
L'OUVERT

JOURNAL DE L'APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE STRASBOURG
N° 116 Février 2008 ISSN 0290 – 0068

Responsable de la publication : Philippe NUSS

Rédacteur en chef : Nicole BOPP

Comité de rédaction : Jean-Pierre DAROU, Michel ÉMERY,
Emmanuel WILL

Relecture des épreuves : Odile SCHLADENHAUFEN

Anciens numéros en ligne : <http://irem.u-strasbg.fr>

Correspondance à adresser à :
IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes, F - 67084 Strasbourg Cedex
Tel : 03 90 24 01 30 – Fax : 03 90 24 01 65
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr

Prix d'un numéro : 8 euros

Prix de l'abonnement (3 numéros) : 20 euros (16 euros pour les membres de l'APMEP d'Alsace)

L'ESPACE ET LE TEMPS

Lorsque, vers la fin d'une réunion consacrée à la mise au point de ce numéro, Nicole Bopp a posé la question : « Qui veut bien se charger de rédiger l'éditorial ? », j'ai eu un temps d'hésitation car je n'avais jamais rédigé un tel texte. Je me doutais aussi que cela m'engagerait à un travail délicat si je ne voulais pas me contenter des quelques lignes d'un anodin message.

La première raison qui m'a conduit à accepter vient de ce que L'OUVERT n'est pas seulement le journal de l'IREM, mais aussi celui de la régionale de l'APMEP¹. Longtemps des membres de l'APMEP ont très activement contribué à la réalisation du journal et l'association continue à le soutenir financièrement ; je reconnais cependant que, ces dernières années, notre participation à la rédaction était devenue très discrète ! Etant président de la régionale, j'ai compris que je me devais de saisir cette occasion pour redonner à l'association toute sa place dans les colonnes de L'OUVERT.

Une autre raison vient de la richesse du contenu de ce numéro et notamment des nombreux articles en rapport avec l'espace. Notre réunion du comité de rédaction s'était tenue alors que je venais de rentrer des journées nationales de l'APMEP qui se déroulaient cette année à Besançon. Dans cette capitale de l'horlogerie, les membres de la régionale de Franche-Comté avaient tout naturellement choisi « le temps » comme thème des journées qu'ils organisaient. Plusieurs conférences, dont je dirai quelques mots plus loin, lui étaient consacrées. C'est pour établir un lien entre le contenu des articles de ce journal et celui des conférences auxquelles j'avais assisté que j'ai intitulé l'éditorial « L'espace et le temps ».

Au fil des pages de ce numéro, l'espace se présente et évolue dans de nombreuses dimensions. Il commence par venir au secours du plan avec Jean LEFORT. Plus loin, dans un article de Francis JAMM, il nous rappelle la vision qu'on se faisait de l'univers au temps de PTOLÉMÉE et de son livre l'Almageste. Il se précise à nos yeux lorsque Johannes KEPLER publie en 1609 son *Astronomia Nova* où il énonce les deux premières lois que j'utilise dans le calcul de la durée des saisons. Un article de Pierre BAUMANN et Michel ÉMERY nous incite enfin à essayer de le voir sous une forme plus abstraite lorsque, contredisant ARISTOTE, il franchit le cap des trois dimensions. Je ne voudrais pas oublier les auteurs des autres articles qui s'éloignent du thème fédérateur que j'ai choisi ici, mais qui contribuent tout autant à une diversité qui devrait satisfaire l'ensemble des lecteurs.

Comme je l'ai dit, « le temps » était à Besançon le thème des journées nationales de l'APMEP. Bien que plusieurs conférences ou ateliers aient été animés par des collègues alsaciens, nous n'étions qu'une petite poignée de représentants de notre régionale.

A propos du temps, je retiens la conférence de Jean-Marie VIGOUREUX intitulée « De l'antiquité à Einstein : l'expérience du temps » à laquelle j'avais assisté ; je voudrais aussi signaler un de ses livres, « L'univers en perspective », où il établit un parallèle entre la relativité d'une vue en perspective dans l'espace et celle de la perception du temps, puis nous fait découvrir que la formule d'EINSTEIN $t_v = t_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$, précisant cette

¹Pour les lecteurs qui ne connaîtraient pas l'APMEP, je précise qu'il s'agit de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, où tous les professeurs sont les bienvenus, y compris ceux du privé. Ils trouveront tous les renseignements utiles sur son site : <http://www.apmep.asso.fr>.

relativité des durées, peut être considérée comme une simple application du théorème de Pythagore². Je n'oublie pas non plus la conférence de clôture d'Etienne KLEIN, « La mathématisation du temps épuise-t-elle la question du temps ? ». Il tentait, avec beaucoup d'humour et d'aisance, de concilier sur ce sujet les idées des mathématiciens, des physiciens et des philosophes. Je n'ai malheureusement pas pu assister à celle, intitulée « Mesurer le temps : unité et diversité des calendriers », que Jean LEFORT donnait parallèlement à celle de Jean-Marie VIGOUREUX ; il est impossible de dédoubler le temps, il a bien fallu choisir ! Dans la présentation de sa conférence, Jean LEFORT établit également un lien entre le temps et l'espace en écrivant « Mesurer le temps, c'est aussi chercher à communier avec le cosmos... ». Des comptes rendus détaillés de toutes ces conférences paraîtront dans un prochain bulletin vert, revue nationale de l'APMEP.

On l'a bien compris, par ces rappels j'ai voulu donner au lecteur de L'OUVERT un petit regret de ne pas avoir fait cette année le déplacement de Besançon. Il faudra aller plus loin l'année prochaine puisque les journées se tiendront du samedi 25 au lundi 28 octobre à La Rochelle sur le thème « Mathématiques en construction ». Je souhaite également au lecteur, qu'il soit membre de l'APMEP ou non, de trouver un peu de temps pour participer à la vie de la régionale où les membres actifs sont de moins en moins nombreux.

Le temps, c'est aussi le temps passé, celui qu'on évoque lors des anniversaires. Pour remémorer ceux auxquels je vais faire allusion, L'OUVERT, dont la parution est souvent retardée, sortira exceptionnellement avec une bonne année d'avance !

C'est en effet en 1609 que KEPLER publia ses deux premières lois, c'est en 1609 également que GALILÉE commença à utiliser la lunette astronomique dont la découverte pourrait cependant être attribuée, dès 1608, à Hans LIPPERSHEY. A cette époque, nous ne sommes pas loin non plus de la parution des premières tables de logarithmes. Il y a quatre cents ans, la perception de l'espace dans lequel nous vivons a pu commencer à se clarifier, l'évolution des idées étant soutenue par les outils nécessaires à des observations et à des calculs suffisamment précis. Nous sommes donc à la veille d'un bel anniversaire que certains des articles de ce numéro invitent à célébrer dès maintenant, même si c'est avec un peu d'avance !

Sauf retard imprévu, ce numéro devrait vous parvenir au début de l'année 2008, assez tôt j'espère pour que, au nom de l'association des professeurs de mathématiques et du comité de rédaction de L'OUVERT, je puisse encore vous présenter mes vœux les plus chaleureux à l'occasion de cette nouvelle année.

Jean-Pierre DAROU

²Jean-Marie VIGOUREUX, *L'univers en perspective*, Ellipses, 2006, page 77.

PEUT-ON « VOIR » DANS L'ESPACE À n DIMENSIONS ?

Pierre BAUMANN, Michel ÉMERY

Résumé : Comment une propriété évidente visuellement en dimensions deux et trois s'étend-elle aux autres dimensions ? Voici une situation où l'intuition est trompeuse.

Mots-clés : Vecteur - Trièdre - Produit scalaire - Espace à n dimensions.

Tout angle aigu¹ est inclus dans un angle droit de même sommet. C'est évident, au sens étymologique : cela se voit avec les yeux de l'esprit, sans même avoir à esquisser une figure, du moins pour qui a tant soit peu pratiqué les mathématiques.

Passons à trois dimensions. Un trièdre T dont les trois angles sont aigus est-il toujours inclus dans un trièdre trirectangle ? Oui, cela se voit aussi, quoique moins immédiatement. Plaçons à cet effet le plus grand des trois angles de T dans un plan horizontal. La projection orthogonale sur ce plan de l'arête de T opposée est alors incluse dans cet angle.² Dès lors, en faisant pivoter cette arête dans le plan vertical qui la contient, on peut agrandir T de sorte que deux de ses angles deviennent droits. Il ne reste plus qu'à agrandir l'angle horizontal pour le rendre droit.

Un effort est nécessaire pour se représenter mentalement la situation et « voir » que tout cela est possible. Si la difficulté est trop grande, on peut toutefois se ramener à deux dimensions en coupant T par une sphère de rayon unité centrée au sommet de T . La question devient alors : un triangle sphérique dont les longueurs des trois côtés sont au plus $\pi/2$ est-il toujours inclus dans un triangle sphérique trirectangle (dont les trois côtés et les trois angles valent $\pi/2$) ? Il devient ainsi possible de griffonner des figures (sur du papier ou sur une orange) pour se convaincre que c'est vrai ; il s'agit d'un résultat « visible ».

Ce résultat peut s'exprimer de façon moins visuelle. Chaque base orthonormée détermine un trièdre trirectangle, à savoir l'ensemble des vecteurs ayant toutes leurs composantes positives dans la base ; n'importe quel trièdre trirectangle s'obtient d'ailleurs ainsi. En se rappelant que deux vecteurs forment un angle aigu si et seulement si leur produit scalaire est positif, on parvient à la formulation que voici, plus algébrique que géométrique : *Étant donnés dans l'espace trois vecteurs dont les produits scalaires deux à deux sont positifs, il existe nécessairement une base orthonormée dans laquelle toutes les composantes de ces trois vecteurs sont positives.*

Et en dimension supérieure ? Si l'on se donne quatre vecteurs dans l'espace à quatre dimensions, et si les six produits scalaires deux à deux de ces vecteurs sont positifs, est-il

¹Au sens large : l'angle nul et l'angle droit sont aigus. De même, positif signifiera ≥ 0 .

²Le lecteur scrupuleux constatera que nous ne prouvons pas cette affirmation : évidence n'est pas démonstration. Nous verrons toutefois plus loin comment écrire une preuve rigoureuse de la propriété que nous annonçons.

toujours possible de grossir la figure ainsi formée de façon à rendre nuls les six produits scalaires? Plus généralement, pour chaque entier naturel n , on peut se demander si la propriété ci-dessous a lieu :

$P(n)$: *On se place dans l'espace euclidien à n dimensions. Étant donnés n vecteurs formant deux à deux des angles aigus, il existe toujours une base orthonormée dans laquelle toutes les composantes de ces vecteurs sont positives.*

L'un de nous (M. É.) a rencontré ce problème à l'occasion de recherches en probabilités : ce résultat lui aurait été utile, mais faute d'en trouver une démonstration simple, il s'en est passé et a procédé autrement. Surpris toutefois par la difficulté d'une question d'apparence si élémentaire, il en a parlé autour de lui. La plupart de ses collègues avaient comme lui l'intuition (visuelle) que la réponse devait être positive; certains lui ont proposé des démonstrations, qui se sont en fin de compte révélées incomplètes. C'est finalement P. B. qui a trouvé la solution : $P(6)$ est fausse! Nous allons voir que $P(n)$ est vraie pour $n \leq 4$ et fausse pour $n \geq 5$.

Notre propension de mathématicien à tenter de généraliser aux dimensions supérieures les résultats intuitivement évidents de la géométrie élémentaire conduit ici à une impasse. Il est en effet possible de passer de $P(3)$ à $P(4)$, au prix d'un petit travail. Tant qu'à se fatiguer, on est enclin à chercher directement un argument permettant de passer aussi en toute généralité de $P(n)$ à $P(n+1)$, ce qui est une fausse piste puisqu'un tel argument ne saurait exister.

Résultat et références

Nous avons déjà dit que $P(2)$, $P(3)$ et $P(4)$ sont vraies, et que $P(n)$ est fausse pour $n \geq 5$. Comme c'est si souvent le cas lorsqu'on s'intéresse à des questions élémentaires, ce fait était connu depuis longtemps, mais était en l'occurrence énoncé sous une forme un peu différente. Un argument de dualité permet d'établir l'équivalence entre notre propriété $P(n)$ et celle que DIANANDA appelle $T(n, 0)$ dans l'article [1]. Or DIANANDA démontre $T(n, 0)$ pour $n \leq 4$, et page 25 du même article, un contre-exemple dû à HORN réfute $T(5, 0)$. Un autre contre-exemple à $P(5)$ est proposé par HALL, au travers de la matrice de Gram définie par l'équation (15.33) de l'article [2].

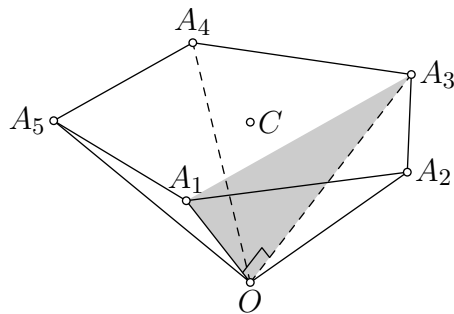
Contre-exemple à $P(n)$ pour $n \geq 5$

Pour $n \geq 5$, nous affirmons donc l'existence d'un contre-exemple, c'est-à-dire d'un système de n vecteurs dans l'espace à n dimensions, dont les produits scalaires deux à deux sont positifs, et tel qu'il soit impossible de trouver une base orthonormée dans laquelle les n^2 composantes de ces n vecteurs soient toutes positives. Un contre-exemple à $P(5)$ est obtenu en prenant $n = 5$ dans la proposition ci-dessous; pour $n > 5$, on obtiendra un contre-exemple à $P(n)$ en augmentant de cinq à n le nombre de vecteurs par répétition de l'un d'entre eux.

Proposition 1. *Dans un espace euclidien de dimension $n \geq 3$, il existe un système de cinq vecteurs formant deux à deux des angles aigus et tel qu'il soit impossible de trouver une base orthonormée dans laquelle les $5n$ composantes de ces vecteurs soient toutes positives.*

La construction à la base de notre démonstration est « visuelle », au sens où certaines de ses propriétés seront plus immédiatement perçues sur une figure que vérifiées par le calcul.

Tridimensionnelle, la figure représente une pyramide régulière $OA_1A_2A_3A_4A_5$, posée sur sa pointe O , et dont la base est un pentagone régulier horizontal $A_1A_2A_3A_4A_5$. Le centre C du pentagone est à la verticale du point O . La hauteur OC de la pyramide est choisie telle que les cinq diagonales A_1A_3 , A_2A_4 , A_3A_5 , A_4A_1 et A_5A_2 du pentagone soient vues de O sous un angle droit. Un tel choix est possible parce que lorsque OC varie de zéro à l'infini, l'angle $\widehat{A_1OA_3}$ varie de $4\pi/5$ (qui est obtus) à 0 . Remarquer que les côtés du pentagone sont vus de l'origine sous un angle $\widehat{A_1OA_2}$ aigu, car inférieur à $\widehat{A_1CA_2}$ qui vaut $2\pi/5$.



Mais nous cherchons une construction en dimension $n \geq 3$ alors que cette figure n'est que tridimensionnelle. Fixons dans l'espace à n dimensions un sous-espace à 3 dimensions (il y en a pléthore si $n > 3$); et dans ce sous-espace choisissons des points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 qui dessinent avec l'origine O la figure ci-dessus. Les cinq vecteurs dont la proposition affirme l'existence seront $\vec{OA_1}, \vec{OA_2}, \vec{OA_3}, \vec{OA_4}$ et $\vec{OA_5}$. L'angle entre deux quelconques de ces vecteurs est aigu; nous avons fait tout ce qu'il faut pour cela.³

Il reste à présent à établir qu'il n'existe aucune base orthonormée de l'espace à n dimensions dans laquelle les composantes des cinq vecteurs $\vec{OA_k}$ soient toutes positives. La démonstration de ce fait occupe les trois alinéas suivants.

Raisonnons par l'absurde en supposant au contraire l'existence d'une telle base. Appelons $a_{k,1}, \dots, a_{k,n}$ les coordonnées de A_k dans cette base; chaque $a_{k,i}$ est soit nul, soit strictement positif. Appelons *support* de A_k , et notons S_k , l'ensemble des indices i tels que $a_{k,i} > 0$. Puisque l'angle $\widehat{A_1OA_3}$ est droit, on a $\vec{OA_1} \cdot \vec{OA_3} = 0$, c'est-à-dire $a_{1,1}a_{3,1} + \dots + a_{1,n}a_{3,n} = 0$. Chaque terme $a_{1,i}a_{3,i}$ de cette somme étant positif, tous ces produits $a_{1,i}a_{3,i}$ doivent être nuls, et aucun indice i ne peut donc être à la fois dans les deux supports S_1 et S_3 . Ceci montre que $S_1 \cap S_3 = \emptyset$; de même, $\widehat{A_1OA_4}$ étant droit, on a $S_1 \cap S_4 = \emptyset$.

Par ailleurs, les trois vecteurs $\vec{OA_2}, \vec{OA_3}$ et $\vec{OA_4}$ ne sont pas coplanaires (voir la figure). Ils forment donc une base de l'espace tridimensionnel contenant la pyramide, et $\vec{OA_1}$ doit être une combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Sa i -ième coordonnée est donc une combinaison linéaire des i -ièmes coordonnées de ces trois vecteurs, et si $a_{1,i}$ n'est pas nul, un au moins parmi $a_{2,i}, a_{3,i}$ et $a_{4,i}$ n'est pas nul. Ceci signifie pour les supports l'inclusion $S_1 \subset S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Or le paragraphe précédent a montré que S_1 ne rencontre ni S_3 ni S_4 ; on doit donc avoir $S_1 \subset S_2$.

Le même argument en permutant les indices donne $S_2 \subset S_3$; par transitivité, S_1 est donc inclus dans S_3 . Mais nous avons vu plus haut que S_1 et S_3 ne se rencontrent pas. Il en résulte que S_1 est vide, c'est-à-dire $A_1 = O$, ce qui est absurde. Cette contradiction achève de démontrer la proposition 1. \square

³Les angles restent les mêmes, qu'ils soient considérés dans l'espace tridimensionnel ou dans l'espace plus gros à n dimensions. L'angle entre deux vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 est toujours mesuré dans le sous-espace de dimension 2 ou 1 engendré par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ; l'angle géométrique est déterminé par le produit scalaire, son cosinus valant $\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}$.

La proposition 1 réfute par un contre-exemple la propriété $P(n)$ pour tout $n \geq 5$. Ce contre-exemple est cependant doublement dégénéré, en ce que d'une part certains des angles initiaux sont nuls ou droits, et d'autre part le système des vecteurs est lié. On voit toutefois facilement qu'il existe aussi des contre-exemples non-dégénérés. De fait, un argument de compacité montre que si un système de n vecteurs de l'espace à n dimensions n'est inclus dans aucun « octant généralisé », il en va de même de tout autre système de n vecteurs suffisamment proche du premier. Or les dégénérescences dont pâtit notre contre-exemple s'évanouissent sous une petite déformation convenablement choisie, tandis que subsiste la propriété de n'être inclus dans aucun « octant généralisé ».

Le cas de la dimension 4

Pour terminer, il reste à prouver que la propriété $P(4)$ est vraie, autrement dit à établir l'énoncé suivant.

Proposition 2. *Soient v_1, v_2, v_3 et v_4 quatre vecteurs dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Si les six produits scalaires de ces vecteurs pris deux à deux sont positifs, il existe une base orthonormée de l'espace dans laquelle les seize composantes de ces quatre vecteurs sont positives.*

La démonstration de cette proposition commence par des réductions. Nous pouvons nous ramener à l'étude des cas où les vecteurs satisfont les hypothèses supplémentaires suivantes :

(H1) *Aucun des vecteurs v_i n'est nul, et les demi-droites \mathbb{R}_+v_i sont toutes différentes.* Supposons au contraire qu'un des vecteurs soit nul ou que deux demi-droites soient confondues. Un vecteur parmi les v_i est alors superflu : de fait, le problème se résume à montrer l'existence d'une base orthonormée de l'espace à quatre dimensions dans laquelle les composantes des trois autres vecteurs sont toutes positives. Or ces trois vecteurs sont dans un sous-espace à trois dimensions, et le fait que $P(3)$ soit vraie entraîne l'existence d'une base orthonormée de ce sous-espace dans laquelle les composantes des trois vecteurs soient toutes positives. Il ne reste dès lors plus qu'à compléter cette base de l'espace tridimensionnel pour obtenir une base orthonormée de l'espace quadridimensionnel qui réponde aux exigences du problème.

(H2) *Chaque v_i est orthogonal à au moins un autre v_j .* Si par exemple v_1 n'est orthogonal ni à v_2 , ni à v_3 , ni à v_4 , on a $v_1 \cdot v_i > 0$ pour chaque $i \in \{2, 3, 4\}$. Faisons à présent pivoter le vecteur v_1 dans le plan qu'il engendre avec v_2 . Pour cela, nous considérons le vecteur $v^\lambda = v_1 - \lambda v_2$ pour des réels $\lambda \geq 0$. Pour $i \in \{2, 3, 4\}$, si $v_2 \cdot v_i = 0$, alors $v^\lambda \cdot v_i$ reste constamment > 0 et l'on pose $\lambda_i = +\infty$; si au contraire $v_2 \cdot v_i > 0$, alors on pose $\lambda_i = (v_1 \cdot v_i)/(v_2 \cdot v_i)$ et on constate que $v^\lambda \cdot v_i = (\lambda_i - \lambda)(v_2 \cdot v_i)$ est > 0 pour $\lambda \in [0, \lambda_i[$ et s'annule pour $\lambda = \lambda_i$. Le minimum μ de $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ est fini puisque λ_2 l'est; les trois produits $v^\mu \cdot v_2, v^\mu \cdot v_3$ et $v^\mu \cdot v_4$ sont positifs et (au moins) l'un d'entre eux est nul. Le nouveau système (v^μ, v_2, v_3, v_4) a alors aussi des produits scalaires positifs, et il a les mêmes relations d'orthogonalité que l'ancien système (v_1, v_2, v_3, v_4) , plus au moins une faisant intervenir son premier vecteur. Enfin si le problème est résolu pour ce nouveau système, il l'est aussi pour l'ancien puisque $v_1 = v^\mu + \mu v_2$ est une combinaison linéaire positive de v^μ et v_2 .

(H3) *Aucun des v_i n'est orthogonal aux trois autres.* Sinon, il suffit de résoudre le problème pour les trois autres vecteurs dans l'espace tridimensionnel orthogonal à ce v_i , puis de compléter la base par $v_i/\|v_i\|$.

(H4) Chaque v_i a pour norme 1. En effet, aucun v_i n'est nul d'après (H1); par ailleurs multiplier un v_i par un scalaire $\lambda > 0$ ne change ni l'hypothèse ni la conclusion de la proposition.

Remarque. Comme le souligne la note 2, notre démonstration de P(3) était un peu cavalière. Si l'on souhaite la remplacer par un argument rigoureux, on peut procéder de la manière suivante. Avec les mêmes arguments que ci-dessus, on suppose (H1) et (H2). Mais alors l'un des trois vecteurs doit être orthogonal aux deux autres. Le raisonnement fait ci-dessus en (H3) ramène alors le problème à P(2), et c'est fini.

Terminons de démontrer la proposition 2. La fin de la preuve, malheureusement éloignée de l'intuition géométrique, va nous contraindre à manœuvrer un 4×4 , la *matrice de Gram* des quatre vecteurs. Appelons E l'espace euclidien à quatre dimensions.

Definition. La matrice de Gram de quatre vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 de E est la matrice symétrique G , à quatre lignes et quatre colonnes, de terme général $g_{ij} = v_i \cdot v_j$.

Supposons avoir choisi une base orthonormée dans E . On peut alors considérer la matrice carrée V dont la i -ième colonne est formée des composantes de v_i , et on voit facilement que $G = {}^t V V$. Il en résulte en particulier que $\det G = \det {}^t V \det V = (\det V)^2 \geq 0$.

On observera également que connaître la matrice de Gram des quatre vecteurs v_i permet aussi de connaître la norme de toute combinaison linéaire de ces vecteurs, donnée par $\|\sum \lambda_i v_i\|^2 = \sum \lambda_i \lambda_j g_{ij}$. Ceci a pour conséquence une propriété de rigidité : *si un autre système (w_1, w_2, w_3, w_4) a même matrice de Gram (g_{ij}) que (v_1, v_2, v_3, v_4) , il existe une isométrie ρ de E sur lui-même telle que $\rho(v_i) = w_i$ pour chaque i .* Pour établir cette propriété, appelons F (respectivement F') le sous-espace de E engendré par les v_i (respectivement par les w_i). Tout vecteur de F s'écrit $\sum \lambda_i v_i$, et ce de plusieurs façons différentes si les vecteurs v_i sont liés; on peut néanmoins sans ambiguïté lui associer le vecteur $\sum \lambda_i w_i \in F'$, puisque si $\sum \lambda_i v_i = 0$, alors $\|\sum \lambda_i w_i\|^2 = \sum \lambda_i \lambda_j g_{ij} = \|\sum \lambda_i v_i\|^2 = 0$, d'où $\sum \lambda_i w_i = 0$. Ceci définit une application linéaire $\rho : \sum \lambda_i v_i \mapsto \sum \lambda_i w_i$ de F dans F' qui préserve la norme euclidienne, car $\|\sum \lambda_i w_i\|^2 = \sum \lambda_i \lambda_j g_{ij} = \|\sum \lambda_i v_i\|^2$. L'application ρ est donc une isométrie entre F et F' , qui doivent avoir même dimension. Il ne reste qu'à prolonger cette isométrie à l'espace E tout entier en choisissant une isométrie du supplémentaire orthogonal de F sur le supplémentaire orthogonal de F' .

Dans le cas qui nous occupe, on observe de plus que, l'angle formé par chacune des six paires de vecteurs étant aigu, les coefficients de G sont tous positifs. Le lemme suivant fait un pont entre description géométrique et manipulations algébriques.

Lemme. *Soient quatre vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 dans E ; soit G leur matrice de Gram. Pour qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle les seize composantes de ces quatre vecteurs sont positives, il faut et il suffit qu'il existe une matrice carrée A , à coefficients positifs, telle que ${}^t A A = G$.*

Démonstration. La condition nécessaire est facile (et nous ne l'utiliserons pas) : il suffit de choisir pour i -ième colonne de A les composantes de v_i dans la base en question.

Pour la condition suffisante, on part d'une matrice carrée A à coefficients positifs telle que ${}^t A A = G$. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . Appelons w_i le vecteur dont les coordonnées dans \mathcal{B} sont données par la i -ième colonne de A ; ainsi G est aussi la matrice de Gram des w_i . Par la propriété de rigidité, il existe une isométrie ρ de E telle que $\rho(v_i) = w_i$. Les

composantes de v_i dans la base $\rho^{-1}(\mathcal{B})$ sont alors égales aux composantes de w_i dans la base \mathcal{B} . Elles sont donc positives, car ce sont des coefficients de A . \square

Revenons à la démonstration de la proposition 2. Notre donnée de départ est celle de quatre vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 de l'espace à quatre dimensions, formant deux à deux des angles aigus. Nous nous sommes ramenés au cas où ces vecteurs vérifient les hypothèses (H1) à (H3). Nous supposons en outre que $v_1 \perp v_2$ et $v_3 \perp v_4$; à une permutation des v_i près, c'est la seule possibilité pour satisfaire à la fois (H2) et (H3). La matrice de Gram G de ces quatre vecteurs est à termes positifs, et le lemme dit qu'il suffit de montrer que $G = {}^tAA$ pour une matrice carrée A à coefficients positifs. Nous allons envisager deux cas.

Premier cas. — On suppose qu'une autre relation d'orthogonalité a lieu entre les v_i , par exemple $v_2 \perp v_3$. Par (H4), nous pouvons aussi supposer que $\|v_i\| = 1$ pour chaque i . La matrice de Gram, qui est symétrique, est alors de la forme

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ a & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que $G = {}^tAA$, où l'on a posé

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{1-\beta^2}} & 0 & \sqrt{\frac{a^2(1-\beta^2)}{1-\alpha^2-\beta^2}} & 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \sqrt{1-\beta^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1-\alpha^2-\beta^2-a^2(1-\beta^2)}{1-\alpha^2-\beta^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Remarquons que les coefficients de A ont bien un sens puisque

- les trois produits scalaires a, α et β appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$ (la valeur 1 est interdite par (H1));
- $1 - \alpha^2 - \beta^2 - a^2(1 - \beta^2) = \det G$ est positif comme déterminant d'une matrice de Gram;
- $a > 0$ car sinon v_3 serait orthogonal à v_1 , ce qui contredirait (H3) puisque l'on a déjà $v_2 \perp v_3$ et $v_4 \perp v_3$;
- $1 - \alpha^2 - \beta^2 \geq a^2(1 - \beta^2) > 0$, une conséquence des trois points précédents.

Second cas. — On suppose maintenant que $v_1 \perp v_2$ et $v_3 \perp v_4$ sont les deux seules relations d'orthogonalité parmi les quatre v_i . Par (H4), nous supposons aussi $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$. (Il est certes loisible de supposer en outre $\|v_3\| = \|v_4\| = 1$, mais cette réduction ne simplifierait pas les calculs que nous allons être amenés à faire.)

Dans une base orthonormée judicieusement choisie, les quatre vecteurs ont pour composantes

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix},$$

où $a\alpha + b\beta + c\gamma = v_3 \cdot v_4 = 0$. La matrice de Gram de ces quatre vecteurs est

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \\ a & b & a^2 + b^2 + c^2 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \end{pmatrix}.$$

Les quatre coefficients a , b , α et β de cette matrice sont positifs par hypothèse, et même strictement positifs (sinon il y aurait plus de deux relations d'orthogonalité entre les v_i). De $c\gamma = -a\alpha - b\beta < 0$, on tire $c \neq 0$. Nous allons vérifier que, pour un choix convenable des paramètres $p > 0$ et $q > 0$, on a $G = {}^tAA$, où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + pc^2}} & 0 & \sqrt{a^2 + pc^2} & 0 \\ \sqrt{\frac{pc^2}{a^2 + pc^2}} & 0 & 0 & \alpha \sqrt{\frac{a^2 + pc^2}{pc^2}} \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2 + qc^2}} & \sqrt{b^2 + qc^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{qc^2}{b^2 + qc^2}} & 0 & \beta \sqrt{\frac{b^2 + qc^2}{qc^2}} \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que les seuls termes de tAA qui ne sont pas trivialement égaux à ceux de la matrice G sont les deux derniers termes sur la diagonale. L'égalité ${}^tAA = G$ se réduit ainsi à deux relations :

$$\begin{cases} (a^2 + pc^2) + (b^2 + qc^2) = g_{33} = a^2 + b^2 + c^2 ; \\ \alpha^2 \frac{a^2 + pc^2}{pc^2} + \beta^2 \frac{b^2 + qc^2}{qc^2} = g_{44} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 . \end{cases}$$

La première sera satisfaite dès que $p + q = 1$, et la seconde se simplifie en

$$\frac{1}{p} a^2 \alpha^2 + \frac{1}{q} b^2 \beta^2 = c^2 (\gamma^2 + \delta^2) .$$

Appelons $f(p, q)$ le membre de gauche $a^2 \alpha^2 / p + b^2 \beta^2 / q$. Lorsque p tend vers $0+$ ou $1-$ et que $q = 1 - p$, $f(p, q)$ tend vers $+\infty$; lorsque $p = a\alpha / (a\alpha + b\beta)$ et $q = b\beta / (a\alpha + b\beta)$, on a $f(p, q) = (a\alpha + b\beta)^2 = (-c\gamma)^2 \leq c^2 (\gamma^2 + \delta^2)$. Comme $0 < a\alpha / (a\alpha + b\beta) < 1$, il existe par continuité un $p \in]0, 1[$ tel que $f(p, 1-p) = c^2 (\gamma^2 + \delta^2)$. Avec cette valeur de p et avec $q = 1 - p$, on a donc ${}^tAA = G$. Les valeurs de p et q sont d'ailleurs faciles à expliciter, l'équation étant du second degré. \square

Pour finir

Ainsi, on constate un changement à partir de la dimension 5. Il serait évidemment intéressant d'aller un peu plus loin et d'en fournir une explication ; peut-être des lecteurs de L'OUVERT qui sauront rapprocher ce résultat d'autres phénomènes analogues nous feront-ils part de leurs réflexions. En guise de conclusion, nous nous contenterons de proposer une petite généralisation. Au lieu de travailler avec un nombre de vecteurs égal à la dimension de l'espace, on aurait pu s'intéresser à n vecteurs en dimension d . Appelons donc $Q(n, d)$ la propriété suivante :

$Q(n, d)$: Pour tout système de n vecteurs dans \mathbb{R}^d , faisant deux à deux des angles aigus, il existe une base orthonormée de \mathbb{R}^d dans laquelle les nd composantes de ces n vecteurs sont positives.

Nous avons vu que $Q(2, 2)$, $Q(3, 3)$ et $Q(4, 4)$ sont vraies, et notre proposition 1 établit que $Q(n, d)$ est fausse pour $n \geq 5$ et $d \geq 3$. Qu'en est-il des autres couples (n, d) ? Cette question est laissée en exercice aux lecteurs. Les cas où $d = 2$ sont faciles. Parmi les autres cas, seul celui où $(n, d) = (4, 3)$ n'est pas une application du travail déjà fait. Trancher $Q(4, 3)$ réclamera un peu d'initiative au lecteur, sans toutefois nécessiter d'idée véritablement nouvelle. Et puisque ce problème concerne quatre vecteurs en trois dimensions, il est bien visuel !

Bibliographie

- [1] P.H. DIANANDA (1962), *On non-negative forms in real variables some or all of which are non-negative*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **58**, 17–25.
- [2] M. HALL (1962), *Discrete problems*, in A Survey of Numerical Analysis, John Todd ed., McGraw-Hill.

Pierre BAUMANN et Michel ÉMERY
Institut de Recherche Mathématique Avancée
CNRS et Université Louis PASTEUR
7, rue René DESCARTES, 67084 Strasbourg Cedex
baumann@math.u-strasbg.fr
emery@math.u-strasbg.fr

LA MÉTHODE DE TARTAGLIA

Comment utiliser les volumes pour résoudre une équation du 3^e degré

Nicole BOPP

Résumé : Ce texte donne une description, utilisant le symbolisme algébrique, de la méthode géométrique expliquée en langage courant dans le roman *Le maître des nombres* publié en 1999 par D. JÖRGENSEN et montre la figure permettant de comprendre cette méthode.

Mots-clés : Équation du troisième degré - Gnomon - Parallélépipède rectangle - Tartaglia - Volume.

Introduction

La méthode décrite ici est extraite de l'excellent roman de Dieter JÖRGENSEN ([5]) qui raconte la vie de TARTAGLIA (1499–1557). Dans ce roman on trouvera une description de la querelle entre celui-ci et CARDAN, querelle dramatisée par l'organisation à l'époque de concours entre savants. L'auteur prend le parti de TARTAGLIA qui assurait avoir transmis à CARDAN sous le sceau du secret sa méthode pour résoudre les équations du troisième degré de la forme $x^3 + px = q$ (voir par exemple [3] page 100–104). Dans le roman, l'auteur suggère que c'est une méthode géométrique généralisant la méthode du *gnomon* qui aurait permis à TARTAGLIA de résoudre son problème. Bien qu'aucun texte ne permette de confirmer cette hypothèse, l'utilisation d'une méthode géométrique pour obtenir un résultat général était naturelle pour les gens de cette époque. En effet ils ne disposaient pas encore du formalisme algébrique et le secret de TARTAGLIA aurait d'ailleurs été transmis sous la forme de vers (voir [4] page 145).

Dans les abrégés d'histoire des mathématiques, on trouve généralement citée une méthode algébrique (voir par exemple ([1] page 102). C'est pourquoi j'ai écrit ce texte pour donner une description, utilisant le symbolisme algébrique, de la méthode géométrique expliquée en langage courant dans le roman de JÖRGENSEN et surtout pour montrer la figure permettant de la comprendre.

1. Équation de degré 2 et *gnomon*

1.1. La question posée

Il s'agit de résoudre le problème suivant posé en langage géométrique :

*Un carré et quelques-uns de ses côtés sont égaux à un nombre donné.
Quel est le côté de ce carré ?*

En utilisant le formalisme algébrique l'énoncé de ce problème s'écrit :

Des nombres b et c sont donnés. Trouver x tel que

$$(1) \quad x^2 + bx = c .$$

Vu l'énoncé du problème initial il est clair que b est un nombre entier. En tout cas on étudie ici le problème lorsque b et c sont des nombres positifs.

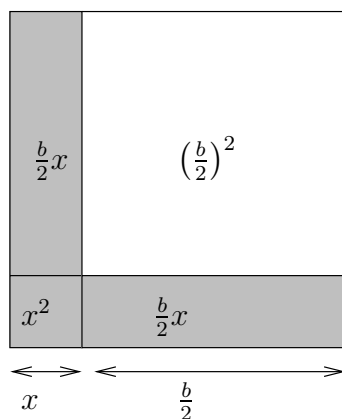
1.2. La résolution

La solution géométrique remonte à AL KHWARIZMI (début du IX^{ème} siècle).

On inscrit un petit carré de côté x dans un coin d'un grand carré de côté $x + \frac{b}{2}$ (c'est là que se trouve l'astuce!) comme dans la figure ci-dessous. La surface grisée (qui s'appelle un gnomon, voir [2] page 48 pour une explication de ce terme) est égale à

$$x^2 + 2 \times \frac{b}{2} x ,$$

donc égale à c , si x vérifie l'équation (1).



La surface non grisée est un carré de côté $\frac{b}{2}$. Par conséquent la surface du grand carré est connue. Elle est égale à

$$c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 .$$

On en déduit le côté du grand carré par une simple extraction de racine carrée et on obtient finalement

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} .$$

Evidemment ici on recherche une solution positive et il en existe une seule car b et c sont supposés positifs¹.

2. Méthode de Tartaglia (1535 ?) pour résoudre une équation de degré 3

En langage géométrique, il s'agit de résoudre le problème suivant :

*Un cube et quelques-uns de ses côtés sont égaux à un nombre donné.
Quel est le côté de ce cube ?*

¹On pourra trouver une construction géométrique des racines d'une équation du deuxième degré dans [1] page 102.

En utilisant le formalisme algébrique l'énoncé de ce problème s'écrit :

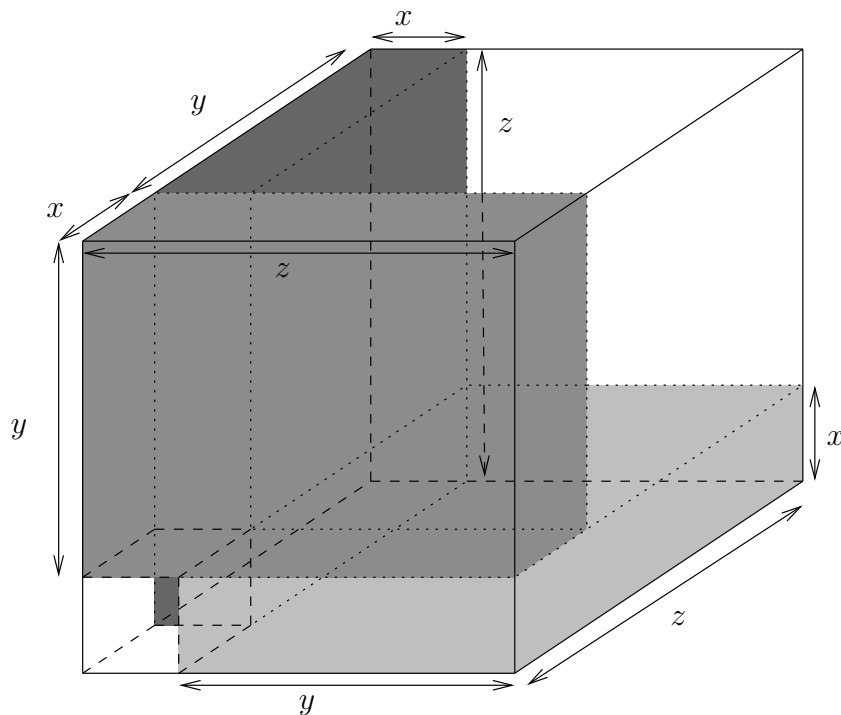
Des nombres p et q sont donnés. Trouver x tel que

$$(2) \quad x^3 + px = q .$$

Comme ci-dessus on étudie le problème pour p et q positifs. Dans ce cas on peut vérifier aujourd'hui très rapidement qu'il n'y a qu'une seule racine réelle et que celle-ci est positive.

On place un petit cube de côté x dans un coin d'un grand cube de côté z et on appelle y la différence $z - x$. Le solide grisé est la réunion de 3 parallélépipèdes (rectangles) de côtés x , y et z . Si on lui ajoute le petit cube de côté x on obtient un solide (en quelque sorte le « gnomon² » de TARTAGLIA) de volume

$$x^3 + 3xyz .$$



De plus le volume restant est un cube de côté y d'où la relation

$$z^3 = y^3 + (x^3 + 3xyz) .$$

Si on trouve y et z tels que $3yz = p$, on se retrouve dans une situation analogue à celle de l'équation du deuxième degré. En effet, si x est solution de (2), alors $x^3 + 3xyz$ est égal à q , le volume du gros cube est égal à $q + y^3$ d'où la relation

$$q + y^3 = z^3 .$$

La question qui est alors posée est la suivante : peut-on résoudre le système

$$\begin{cases} yz = \frac{p}{3} \\ z^3 = q + y^3 \end{cases} \quad ?$$

²déjà décrit un siècle plus tôt par REGIOMONTANUS,

Comme ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} yz = \frac{p}{3} \\ z^6 - qz^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3, \end{cases}$$

il suffit de résoudre une équation du deuxième degré³ pour trouver z^3 puis d'extraire une racine cubique pour obtenir z . Et on finit en calculant y qui est égal à $\frac{p}{3z}$, puis x qui est égal à $z - y$. C'est, d'après JÖRGENSEN, la méthode de TARTAGLIA.

Poursuivons les calculs (ce que TARTAGLIA n'a certainement pas fait ainsi). L'équation du deuxième degré satisfaite par z^3 s'écrit

$$\left(z^3 - \frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

et admet donc comme racine positive

$$z^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} x &= z - y = z - \frac{p}{3z} \\ &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}. \end{aligned}$$

En multipliant le dénominateur et le numérateur de la fraction intervenant dans cette formule par

$$\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}},$$

qui est bien défini car $\frac{q}{2} < \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$, on obtient finalement la célèbre formule publiée par CARDAN en 1545 (mais probablement déjà connue de Scipione del FERRO)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}.$$

La suite de cette histoire conduira à introduire les nombres complexes. CARDAN, le premier, utilisera (avec réticences) dans ses calculs la racine carrée d'un nombre négatif mais c'est BOMBELLI qui, en 1572, introduira l'utilisation systématique des nombres complexes pour résoudre une équation du troisième degré même quand la racine carrée de la formule de CARDAN–TARTAGLIA est celle d'un nombre négatif et qui déterminera dans ce cas les autres racines réelles de l'équation (voir [1] page 107).

³La résolution d'une telle équation était connue même dans les cas différents de celui exposé au paragraphe 1. Les contemporains de TARTAGLIA pouvaient la trouver dans la *Suma* de Luca PACIOLI parue en 1494.

Bibliographie

- [1] J. BAUDET (2002), Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques, *Vuibert* .
- [2] A. DAHAN-DALMEDICO & J. PFEIFFER (1986), Une histoire des mathématiques, Routes et dédales, *Points Seuil* .
- [3] COMMISSION INTER-IREM, ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES (1987), Mathématiques au fil des âges, *Gauthier-Villars* .
- [4] COMMISSION INTER-IREM, ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES (1998), Images, Imaginaires, Imaginations, *Ellipses*.
- [5] D. JÖRGENSEN (1999), Le maître des nombres (roman)⁴, *Traduction française, Phébus (2002)*.

On trouvera sur le site

www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/

des biographies des mathématiciens cités dans ce texte ainsi qu'une description assez détaillée de l'histoire de la résolution des équations de degré inférieur ou égal à 4.

Je remercie Jean-Pierre Friedelmeyer qui m'a évité certains contre-sens historiques mais qui n'est en rien responsable de ceux qui pourraient subsister dans ce texte.

Nicole BOPP
IUFM d'Alsace
IRMA - Université Louis Pasteur
Strasbourg
bopp@math.u-strasbg.fr

⁴Cet ouvrage est vraiment un roman, avec histoire d'amour et description de la vie vénitienne de l'époque, et ne comporte aucune référence bibliographique.

LA DURÉE DES SAISONS

Jean-Pierre DAROU

Résumé : Cette activité a été réalisée par des élèves de seconde qui ont choisi l'option sciences. Un premier paragraphe présente l'option sciences. Je développe ensuite les connaissances nécessaires à ce travail : lois de Kepler, définition et construction d'une ellipse à l'aide d'un logiciel de géométrie, éléments orbitaux de la terre, définition des saisons. J'explique enfin comment les élèves ont pu calculer les durées des saisons par une méthode approchée n'utilisant que la proportionnalité, comment ils ont vérifié la remarquable précision de leurs résultats et comment ils pourraient examiner si la même méthode s'applique aux autres planètes.

Mots-clés : Option sciences - TPE - Modélisation - Proportionnalité - Lois de Kepler - Loi des aires - Ellipse - Périhélie - Aphélie - Saisons - Solstice - Equinoxe - Geogebra - Cabri.

*« Bientôt nous plongerons dans de froides ténèbres ;
Adieu vive clarté de nos étés trop courts ! ».*

Chanson d'automne, Charles BAUDELAIRE

Si l'été paraît trop bref aux yeux du poète comme, sans doute, à ceux de nos élèves ou étudiants, il n'en est pas moins, dans l'hémisphère nord, la plus longue des quatre saisons. Des élèves de seconde qui suivent l'option sciences ont pu le vérifier !

1. L'option sciences

Cette option existe au lycée Jean Monnet à Strasbourg depuis 1997, elle s'ajoute aux options officiellement offertes (sciences économiques et sociales, langues vivantes) sous forme d'un projet d'établissement. L'APMEP a œuvré sans succès pour qu'elle soit reconnue et proposée sur le plan national, elle ne peut donc exister que localement avec le soutien des autorités ; elle est notamment très répandue dans l'académie de Montpellier. Les élèves y reçoivent un enseignement supplémentaire d'une heure dans chacune des trois disciplines scientifiques (sciences de la vie et de la terre, physique-chimie et mathématiques) ; les trois heures sont groupées pour permettre au besoin des activités plus longues (visites ou conférences notamment). Il n'est évidemment pas nécessaire de l'avoir choisie pour poursuivre ensuite en classe de première S. L'objectif est d'entraîner les élèves à être plus autonomes, à mener une recherche sans être beaucoup guidés, à faire appel à leur imagination et à leur créativité. Nous privilégions les activités communes à au moins deux des trois disciplines sur des thèmes proposés par les professeurs. Je m'étais entendu avec ma collègue de physique sur celui de l'étude simplifiée de la durée des saisons.

L'option sciences permet d'ailleurs de préparer les élèves aux travaux personnels encadrés (les TPE) qu'ils auront à présenter en classe de première comme épreuve anticipée du baccalauréat. La durée des saisons pourrait être la composante mathématique d'un sujet choisi dans les thèmes généraux et sous-thèmes :

- L'homme et la nature, recherche de régularités, de lois. Lois de la gravitation.
- Modèles, modélisation, le modèle outil de simplification. Rotation des planètes.
- Modèles, modélisation, le modèle outil de compréhension. Lois de la gravitation.

2. Les lois de Kepler

Les trois lois de Kepler¹ avaient été énoncées en physique, restreintes aux planètes du système solaire. Les deux premières ont été publiées en 1609, la troisième en 1618. Elles s'étendent à tous les objets gravitant autour d'un astre central à condition de pouvoir négliger les perturbations dues aux attractions de ces objets entre eux.



Portrait de Kepler (1571-1630)²
offert à son ami Mathias Bernegger (1582-1640)
qui fut recteur de l'université de Strasbourg.³

- Première loi ou loi des orbites : Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers⁴.

- Deuxième loi ou loi des aires : Lorsque la planète décrit son orbite, la durée du parcours est proportionnelle à l'aire balayée par le segment qui la joint au Soleil⁵.

- Troisième loi ou loi des périodes : Si on désigne par T la période de révolution d'une planète et par a le demi-grand axe de l'ellipse qu'elle parcourt, alors :

$$T^2/a^3 = k,$$

où k est une constante.

Les élèves avaient déjà utilisé en physique la loi des périodes, ils l'avaient appliquée à des calculs de périodes de révolution de différentes planètes dont les distances au soleil étaient données. Je me souviens à ce propos du désarroi des candidats passant leur épreuve de TPE devant une question posée par un collègue de physique : « Que vaut k si on prend comme unités l'année et l'unité astronomique ? » (En admettant que l'unité astronomique soit sensiblement égale au demi grand-axe de la Terre)

Ils n'avaient pas fait beaucoup d'usage de la loi des orbites et de celle des aires, considérant que les orbites sont à peu près circulaires. La déqualification récente de Pluton au rang de planète naine par l'Union Astronomique Internationale permet d'éviter le cas le plus déroutant !

De l'ellipse ils connaissaient les définitions des demi-axes, de la distance focale et de l'excentricité. Ils avaient calculé l'excentricité de quelques planètes et avaient constaté qu'elle est effectivement le plus souvent très faible.

Si la terre avait une orbite circulaire les quatre saisons auraient exactement la même durée d'environ 91,3 jours et débuteraient presque toujours aux mêmes dates : 21 mars, 20 juin,

¹Kepler est né à Weil der Stadt, ville située à 30 km à l'ouest de Stuttgart et à 140 km à l'est de Strasbourg.

²Cet extrait de tableau provient de l'Histoire Générale des Sciences, Presses Universitaires de France, tome II, planche 21 (voir [2]).

³Pour connaître Mathias Bernegger, on lira sur Internet une étude de René Voltz (voir [4]).

⁴Plus précisément, le foyer est situé au centre de masse du système Soleil-planète.

⁵Cette loi est énoncée sous la forme que les élèves utiliseront. La figure de la page de couverture de ce numéro évoque un autre énoncé équivalent : Les aires balayées pendant des durées égales sont égales.

20 septembre et 20 décembre, malgré la petite perturbation due aux années bissextiles. Ils avaient consulté des calendriers et constaté qu'en fait les débuts des saisons peuvent s'écarter de ces dates de plusieurs jours. Pour expliquer cela, ils devaient abandonner l'approximation commode mais insuffisamment précise dont ils s'étaient contentés en physique. On trouve sur le site « Astronomie et mécanique céleste » ([6]) les dates suivantes : 19 au 21 mars pour le printemps, 19 au 22 juin pour l'été, 21 au 24 septembre pour l'automne et 20 au 23 décembre pour l'hiver⁶.

Je leur ai proposé de faire appel aux mathématiques dans l'espoir d'obtenir des résultats plus conformes à la réalité en leur donnant par la même occasion un bel exemple d'application de la loi des aires.

3. L'ellipse

La première tâche était de faire plus ample connaissance avec l'ellipse. La seule définition qui me semble accessible en seconde est celle basée sur la « méthode du jardinier ». Quelques planchettes de bois, deux punaises, une feuille de format A3, un bout de ficelle, en deux temps le tour (d'ellipse) est joué !

Les dessins suggèrent l'existence de symétries que les élèves peuvent justifier sans grande difficulté. Les trous faits par les punaises sont nommés foyers et notés F et F' . La droite (FF') coupe l'ellipse aux points A et A' , nous observons et justifions que la distance AA' est égale à la longueur de la ficelle. Lorsque M est un point de l'ellipse son symétrique par rapport à (FF') est aussi sur l'ellipse, lorsque M est un point de l'ellipse son symétrique par rapport à la médiatrice de (FF') est aussi sur l'ellipse, le milieu O de $[FF']$ est donc centre de symétrie. Ces petites démonstrations sont autant d'occasions d'utiliser les notions de médiatrice, de symétrie et les cas d'isométrie des triangles.

Il est un peu moins facile de montrer que AF est la plus petite distance d'un point de l'ellipse au foyer F et que $A'F$ est la plus grande. Soit P un point n'appartenant pas à la droite (AA') , tel que $FP \leq FA$.

Puisque $F'P < FP + FF'$, on a :

$$FP + F'P < 2FP + F'F \leq 2FA + F'F = AA'.$$

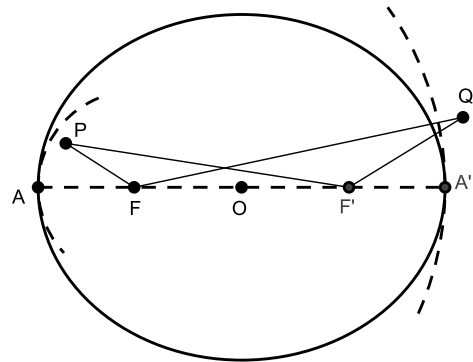
Le point P n'appartient donc pas à l'ellipse.

De même, soit Q un point n'appartenant pas à la droite (AA') , tel que $FQ \geq FA'$.

Puisque $F'Q > FQ - FF'$, on a :

$$FQ + F'Q > 2FQ - FF' \geq 2FA' - FF' = AA'.$$

Le point Q n'appartient donc pas à l'ellipse.



Les deux points d'intersection A et A' de l'ellipse avec son grand-axe (AA') sont donc respectivement le point le plus proche et le point le plus éloigné du foyer F . Deux occasions de manier les inégalités triangulaires !

Lorsque l'ellipse est la maquette de l'orbite d'une planète, le soleil occupe un des foyers ; plaçons-le en F , Les distances FA et FA' deviennent le *périhélie* et l'*aphélie* de cette planète.

⁶Ces dates sont données dans le calendrier grégorien et ne sont donc valables qu'à partir du 15 octobre 1582.

4. Quel logiciel choisir ?

Lorsque j'avais proposé cette activité à mes élèves, nous avons construit les figures et fait les calculs nécessaires avec Cabri-GéomètreII. J'ai découvert depuis Geogebra que j'ai préféré pour reprendre les constructions qui illustrent l'article et pour retrouver les résultats. C'est également une figure construite avec Geogebra qui illustre la page de couverture de ce numéro de l'Ouvert. Les deux logiciels possèdent des avantages différents, mais permettent l'un et l'autre de parvenir à des réalisations assez similaires.

Cabri-GéomètreII me semble plus convivial, la prise en mains est très rapide. La calculatrice est d'un emploi facile et affiche immédiatement les résultats. Les paramètres peuvent être modifiés d'un clic de souris. L'utilisateur a la possibilité de créer des macro-constructions de son choix.

Geogebra est un logiciel libre, donc très intéressant pour les élèves, il peut d'ailleurs être utilisé directement en ligne. Ce logiciel est compatible avec \LaTeX et donne des figures d'excellente qualité. Il possède un grand nombre de commandes qui complètent celles qu'on trouve dans la barre d'outil, elles remplacent les macro-constructions. Beaucoup concernent l'analyse, mais certaines sont très pratiques en géométrie. On peut, par exemple, tracer un arc d'ellipse d'extrémités données. On peut aussi calculer l'aire d'un secteur d'ellipse, ce qui permet de traiter ce sujet en suivant une autre méthode, j'y reviendrai après avoir présenté celle proposée aux élèves. Cependant, il semble que la liste des commandes soit figée, on ne peut pas en créer de nouvelles. Il est également facile d'attacher des images aux figures, procédé que j'ai beaucoup utilisé ici et que je préciserai en commentaire du schéma illustrant la définition des saisons.

Un autre logiciel souvent utilisé en lycée est GeoplanW. Avec la version que je possède, le tracé de l'ellipse peut être obtenu comme lieu de points, mais ce lieu n'est pas utilisable pour poursuivre la construction.

5. Maquette de l'orbite d'une planète

La connaissance du périhélie et de l'aphélie détermine une ellipse et devrait donc suffire pour la tracer. Travaillant avec Cabri, mes élèves avaient eu une mauvaise surprise, le logiciel ne permet pas de procéder directement ainsi. Il lui faut cinq points, aucun outil ne permet d'utiliser les axes, le centre ou les foyers. Pourquoi 5 points ? Difficile de répondre à un élève de seconde qui ne connaît pas l'équation générale d'une conique. Nous avons seulement pu observer qu'avec un nombre inférieur de points la forme de la courbe n'est pas stable et n'est même pas toujours une ellipse. Nous avons donc utilisé de nouveau la définition pour examiner sur le papier comment obtenir à l'aide de la règle et du compas les 5 points exigés. Nous avons ensuite appliqué la méthode avec le logiciel.

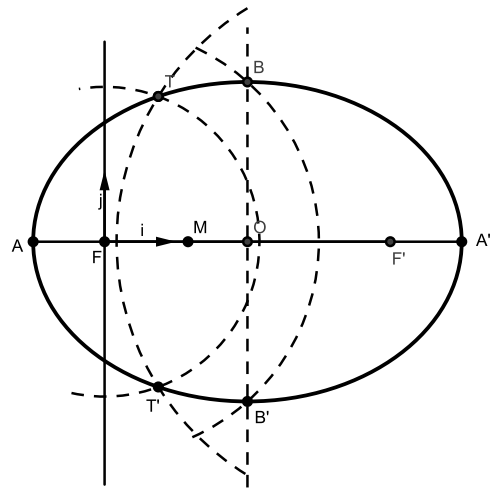
Geogebra dispose d'une commande « *Ellipse[Foyer,Foyer,Demi-grand axe]* » qui permet d'éviter cette construction. Avec Cabri on pourrait d'ailleurs obtenir l'équivalent de cette commande en réalisant une macro-construction⁷. Je pense cependant qu'il est instructif de montrer comment parvenir au tracé avec le seul outil de base « *Conique définie par cinq points.* » J'indiquerai ensuite comment une commande de Geogebra permet d'obtenir directement l'orbite d'une planète.

Même avec un logiciel, il est plus facile de commencer la construction en prenant des valeurs nettement différentes pour le périhélie et l'aphélie, il sera possible de les modifier ensuite, la figure sera automatiquement actualisée.

⁷On trouve des explications détaillées et de nombreuses autres macro-constructions concernant les coniques dans la brochure éditée par l'APMEP et rédigée par Roger Cuppens ([3]).

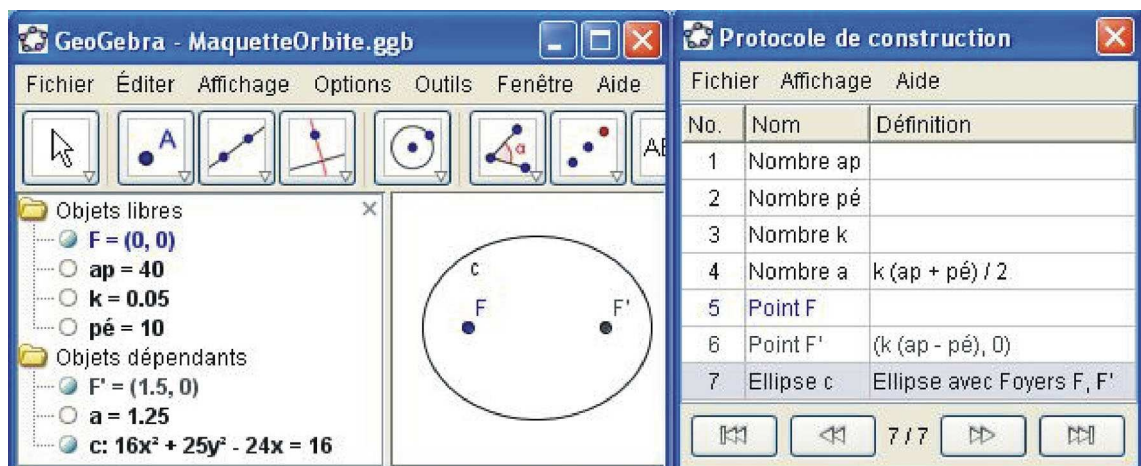
La figure ci-contre montre comment tracer une ellipse où $FA = 1$ et $FA' = 5$.

On utilise un repère de centre F . Après avoir reporté sur l'axe Ox les points A et A' d'abscisses respectives -1 et 5 , on place le milieu O de $[AA']$ puis le symétrique F' de F par rapport à O . Le cercle de centre F et de rayon OA coupe la perpendiculaire en O à $[AA']$ en deux points B et B' appartenant à l'ellipse. Ce sont les extrémités du petit axe. Pour déterminer un cinquième point, il suffit de choisir un point M n'importe où sur $[FF']$, le cercle de centre F et de rayon MA coupe le cercle de centre F' et de rayon MA' en deux points T et T' qui appartiennent à l'ellipse puisque la somme de leurs distances aux foyers est égale à AA' .



On dispose ainsi des cinq points indispensables au tracé réalisé à l'aide de l'outil « Conique ». On pourrait aussi utiliser l'outil « Lieu » et obtenir l'ellipse comme réunion des lieux de T et de T' lorsque M parcourt $[FF']$, toutefois cette méthode ne permet de poursuivre l'activité qu'avec un logiciel sachant tracer l'intersection d'un lieu avec une droite puisqu'il faudra ensuite déterminer les sommets d'un polygone inscrit dans l'ellipse. Cette construction est valable aussi bien avec Cabri-GéomètreII qu'avec Geogebra.

Pour modéliser l'orbite d'une planète on remplace les valeurs 1 et 5 de FA et FA' par les valeurs respectives du périhélie et de l'aphélie de la planète, mais il sera nécessaire de les multiplier par un coefficient de réduction k pour que l'ellipse reste visible sur l'écran. Avec Geogebra on peut obtenir le tracé plus facilement grâce à la commande : $Ellipse[F, F', a]$. Les copies d'écrans reproduites ci-dessous montrent comment obtenir une orbite où l'aphélie, le périhélie et le coefficient k valent respectivement 40, 10 et 0,05.



Pour obtenir l'orbite de la Terre on utilise les valeurs, en millions de kilomètres, de l'aphélie et du périhélie : $ap = 152,1$ et $pé = 147,1$. La valeur de k dépend de la taille de l'écran ; pour la figure utilisée dans le paragraphe 8, afin de calculer les durées des saisons terrestres de l'hémisphère nord, j'ai choisi $k = 0,025$. Les élèves pourront calculer l'échelle de la maquette ainsi obtenue.

6. Les saisons

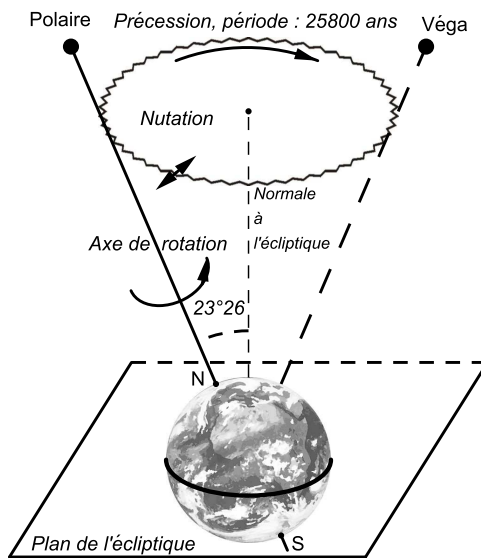
Comme chacun le sait, la nuit la plus courte de l'année, celle de la Saint-Jean et de la fête de la musique, marque le début de l'été ; nous fêtons alors le *solstice d'été*. L'hiver commence avec la nuit la plus longue, au moment du *solstice d'hiver* et nous sommes aux *équinoxes* lorsque la nuit et le jour ont exactement la même durée. Ainsi les nuits sont en moyenne à peu près aussi courtes au printemps qu'en été et aussi longues en automne qu'en hiver, cependant l'inertie thermique fait que l'été est bien la plus chaude des saisons et que l'hiver est bien la plus froide.

Les saisons ne sont pas partout et toujours définies ainsi. En Orient les solstices et les équinoxes sont les milieux des saisons. On dit en anglais « *midsummer* » pour « solstice d'été », ce qui fait penser que cette date a dû être considérée comme le milieu de l'été. La comédie féerique de Shakespeare « *A Midsummer Night's Dream* » se déroule durant la nuit de la Saint-Jean. Il importe donc, indépendamment des usages, de donner des définitions précises des quatre saisons en s'appuyant sur des phénomènes astronomiques réguliers et bien déterminés.

Les principales caractéristiques de l'orbite de la Terre avaient été définies en physique. On avait aussi signalé aux élèves le phénomène de *précession* dû au renflement équatorial de la terre. L'axe de la terre ne garde pas toujours la même direction mais décrit en 25800 ans un cône d'axe perpendiculaire au plan de l'écliptique dont le demi-angle au sommet mesure $23^\circ 26'$. Ce mouvement est similaire à celui décrit par l'axe d'une toupie ; de plus il se combine avec de faibles oscillations périodiques, les *nutations*, dont la principale a une amplitude de $20''$ et une période d'environ 19 ans.

La figure ci-contre illustre la précession et les nutations.

Pour que les nutations puissent être visibles, leurs amplitudes et leurs périodes ont été considérablement exagérées. Dans environ 12000 ans Véga, dans la constellation de la Lyre, sera l'étoile qui montrera le nord. Véga est une des étoiles les plus brillantes du ciel, sa magnitude apparente est égale à 0 alors que l'étoile polaire a pour magnitude 2. L'échelle des magnitudes est une échelle logarithmique où une étoile 2,5 fois moins brillante possède une magnitude supérieure d'une unité. On calcule ainsi que Véga est environ 6,25 fois plus brillante que l'étoile Polaire.



Pour ne pas sortir du cadre d'une étude simplifiée, nous avons négligé la précession et les nutations. La première n'a d'incidence qu'à très long terme, les secondes ont une amplitude négligeable. Nous avons considéré que l'axe de rotation de la Terre et, par conséquent, le plan de l'équateur gardent une direction fixe.

Les élèves avaient vu que c'est cette inclinaison d'environ $23^\circ 26'$ de l'axe qui explique l'existence des saisons et non la petite variation de distance de la Terre au Soleil qui joue un rôle minime et ne pourrait d'ailleurs pas donner d'explication cohérente pour les deux hémisphères. On constate sur la figure qui suit que la durée et l'intensité du rayonnement

solaire sont effectivement maximales au solstice d'été et minimales au solstice d'hiver.

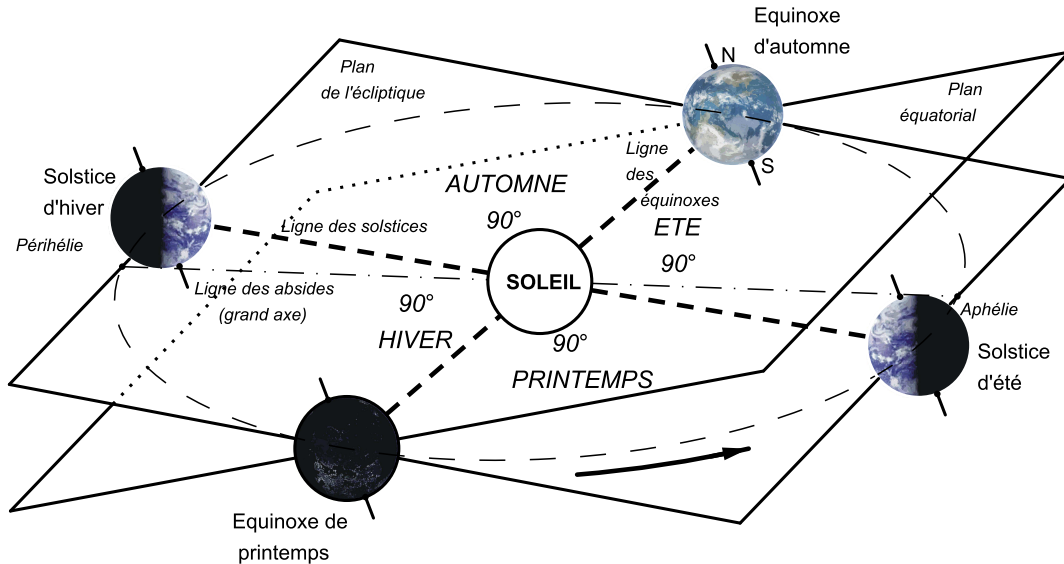


Figure illustrant les saisons⁸

L'intersection du plan parallèle au plan de l'équateur passant par le Soleil avec le plan de l'écliptique est la *ligne des équinoxes* (ou la ligne des nœuds). La Terre coupe cette ligne aux équinoxes de printemps et d'automne. L'axe de la terre est alors orthogonal à la ligne des équinoxes et la zone éclairée par le Soleil est une demi-sphère limitée par un grand cercle contenant les deux pôles et située dans un plan également orthogonal à la ligne des équinoxes, aux deux équinoxes le jour a donc la même durée que la nuit. Le moment précis où la Terre traverse la ligne des équinoxes au printemps est appelé *point vernal*⁹. Par définition, c'est à cet instant que débute le printemps¹⁰. La droite du plan de l'écliptique perpendiculaire à la ligne des équinoxes est la *ligne des solstices*. La Terre la traverse aux solstices d'été et d'hiver.

L'année *tropicque*¹¹, d'une durée de 365,24 jours environ, est la période écoulée entre deux équinoxes de printemps successifs, elle correspond donc une rotation de 360° de la Terre autour du Soleil. Le début de chacune des trois autres saisons est ainsi exactement défini par la position de la Terre lorsqu'elle a effectué, autour du soleil, une rotation de 90° par rapport à la position qu'elle occupait au début de la saison précédente.

⁸Les photos de la Terre, découpées au préalable avec un logiciel de dessin, ont été insérées puis attachées aux quatre extrémités I, J, K et L de deux diamètres conjugués de l'ellipse représentant l'orbite. Leur rayon est un objet libre r . Pour cela, après avoir placé l'image à un emplacement quelconque, on ouvre le menu « Propriétés » où on détermine les positions de trois des quatre coins. Par exemple, pour l'image attachée au point I, on donne au coin 1, coin inférieur gauche, la position : $I + (-r, -r)$. On procède de manière similaire pour tous les coins des différentes images. Ainsi il n'y aura pas à se soucier des images si on doit modifier la figure. En changeant la valeur de r on adapte aisément leurs dimensions.

⁹Le mot latin ver, veris signifie printemps.

¹⁰Cette date n'est pas fixe et ne peut pas l'être puisque le nombre de jours de l'année tropique n'est pas entier. Pour une année donnée la méthode exposée ici ne permet pas de déterminer avec précision la date du début du printemps ou des autres saisons, elle ne permet que le calcul de leurs durées.

¹¹J'ai trouvé dans certaines références une différence entre année tropique et année vernale, j'ignore en quoi elle consiste, elle est négligeable.

Il reste à savoir comment situer les différentes saisons sur l'ellipse. Le grand axe de l'ellipse parcourue par la Terre s'appelle la *ligne des absides*. Actuellement la ligne des absides est proche de la ligne des solstices. Il en résulte que, dans l'hémisphère nord, au solstice d'été, la distance entre la Terre et le Soleil est presque maximale et qu'au solstice d'hiver cette distance est presque minimale. Cette situation est variable dans le temps, la ligne des absides tourne avec une période d'environ 21000 ans, ce phénomène s'appelle la précession climatique. Actuellement le passage de la Terre à son périhélie se produit vers le 3 janvier mais dans 10000 ans il aura lieu aux alentours du solstice d'été.

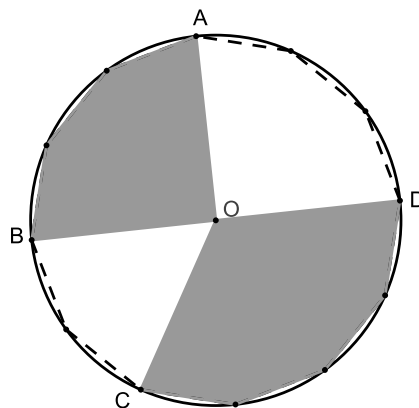
7. Un simple calcul de proportionnalité

La loi des aires de Kepler permet théoriquement d'obtenir les durées des saisons par un calcul de proportionnalité. Il reste cependant un problème de taille : comment calculer les aires des quatre secteurs d'ellipse ?

La solution sera d'approcher les aires cherchées par celles de polygones. Évidemment les élèves ne savent pas davantage calculer les aires de polygones quelconques, en revanche les logiciels le font (Cabri comme Geogebra). Triche-t-on ? Un peu, sans doute, mais l'élève sait qu'on peut calculer des aires de triangles et donc de polygones. Les calculs sont certainement compliqués, mais ils sont concevables, le logiciel devient ainsi un simple outil qui évite les tâches fastidieuses ; d'ailleurs, s'il permet d'effectuer ces calculs, c'est bien parce que quelqu'un a su programmer les formules nécessaires.

Ils ont peut-être entendu parler de la méthode d'Archimède pour le calcul approché de l'aire du disque puisqu'elle figure dans de nombreux livres de seconde parmi les thèmes d'ouverture. On peut d'ailleurs remarquer qu'il ne s'agit pas ici d'évaluer les aires, mais seulement d'obtenir une valeur approchée de leur rapport et qu'on obtient alors beaucoup plus facilement une bonne précision.

Par exemple, le rapport des aires des polygones grisés (figure ci-contre) obtenus en inscrivant dans le cercle un dodécagone est exactement égal au rapport des aires des deux secteurs circulaires OAB et OCD d'angles respectifs 90° et 120° . Pourtant les aires des polygones ne donnent que des valeurs approchées de celles des secteurs.



Cette propriété se généralise, à condition toutefois que les extrémités des arcs limitant les secteurs circulaires soient des sommets d'un polygone régulier.

La méthode prend corps. On approchera l'ellipse par un polygone centré en S , foyer occupé par le Soleil. On choisira pour cela un polygone dont les diagonales successives font entre elles des angles égaux et dont l'ensemble des sommets, situés sur l'ellipse, contient les solstices et les équinoxes.

8. Fin de la réalisation de la maquette

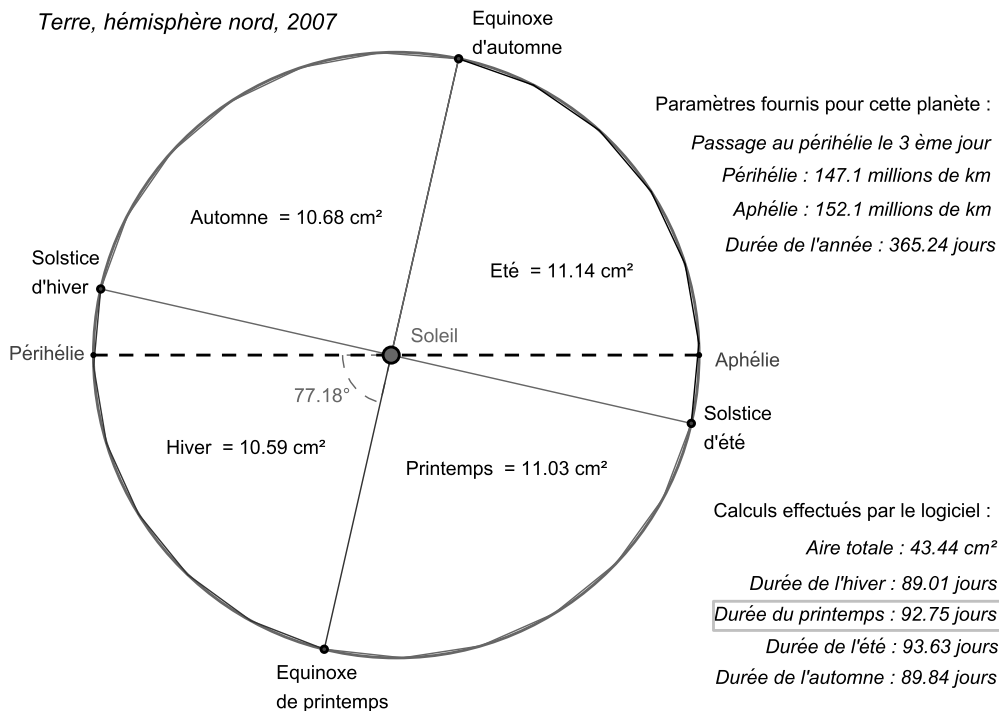
On reprend la maquette de l'orbite de la terre dessinée précédemment. L'hiver commence aux environs du 22 décembre et la Terre passe à son périhélie vers le 3 janvier (données de fin 2006, début 2007), on donne la valeur 3 au paramètre « *Passage au périhélie* » auquel on ajoute 10 pour avoir l'écart en jours entre le solstice d'hiver et le périhélie¹². L'angle orienté entre le périhélie et la position de la Terre à l'équinoxe de printemps est donc d'environ 77°. On peut ainsi placer sur l'ellipse les solstices et les équinoxes.

Quel nombre de côtés est-il judicieux de choisir pour le polygone utilisé afin de déterminer les aires approchées correspondant aux saisons ? On peut faire des essais qui montrent d'ailleurs que, dans le cas de l'ellipse, la propriété mentionnée à propos des secteurs circulaires ne s'applique plus. Les résultats obtenus dépendent du nombre de côtés du polygone, ce qui fait penser qu'ils ne donnent effectivement que des valeurs approchées. Avec un nombre trop important le gain de précision est faible et les tracés deviennent fastidieux. Comme il faut un multiple de quatre, certains élèves ont choisi la valeur 12, d'autres, plus persévérants, sont allés jusqu'à 24, c'est ce nombre que j'ai repris ici.

Une fois les 24 sommets dessinés, on trace les quatre polygones délimitant les différentes saisons et on demande au logiciel d'évaluer leurs aires. Le calcul :

$$\frac{\text{aire du polygone}}{\text{aire totale}} \times \text{durée de l'année}$$

donne, en jours, la durée de la saison représentée par le polygone.



¹²Les valeurs exactes sont : 22 décembre 2006 à 0 heure 21 pour le solstice d'hiver et 3 janvier 2007 à 19 heures 45 pour le périhélie, soit une différence de 12,78 jours et un angle de 12,6° ou plutôt -12,6° si l'angle est orienté comme sur la figure. L'angle avec l'équinoxe de printemps est donc de 77,4° ; la valeur indiquée sur la figure est légèrement différente car on n'a pas tenu compte de l'heure.

9. Des résultats d'une surprenante précision !

Le site [7] de l'IMCCE (institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides) donne sans nul doute des résultats fiables et permet de contrôler les valeurs obtenues, on trouve en effet dans la rubrique « *Astronomie pour tous - Saisons* » les dates des débuts des saisons de l'an -4000 à l'an 2500. Les heures sont données en Temps Universel, on peut lire :

Hiver	: 22.12 2006 à 00 h 21	Printemps	: 21.03.2007 à 00 h 07
Été	: 21.06.2007 à 18 h 06	Automne	: 23.09.2007 à 09 h 50
Hiver	: 22.12.2007 à 06 h 07		

Le site PGJ Astronomie [8] permet le calcul de la durée écoulée entre deux dates données.

On y trouve, en arrondissant au 1/100 :

Hiver : 89,02 jours Printemps : 92,76 jours Été : 93,63 jours Automne : 89,84 jours

Alors que nous avons obtenu :

Hiver : 89,01 jours Printemps : 92,75 jours Été : 93,63 jours Automne : 89,84 jours

Cette remarquable précision a bien sûr étonné les élèves ; je l'étais aussi un peu, bien qu'on puisse s'y attendre, compte tenu de la faible excentricité de la Terre. Je me suis d'ailleurs demandé si une méthode similaire n'est pas appliquée par les concepteurs des sites que j'ai cités.

On peut continuer à faire fonctionner le modèle en modifiant des paramètres. Le paramètre « *Passage au périhélie* » indique le nombre de jours écoulés entre le début de l'année et la date du périhélie. Il est facile de le changer, par exemple, en lui donnant la valeur 185, on peut examiner ce qui se passe lorsque la Terre passe à son périhélie en été (c'est à peu près la situation actuelle de l'hémisphère sud), on obtient un résultat auquel on pouvait s'attendre : l'été devient la plus courte des saisons. On peut tout aussi facilement constater que l'été aura chez nous une durée maximale de 94,07 jours lorsque la Terre passera à son périhélie au milieu de l'hiver, vers le 4 février. L'angle entre le périhélie et la position de la Terre à l'équinoxe de printemps sera alors d'environ 45° . Cela se produira vers l'an 3300¹³.

On constate ainsi que la durée des saisons dépend de l'angle entre l'axe des absides et la ligne des solstices, en effet les aires des quatre secteurs d'ellipse varient légèrement en fonction de cet angle. Le principal facteur entraînant des différences d'aires de ces quatre secteurs, donc des différences de durées des saisons, est cependant l'excentricité de l'ellipse. Ce paramètre est invariable pour la Terre, on peut cependant examiner son effet en choisissant pour le périhélie et l'aphélie des valeurs fictives ou, plus concrètement, celles d'autres planètes du système solaire.

10. Les saisons de la planète rouge

Il est également très facile d'utiliser le modèle pour étudier les saisons sur la planète Mars¹⁴. Il suffit, sur Geogebra, de modifier les quatre objets libres : *année*, *aphélie*, *périhélie*, *passage au périhélie* et d'adapter le coefficient k .

¹³On a déjà vu que la précession climatique a une période de 21000 ans, un angle de 22° correspond ainsi à une durée d'environ 1300 ans. Il reste à s'assurer que c'est bien vers le futur. Bonne nouvelle, les longueurs des étés sont actuellement en train d'augmenter !

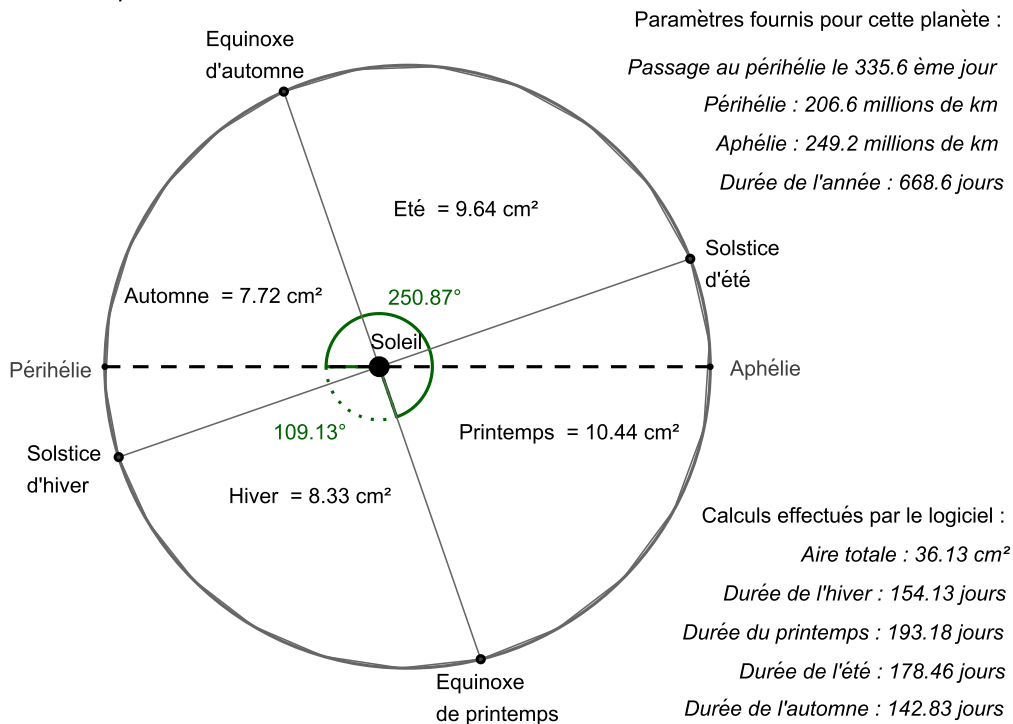
¹⁴L'étude concernant Mars n'avait pas été faite par les élèves, j'ai ajouté ce paragraphe, ainsi que les suivants, en rédigeant l'article.

L'axe de cette planète a une inclinaison comparable à celle de la terre (il est incliné de $25,1^\circ$ par rapport à la normale au plan de l'écliptique). L'aphélie de Mars est de 249,2 millions de kilomètres, son périhélie est de 206,6 millions de kilomètres, pour ces deux raisons les saisons y sont bien marquées. On obtient une maquette de l'orbite de Mars en prenant les valeurs 206,6 et 249,2 pour le périhélie et l'aphélie, la valeur $k = 0,015$ convenait aux figures qui suivent. Il reste à déterminer la position du périhélie en trouvant la bonne valeur du paramètre « *Passage au périhélie* ».

On appelle longitude solaire (notée en abrégé L_s) l'angle dont a tourné la demi-droite Soleil-Mars entre l'équinoxe de printemps pour l'hémisphère nord et le moment considéré. Il s'agit donc de connaître la longitude solaire du périhélie. Comme elle ne fait pas partie des éléments orbitaux essentiels, elle est rarement indiquée ; je l'ai finalement trouvée sur un livre en ligne [10] *The planet Mars : A history of observation and discovery*. Elle vaut $250,87^\circ$, cela donne un angle périhélie-printemps de $109,13^\circ$. On modifie donc le paramètre « *Passage au périhélie* »¹⁵ afin d'obtenir cette valeur. Il reste à changer la durée de l'année tropique qui dure environ 668,6 jours martiens¹⁶, à indiquer la longitude solaire du périhélie sur la figure et, bien sûr, à remplacer « Terre » par « Mars » dans le titre. Tout est en place, il n'y a plus qu'à lire les résultats.

Les durées calculées sont très proches de celles que j'ai obtenues grâce à plusieurs sources ([1] et [9]). Dans ces deux références on donne les valeurs arrondies : 154 ; 194 ; 178 et 143 jours martiens pour l'hiver, le printemps, l'été et l'automne alors que les valeurs trouvées, données au centième, sont respectivement : 154,13 ; 193,18 ; 178,46 et 142,83 jours. La précision est sans doute un peu moindre car l'excentricité de Mars est plus forte mais on a de nouveau trouvé, à l'aide de la maquette, des valeurs très proches de celles fournies par les spécialistes.

Mars, hémisphère nord, 2007



¹⁵Évidemment ce nombre, basé sur année terrestre de 365 jours, n'a, sur Mars, aucune signification.

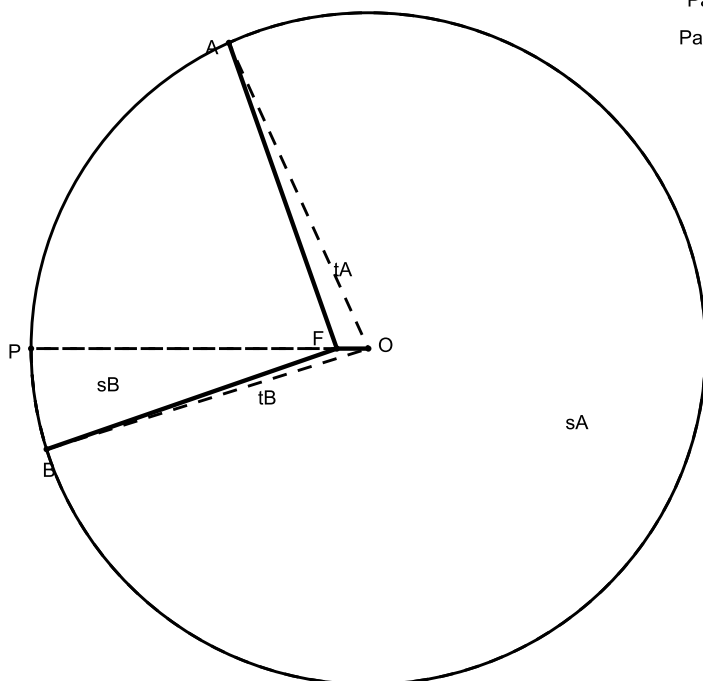
¹⁶Comme la période de rotation de Mars est de 24 heures et 37 minutes, cela correspond à 687 jours terrestres.

On remarque, sur la planète Mars, une très nette différence entre les durées des saisons chaudes et froides de l'hémisphère nord. Il y a 75 jours d'écart entre la période printemps-été et la période automne-hiver. On peut calculer qu'à son aphélie la distance de Mars au Soleil est supérieure de 20% à sa valeur au périhélie (environ 3% seulement pour la Terre). Contrairement à ce qui se passe sur Terre, cette différence d'éloignement a une influence très sensible sur les saisons. L'été est plus long dans l'hémisphère nord mais, Mars se trouvant alors proche de son aphélie, les températures y sont nettement plus froides que celles des étés de l'hémisphère sud. La calotte polaire sud fond souvent entièrement durant la période estivale, ce n'est pas le cas pour celle de la calotte polaire nord¹⁷.

11. Existe-t-il une méthode exacte ?

Geogebra offre toute une palette de commandes concernant les coniques. Je les ai essayées pour voir si on peut éviter d'avoir recours à une méthode géométrique approchée. On va voir que c'est effectivement possible mais on ne peut cependant pas parler de méthode exacte puisqu'on utilise les valeurs approchées des aires que donne le logiciel. La figure ci-dessous illustre cette nouvelle méthode, elle concerne de nouveau la planète Mars. Comme on l'a déjà vu, il suffirait de redéfinir quelques objets libres pour l'adapter à la Terre.

Mars, hémisphère nord, 2007. Autre méthode



Paramètres fournis pour cette planète :

Passage au périhélie le 335.6 ème jour

Périhélie : 206.6 millions de km

Aphélie : 249.2 millions de km

Année : 668.6 jours

Calculs effectués par le logiciel :

sgB = -1 sgA = 1

Automne ● n = 4

Été

Printemps

Hiver

Durée de la saison 4 : 142.16 jours

J'utilise un curseur qui permet de faire varier un objet libre n désignant la saison. On le configure pour qu'il ne prenne que des valeurs entières entre 1 et 4. Le Soleil se trouve au foyer F , le point A marque le début de la saison et le point B la fin, les segments $[FA]$ et $[FB]$ sont perpendiculaires. L'angle PFB est donné en degrés par : $n \times 90 - (date + 10) \times 360 \div 365$,

¹⁷Ces calottes sont formées de gaz carbonique gelé.

où *date* est la valeur du paramètre « Passage au périhélie » déterminée dans le paragraphe précédent. On peut ainsi situer la fin de chacune des saisons puis en déduire le début. Sur la figure, on lit $n = 4$, c'est l'automne.

La commande « Secteur[c,P,A] » donne l'aire sA du secteur d'ellipse centré en O , d'origine P et d'extrémité A , on obtient de même l'aire sB du secteur d'origine P et d'extrémité B . Les secteurs sont mesurés de l'origine P à l'extrémité, ici dans le sens trigonométrique, entre 0 et 360 degrés¹⁸. La commande « Aire[c] » donne l'aire e de l'ellipse. Il s'agit de calculer l'aire de la région délimitée par l'ellipse et les segments FA et FB . On place F à l'origine du repère, P et O sur l'axe des abscisses. On rencontre plusieurs cas selon la position des points A et B , le calcul dépend des signes sgA et sgB des ordonnées de ces points.

- L'aire de la région PFA s'obtient en additionnant à sA l'aire tA du triangle FOA car sgA est positif (il s'agit du secteur rentrant).
- L'aire de la région PFB s'obtient en soustrayant de sB l'aire tB du triangle FOB car sgB est négatif.

On soustrait l'aire de la région PFA à celle de PFB . Lorsque le résultat est négatif, comme c'est le cas sur la figure, la mesure de l'angle POB est supérieure à 360° , ce que le logiciel ne prend pas en compte. On corrige alors ce résultat en ajoutant l'aire e de l'ellipse. On écrit donc dans le champ de saisie :

- $sB + sgB \times tB - (sA + sgA \times tA)$ pour avoir une valeur provisoire sf , éventuellement négative, de l'aire cherchée.
- $Sf[sf > 0, sf, e + sf]$ pour obtenir, grâce à cette commande conditionnelle, la valeur définitive de l'aire représentant la saison.

On constate que cette méthode est assez complexe, je ne pense pas qu'on puisse la préconiser à l'intention des élèves !

Le tableau qui suit récapitule les résultats en les comparant à ceux trouvés dans les sites d'astronomie, il y a bien peu de différences. Pour la Terre, la méthode « exacte » s'avère même un peu moins précise¹⁹.

Saison	Terre			Mars		
	Polygones	Secteurs	Site/livre	Polygones	Secteurs	Site/livre
Hiver	89,01	88,99	89,02	154,13	154,07	154
Printemps	92,75	92,77	92,76	193,18	194,60	194
Été	93,63	93,65	93,63	178,46	177,73	178
Automne	89,84	89,82	89,84	142,83	142,16	143

12. Autres planètes, limite de validité du modèle

Après les études faites pour la Terre et pour Mars, on peut se demander s'il est judicieux de continuer à utiliser le même modèle avec les autres planètes du système solaire.

Les principaux facteurs conduisant à des phénomènes saisonniers plus ou moins marqués

¹⁸Dans les pays germaniques, les angles sont vus avant tout comme des secteurs circulaires. Geogebra ayant été conçu en Autriche, ils n'est pas surprenant qu'ils soient mesurés ainsi. L'expression « secteur rentrant » se traduit d'ailleurs en allemand par « erhabener Winkel », ce qui signifie au sens propre « angle sublime ou majestueux », c'est dire combien ces angles sont considérés !

¹⁹J'en ignore la raison, les valeurs des aires des secteurs d'ellipse données par Geogebra ne sont peut-être pas d'une très grande précision. Une étude plus poussée lierait ce problème à la résolution de l'équation de Képler, mais ce n'est plus à la portée des lycéens.

sont l'inclinaison sur l'axe, la distance au Soleil et ses variations dues à l'excentricité, la durée du jour liée à la période de rotation autour de l'axe, l'existence d'une atmosphère.

La modélisation utilisée suppose que l'inclinaison de l'axe de la planète est un facteur essentiel, elle prend également en compte l'excentricité mais les autres facteurs possibles sont négligés. Elle est donc valable pour la Terre et pour Mars où, de plus, les jours ont des durées voisines et courtes qui les distinguent bien des saisons. L'excentricité assez forte différencie, selon les hémisphères, les saisons de Mars. L'atmosphère de Mars étant ténue, son rôle régulateur est moindre, cela est ignoré mais n'a pas d'incidence majeure. Examinons brièvement les facteurs prépondérants des saisons sur les autres planètes²⁰.

Pour Mercure et Venus l'inclinaison sur l'axe est faible. Pour chacune de ces planètes l'élément déterminant est la durée du jour, du même ordre de grandeur que celle de l'année²¹ ; les variations jour-nuit prennent donc le pas sur les saisons. Ces variations sont particulièrement marquées sur Mercure qui ne possède pratiquement pas d'atmosphère, les écarts de température y sont considérables²².

L'axe de Jupiter est très peu incliné par rapport à la normale à l'écliptique alors que l'axe d'Uranus est presque dans le plan orbital, ces deux situations extrêmes conviennent mal au modèle. De plus la période de rotation de Jupiter, moins de 10 heures, a pour conséquence une dynamique complexe de l'atmosphère dont les effets peuvent s'apparenter à un phénomène saisonnier, mais ces saisons ne correspondent pas à la définition du modèle. Sur Uranus la position d'une région par rapport au Soleil n'évolue que lentement, les saisons seraient donc extrêmement longues.

En revanche le modèle pourrait s'appliquer à Saturne et à Neptune dont les axes ont des inclinaisons peu différentes de celle de la Terre. Cependant Saturne a une période de rotation brève, voisine de celle de Jupiter, et la présence d'anneaux constitue un nouveau paramètre qui pourrait avoir une certaine influence. Sur Saturne, Uranus et Neptune les éventuelles saisons sont encore mal connues. L'éloignement et les longues périodes de révolution n'ont pas permis de faire suffisamment d'observations.

On constate que le modèle envisagé a des limites de validité, qu'il ne prend pas en compte tous les paramètres possibles et qu'il serait aberrant de chercher à l'utiliser dans les situations pour lesquelles il n'est pas adapté. Il ne convient qu'à la Terre et à Mars.

13. Conclusion

Cette activité n'a demandé aucun calcul difficile, tous sont faits à l'aide d'un logiciel et l'outil mathématique essentiel est la proportionnalité. Peut-on en conclure qu'il n'y a presque pas de maths ? Je me permets cette question car on entend trop souvent cette opinion à propos des TPE. Les élèves qui préparent un TPE tombent facilement dans deux travers opposés : renoncer à toute activité mathématique car ils n'en voient pas dans le sujet qu'ils proposent ou tenter de présenter des notions trop savantes qu'ils ne peuvent pas comprendre.

Des élèves de seconde ont pu faire ici des mathématiques à leur portée ; ils ont découvert des figures géométriques nouvelles et simples à tracer, que ce soit avec un morceau de ficelle ou avec un logiciel de géométrie dynamique ; ils ont pu s'entraîner à voir dans l'espace ; ils

²⁰On trouvera des renseignements détaillés sur le site [11] .

²¹La période de rotation sidérale de Mercure est exactement égale aux deux tiers de la période de révolution sidérale mais le jour réel, durée d'exposition au Soleil, dure un peu plus d'une année. La période de rotation sidérale de Venus est de 243 jours, elle est rétrograde ; sa période de révolution sidérale est de 225 jours ; le jour réel dure près de deux mois.

²²La température nocturne descend à -183°C alors que la température diurne monte à 427°C .

ont trouvé des méthodes convaincantes de calcul approché ; ils ont constaté que le modèle obtenu est utilisable dans d'autres situations mais qu'il faut être conscient de ses limites. Citant encore Baudelaire, j'espère qu'ils ne penseront pas à propos des mathématiques :

« *Tout l'hiver va rentrer dans mon être : colère
Haine, frissons, horreur, labeur dur et forcé.* ».

Bibliographie

- [1] Jean AUDOUZE et Guy ISRAËL, *Le grand Atlas de l'astronomie*, Encyclopædia Universalis, 1986.
- [2] René TATON, *Histoire générale des sciences, tome II, la science moderne*, Presses Universitaires de France, 1969.
- [3] Roger CUPPENS, *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri-GéomètreII, tome 1*, Publication de l'APMEP, numéro 124, 1999.
- [4] René VOLTZ, *L'université impériale germanique (17^e siècle)* :
<https://www-physique.u-strasbg.fr/php/institut/histoire/dixseptieme.pdf>
- [5] *Théorie simplifiée des saisons* :
<http://www.astrosurf.com/lisais/lessaisons.html>
- [6] *Astronomie et mécanique céleste* :
<http://media4.obspm.fr/public/AMC/index.html>
- [7] *Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides* :
<http://www.imcce.fr/imccefr.html>
- [8] *PGJ Astronomie* :
<http://pagesperso-orange.fr/pgj/julien.htm>
- [9] *Mars aujourd'hui* :
<http://www.nirgal.net/todaysmars.html>
- [10] *The planet Mars : A history of Observation and Discovery* :
<http://www.uapress.arizona.edu/onlinebks/mars/chap04.htm>
- [11] TECHNO-SCIENCE.NET, *les saisons exotiques du système solaire* :
<http://www.techno-science.net/?onglet=articles\&article=24>

Jean-Pierre DAROU
Lycée Jean Monnet, Strasbourg
APMEP, régionale d'Alsace
jean-pierr.darou@ac-strasbourg.fr

QUELQUES PROPOS SUR LES FONCTIONS EN SECONDE

Groupe « fonctions » de l'IREM de Strasbourg¹

Résumé : Un groupe de recherche dont le nom comporte le mot « fonctions » doit naturellement s'intéresser à la notion de fonction. Celui de l'IREM de Strasbourg s'est penché sur l'introduction de cette notion importante en classe de seconde et sur son interaction avec les autres points du programme. Après avoir analysé le niveau des élèves en début d'année il propose une progression et des activités pour cette classe.

Mots-clé : Équation de courbe - Fonctions - Fonctions affines - Seconde - Lectures graphiques - Variations - Registres - Progression en spirale.

Introduction

La notion de fonction est centrale au lycée. Un élève de fin de seconde doit être habitué à utiliser les différents aspects de cette notion. En effet les exigences des programmes de première et terminale imposent une certaine maîtrise conceptuelle, graphique et calculatoire de la notion de fonction et de ses propriétés.

1. État des lieux

Etant donné qu'une première approche a été faite au collège il nous a semblé important de faire le bilan des acquis des élèves en début de seconde. Pour ce faire, un test a été donné à des élèves de divers lycées du Bas-Rhin (Lycée de Barr, Lycées Pasteur, Marc Bloch et international de Strasbourg). Sept classes étaient concernées (223 élèves). La durée du test était de vingt minutes et il s'est déroulé en début d'année, avant que la notion de fonction n'ait été abordée.

Énoncé

Q1.1 La société Rentacar loue des véhicules au tarif suivant : 23 € de prise en charge et 0,30 € par kilomètre. Soit x le nombre de kilomètres parcourus, exprimer le prix à payer $P(x)$ en fonction de x .

Q1.2 Imaginer une situation concrète permettant d'obtenir l'expression $F(x) = 5x$.

Q2.1 f est la fonction affine $x \mapsto 3x - 5$, représentée par la droite (d) . Calculer l'image de $-\frac{1}{3}$ par f .

Q2.2 Le point M de coordonnées $(3; 5)$ est-il sur la droite (d) ?

Q3 Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont affines.

$$f_1 : x \mapsto 5x ; \quad f_2 : x \mapsto \frac{2x}{3} + 1 ; \quad f_3 : x \mapsto \frac{2}{3x} + 4 ;$$

$$f_4 : x \mapsto 2x^2 + 3 ; \quad f_5 : x \mapsto 3 - 5x ; \quad f_6 : x \mapsto \sqrt{5x} - 2 .$$

¹Ont participé aux travaux de ce groupe : Marie-Agnès EGRET, Michèle HEYD, Claudine KAHN, Chantal MAETZ, Odile SCHLADENHAUFEN, Christian SCHULTZ, Dominique WEIL, Brigitte WENNER.

Bilan par question

	Bonne réponse	Mauvaise réponse ou pas de réponse
Q1.1	78 %	22 %
Q1.2	36 %	64 %

Pour la question **Q1.1** le taux de réussite dans les classes est compris entre 62 % et 95 %, et pour la question **Q1.2** entre 20 % et 47 %.

Dans la deuxième question, 7 % des élèves interrogés produisent une réponse où aucune expression de fonction n'apparaît (pas de variable) et 34 % ne répondent pas. L'énoncé de **Q1.2** a sans doute surpris beaucoup d'élèves mais le mauvais score peut aussi s'expliquer par une non compréhension de la dépendance entre deux grandeurs variables liées.

	Bonne réponse	Mauvaise réponse ou pas de réponse
Q2.1	49 %	51 %
Q2.2	22 %	78 %

Pour la question **Q2.1** le taux de réussite dans les classes est compris entre 26 % et 60 %.

13 % des élèves débutent le calcul mais ne le terminent pas, 14 % font un mauvais calcul et 21 % ne répondent pas. Mises à part les inévitables erreurs de calcul, il en sort que le mot « image » est mal interprété par la moitié des élèves.

Pour la question **Q2.2**, 17 % des élèves ont une démarche correcte utilisant un calcul et répondent de manière cohérente à la question ; 5 % font une représentation graphique correcte et répondent à la question. Les 78 % de mauvaises réponses se décomposent en : 6 % où la droite est mal tracée, 38 % où la réponse est fausse (mauvaise démarche de calcul ou justification incohérente dans la plupart des cas) et enfin 33 % sans réponse.

On peut constater que le lien entre le calcul et la représentation graphique n'est fait que dans 17 % des cas. Ce score qui peut, a priori, paraître très faible s'explique par le fait qu'au collège l'accent n'est pas mis sur ce point. Il appartient donc à l'enseignant de développer cet aspect en classe de seconde.

Q3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Pourcentage de bonnes réponses	41 %	75 %	23 %	25 %	81 %	64 %

Le taux de non réponse varie entre 5 % (pour f_2 et f_5) et 11 % (pour f_1 et f_3).

On peut noter que 4 % des élèves reconnaissent en f_1 une fonction linéaire, sans préciser si elle est affine ou non.

En croisant les réponses aux différentes questions on constate que :

- Seuls 2 % des élèves répondent correctement aux six questions (4 % si on se limite aux cinq dernières fonctions). Ce très faible taux de réussite s'explique sans doute en partie par la non reconnaissance de la forme « $ax + b$ » dès que a et b ne sont plus entiers (naturels). C'est particulièrement remarquable pour f_6 , où un élève sur trois n'arrive pas à identifier $a = \sqrt{5}$ et $b = -2$.
- 65 % des élèves disent que les fonctions f_2 et f_3 sont toutes les deux affines. La distinction entre $2x/3$ et $2/(3x)$ n'est pas perçue dans cette situation.
- Enfin 34 % des élèves affirment que les fonctions affines sont les cinq dernières. Pour eux, il semblerait que affine soit synonyme de non linéaire.

Quelles conséquences pour l'enseignement en seconde ?

Il ne s'agit évidemment pas de remettre en cause le travail fait par les enseignants en classe de troisième : ils ont leurs propres objectifs et trop peu d'heures pour les atteindre. Trois axes peuvent être dégagés en ce qui concerne le travail des élèves en seconde.

- Tout d'abord, il est indispensable de continuer à travailler la reconnaissance de forme. Cet aspect du travail n'est évidemment pas spécifique aux chapitres portant sur les fonctions. Si ce point est négligé en classe de seconde, les élèves ne dériveront $x^2/2$ qu'en utilisant la dérivée d'un rapport, ou encore développeront $(x-1)(x+1)$ et calculeront son discriminant pour trouver les racines.
- Ensuite, dans les chapitres traitant des fonctions, il faut particulièrement insister sur le lien entre l'aspect géométrique (point sur une courbe) et l'aspect analytique (coordonnées vérifiant une équation de la courbe). Ce lien, qui semble tellement évident aux enseignants, n'est pas du tout perçu par une majorité d'élèves arrivant au lycée. Sans cette base, fondatrice de la géométrie analytique et indispensable pour aborder l'analyse au lycée, les élèves sont rapidement perdus et en viennent naturellement à considérer les mathématiques comme des recettes de cuisine.
- Enfin, dans le chapitre « fonctions affines », un travail sur les diverses manières de construire une droite à partir de son équation est indispensable. Ce n'est pas parce que ce point figure au programme de la classe de troisième que les élèves le maîtrisent de manière suffisante. Sans ce travail, les notions de tangentes et d'asymptotes ne pourront pas être mises en place dans les classes de première et de terminale.

2. Une progression

Comme nous l'avons déjà précisé, la notion de fonction est centrale en classe de seconde. La possibilité de travailler la partie algébrique du programme en liaison avec les fonctions permet d'étaler l'introduction de cette notion sur plusieurs mois. L'importance et la richesse des contenus imposent un fractionnement en plusieurs chapitres, mais une approche « en spirale », c'est-à-dire un retour fréquent sur les parties déjà traitées, permet une meilleure appropriation des notions par les élèves

Nous préconisons, pour ce faire, un découpage en quatre chapitres : généralités, variations, fonctions affines, fonctions de référence. Dans la présentation qui suit, nous proposons également pour chaque chapitre une liste d'activités, servant à introduire ou à travailler les savoir-faire techniques. Cette liste n'est pas exhaustive mais constitue plutôt un socle minimum. Pour les deux premiers chapitres nous ne donnons pas de plan ; les notions nouvelles sont introduites dans les activités et définies si nécessaire à ce moment.

Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions

Activités d'approche

- Travailler sur les expressions « en fonction de ».
- Reconnaître et manipuler les différentes écritures d'une même expression.
- Déterminer l'expression d'une fonction issue d'une situation géométrique ou autre.

Ces différentes activités seront l'occasion d'introduire ou préciser les notions suivantes : fonction, variable, ensemble de définition, expression algébrique, tableau de valeurs, image, antécédent, courbe représentative, équation de courbe.

Activités d'appropriation

- Calculer des images « à la main » et avec une calculatrice. Différencier valeurs exactes et approchées.
- Résoudre des équations en lien avec le calcul d'antécédents.
- Représenter graphiquement une fonction à partir de son expression algébrique.
- Travailler le lien entre les différents registres d'une même fonction. *Ce point sera détaillé dans une activité présentée page 37.*
- Vérifier si un point appartient ou non à une courbe définie à l'aide d'une équation.
- Lire graphiquement des images et des antécédents. Résoudre graphiquement des équations de la forme $f(x) = k$ ou $f(x) = g(x)$.
- Utiliser une calculatrice graphique.

Chapitre 2 : Variations et extremums d'une fonction**Activités d'approche**

- Étudier des problèmes géométriques ou autres pour introduire la problématique du chapitre.
- Placer des informations dans un tableau de variations.
- Travailler la signification de phrases comportant un ou deux quantificateurs universels.

Ces activités sont destinées à introduire progressivement les tableaux de variations et les définitions d'extremum et de croissance sur un intervalle.

Activités d'appropriation

- Résoudre graphiquement des inéquations de la forme $f(x) \leq k$.
- Construire un tableau de signes à l'aide d'une lecture graphique.
- Relever des informations dans un tableau de variations.
- Travailler la cohérence entre tableau de variations et courbe.
- Obtenir des inégalités à partir des variations d'une fonction.
- Utiliser la définition pour obtenir le sens de variations d'une fonction affine donnée.

Chapitre 3 : Fonctions affines

1. Représentation graphique d'une fonction affine. Coefficient directeur et ordonnée à l'origine.
2. Variations des fonctions affines.
3. Signe de $ax + b$.
4. Caractérisation des fonctions affines.

Activités

- Reconnaître si une fonction est affine ou non à l'aide de son expression algébrique.
- Construire une droite à partir de la donnée du couple $(a; b)$. Déterminer graphiquement un coefficient directeur.
- Construire une droite à partir de l'image de deux valeurs bien choisies.
- Déterminer le coefficient directeur et l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points. Déterminer l'expression d'une fonction affine connaissant les images de deux nombres.
- Déterminer l'image d'un nombre par une fonction affine connaissant les images de deux autres nombres. Reconnaître si une fonction est affine ou non à l'aide de la propriété caractéristique : l'accroissement des images est proportionnel à celui de la variable.

- Déterminer le signe de $ax + b$ et appliquer ce résultat à la résolution des « inéquations-produit ».

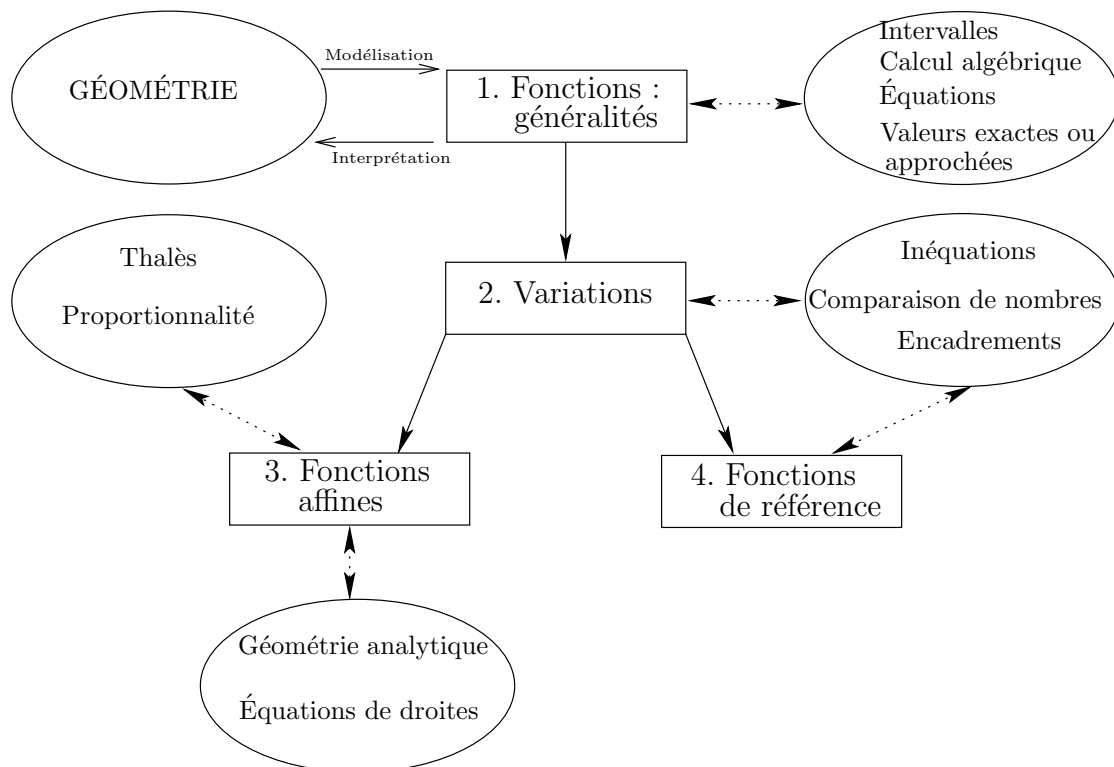
Chapitre 4 : Fonctions de référence

1. Fonction carré. Variations et courbe. Application aux équations et inéquations de type $x^2 = a$ et $x^2 < a$.
2. Fonction inverse. Variations et courbe. Application aux équations et inéquations du type $1/x = a$ et $1/x > a$.
3. Cercle trigonométrique et fonctions sinus et cosinus.

Activités

- Encadrer des expressions simples où figurent des fonctions de référence (enchaînement de fonctions).
- Utiliser les propriétés de la fonction carré pour justifier des extremums.
- Etablir un lien entre propriétés algébriques de $f(x)$ et propriétés géométriques des courbes (symétries, variations,...). *On revient à cette occasion sur des points étudiés dans les chapitres précédents.*

Voici un diagramme récapitulatif où sont précisés les liens avec d'autres parties du programme de seconde.



3. Cinq activités

1. Réfléchir à l'expression « en fonction de ... »

Pour introduire la notion de fonction et mettre en évidence cette relation particulière de dépendance entre deux quantités, il est bon de la présenter sous différents aspects : tableau, graphique, texte, construction géométrique... Pour un élève, il est difficile de faire la différence entre la variable et la quantité qui lui est associée. Cette difficulté est en grande partie liée au fait que l'ordre de ces deux quantités dans l'énoncé de la phrase en français est différent de celui dans la notation $x \mapsto f(x)$. Commencer par ce travail permet de prévenir, pour un certain nombre d'élèves, la confusion entre x et $f(x)$.

Sur les exemples présentés, pour les cas qui correspondent à des fonctions, les notions d'image et d'ensemble de définition peuvent être travaillées. Ceci peut être fait oralement. En effet, comme pour une langue étrangère, il ne suffit pas à un élève de lire et d'écouter pour s'approprier le vocabulaire mathématique (ici celui lié aux fonctions), il doit aussi « parler ce langage » pour pouvoir ensuite l'écrire. Il faut prendre le temps de l'assimilation du vocabulaire avant d'y ajouter des notions plus techniques et théoriques.

Énoncé. — Dans le langage courant, on utilise souvent des termes qui expriment une relation de dépendance ou un lien entre deux quantités. Mais cette dépendance ne traduit pas toujours une relation fonctionnelle, au sens mathématique, entre les deux quantités.

En effet, il faut savoir qu'en sciences, on dit qu'une quantité y s'exprime en fonction d'une quantité x lorsque, à chaque nombre x possible, on peut associer une seule valeur de y . On note alors $x \mapsto y$ et x est appelé la variable.

Par exemple, l'affirmation « la taille de Marguerite s'exprime en fonction de son âge » est vraie car à chaque âge on associe une seule taille. On a $\text{âge} \mapsto \text{taille}$ et les âges « possibles » sont des nombres positifs. En revanche, lorsqu'on regarde le relevé suivant

Age (en année)	14	14,5	15	15,5	16	16,5	17	17,5	18	18,5
Poids (en kg)	40	42	40	40,5	42	56	63	62	60	60
Taille (en m)	1,50	1,50	1,52	1,55	1,60	1,64	1,69	1,70	1,72	1,72

on se rend compte que l'affirmation « la taille de Marguerite s'exprime en fonction de son poids » est fausse, car, par exemple, au poids 40 kg correspondent plusieurs tailles.

Dire pour chacune des sept affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse, et dans le cas où elle est vraie la symboliser sous la forme « $\dots \mapsto \dots$ » et donner les valeurs « possibles » de la variable :

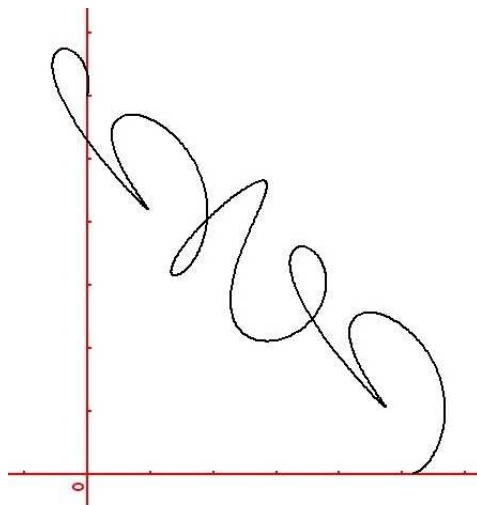
1. Le montant de la facture d'eau s'exprime en fonction de la consommation.
2. Le nombre de personnes venant à la piscine municipale non couverte s'exprime en fonction de la température extérieure.
3. L'aire d'un disque s'exprime en fonction de son diamètre.
4. D'après le tableau suivant, la consommation de carburant de la voiture étudiée s'exprime en fonction de sa vitesse :

Vitesse (en km/h)	70	130	60	110	50	90
Consommation (en l/100 km)	5,9	10,5	5,5	8,1	5,2	6,3

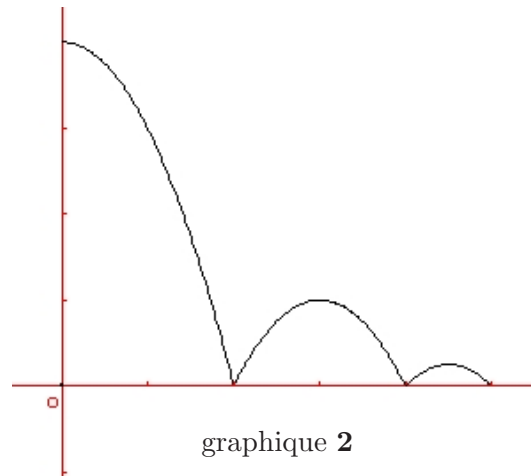
5. D'après le tableau suivant, la température d'une salle de classe s'exprime en fonction du nombre d'élèves dans la salle :

Nombre d'élèves	15	24	30	21	35	30
Température (en °C)	19	19,3	19,8	19,3	20,7	20,1

6. D'après le graphique **1** la hauteur d'un ballon lâché qui se dégonfle étudié ici s'exprime en fonction de son déplacement horizontal.
7. D'après le graphique **2** la hauteur d'une balle qui rebondit étudiée ici s'exprime en fonction du temps.



graphique 1



graphique 2

Bilan. — Cette activité a été difficile pour la plupart des élèves et leur a laissé sur le moment un sentiment de confusion qui leur a fait demander plus d'exercices de ce type ; ils n'avaient pas l'impression d'avoir compris. Cependant, il ressort qu'il vaut mieux ne pas s'attarder trop sur ce type d'activité et y revenir ensuite, car elle se trouve éclairée sous un jour nouveau à la suite du travail sur les fonctions. Cela ne signifie pas pour autant qu'elle n'a pas sa nécessité car, par le questionnement qu'elle a instauré, elle participe à la compréhension des activités qui la suivent

2. Différents registres pour une fonction

Appréhender le concept de fonction nécessite d'articuler différents registres dans lesquels une fonction peut être traduite. Il est donc nécessaire de faire travailler aux élèves ces différents registres (algébrique, graphique, symbolique, tableaux) et de donner des exercices ayant pour objectif le passage d'un registre à un autre. Dans chacune des trois situations de cette activité, une fonction est explicitée dans un registre. Il s'agit de la décrire dans les trois autres. Pour cela l'élève est amené à construire une stratégie de résolution, le travail ne se faisant pas de façon linéaire.

Situation 1

Tableau de valeurs

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$							

x	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$								

Expression algébrique

$$f(x) = \dots$$

$$[\quad ; \quad] \longrightarrow \mathbf{R}$$

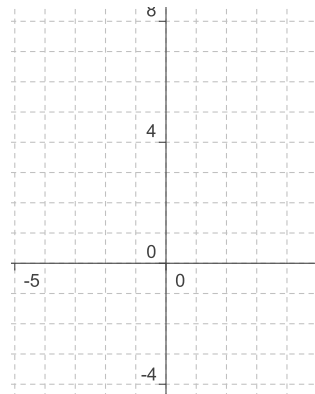
$$x \longmapsto f(x) =$$

Une description d'un calcul de l'expression $f(x)$

Un exemple

Choisir une valeur	-2
↓	↓
Élever au carré	4
↓	↓
Multiplier le résultat par 0,75	3
↓	↓
Soustraire au résultat le double de la valeur choisie	7
↓	↓
Soustraire 3 au résultat	4

Représentation graphique



Situation 2

Tableau de valeurs

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$							

x	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$						

Expression algébrique

$$f(x) = -x^2 + 4x + 2$$

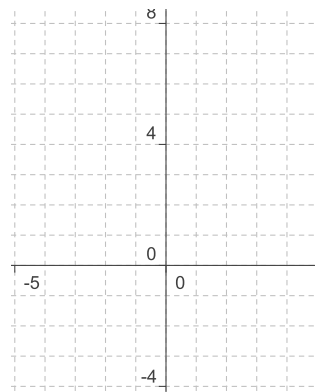
$$[\quad ; \quad] \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto f(x) =$$

Une description d'un calcul de l'expression $f(x)$

Choisir une valeur
↓
.....
↓
.....
↓
.....
↓
.....

Représentation graphique



Situation 3

Tableau de valeurs

x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5
$f(x)$						

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$							

x	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$						

Expression algébrique

Une seule des expressions proposées est celle de $f(x)$. Choisir celle qui convient.

$$f(x) = -x^2 - 2x - 4 ,$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 4 ,$$

$$f(x) = 0,5x^2 - x - 4 ,$$

$$f(x) = -x^2 - 2x + 4 .$$

$$[\quad ; \quad] \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto f(x) =$$

Une description d'un calcul de l'expression $f(x)$

Choisir une valeur



.....



.....

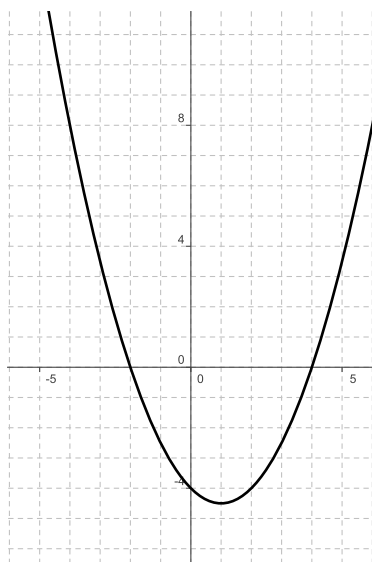


.....



.....

Représentation graphique



Bilan. — Les élèves qui sont « à l'aise » en calcul algébrique ont trouvé ces activités assez faciles. Pour les autres, cela a été l'occasion de revenir sur le sens de la formalisation dans ce type de calcul : « x^2 représente le carré du nombre x » d'où la nécessité d'utiliser des parenthèses lorsque x est négatif. Pour ces derniers, le passage par des exemples est indispensable avant d'aborder le calcul « direct » de l'image d'un réel par une fonction.

La troisième situation de l'activité a été l'occasion d'une confrontation entre les différentes stratégies possibles :

- Les « laborieux » qui réinvestissent le travail fait avant, en construisant 4 courbes avant de les comparer à celle donnée. Parmi ceux-là, certains savent déjà utiliser la fonction graphique de leur calculatrice mais ils ont souvent plus de mal à choisir entre la deuxième et la troisième expression lorsqu'ils ne s'arrêtent pas dès la deuxième courbe tracée.
- Les « efficaces », peu nombreux, qui arrivent à éliminer rapidement certaines expressions avant de reprendre une stratégie « laborieuse ».

Pour cette dernière situation un bilan de la stratégie a été dégagé :

- On ne peut pas conclure positivement à partir d'une ressemblance (on peut rétro-

projeter la courbe d'équation $y = 0,5x^2 - x + 3,999$).

- On peut conclure négativement dès qu'il y a dissemblance.

3. Des carrés dans un carré

Une fois la notion de fonction introduite, on la met en oeuvre sur des exemples simples, et sur lesquels on peut successivement greffer les notions et techniques nouvelles ou à revoir.

Dans cette activité, nous proposons l'étude d'une situation géométrique qui permet également de travailler les calculs avec les nombres rationnels ou irrationnels, les valeurs exactes ou approchées d'un nombre, le développement et les identités remarquables, et pour des valeurs bien choisies, la résolution algébrique d'équations. En traitant plusieurs activités de ce type, il est possible de ne pas faire de chapitres séparés pour les notions algébriques rencontrées.

Cette activité peut être reprise dans la partie du programme relevant de l'ordre, pour étudier l'aire maximale de ce carré, les variations, les résolutions graphiques d'inéquations.

L'étude faite dans les trois premières questions ne permet pas de répondre à la question : « Le carré peut-il avoir une aire égale à 20 ? » ; la résolution algébrique de cette équation étant trop délicate à ce niveau, l'utilisation de la représentation graphique de la fonction va s'imposer comme méthode de substitution. C'est une occasion d'utiliser la calculatrice graphique (question 4).

Remarques :

1. Il est possible d'utiliser les TICE pour compléter l'approche faite à la question 1.
2. L'étude de cas particuliers est nécessaire en début d'année pour que l'élève s'approprié la situation. De plus, c'est une habitude à prendre dans le cas de recherche de problèmes.

Énoncé. — $ABCD$ est un carré de côté 5. L, M, P et Q sont respectivement les points des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ tels que $AL = BM = CP = DQ$. On admet que le quadrilatère $LMPQ$ est un carré (*une figure accompagne cet énoncé*) et on se pose les questions suivantes :

Ce carré a-t-il une aire constante ? Peut-il avoir une aire égale à 20 ?

On pose $AL = x$.

1)

- a) Sur une feuille à petits carreaux, faire la figure pour $x = 1$, en prenant pour unité le centimètre, et estimer à l'aide du quadrillage l'aire de $LMPQ$. Calculer alors l'aire de $LMPQ$.
- b) Mêmes questions pour $x = 2$.

2)

- a) Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
- b) Exprimer l'aire du carré $LMPQ$ en fonction de x .

3)

- a) On note f la fonction qui à x associe l'aire de $LMPQ$.
- b) Quelles sont les images de 1 et 2 par f ?
- c) Calculer, lorsque c'est possible, les images par f de 2,5 ; 5 ; 7 ; $\sqrt{3}$; $5 - \sqrt{2}$.

4)

- a) Afficher sur l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la fonction f .
- b) Peut-on construire un carré dont l'aire vaut 20 ?

Bilan. — C'est une activité qui permet aux élèves d'être immédiatement actifs. Le fait que l'aire du carré $LMPQ$ puisse s'obtenir de deux façons différentes les étonne. En général ils ne font cette constatation qu'après avoir traité la question 2.b, en comparant avec les autres. Pour les convaincre que 7 n'a pas d'image, il faut souvent leur demander de faire la figure dans ce cas-là. Lorsque cet exercice est l'occasion de leur première utilisation de la calculatrice graphique, ils trouvent cet outil plutôt sympathique et performant. Le réglage de la fenêtre d'affichage est cependant perçu comme quelque chose de pénible, mais il leur permet de mieux prendre conscience de ce qu'est l'ensemble de définition de la fonction. Si on leur indique l'utilisation de la touche « trace » pour contrôler (du moins de façon approchée) leurs calculs de la question 3.c, c'est ensuite seuls qu'ils finissent l'exercice.

4. Équations de courbe

La notion d'équation de courbe est, comme il a été dit dans l'introduction, essentielle à la compréhension de la géométrie analytique. Pourtant il n'est pas rare de trouver dans des copies de Terminale que l'équation de la tangente T est $T(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ ou même simplement $f'(a)(x - a) + f(a)$. Ceci prouve que, même à ce niveau, la notion d'équation de courbe n'est pas assimilée.

Un travail spécifique en seconde devrait permettre d'en améliorer la compréhension. C'est l'objectif des quatre énoncés de cette l'activité. Comprendre ce qu'est une propriété caractéristique est au coeur de ce travail ; par ailleurs il permet de faire remarquer aux élèves la différence, mais aussi le lien qu'il y a entre les deux phrases : « Tracer la courbe d'équation $3x - 2y + 5 = 0$ » et « Résoudre l'équation à 2 inconnues $3x - 2y + 5 = 0$ ». Ce travail nécessite sans doute de parler d'équations équivalentes.

Travailler en binôme pour le premier énoncé permet

- d'obtenir plus de points d'un même ensemble sans que le travail devienne trop fastidieux.
- à chaque élève de se confronter à plus d'équations.
- des échanges fructueux lorsque les élèves confrontent leurs points de vue

Énoncé 1 (à faire à 2 élèves). — On considère les 6 relations suivantes :

$$x^2 + y^2 = 25, \quad 3x + 2y - 5 = 0, \quad xy = 1, \quad y = x^2, \quad x = y^2, \quad 3x - 5 = 0.$$

▷ Chacun des 2 élèves choisit une relation (pas la même !) et fait le travail suivant :

Soit (O, I, J) un repère orthonormal d'unité 1cm. On considère les points

$$A(2; -0,5), \quad B(-\frac{5}{2}; \frac{25}{4}), \quad C(\sqrt{13}; 2\sqrt{3}), \quad D(\frac{5}{3}; \frac{3}{5}), \quad E(1,21; -1,1) \text{ et } F(\frac{5}{3}; -8).$$

1) Parmi ces points, quels sont ceux dont les coordonnées vérifient la relation considérée ? Les placer dans le repère.

2) Placer également dans ce repère 10 autres points dont les coordonnées vérifient la relation considérée.

▷ Les 2 élèves échangent leur travail puis chacun trouve et place 10 points différents des précédents dont les coordonnées vérifient la relation considérée.

▷ Les 2 élèves ensemble étudient les 2 travaux et doivent émettre une conjecture quant à l'ensemble de tous les points dont les coordonnées vérifient la relation considérée.

Énoncé 2 (d'après un exercice du livre de seconde AXIALE- Hatier édition 2004, page 105)

Phrases :

- Chaque point a pour abscisse 1.
- La somme des coordonnées de chaque point est nulle.
- L'ordonnée de chaque point est égale à l'inverse de son abscisse.
- Le produit des coordonnées de chaque point vaut -1 .
- L'abscisse de chaque point est égale à son ordonnée.
- L'ordonnée de chaque point vaut -1 .
- Le carré de l'abscisse de chaque point est égal à son ordonnée.
- La somme entre le carré de l'abscisse et l'ordonnée de chaque point est nulle.

Courbes :

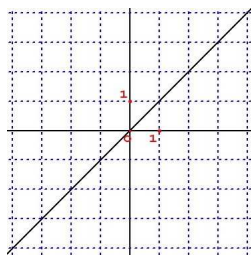


fig.1

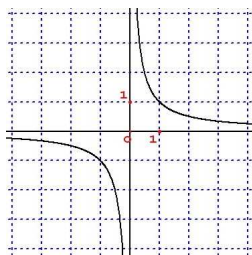


fig.2

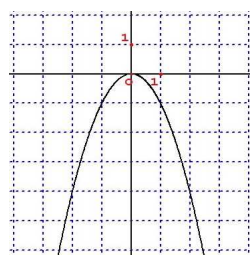


fig.3

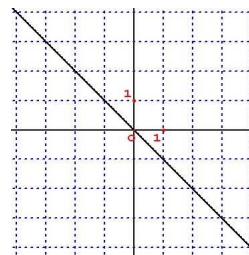


fig.4

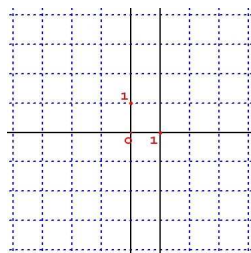


fig.5

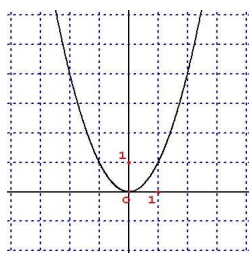


fig.6

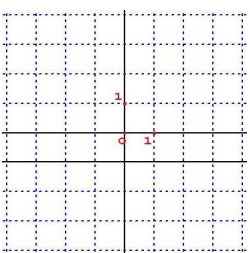


fig.7

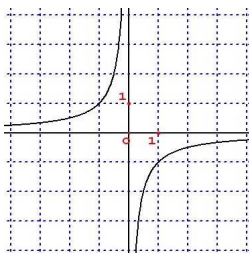


fig.8

- Chacune des phrases de a. à h. caractérise une des courbes de 1. à 8. Relier chaque phrase à sa courbe.
- Donner 2 équations de chacune des courbes.
- Si la courbe tracée représente une fonction f , donner l'expression de f en fonction de x .

Énoncé 3 (d'après un exercice du livre de seconde AXIALE- Hatier édition 2004, page 104)

Pour chaque groupement de points donnés par leurs coordonnées, placer ces points dans un repère orthonormal d'unité 2 cm (un repère pour chaque groupe) et, chercher celui qui semble s'écarter des autres. Trouver un critère pour décider si un point est un « intrus » ou non.

Groupe 1. $A(1;1)$, $B(4;2)$, $C(2; \frac{1}{2})$, $D(\frac{3}{4}; \frac{4}{3})$, $E(\frac{1}{2}; 2)$, $F(\frac{1}{3}; 3)$, $G(3; \frac{1}{3})$,
 $H(5; \frac{1}{5})$, $I(\frac{1}{8}; 8)$, $J(\frac{1}{5}; 5)$.

Groupe 2. $A(-2,5; -4)$, $B(2; 5)$, $C(1,5; 4)$, $D(0; 1)$, $E(2; 1)$, $F(-1; -1)$, $G(\frac{1}{2}; 2)$,
 $H(-3; -5)$, $I(-\frac{1}{2}; 0)$.

Groupe 3. $A(3; 4)$, $B(4; 3)$, $C(5; 0)$, $D(-4; -3)$, $E(3; -4)$, $F(0; 5)$, $G(-3; -4)$,
 $H(-3; 4)$, $I(4; -3)$, $J(8; 3)$, $K(-4; 3)$.

- Énoncé 4.** — Parmi les courbes suivantes, définies par une de leurs équations, reconnaître
- celles qui sont des droites . Donner alors leur équation réduite et les tracer .
 - celles qui représentent une fonction. Définir alors cette fonction.

$$\begin{array}{ll}
 C_1 : 3x + 2y + 10 = 0 , & C_5 : 2y + 10 = 0 , \\
 C_2 : 3x^2 + 2y + 10 = 0 , & C_6 : 3xy = 10 , \\
 C_3 : 3x + 2y^2 + 10 = 0 , & C_7 : 2x = 3y - 4 , \\
 C_4 : 3x + 10 = 0 , & C_8 : 8y - x^3 = 0 .
 \end{array}$$

Bilan. — Les élèves ont constaté que le choix des valeurs ne pouvait se limiter ni à des entiers, ni à des nombres positifs. Le travail se fait réellement sur l'équation ; il ne se limite pas à un simple calcul de $f(x)$ une fois x choisi. La stratégie à utiliser dépend de la situation. Ils se sont également rendus compte qu'on pouvait trouver si une courbe représente ou non une fonction sur son équation et donc sans la « voir ».

5. À la découverte des variations

Pour illustrer notre point de vue sur les variations de fonctions nous avons choisi une activité dans laquelle les élèves doivent tracer la courbe représentant les variations d'une distance en fonction de l'abscisse curviligne d'un point mobile.

Le premier des objectifs est que les élèves constatent que, dans chaque cas, il suffit de déterminer les couples de nombres $(x; f(x))$ pour certains points particuliers, le reste du tracé de la courbe se trouvant « intuitivement ». Une fois cet objectif atteint, il semble naturel d'introduire un tableau de variations pour décrire la situation.

Dans un deuxième temps, on peut demander aux élèves de décrire certaines des situations par des phrases du type : « quand x augmente entre 0 et 5, $f(x)$ diminue ». Ceci constitue un premier pas vers la définition formelle de la croissance (et décroissance) d'une fonction sur un intervalle. En fin de chapitre, les définitions (données à l'aide d'inégalités) seront appliquées à des exemples simples (fonctions affines).

Il nous semble indispensable de débiter cette activité en classe, pour s'assurer de la bonne compréhension de l'énoncé. L'indication d'une unité de longueur peut aider certains élèves, ainsi que la visualisation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. On peut demander aux élèves les plus rapides de préciser sur quels intervalles chacune des fonctions est affine et de donner l'expression de $f(x)$ sur ces intervalles.

Énoncé. — Sur chaque figure, on a représenté un chemin allant de A à B , le point M se déplaçant sur ce chemin de A vers B . On définit x comme la longueur de la partie de chemin de A à M et $f(x)$ comme la distance CM . Dans chaque cas, construire la représentation graphique de f . On ne demande pas forcément un tracé précis.

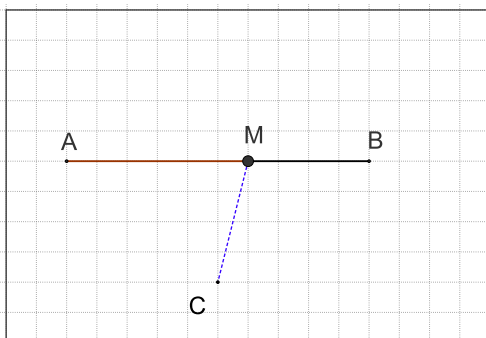


Fig.1

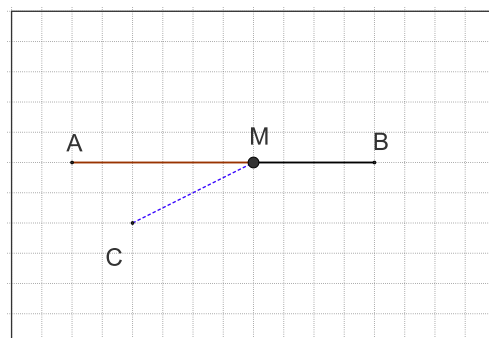


Fig.2

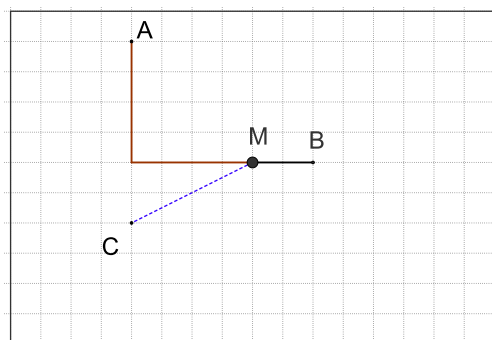


Fig.3

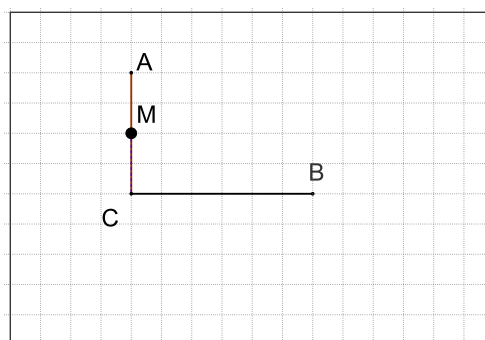


Fig.4

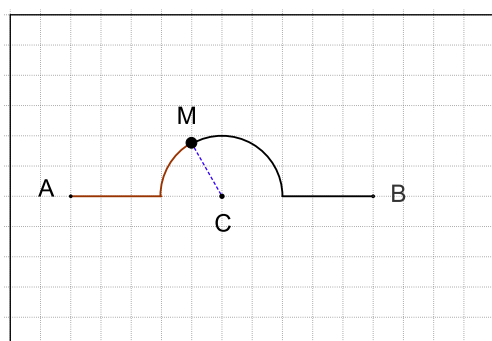


Fig.5

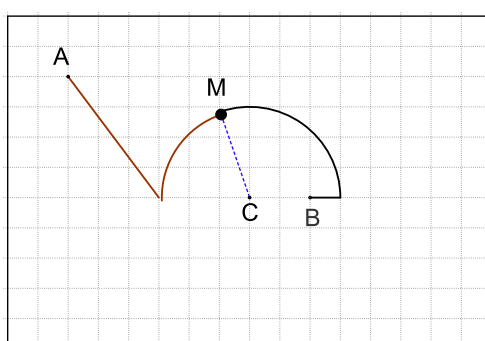


Fig.6

Bilan. — Avec plus ou moins de difficultés, d'autonomie et de temps, tous les élèves arrivent à obtenir des allures de courbes assez honnêtes. L'activité a plu et laisse une image facilement réactivable. Elle constitue un bon support pour l'introduction des définitions formelles des variations et des extremums.

Par la suite, dans l'étude d'un problème où la fonction est introduite à partir d'un support géométrique, certains élèves donnent d'eux-mêmes des indications sur les variations de la quantité à exprimer avant de chercher son expression analytique.

Bibliographie

- [1] L.-M. BONNEVAL (2006), *Pour des fonctions qui fonctionnent*, Bulletin de l'APMEP **462**, 88–104.
- [2] S. COPPÉ, J.-L. DORIER, Y. ILYAS (2007), *De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde*, Recherches en didactique des mathématiques **27,2**, 151–186.
- [3] GROUPE DE LIAISON COLLÈGE-LYCÉE, BASSIN SUD DES DEUX SÈVRES (2005), *La notion de fonction de la classe de sixième à la classe de seconde*, Bulletin de l'APMEP **458**, 317–330.
- [4] A. MAKHLOUF (Ed.) (2004), Regards et perspectives sur l'enseignement de l'analyse. Actes du colloque de Mulhouse 8-9 mars 2002, *IREM de Strasbourg*.

Pour le groupe « fonctions »
 Dominique WEIL
 Lycée International
 Strasbourg
 dominique.weil@ac-strasbourg.fr

LE RÊVE DE PTOLÉMÉE RÉALISÉ

Francis JAMM

Résumé : Le point de départ de cet article est un TPE, en Terminale Sciences de l'Ingénieur, intitulé « Le rêve de PTOLÉMÉE réalisé ». Il décrit comment les élèves ont modélisé et fait tourner (c'est le cas de le dire!), grâce à la CAO, le système géocentrique de PTOLÉMÉE.

Mots-clés : Astronomie - Atelier scientifique - CAO - Cycloïde - Dэфérent - Équant - Excentrique - Mécanique - Modélisation - Mouvement rétrograde - Mouvement circulaire uniforme - Platon - Ptolémée.

« Il faut, autant qu'on le peut, adapter les hypothèses les plus simples aux mouvements célestes ; mais si elles ne suffisent pas, il faut en choisir d'autres qui les expliquent mieux ».

Claude PTOLÉMÉE, Almageste, XII, 2

Depuis belle lurette l'astronomie n'est plus enseignée en cours de mathématiques ; l'homme a posé le pied sur la Lune et la conquête spatiale ne semble plus faire rêver les jeunes. Et pourtant cet article relate une activité pluridisciplinaire sur fond d'astronomie. Le point de départ est un TPE, en Terminale Sciences de l'Ingénieur, intitulé « Le rêve de PTOLÉMÉE réalisé ». Il s'agit de modéliser et de faire tourner (c'est le cas de le dire!), grâce à la CAO, le système géocentrique de PTOLÉMÉE. Cet article est directement tiré des documents élaborés par les élèves.

Quel est le problème ?

- 1) Comprendre le mouvement réel des planètes et leur mouvement apparent vu depuis la Terre.
- 2) Comprendre les principes du système de PTOLÉMÉE et replacer ce dernier dans son contexte historique.
- 3) Passer du qualitatif au quantitatif, c'est-à-dire trouver les valeurs numériques qui font tourner le système de PTOLÉMÉE d'une façon qui corresponde aux observations.
- 4) Réaliser, grâce à la CAO (Conception Assistée par Ordinateur), la « machine » imaginée par PTOLÉMÉE.

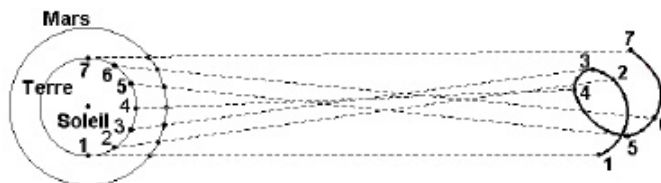
Que voit-on dans le ciel ?

Nous savons aujourd'hui que les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers. De plus la gravitation accélère les planètes lorsqu'elles se rapprochent du Soleil. Mais, vues depuis la Terre, les planètes zigzaguent dans le ciel, en formant parfois des boucles, avec des vitesses et un éclat variables. C'est le mouvement rétrograde. Ce phénomène s'explique facilement par le schéma suivant.

Le mouvement rétrograde de Mars



Ce que l'on observe



L'explication

Ce sont les différentes positions de Mars, sur le fond du ciel, et vues depuis la Terre, qui donnent l'illusion que Mars décrit une boucle.

Le contexte historique

PYTHAGORE (VI^e s. av. J.C.) La Terre est au centre de l'univers. Les cinq planètes connues (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne), le Soleil et la Lune tournent autour de la Terre sur des orbites circulaires et à vitesse constante. Leurs distances à la Terre sont proportionnelles à la longueur des cordes d'une lyre de façon à tourner en produisant une musique harmonieuse à l'oreille des dieux.

PHILOLAOS (V^e s. av. J.C.) Elève de Pythagore, il fait tourner les corps célestes, Terre comprise, autour d'un feu central, invisible depuis la Terre car masqué par une contre-Terre.

HÉRACLIDE (V^e s. av. J.C.) La Terre est située au centre du monde et tourne sur son axe, ce qui explique alternance jour-nuit. Les autres corps tournent autour de la Terre ; mais Vénus et Mars tournent autour du Soleil.

ARISTARQUE (III^e s. av. J.C.) Il décrit un système héliocentrique animé de mouvements circulaires uniformes. ARISTARQUE est contemporain d'APOLLONIOS et de son traité sur les coniques. Pourtant son système ne fut pas accepté. D'une part il heurtait des convictions philosophiques (PLATON) puis religieuses (christianisme). D'autre part, on aurait dû observer un phénomène de parallaxe sur les étoiles (la sphère des fixes). En effet quand on observe une étoile, à six mois d'intervalle, donc à 300 millions de km d'écart, on observe une différence angulaire, c'est la parallaxe. Or il n'en était rien avec les mesures de l'époque, dont la précision était d'environ 20' ; alors que l'étoile la plus proche, Proxima du Centaure, a une parallaxe de 0,772". De plus on attendait une parallaxe importante à cause d'une sous-estimation de la distance de la Terre aux étoiles.

Le mouvement rétrograde comme préoccupation majeure

EUDOXE (IV^e s. av. J.C.) Il imagine un système de 27 sphères différentes (4 par planète et 3 pour le Soleil et la Lune), immatérielles, concentriques mais avec des axes de rotation différents. Leurs mouvements entraînent les planètes et expliquent la rétrogradation. Aristote perfectionnera ce système avec 55 sphères. Mais ce système ne rend pas compte de la variation de luminosité et de taille des planètes puisque leur distance à la Terre reste constante.

APOLLONIOS (III^e s. av. J.C.) Il introduit le système des épicycles qui explique le mouvement rétrograde et la variation de vitesse. PTOLÉMÉE reprendra cette idée dans l'Almageste.

PTOLÉMÉE (II^e s. ap. J.C.) Il expose son système du monde dans l'Almageste. Son titre

grec est Composition Mathématique. Mais il fut bientôt désigné par *La très grande syntaxe*; « très grand » se dit *μέγιστος* en grec, ce qui donna en arabe al-midjisti puis Almageste.

La suite de l'histoire est connue, COPERNIC, et surtout KEPLER et NEWTON.

Les élèves se procurent une version de l'Almageste sur *Gallica* ([5]), le site de la bibliothèque numérique de la BNF, 800 pages en version bilingue, dans une traduction datant de 1813-1816.

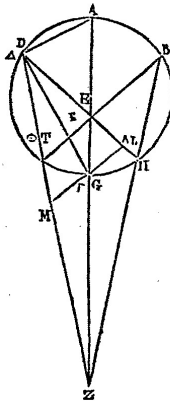
314

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΒ.

Néanmoins nous exposerons en passant, et même d'une manière plus commode, cette proposition, en nous servant d'une hypothèse mixte et composée des deux précédentes, pour faire voir leur ressemblance et leur accord dans les rapports qu'elles donnent.

Car soit l'épicycle ABGD autour du centre E, et son diamètre AEG prolongé en Z, centre du cercle milieu du zodiaque, c'est-à-dire le point d'où notre œil regarde. Prenant de part et d'autre du point G péripégée les arcs égaux GH et GT, menez du point Z par les points H et T, les droites ZHB et ZTD, et joignez DH et BT qui s'entre-coupent en K qui tombera sur le diamètre AG. Nous disons que comme la droite AZ est à la droite ZG, ainsi la droite AK est à la droite KG. En effet, joignons AD et DG, et par G menons à AD la parallèle LGM qui sera perpendiculaire sur DG, puisque l'angle ADG est droit. Actuellement, l'angle GDH étant égal à l'angle GDT, et la droite GL égale

φαντασίαν ποιήσεται. Καὶ ἡμῖς δὲ οὐδὲν ἤττον ἐξ ἐπιδρομῆς εὐχρηστότερον παραστήσομεν τὸ προκείμενον, κοινῇ καὶ μεμιγμένη δείξει χρυσάμενοι κατ' ἀμφοτέρων τῶν ὑποθέσεων πρὸς ἐνδειξιν τῆς καὶ ἐν τούτοις αὐτῶν τοῖς λόγοις συμφωνίας καὶ ὁμοιότητος.



Εἰσὼ γὰρ ἐπίκυκλος ὁ ΑΒΓΔ, περὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ διάμετρος αὐτοῦ, ἡ ΑΕΓ, ἐκβεβλημένη ἐπὶ τὸ Ζ κέντρον τοῦ διὰ μέσων τῶν ζωδίων κύκλου, τούτέστι τὴν ὀψιν ἡμῶν, καὶ ἀποληφθεισῶν ἐφ' ἑκάτερα τῶν Γ περιγείου περιφερειῶν ἴσων τῆς τε ΓΗ καὶ τῆς ΓΘ· διήχθωσαν ἀπὸ τοῦ Ζ, διὰ τῶν Η καὶ Θ σημείων ἢ τε ΖΗΒ καὶ ἡ ΖΤΔ, καὶ ἐπεξέχθωσαν ἢ τε ΔΗ, καὶ ἡ ΒΘ τέμνουσαι ἀλλήλας

κατὰ τὸ Κ σημεῖον, ὃ δῆλον ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ διαμέτρου πεσεῖται λέγομεν ὅτι ὡς ἡ ΑΖ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ. Ἐπεξέχθωσαν γὰρ ἢ τε ΑΔ καὶ ἡ ΔΓ, καὶ διὰ τοῦ Γ παράλληλος ἤχθω τῇ ΑΔ ἡ ΛΓΜ ὀρθῇ γινομένη δῆλον ὅτι πρὸς τὴν ΔΓ, ἐπεὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ

Extrait de l'Almageste

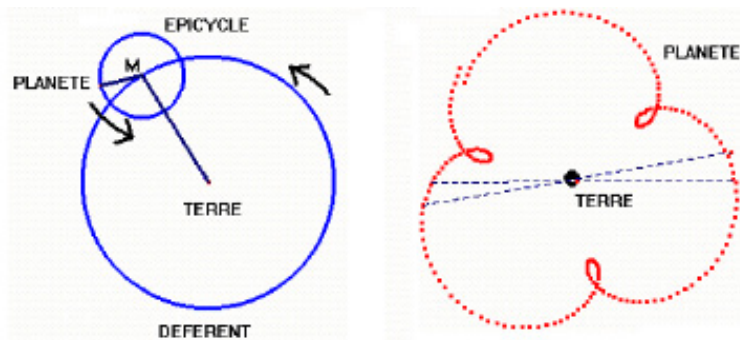
Les principes du système de Ptolémée

Le système cosmologique de PTOLEMÉE repose sur trois principes, *les épicycles*, *l'excentrique* et *l'équant*. Ils visent à conserver les deux dogmes du géocentrisme et du mouvement circulaire uniforme tout en correspondant aux observations.

L'épicycle

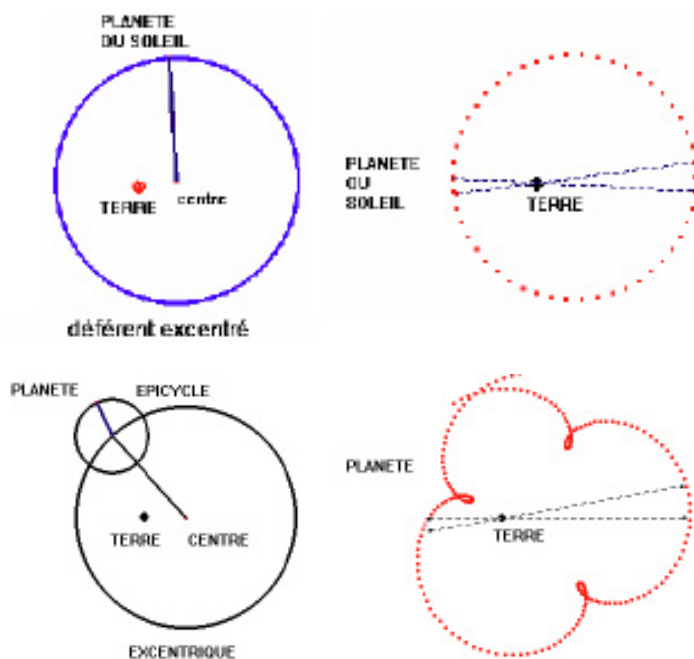
La planète se déplace sur un petit cercle, l'épicycle, dont le centre M tourne lui-même sur la circonférence du grand cercle, dit déferent, centré sur la Terre. Cette construction permet d'expliquer le mouvement rétrograde des planètes. Mais il n'explique pas les variations de vitesse hors des boucles de rétrogradation.

À droite on a le mouvement apparent de la planète, vu depuis la Terre, et à gauche le système qui l'engendre.



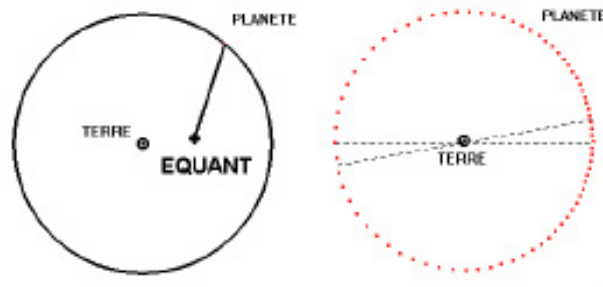
L'excentrique

La terre est décalée du centre du déferent. Dans l'*Almageste*, le déferent sera ainsi nommé excentrique. On remarque que ce principe est une entorse au dogme du géocentrisme. L'excentrique permet d'expliquer les variations de vitesse linéaire, vues depuis la Terre, et complète ainsi l'épicycle.

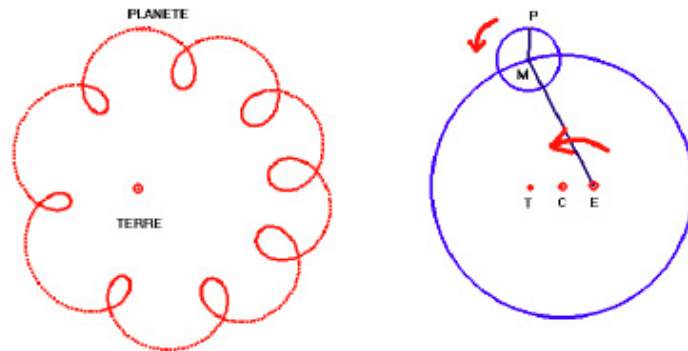


L'équant

Malgré la complexité de leurs propriétés conjuguées, déferent, excentrique et épicycles ne décrivent pas les mouvements planétaires avec suffisamment de précision. PTOLÉMÉE a donc ajouté à son système la notion d'équant. C'est le point par rapport auquel le mouvement de l'épicycle est uniforme en vitesse angulaire.



Dans le système complet, le centre de l'excentrique C, l'équant E et la Terre T sont donc distincts. La combinaison des propriétés de ces trois principes rend compte à la fois des variations de vitesse et du mouvement rétrograde.



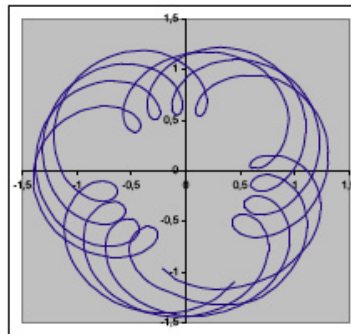
Les successeurs de PTOLÉMÉE rajouteront d'autres épicycles pour mieux coller aux observations (jusqu'à 20 par planète). Cette méthode préfigure la décomposition en série de FOURIER. En effet le mouvement des planètes, vu depuis la Terre, est périodique, mais pas circulaire à cause des boucles de rétrogradation. Les épicycles de PTOLÉMÉE, et celles plus petites rajoutées par ses successeurs, forment les premiers termes de la décomposition du mouvement apparent des planètes en somme de mouvements circulaires.

Que faut-il obtenir ?

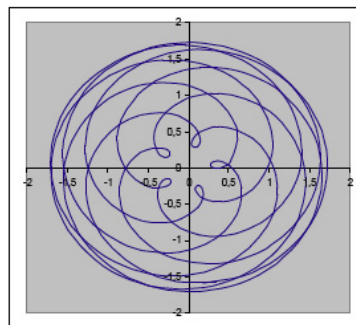
Sur le site de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides ([4]) les élèves utilisent un générateur d'éphémérides. Ils choisissent des coordonnées rectangulaires, écliptiques et géocentriques. Ils ne tiennent pas compte de la cote, considérant ainsi les trajectoires des planètes projetées sur le plan de l'écliptique. Ils prennent les positions des planètes de semaine en semaine pour les planètes proches et de quinzaine en quinzaine pour Jupiter et Saturne. Pour Saturne ils considèrent deux révolutions, soient 59 ans terrestres, ce qui fait beaucoup de quinzaines ! Il y a un gros travail de saisie des données car ils ne trouvent pas le moyen de les recopier automatiquement. Le copier-coller a encore des progrès à faire ! Ensuite ils font tracer les courbes correspondantes sous Excel. Et ce sont ces trajectoires que doit reproduire la machine de PTOLÉMÉE, qui reste à modéliser.

Voici les trajectoires par rapport à la terre qu'ils ont ainsi obtenues.

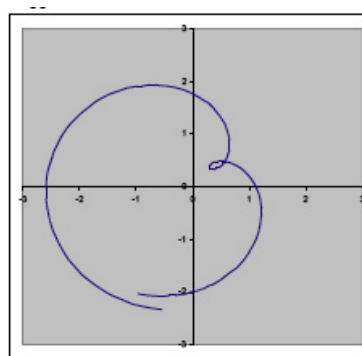
Trajectoire de Mercure sur 4 ans terrestres



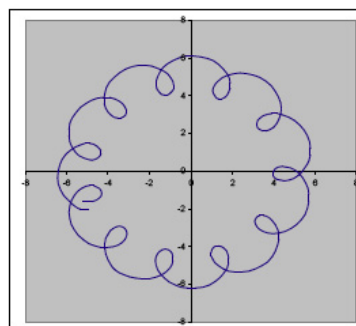
Trajectoire de Vénus sur 7 ans terrestres



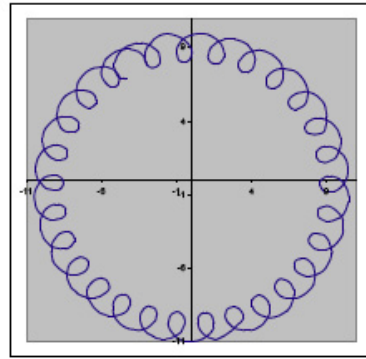
Trajectoire de Mars sur 2 ans terrestres



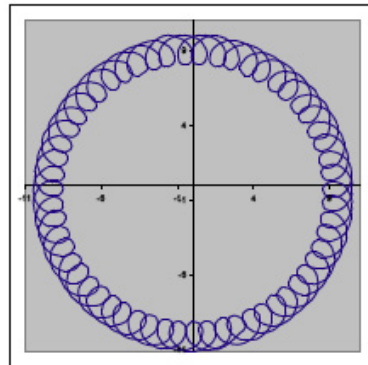
Trajectoire de Jupiter sur 12 ans terrestres



Trajectoire de Saturne sur un an saturnien (10752 jours)

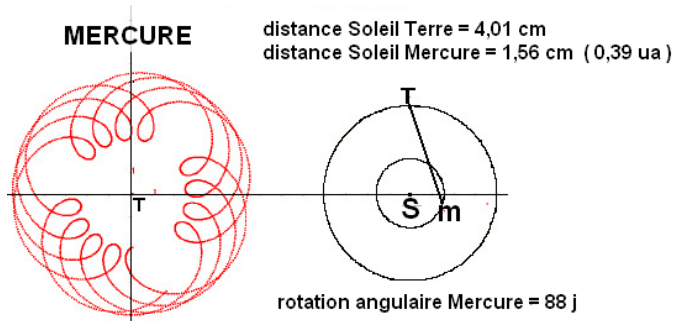


puis sur deux ans (21504 jours), soient respectivement 29 ans terrestres et demi, et 59 ans terrestres

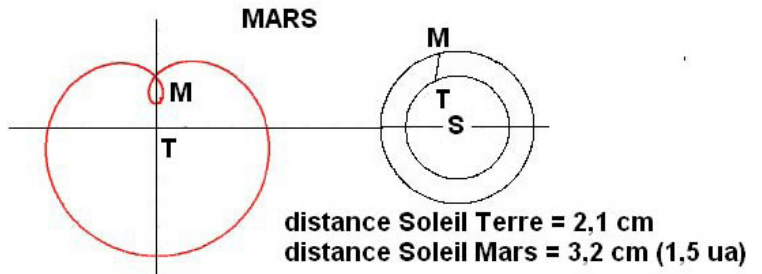


Ensuite pour se faire la main, les élèves simulent le mouvement apparent des planètes à l'aide de Cabri Géomètre. Cela leur permet de se familiariser avec les distances et les vitesses de révolution.

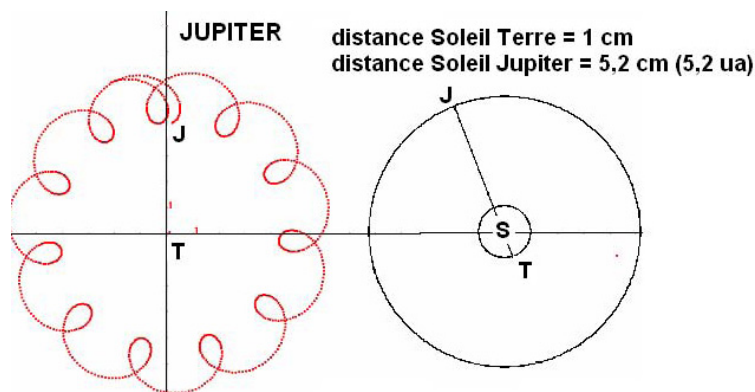
À droite on a le système héliocentrique à l'échelle pour les distances et les vitesses. À gauche on reporte le vecteur Terre-Planète avec la Terre fixe.



Trajectoire de Mars pour un an martien (685 jours)



Trajectoire de Jupiter pour un an jupitérien (4330 jours)



Distances et vitesses chez Ptolémée

Tout cela est très joli mais découle de l'héliocentrisme. Il serait temps d'aborder le cœur du TPE, à savoir, dans le système géocentrique de PTOLÉMÉE, quels sont les rapports entre les rayons du déférent et de l'épicycle et entre ceux de l'excentrique et l'équant ; quelles sont les vitesses de rotation de la planète sur l'épicycle, et du centre de l'épicycle sur le déférent ? C'est très facile il suffit de lire l'*Almageste* !

Les distances

Les élèves découvrent que lorsque PTOLÉMÉE écrit « Si donc la droite EB est de 120, EL en aura $17^p28'$, ... », il faut comprendre que

$$EL = \left(17 + \frac{28}{60}\right) \times \frac{EB}{120},$$

sachant que EB est elle-même la $56^p4'$ partie d'une autre longueur. De façon générale la notation n^pm' désigne la valeur du rapport entre deux grandeurs, ici $\frac{n}{120} + \frac{m}{120 \times 60}$. Chaque chapitre de l'*Almageste* consacré à une planète, se termine par la détermination de la grandeur de l'épicycle.

« Ainsi donc, il nous est démontré que l'apogée de Saturne, au commencement du règne d'Antonin, était sur le 23^e degré du scorpion, et que le rayon de l'excentrique qui porte l'épicycle, étant de 60^p , et la droite entre les centres du zodiaque et de l'excentrique qui rend le mouvement uniforme, de $6^p50'$, le rayon de l'épicycle est de $6^p30'$. Ce qu'il fallait trouver. »

Ils obtiennent le tableau suivant pour un déférent mesurant 60 parties :

	Epicycle		Excentrique et équant	
	Parties	Rapport	Parties	Rapport
Mercure	$22^p30'$	0.375	3^p	0.05
Vénus	$43^p10'$	0.7194	$1^p15'$	0.0208
Mars	$39^p30'$	0.6583	$2^p39'$	0.0442
Jupiter	$11^p30'$	0.19167	$5^p50'$	0.0972
Saturne	$6^p30'$	0.1083	$6^p50'$	0.1139

Les vitesses

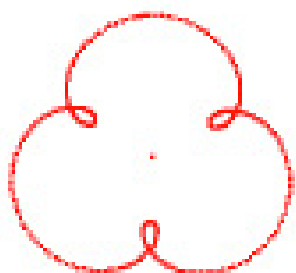
PTOLÉMÉE ignorait les notions de vitesse angulaire et radiale. Il se servait du zodiaque pour déterminer le mouvement des planètes. Voici ce que cela donne :

«... au lieu moyen du soleil. Nous avons observé que la première, par le moyen de l'astrobale, au soir du 7 au 8 du mois égyptien Pachom de la onzième année d'Adrien, en $1^d13'$ des serres^a ; et la seconde le 18 du mois égyptien Epiphi de la 17^e année d'Adrien. Nous avons calculé d'après les observations que nous fîmes lors de cette opposition, que l'instant de l'opposition juste, fut à quatre heures après midi, et le lieu en $9^d40'$ du sagittaire ; Enfin nous avons observé la troisième le 24 du mois égyptien mesor, la 20^e année d'Adrien, et nous avons trouvé de la même manière le temps de l'opposition vraie à midi du 24, et le lieu en $14^d14'$ du capricorne.

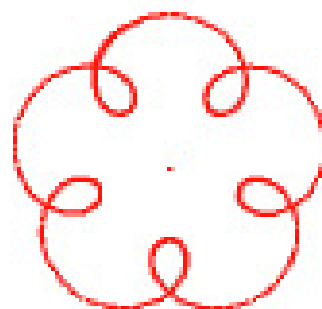
Or ces deux intervalles, celui de la première opposition à la seconde comprend 6 années égyptiennes, 70 jours et 22 heures, et pour le mouvement apparent de l'astre, $68^d27'$. L'intervalle de la seconde à la troisième, renferme trois années égyptiennes, 35 jours et 20 heures et $34^d34'$ de mouvement. Mais on trouve pour mouvement moyen en longitude, pendant le premier intervalle pris en nombres ronds, $75^d43'$; et pendant le second $37^d52'$. Avec ces distances, nous ... »

^aCeci désigne 1 degré et 13 minutes.

Un tel texte étant incompréhensible aux élèves ils se sont débrouillés autrement. Ils ont constaté qu'en faisant tourner la planète n fois plus rapidement que le centre de l'épicycle ils obtenaient $n - 1$ boucles.



$n = 4$



$n = 6$

En prenant un rapport non entier on obtient des boucles qui ne se referment pas. Par exemple avec $n = 10,5$ on obtient deux séries de 9 boucles alternées.

Expérimentalement, et en se référant aux trajectoires obtenues avec Excel, ils obtiennent le rapport des vitesses angulaires entre l'épicycle et la planète. Ils supposent que tous les épicycles tournent à 1 tour par minute

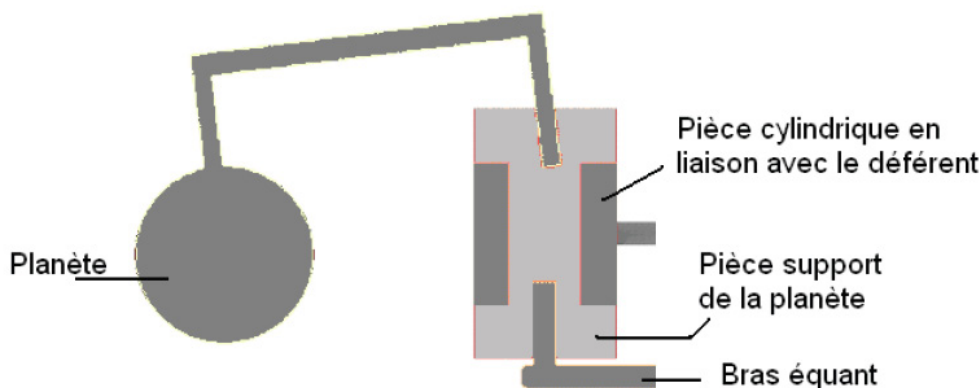
Planète	Vitesse (tours. min ⁻¹)
Mercure	4,1
Vénus	$14/9 \approx 1.55555556$
Mars	2
Jupiter	12
Saturne	29,5

La modélisation

Elle a été réalisée sous Solidworks (logiciel de modélisation de pièces mécaniques) et Méca3D (logiciel d'animation et de calcul pour des montages mécaniques). Elle était facile car elle ne demandait pas une multitude de mesures précises ni de formes complexes. Elle était difficile en l'absence de plans ou documents auxquels les élèves sont habitués.

Le centre de l'épicycle se déplace sur un cercle dont le centre n'est pas le centre du mouvement, qui est l'équant. Ce problème a été résolu avec un vérin reliant l'équant au centre de l'épicycle, ce dernier se déplaçant sur un cylindre correspondant au déférent.

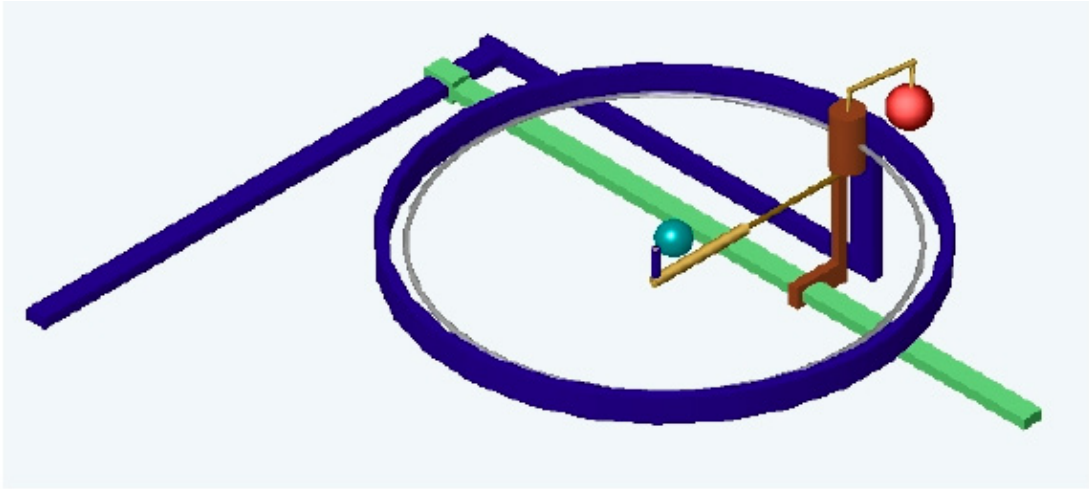
La lecture de l'*Almageste* montre que PTOLÉMÉE avait incliné l'épicycle de façon à respecter les variations angulaires des rétrogradations. Le problème a été résolu en créant une pièce intermédiaire en liaison pivot (qui supporte la planète et permet sa rotation autour d'un axe).



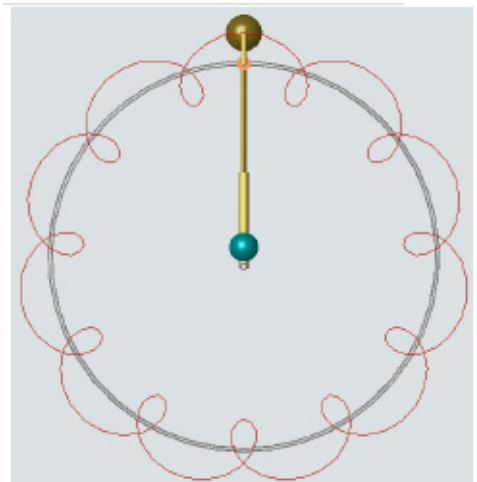
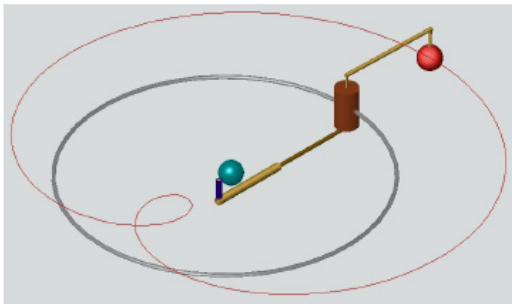
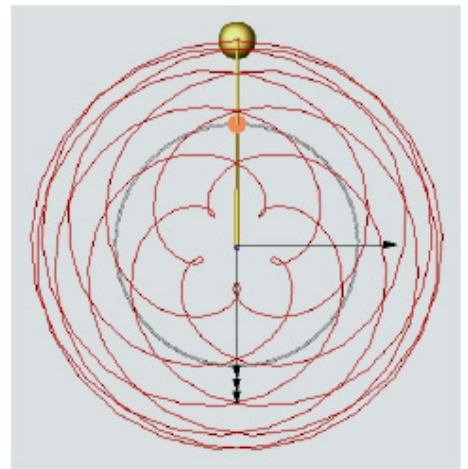
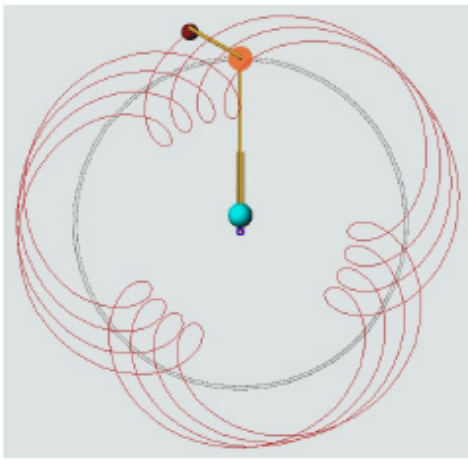
Planète et assemblage du centre de l'épicycle

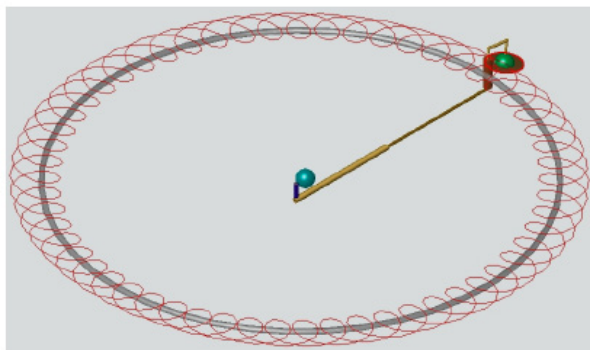
À cause d'un trop grand nombre de degrés de liberté, Méca3D, imposait un mouvement de rotation sur elle-même à la pièce supportant la planète, au lieu de la faire glisser sur le déférent. Les élèves ont introduit un système de liaisons glissières (qui permettent la translation d'une pièce le long d'un axe) pour contraindre cette nouvelle pièce, par rapport à laquelle tournait l'axe de la planète, à ne pas tourner sur elle-même. C'est la barre horizontale, coulissante, que l'on voit sur le schéma ci-dessous.

Et voici le système complet, pour une planète.



La « machine » de Ptolémée en action





On notera la grande variation de distance entre Vénus et la Terre, de 0,3 à 1,7 unités astronomiques. Il en va de même pour Mars. Ceci montre que la variation de la luminosité des planètes est loin d'être anecdotique. Le lecteur remarquera les anneaux de Saturne, qui n'ont pas été sans poser des problèmes techniques.

Dans le cas général le mouvement apparent d'une planète est défini par

$$\begin{cases} x(t) = 2a + R \cos(\Omega t) + r \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\Omega t) + r \sin(\omega t) \end{cases} \quad \text{où}$$

a = distance de l'équant, et de la Terre, au centre du déférent ;

R = rayon du déférent ;

r = rayon de l'épicycle ;

Ω = vitesse angulaire du centre de l'épicycle par rapport à l'équant ;

ω = vitesse angulaire de la planète par rapport au centre de l'épicycle .

Le Soleil décrit une ellipse, sans rétrogradation. Elle est obtenue en faisant tourner le Soleil et le centre de l'épicycle à la même vitesse mais dans le sens opposé. Pour faire face aux questions du jury les élèves avaient appris à démontrer que si $\Omega = \pm\omega$ alors on obtenait une ellipse. Faut-il rappeler que l'étude des courbes paramétrées n'est plus au programme des lycées ?

Et après ?

Le TPE fini les élèves ont décidé de présenter leur travail au concours Exposcience. Cette préparation s'est faite dans le cadre d'un club scientifique où se sont rajoutés d'autres élèves. Dans un premier temps ils ont réalisé une vidéo. Le final montrait le mouvement, selon le système de PTOLÉMÉE, de la totalité du système solaire, Soleil compris. Le rêve de PTOLÉMÉE était enfin réalisé !

Dans un deuxième temps ils ont réalisé une maquette illustrant le principe des épicycles. Au début c'était du bricolage de bric et de broc : un cercle de tonneau pour le déférent, un moteur Légo pour faire tourner la planète, une tringle de rideau coulissante pour le bras reliant l'équant au centre de l'épicycle *etc.* Les choses se sont corsées pour l'alimentation du moteur qui, à partir de l'équant, faisait tourner l'épicycle. En effet les frottements étaient importants. Après avoir essayé plusieurs

solutions, dont un moteur de barbecue, ils ont dû se résoudre à prendre une alimentation en 220 V. Se posait alors le problème de la sécurité de l'installation en vue d'Exposcience. Après avoir tutoyé l'astronomie, l'histoire, les mathématiques, la mécanique, l'informatique ils allaient se plonger dans le génie électrique pour mettre leur installation aux normes de sécurité.



Leur travail fut primé à Exposcience, puis présenté à d'autres manifestations (Fête de la Science, Rencontres de Clubs d'Astronomie du Nord Est). Il va sans dire que le TPE fut noté 20. L'un des protagonistes a commencé des études d'histoire, peut-être de la future graine d'historien des sciences ?

Bibliographie

- [1] Jean-Etienne CHARON (1980), *Vingt-cinq siècles de cosmologie*, *Stock*.
- [2] Marc LACHIÈZE-REY & Jean-Pierre LUMINET (1998), *Figures du ciel*, *Seuil*.
- [3] L'encyclopédie ATLAS du ciel (1988), livre 8, *ATLAS*.
- [4] Le site de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides, <http://www.imcce.fr>
- [5] Le site de la bibliothèque numérique de la BNF, <http://gallica.bnf.fr>
- [6] Le site du lycée Lavoisier, <http://www.lycee-lavoisier.net/ptolemee/>
On y trouve toutes les animations des figures de cet article, et plus encore.

Francis JAMM
Lycée Lavoisier
Mulhouse
francis.jamm@ac-strasbourg.fr

L'ESPACE AU SECOURS DU PLAN

Jean LEFORT

Résumé : Certains problèmes de géométrie plane se résolvent plus facilement quand on les considère comme des problèmes de géométrie dans l'espace. Sur quatre exemples, la comparaison des deux démonstrations permet de montrer l'intérêt du changement de point de vue.

Mots-clé : Axe radical - Brianchon - Calisson - Cube - Desargues - Empilement - Espace, Géométrie - Géométrie projective - Perspective - Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Introduction

Nous vivons dans un monde à trois dimensions d'espace. Quand nous faisons de la géométrie plane, nous travaillons dans un sous-espace de dimension deux. Bien évidemment les mathématiciens ont imaginé toutes sortes de mondes à deux dimensions qui ne font pas appel à l'existence d'un monde à trois dimensions. Mais nous restons à un niveau élémentaire où notre perception du plan est une perception globale puisque vue de la troisième dimension. De très nombreuses figures planes peuvent être interprétées comme une projection convenable d'une figure de l'espace et dans cette optique les démonstrations des propriétés d'une telle figure deviennent immédiates alors qu'en restant dans le plan les démonstrations sont assez longues et peu évidentes. On objectera, bien sûr, que la démonstration d'une propriété d'une figure plane faisant appel à l'espace n'est pas une démonstration intrinsèque. D'un point de vue puriste, on aura tout à fait raison, mais je pense que ce point de vue est l'apanage du spécialiste et non pas de l'apprenant tant qu'il n'est pas en mesure d'apprécier l'existence d'autres géométries. Je propose donc quelques exemples, certains assez classiques, d'autres beaucoup moins.

1. Théorème de Desargues

On considère deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que les droites (BC) et $(B'C')$ se coupent en un point α , les droites (CA) et $(C'A')$ en β et enfin (AB) et $(A'B')$ en γ . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) Les droites (AA') , (BB') et (CC') sont soit parallèles, soit concourantes en I .
- (2) Les points α , β et γ sont alignés sur une droite (D) .

On sait en réalité que ce théorème est un théorème de géométrie projective, d'où l'apparition du choix entre droites concourantes et droites parallèles. Pour être tout à fait complet on pourrait supposer que l'un des points α , β ou γ est rejeté à l'infini, par exemple le point γ auquel cas la droite $(\alpha\beta)$ serait parallèle aux droites (AB) et $(A'B')$. Mais mon but est simplement de montrer l'usage de l'espace comme auxiliaire de démonstration et je ne cherche pas à être exhaustif.

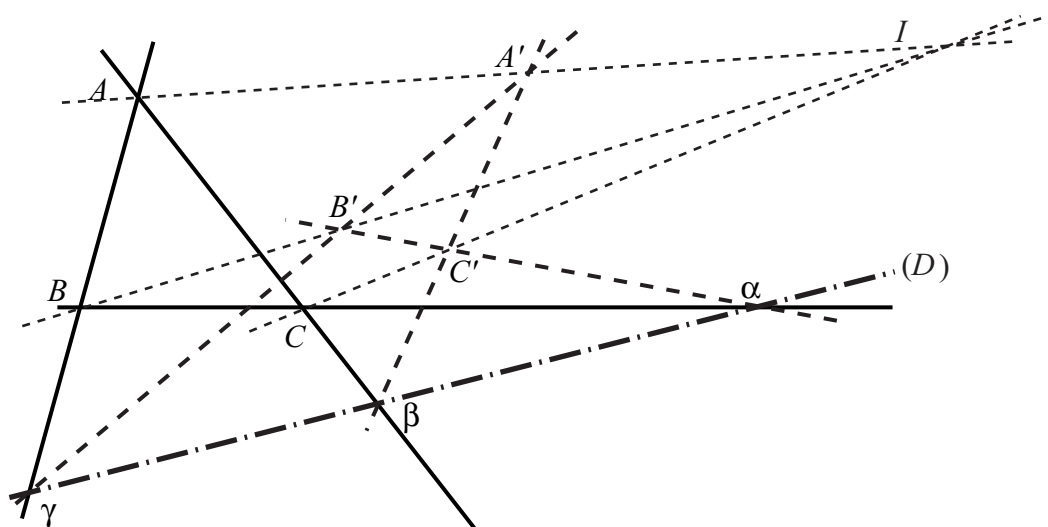


Figure 1

1.1. Démonstration dans le plan

Il existe bien évidemment une démonstration projective du théorème.

- (1) \implies (2) : On envoie les points α et β à l'infini. Dans ce cas, les droites (BC) et $(B'C')$ d'une part et les droites (CA) et $(C'A')$ d'autre part, sont parallèles. Si le point I est à distance finie (respectivement à l'infini), alors il existe une homothétie (respectivement une translation) qui envoie A sur A' , B sur B' et C sur C' et par suite (AB) est parallèle à $(A'B')$ ce qui prouve que α est également à l'infini et les points α , β , γ sont alignés.
- (2) \implies (1) : Réciproquement, si les points α , β et γ sont tous les trois sur la droite à l'infini, alors les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont leurs côtés respectifs parallèles, ils sont donc images l'un de l'autre soit par une translation, soit par une homothétie. Dans le premier cas les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles, dans le deuxième cas elles sont concourantes.

On pourra objecter que ce type de démonstration projective n'est autre que, le vocabulaire y fait référence, une forme de projection de l'espace sur le plan. Historiquement, c'est bien ainsi que la théorie est apparue. Voici une démonstration non projective de la partie directe dans le cas où le point I existe. Cette démonstration¹ est extraite du livre du problème Le calcul barycentrique de l'IREM de Strasbourg ([1], page 90).

Il existe des nombres réels a, a', b, b', c, c' non nuls avec $a + a' = b + b' = c + c' = 1$, tels que

$$I = aA + a'A' = bB + b'B' = cC + c'C' .$$

Il en résulte que $bB - cC = c'C' - b'B'$. Comme les droites (BC) et $(B'C')$ se coupent, les coefficients b et c ainsi que les coefficients b' et c' sont distincts. Le point d'intersection α de ces droites est caractérisé par les relations

$$bB - cC = c'C' - b'B' = (b - c)\alpha .$$

¹Une démonstration barycentrique complète du théorème de DESARGUES est en ligne sur la page d'Annette PAUGHAM [3].

Il vient de même $cC - aA = (c - a)\beta$ et $aA - bB = (a - b)\gamma$. En ajoutant membre à membre les trois relations, il vient

$$(b - c)\alpha + (c - a)\beta + (a - b)\gamma = 0 ,$$

d'où il résulte que les trois points α, β, γ sont alignés.

1.2. Démonstration dans l'espace

On interprète la figure comme la projection sur un plan d'un solide de l'espace², en l'occurrence une pyramide (cas des droites concourantes en I comme le montre la figure ci-après) ou un prisme (cas des droites parallèles).

- Pour la partie directe, (1) \implies (2), on coupe ce solide par les plans (ABC) et $(A'B'C')$. Ces deux plans se coupent suivant une droite qui contient les points α, β, γ , d'où le résultat.
- Pour la réciproque, (2) \implies (1), considérons deux plans distincts (ABC) et $(A'B'C')$ se coupant selon $(D) = (\alpha\beta\gamma)$.

Si (AB) et $(A'B')$ se coupent en γ les points A, B, A', B' sont coplanaires et par suite (AA') et (BB') se coupent en I_3 . De la même façon (BB') et (CC') se coupent en I_1 et (CC') et (AA') se coupent en I_2 . Supposons $I_1 \neq I_2$: (I_1I_2) est une droite du plan $(ABA'B')$ donc C et C' sont dans ce plan et par suite les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont confondus contrairement à l'hypothèse faite. Les points I_1 et I_2 sont donc confondus en un point situé sur (AA') et (BB') qui est nécessairement le point I_3 , ce qui achève la démonstration dans le cas où les intersections existent.

Le lecteur traitera de façon analogue le cas où certaines des droites sont parallèles.

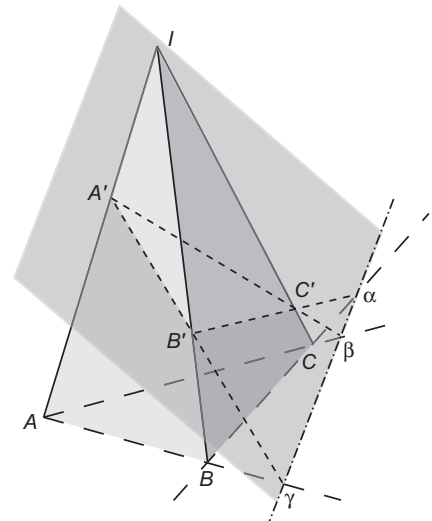


Figure 2

2. Les calissons d'Aix

Cette pâtisserie, spécialité de la région d'Aix-en-Provence, se présente habituellement sous la forme de losanges aux sommets légèrement arrondis. Ces losanges ont la particularité d'être formés de deux triangles équilatéraux accolés par une base commune. On peut donc regrouper les calissons par trois, quatre, cinq ou six autour d'un sommet puisque les angles de ces losanges sont de 60° et 120° . Ceci permet de varier la présentation. Nous allons nous intéresser au cas où les calissons sont rangés dans une boîte qui est un hexagone régulier aux dimensions ad hoc pour pouvoir y placer un nombre entier de calissons sans laisser de vide.

En termes mathématiques, nous dirons que nous cherchons à paver un hexagone régulier par des losanges dont un angle vaut 60° et dont le côté divise exactement le côté de l'hexagone. Ce pavage peut s'effectuer de bien des façons mais chaque losange n'y a que trois orientations possibles puisque ses côtés sont parallèles à deux côtés consécutifs de l'hexagone. Le but est de démontrer que chaque orientation contient le même nombre de losanges.

²Un résultat plus subtil est donné par le théorème de POHLKE.

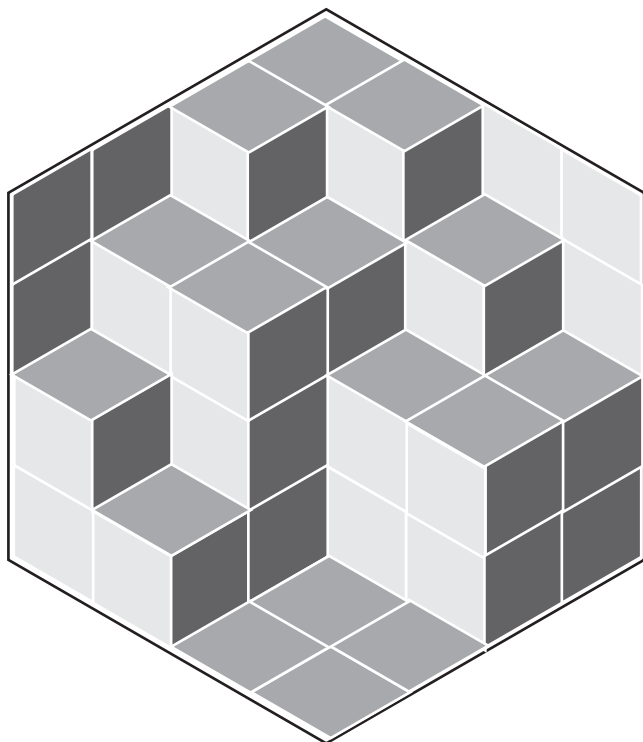


Figure 3

Voici un rangement de lozanges dans un hexagone. On vérifie qu'il y a autant de lozanges dans la direction gris clair que dans la direction gris moyen ou dans la direction noire.

2.1. Démonstration dans le plan

Je reprends ici la démonstration de Guy DAVID et Carlos TOMEI ([2]).

Considérons la boîte hexagonale $ABCDEF$ de côté n dans laquelle ont été rangés les calissons de côté 1. Ils sont au nombre de $3n^2$ comme le montre un calcul élémentaire d'aire. On considère des chaînes de calissons telles que deux successifs aient un côté commun parallèle à un des côtés de la boîte (toujours le même), le premier calisson étant placé le long de ce côté de la boîte. On appelle chaînes de type C_1 celles qui partent du côté $[AB]$ de la boîte (cf. figure ci-contre), chaînes de type C_2 celles qui partent du côté $[AF]$ et chaînes de type C_3 celles qui partent du côté $[BC]$.

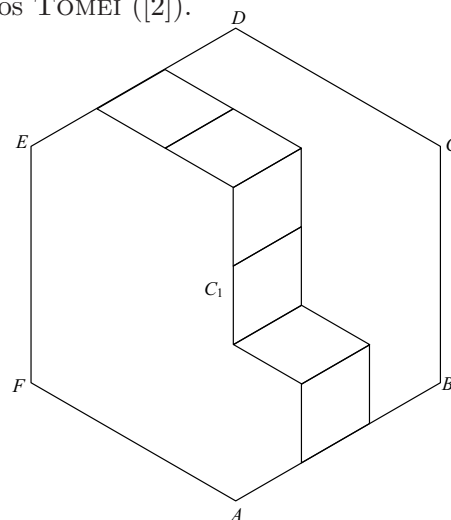


Figure 4

- Il est clair qu'une chaîne C_i va d'un côté au côté opposé qui lui est parallèle.
- Deux chaînes de même type C_i et C'_i n'ont aucun calisson en commun.
- Deux chaînes de type différent C_i et C_j avec $i \neq j$ ont exactement un calisson en commun.
- Les calissons appartenant à deux chaînes de type donné C_i et C_j ont tous la même orientation (chacun des types détermine la direction d'un des côtés du calisson).
- Il y a exactement n chaînes de chaque type (on ne peut placer que n calissons le long de chaque côté de la boîte).

Considérons alors les n chaînes de type C_1 et les n chaînes de type C_2 . Les calissons qui sont à l'intersection d'une chaîne de type C_1 et d'une chaîne de type C_2 sont au nombre de n^2 . Il y a donc au moins n^2 calissons qui ont l'orientation $AB - AF$. Mais le même raisonnement prouve qu'il y a aussi au moins n^2 calissons dans chacune des deux autres orientations. Comme le total est de $3n^2$, il y a donc exactement n^2 calissons dans chaque orientation.

2.2. Démonstration dans l'espace

La démonstration qui suit est due à Jean MARTINET³. Elle est citée dans la référence [2].

La figure 3 fait irrésistiblement penser à un empilement de cubes dessiné selon une perspective isométrique. Ces cubes sont coloriés avec trois couleurs, une couleur pour chaque direction de face correspondant aux trois plans de coordonnées. Si au lieu de considérer une perspective isométrique nous projetons l'empilement des cubes orthogonalement sur l'un des plans de coordonnées, il est clair que l'on voit alors n^2 petits carrés de la même couleur. Ceci semble achever la démonstration.

Toutefois elle repose sur l'observation d'un dessin et rien ne prouve que toutes les configurations conduisent à la projection d'un empilement de cubes. Nous allons montrer que c'est bien le cas en associant un triplet d'entiers à chaque sommet du graphe Γ que forment les côtés des calissons. Ce triplet est ensuite interprété comme les coordonnées d'un point de l'espace.

Au point A est associé le triplet $(n, n, 0)$, (figure 5). Si au sommet S est associé le triplet (a, b, c) alors au sommet voisin S' sera associé le triplet (a', b', c') avec

1. $(a', b', c') = (a - 1, b, c)$ si $(SS') \parallel (AB)$ et S' au dessus de S ;
2. $(a', b', c') = (a + 1, b, c)$ si $(SS') \parallel (AB)$ et S' au dessous de S ;
3. $(a', b', c') = (a, b - 1, c)$ si $(SS') \parallel (AF)$ et S' au dessus de S ;
4. $(a', b', c') = (a, b + 1, c)$ si $(SS') \parallel (AF)$ et S' au dessous de S ;
5. $(a', b', c') = (a, b, c - 1)$ si $(SS') \parallel (BC)$ et S' au dessous de S ;
6. $(a', b', c') = (a, b, c + 1)$ si $(SS') \parallel (BC)$ et S' au dessus de S .

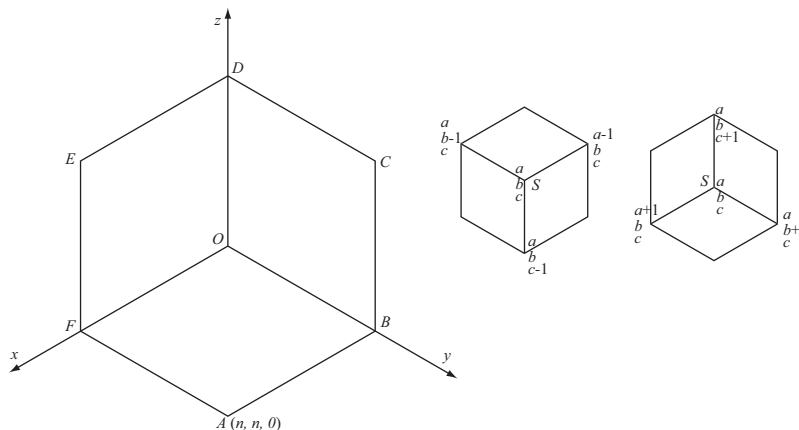


Figure 5

Cette méthode associe un triplet unique à chaque sommet du graphe, quel que soit le chemin suivi depuis A car si on tourne autour d'un calisson il est clair qu'on revient

³Jean MARTINET fut professeur à l'Université Louis Pasteur jusqu'à son décès en 1990. Il a été directeur de l'IREM de Strasbourg.

au point de départ. Il est facile de vérifier qu'un calisson de couleur gris moyen verra ses sommets affectés de quatre triplets ayant la même valeur de c , ce qui prouve que ce calisson peut être interprété comme une face supérieure d'un cube élémentaire. On a des résultats analogues pour les deux autres orientations.

On a même mieux. Considérons la fonction f qui à tout couple d'entiers (a, b) , avec a et b dans $[[1, n]]$, associe l'entier $c = \sup\{z \mid (a, b, z) \in \Gamma\}$. Cette fonction est décroissante en a et décroissante en b . En effet pour passer de $f(a, b)$ à $f(a + 1, b)$ on effectue quelques-unes des étapes précédentes qui toutes conservent ou diminuent la valeur de c sauf dans le cas 6 mais celui-ci ne peut avoir lieu en raison de la définition même de $c = f(a, b)$. Le raisonnement est le même pour b .

Ainsi l'empilement des cubes correspond-il à un empilement stable physiquement dans la position où le grand cube a sa diagonale verticale. Il y a donc autant de rangements de calissons dans une boîte hexagonale de côté n que de façons de ranger au plus n^3 cubes dans un cube de côté n de façon que ces cubes soient stables quand on place la boîte grande diagonale debout ou enfin de fonctions de $[[1, n]]^2$ dans $[[1, n]]$ décroissantes sur chacune des variables. Ce dénombrement est toutefois difficile : pour $n = 1$ on a 2 solutions, pour $n = 2$ il y a 20 solutions, puis 980 pour $n = 3 \dots$

3. Des cercles égaux

On considère trois cercles C_I, C_J et C_K de même rayon R , passant par un même point O et de centres respectifs I, J, K . On note A le deuxième point d'intersection de C_J et C_K , de même B est le deuxième point d'intersection de C_I et C_K et C celui de C_I et C_J . Alors les points A, B et C appartiennent à un même cercle C_L de centre L et de même rayon R (en pointillés sur la figure 6).

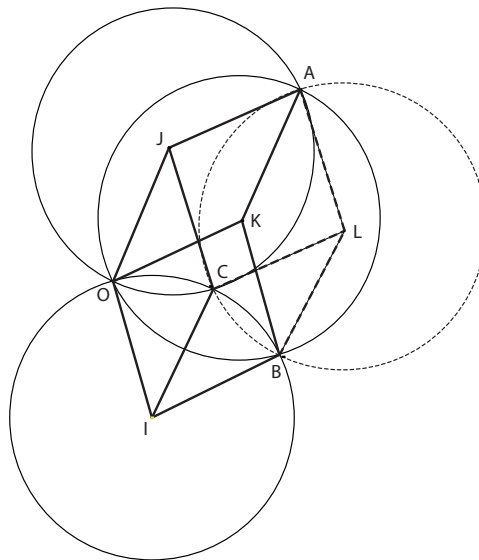


Figure 6

3.1. Démonstration dans le plan

Puisque les cercles ont même rayon, nous avons

$$IO = IB = IC = JO = JA = JC = KO = KA = KB = R .$$

Par conséquent les quadrilatères $IOKB, JOIC, KOJA$ sont des losanges. Par suite les droites $(IO), (JC), (KB)$ sont parallèles, de même $(JO), (KA), (IC)$ et $(KO), (IB), (JA)$. Notons L le symétrique du point I par rapport à la droite (BC) . Comme I est à distance R de B et C , il en est de même pour L et le quadrilatère $IBLC$ est un losange. Mais alors (LC) est parallèle à (JA) et $JALC$ est aussi un losange de côté R . En raison des parallélismes précédents $IBLC$ se déduit de $OKAJ$ par la translation de vecteur \overrightarrow{OI}

qui est donc égal à \overrightarrow{AL} . Nous en déduisons que $LA = LB = LC = R$ ce qui permet d'affirmer que A, B et C sont sur un même cercle de centre L .

3.2. Démonstration dans l'espace

Quand on observe la figure précédente en l'imaginant dans l'espace, il est tentant de voir en $IOJCLAKB$ la projection d'un cube $I'O'J'C'L'A'K'B'$. D'après le théorème de POHLKE, $O'IJK$ peut être considéré comme la perspective isométrique d'un trièdre orthonormé et par suite $O'IJKABC$ comme la projection de trois faces d'un cube. Soit alors L la projection du sommet manquant L' . Il est clair que L' est équidistant, sur le cube, des trois sommets voisins A', B' et C' et qu'il en est donc de même des projections puisqu'il s'agit d'une perspective isométrique qui conserve les longueurs parallèles aux axes de coordonnées.

On notera que dans ce cas, il n'y a pas une grande différence entre la démonstration plane et celle de l'espace, mais il serait dommage de se passer du point de vue spatial, ne serait-ce que parce que nous avons l'habitude de cette représentation de l'espace.

4. Le théorème de Brianchon

Le théorème de BRIANCHON affirme que si un hexagone est circonscrit à un cercle alors les diagonales qui joignent les sommets opposés sont concourantes ou parallèles.

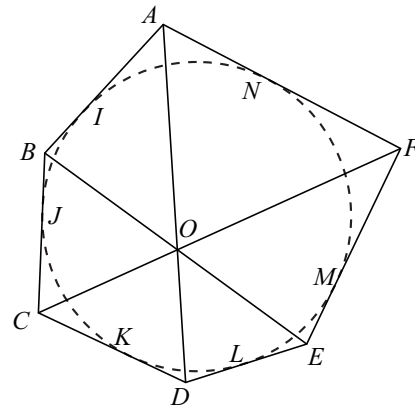


Figure 7

En pratique ce théorème est aussi un théorème de géométrie projective ; il s'applique non seulement à un cercle mais aussi à une conique arbitraire.

4.1. Démonstration dans le plan

BRIANCHON (1785 - 1864) a démontré ce théorème en faisant appel à la transformation par polaires réciproques (une forme de dualité) et en se ramenant ainsi au théorème de PASCAL sur les hexagones inscrits dans un cercle dont les côtés opposés se coupent selon trois points alignés.

Polaire réciproque

La transformation par polaire réciproque par rapport au cercle inscrit dans l'hexagone, transforme le point A en la droite (IN) , la droite (AB) en le point I , la droite (AD) en le point d'intersection de (IN) et (KL) et le point O en une droite, celle sur laquelle sont alignés les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone $IJKLMN$.

On ne sait pas bien comment PASCAL a démontré son théorème. On lui doit en revanche sa généralisation à une conique quelconque. Il est clair que cette démonstration du théorème

de BRIANCHON n'est pas accessible à un lycéen. Une démonstration analytique est longue et fastidieuse. Je dois à Michel ÉMERY⁴ la démonstration suivante qui ne repose que sur la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle .

Puissance d'un point par rapport à un cercle et axe radical

Soit M un point et (C) un cercle de centre O et de rayon R . Une droite passant par M coupe (C) en A et B . Alors la quantité $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ est indépendante de la sécante choisie et est appelée puissance de M par rapport au cercle (C) . En particulier si la droite est tangente au cercle en T alors $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MT}^2$.

En faisant intervenir le milieu I de $[AB]$, il est facile de voir que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MO^2 - R^2$. Soit O et M de coordonnées respectives (a, b) et (x, y) alors

$$MO^2 - R^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 ,$$

qui n'est autre que le premier membre de l'équation du cercle (un point du cercle a une puissance nulle). On en déduit que l'ensemble des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles est une droite puisque l'on a

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 &= (x - a')^2 + (y - b')^2 - R'^2 \\ \Leftrightarrow 2(a - a')x + 2(b - b')y + a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2 + R^2 - R'^2 &= 0 . \end{aligned}$$

Cette droite est appelée l'axe radical des deux cercles.

Démonstration du théorème de BRIANCHON

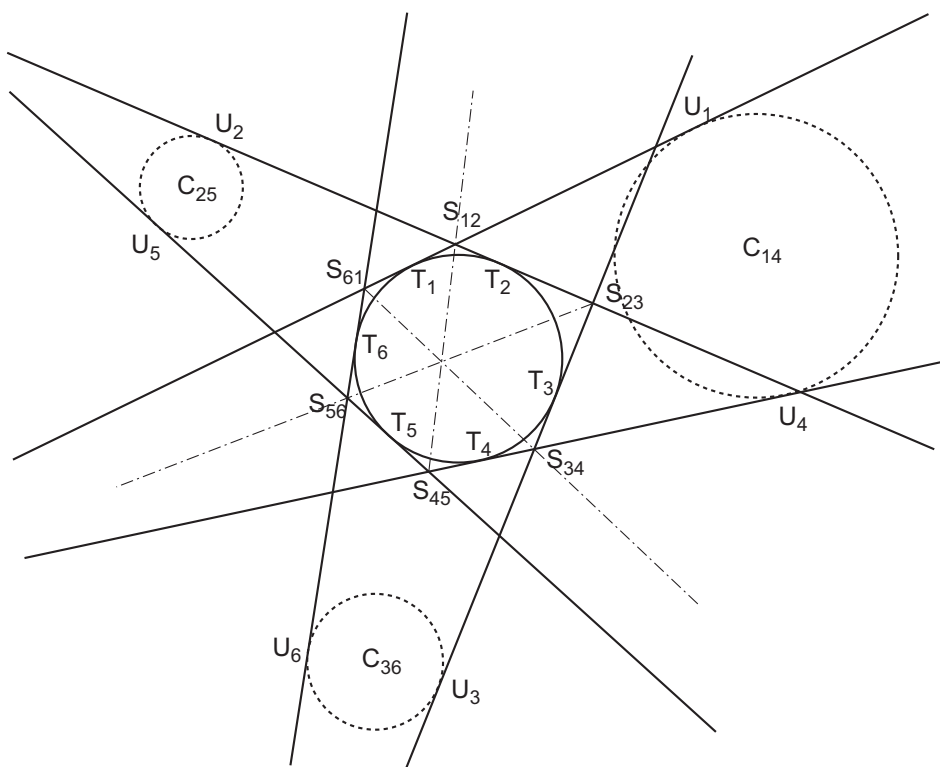


Figure 8

Orientons le cercle et ses tangentes de la même façon (c'est-à-dire qu'au point de contact les orientations soient les mêmes). Notons, comme sur la figure 8, T_i (i de 1 à 6) les points

⁴Il avait vu cette démonstration quand il était en mathélem.

de contacts des côtés de l'hexagone avec son cercle inscrit et S_{ij} le sommet intersection des côtés tangents en T_i et T_j . On choisit un point U_1 sur la tangente en T_1 puis on considère les points U_i sur les tangentes en T_i tels que

$$\overline{T_1U_1} = -\overline{T_2U_2} = \overline{T_3U_3} = -\overline{T_4U_4} = \overline{T_5U_5} = -\overline{T_6U_6}.$$

Il existe un cercle C_{14} tangent en U_1 au côté passant par T_1 et en U_4 au côté passant par T_4 , comme on le voit en faisant une symétrie par rapport à la bissectrice des deux côtés (ou l'axe médian en cas de parallélisme). On a de même un cercle C_{25} tangent en U_2 et U_5 aux côtés passant par T_2 et T_5 et enfin un cercle C_{36} tangent en U_3 et U_6 aux côtés passant par T_3 et T_6 . De l'égalité des segments de tangentes issus d'un point à un cercle on en déduit

$$\overline{T_1U_1} = -\overline{T_2U_2} \text{ et } \overline{T_1S_{12}} = -\overline{T_2S_{12}} \implies \overline{S_{12}U_1} = -\overline{S_{12}U_2} \implies (S_{12}U_1)^2 = (S_{12}U_2)^2.$$

Ce qui prouve que S_{12} a même puissance par rapport aux deux cercles C_{14} et C_{25} . On démontre de même que S_{45} a même puissance par rapport à ces deux mêmes cercles. Il en résulte que la droite $(S_{12}S_{45})$ est l'axe radical de C_{14} et C_{25} .

Semblablement, la droite $(S_{23}S_{56})$ (*resp.* $(S_{34}S_{61})$) est l'axe radical de C_{25} et C_{36} (*resp.* C_{36} et C_{14}). Mais le point d'intersection de deux de ces axes radicaux a même puissance par rapport aux trois cercles et se trouve donc sur le troisième axe radical. Les trois droites, diagonales de l'hexagone initial, sont donc concourantes.

4.2. Démonstration dans l'espace

La démonstration qui suit est due à Miguel DE GUZMÁN. S'il l'a publiée en 1983 dans [4], il l'avait découverte dès 1976. Commençons par deux lemmes, le premier est illustré par la figure suivante ; nous en laissons la démonstration à la charge du lecteur.

Lemme 1

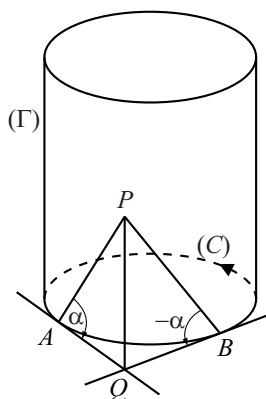


Figure 9

On considère un cylindre circulaire droit (Γ) de base le cercle (C) que l'on oriente arbitrairement. Soit deux points A et B de (C) et les deux demi-tangentes (Ax) et (By) de sens contraire en A et B . Soit (Π_A) et (Π_B) les plans tangents à (Γ) en A et B , plans que l'on oriente de la même façon vus de l'intérieur du cylindre. Soit enfin deux droites tangentes à (Γ) respectivement en A et B et faisant des angles opposés (différents d'un angle droit) avec les demi-tangentes.

Alors ces deux droites sont soit parallèles et alors A et B sont diamétralement opposées, soit se coupent en un point P dont la projection orthogonale sur le plan de (C) est le point Q intersection des tangentes (Ax) et (By) .

Réciproquement si Q est l'intersection des tangentes en A et B au cercle (C) et si on se donne P tel que (PQ) est parallèle à l'axe du cylindre, alors les droites (PA) et (PB) font des angles opposés avec (AQ) et (BQ) moyennant l'orientation ci-dessus des plans tangents.

Le *lemme 2* annonce que trois droites de l'espace qui ne sont pas coplanaires et qui se coupent deux à deux passent par un même point. La démonstration est immédiate.

Démonstration. — Considérons le cercle (C) dans le plan (π) et l'hexagone circonscrit $ABCDEF$, les points de tangence étant I, J, K, L, M, N .

Par A traçons la perpendiculaire à (π) jusqu'en un point arbitraire A' . Joignons A' à I et prolongeons jusqu'à couper en B' la perpendiculaire à (π) en B . Continuons ainsi dans l'espace pour obtenir successivement les points A', B', C', D', E', F' et nous revenons en A' .

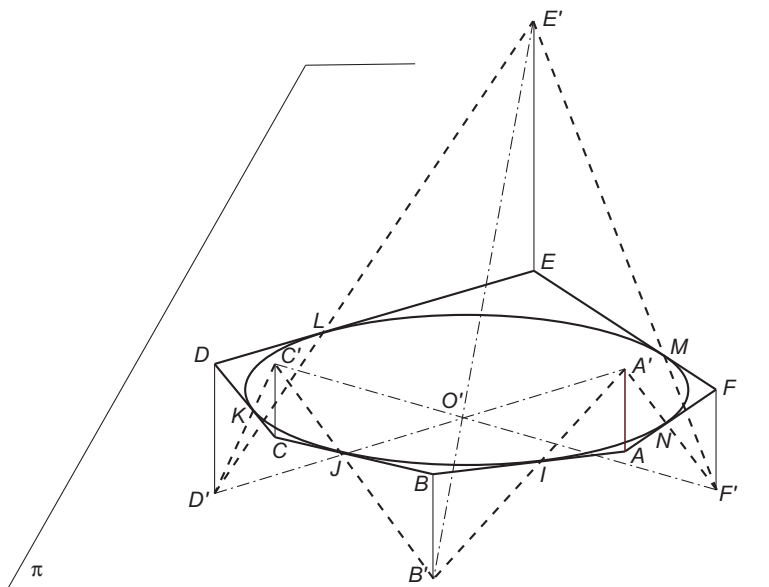


Figure 10

Considérons alors les droites $(A'D')$, $(B'E')$ et $(C'F')$. Observons que $(A'B')$ et $(D'E')$ sont dans la situation du lemme 1 et qu'ainsi ces droites sont soit parallèles soit concourantes et par suite A', B', D', E' sont coplanaires et les droites $(A'D')$ et $(B'E')$ sont parallèles ou concourantes; mais elles ne peuvent être parallèles par construction, elles sont donc concourantes. Il en est de même pour les droites $(B'E')$ et $(C'F')$ et pour $(C'F')$ et $(D'A')$. Il s'ensuit d'après le lemme 2 que ces trois droites sont concourantes en un point O' . Mais alors leurs projections orthogonales sur (π) ne sont autres que les diagonales de l'hexagone qui par suite se coupent en un point O .

5. Conclusion

Certaines démonstrations ne sont guère évidentes dans le plan. Les exemples précédents l'ont amplement montré. Mais voir dans l'espace n'est pas habituel et pourtant pour au moins la démonstration sur le rangement des calissons et celle sur le théorème de DESARGUES, le simple fait de dire « regarder la figure comme une figure de l'espace » et la démonstration saute aux yeux. C'est ce qui s'appelle changer de point de vue.

Bien sûr, la démonstration du théorème de BRIANCHON par Miguel DE GUZMÁN n'est pas évidente, mais force est de reconnaître qu'elle fait appel à des notions bien plus élémentaires et qu'elle est plus simple que les démonstrations que l'on peut imaginer dans le plan (par la géométrie analytique, par la dualité ou comme ici en utilisant la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle).

Apprendre à changer de point de vue, voilà ce qui me paraît essentiel dans la formation des élèves. Il est certes beaucoup plus facile d'apprendre des théorèmes et de savoir les appliquer dans des situations évidentes. Seulement, pour cela, nul besoin de professeurs de mathématiques, un répétiteur suffit et demain des machines remplaceront l'homme comme elles l'ont remplacé pour bien des calculs. Et au-delà de l'élève c'est aussi une attitude indispensable pour qui veut faire un tant soit peu de recherche (en mathématique comme ailleurs). Rappelons à ce propos qu'après la découverte des premiers pavages obligatoires-

ment non-périodiques la recherche sur ce sujet a fait un bond en avant quand on a su les interpréter en plaçant dans un réseau spatial cristallin un plan ne contenant qu'un des atomes du cristal.

Quand on parle d'utilité des mathématiques, c'est dans ce genre de formation au changement de point de vue, de formation à la transposition de certains savoirs d'un domaine à l'autre, de formation à regarder autrement une équation ou une figure que les mathématiques sont vraiment utiles car elles forment alors des citoyens critiques donc responsables.

Bibliographie

- [1] IREM DE STRASBOURG (1975), Le calcul barycentrique, *Cedic* . En ligne à l'adresse <http://irem.u-strasbg.fr/structure/framelivrepb.html>
- [2] G. DAVID & C. TOMEI (1989), *The problem of Calissons*, Am. Math. Monthly. **96,5**, 429–431.
- [3] A. PAUGAM (2003), *Une démonstration d'un théorème de DESARGUES par le calcul barycentrique*, en ligne sur sa page <http://www.perso.univ-rennes1.fr/annette.paugam/>.
- [4] M. DE GUZMÁN (1983), *Algunos aspectos insólitos de la actividad matemática*, Investigación y Ciencia (édition espagnole du Scientific American), février 1983, 100-108.

SOMMAIRE

Carlo Marchini & Maria Gabriella Rinaldi (Italie)

Les préconceptions des enfants de huit ans sur les triangles isocèles.

Eric Laguerre (France)

Le concept de typicalité appliqué aux registres figuraux et numérico-algébriques : figures archétypes, prototypes pathologiques et pathogènes, typicalité dans la résolution de tâches.

Eric Roditi (France)

La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté.

Philippe R. Richard & Josep M. Fortuny (Canada, Espagne)

Amélioration des compétences argumentatives à l'aide d'un système tutoriel en classe de mathématique au secondaire

Lurdes Figueiral & Inés Maria Gómez-Chacón (Portugal, Espagne)

Identité et facteurs affectifs dans l'apprentissage des mathématiques (des élèves portugais en classes belges francophones de l'enseignement technique).

Abdulkadir Erdogan & Alain Mercier (France)

Les forums de questions mathématiques sur Internet et les attentes sur le travail des élèves.

M. Eugenia Andreu Ibarra & Jesús A. Riestra Velázquez (Mexique - article adapté par F. Pluvinage)

Et si nous en restions à Euler et Lagrange ? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieures.

Carl Winsløw (Danemark)

Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique.

Des informations sur la revue, les résumés et abstracts des articles parus sont disponibles sur le site de l'IREM de Strasbourg :

<http://irem.u-strasbg.fr/irem/structure/frameannales.html>

RETOUR DE VACANCES

Michel ÉMERY

Résumé : Solution d'un problème.

Mots-clé : Problème - Dénombrement - Cercle - Longueur d'arc - Probabilité.

En page 62 du numéro 115, L'OUVERT proposait le problème ci-dessous, que je remercie Freddy DELBAEN de m'avoir fait connaître. Merci aussi à Nicole BOPP, pour son temps, ses nombreux commentaires et ses talents d'illustratrice.

Énoncé

Un cercle \mathcal{C} est fixé une fois pour toutes. Deux points de \mathcal{C} seront dits *proches* s'ils sont joints par un arc de \mathcal{C} mesurant au plus $2\pi/3$ radians. (Deux sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans \mathcal{C} sont proches ; deux points de \mathcal{C} plus éloignés ne le sont pas.)

Étant donné un ensemble E de n points de \mathcal{C} , montrer que, parmi les n^2 couples ordonnés formant l'ensemble $E \times E$, au moins la moitié sont des couples de points proches.

Une solution

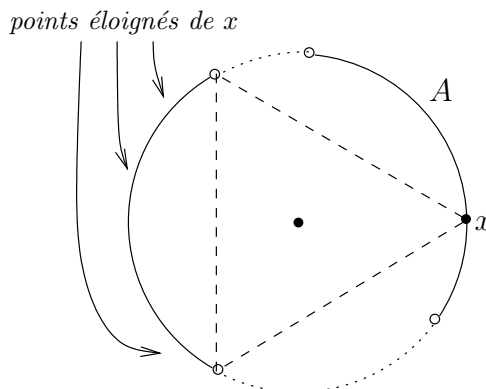
Disons qu'un point du cercle est *éloigné* d'un autre si ces deux points ne sont pas proches. Il s'agit d'établir que le nombre de couples $(x, y) \in E \times E$ tels que y soit éloigné de x est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}n^2$.

Par « point » sans autre précision, nous entendrons toujours « point de \mathcal{C} ». Nous allons nous intéresser aux arcs de \mathcal{C} de mesure $2\pi/3$ et ouverts (comme on parle d'intervalles ouverts : les extrémités n'en font pas partie) ; appelons-les *ticos*, pour Tiers de Cercle Ouverts. Ils possèdent les deux propriétés suivantes :

(P1) Les points éloignés d'un point x donné sont tous dans un même *tico* (le *tico* centré au point diamétralement opposé à x).

(P2) Si un point x appartient à un *tico* A , tout point éloigné de x est dans le complémentaire $\mathcal{C} \setminus A$ de ce *tico*.

Chaque *tico* contient un certain nombre, entre 0 et n , de points de E . Appelons m le nombre maximum de points de E contenus dans un même *tico*, et fixons une fois pour toutes un *tico* A maximal, c'est-à-dire contenant m points de E . Son complémentaire $\mathcal{C} \setminus A$ contient évidemment $n - m$ points de E .



Pour compter les couples (x, y) de $E \times E$ tels que y soit éloigné de x , ou plutôt pour majorer leur nombre, nous allons les répartir en deux classes.

- Premièrement, ceux tels que x soit dans A . En raison de (P2), y doit alors être dans $\mathcal{C} \setminus A$. Le nombre de tels couples (x, y) est donc majoré par le produit

$$m(n - m)$$

du nombre de points de E dans A par le nombre de points de E dans $\mathcal{C} \setminus A$.

- Deuxièmement, les autres, c'est-à-dire les (x, y) de $E \times E$ tels que x soit dans $\mathcal{C} \setminus A$ et que y soit éloigné de x . Le nombre de choix possibles pour x est $n - m$; et, pour chaque x , le nombre de y possibles est au maximum m , puisque par (P1) tous ces y sont dans un même *tico*, qui ne peut contenir plus de m points de E (maximalité de m). L'effectif de ces (x, y) est donc majoré par

$$(n - m)m .$$

En tout, le nombre de couples éloignés est majoré par $2m(n - m)$; il ne reste pour conclure qu'à invoquer l'inégalité élémentaire $2m(n - m) \leq n^2/2$.

Malgré sa simplicité, cette démonstration est difficile à trouver parce qu'elle brise une symétrie du problème : y est éloigné de x si et seulement si x l'est de y . L'instinct mathématique pousserait au contraire à tirer partie de cette symétrie, alors que dans cette solution, certains (x, y) sont dans la même catégorie que le (y, x) correspondant, d'autres pas.

Généralisations

En examinant la démonstration qui précède, on voit sans peine qu'elle se laisse mettre sous une forme plus abstraite :

Pour x appartenant à E , notons $L(x)$ l'ensemble des points de E qui sont éloignés de x , et $\text{Card } L(x)$ le nombre de ces points. Les propriétés (P1) et (P2) entraînent que, si y est éloigné de x , $L(x) \cap L(y)$ est vide; on en tire $\text{Card } L(x) + \text{Card } L(y) \leq n$:

$$(*) \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad y \in L(x) \quad \implies \quad \text{Card } L(y) \leq n - \text{Card } L(x) .$$

Cette propriété (*) suffit pour résoudre le problème : oubliant le cercle, on peut comme ci-dessus montrer qu'en toute généralité, *étant donné un ensemble E ayant n éléments et une application L de E vers $\mathcal{P}(E)$ vérifiant (*), il existe dans $E \times E$ au plus $\frac{1}{2}n^2$ couples (x, y) tels que $y \in L(x)$.*

Nous laissons aux lecteurs cette généralisation. Elle permet par exemple de vérifier que le même résultat subsiste, sans changement et pour la même raison, si l'on remplace le cercle \mathcal{C} par une sphère, puisque, tout comme sur le cercle, on a la propriété

$$y \in L(x) \quad \implies \quad L(y) \subset E \setminus L(x) ,$$

qui est plus forte que (*). Dans ces deux cas, cercle et sphère, la relation d'éloignement $y \in L(x)$ est en outre antiréflexive et symétrique; mais ces propriétés ne jouent ici aucun rôle, et ne font que rendre la solution moins facile à trouver.

Il est d'ailleurs possible, toujours avec la même démonstration, d'obtenir un résultat un tout petit peu plus fort que celui prouvé ci-dessus, et dans lequel la relation n'est plus

symétrique : orientons le cercle et disons qu'un point y est éloigné d'un point x si la mesure de l'arc orienté d'origine x et d'extrémité y est dans l'intervalle $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[$ (au lieu de $]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[$ comme précédemment). Comme la valeur $\frac{2\pi}{3}$ est maintenant autorisée, il est devenu un tout petit peu plus facile à deux points d'être éloignés, mais (P1) et (P2) subsistent pour ces arcs semi-ouverts, la démonstration marche encore et il reste vrai que l'effectif des couples (x, y) tels que y soit éloigné de x est au plus $n^2/2$.

Problème probabiliste

Le problème de probabilités se résout de la même façon. Rappelons-en l'énoncé : *étant données deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi, à valeurs dans le cercle, il s'agit de montrer que la probabilité pour que Y soit éloigné de X est au maximum $\frac{1}{2}$.*

À tout arc A du cercle, associons la probabilité $p(A)$ pour que le tirage de X (ou de Y , puisque sa loi est la même) tombe dans A . Parmi tous les *ticos*, cherchons-en un dont la probabilité est maximale. Un tel *tico* n'existe pas nécessairement, parce que le maximum peut ne pas être atteint, mais, pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver un *tico* A (qui dépend de ε) tel que $p(B) \leq p(A) + \varepsilon$ pour tout autre *tico* B . Maintenant, tirons au sort le point aléatoire X , et envisageons deux cas.

- Premièrement, X a pu tomber dans A ; ceci s'est produit avec probabilité $p(A)$. En ce cas, par (P2), tout point éloigné de la valeur obtenue X est dans $\mathcal{C} \setminus A$; donc lorsque Y sera tiré, il aura une probabilité au plus $1 - p(A)$ de se trouver éloigné de X . Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Prob} [X \text{ est dans } A \text{ et } Y \text{ est éloigné de } X] \\ \leq \text{Prob} [X \text{ est dans } A \text{ et } Y \text{ dans } \mathcal{C} \setminus A] = p(A) (1 - p(A)) . \end{aligned}$$

- Deuxièmement, X a pu atterrir dans le complémentaire de A ; ceci a eu lieu avec probabilité $1 - p(A)$. Une fois X observé, (P1) dit que Y sera éloigné de X à condition de tomber dans un certain *tico*; mais la probabilité de tomber dans ce *tico* (ou dans n'importe quel autre) est majorée par $p(A) + \varepsilon$, car A est presque maximal. Donc

$$\text{Prob} [X \text{ est dans } \mathcal{C} \setminus A \text{ et } Y \text{ est éloigné de } X] \leq (1 - p(A)) (p(A) + \varepsilon) .$$

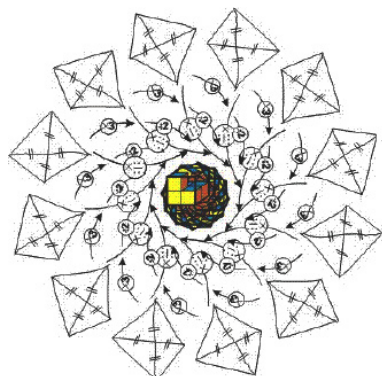
Il ne reste qu'à additionner ces inégalités pour obtenir

$$\text{Prob} [Y \text{ est éloigné de } X] \leq (1 - p(A)) (2p(A) + \varepsilon) \leq 2p(A) (1 - p(A)) + \varepsilon .$$

L'inégalité $2t(1 - t) \leq \frac{1}{2}$ entraîne que cette probabilité est majorée par $\frac{1}{2} + \varepsilon$, et comme ε était arbitraire, elle ne peut dépasser $\frac{1}{2}$.

Michel ÉMERY
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
emery@math.u-strasbg.fr

RESSOURCES POUR LE PROGRAMME DE CINQUIÈME



Auteurs : Anne ARCHIS, Gilles BOURDENET, Jean-Luc GASSER, Samuel GONZALES, Claude PELNARD, Rémi REGOURD, Gabrielle ROESCH, Michèle ZIEGLER, membres du groupe « Brochure cinquième » de l'IREM de Strasbourg.

Résumé : Cette brochure présente un grand nombre d'activités et d'exercices à destination des élèves de cinquième (programme 2006). Elle couvre la quasi-totalité du programme. Un cours est rédigé pour chaque chapitre. Pour concevoir cet ouvrage, les auteurs se sont appuyés sur la notion de changement de registre et sur les récents travaux en didactique concernant les différents statuts des lettres et du symbole « = ». Toutes les activités sont accompagnées de commentaires pédagogiques, il en est de même pour la plupart des exercices qui ont été testés dans les classes des auteurs. Pour des raisons de lisibilité, cette brochure est présentée sous forme de chapitres, à l'instar des manuels scolaires. Les auteurs conseillent cependant de ne pas traiter un chapitre donné en une seule fois, mais d'y revenir tout au long de l'année. Il en est ainsi par exemple du chapitre « distributivité et calcul littéral » qui peut paraître très dense et qui, dans leur optique, doit être travaillé sur toute l'année scolaire afin d'être correctement assimilé par l'élève.

Le Cédérom d'accompagnement contient la totalité du texte de la brochure et permettra au professeur de créer ses propres séances.

Mots-clés : Classe de cinquième - Priorités - Distributivité - Expression littérale - Égalité - Droite graduée - Fraction - Nombre relatif - Symétrie centrale - Angles - Triangle - Parallélogramme - Prisme - Cylindre - Aire - Périmètre - Volume - Calcul mental - Calcul réfléchi - Méthodes - Activité - Cours - Exercices - Changement de registre - Objectif - Erreur.

Public concerné : Professeurs des collèges, enseignants en formation initiale ou continue.

Date de parution : Décembre 2007.

Format : 283 pages A4 + cédérom

Éditeur : IREM de Strasbourg (S. 194)

ISBN : 2-911446-29-1 (dépôt légal : 4ème trimestre 2007).

Prix : 17 € (+ 5 € de frais d'envoi).

Un bon de commande est accessible en ligne sur le site de l'IREM.

<http://irem.u-strasbg.fr>