ELIZABETH MONTOYA DELGADILLO & LAURENT VIVIER

LES CHANGEMENTS DE DOMAINE DANS LE CADRE DES ESPACES DE TRAVAIL MATHEMATIQUE

Abstract. Changes of field within the Mathematical Working Space framework
Research on Mathematical Work Spaces has been developed for more than fifteen years in the field of Geometry. Taking advantage of international meetings, it has been necessary to develop this framework to other fields such as Algebra, Analysis and Probability. In this context, we are interested in articulating mathematical fields in the mathematical work. Our study on changes of field is based more specifically on Geometrical Working Space distinguishing an initial field, or source, and a final field, or resolution. Examples analyzed in this article are taken from researches in Chile and France and allow us to build a set of questions to study changes of field.

Key-words. Mathematical Working Space, Field, Genesis

Résumé. La recherche sur les Espaces de Travail Mathématique s'est développée, depuis plus de quinze ans, dans le domaine de la géométrie. A la faveur de rencontres internationales, le besoin s'est fait récemment sentir de développer ce cadre théorique à d'autres domaines mathématiques comme l'algèbre, l'analyse ou les probabilités. Nous nous intéressons, dans ce contexte, à l'articulation des domaines mathématiques dans le travail mathématique. Notre étude sur les changements de domaine s'appuie plus spécifiquement sur les Espaces de Travail Géométrique en distinguant un domaine initial, ou source, et un domaine d'arrivée, ou de résolution. Les exemples développés proviennent d'investigations menées au Chili et en France et nous permettent de proposer une grille d'analyse pour l'étude des changements de domaine.

Mots-clés. Espace de Travail Mathématique, Domaine, Genèse.

Introduction

A la suite des recherches utilisant le modèle des paradigmes géométriques et des Espaces de Travail Géométrique (Houdement & Kuzniak, 2006 ; Kuzniak, 2009), Kuzniak (2011) a ouvert la voie pour une extension à d'autres Espaces de Travail Mathématique (ETM) relatifs à l'algèbre, à l'analyse, etc. Une question qui se pose, et qui a été récurrente lors des 3ème et 4ème colloques ETM (24-25 octobre 2012 à Montréal et 30 juin-04 juillet 2014 à El Escorial, Madrid) est la question de l'articulation de différents domaines mathématiques de travail.

De fait, lorsque l'on pose une tâche mathématique à un élève, elle est fréquemment posée à travers un ou deux domaines mathématiques et surtout il peut arriver que, au cours du travail, il faille changer de domaine. Ce peut être pour des raisons de

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 19, p. 73 - 101.

programmation de l'enseignement par le professeur, c'est ce qui est appelé ETM idoine (voir section 1), ou simplement pour des raisons mathématiques pour pouvoir effectuer la tâche – les deux points de vue ne s'excluent pas.

Par exemple, un exercice de géométrie, s'il est posé uniquement dans ce domaine, bascule très souvent dans un domaine numérique ou algébrique s'il est question de grandeur. C'est en partie pour cela que le cadre des Espace de Travail Géométrique (ETG) ne recouvre que partiellement les tâches géométriques relatives à l'utilisation du théorème de Pythagore car le travail devient souvent et très rapidement numérique ou algébrique (voir à ce propos Kuzniak, 2014).

Dans l'état actuel de l'avancement des recherches dans l'environnement des ETM, seul le domaine géométrique a été pleinement étudié et nos exemples s'appuient sur les notions d'ETG, noté également ETM_G. Dans cette étude nous prenons principalement en compte les domaines de la géométrie, du nombre et de l'algèbre. Cela recouvre l'essentiel de ce qui peut être observé dans le premier cycle secondaire (grades 7-10 au Chili, grades 6-9 en France).

Dans ce texte, nous nous intéressons aux changements de domaine de travail dont l'étude a été initiée au colloque ETM 3. Le rôle de l'enseignant nous paraît essentiel et notamment l'ETM idoine qu'il élabore pour ses élèves. Cela recouvre également, pour nous, les adaptations qu'il fait en classe. Ainsi, lorsqu'il s'agit d'une situation de classe, utilisons-nous des vidéos afin de mieux comprendre et d'analyser non seulement l'ETM idoine, mais aussi les responsabilités de chacun lors d'un changement de domaine de travail.

Ainsi, les trois premiers exemples, en section 2, sont-ils relatifs à l'influence de l'ETM idoine lors d'un changement de domaine. En section suivante, nous proposons trois exemples qui traitent du rôle des genèses du modèle des ETM dans un changement de domaine. Ces exemples n'ont pas vocation à être représentatifs ni génériques. L'idée est simplement de faire ressortir des points saillants d'un changement de domaine. Ainsi, en section 4 nous proposons une grille constituée de questions centrales pour analyser un changement de domaine et, en section 5, nous abordons le cas spécial de la visualisation en géométrie. Avant de traiter ces exemples, nous exposons, en section 1, le cadre des ETM que nous utilisons pour nos analyses.

1. Cadre d'analyse

1.1. Le modèle des Espaces de Travail Mathématique

Dans Houdement et Kuzniak (1996, 2006) et Kuzniak (2004), trois types de géométrie ont été identifiées comme des paradigmes, notées GI, GII et GIII. Elles coexistent dans l'enseignement et leur fonction est de permettre à l'élève de construire son propre *Espace de Travail Géométrique* guidé par le professeur. Les problèmes géométriques peuvent prendre différentes interprétations, avec des validations différentes, qui dépendent du paradigme et de l'institution, ce qui est pris en charge par la notion d'ETG.

Actuellement, le modèle considère plus généralement un Espace de Travail Mathématique (ETM) qui dépend d'un domaine mathématique. Ainsi, un ETG est noté ETM_{G} ou $\text{ETM}_{\text{Géométrie}}$, et on peut considérer des ETM d'autres domaines comme l'algèbre, $\text{ETM}_{\text{Algèbre}}$, etc. (Kuzniak, 2011). Les paradigmes permettent de caractériser les ETM (ibid.).

On distingue trois types d'ETM :

- l'ETM de référence qui est défini selon la relation au savoir, idéalement sur des critères mathématiques ;
- l'ETM idoine qui dépend d'une institution et qui est défini selon la manière dont ce savoir est enseigné dans cette institution avec une fonction propre ;
- l'ETM personnel qui dépend d'un sujet et qui est défini par la manière dont le sujet se confronte à un problème mathématique, avec ses propres connaissances et capacités cognitives.

Dans le modèle des ETM, on conçoit la conceptualisation comme le fruit d'une interaction entre un individu et des problèmes mathématiques (géométriques, algébriques,…), dans un *environnement organisé pour et par le mathématicien (géomètre, algébriste,…)* articulant deux *plans*, le plan épistémologique et le plan cognitif (ibid.).

Le *plan épistémologique* est constitué de trois *composantes* ou *pôles* : *representamen*, *référentiel théorique* et *artefact*. Le *plan cognitif* est constitué de trois processus : *visualisation*, *construction* et *preuve*. Pour décrire l'articulation de ces deux plans, on considère trois genèses (ibid.) :

- Une genèse *sémiotique* basée sur les registres de représentation sémiotique qui confère aux objets tangibles de l'ETM un statut d'objet mathématique opérationnel.
- Une genèse *instrumentale* qui permet de rendre opérationnel les artefacts dans le processus de construction.
- Une genèse *discursive* de la preuve qui donne un sens aux propriétés pour le mettre au service du raisonnement mathématique.

Les genèses de l'ETM permettent une articulation entre les plans et leurs composantes respectives. Cette articulation ne doit pas se comprendre comme la réunion de trois relations isolées entre deux composantes des plans épistémologique et cognitif, mais plutôt comme une relation activée conjointement par deux, voire trois, genèses. C'est dans cette perspective que Kuzniak et Richard (2014) ont défini trois *plans verticaux* reprenant les genèses deux à deux : sémiotique-instrumental (sem-inst), sémiotique-discursif (sem-disc) et instrumental-discursif (inst-disc).

Pour le chercheur, il est important d'identifier les genèses activées par un professeur (ETM idoine) et les genèses privilégiées par un élève lors de la réalisation d'une tâche mathématique (ETM personnel).

1.2. ETM associé à un Domaine

Kuzniak et Richard (2014) précisent que « l'espace ainsi conçu désigne un environnement pensé et organisé pour permettre le travail des individus résolvant des problèmes mathématiques ». Ainsi pourrions-nous associer à tout ensemble de problème un ETM permettant de les résoudre. Néanmoins, l'espace de travail est le fruit d'une organisation qui lui donne une structure et il est nécessaire de spécifier cette structure. Le plus simple est de concevoir un ETM comme étant associé à un domaine mathématique. Un domaine des mathématiques est une partie des mathématiques qui est définie par des objets, des représentations de ces objets, un référentiel théorique portant sur ces objets (on reconnait là les composantes du plan épistémologique). Ce domaine doit avoir une structure cohérente du point de vue mathématique et épistémologique. Il nous semble alors que le meilleur garant est que cette partie, pour être considérée come un domaine, soit reconnue comme tel par la communauté des mathématiciens. Ainsi pouvons-nous parler d'ETM de la géométrie, de l'algèbre, de l'analyse, des probabilités, etc.

La notion de domaine nous semble très importante car c'est à ce niveau que l'on peut identifier les paradigmes qui caractérisent les ETM. Ils permettent également de préciser les représentations, les artefacts, les propriétés des objets, etc.

La notion de domaine doit être distinguée de celle de cadre au sens de Douady (1986). En particulier, un cadre contient les images mentales des élèves[1], leurs connaissances, ce qui n'est pas le cas d'un domaine qui est essentiellement mathématique. Si le cognitif est directement pris en charge dans un cadre, en revanche il n'est pas présent dans la notion de domaine. Dans le modèle des ETM que nous utilisons, le cognitif est considéré dans le plan cognitif et les images mentales d'un sujet peuvent être considérées à travers la notion d'ETM personnel.

Les objectifs sont également différents. La notion de cadre a été introduite dans la perspective d'un jeu de cadre, en le combinant avec une dialectique outil-objet,

---

[1] Douady précise : « Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. » (Douady, 1986, p. 11).

pour créer des déséquilibres, de manière consciente par l'enseignant, dont l'objectif est la construction de nouvelles connaissances, dans une perspective de conceptualisation. Notre objectif consiste plutôt en l'étude du travail mathématique proposé par l'enseignant à ses élèves, sans nécessairement des notions nouvelles, sans forcément se centrer sur une notion. De plus, nous ne nous plaçons pas uniquement au niveau d'une notion particulière, éventuellement nouvelle, comme dans la dialectique outil-objet, nous nous intéressons plus à un système de fonctionnement plus global : lors de changements d'ETM, des connexions s'opèrent-elles entre ETM ? et sous la responsabilité de qui, professeur ou élève ?

1.3. ETM local et global

Néanmoins, un domaine mathématique peut être *trop gros* pour l'étude didactique. On pourra ainsi se restreindre à un *sous-domaine* comme l'algèbre linéaire dans le domaine de l'algèbre, les statistiques descriptives dans les statistiques ou encore les grandeurs dans le domaine de la géométrie. De même, on pourra se restreindre à la signification d'un domaine dans une institution scolaire, avec les programmes d'études, comme l'ETM de l'algèbre de l'enseignement secondaire chilien ou français. L'important est toujours d'avoir une certaine consistance mathématique et une reconnaissance de ce sous-domaine par la communauté des mathématiciens[2].

Enfin, pour une étude plus ciblée, parfois nécessaire à l'étude didactique, on pourra parler d'ETM *local* lié à un concept, une notion, un petit groupe d'objets, quelques connaissances comme dans « ETG autour du théorème de Thalès ». Mais cette notion d'ETM local n'est pas nécessairement liée aux connaissances mathématiques. Par exemple, on peut penser à un ETM local lié à des artefacts, comme pour l'analyse d'une tâche proposée avec un logiciel ou encore un ETM « de la règle et du compas » (encore que l'on pourrait ici discuter du caractère local). On peut également penser à définir un ETM local associé à un registre de représentation[3], surtout lorsque l'on ne dispose que d'un registre pour représenter les objets ou que, si l'on possède plusieurs registres, ceux-ci ne sont pas ou mal coordonnés. Nikolantonakis et Vivier (2010, 2013) on mis en évidence des différences de stratégies, de traitements, d'interprétations dans des tâches sur les nombres entiers dans des bases autres que dix que l'on pourrait interpréter comme un travail dans des ETM différents : certains étudiants effectuaient la tâche dans

---

[2] Ici, le sens est étendu car il ne s'agit pas uniquement des chercheurs en mathématiques. On pourra par exemple penser aux enseignants de mathématiques pour les sous-domaines dans une institution scolaire.

[3] On peut d'ailleurs interpréter le travail de Lambert sur l'irrationalité de π comme un changement d'espace de travail : il avait commencé, sans succès, à chercher une démonstration dans le système décimal avant de passer aux fractions (Bullynck, 2009).

l'ETM local du registre de la base proposée alors que d'autres changeaient de registre avant d'effectuer la tâche.

On relève donc plusieurs types d'ETM : des ETM associés à un domaine, des ETM associés à un sous-domaine et des ETM locaux auxquels il faut ajouter des ETM globaux. Un ETM global regroupe l'ensemble des composantes cognitives et épistémologiques dans le travail mathématique de plusieurs domaines. Cette notion d'ETM dans son sens global est à réserver dans les cas où les registres, domaines, notions, etc. en jeu sont suffisamment bien intégrés, d'une manière cohérente. Sans cette cohérence il semble difficile d'utiliser cette notion d'ETM dans son sens global. On peut d'ailleurs interpréter comme un enjeu majeur de l'enseignement des mathématiques le fait d'aboutir à un ETM global coordonnant les ETM associés à des domaines mathématiques. On peut en particulier penser que l'ETM personnel d'un enseignant de mathématiques est global ce qui lui permet d'élaborer un ETM idoine qui prend en charge plusieurs domaines, même si l'on peut interroger la coordination des ETM associés aux différents domaines au sein de cet ETM idoine.

On ne peux manquer de remarquer que le découpage ainsi proposé est proche des niveaux de codétermination didactique *discipline*, *domaine*, *secteur*, *thème* de Chevallard (2001). Néanmoins, la structure des ETM est différente car, par exemple, un *thème* est nécessairement lié à une unique technologie alors que l'on peut très bien penser un ETM local plus gros, comme un ETM local de la géométrie sur le triangle, ou un ETM lié à un registre de représentation. En outre, le modèle des ETM permet de prendre en compte les artefacts utilisés et les preuves acceptées en lien avec un paradigme.

1.4. Changement d'ETM

Sans que cela remplace les types d'ETM développés par Kuzniak (2011), référence, idoine et personnel, nous avons défini quatre types d'ETM dans le but d'étudier un changement de domaine. Avec ces quatre types d'ETM, on peut considérer :

- un changement d'ETM locaux au sein d'un même domaine ;
- un changement d'ETM associés à un sous-domaine au sein d'un même domaine ;
- un changement d'ETM associés à deux domaines différents, ou plus simplement un changement de domaine, ce changement pouvant s'effectuer ou non au sein d'un ETM global.

Dans cet article, nous considérons uniquement la dernière situation même si l'on pourrait penser à des adaptations pour les deux premières. Les changements de domaine sont traités à partir d'un énoncé et, bien entendu, il faudrait considérer plus d'énoncés différents pour pouvoir prétendre à des conclusions plus générales.

Nos analyses se focalisent sur le travail mathématique ne faisant intervenir que deux domaines : le premier est le domaine *source*, ou initial, le domaine principal de l'énoncé que nous notons Ds, et le second est le domaine de résolution Dr. Il est à noter que l'énoncé, s'il est exprimé essentiellement dans Ds peut également avoir des traces du domaine Dr ce qui peut faciliter le changement de domaine, nous y reviendrons. En outre, l'expression « domaine de résolution » est à prendre dans le sens large de « domaine but » ou « domaine d'arrivée » mais avec cette appellation, nous insistons, à la suite de Douady (1986), sur le caractère producteur en mathématiques des changements de cadre. On pourrait penser que Ds a une dimension objet et que Dr a une dimension outil. Cependant, cela ne recouvre pas toutes les situations et notre point de vue se distingue une fois de plus de la dialectique outil-objet. En particulier il n'y a pas nécessairement de problème à résoudre, comme par exemple dans un changement de domaine où Dr est la géométrie dans une perspective de visualisation.

En dialectique outil-objet, le changement de cadre est motivé par un objectif d'apprentissage de manière consciente par l'enseignant. Qu'en est-il dans un changement d'ETM ? Bien sûr il peut y avoir un objectif d'apprentissage, mais ce n'est pas nécessairement la seule raison. Nous tentons plutôt d'y voir un manque dans l'ETM_{Ds} que l'ETM_{Dr} peut combler, qui peut bien entendu être pensé consciemment par l'enseignant et inséré dans l'ETM idoine qu'il élabore (un ETM idoine *global* dans le sens où il inclut deux domaines, voir ci-dessus). Ce manque peut tenir à différentes raisons qui sont essentiellement reliées aux composantes de l'ETM_{Ds} et qui se rattachent à au moins une des trois genèses : sémiotique, instrumental ou discursif.

Comme dans (Kuzniak, 2014), un des deux domaines considérés, Ds ou Dr, est la géométrie afin de pouvoir s'appuyer sur les paradigmes géométriques et les ETM_G. Dans le cas où la géométrie est le domaine source, très souvent dans l'enseignement secondaire, le domaine de résolution est le domaine du nombre, de l'algèbre ou des fonctions (éventuellement de l'analyse). Et si la géométrie est le domaine de résolution, on peut penser que c'est un recours à la visualisation, rôle très particulier de la géométrie (Kuzniak, 2011), qui est requis pour combler un manque dans le domaine initial. C'est ainsi que l'on peut interpréter le travail de Barrera (2012) : on part d'un domaine source Ds numérique pour visualiser, dans le sens de géométriser, la multiplication dans différents ensembles de nombres – Dr est la géométrie donc.

2. Influence de l'ETM idoine sur le changement de domaine

Nous proposons dans cette section, sans prétendre à l'exhaustivité, trois cas où l'ETM idoine influence les changements de domaines. Pour chaque cas, nous nous focalisons plus particulièrement sur un point : paradigme, variable didactique et indice dans Ds du changement de domaine. Mais, bien entendu, l'influence est exercée par un ensemble de facteurs dont notamment le contrat didactique que nous n'abordons pas directement.

2.1. Influence des paradigmes

Le premier exemple a déjà fait l'objet de plusieurs études (Jacquier, 1995 ; Houdement & Kuzniak, 1999 ; Montoya-Delgadillo, 2010, 2014) :

On construit un carré ABCD de côté 5 cm.
1) Calculer BD.
2) Situez le point I du segment BD tel que BI = 2,8 cm, le point J du segment BC tel que JC = 3 cm.
Est-ce que la droite (IJ) est parallèle à la droite (DC) ?

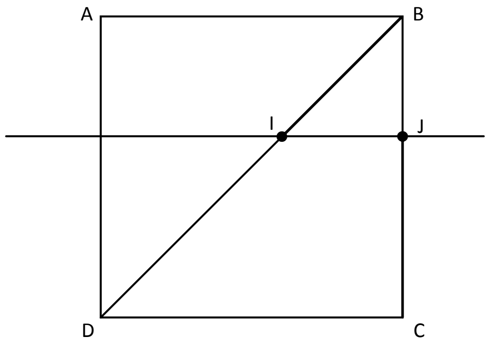


Figure 1

Cet énoncé fait référence à deux domaines mathématiques : le domaine de la géométrie, incluant les grandeurs, et le domaine du nombre (contenant au moins les rationnels, écritures décimale et fractionnaire, et les racines carrées, c'est-à-dire le domaine du nombre de fin de collège). La différence entre les grandeurs et les nombres est souvent faible compte tenu de l'importance dans l'enseignement des grandeurs mesurées qui font que l'on confond facilement une grandeur avec le nombre le mesurant dans une unité donnée.

On reconnaît les objets usuels de la géométrie, carré, point, segment, droite – et la propriété du parallélisme –, auxquels on ajoute les objets des grandeurs, longueur (BD, côté, BI, JC), mesures et unité (3 cm, 2,8 cm ; 5 cm). C'est dans les mesures que l'on trouve les objets du domaine du nombre.

La question 1) demande de calculer BD et non de mesurer. Compte tenu de l'ETM idoine de l'institution scolaire, il n'est pas attendu que ce calcul s'effectue avec les grandeurs[4] mais par un calcul dans le domaine du nombre : utilisation du théorème de Pythagore, détermination de la longueur BD dans le domaine du nombre – le théorème de Pythagore, tout comme le théorème de Thalès, permet ce type de changement de domaine. Ici, il est clairement attendu l'obtention de $BD^2 = 5^2 + 5^2$ pour avoir $BD = 5\sqrt{2}$, l'unité, le cm, étant ajouté une fois la racine carrée utilisée car les traitements $\sqrt{\text{cm}^2} = \text{cm}$ ou $\sqrt{5^2\ \text{cm}^2} = 5\ \text{cm}$ ne font pas partie de l'ETM idoine, au Chili comme en France. De fait, il y a bien un changement obligatoire de domaine afin de répondre à la question. Il est bien sûr possible de donner une valeur approchée de BD à l'aide d'une calculatrice, 7,07 cm ou 7 cm, voire 7,0 cm, en se limitant au mm ce qui correspond aux formats des données de l'énoncé, et aussi de ne donner que cette valeur approchée.

Ainsi, dans cette question 1 et compte tenu de l'ETM idoine de l'institution scolaire, le changement est clairement indiqué (*calculer* et non *mesurer*) : Ds est le domaine de la géométrie et Dr est le domaine du nombre (notons ici que la dénomination *domaine de calcul* serait plus adéquate que domaine de résolution).

En question 2) il n'y a aucune trace de Dr. De fait, la question peut être résolue en géométrie, sans changement de domaine, par une visualisation dans un paradigme GI. En effet, dans le paradigme GI, on peut répondre soit visuellement, soit avec des instruments (3 étudiants-professeurs sur les 19 de l'étude de Montoya (2010)), soit encore avec un Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD). On conclut alors au parallélisme exception faite de l'usage possible d'un LGD car il permet une plus grande précision (utilisation d'un oracle, utilisation de zooms, avant ou arrière, adéquats pour comparer (IJ) avec la parallèle à (BC)).

Toutefois, la question et la configuration peuvent faire penser au théorème de Thalès. Dans ce cas, par un phénomène identique à la question 1, il y a un changement pour le domaine du nombre. Dans l'étude de Montoya (2010), ce sont 16 sur les 19 qui utilisent le théorème de Thalès et font donc un changement de domaine vers le domaine du nombre.

Dans l'utilisation du théorème de Thalès, le paradigme de travail, GI ou GII, modifie les réponses et aussi le travail dans Dr : nécessité d'une valeur exacte pour le paradigme GII alors que le paradigme GI peut se satisfaire d'une valeur approchée – il faudrait ici discuter d'un seuil d'acceptabilité. Il y a de fait une dépendance des ETM de la géométrie et du nombre avec d'un côté les paradigmes GI et GII et de l'autre le calcul exact et le calcul approché. Ainsi, dans GII, en utilisant les valeurs exactes $BI/BD = 2{,}8/5\sqrt{2}$ et $BJ/BC = 2/5$, il n'y a pas

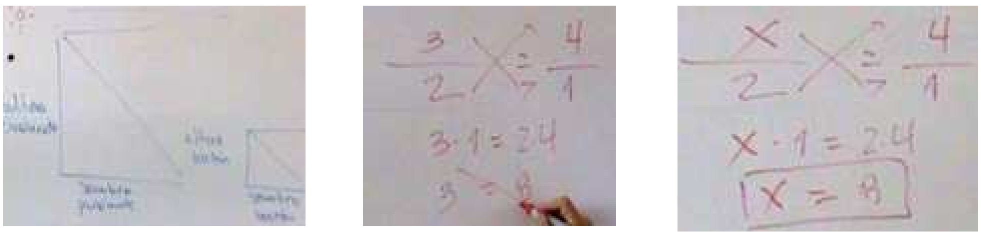
[4] Comme cela pourrait être envisagé avec un traitement « à la Euclide » utilisant les aires.

parallélisme : soit parce que les nombres que la calculatrice affichent sont différents (0,3959… et 0,4), soit parce que l'un est reconnu comme irrationnel et l'autre comme rationnel (5 étudiants sur les 19 professeurs stagiaires de l'étude (Montoya-Delgadillo, 2010 ; 2014)). En revanche, dans GI, l'utilisation de valeurs approchées permet de conclure au parallélisme (5 étudiants sur les 19) : soit en utilisant 7 cm pour BD, les fractions obtenues sont alors égales, soit en se limitant à l'égalité à 0,1 près des deux fractions. Notons que cette réponse « les droites sont parallèles » est en accord avec l'observation visuelle : 4 étudiants utilisent le théorème de Thalès ou de Pythagore, parce qu'ils voient qu'il y a parallélisme, et 3 autres étudiants vérifient le parallélisme avec un instrument géométrique (il n'y a donc en général pas de visualisation pure, sans doute par contrat).

2.2. Influence des variables didactiques

Dans cette section nous étudions[5] plus spécifiquement un changement en classe, au Chili, à partir d'une vidéo (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca, Mena-Lorca, 2014). Le changement n'est pas indiqué, non nécessaire (on peut utiliser la proportionnalité et, par exemple, le produit en croix) et semble totalement naturalisé pour le professeur PN1.

PN1 travaille avec des élèves de grade 9 dans le but d'introduire le théorème de Thalès. Il s'appuie pour cela sur l'enseignement précédent sur les triangles semblables. Les tâches mathématiques reposent sur la détermination d'une longueur inconnue par un passage dans l'algèbre, avec une équation. L'équation est obtenue par les théorèmes sur les triangles semblables. L'énoncé n'est pas donné en une seule fois, il est explicité au fil du temps par l'enseignant.



2a : présentation du problème géométrique — 2b : (rappel) deux raisons sont proportionnelles — 2c : travail algébrique

Figure 2 : Trois phases de PN1, d'un ETM$_G$ à un ETM$_A$.

La présentation commence par un exemple s'appuyant sur l'histoire, non validée historiquement, de Thalès calculant la hauteur d'une pyramide avec une

[5] Une recherche sur des professeurs débutants, projet 1110988 du gouvernement chilien.

représentation en 2D (figure 2a) : le Soleil, une pyramide (hauteur et ombre) et un bâton (hauteur et ombre).

La première question, posée oralement par l'enseignant, propose de revenir sur les triangles semblables en proposant les couples (3, 2) pour la pyramide et (4, 1) pour le bâton. L'enseignant (figure 2b) montre que l'égalité des rapports n'est pas satisfaite en utilisant un produit en croix ($3\times1 \neq 4\times2$). La deuxième question, toujours orale, demande de calculer la hauteur de la pyramide à partir des couples (x, 2) et (4, 1). L'égalité des rapports fournit l'équation qui est transformée par un produit en croix, puis résolue pour trouver 8 (figure 2c). L'utilisation de la similitude de triangles fait apparaître ici deux implicites : les triangles sont rectangles ce qui permet d'avoir un même angle dans les deux triangles[6] et le rapport est écrit avec les côtés jouxtant l'angle droit sans préciser les choix ni l'ordre des côtés.

Ainsi, l'énoncé est-il proposé dans Ds, domaine de la géométrie, après un changement de la dimension 3 à la dimension 2. Les objets de la géométrie, toujours avec les grandeurs, sont : pyramide, longueur, triangles, angles. Le changement de domaine vers Dr, domaine du nombre (on peut se limiter aux rationnels et de fait aux entiers avec les variables numériques retenues), pour le calcul, semble passer inaperçu pour l'enseignant. Les unités ne sont pas indiquées dans les longueurs et l'usage du théorème sur les triangles semblables non justifié : PN1 écrit directement les deux couples de nombres qui doivent être proportionnels. Le même phénomène apparaît avec le changement dans le domaine de l'algèbre.

Par ailleurs, non seulement les changements de domaine sont implicites et entièrement à la charge de l'enseignant, mais de plus ils sont inutiles avec le choix des variables didactiques[7], que ce soit vers le domaine du nombre ou de l'algèbre car la solution est immédiate avec les grandeurs. Il n'y a pas de traitement spécifique au domaine du nombre ou de l'algèbre. Il est évident que les couples ($3u$, $2u$) et ($4u$, $1u$) ne sont pas proportionnels à cause de l'unité présente (nous plaçons volontairement l'unité de longueur u). Il n'est donc pas nécessaire de poser une égalité dans le domaine numérique, les relations multiplicatives entre grandeurs suffisent. Il en est de même de la recherche de la longueur inconnue : comme $2u = 2\times(1u)$ alors la longueur proportionnelle cherchée est $2\times(4u) = 8u$.

D'ailleurs, à la question « *quelle devrait être la hauteur de la pyramide pour que ce soit proportionnel ?* », les étudiants répondent « 8 » mais PN1 pousse fortement

---

[6] Cela n'est pas dit. Oralement, PN1 mentionne un angle commun par les rayons du soleil, mais ce n'est pas un angle dans les triangles.

[7] Cependant, des situations plus complexes, notamment avec des variables numériques mieux ajustées, pourraient permettre de justifier le recours à l'algèbre.

vers un travail algébrique. On peut constater que PN1 change de domaine, de la géométrie vers l'algèbre, sans promouvoir un travail dans l'ETM_G. L'ETM idoine élaboré par ce professeur est clairement orienté par une méthode systématique : quand on a une longueur inconnue, on utilise l'algèbre et une équation ce qui entraîne le changement de domaine.

2.3. Influence d'un indice de changement de domaine

Dans cette section, nous étudions un exercice sur les aires dans un rectangle. Il est accessible dès le début de l'enseignement secondaire, souvent pour une application de l'algèbre avec inconnue et mise en équation. Nous l'avons posé dans deux situations : d'une part en formation des enseignants du premier degré, en France et en Grèce avec un indice du changement de domaine Géométrie→Algèbre, en 2009 avec 26 étudiants français et 100 grecs (Nikolantonakis & Vivier, 2014), puis sans indice pour les mêmes populations, en 2013, avec 103 étudiants français et 166 grecs (Beck et al., 2014). Il s'agit d'un travail individuel écrit.

Soit le rectangle ABCD de 5 m sur 18 m de la figure ci-contre. Trouver la position du point E sur [BC], tel que l'aire de ADCE soit le double de l'aire de ABE.

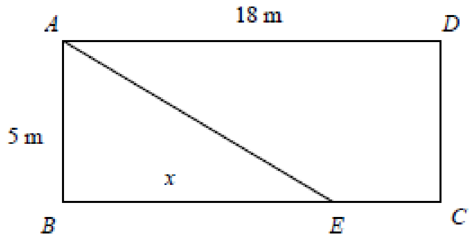


Figure 3 (donnée avec l'énoncé)

La visualisation du x sur la figure devrait orienter les procédures vers l'algèbre et plus spécifiquement vers une mise en équation[8], il indique un changement de domaine de travail par contrat didactique. Nous postulons que x est un indice (Peirce, 1978) qui active un registre algébrique depuis la genèse sémiotique, qui aura pour conséquence un travail dans un ETM du domaine de l'algèbre. Il s'agit ici d'un élément fort de l'ETM idoine : celui qui pose le problème attend une utilisation de l'algèbre, c'est-à-dire un changement de la géométrie, Ds, vers l'algèbre, Dr.

[8] On peut se demander si l'équation est un artefact non matériel dans le sens de Rabardel (1995) ou bien s'il s'agit d'un élément activé par la genèse sémiotique.

La procédure majoritaire attendue[9] : (ABE) = $5x/2$; (ADCE) = $18\times5–5x/2$ d'où l'équation $90–5x/2 = 5x$ que l'on résout pour trouver $x = 12$ m. Il s'agit d'une procédure avec un changement de domaine Géométrie → Algèbre. Il n'y a de fait pas de travail géométrique à proprement parler (on peut éventuellement considérer l'application des formules d'aire). Il est à mentionner toutefois qu'une décomposition méréologique[10] de la figure est nécessaire afin de pouvoir mettre en équation, mais cette décomposition est indiquée. Une variante de cette procédure consiste à utiliser la formule de l'aire d'un trapèze pour exprimer l'aire de ADCE : (ADCE) = $5\times(18 + 18 – x)/2$. Il n'y a plus de décomposition méréologique de la figure de départ (il y a une décomposition méréologique en 1D de [BC]).

Toutefois, d'autres procédures sont envisageables où l'essentiel du travail reste dans un ETM_G, sans algèbre. En complétant le rectangle ABEF, on peut découper le rectangle initial ABCD en trois aires égales – donc une décomposition méréologique. Le tiers de l'aire de ABCD est $1/3\times90$ m^2 = 30 m^2 et donc ABEF est un rectangle d'aire 60 m^2 avec un côté de 5 m, donc l'autre côté mesure 60 m^2/5 m = 12 m. Cette procédure est à rapprocher de celle envisagée dans (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2013 ; voir aussi Kuzniak, 2014) pour un problème d'aire dans un carré. On peut aussi arriver au même résultat sur les grandeurs avec (ABE) + 2×(ABE) = (ABCD). Des adaptations de cette procédure sont possibles, notamment avec une équation du type « $5x = 60$ », plus facile à résoudre.

Ainsi, pour ce problème, si un travail dans Ds n'est pas nécessaire, sa réalisation peut néanmoins influencer le travail dans Dr, avec des équations différentes, pouvant aller jusqu'à se dispenser du changement de domaine.

Dans la deuxième version, sans mention du « x », la tâche s'exprime entièrement dans le domaine de la géométrie, et le travail lui-même peut rester uniquement en géométrie. C'est évident dans le paradigme GI puisque l'on se contente d'une solution approchée que l'on peut obtenir, par exemple, avec un LGD du type Geogebra, ou bien par essai-erreur en papier-crayon. Le fait que la valeur trouvée par un logiciel soit exacte, par choix des variables didactiques, rend possible une résolution en géométrie dans un paradigme GII (ici, il s'agit d'un jeu GI-GII). Bien entendu, un changement de domaine vers l'algèbre est toujours possible, ce changement étant alors à la charge de l'étudiant.

---

[9] Nous utilisons la notation grecque pour les aires des figures planes comme (ABE) pour l'aire d'un triangle et (ADCE) pour l'aire d'un quadrilatère.

[10] La décomposition méréologique (Duval, 2005) implique un découpage de la figure de départ en sous-figures de même dimension. Elle suppose un raisonnement basé principalement sur la perception à travers des découpages de la figure et une superposition : le pôle "espace réel et local" de l'ETG est le pôle dominant.

Les résultats des deux expérimentations sont donnés dans la table 1.

	Non réponse	Réponse correcte	Mise en équation	Procédure arithmétique	Décomposition méréologique en 2 ou 3 aires
FR-1 (26)	8%	81%	81%	11%	8%
GR-1 (100)	14%	70%	85%	1%	15%
FR-2 (103)	16%	54%	64%	20%	23%
GR-2 (166)	10%	44%	62%	28%	17%

Table 1

Il n'est évidemment pas surprenant de voir que la proportion d'étudiants utilisant une mise en équation, par un changement de domaine, baisse très sensiblement entre les deux expérimentations (avec ou sans indice). En revanche, on s'aperçoit que cette proportion reste toujours forte (presque les deux-tiers) dans l'énoncé sans indice. Cette ressemblance des ETM personnels, que ce soit en France comme en Grèce, nous indique un effet fort de l'ETM idoine, identique dans les deux pays pour ce type de tâches (les pourcentages sont très proches), qui favorise l'utilisation de l'algèbre. A ce propos, il est à noter que les exercices de géométrie résolus de cette manière par l'algèbre sont fréquents dans l'enseignement secondaire. On peut aussi y voir un effet d'un positionnement dans un paradigme GII avec une procédure qui marche *à tous les coups* (avec d'autres valeurs de la solution, et aussi un intérêt pour justifier la non existence de solution).

Cela étant, cet ETM idoine semble permettre une connexion des ETM de la géométrie et de l'algèbre, au moins dans des situations de ce type. Mais on peut toutefois penser que ce soit au dépend d'une genèse discursive de l'ETM de la géométrie. D'ailleurs, on se rend compte de la baisse de réussite qui s'accompagne de la baisse d'utilisation d'une mise en équation. Les étudiants sont-ils « perdus » si on ne leur indique pas le changement de domaine avec un indice ? Ne peuvent-ils pas résoudre le problème sans changer de domaine ?

3. Trois exemples de changement liés aux trois genèses

Dans cette section, nous proposons trois exemples de changement de domaine en focalisant notre attention sur une des trois genèses. Bien entendu, dans chacun des cas, les trois genèses sont toujours présentes mais sans nécessairement être activées ou privilégiées. Leur importance relative varie et l'analyse permet d'identifier celle qui est au centre du changement de domaine.

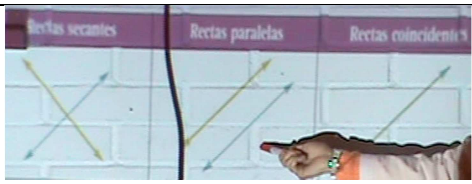
3.1. La genèse sémiotique

On s’intéresse ici à un changement de registre : on travaille avec les mêmes objets, mais on change de représentations et de signes. Il s’agit d’une étude de (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca et Mena-Lorca, 2014) qui portait sur l’ETM-idoine élaboré par un professeur novice, PN2, lors d’une leçon en deuxième classe du lycée au Chili (grade 10) sur les systèmes d’équations linéaires à deux inconnues.

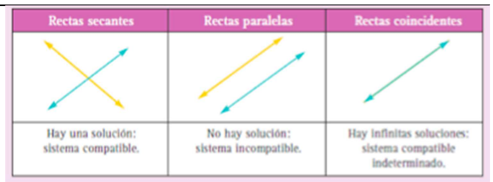
La classe commence par une explication sur ce que signifie résoudre un système d’équations linéaires : écriture symbolique, substitution de valeurs numériques dans les équations et vérification de l’égalité numérique (déjà travaillé dans la classe). Mais l’objet de la séance est de déterminer cette solution par une méthode graphique, c’est-à-dire par des traitements géométriques : tracer les droites associées aux équations en jeu – une conversion – et analyser s’il existe ou non des solutions, ce qui dépend de la position relative des deux droites – leur intersection.

Le professeur commence par présenter les pas de la méthode graphique de manière théorique pour que les élèves appliquent ensuite cette méthode. Il y a un travail à effectuer avant le changement de domaine comme le calcul de coordonnées pour tracer les droites, même si on peut penser à d’autres procédures de tracé (un point et la pente par exemple). Le changement de domaine, de l’algèbre Ds vers la géométrie analytique Dr, est indiqué de manière explicite par le professeur qui donne les pas à suivre : « *graficar las ecuaciones* ». Les élèves ont en charge le tracé des droites sur du papier millimétré. La genèse discursive est peu activée, uniquement pour le calcul des coordonnées des points et le fait que deux points distincts déterminent une droite. La connexion entre les domaines est assurée par la connaissance *une équation du premier degré à deux inconnues détermine une droite* (avec la condition usuelle). De fait, le professeur privilégie l’usage du plan sem-inst de l’ETM avec l’usage du papier millimétré pour la production de signes dans Dr.

Mais avant les applications, l’enseignant fait une digression en présentant, comme dans les manuels scolaires, les trois cas possibles :



4a : Solutions possibles pour un système.



4b : Extrait d’un manuel scolaire sur ce thème.

Figure 4

Il est à noter que cette insertion, propre à l'ETM idoine, n'est pas du tout requise pour la méthode graphique. Nous y voyons ici l'intérêt potentiel du changement de domaine de travail : la géométrie, par la visualisation, permet d'objectiver une propriété sur le nombre de solutions aux systèmes 2×2. Cela ne peut se voir qu'en acte dans la résolution algébrique. En effet, si le cas général est possible en algèbre, avec un appui, plus ou moins explicite, sur la notion de déterminant, les traitements sont trop complexes pour ce niveau d'étude avec 2 inconnues, 6 paramètres et des conditions sur les paramètres afin de déterminer l'ensemble des solutions.

Ce qui semble être visé ici, c'est la visualisation iconique (cf. figure 4). Ici, on peut sans doute exploiter plus en profondeur la visualisation, ce qui nécessite une visualisation non iconique : trouver les coordonnées du point d'intersection pour avoir les solutions du système et ainsi faire de l'artefact graphique un instrument. Finalement, si l'enseignant privilégie le plan sem-inst dans le travail proposé, il semble que ce soit la genèse sémiotique qui soit visée (on pourrait ici plus spécifiquement parler de *domaine de visualisation*).

L'ETM idoine préparé par le professeur est en adéquation avec les manuels scolaires et les demandes officielles : la méthode graphique ne peut pas donner de manière générale les solutions exactes et est utilisée pour justifier la méthode algébrique. Le professeur ne mentionne jamais la distinction valeur exacte/valeur approchée, centrale ici. Cela est renforcé par le fait que les 5 systèmes linéaires de Cramer[11] proposés ont leur solution dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Ainsi, la méthode graphique semble donner les valeurs exactes alors qu'elle ne donne que des solutions approchées.

Contrairement à ce qui est annoncé dans la méthode, il n'y a pas de vérification. Il n'y a donc pas de retour au domaine Ds même si cela serait possible à partir d'une approximation des solutions par une méthode graphique : pour voir si les solutions sont exactes ou non et aussi pour contrôler le fait que les valeurs sont bien proches des solutions exactes (pour des raisons de continuité, l'égalité doit faire apparaître des valeurs relativement proches).

Il y a bien une genèse sémiotique dans ETM_A et dans ETM_G, mais la question ici concerne le lien entre ces deux genèses, et aussi la relation avec la genèse instrumental. La méthode graphique reste à un niveau théorique pour justifier le nombre de solutions d'un système et constitue un artefact non instrumentalisé car uniquement basé sur une visualisation iconique. Le lien entre les deux méthodes, dans les deux domaines, ne peut se réaliser qu'à condition de faire la distinction valeur exacte/valeur approchée. Or, PN2 ne le fait pas, sans doute à cause de ses

---

[11] Les 4 systèmes à résoudre par les élèves sont de Cramer ; le professeur a aussi présenté un autre système de Cramer, un système sans solution et un système de degré 2 avec (-1, 6) comme couple solution.

choix de système qui mènent toujours à des solutions entières. Ce travail ne semble pouvoir développer, pour aucun des deux domaines, l'ETM personnel des élèves.

3.2. La genèse instrumentale

L'exercice suivant a fait l'objet d'une séance en classe de troisième, grade 9 en France, filmée, et les élèves sont pour la première fois confrontés à ce type d'exercices.

Exercice : En remarquant que $37 = 6^2 + 1$, construire un segment de longueur $\sqrt{37}$ cm.

Le domaine source est le domaine du nombre, Ds, et il y a une indication forte du changement de domaine vers la géométrie, Dr, avec la demande de construire un segment. La tâche est explicitement une conversion. Contrairement au cas précédent, il ne s'agit pas d'une recherche de visualisation mais plutôt d'un lien théorique avec la géométrie d'Euclide et les nombres constructibles.

Rapidement, les élèves sortent leurs calculatrices pour calculer $\sqrt{37}$ afin de pouvoir tracer le segment à la règle graduée. C'est donc l'enseignante qui doit interdire cet instrument (7 min) et demande de « construire », « une vraie construction ». L'enseignante est en effet obligée de réorienter les élèves vers le *bon* ETM_G local, alors que le changement de domaine n'était en fait pas problématique en soi. Cette réorientation est comprise par les élèves, mais ils ne savent pas vers quel ETM_G local se porter. L'enseignante doit alors donner tous les indices (à partir de 10 min) : « triangle », « $37 = 6^2 + 1^2$ », « somme entre deux carrés ? » pour finalement demander « un seul mot » (17 min) et quelques élèves répondent « Pythagore ». A la suite, puisque l'ETM_G local est clairement exposé, les élèves réussissent sans trop de difficulté l'exercice.

Le changement de domaine est explicite, Dr est la géométrie, mais c'est l'ETM_G local visé qui n'est pas explicite. En effet, pour cet exercice on peut penser soit à un ETM_G autour de la longueur de segment soit un ETM_G autour du théorème de Pythagore. C'est ce dernier qui est attendu, mais il n'y a pas suffisamment d'indice pour les élèves. L'enseignante explicite d'abord le travail à effectuer avant le changement de domaine $(\sqrt{37})^2 = 6^2 + 1^2$, ce qui n'a rien d'évident sauf si l'on anticipe une utilisation du théorème de Pythagore. Cet indice, une égalité de Pythagore, n'est finalement pas suffisant et, par des questions de l'enseignante, tout revient à ajouter dans l'énoncé « en utilisant le théorème de Pythagore » qui précise l'ETM_G local. Les exercices suivants, du même type, ne pose plus de problème, l'ETM_G attendu est bien identifié par les élèves.

Il est à noter que le travail préalable à effectuer pour un changement vers un ETM_G local autour de la longueur des segments, un calcul approché de $\sqrt{37}$ avec une calculatrice, ne pose pas de problème aux élèves. Ainsi, les élèves activent bien dans leurs ETM personnels une genèse instrumentale, avec la calculatrice puis la règle graduée, mais qui n'est pas celle de l'ETM idoine voulue par l'enseignante, avec le théorème de Pythagore comme instrument. La genèse sémiotique est également activée par les élèves et l'on ne relève pas ce problème d'ETM_G local, sans doute parce que les signes sont ceux du domaine de la géométrie, Dr, et que le fait que l'on considère tel ou tel ETM_G local n'est pas sensible. La genèse discursive est, malgré l'utilisation du théorème de Pythagore, en retrait et c'est le plan sem-inst qui est ici privilégié.

Les genèses sémiotiques et instrumentales sont dans deux ETM_G locaux différents qui ne semblent pas connectés, mais le malentendu n'apparait que pour les genèses instrumentales. Même si on peut voir à travers cet exercice une tentative de cohésion entre les domaines du nombre et de la géométrie, le travail proposé ne permet pas une connexion de ces ETM_G locaux. Ce choix par l'enseignante est sans doute lié à une tradition concernant les nombres constructibles, mais il n'y a pas de retour à Ds sur la nature des nombres en jeu.

3.3. La genèse discursive

L'exercice suivant a été donné en travail maison, à rendre, en classe de Première Scientifique, grade 11, en France. Ici, comme nous le verrons, c'est le choix du travail initial dans le domaine source, la géométrie, qui détermine le domaine potentiel pour le changement qui est laissé à l'entière responsabilité de l'élève.

Soit un triangle ABC de hauteur [AH], où H est un point du segment [BC], tel que AH = 4, CH = 3 et BH = 4. Soit M un point du segment [AC]. On note *x* la distance AM. On cherche à déterminer pour quelle position du point M sur [AC], la distance BM est minimale.

Quelle est dans ce cas la nature du triangle ABM ?

Calculer la valeur exacte de la distance AM lorsque BM est minimale.

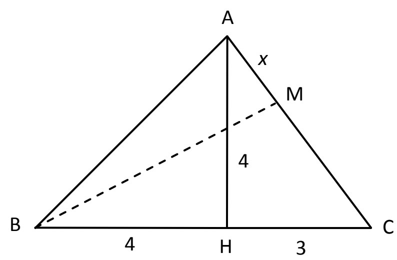


Figure 5

Cet exercice est très riche et on peut le résoudre de nombreuses manières, mais il n'est pas question ici d'en faire une analyse précise pour des questions de place. Nous voulons mettre essentiellement en avant le rôle joué par le travail préliminaire dans Ds, la géométrie, qui conditionne fortement le choix du domaine Dr. Nous exposons les productions, écrites hors classe dans un *travail maison*, de trois élèves :

- L'élève E1 remarque d'abord que ABM est rectangle en M sans le justifier précisément. Il calcule ensuite AC = 5 et AB = $\sqrt{32}$ par le théorème de Pythagore en précisant l'angle droit en H. Puis, il calcule de deux manières différentes l'aire de ABC avec les hauteurs AH puis BM ce qui lui permet de calculer BM = 5,6 en résolvant une équation en BM (il n'utilise pas « x »). Enfin, le théorème de Pythagore dans BMA dont il connaît AB et BM lui permet de calculer AM = 0,8.

  L'ETM personnel de E1 reste essentiellement dans le domaine de la géométrie avec un travail sur les grandeurs. Il utilise bien des équations, mais le fait de conserver les longueurs laisse penser que, pour E1, son travail reste géométrique, sans changement de domaine.
- L'élève E2 commence par émettre une conjecture à l'aide du LGD Geogebra : la distance BM est minimale lorsque ABM est rectangle en M. Puis, il calcule AC = 5 et AB = $\sqrt{32}$ et exprime BM = $\sqrt{(32 - x^2)}$ par le théorème de Pythagore. Exprimant l'égalité de Pythagore dans CBM, à l'aide de CM = 5 – x, il trouve une autre expression de BM^2 ce qui lui permet de poser l'équation $32–x^2 = –x^2 + 10x + 24$. Il résout cette équation pour trouver $x = 8/10$ (cohérent avec la valeur approchée 0,81 obtenue par Geogebra).

  E2 s'appuie sur la même propriété géométrique que E1 (sans doute redécouverte avec le logiciel) mais il ne propose pas un travail sur les grandeurs, en restant en apparence dans Ds, il effectue une mise en équation avec un changement clair de domaine où Dr est l'algèbre.
- L'élève E3, après avoir calculé AC = 5 par le théorème de Pythagore, introduit le projeté orthogonal, N, de M sur [BC] ce qui lui permet, avec le théorème de Thalès, d'exprimer BN et MN en fonction de x, à l'aide de CM = 5–x. Puis, par le théorème de Pythagore dans BMN il calcule BM^2 = $x^2 – 8/5x + 32$ et il étudie cette fonction de x qu'il nomme $f(x)$. Il utilise ensuite ses connaissances sur les fonctions du second degré (sommet de la parabole qui donne le minimum car le coefficient de degré 2 est positif) pour trouver BM = 5,6 obtenu pour $x = 0,8$ qui est AM.

  Contrairement à E1 et E2, E3 ne s'appuie pas sur une propriété caractéristique de M. Il perçoit la variation et cherche une fonction qu'il s'agit de minimiser. Ici, le travail préalable dans Ds mène à un tout autre changement de domaine où Dr est le domaine de l'analyse (plus spécifiquement le sous-domaine des fonctions).

Il y a un travail préalable à effectuer avant le changement de domaine car il est nécessaire d'appliquer le théorème de Pythagore (au moins deux fois) mais ce travail est très variable : E1 par un travail sur les grandeurs et une caractérisation géométrique de M reste dans Ds, la géométrie (même si de fait la résolution est algébrique, E1 ne le perçoit sans doute pas ainsi) ; E2 s'appuie explicitement sur la caractérisation géométrique de M et propose une résolution dans le domaine de l'algèbre en calculant de deux manière la longueur BM ; E3 perçoit la variation et calcule en toute généralité BM pour proposer une résolution dans le sous-domaine des fonctions.

Le changement de domaine est en partie indiqué avec la présence du « *x* », indice d'un changement de domaine mais sans savoir, à ce niveau d'étude, s'il s'agit de l'algèbre ou des fonctions. Néanmoins, il est possible de ne pas utiliser le « *x* » comme l'élève E1 (cf. aussi la section 2.3). Un autre indice apparaît dans l'énoncé : il s'agit d'une question d'optimisation qui oriente donc plutôt vers un traitement avec des fonctions, mais cela est sans doute peu visible pour les élèves. Mis à part ces deux indices, les élèves ont la totale responsabilité du changement de domaine et, surtout, du choix du domaine Dr : algèbre ou analyse (fonction).

La résolution de l'élève E1 n'utilisant que des bases d'algèbre, connaissances anciennes de 3 ans, qui reste contextualisées aux grandeurs montre que l'on peut rester, au moins en apparence, dans Ds. Sa résolution est toutefois incomplète car il faudrait prouver que $M \in [AC]$. Pour cela on peut calculer de la même manière CM et justifier que M est sur le segment en vérifiant que CM + MA = CA. Néanmoins, l'attendu, en lien avec l'ETM idoine, est sans doute plus proche de la résolution de l'élève E2, et plus encore de l'élève E3. A ce niveau d'étude, les fonctions sont travaillées depuis 2 ans et la dérivation est introduite ce qui permet un traitement efficace des problèmes d'optimisation (ce chapitre n'avait pas encore été abordé au moment où le problème a été donné). En outre, en 1ère S les élèves pouvaient utiliser leurs connaissances en cours d'apprentissage sur les fonctions quadratiques.

La distinction essentielle que nous voulons mettre en évidence est le fait que :

- L'élève E2 oriente son travail dans Ds, à partir d'une conjecture, sur la caractérisation de la position de M. A partir de celle-ci, il peut utiliser le théorème de Pythagore qui lui donne une équation qu'il résout pour trouver la solution. Son travail initial conditionne le choix de Dr qui est l'algèbre, puisque M est fixe.
- L'élève E3 oriente son travail dans Ds en exprimant, par les théorèmes de Pythagore et de Thalès, la distance BM à minimiser en fonction de *x*, en toute généralité. Cela lui permet d'avoir une fonction qu'il minimise. Son travail initial dans Ds conditionne le choix de Dr qui est l'analyse (ou le domaine des fonctions), puisque M est variable.

Dans les deux cas, c'est la genèse discursive dans Ds, la géométrie, qui oriente vers tel ou tel domaine Dr et notamment la disponibilité de la propriété sur la distance d'un point à une droite. On peut aussi penser que cette propriété est seconde, le point de vue adopté étant premier : un point de vue *dynamique*, M varie et on cherche à minimiser une quantité, et un point de vue *statique*, la position de M est caractérisée par une propriété géométrique.

D'autres résolutions sont possibles comme la géométrie repérée (le repère d'origine H et d'axes (HC) et (HA) est particulièrement bien adapté) ou encore en restant totalement en géométrie, sans équation, mais la preuve est longue et peu accessible à ce niveau d'étude.

Chacun de ces trois élèves conclut en donnant la distance AM = 0,8. Il y a donc bien un retour au domaine source pour la conclusion. Néanmoins :

- Pour E1 il est nécessaire de justifier que la distance AM calculée est relative à un point de [AC]. Sinon, on ne peut savoir si le minimum est atteint dans [AC] ou non.
- Pour E2 et E3, le fait que $M \in [AC]$ est implicitement contenu dans les procédures utilisées puisqu'ils calculent $CM = 5-x$ (pour l'élève E3 cela implique que f est définie sur [0,5] et il faudrait vérifier que l'abscisse du sommet de la parabole est bien dans cet intervalle), mais ces deux élèves ne l'explicitent pas.

La genèse sémiotique est activée presque de la même manière pour les trois élèves avec le registre graphique de la géométrie, les grandeurs mesurées, les registres numériques usuels, décimal et fractionnaire, le registre algébrique, ainsi que, pour E3, le registre fonctionnel. On voit également l'importance de la genèse instrumentale avec le LGD : redécouverte de la propriété caractérisant M pour E2 et calcul approché pour E3 permettant un contrôle de la solution ainsi qu'une prise en compte de la variation.

Cet énoncé est l'occasion de travailler un ETM global avec la géométrie, l'algèbre et l'analyse (que l'on peut restreindre ici aux fonctions). Il est à noter que l'élève E3 présente un ETM personnel global avec ces trois domaines (son travail est explicitement sur les trois domaines) alors que E2 seulement avec la géométrie et l'algèbre, et E1 seulement avec la géométrie (l'algèbre reste implicite).

4. Une grille pour analyser un changement de domaine

Lors d'un changement de domaine de travail, nous cherchons spécifiquement à comprendre pourquoi il y a un tel changement dans le travail mathématique et comment il s'effectue. Comme nous l'avons vu à travers les 6 exemples précédents, plusieurs raisons peuvent en être en cause. Nous pouvons y voir un manque de connaissance, interne aux mathématiques ou due à l'enseignement et aux connaissances mobilisables, un manque matériel (par exemple si l'on a ou non un ordinateur muni d'un Logiciel de Géométrie Dynamique), une volonté de l'enseignant de proposer un certain ETM idoine, ou encore parce que l'enseignant n'a pas conscience du changement de domaine[12] – dans ce dernier cas, l'usage de signes spécifiques à Dr favorise ces *glissements* d'un domaine à un autre.

Afin de mieux cerner ces caractéristiques du changement d'ETM, nous cherchons à répondre à trois types de questions dont l'importance a été pointée au fil des six exemples proposés. Cela nous permet d'avancer une grille d'analyse.

Tout d'abord, la question de l'ETM idoine, le choix par le professeur des valeurs des variables didactiques, l'appui sur le contrat didactique, les paradigmes en jeu. Il s'agit de l'organisation par l'enseignant du changement de domaine :

1. Y a-t-il un travail préalable à effectuer dans Ds avant le changement de domaine ? Ce travail est-il nécessaire ? Quelle est la nature de ce travail préalable ?

Nous postulons que plus le travail dans Ds est conséquent plus il est difficile de penser à effectuer un changement de domaine. En effet, un travail dans Ds, doublé d'un énoncé dans Ds risque de renforcer la difficulté cognitive du changement de domaine – on pourrait prendre l'image d'un *enfermement* dans le domaine Ds. De même, y-a-t-il un ou plusieurs registres dans Ds pour ce travail préalable ? Doit-on faire un changement de registre interne à Ds ? qui en a la responsabilité ?

2. Le changement de domaine est-il indiqué (de manière plus ou moins explicite) ? Quelle est la responsabilité laissée à la charge de l'élève (ou du groupe d'élèves) par le professeur ? quelle est l'influence de l'ETM-idoine développé par le professeur selon le contrat en vigueur et les paradigmes ?

L'indication du changement de domaine est importante du point de vue cognitif. C'est en effet bien différent de passer de la géométrie à l'algèbre avec un « x » présent dans l'énoncé (y compris sur un dessin) ou non. Si le changement de domaine n'est pas explicite, quels sont les indices présents dans l'énoncé (y compris le discours de l'enseignant) ? Cet indice peut être n'importe quel signe qui active une certaine forme de travail comme une lettre, des nombres, une figure, un dessin prototypique, un schéma, un mot, un type de questionnement (une demande d'optimisation en géométrie par exemple), une procédure, etc. Quelle est la nature de cet indice ? Des types de problème standard où le changement de domaine en jeu a été travaillé de manière systématique est un élément important à prendre en compte (cf. la section 2.3). Nous pensons que le professeur est un agent-clé qui

[12] Ce dernier point est notamment visible dans le cas de professeurs novices où, souvent, de nombreuses composantes du travail mathématique sont naturalisées (cf. la section 2.2).

conditionne, ou au moins influence, le changement de domaine sous le contrat en vigueur.

3. Après la résolution dans Dr, y a-t-il un retour au domaine source ?

On peut penser à un travail supplémentaire à effectuer dans Ds avant de conclure l'exercice, le travail effectué dans Dr ne permettant pas de conclure ; ou bien, plus fréquemment dans l'enseignement, ce retour dans Ds permettrait de valider ou de contrôler la solution trouvée dans Dr. On rejoint ainsi le point de vue de Polya (1965) où le fait de revenir à Ds peut être interprété comme la dernière phase dans une résolution de problème, celle où on examine la solution. Cependant, le fait de prendre appui sur le modèle des ETM permet de considérer l'articulation des composantes des plans épistémologique et cognitif. Ainsi, la question devient-elle plus générale : avec le retour à Ds, le travail permet-il de développer l'ETM dans le domaine initial Ds ?

Notons que le fait de ne pas revenir au domaine source Ds risque d'entraîner un non développement du domaine initial[13]. Cela a une grande importance car revenir à Ds signifie exploiter et développer ce domaine initial – c'est-à-dire, articuler les genèses qui interviennent et construire les connaissances dans l'espace de travail mathématique initial. Ce retour devrait favoriser les connexions entre l'ETM_{Ds} et l'ETM_{Dr} en jeu dans une perspective de constituer un ETM global.

Nous ne formulons pas de question sur le travail spécifique dans Dr organisé par l'enseignant car cela n'est pas notre objectif. En revanche, nous nous intéressons aux spécificités mathématiques du travail dans Dr dans les questions qui suivent, plus épistémologiques (des mathématiques ou des mathématiques enseignées). Il s'agit ici de questions cruciales pour la compréhension du changement de domaine.

4. Pourquoi la résolution n'est-elle pas effectuée dans Ds ? Que manque-t-il ? Quelles sont les caractéristiques du travail effectué dans Dr qui n'est pas, ou ne peut pas être, effectué dans Ds ? D'autres domaines sont-ils envisageables ?

L'enseignant peut contrôler certaines variables didactiques, ou s'appuyer sur des éléments de contrat didactique – par exemple lié aux paradigmes –, pour d'une certaine manière forcer le changement de domaine (cf. les sections 2.2, 2.3 et 3.2). Mais ce n'est pas toujours le cas car le changement peut être nécessaire du point de vue des mathématiques ou des connaissances disponibles des élèves (cela nécessite une prise en compte des connaissances anciennes et du niveau d'étude).

---

[13] Ce phénomène a été pointé par Nikolantonakis et Vivier (2010) pour des opérations sur les entiers dans deux registres différents (systèmes de base dix et dans une autre base).

Quels sont les domaines qui permettraient de combler le manque (s'il est effectif) repéré de Ds ? Notons qu'il se peut que la résolution puisse effectivement être effectuée dans Ds. La question des possibilités offertes dans chaque domaine de travail est une question essentielle et délicate. Essentielle car c'est cette question qui conditionne le travail possible ou non dans un domaine et délicate car elle dépend des connaissances disponibles, pour un sujet ou plus généralement des connaissances disponibles mathématiquement (et donc aussi du niveau scolaire).

5. Quelles sont les *genèses* ou *plans* des ETM qui sont au centre du changement de domaine ? qui permettent de comprendre la nécessité du changement de domaine et d'en identifier les enjeux ?

Il nous semble que l'identification d'une genèse ou d'un plan sur lequel se fonde le changement de domaine est un élément clé de la compréhension du changement de domaine. L'importance d'une genèse pour un changement de domaine peut provenir, comme nous l'avons vu, d'un indice sémiotique, du contrat en vigueur, d'un artéfact, matériel ou non.

5. La visualisation dans un changement de domaine vers la géométrie

Les changements de domaine s'accompagnent de manière presque inévitable de changement de registre et donc des conversions sont nécessaires. On peut même ajouter que l'intervention de plusieurs registres est nécessaire car il s'agit d'une caractéristique de l'activité mathématique (Duval, 1995).

Lorsque le domaine Dr est la géométrie et que le changement de domaine s'accompagne spécifiquement d'une conversion d'un registre de Ds vers le registre graphique de Dr, on dispose alors de la visualisation en géométrie qui a un rôle très particulier (Duval, 2005). De fait, La visualisation en géométrie est utilisée dans beaucoup de domaines mathématiques. Une question importante concerne l'objectif de cette visualisation.

L'objectif peut être, par exemple en algèbre, d'illustrer, d'expliquer, ou de justifier certaines relations du type $(a–b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. Mais comme Tall (2006) le signale, cette visualisation est partielle car, pour la relation précédente, elle suppose que l'on ait $a > b > 0$.

La visualisation géométrique peut également être requise pour résoudre un problème que l'on ne peut résoudre dans Ds. Barrera (2011), propose en classe de quatrième en France, grade 8, de visualiser la série $1/4 + 1/4^2 + \ldots + 1/4^n$ pour déterminer la somme de la série qui est 1/3. A ce niveau d'étude, le calcul de limite n'est pas disponible, mais le problème a du sens pour les élèves et la visualisation géométrique, avec une décomposition méréologique, permet de pallier le manque théorique du domaine numérique avec une version intuitive et visuelle de la méthode d'exhaustion.

Si dans le cas précédent le résultat obtenu est exact, souvent la visualisation confère uniquement un résultat approché, notamment lors d'une résolution graphique. Il est à noter que ce type de résolution approchée à l'aide d'un graphique ne semble pas être un objectif de l'enseignement secondaire en France, et ce malgré les recommandations de la commission Kahane (2002) sur la dialectique entre le calcul approché et le calcul exact. Prenons l'exemple des systèmes d'équation en France en classe de troisième, grade 9. Les aspects graphiques ne semblent être utilisés que pour illustrer les systèmes d'équation et la résolution algébrique ce qui donne une indication forte sur l'ETM idoine. Dans le manuel *Phare*, si une résolution graphique est demandée, il est systématiquement requis de vérifier la solution numériquement dans les équations. Normalement il ne s'agit que d'une solution approchée, mais les variables des exercices sont telles qu'en fait la solution approchée est exacte, un entier, et finalement c'est la vérification numérique qui fait foi, la résolution graphique est très largement dépréciée. L'ETM idoine utilise, dans ce contexte, la géométrie dans le but essentiel de visualiser – peut-être pour donner du sens – en tout cas, pas pour résoudre « en vrai » (cf. aussi la section 3.1).

Conclusion

Un des points qui ressort de nos exemples, qui sont plus des études de cas, est sans doute le point de vue, très différent, selon qu'un même domaine est un domaine source ou un domaine de résolution. En effet, pour la géométrie, l'utilisation de théorème mettant en jeu des grandeurs (les théorèmes de Thalès et de Pythagore, le calcul d'aire) aboutit souvent, par la nécessité de poser des calculs, à un changement vers le domaine de l'algèbre ou du nombre. Alors que, lorsque la géométrie est le domaine de résolution, même s'il ne s'agit pas d'une recherche de visualisation, on dispose de cette visualisation très spécifique à la géométrie. Ces rôles différents selon qu'un domaine est Ds ou Dr est bien entendu à rapprocher des dimensions objet et outil (Douady, 1986). Dans un changement de la géométrie vers l'algèbre, l'algèbre est un outil pour le problème posé en géométrie alors que dans un changement de l'algèbre à la géométrie, l'algèbre est vue dans une dimension objet et l'on se sert de la géométrie comme un outil. Comme en dialectique outil-objet où les rôles ne sont pas figés (un objet peut devenir un outil et réciproquement), il est important de changer de rôle entre les domaines source et de résolution et ce notamment pour la connexion entre les ETM.

Le domaine Dr n'a toutefois pas nécessairement une dimension outil. Comme nous l'avons vu dans le cas de la résolution des systèmes linéaires (cf. section 3.1), l'usage de la géométrie comme domaine de résolution répond à un problème du domaine source qui ne peut, au niveau d'enseignement considéré, accéder à certains résultats théoriques. Mais, dans le travail de la classe étudiée, le domaine de résolution ne sert finalement pas d'outil pour le problème posé. Or, nous pensons que c'est seulement lorsque l'outil est pleinement développé pour répondre au problème initial que les connexions entre ETM, entre domaines, peuvent s'opérer. Il est à noter toutefois que, à côté des domaines de l'algèbre et de la géométrie, le domaine du nombre est aussi présent afin que le lien puisse se faire entre les deux domaines. Considérer le domaine du nombre, avec notamment les notions de valeur exacte et de valeur approchée, peut permettre d'établir un « pont » entre l'algèbre et la géométrie (ce rôle du domaine du nombre est aussi visible en géométrie avec les paradigmes GI et GII, cf. section 2.1). Il s'agit donc d'une relation entre trois domaines et c'est sans doute parce que l'ETM-idoine du nombre, ou personnel de l'enseignant, ne peut jouer ce rôle que le changement de domaine Algèbre → Géométrie ne peut participer pleinement à une connexion des domaines, avec la partie visible d'un artefact qui n'acquière pas le statut d'instrument.

Pour ce qui est du travail initial dans Ds, il apparaît comme un élément important du travail mathématique pouvant aller jusqu'à conditionner le choix de Dr (cf. section 3.3). S'il est trop faible, et selon la situation, il se peut que le changement s'accomplisse *trop* rapidement alors qu'un travail dans le domaine source plus conséquent pourrait permettre de simplifier le travail dans Dr (cf. section 2.3). Il est d'ailleurs possible que le changement de domaine ne soit pas nécessaire et l'on a vu l'importance du choix des valeurs des variables didactiques.

Nous ne disons certainement pas qu'il faille à tout prix rester dans le domaine initial lorsque cela est possible, mais plutôt qu'il y a un équilibre à trouver entre le développement de l'ETM du domaine initial, qui peut être atteint sans changement de domaine, et la connexion entre ETM, nécessitant un changement de domaine. Mais si l'on fait le choix d'un changement de domaine dans la perspective d'une connexion entre ETM, il nous semble nécessaire de bien ajuster les valeurs des variables didactiques ainsi que de laisser une part de responsabilité aux élèves dans ce changement. Par ailleurs, le développement de l'ETM initial peut aussi être atteint par un retour à Ds après un travail dans Dr. L'élaboration par le professeur de l'ETM idoine est crucial sur ces points et nécessite que ce professeur ait un ETM personnel que nous avons qualifié de *global* relatifs aux domaines en jeu.

Nous avons pointé une autre question centrale dans l'élaboration de l'ETM idoine par le professeur. Quelles sont les genèses clés du changement de domaine ? Avec trois exemples, nous avons esquissé la pluralité des situations possibles. Comprendre le rôle de chacune des trois genèses dans un changement de domaine nous semble important pour comprendre ce changement. Il est également important de faire cette identification afin de pouvoir varier les genèses activées. Nous faisons en effet l'hypothèse que ce type de variation favorise les connexions entre ETM.

Nous pensons qu'il est nécessaire pour l'apprentissage des élèves que l'enseignant prenne en compte, et soit conscient, de l'ETM développé et des paradigmes en jeu afin de pouvoir les contrôler. Nous ne postulons pas a priori que le changement de domaine soit une difficulté lors de la résolution d'un problème mais plutôt qu'il s'agit d'une richesse des mathématiques.

Dans certains cas, nous avons utilisé la vidéo, en complément, pour préciser le travail des élèves et relever la part du travail dont ils sont responsables. En particulier, ont-ils la responsabilité de penser au changement de domaine, ou bien est-ce annoncé plus ou moins explicitement ? Ont-ils la responsabilité d'effectuer ce changement de domaine ? ou bien est-ce l'enseignant qui l'effectue ? L'usage de vidéo est essentiel pour répondre à ces questions car l'énoncé seul ne peut permettre d'y répondre (Robert, 2008). L'usage de vidéos apparaît comme un point méthodologique important que nous n'avons pas abordé dans cet article.

Enfin, nous n'avons traité ici que des changements de domaine impliquant la géométrie. Mais des changements impliquant d'autres domaines sont envisageables ce qui ouvre de nouvelles perspectives de recherche. Le point de vue adopté dans cet article pourrait en effet permettre de renouveler les questions sur la transition arithmétique/algèbre en l'étudiant sous l'angle d'un changement de domaine entre le domaine du nombre et de l'algèbre. On peut aussi penser à une étude sur les connexions entre les domaines des probabilités et de l'analyse qui est une question d'actualité en France.

Reconnaissances
Financement partiel à travers du Projet de recherche du Fonds National Développement Scientifique et Technologique (FONDECYT) 1110988, Chili.
Cet article s'inscrit dans le projet ECOS-Sud C13H03 entre la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chili) et l'Université Paris Diderot (France).

Bibliographie

Barrera, R. (2012). *Études des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*, Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot-Paris 7.

Barrera, R. (2011). Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique, *Petit x*, 85.

Bullynck, M. (2009). Decimal Periods and their Tables: A German Research Topic (1765-1801), *Historia Mathematica, 36*(2), 137-160.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherche en Didactique des Mathématiques. 7*(2), 5-31.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de L'Apprentissage de la Géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Éditions Peter Lang, coll. Exploration, Recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.

Houdement C., Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Houdement C., Kuzniak A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x, 51*, 5-21.

Jacquier, I. (1995). Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième ?, *Petit x, 41*, IREM de Grenoble.

Kahane, J.-P. (2002), *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Odile Jacob.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A. (à paraître). Travail mathématique et domaines mathématiques, *RELIME*.

Kuzniak, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en france, in *Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques*, Gagatsis, A., Kuzniak, A. Deliyianni, E. & Vivier, L. éditeurs. Lefkosia, Chypre.

Kuzniak, A., Parzysz, B. & Vivier, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training, *The Mathematics Enthusiast, Special Issue : International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education*, Guest Edited by Manuel Santos-Trigo & Luis Moreno-Armella, *10*, 1 & 2, 407-440.

Montoya-Delgadillo, E. (2010). *Etude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili*. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot-Paris 7.

Montoya-Delgadillo, E. (à paraître). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial, *Revista Enseñanza de las Ciencias*.

Montoya-Delgadillo, E, Mena-Lorca, A, Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, *17* (4-I), 191-210.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2010). Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce, in *Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire,* Actes du 5e colloque A.S.I., J.-C. Régnier, F. Spagnolo, B. Di Paola & R. Gras éds, Palermo 2010.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (à paraître). Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve, *RELIME.*

Nikolantonakis et Vivier (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis, *MENON: Journal of Educational Research,* http://www.kosmit.uowm.gr/site/journal (ISSN: 1792-8494) Full article: ISSUE 2a, 2013 (99-114).

Peirce, C. (1978). *Ecrits sur le signe.* Paris, France: Seuil.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas, México.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Éd. Armand Colin.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (45-68), Toulouse : Octarès.

Tall, D. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 195 – 215. 2006, IREM de Strasbourg.

ELIZABETH MONTOYA DELGADILLO
emontoya@ucv.cl

LAURENT VIVIER
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr