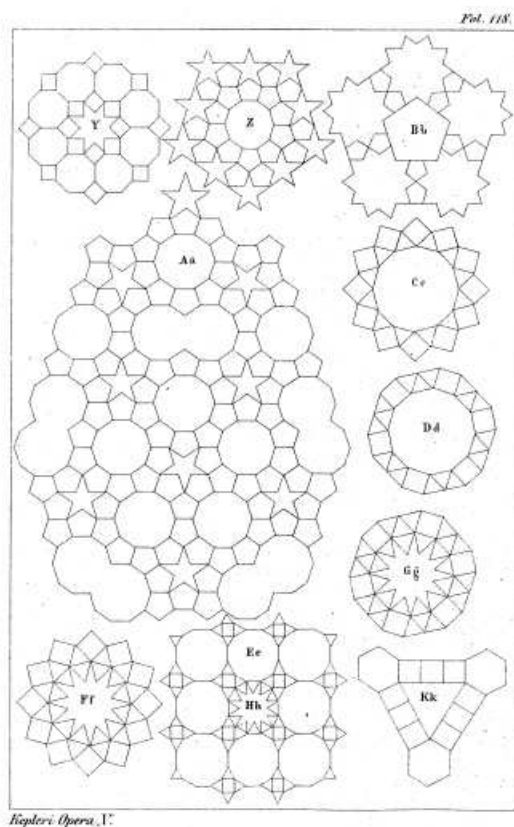


FIG. 3 – Pavages à pavés multiples, extrait de l'*Harmonices Mundi*.

Comme je l'ai déjà dit, l'*Harmonie du Monde* contient une partie mathématique extrêmement intéressante. Il faut cependant ajouter que le fait de parler de la partie mathématique de ce traité, sans faire la relation avec le reste de l'ouvrage, ne rend pas compte de toute la valeur du traité. On peut par exemple mentionner ici que les considérations de KEPLER sur le degré de congruence des polygones sont utilisées dans la partie astrologique de l'*Harmonie du Monde*, le terme « astrologie » faisant référence ici à l'étude de certaines divisions régulières du cercle du zodiaque et à l'observation de certaines configurations

sur la voûte céleste, étude qui est comparable en certains points à celle des pavages de la sphère. Tout cela est bien sûr en rapport avec le thème principal de KEPLER dans ce traité, qui est que le monde est bâti suivant des lois rationnelles dont les modèles se trouvent dans la géométrie abstraite.

Les degrés de scibilité et de congruence sont tous deux des « degrés d'harmonie ». A ce propos, on peut signaler que dans l'introduction au Livre II de l'*Harmonie du Monde*, KEPLER rappelle que les mots latin *congruencia* et grec *harmonia* ont le même sens.

Je vais parler dans la suite de cet article de la relation de ces degrés d'harmonie avec la consonance des intervalles musicaux. On peut rappeler ici que des tentatives de définition de « degré de consonance » remontent à l'antiquité grecque. Par exemple, PORPHYRE, dans ses *Commentaires sur l'Harmonique* de PTOLÉMÉE, rapporte que « certains Pythagoriciens, après avoir établi les rapports de consonance, établissaient entre eux des comparaisons, afin de mettre en évidence ceux qui étaient les mieux consonants ... » ([8] p. 529). Diverses définitions du degré de consonance jalonnent les 26 siècles qui nous séparent de l'antiquité grecque (voir mon rapport dans [7]).

2. Degrés de complexité des intervalles musicaux

L'algorithme usuel pour construire une gamme musicale dont l'étendue est d'une octave consiste à partir d'un certain nombre de consonances (par exemple des quintes et des quarts), de construire de nouvelles notes en enchaînant ces consonances, et ensuite de ramener les notes obtenues dans le domaine de l'octave initiale, en retranchant à chacune de ces notes le nombre nécessaire d'octaves. Comme exemple précis, on va rappeler brièvement comment on construit la gamme de PYTHAGORE.

Cette gamme étant une forme particulière de la gamme diatonique utilisée dans notre musique occidentale, on peut désigner ses éléments par les mots Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si et Do (que l'on notera Do_1 , pour distinguer cette note du Do initial de la suite, qui est plus grave et qui en diffère d'une octave). Ces notes seront définies par les valeurs numériques des intervalles qu'elles forment avec la note Do.

On part des valeurs de trois intervalles de base, l'octave, la quinte et le quart, qui sont respectivement $2/1$, $3/2$ et $4/3$. On inclut dans cette gamme (après avoir posé la note initiale, c'est-à-dire le Do) les notes correspondant à ces trois intervalles de base, c'est-à-dire les notes Do_1 , Sol et Fa. Les quatre notes ainsi obtenues sont considérées comme ayant la complexité zéro. Le reste des notes de la gamme est obtenu en faisant des opérations de concaténation (addition et soustraction) à partir de ces intervalles de base. On définit alors la complexité d'une note quelconque de la gamme comme le nombre minimum d'opérations nécessaires à la construire.

La valeur numérique de l'intervalle Do-Ré est $9/8$. On obtient cet intervalle en retranchant un quart à une quinte (on a $3/2 \div 4/3 = 9/8$). Une seule opération a été nécessaire, et la complexité du Ré est donc égale à 1.

La valeur numérique de l'intervalle Do-La est $27/16$. On peut obtenir le La en partant du Ré (qui a déjà été construit) et en lui ajoutant une quinte (on a bien $9/8 \times 3/2 = 27/16$). On a utilisé deux opérations, et on ne peut pas en utiliser moins. La complexité du La est

donc égale à 2.

La valeur numérique de l'intervalle Do-Mi est $81/64$. On obtient cet intervalle en partant du La (qui a déjà été construit) et en lui retranchant une quarte (on a $27/16 \div 4/3 = 81/64$). La complexité du Mi est égale à 3.

Enfin, la valeur numérique du Si est $243/128$. On obtient le Si en partant du Mi (qui a déjà été construit) et en lui ajoutant une quarte. La complexité du Si est égale à 4.

Ces données sont rassemblées dans le tableau 2.

Notons que cette façon de définir les notes de la gamme de PYTHAGORE n'est pas la façon usuelle (qui consiste, après avoir placé les notes Do, Do₁, Sol et Fa, à prendre des quintes itérées, et à diviser la valeur de l'intervalle obtenu par des multiples de 2 pour que la valeur de l'intervalle final soit comprise entre 1 et 2) ; le nombre d'opérations nécessaires par l'algorithme usuel n'est pas le minimum nécessaire.

Note	Valeur numérique	Complexité
Do	1/1	0
Ré	9/8	1
Mi	81/64	3
Fa	4/3	0
Sol	3/2	0
La	27/16	2
Si	243/128	4
Do ₁	2/1	0

TAB. 2 – Tableau des valeurs des intervalles de la gamme de PYTHAGORE, et complexité de ces intervalles. Rappelons que la lyre à 7 cordes de l'antiquité grecque était parfois accordée suivant les 7 premières notes de la gamme de PYTHAGORE.

3. Analogies entre le degré de scibilité des polygones et le degré de consonance des intervalles musicaux

Il s'agit de pures analogies, mais il est bien connu que les mathématiciens aiment les analogies. C'est à partir d'analogies, qui s'appuient parfois sur très peu de choses, que nous formulons des conjectures.

Les opérations que l'on fait dans la construction usuelle d'une gamme consiste à partir d'un certain nombre (généralement très petit) de fractions de la forme p/q avec p et q entiers et $p > q$, d'en prendre des produits, et de diviser le résultat par la plus petite puissance de 2 pour laquelle le résultat final se trouve compris entre 1 et 2.

Il y a déjà une analogie entre ces divisions successives par des puissances de 2 et l'opération d'itérer l'opération d'extraction de racines carrées, que l'on utilise dans les formules liées aux constructions des polygones réguliers à l'aide de la règle et du compas (cf. §1 ci-dessus).

Comme on l'a déjà rappelé ci-dessus, le fait de multiplier la valeur numérique d'un intervalle musical par 2^n (n étant un entier positif) correspond à l'ajout de n octaves à cet intervalle, et si l'intervalle initial est consonant, l'intervalle qui en résulte est aussi considéré comme consonant.⁷

Passons de nouveau au contexte des polygones réguliers.

Si un polygone régulier à p côtés est constructible, on sait que pour tout entier $n \geq 1$, le polygone régulier à $2^n p$ côtés est constructible, et inversement, si un polygone régulier à p côtés est constructible, on peut diviser l'entier p par autant de multiples de 2 que l'on peut (pourvu que le résultat soit encore un entier) et rester dans la catégorie des polygones constructibles. Ceci est une autre manière de voir que dans le cas des polygones constructibles, comme dans le cas des intervalles consonants, la multiplication/division par des puissances de 2 joue des rôles comparables.

On peut dire des choses plus précises à ce sujet. Construire un polygone régulier convexe à $2n$ côtés à partir d'un polygone régulier convexe à n côtés inscrit dans un cercle donné requiert une étape supplémentaire : tracer les médiatrices des côtés, et en prendre l'intersection avec le cercle circonscrit, ce qui détermine les sommets des côtés du nouveau polygone régulier. Parallèlement, il existe une formule simple qui relie la longueur d'un côté d'un polygone convexe régulier à celle d'un côté d'un polygone de même rayon et ayant un nombre double de côtés, c'est

$$c_{n+1} = \sqrt{2R \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{c_n^2}{4}} \right)}.$$

Ici, pour $n \geq 2$, c_n désigne la longueur d'un côté d'un polygone convexe régulier à n côtés, d'un rayon fixé R .

Par exemple, on peut déduire de cette formule, à partir de la longueur du côté d'un polygone régulier à deux côtés de rayon R , la longueur du carré de même rayon, celle de l'octogone de même rayon, celle du décahexagone de même rayon, et ainsi de suite (voir le tableau 3).

Polygone	Longueur d'un côté
Diamètre	$2R$
Carré	$R\sqrt{2}$
Octogone	$R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
Décahexagone	$R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

TAB. 3 – Longueurs des côtés de polygones réguliers convexes de rayon égal à R , obtenus l'un à partir de l'autre en doublant le nombre de côtés.

Ainsi, que l'on utilise l'une ou l'autre des définitions du degré de scibilité, on voit qu'il existe une relation simple entre le degré de scibilité d'un polygone régulier à p côtés, et

⁷Ceci l'était déjà par les musicologues de l'antiquité, « tant que le son peut être produit et est perceptible à l'oreille », cf. [10] p. 87).

celui d'un polygone à $2^n \times p$ côtés, avec n quelconque ≥ 1 . Ceci est à mettre en parallèle entre le fait qu'il existe une relation simple entre le degré de consonance d'un intervalle musical de valeur numérique donnée p/q et celui obtenu par addition de n octaves à cet intervalle dont la valeur numérique est donc de $2^n \times p/q$.⁸

Voici une autre analogie formelle, qui a trait à la théorie des gammes. Commençons par citer EULER. Dans son mémoire intitulé *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues en musique* (1764), EULER rapporte que jusqu'à son époque, la construction des gammes musicales utilisait uniquement les fractions dont les numérateurs et les dénominateurs sont des entiers dont la décomposition en facteurs premiers fait intervenir les nombres 2, 3 et 5, et uniquement ceux-là.⁹ EULER propose à ce sujet une nouvelle théorie (c'est la « conjecture » annoncée dans le titre du mémoire) dans laquelle le nombre 7 est inclus comme nouveau facteur premier, ceci, dit-il, afin d'obtenir « un nouveau genre de musique qui était inconnu aux anciens » ([2], Ser. III Vol. I, p. 515). Tournons-nous maintenant vers les polygones réguliers. Il se trouve que jusqu'à la période de KEPLER (et même bien au-delà), les seuls polygones que l'on connaissait être constructibles à la règle et au compas sont ceux dont le nombre de côtés est de la forme 2^n , $2^n \times 3$, $2^n \times 5$ et $2^n \times 3 \times 5$, avec n entier positif. On retrouve donc la même liste de nombres de base, 2, 3 et 5. Il aura fallu attendre 200 ans après KEPLER pour avoir la construction, par GAUSS, de nouveaux polygones réguliers (le premier ayant 17 côtés, le suivant ayant 257 côtés, etc.).¹⁰

Cette analogie devient moins formelle si on la relie à une autre analogie, faite par KEPLER lui-même, et à laquelle il consacre plusieurs pages de *l'Harmonie du monde* (en particulier tout le chapitre 1 du Livre III, intitulé *Sur les causes de la consonance*), et qui est basée sur l'observation pratique du fait que la division du cercle par les sommets des polygones inscrits constructibles à la règle et au compas fait intervenir les mêmes nombres entiers que ceux qui interviennent comme valeurs numériques des consonances. Par exemple, le diamètre (considéré, comme on l'a dit, comme un polygone régulier à deux côtés) divise le cercle en deux arcs de longueurs égales, et le rapport du périmètre du cercle sur la longueur de chacun de ces arcs est de 2/1, qui est la valeur numérique de l'octave. Pour le triangle équilatéral (polygone régulier à trois côtés), les rapports entre le périmètre du cercle et les longueurs des arcs que l'on obtient sont 3/1 (qui est la valeur numérique de la douzième) et 3/2 (valeur de la quinte). Le polygone constructible suivant est le carré, qui donne les rapports 4/1 (double octave), 4/2=2/1 (octave) et 4/3 (quarte), et ainsi de suite. Tout cela peut être mis en relation avec la division des cordes vibrantes, bien sûr de façon purement abstraite, le cercle étant difficilement réalisable comme une corde tendue que l'on pourrait faire vibrer. Mais on peut au moins faire l'analogie du point de

⁸Le degré de consonance peut être défini utilisant la notion de complexité, introduite ci-dessus.

⁹On peut rappeler à ce sujet que les intervalles musicaux utilisés par les *musici* de la renaissance, tels que Gioseffo ZARLINO, étaient les suivants : 2/1 (octave), 3/2 (quinte), 4/3 (quarte), 5/4 (tierce majeure), 6/5 (tierce mineure), 9/8 (ton majeur), 10/9 (ton mineur), 16/15 (demi-ton diatonique), 25/24 (demi-ton chromatique) et 81/84 (comma de Didyme). Ces nombres sont exactement les fractions superparticulières (c'est-à-dire de la forme $(n+1)/n$) dont les numérateurs et les dénominateurs sont des multiples de 2, 3 et 5.

¹⁰On peut rappeler ici que le résultat de GAUSS dit qu'un polygone régulier peut être construit à la règle et au compas quand son nombre de côtés est de la forme $2^m p_1 \dots p_k$ où les p_j sont des nombres premiers différents de la forme $p = 2^{2^a} + 1$, avec $a = 0, 1, 2, \dots$ un entier naturel ($p = 3, 5, 17, 257, 65537$). Les polygones constructibles sont donc obtenus pour $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 32, 34, \dots$ et non constructibles pour $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, \dots$

vue théorique, et c'était probablement l'intention de KEPLER.

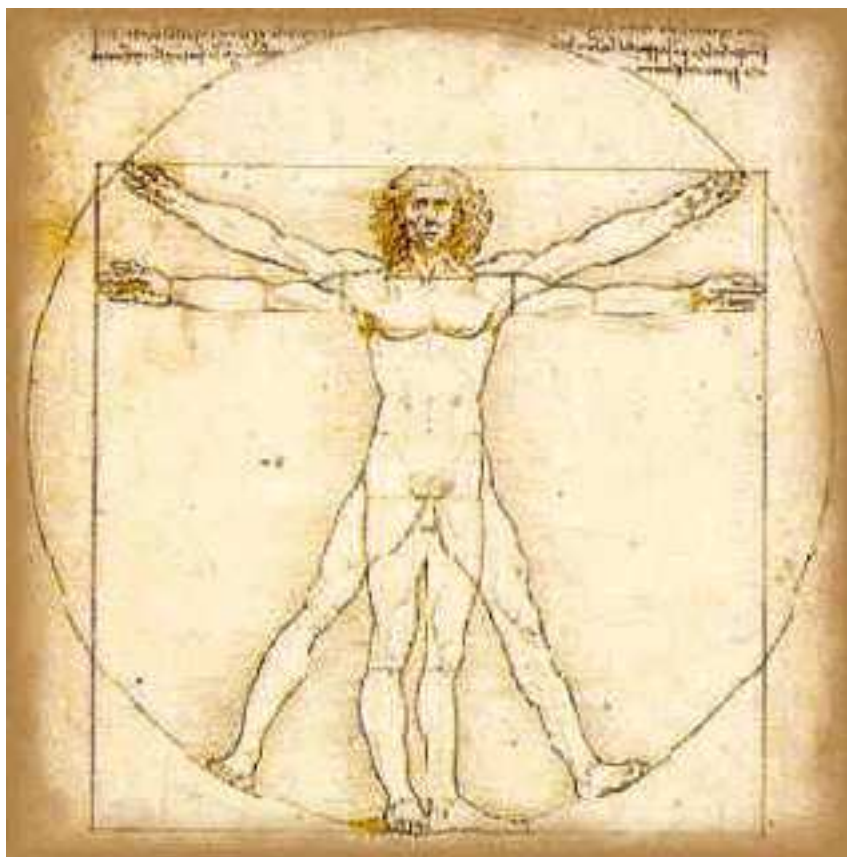


FIG. 4 – Dessin du corps humain par LEONARD DE VINCI (Galleria dell'Accademia, Venise), Les proportions utilisées sont celles indiquées par VITRUVÉ, l'architecte romain du 1er siècle après J. C., qui lui-même dans ses écrits perpétuait la tradition des artistes et architectes grecs qui l'ont précédé.

Enfin, il y a une analogie que j'ai déjà mentionnée dans l'article [7]. Elle s'appuie sur les deux faits suivants, que je considère comme des acquis de notre tradition esthétique (pour la première) et sensorielle (pour la seconde) :

- (1) Nous sommes particulièrement sensibles à la beauté des proportions qui sont constructibles à la règle et au compas.
- (2) La justesse d'un dessin représentant une figure constructible à la règle et au compas peut être reconnue à l'œil nu avec un très grand degré de précision.

Pour la première affirmation, je renvoie aux dessins des artistes de la renaissance, tel le célèbre « Homme de Vitruve » (1490) de LEONARD DE VINCI (cf. figure 4), ou les dessins de DÜRER, de Luca PACIOLI (cf. figure 5) et d'autres.

La raison de la validité de (2) est que nous sommes capables de construire mentalement des cercles et des droites, et comparer avec ce que l'on voit. C'est pour cela que nous



FIG. 5 – Tableau de Jacopo de BARBARI (Musée de Naples), représentant Luca PACIOLI en train de construire une figure à la règle et au compas. Luca PACIOLI est un mathématicien italien du 15^e siècle, auteur d'une *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni, et Proportionalita* (publiée à Venise en 1494) et d'une édition des *Eléments* d'EUCLIDE. Ami et collaborateur de LEONARD DE VINCI, il a écrit un traité intitulé *De Divina Proportione* (publié à Venise, 1509), pour lequel LEONARD DA VINCI a dessiné les figures. Le sous-titre de cet ouvrage nous dit que c'est une « oeuvre nécessaire à tous les esprits perspicaces et curieux, où chacun de ceux qui aiment à étudier la Philosophie, la Perspective, la Peinture, la Sculpture, l'Architecture, la Musique et les autres disciplines mathématiques, trouvera une très délicate, subtile et admirable doctrine et se délectera de diverses questions touchant à une très secrète science ». Dans le chapitre III de l'ouvrage, l'auteur écrit : « Pour notre propos, par sciences et disciplines mathématiques, nous entendons Arithmétique, Géométrie, Astrologie, Musique, Perspective, Architecture et Cosmographie ainsi que toutes les sciences qui en dépendent ».

sommes particulièrement sensibles à la justesse des dessins qui comportent des symétries (la symétrie étant une propriété que l'on peut vérifier au compas), ou dont la structure contient des cercles ou des rapports simples (égalité, rapport double, triple, etc.) et plus généralement des rapports constructibles à la règle et au compas (moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques, proportion dorée, etc.).

Revenons maintenant aux intervalles musicaux.

Les affirmations (1) et (2) ont leur équivalent en musique.

Pour la première affirmation, je rappelle simplement que pendant 2500 ans, l'utilisation juste des consonances, en partant de celles qui sont définies par les proportions simples, et leur combinaison avec les dissonances, étaient à la base des théories et des traités de composition musicale. Tous les traités théoriques et tous les écrits sur l'esthétique musicale, depuis la période grecque du VI^e siècle avant J. C. et jusqu'aux écrits théoriques de J.-Ph. RAMEAU, sont basés sur cette évidence. Pour des références concernant ce sujet, je renvoie aux ouvrages mentionnés dans mon article [7].

En ce qui concerne la seconde affirmation, il est bien connu que l'oreille humaine est particulièrement sensible à la justesse des intervalles consonants (en particulier, les consonances pythagoriciennes : l'unisson, l'octave, la quinte et la quarte). En d'autres termes, une oreille humaine normale sait reconnaître avec une très grande précision si un tel intervalle est juste ou pas. Par exemple, un violoniste, quand il accorde son instrument, commence par accorder une corde à vide (en général la deuxième corde), et il accorde ensuite les autres cordes en écoutant les doubles cordes à vide, qui font entre elles des intervalles consonants de quarte et de quinte. Il n'aurait pas pu accorder son violon de cette manière si les intervalles formés par les cordes à vide adjacentes n'étaient pas des consonances simples. De même, l'accordeur d'un clavecin utilise un algorithme qui consiste à écouter (« à l'oreille nu ») des intervalles consonants (des unissons, des octaves, des quintes et des quartes). Il lui est difficile en général d'accorder avec une très grande précision l'intervalle formé par deux notes adjacentes (un ton ou un demi-ton).

Je mentionne pour conclure que ces analogies nous fournissent une explication possible au texte de JAMBLIQUE que j'ai cité au début de cet article : « *Alors que PYTHAGORE était plongé dans la réflexion et dans le calcul, cherchant à découvrir quelque instrument qui apporterait à l'ouïe un secours solide et infaillible, comme dans le cas de la vue qui a le secours du compas, de la règle ou du dioptré, [...]* ». Je mentionne aussi que la relation entre consonance d'un intervalle et justesse de cet intervalle nous donne une explication à l'affirmation de KEPLER dans le Livre III de son *Harmonie du Monde*, qui dit que l'harmonie d'un intervalle musical doit être jugée par l'oreille, et n'est pas seulement une affaire de rapports numériques.

Bibliographie

- [1] G. D. BIRKHOFF, *Quelques Éléments Mathématiques de l'Art*, Att. Congr. Intern. di Matematica, Bologna, Vol. I, 315-333, 1929.
- [2] L. EULER, *Oeuvres Complètes (Opera Omnia)*, publié par l'Académie Suisse des Sciences, éd. Teubner, Leipzig & Berlin, (près de 80 volumes publiés à ce jour), 1911—

- [3] R. HARSHORNE, *Geometry : Euclid and Beyond*, Springer, 1997.
- [4] JAMBLIQUE, *Vie de Pythagore*, Introduction, traduction et notes par L. Brisson & A. Ph. Segonds, éd. *Belles Lettres*, 1996.
- [5] J. KEPLER, *Oeuvres Complètes (Joannis Kepleri Opera Omnia)*, ed. Ch. Frisch, 8 volumes, ed. *Heyder & Zimmer, Frankfurt & Erlangen*, 1858-1878.
- [6] A. PAPADOPOULOS, *Mathematics and music theory : from Pythagoras to Rameau*, *Math. Intelligencer* **24 (1)**, 65-73, 2002.
- [7] A. PAPADOPOULOS, *Consonance musicale et complexité mathématique*, L'Oouvert, **112**, 47-68, 2005.
- [8] Les Présocratiques, édition établie par J.-P. Dumont, textes traduits par J.-P. Dumont, D. Delattre et J.-L. Poirier, *Bibliothèque de la Pleiade*, Gallimard, Paris, 1988.
- [9] G. SIMON, *Kepler astronome astrologue*, Gallimard, Paris, 1979 (2ème édition 1992).
- [10] THÉON DE SMYRNE, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon, édition bilingue (grec-français) établie par J. Dupuis, Paris 1892, reprint par les éditions Culture et Civilisation, 115 Av. Gabriel Lebon, Bruxelles 1966*.
- [11] I. THOMAS, *Selections illustrating the history of greek mathematics*, 2 volumes, ed. W. Heinemann Ltd. & Harvard University press, *Loeb Classical Library*, 1939 (plusieurs éditions ultérieures).

Athanase PAPADOPOULOS
IRMA

Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg
papadop@math.u-strasbg.fr

Nouvelle
publication

DE LA STATISTIQUE AUX PROBABILITÉS AU LYCÉE



Auteurs : Bernard KOCH, Emmanuelle ACKER, Claire DUPUIS, Suzette ROUSSET-BERT, Mohamed ATLAGH, Jérôme AUDÉOUD, Jean-Paul QUELEN, Dominique WEIL, membres du groupe de recherche formation « STATISTIQUE » de l'IREM de Strasbourg.

Résumé : Cette brochure explore quelques thèmes en rapport avec le lien entre statistique et probabilités (loi des grands nombres, adéquation). De nombreuses questions abordées concernent la simulation, ses apports et ses limites (générateurs de nombres au hasard, simulations avec tableur). Elle sera utile aux professeurs de mathématiques désireux d'éveiller leurs élèves à la compréhension des phénomènes aléatoires ainsi qu'aux élèves de lycée curieux de ces questions. La brochure est accompagnée d'un **cdérom** qui contient le texte intégral de la brochure (aux formats Word et PDF), les programmes et commentaires officiels et des exemples de simulations (au format Excel).

Mots-clés : Statistique – Probabilité – Lycée – Hasard – Aléatoire – Arbre de probabilité – Loi de probabilité – Générateur aléatoire – Loi des grands nombres – Graphique statistique – Simulation – Tableur – Test statistique – Jeux de dés – Loi du Khi-deux – Statistique descriptive.

Public concerné : Professeurs de mathématiques - Élèves de lycée - Grand public.

Date de parution : Octobre 2006.

Format : 161 pages A4 + cdérom

Éditeur : IREM de Strasbourg (S. 193)

ISBN : 2-911446-28-3 (dépôt légal : 4ème trimestre 2006).

Prix : 14 € (+5 € de frais d'envoi).

Un bon de commande est accessible en ligne sur le site de l'IREM.

<http://irem.u-strasbg.fr>